Simonovits András: BME Matematikai Intézet

MIKROÖKONÓMIAI VÁZLAT[1]

MTA, Közgazdaságtudományi Intézet
Budapest, Budaörsi út 45, 1112
e-mail: simonov@econ.core.hu
2012. január 10.

[1] Elsősorban Walter Nicholson: Microeconomic Theory 2nd ed. The Dryden Press, Hinsdale, IL., 1978 könyv alapján

TARTALOMJEGYZÉK

I. RÉSZ. BEVEZETÉS 1

1. Előszó
2. Feltétel nélküli és feltételes szélsőérték

II. RÉSZ. FOGYASZTÁS 4

3. Hasznosságmaximalizálás
4. Az egyéni kereslet
5. Piaci kereslet
6. Fogyasztói viselkedés bizonytalanságban

III. RÉSZ. TERMELÉS 10

7. Termelési függvények
8. Költségek
9. Profitmaximalizálás

IV. RÉSZ. ÁRAK A TERMÉKPIACON 14

10. Tökéletes versenyzői áralakulás rövid távon
11. Tökéletes versenyzői áralakulás hosszú távon
12. Áralakulás a monopolista piacokon
13. Duopólium és oligopólium

V. RÉSZ. ÁRALAKULÁS A TERMELÉSI TÉNYEZÖK PIACÁN 20

14. Tényezőárak a tökéletes versenynél
15. Tényezőárak tökéletlen piacokon
16. A munkaerőpiac
17. Tőke

VI. RÉSZ. ÁLTALÁNOS EGYENSÚLY ÉS JÓLÉT 24

18. Gazdasági hatékonyság
19. Jóléti közgazdaságtan
20. A tökéletes verseny hatékonysága

VII. RÉSZ. KORMÁNYZAT 33

21. A kormányzat elmélete
22. Külső hatások és tulajdonjogok

FÜGGELÉKEK 35

FELADATOK 42

FELADATMEGOLDÁSOK 45

IRODALOM 52

I. RÉSZ. BEVEZETÉS

1. Előszó

A közgazdaságtan uralkodó áramlata a *neoklasszikus elmélet*, amely feltételezi, hogy a gazdaságban az árak (beleértve a béreket és a kamatlábakat) rugalmasan reagálnak a kereslet és a kínálat eltéréseire, általában egyensúly van. Ez a feltevés nyilvánvalóan nem volt érvényes a szocialista gazdaság hiánypiacain, és nem érvényes a fejlett piacgazdaságok bizonyos szektoraiban, például a munkapiacokon. Minden hiányossága ellenére ezzel az elmélettel foglalkozunk, mert egyelőre nincs más.

A közgazdaságtan hagyományosan két nagy területre osztható: *mikroökonómia* és *makroökonómia*. Az előbbiben az egyének és a vállalatok egyedi viselkedését vizsgáljuk, az utóbbiban viszont az egyének és a vállalatok tömeges viselkedéséből eredő szabályosságokat. Ebben a jegyzetben a mikroökonómiába vezetem be az olvasót, de van némi átfedés a makroökonómiával. A tartalomjegyzék eligazítást ad a témakörökről. A jelölések angol elnevezések rövidítésén alapulnak, ezért gyakran megadom az angol eredetit is.

Felhívom az olvasó figyelmét, hogy a jegyzet legvégén válogatott irodalomjegyzék található, Magyarországon részben elérhető irodalommal. Előtte feladatsorozatok találhatók, kidolgozott megoldásokkal.

Ezt a jegyzetet először 1987-ben adtam elő, a szocializmus végnapjaiban. Néhány utalás található az akkor még hivatalosan érvényben lévő, de egyáltalán nem érdektelen marxista közgazdaságtanra, egy-két feladat pedig az akkori viszonyokat tükrözi. Nem tartottam szükségesnek az említett korjegyek eltávolítását, mindössze múlt időbe tettem őket.

2. Feltétel nélküli és feltételes szélsőérték

Szükségünk lesz a következő matematikai segédeszközökre.

2.1. tétel. *(Burkológörbe-tétel.) Legyen $f(c,x) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sima függvény, ahol $c \in [0, C]$ a paraméterérték és $x \in [0, X]$ a valós változó. Tegyük föl, hogy minden c értékre létezik egy belső maximumhely, jele $x(c)$, illetve $f^*(c) = \max_x f(c,x)$. Ekkor a maximumérték változási rátája olyan, mintha csak a paraméterérték változna:*

$$f^{*\prime}(c) = f'_c(c, x(c)).$$

Bizonyítás. Definició szerint $f^*(c) = f(c, x(c))$. Vegyük a függvény teljes deriváltját c szerint és vegyük figyelembe, hogy a maximumban $f'_x(c, x(c)) = 0$. Ekkor

$$f^{*\prime}(c) = f'_c(c, x(c)) + f'_x(c, x(c))x'(c) = f'_c(c, x(c)).$$

∎

2.1. példa. Legyen $f(c,x) = cx - x^2$. Ekkor $x(c) = c/2$, $f^*(c) = c^2/4$, azaz $f^{*\prime}(c) = c/2$, míg $f'_c(c, x(c)) = x(c) = c/2$.

Szükségünk lesz a következő tételre.

2.2. tétel. *(Implicit függvény tétele.) Legyen* $f(x, y)$ *egy sima* $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *függvény, ahol* (x_0, y_0) *az* $f(x, y) = 0$ *implicit egyenlet gyöke:* $f(x_0, y_0) = 0$. *Tegyük fel, hogy* $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. *Ekkor e pont környezetében létezik egy olyan* $y(x)$ *explicit függvény, amely megoldása az implicit függvénynek:* $f(x, y(x)) = 0$, $y(x_0) = y_0$, *és deriváltja e kitüntetett pontban*

$$y'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Bizonyítás. Az explicit függvény létezésének és deriválhatóságának a bizonyítása nehezebb feladat, itt csupán a deriváltat határozzuk meg. Vegyük az $f(x, y(x)) = 0$ egyenlet két oldalának x szerinti teljes deriváltját:

$$f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x) = 0,$$

ahonnan az eredmény már adódik. ∎

2.2. példa. Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ az implicit függvény, és legyen $-1 < x_0 < 1$, $x_0^2 + y_0^2 = 1$, $y_0 > 0$. Ekkor létezik az explicit függvény: $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$, amely átmegy az (x_0, y_0) ponton, és deriváltja

$$y'(x) = -\frac{2x_0}{2y_0} = -\frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

1. következmény. *Tegyük föl, hogy a 2.1–2. tétel feltevésein túl teljesül még* $f''_{cc} < 0 < f''_{cx}$. *Ekkor a maximumhely a paraméterértéknek növekvő sima függvénye:*

$$x'(c) = -\frac{f''_{cc}}{f''_{cx}} > 0.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.2. tételt az $f'_x(c, x(c)) = 0$ implicit függvényre. ∎

A feltétel nélküli maximalizásáról továbblépünk a feltételes maximalizálás irányába.

2.3. tétel. *(Feltételes szélsőérték-számítás Lagrange-módszerrel.) Legyen* $f(x, y)$, $g(x,y) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *egy-egy sima (folytonosan differenciálható) függvény. Ha az* f *függvénynek a* $g = 0$ *feltétel mellett az* (x°, y°) *pontban lokális (feltételes) maximuma van, és* $g'_y(x^\circ, y^\circ) \neq 0$, *akkor alkalmas* λ° *valós szám esetén az*

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \tag{2.1}$$

Lagrange-függvénynek az (x°, y°) *pont stacioner pontja:*

$$L'^{\circ}_x = 0 \qquad \text{és} \qquad L'^{\circ}_y = 0. \tag{2.2}$$

Megjegyzések. 1. A módszer előnyös, ha nem lehet könnyen kifejezni g-ből y-t mint x függvényét, vagy elrontaná a feladat szimmetriáját.

2. A feladatot könnyen általánosíthatjuk arra az esetre, ha x vektor n-dimenziós és y vektor m-dimenziós, természetesen ekkor $f : \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}$ és $g : \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^m$, valamint λ vektor m-dimenziós.

Bizonyítás. Az implicit függvény tétele értelmében az (x^o, y^o) pont környezetében létezik egy $y = h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sima függvény, amelyre $g(x, h(x)) \equiv 0$ és $h'(x) = -g'_x(x, h(x))/g'_y(x, h(x))$. Helyettesítsük be h-t f-be: $F(x) = f(x, h(x))$, és deriváljuk F-et x szerint. A belső optimumban $F'(x) = f'_x(x, h(x)) + f'_y(x, h(x))h'(x) = 0$. Behelyettesítve $h'(x)$-t: $F'(x) = f'_x(x, h(x)) - g'_x(x, h(x))/g'_y(x, h(x))f'_y(x, h(x)) = 0$. Legyen $\lambda = -f'_y(x^o, h(x^o))/g'_y(x^o, h(x^o))$, s ekkor $L'_y(x^o, y^o) = 0$ azonosság és $F'(x^o) = 0$ ekvivalens $L'_x(x^o, y^o) = 0$-val. ∎

Megjegyzés. A (2.2) egyenlet szükséges, de általában nem elégséges a feltételes szélsőértékhez.

2.4. tétel. *Legyen $f(x, y)$ célfüggvény konkáv és legyen $g(x, y)$ feltételfüggvény lineáris. Ha (2.2) teljesül, akkor az f függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett az (x^o, y^o) pontban feltételes maximuma van.*

Megjegyzés. A 2.4. tétel feltételei enyhíthetők, de ehhez be kell vezetnünk a kvázikonkáv függvény fogalmát.

Definíció. Az $f(x, y)$ függvény *kvázikonkáv*, ha minden szintvonala konvex, azaz minden c-re az $f(x, y) = c$ egyenletet kielégítő $y(c, x)$ görbe konvex.

Akárcsak a konkáv függvényeknél, a kvázikonkáv függvényeknél is igaz, hogy a rájuk vonatkozó maximumfeladatoknál a lokális maximum egyben globális is. Természetesen egy konkáv függvény kvázikonkáv. A kvázikonkáv függvények valóban általánosítják a konkáv függvényeket abból a szempontból, hogy az előbbieknek bármely monoton transzformáltja is kvázikonkáv, míg az utóbbiaknál a transzformált lehet nem konkáv is.

2.5. tétel. *Legyen $f(x, y)$ célfüggvény kvázikonkáv és legyen $g(x, y)$ feltételfüggvény konvex. Ha (2.2) teljesül, akkor az f függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett az (x^o, y^o) pontban feltételes maximuma van.*

A közgazdasági feladatokban különösen érdekes kérdés: hogyan változik a célfüggvény értéke a korlát változásakor? Erre válaszol a

2.6. tétel. *Tegyük föl, hogy a feltételes maximumfeladatnak belső optimuma van egy megfelelő I paraméterintervallumban. Legyen a feladat parametrikus maximumhelye $(x^*(c), y^*(c))$ sima függvény, és a maximumérték-függvény*

$$f^*(c) = f(x^*(c), y^*(c)). \tag{2.3}$$

Ekkor a maximumérték lokális változása a c korlát parányi dc változásánál λdc. Képletben:

$$\lambda(c) = f^{*\prime}(c). \tag{2.4}$$

Bizonyítás. Vegyük (2.3) c szerinti totális deriváltját:

$$\frac{df^*(x^*(c), y^*(c))}{dc} = f_x^{*\prime} x^{*\prime}(c) + f_y^{*\prime} y^{*\prime}(c).$$

(2.2′)-t figyelembe véve:

$$\text{(2.5)}\qquad \frac{df^*(x^*(c),y^*(c))}{dc}=\lambda^*(c)[g_x^{*\prime}x^{*\prime}(c)+g_y^{*\prime}y^{*\prime}(c)].$$

A $g(x^*(c),y^*(c))\equiv c$ azonosságnak vegyük a totális deriváltját:

$$\text{(2.6)}\qquad g_x^{*\prime}x^{*\prime}(c)+g_y^{*\prime}y^{*\prime}(c)=1.$$

(2.6)-ot behelyettesítve (2.5)-be, adódik (2.4). ∎

2.3. példa. Tekintsük a legrégibb feltételes maximumfeladatot: $f(x,y)=xy$, $x+y=c$. Ekkor elemi meggondolásból is következik, hogy $x^*(c)=y(c)^*=c/2$. A Lagrange-módszer szerint $L'_x=y-\lambda=0$, $L'_y=x-\lambda=0$, azaz $x=\lambda=y$, azaz a korlátba behelyettesítve

$$x^*(c)=y^*(c)=\lambda(c).$$

Ezért $f^*(c)=c^2/4$, $f^{*\prime}(c)=c/2=\lambda(c)$.

II. RÉSZ. FOGYASZTÁS

A mikroökonómia kedvelt fogása, hogy a termeléstől eltekint, rögtön a fogyasztást vizsgálja.

3. Hasznosságmaximalizálás

Tegyük föl, hogy a *fogyasztó* két áru, X és Y különböző (X,Y) kombinációi között választhat. Van egy $U(X,Y):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ kvázikonkáv *hasznosságfüggvény*e, amely skalárként kifejezi a kombinációk értékét és amelyet a fogyasztó maximalizálni akar. *Jövedelme* I, a két termék *egységára* rendre P_X és P_Y, mindhárom szám pozitív. A fogyasztó *költségvetési korlátja*

$$\text{(3.1)}\qquad P_XX+P_YY=I,$$

s a fogyasztó e feltétel mellett maximalizálja az $U(X,Y)$ hasznosságfüggvényt. A 2.3–2.4. tétel szerint igaz a

3.1. tétel. *a) A fogyasztó azt az* (X°,Y°) *párt választja, amelyre a határhasznok és az árak aránya egyezik:*

$$\text{(3.2)}\qquad \frac{U'_X}{U'_Y}=\frac{P_X}{P_Y}.$$

b) Ha ilyen pont nincs, akkor vagy

$$\text{(3.3)}\qquad \frac{U'_X}{U'_Y}<\frac{P_X}{P_Y},\qquad \text{tehát}\qquad X^\circ=0\qquad \text{és}\qquad Y^\circ=\frac{I}{P_Y},$$

vagy

$$\text{(3.4)}\qquad \frac{U'_X}{U'_Y}>\frac{P_X}{P_Y},\qquad \text{tehát}\qquad Y^\circ=0\qquad \text{és}\qquad X^\circ=\frac{I}{P_X}.$$

Megjegyzés. A (3.2) feltétel csak a belső optimumra vonatkozik, a (3.3)–(3.4) feltételek viszont a sarokoptimumokra.

Definíciók. 1. Az U hasznosságfüggvény szintvonalait *közömbösségi görbé*knek nevezzük.

2. Legyen $Y(c, X)$ a c-paraméterű közömbösségi görbe egyenlete, ekkor Y-nak X-szel való *helyettesítési határaránya* (angolul: Marginal Rate of Substitution) a közömbösségi görbe meredeksége. Képletben:

$$\text{MRS} = -\frac{dY}{dX}. \tag{3.5}$$

3.2. tétel. *A helyettesítés határaránya egyenlő a határhasznok hányadosával:*

$$\text{MRS} = \frac{U'_X}{U'_Y}. \tag{3.6}$$

Megjegyzés. Mivel a közömbösségi görbék konvexek, meredekségük csökken.

3.1. példa. (Részleges helyettesíthetőség.) a) Legyen $U(X, Y) = X^\alpha Y^\beta$. Ekkor a 3.2. tétel alapján MRS $= \alpha X^o/\beta Y^o$, ami a 3.1. tétel szerint P_X/P_Y-nal egyenlő. $X^o = \alpha I/(\alpha+\beta)P_X$ és $Y^o = \beta I/(\alpha+\beta)P_Y$. Figyelemre méltó, hogy X^o független P_Y-tól, és a két árura költött összeg aránya azonos α/β-val. Ez a példa a fogyasztáselmélet alappéldája, és rajta minden állítást szemléltetni lehet.

b) Legyen τ az a jövedelemadó-kulcs, amely $T > 0$ adót hoz: $T = \tau I$. Ekkor a módosult optimum

$$X^o = (1-\tau)X^o, \qquad Y^o_\tau = (1-\tau)Y^o \qquad \text{és} \qquad U^o_\tau = (1-\tau)U^o.$$

c) Legyen $\theta > 0$ olyan speciális termékadó, amely csak az X áru árára rakódik rá, de ugyanannyi adót hoz. $\theta P_X X^o_\theta = T$. Egyszerű számolással: $\theta = \tau/(\alpha - \tau)$, ahol $\alpha > \tau$.

$$X^o_\theta = \frac{X^o}{1+\theta}, \qquad Y^o_\theta = Y^o \qquad \text{és} \qquad U^o_\theta = \left(1 - \frac{\tau}{\alpha}\right)^\alpha U^o.$$

∎

3.2. példa. (Tökéletes helyettesíthetőség.) Legyen $U(X, Y) = \alpha X + \beta Y$. Ekkor $X^o = I/P_X$ és $Y^o = 0$, ha $\alpha/\beta > P_X/P_Y$, ill. $Y^o = I/P_Y$ és $X^o = 0$, ha $\alpha/\beta < P_X/P_Y$. Ha $\alpha/\beta = P_X/P_Y$, akkor az optimum teljesen határozatlan. ∎

3.3. példa. (Tökéletes helyettesíthetetlenség.) $U(X, Y) = \min(aX, bY)$. Ekkor $X^o = bI/(bP_X + aP_Y)$ és $Y^o = aI/(bP_X + aP_Y)$. Ez a példa több okból is nevezetes: a) éppen az optimumban nem sima a hasznossági/közömbösségi görbe; b) hiányzik a 4.2. tétel előtt említendő helyettesítési hatás. ∎

Megjegyzések. 1. Nagyon egyszerű kiterjeszteni az elemzést 2 termékről n termékre. Ajánlom a hallgatóknak, hogy gyakran végezzék el ezt a kiterjesztést.

2. A közgazdászokat sokáig nagyon zavarta, hogy milyen alapon tehetik föl egy ún. *kardinális* hasznosságfüggvény létezését. A 20. század elején Pareto belátta, hogy

elegendő a közömbösségi görbék létezését megkövetelni: *ordinális megközelítés*, sőt az 1950-es években elterjedt a *preferenciarendezések* vizsgálata, ahol csupán áruhalmazokat kell összehasonlítani. Föltesszük, hogy a fogyasztó számára vagy az 1. csomag *legalább olyan előnyös*, mint a 2. csomag, jele: $(X_1, Y_1) \succeq (X_2, Y_2)$, vagy fordítva. Két áruvektor *közömbös* a rendezésben, ha mindkét irányú rendezés teljesül. Képletben: $(X_1, Y_1) \sim (X_2, Y_2)$, ha $(X_1, Y_1) \succeq (X_2, Y_2)$ és $(X_2, Y_2) \succeq (X_1, Y_1)$. Ugyanakkor kiderült (Debreu, 1954), hogy a folytonos preferenciarendezések *reprezentálhatók* hasznosságfüggvényekkel, azaz van olyan $U : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre $(X_1, Y_1) \succeq (X_2, Y_2)$ pontosan akkor teljesül, ha $U(X_1, Y_1) \geq U(X_2, Y_2)$. A kör bezárult. Most a tételt a legegyszerűbb alakjában mondjuk ki és bizonyítjuk. De ehhez segítségül hívjuk a rendezés *szigorú monotonitását* is, ami azt jelenti, hogy ha $(X_1, Y_1) \geq (X_2, Y_2)$, de $(X_1, Y_1) \neq (X_2, Y_2)$, akkor $(X_1, Y_1) \succeq (X_2, Y_2)$.

3.3. tétel. *(Debreu, 1954.) Tegyük föl, hogy a preferenciarendezés teljes, reflexív, tranzitív, folytonos és szigorúan monoton. Ekkor létezik egy folytonos hasznosságfüggvény, amely reprezentálja az adott rendezést.*

Bizonyításvázlat. Feleltessük meg az (X, Y) párnak azt a valós $U(X, Y)$ számot, amelyre $(X, Y) \sim U(X, Y)(1, 1)$. (Feltevéseink szerint pontosan egy ilyen szám van.) A reprezentativitás a következőképpen bizonyítható: Tegyük föl, hogy $(X_1, Y_1) \succeq (X_2, Y_2)$. Ekkor $(X_1, Y_1) \sim U(X_1, Y_1)(1, 1)$ és $(X_2, Y_2) \sim U(X_2, Y_2)(1, 1)$, s a tranzitivitás és a monotonitás miatt $U(X_1, Y_1) \geq U(X_2, Y_2)$, stb. ∎

3.4. példa. (Lexikografikus rendezés.) Tegyük föl, hogy a fogyasztó az (X, Y) vektorokat a következőképpen rendezi: $(X_1, Y_1) \succeq (X_2, Y_2)$ pontosan akkor, ha vagy $X_1 \geq X_2$ vagy $X_1 = X_2$ és $Y_1 \geq Y_2$. Gondoljuk meg, hogy ez a rendezés nem reprezentálható semmilyen folytonos hasznosságfüggvénnyel sem. ∎

4. Az egyéni kereslet

A 3. fejezetben mind az árakat, mind a jövedelmet rögzítettnek vettük. Most feloldjuk e feltevést és változatjuk e piaci paramétereket. A *komparatív statika* elvét alkalmazva, nem törődünk a két egyensúlyi állapot közti folyamatokkal. Bevezetjük a következő fogalmat.

Definíció. Az $X(P_X, P_Y, I) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ függvény az X termék iránti *keresleti függvénye.*

4.1. tétel. *Az X keresleti függvény 0-adfokú homogén függvény:*

$$X(\mu P_X, \mu P_Y, \mu I) = X(P_X, P_Y, I), \qquad \mu > 0. \tag{4.1}$$

Definíciók. 1. Az $X(I)$ kereslet-jövedelem függvényt *Engel-görbé*nek nevezzük. Ha egy áru Engel-görbéje csökkenő, akkor az árut *alacsonyrendű áru*nak nevezzük, egyébként *normális*nak.

2. Ha az X termék P_X árát ∂P_X-szel megnöveljük, akkor a termék iránti kereslet ∂X változása a teljes derivált tétele értelmében két részre bontható: (i) a *helyettesítési hatás*ra és (ii) a *jövedelmi hatás*ra. Az első hatásnál föltesszük, hogy a fogyasztó

vásárlóerőcsökkenését rugalmasan kompenzáljuk, hogy a korábbi közömbösségi görbén maradhasson, s így alkalmazkodhasson a megváltozott árarányokhoz. A második hatás kiszámításánál az első hatáshoz viszonyítunk, s az alkalmazkodás rögzített árarányoknál, de csökkenő vásárlóerő (reáljövedelem) mellett megy végbe.

4.2. tétel. *(Szluckij, 1915.) A fönt leírt felbontásban a helyettesítési hatás nagysága* $(\partial X/\partial P_X)\big|_{U=\mathrm{const}}$ *és a jövedelemhatás nagysága* $-X\partial X/\partial I$*, azaz az összhatás*

$$\frac{\partial X}{\partial P_X} = \frac{\partial X}{\partial P_X}\bigg|_{U=\mathrm{const}} - \frac{\partial X}{\partial I}X.$$

Bizonyításvázlat. Írjuk föl a következő szimbolikus azonosságot.

$$X(P_X, P_Y)\Big|_{U=\mathrm{const}} \equiv X(P_X, P_Y, I(P_X, P_Y))$$

Vegyük az azonosság P_X szerinti deriváltját és alkalmazzuk a teljes deriválás szabályát a jobb oldalon:

$$\frac{\partial X}{\partial P_X}\bigg|_{U=\mathrm{const}} \equiv \frac{\partial X(P_X, P_Y, I(P_X, P_Y))}{\partial P_X} + \frac{\partial X(P_X, P_Y, I(P_X, P_Y))}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial P_X}.$$

A második tag második tényezője $-X$-szel egyenlő, stb. ∎

Megjegyzés. A helyettesítési hatás mindig negatív, (mert MRS csökkenő!), de a jövedelmi hatás lehet pozitív is, negatív is. Ha a jövedelmi hatás pozitív és nagyobb, mint a helyettesítési hatás, akkor áremelkedésre nő a kereslet (Giffen-paradoxon).

Hasonló felbontás érvényes a keresztárhatásra: $\partial Y/\partial P_X$.

Definíció. Az X és Y termékek *helyettesítik /kiegészítik* egymást, ha a kereszthelyettesítési hatás negatív/pozitív.

Megjegyzés. Figyelemre méltó, hogy a kereszt-helyettesítési hatások szimmetrikusak ($E_{X,P_Y} = E_{Y,P_X}$), mert sima függvényekre $U''_{XY} = U''_{YX}$. Ez az egyetlen pont, ahol fölhasználjuk, hogy a keresleti függvények maximalizálási feladatból származnak.

Legegyszerűbben két csoportra oszthatjuk a kiadásokat: létszükségleti és választható. Minél gazdagabb valaki, annál kisebb arányban költ élelemre, fűtésre, stb. és aránylag annál többet költ turizmusra, vendéglőre, stb.

4.1. példa. $U(X, Y) = X^\alpha Y^{1-\alpha}$ Cobb–Douglas-hasznosságfüggvénynél a Szluckij-egyenlet a következő alakot ölti:

$$-\alpha\frac{I}{P_X^2} = \alpha(\alpha-1)\frac{I}{P_X^2} - \frac{\alpha}{P_X}\frac{\alpha I}{P_X}.$$

∎

5. Piaci kereslet

Az egyéni keresleti függvények (X_h) összegzéséből adódik a piaci keresleti függvény: $X = \sum_{h=1}^{H} X_h$.

5.1. példa. Legyen a h-adik fogyasztó Cobb–Douglas-függvényében $\alpha_h + \beta_h = 1$, ekkor

$$X(I) = \sum_{h=1}^{H} \frac{\alpha_h I_h}{P_X}.$$

Az átlagos kereslet akkor és csak akkor független a jövedelemeloszlástól, ha $\alpha_h \equiv= \alpha$:

$$\frac{X(I)}{H} = \frac{\alpha}{P_X} \frac{I}{H}.$$

Definíciók. Az U változó V változó szerinti *rugalmassága* a százalékos változások hányada. Képletben:

$$\varepsilon_{U,V} = \frac{dU}{dV}\frac{V}{U} = \frac{d\log U}{d\log V}, \qquad \text{vagy} \qquad U = aV^E. \tag{5.1}$$

Az ε_{X,P_X}, ill. ε_{X,P_Y} *árrugalmasság*ok mellett szerepeltetjük még az $\varepsilon_{X,I}$ *jövedelemrugalmasság*ot is, valamint a költség-jövedelem hányadost: $\sigma_X = P_X X/I$.

A következő táblázat adatai Nicholson, 140. o.-ról származnak és a hetvenes évek elejének Amerikájára vonatkoznak.

5.1. táblázat. *Jellemző jövedelem- és árrugalmasságok*

Árucikk	Jövedelem rugalmasság	Ár rugalmasság
Élelem	0,28	–0,21
Orvosi ellátás	0,22	–0,20– –0,50
Gépkocsi	3,00	–1,20
Lakás		
bérelt	1,00	–0,18
saját	1,20	–1,20
Benzin	1,06	–0,54
Villamosáram	0,61	–1,14
Jótékonyság	0,70	–1,29
Sör	0,93	–1,13
Marihuána	0	–1,50

5.2. táblázat. *Jellemző saját- és keresztárrugalmasságok*

	Árváltozás		
Kereslet	Élelmiszer	Cipő és ruházat	Utazás és távközlés
Élelmiszer	–0,37	–0,03	–0,12
Cipő és ruházat	0,19	–0,30	–0,23
Utazás és távközlés	0,42	–0,01	–0,61

Megjegyzés: Az adatok Begg, 81. o.-ról származnak és az 1900–70-es évek közti Nagy-Britanniájára vonatkoznak.

A többváltozós függvények elméletében nagyon fontos szerepet játszanak az ún. homogén függvények.

Definíció. Legyen m egy valós szám. Egy $f(x,y)$ kétváltozós–skalár függvényt *m-edfokú homogén*nak nevezünk, ha tetszőleges pozitív μ-re $f(\mu x, \mu y) = \mu^m f(x,y)$.

Euler tétele: *Ha az $f(x,y)$ függvény m-adfokú homogén függvény, akkor $f_x'x + f_y'y = mf(x,y)$.*

Bizonyítás. Teljes deriválás μ szerint: $f_x'^*x + f_y'^*y = m\mu^{m-1}f(x,y)$, ahol a * jel a megváltoztatott helyettesítési értékre utal. Behelyettesítve $\mu = 1$-et, adódik az állítás. ∎

Euler tételéből következik az

5.1. tétel. *A keresleti rugalmasságok közt fönnállnak a következő összefüggések:*

(5.2) $$\varepsilon_{X,P_X} + \varepsilon_{X,P_Y} + \varepsilon_{X,I} = 0$$

és

(5.3) $$\sigma_X \varepsilon_{X,I} + \sigma_Y \varepsilon_{Y,I} = 1.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az Euler-tételt a 0-fokú keresleti függvényre, illetve deriváljuk a költségvetési feltételt a jövedelem szerint:

$$\frac{\partial X}{\partial P_X} P_X + \frac{\partial X}{\partial P_Y} P_Y + \frac{\partial X}{\partial I} I = 0$$

és

$$P_X \frac{\partial X}{\partial I} + P_Y \frac{\partial Y}{\partial I} = 1.$$

∎

5.2. példa. A 3.1. példán szemléltetjük eredményeinket: $\varepsilon_{X,P_X} = -1$, $\varepsilon_{Y,P_Y} = 0$ és $\varepsilon_{X,I} = 1$.

Ha a paraméterek az összs egyénre azonosak, akkor létezik olyan, ún. *reprezentatív fogyasztó*, amely átlagjövedelem mellett képviseli az egész társadalmat. Valóban:

$$X = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{I}{P_X} \qquad \text{és} \qquad Y = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{I}{P_Y}.$$

∎

6. Fogyasztói viselkedés bizonytalanság esetén

Bizonytalanság esetén bonyolultabbá válik a haszonmaximalizálás. A közgazdasági függelékben részletesen foglalkozunk a kérdéssel.

III. RÉSZ. TERMELÉS

Ebben a részben kilépünk a fogyasztás szűkre szabott világából és bekapcsoljuk a termelést.

7. Termelési függvények

Először megnézzük, hogy miből mit lehet termelni.

Definíciók. 1. A $Q = F(K, L) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sima függvényt *termelési függvény*nek nevezzük, ahol K a tőke-, L a munka- és Q a termék mennyisége.

2. A *tőke határtermelékenysége* (Marginal Productivity of Capital: MP_K) F'_K, a *munka határtermelékenysége* (Marginal Productivity of Labor: MP_L) F'_L, ahol F'_x az F függvény x-szerinti parciális deriváltja.

3. *Átlagtermelékenység* (Average Productivity of Labor): $\mathrm{AP}_L = Q/L$.

7.1. tétel. *Adott tőke esetén a termelékenység akkor és csak akkor maximális, ha a határ- és az átlagtermelékenység egyenlő:*

$$\mathrm{MP}_L^{\mathrm{o}} = \mathrm{AP}_L^{\mathrm{o}}. \tag{7.1}$$

Bizonyítás. A minimum elsőrendű elégséges feltétele:

$$\left(\frac{Q}{L}\right)' = \frac{F'_l L - q \cdot 1}{L^2} = 0$$

∎

Megjegyzés. A termelési függvény makroszintű alkalmazása a következő hibás kört rejti magában (vö. Robinson (1953)): (i) kamatláb=tőke határtermelékenysége, (ii) tőke =hozam/kamatláb.

Definíciók. 1. *Azonos-kibocsátás görbé*nek (izokvantnak) nevezzük a termelési függvény szintvonalait. Jele: $K(Q, L)$, ahol Q a kibocsátásparaméter. (Vigyázat: hagyományosan L a vízszintes, és K a függőleges tengely!)

2. *Tőke munkával való technikai helyettesítési határaránya* (Rate of Technical Substitution, RTS) a $K(L)$ izokvant meredeksége:

$$\mathrm{RTS} = -\frac{dK}{dL}. \tag{7.2}$$

7.2. tétel. *A tőke munkával való technikai helyettesítési határaránya a munka és a tőke határtermelékenységének arányával egyenlő:*

$$\text{RTS} = \frac{F'_L}{F'_K}. \tag{7.3}$$

Definíciók. (Skálahozadékok.) Tegyük föl, hogy az eredeti (K, L) tőke/munka párt μ-szeresére növeljük, ahol μ egy 1-nél nagyobb tetszőleges pozitív szám. 1. Ha a kibocsátás is μ-szeresére nő, akkor *állandó skálahozadék*ról beszélünk. 2. Ha a kibocsátás kevesebb, mint μ-szeresére nő, akkor *csökkenő skálahozadék*ról beszélünk (pl. luxustermékeknél). 3. Ha a kibocsátás több, mint μ-szeresére nő, akkor *növekvő skálahozadék*ról beszélünk (pl. autógyártásnál).

4. A *tőke-munka helyettesítési rugalmasságá*t a következőképp határozzuk meg. Kiválasztunk egy izokvantot, s megnézzük, hogyan aránylik a tőke–munka-hányados L-rugalmassága a technikai helyettesítési határarány L-rugalmasságához. Képletben:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_{K/L,\,L}}{\varepsilon_{\text{RTS},\,L}}. \tag{7.4}$$

7.1. példa. (Cobb–Douglas-féle termelési függvény.) $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$, azaz $\sigma = 1$. Állandó skálahozadék: $\alpha + \beta = 1$, növekvő (csökkenő) skálahozadék: $\alpha + \beta > (<) 1$. $\text{MP}_K = \alpha Q/K$, $\text{MP}_L = \beta Q/L$. $\varepsilon_{Q,\,K} = \alpha$, $\varepsilon_{Q,\,L} = \beta$. ∎

7.2. példa. (Tökéletes helyettesíthetőség.) $F(K, L) = \alpha K + \beta L$. $\sigma = \infty$. Állandó skálahozadék. $\text{MP}_K = \alpha$, $\text{MP}_L = \beta$. ∎

7.3. példa. (Leontief) $F(K, L) = \min(aK, bL)$. $\sigma = 0$ (nincs helyettesítés), a legérdekesebb (optimális) pontokon a függvény nem sima. ∎

7.4. példa. (Állandó helyettesítési rugalmasság=Constant Elasticity of Substitution, CES) $Q = \gamma(\delta K^\mu + (1-\delta)L^\mu)^{1/\mu}$, ahol $\gamma > 0$, $0 \le \delta \le 1$ és $\mu \le 1$. $\sigma = 1/(1-\mu)$. Állandó skálahozadék. Speciális esetként tartalmazza a 7.1–7.3. példát: rendre $\mu = 0, 1, -\infty$.

Legyen $k = K/L$ és $P(K, L) = \delta K^\mu + (1-\delta)L^\mu$ és számítsuk ki az RTS-t: az implicit függvény tétele szerint

$$\text{RTS} = -\frac{F'_L(K, L)}{F'_K(K, L)} = \frac{\mu^{-1}P^{1/\mu-1}(1-\delta)\mu L^{\mu-1}}{\mu^{-1}P^{1/\mu-1}\delta\mu K^{\mu-1}} = \frac{1-\delta}{\delta}k^{1-\mu}.$$

Ekkor $\text{RTS} = (1-\delta)k^{1-\mu}/\delta$, az állandót eldobva

$$\varepsilon_{\text{RTS},\,L} = \frac{dk^{1-\mu}}{dL}\frac{L}{k^{1-\mu}} = \frac{(1-\mu)k^{1-\mu}dk}{dL}\frac{L}{k^{-\mu}} = (1-\mu)\varepsilon_{k,\,L}.$$

Osztással: $\sigma = 1/(1-\mu)$. ∎

7.5. példa. (Solow, 1957.) A meg nem testesült technikai haladás legegyszerűbb ábrázolása a következő:

$$Q(t) = Ae^{gt}K(t)^{\alpha}L(t)^{\beta}, \tag{7.6}$$

ahol g a technikai haladás évi üteme. Legyen g_Q, g_K és g_L rendre a termelés-, a tőke- és a munka mennyiségének évi növekedési üteme. Ekkor

$$g_Q = g + \alpha g_K + \beta g_L. \tag{7.7}$$

Számpélda (USA, 1909–1949). $g_Q = 2{,}75\%$, $g_K = 1{,}75\%$, $g_L = 1{,}00\%$, $\alpha = 0{,}35$ és $\beta = 0{,}65$; tehát $g = 1{,}5\%$. ∎

8. Költségek

Legyen w az egységnyi munkára eső bér (pl. órabér), v pedig az egységnyi tőkére jutó bérleti díj. A *teljes költség* (Total Cost, TC) a következő:

$$\mathrm{TC} = wL + vK. \tag{8.1}$$

8.1. tétel. *a) Adott termelési függvénynél adott termékmennyiséget minimális (hosszú távú) költséggel előállító tőke–munka párt belső optimum esetén egyértelműen meghatározza a következő feltétel:*

$$\frac{w}{v} = \mathrm{RTS}. \tag{8.2}$$

b) Ha (8.2) nem teljesíthető, akkor vagy

$$\frac{w}{v} > \mathrm{RTS}, \qquad L^{\circ} = 0 \qquad \text{(teljes automatizálás)}, \tag{8.3}$$

vagy

$$\frac{w}{v} < \mathrm{RTS}, \qquad K^{\circ} = 0 \qquad \text{(teljes kézi munka)}. \tag{8.4}$$

Definíciók. 1. A $K^{\circ}(Q)$ és $L^{\circ}(Q)$ függvénypárt a vállalat *bővítési pályájá*nak nevezzük.

2. *Hosszú/rövid táv*nak nevezzük azt az időszakot, amelyen a vállalat tud/nem tud változtatni a tőkeállományán.

3. *Rövid távú teljes költség* (Short-Run Total Cost): $\mathrm{STC} = vK_1 + wL$, ahol K_1 a rögzített tőkeállomány.

4. *Rövid távú fix költség* (Short-Run Fixed Cost): $\mathrm{SFC} = vK_1$.

5. *Rövid távú változó költség* (Short-Run Variable Cost): $\mathrm{SVC} = wL$.

6. *Átlagköltség* a teljes költség és a kibocsátás hányadosa: $\mathrm{AC} = C/Q$, ahol $C(\cdot)$ tetszőleges költségfüggvény.

7. *Határköltség* a teljes költségfüggvénynek a kibocsátás szerinti deriváltja: $\mathrm{MC} = dC/dQ$.

Feltesszük, hogy $L'(Q)$ először csökken, majd nő. Ebből következően a rövid távú átlag- és határköltségfüggvény U-alakú.

8.2. tétel. *Az átlagköltség minimumában az átlag- és a határköltség megegyezik:*

$$\mathrm{SATC}^{\mathrm{o}} = \mathrm{SMC}^{\mathrm{o}}. \tag{8.5}$$

Definíciók. 1. *Hosszú távú költség*ről beszélünk, (angolul: Long-run Cost, LC) ha nemcsak a munka, de a tőke mennyiség is alkalmazkodik a kereslethez.

2. *Hosszú távú határköltségfüggvény* (angolul: Long-run Marginal Cost, LMC) a hosszú távú költségfüggvény derivált-függvénye: LMC $= d\mathrm{LTC}/dQ$. Lehet csökkenő, állandó és növekvő. A neoklasszikus irodalom általában a növekvő LMC esettel foglalkozik, mert az állandó LMC esetben az optimum gyakran határozatlan, a csökkenő LMC esete pedig monopóliumhoz vezet, de ez nem von le a gyakorlati fontosságukból.

8.1. példa. Legyen a vállalat termelési függvénye $Q = K^{\alpha}L^{\beta}$. LMC csökkenő, állandó, ill. növekvő, ha $\alpha + \beta$ kisebb, egyenlő, ill. nagyobb 1-nél. ∎

8.3. tétel. *Legyen* $\mathrm{STC}(K_1, Q)$ *a* Q *kibocsátás rögzített* K_1 *tőkével való előállításának rövid távú teljes költsége, és legyen* $\mathrm{LTC}(Q)$ *a megfelelő hosszú távú teljes költség. Ekkor*

$$\mathrm{LTC}(Q) = \min[\mathrm{STC}(K_1, Q); K_1] \tag{8.6}$$

Megjegyzés. A 8.3. tétel geometriai jelentése a következő: a hosszú távú teljes költségfüggvény a rövid távú teljes költségfüggvények *burkolója.*

9. Profitmaximalizálás

Az optimális kibocsátás meghatározásánál a legegyszerűbb feltevés a profitmaximalizálás.

Definíciók. 1. A vállalat *árfüggvénye* az ár-kibocsátás függvény: $P(Q)$.

2. A vállalat *bevételfüggvény*e (Revenue) az ár és a kibocsátás szorzata: $R(Q) = P(Q)Q$.

3. A vállalat *profitfüggvénye* a bevétel és a kiadás különbsége: $\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$.

Megjegyzés. A neoklasszikus elméletben a tőke után járó kamat költséget jelent (ellentétben a gyakorlati és a marxi közgazdaságtannal). Ez a felfogás szüli azt a némileg furcsán hangzó feltételt, hogy hosszú távú egyensúlynál a maximalizálandó profit nulla.

9.1. tétel. *A profitmaximalizálás szükséges feltétele (nem triviális esetben) a határbevétel és a határköltség egyenlősége:*

$$R'(Q^{\mathrm{o}}) = C'(Q^{\mathrm{o}}). \tag{9.1}$$

9.2. tétel. *Profitmaximalizálás esetén a bevétel és a költség tőke -és munka szerinti határrátája rendre egyenlő:*

$${R'_K}^{\mathrm{o}} = {C'_K}^{\mathrm{o}} \qquad \text{és} \qquad {R'_L}^{\mathrm{o}} = {C'_L}^{\mathrm{o}}. \tag{9.2}$$

9.3. tétel. *A határbevétel, az ár és az árrugalmasság között a következő kapcsolat érvényes:*

$$\mathrm{MR} = P + \frac{QdP}{dQ} = P\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{Q,\,P}}\right). \tag{9.3}$$

Következmény. *$\varepsilon_{Q,\,P} < -1 \Leftrightarrow \mathrm{MR} > 0$, $\varepsilon_{Q,\,P} = -1 \Leftrightarrow \mathrm{MR} = 0$ és $\varepsilon_{Q,\,P} > -1 \Leftrightarrow \mathrm{MR} < 0$.*

9.1. példa. A kitermelő ágazatokban az árak rugalmasak, a feldolgozó ágazatokban viszont rugalmatlanok. ∎

IV. RÉSZ. ÁRAK A TERMÉKPIACON

Ebben a részben a termékpiaci árak alakulásával foglalkozunk különböző szerkezetű piacokon.

10. Tökéletes versenyzői áralakulás rövid távon

Először a tökéletes versenyt vizsgáljuk, azt is rövid távon.

Definíció. Egy termék piacán *tökéletes verseny* érvényesül, ha 1. nagyszámú, kicsiny, profitmaximalizáló vállalat állítja elő ugyanazt a terméket; 2. minden vállalat ismeri az egységes piaci árat, amelyet nem tud befolyásolni; 3. nagyszámú vevő van a piacon; 4. az eladóknak és a vevőknek nincsenek tranzakciós költségei.

10.1. tétel. *Rövid távon minden vállalat annyit termel, hogy a határköltsége egyenlő legyen a piaci árral:*

$$\mathrm{MR}_i^{\mathrm{o}} = P, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.1}$$

Megjegyzés. Föltesszük, hogy a vállalatok határköltség-függvénye az optimumban növekvő, ekkor (10.1) optimális.

Definíciók. 1. Az i-edik vállalat *rövid távú kínálati görbéje* $S_i(P)$.

2. A *piac kínálati görbéje* a vállalati kínálati görbék összege:

$$S(P) = \sum_i S_i(P). \tag{10.2}$$

3. *Rövid távú kínálati rugalmasság* $ES_{Q,\,P} = (dQ/dP)(P/Q)$.

10.2. tétel. *Tegyük föl, hogy $D = a - bP$ és $S = c + dP$ a piac keresleti-, ill. kínálati függvénye. Ekkor az egyensúlyi ár*

$$P^{\mathrm{o}} = \frac{a - c}{d + b}. \tag{10.3}$$

Folytonos idejű walrasi áralkalmazkodási modell. Keresleti függvény $D(P)$, kínálati függvény $S(P)$, az árváltozás sebessége arányos a túlkereslettel:

$$\dot{P} = kz(P), \qquad \text{ahol} \qquad z(P) = D(P) - S(P) \qquad \text{és} \qquad k > 0. \tag{10.4}$$

10.3. tétel. *Tegyük föl, hogy létezik egyensúlyi ár:* $D(P^o) = S(P^o)$. *Ekkor a folytonos idejű alkalmazkodási folyamat az egyensúly környezetében akkor és csak akkor stabil, ha*

$$z(P) \qquad P^o\text{-ban csökken.} \tag{10.5}$$

Megjegyzés. Normális esetben $D(P)$ csökkenő és $S(P)$ növekvő, tehát $z(P)$ csökkenő, a mechanizmus stabil. Előfordulhat azonban az is, hogy $S(P)$ is csökken, s ekkor $z(P)$ növekedhet!

Diszkrét idejű walrasi áralkalmazkodási folyamatban az árváltozás az előző időszak túlkeresletével arányos:

$$P_{t+1} = P_t + kz(P_t), \qquad k > 0. \tag{10.6}$$

10.4. tétel. *A diszkrét idejű walrasi áralkalmazkodási folyamat akkor és csak akkor stabil az egyensúlyi pont közelében, ha (10.5) mellett teljesül a következő feltétel:*

$$0 < k < -\frac{2}{z_{P^o}}, \tag{10.7}$$

ahol z_{P^o} *a* $z(P)$ *túlkeresleti függvény deriváltja a* P^o *egyensúlyi pontban.*

Megjegyzések. 1. Már Walras kiemelte, hogy a (10.4) alkalmazkodási folyamat (tatonnement=tapogatózás) időn kívül megy végbe, mert ha nem-egyensúlyi (hamis) áron kereskednének, akkor a jövedelem-újraelosztás miatt a túlkeresleti görbe folyamatosan eltolódna.

2. Ha egyszerre több termékpiacot vizsgálunk, akkor a keresztkhatások miatt jóval bonyolultabb az egyensúly stabilitása (lásd Samuelson (1947), Zalai (1989), Simonovits (1998)).

3. Ritkán vizsgálják a diszkrét alkalmazkodási folyamatot, mert itt a stabilitás jóval törékenyebb, mint a folytonos változatban.

Pókháló modell (a kínálat egy időszakos késéssel reagál az árra): $S_t = a + bP_{t-1}$, $D_t = c - dP_t$.

10.5. tétel. *a) A pókháló modellben is létezik pozitív egyensúlyi ár [(10.3)], ha* $c > a$.

b) Az egyensúlyi ár stabil, ha

$$b > d. \tag{10.8}$$

Megjegyzés. Instabil esetben ($b < d$) a rendszer fölrobban, a lineáris közelítés alkalmatlanná válik. Esetünkben a ciklus ($b = d$) nagyon valószínűtlen, ezért nemlineáris általánosításra van szükség.

11. Tökéletes versenyzői áralakulás hosszú távon

Hosszú távon a tökéletes verseny miatt a veszteséges vállalatok kivonulnak a piacról, és a pozitív gazdasági profit létezése új vállalatokat csábít a piacra.

11.1. tétel. *(Zéró profit.) Hosszú távon minden vállalat annyit termel, hogy a hosszú távú átlag- és határköltség egyaránt megegyezzen az egyensúlyi árral:*

$$\mathrm{LATC}_i = P^{\mathrm{o}} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{LMC}_i = P^{\mathrm{o}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.1}$$

11.1. példa. Állandó határköltségű iparágban a kereslet növekedésére rövid távon emelkedik az ár, s ezért új vállalatok jelennek meg a piacon, amelyeknek a termelése visszaszorítja az árat a régi értékére. ∎

A marxi munkaértékelmélet speciális esetként jelentkezik: $Q = aL$ és $C(Q) = wL$, azaz $C(Q) = wQ/a$, $P = \mathrm{MC} = w/a$.

11.2. példa. Növekvő határköltségű iparágban a kereslet növekedésére rövid távon emelkedik az ár, s ezért új vállalatok jelennek meg a piacon, amelyeknek a termelése csökkenti az árat, de a megnövekedett határköltségek miatt képtelenek visszaszorítani az árat a régi értékére. ∎

11.3. példa. Csökkenő határköltségű iparágban a kereslet növekedésére rövid távon emelkedik az ár, s ezért új vállalatok jelennek meg a piacon, amelyeknek a termelése csökkenti az árat, sőt a lecsökkent határköltségek miatt az ár a régi érték alá esik. ∎

11.1. táblázat. *Jellemző hosszú távú árszerinti kínálati rugalmasságok*

Árucikk	Rugalmasság	Árucikk	Rugalmasság
Mezőgazdasági terület		Szén	15–30
Gyapot	0,67	Földgáz	0,20
Búza	0,93	Kőolaj	0,76
Kukorica	0,18	Városi lakás	
Alumínium	nagy	Sűrűség	5,3
Króm	0–3	Minőség	3,8

Megjegyzés: Az adatok Nicholson, 339. o.-ról származnak és a 1970-es évek elejének Amerikájára vonatkoznak.

12. Áralakulás a monopolista piacokon

A tökéletes verseny végletes ellentéte a monopólium. (Figyelem: a marxista monopólium fogalma tágasabb, valójában az oligopóliumra vonatkozik.)

Definíció. *Monopolista piac*ról beszélünk, ha technikai vagy jogi okokból a piacon egy termelő tevékenykedik.

12.1. tétel. *Monopolista piacon a vállalat annyit termel, hogy határbevétele megegyezzék a határköltségével:*

$$\mathrm{MR}^{\mathrm{o}} = \mathrm{MC}^{\mathrm{o}}. \tag{12.1}$$

12.2. tétel. *Állandó határköltségű iparágban a monopolár (P_{M}) és a versenyár (P_{C}) között a következő összefüggés áll fönn:*

$$P_{\mathrm{M}} = \frac{P_{\mathrm{C}}}{1 - |\varepsilon_{P,Q}|}. \tag{12.2}$$

Következmény. *Állandó határköltségű iparágban a monopolár nagyobb, mint a versenyár, a monopol kibocsátás kisebb, mint a verseny kibocsátás:*

$$P_{\mathrm{M}} > P_{\mathrm{C}} \qquad \text{és} \qquad Q_{\mathrm{M}} < Q_{\mathrm{C}}. \tag{12.3}$$

Megjegyzés. Természetes monopólium esetén a határköltségfüggvény csökkenő, tehát az áremelés és a termeléskorlátozás még nagyobb, mint amit a következmény jelez.

12.1. példa. (Piacfelosztás és árdiszkrimináció.) Tegyük föl, hogy egy állandó határköltségű monopólium két egymástól elszigetelt (pl. belső és külső) piacon tevékenykedik. Az i-edik piac keresleti függvénye $D_i(P)$, $i = 1, 2$. Ekkor a két piacon egymástól eltérő árat állapít meg a monopolista: minél rugalmasabb a kereslet, annál magasabb lesz az ár. (Például ezért értelmetlen a dömpingár vádja.) ∎

Fölvetődik a kérdés: mi a kapcsolat a monopolár és a határköltség között, ha az utóbbi nem állandó? (Állandó határköltség esetén minél nagyobb a határköltség, annál nagyobb a monopolár.)

12.3.* tétel. *(Tirole, 1989, 66–67. o.) Ha két olyan költségfüggvényt hasonlítunk össze, amelyeknél az egyik határköltsége mindig nagyobb, mint a másiké: $C_2'(Q) > C_1'(Q)$, akkor a megfelelő monopolár is nagyobb: $P_2^{\mathrm{M}} > P_1^{\mathrm{M}}$.*

Bizonyítás. Valóban, legyen Q_1^{M} és Q_2^{M} a megfelelő monopolista optimum. Az optimalitás miatt az 1., illetve a 2. esetben a profitmaximalizálás miatt igaz, hogy

$$P_1^{\mathrm{M}} Q_1^{\mathrm{M}} - C_1(Q_1^{\mathrm{M}}) > P_2^{\mathrm{M}} Q_2^{\mathrm{M}} - C_1(Q_2^{\mathrm{M}})$$

és

$$P_2^{\mathrm{M}} Q_2^{\mathrm{M}} - C_2(Q_2^{\mathrm{M}}) > P_1^{\mathrm{M}} Q_1^{\mathrm{M}} - C_2(Q_1^{\mathrm{M}}).$$

Adjuk össze a két egyenlőtlenséget:

$$[C_2(Q_1^{\mathrm{M}}) - C_2(Q_2^{\mathrm{M}})] - [C_1(Q_1^{\mathrm{M}}) - C_1(Q_2^{\mathrm{M}})] > 0,$$

azaz

$$\int_{Q_2^{\mathrm{M}}}^{Q_1^{\mathrm{M}}} [C_2'(Q) - C_1'(Q)]\, dQ > 0.$$

Feltevésünk szerint az integerandus pozitív, tehát a felső határ nagyobb, mint az alsó: $Q_1^{\mathrm{M}} > Q_2^{\mathrm{M}}$. Ekkor a keresleti függvény csökkenő volta miatt $P_1^{\mathrm{M}} < P_2^{\mathrm{M}}$. ∎

Megjegyzés. A most ismertetett technika nagyon fontos a vezető–megbízott elméletben is (például a K. közgazdasági függelékben tárgyalt biztosításnál).

13. Duopólium és oligopólium

A tökéletes verseny és a monopólium közé esik az oligópolium, amelynek legegyszerűbb esete a duopólium.

Definíciók. 1. *Duopólium*ról beszélünk, ha a piacon két vállalat egymástól függetlenül tevékenykedik, pl. $C_i = c_i Q_i$ állandó egységköltségű költségfüggvénnyel és π_i profitfüggvénnyel, $i = 1,\, 2$. Mivel az elérhető $P(Q_1 + Q_2)$ ár mindkét vállalat kibocsátásától függ, az i-edik vállalat profitja függ a j-edik vállalat döntésétől is. E kölcsönhatás figyelembe vételétől függően többféle duopólium létezik.

2. *Cournot-duopólium*nál (1838) az i-edik vállalat felteszi, hogy a $j \neq i$-edik vállalat kibocsátása Q_j, s ennek megfelelően úgy választja meg $Q_i(Q_j)$ kibocsátását, hogy adott Q_j mellett a $\pi_i(Q_i(Q_j), Q_j)$ profitja maximális legyen:

$$R_{i,\,Q_i}(Q_i, Q_j) = c_i, \qquad i = 1,\, 2. \tag{13.1}$$

Egyensúly esetén a két feltételezés összhangban van:

$$Q_i^{\mathrm{o}} = Q_i(Q_j^{\mathrm{o}}) \qquad i = 1,\, 2. \tag{13.2}$$

3. *Stackelberg-duopólium*nál a két vállalat szerepe nem szimmetrikus, pl. az 1. vállalat a Vezető, a 2. vállalat pedig a Követő. A Vezető ismeri a Követő stratégiáját, s így választja meg saját kibocsátását. Pontosabban: Először 2. meghatározza saját, paraméteres $Q_2(Q_1)$ optimumát a (13.1) feltételből. Ezt ismeri 1. is, s ennek nyomán meghatározza saját – nem paraméteres – optimumát (13.1) módosításából:

$$R_{1,\,Q_1}(Q_1^{\mathrm{o}}, Q_2(Q_1^{\mathrm{o}})) = c_1. \tag{13.3}$$

Végül 2. kiszámíthatja tényleges döntését:

$$Q_2^{\mathrm{o}} = Q_2(Q_1^{\mathrm{o}}). \tag{13.4}$$

13.1. tétel. *a) Megfelelő simasági feltételek mellett mindkét duopólium létezik.*

b) Mindkét duopolár nagyobb, mint a versenyár; és kisebb, mint a monopolár, tehát mindkét duopol-kibocsátás kisebb, mint a verseny-kibocsátás; és nagyobb, mint a monopol-kibocsátás.

Megjegyzés. A Stackelberg-modellben kívülről kell megállapítani, hogy ki a Vezető, és ki a Követő. Ha mindkét vállalat azt feltételezi, hogy a másik vállalat a Vezető, akkor visszajutunk a Cournot-modellhez. Ha mindkét vállalat azt feltételezi, hogy a másik vállalat a Követő, akkor katasztrofális túltermelés következik be.

Már Bertrand (1883) kétségbe vonta Cournot modelljének a helyességét, nevezetesen azt, hogy a termelők nem az árakról, hanem a volumenekről döntenek. Szerinte a termelők az árakról döntenek, és a fogyasztók az alacsonyabb árú termelőt részesítik előnyben. Jelölje c a két vállalat közös termelési egységköltségét. Tehát az i-edik vállalat terméke iránti kereslet

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} D(p_i) & \text{if } p_i < p_j; \\ D(p_i)/2 & \text{if } p_i = p_j; \\ 0 & \text{if } p_i > p_j; \end{cases}$$

profitja pedig $\pi^i(p_i, p_j) = (p_i - c) D_i(p_i, p_j)$.

13.2. tétel. *(Bertrand-paradox, Tirole, 1989, 209–212. o.) A Nash-optimumban mindkét vállalat a versenyző egyensúlyt választja, ahol az ár egyenlő az egységköltséggel: $p_1 = p_2 = c$.*

Bizonyítás. Bármely c-nél nagyobb árral próbálkozzék az egyik vállalat, a másik aláígérhetne és ezzel egyoldalúan pozitív profithoz jutna. ∎

Miért paradox a Bertrand-tétel? 1. Azt állítja, hogy a piaci versenyzői helyzet már két vállalat esetén is megvalósul. 2. Nem magyarázza meg, hogy miért akarnak egyáltalán a vállalatok termelni, ha nincsen nyereségük.

A Bertrand-paradoxon magyarázata a következő (Edgeworth, 1897):

1. Nyitva hagyja, hogy mi történik akkor, ha semelyik vállalat sem képes egyedül kielégíteni a teljes keresletet: kapacitáskorlát. 2. Az elemzés elhanyagolja az időbeli reakciókat. 3. Az elemzés elsiklik a termékek közti különbségek fölött.

A Bertrand-paradoxon minden hibája ellenére érdekes, mert élesen rávilágít arra az esetre, amikor kisszámú termelő késhegyig menő harcot vív egymással.

Definíció. *Oligopólium*ról beszélünk, ha a piacon jelenlévő vállalatok száma nagyobb, mint 1, de olyan kicsi, hogy nem lehet elhanyagolni az egyes szereplők döntései közti kölcsönhatásokat.

Megjegyzés. Jelenleg nincs általánosan elfogadott elmélet. Szemléltetésül a következő példát tanulmányozzuk.

13.1. példa. A piacon n egyforma vállalat tevékenykedik, közös egységköltségük c. A piac keresleti függvénye lineáris: $q(P) = a - bP$, ahol $q = \sum_i Q_i$. Föltesszük, hogy $a > bc$, azaz $P = c$ minimumárhoz tartozó kereslet pozitív. A Cournot-megoldás általánosításából adódik a *Nash-féle egyensúly*, ahol minden i-re adottnak véve a többi vállalat döntését, az i vállalat optimuma a Nash-egyensúlybeli érték. Képletben: alkalmazva a $Q = (Q_i, Q_{-i})$ fölbontást, legyen az i-edik vállalat profitfüggvénye $\pi_i(Q_i, Q_{-i})$. Ekkor a Q° vektor Nash-egyensúly, ha minden i-re és minden Q_i-re

$$\pi_i(Q_i^\circ, Q_{-i}^\circ) \geq \pi_i(Q_i, Q_{-i}^\circ).$$

Esetünkben Nash-egyensúlyban az egyes vállalatok kibocsátása azonos, és az összkibocsátás és az ár rendre

$$Q^\circ(n) = \frac{n(a-bc)}{n+1} \qquad \text{és} \qquad P^\circ(n) = \frac{a+nbc}{(n+1)b}. \tag{13.5}$$

Két fontos speciális eset:

a) monopólium: $Q^\circ_{\mathrm{M}} = (a - bc)/2$ és $P^\circ_{\mathrm{M}} = (a + bc)/(2b)$.

b) tökéletes verseny: $Q^\circ_{\mathrm{C}} = a - bc$ és $P^\circ_{\mathrm{C}} = c$.

Összefoglalva: A versenyző vállalatok számának növekedésével a kínálat nő (tökéletes versenynél éppen kétszer akkora, mint a monopóliumnál); az ár pedig csökken (tökéletes versenynél megegyezik a határköltséggel). ∎

Statisztikailag egy iparág *koncentrációját* azzal mérik, hogy az első n legnagyobb vállalat összkibocsátása a piac hány százalékát jelenti.

A következő táblázat adatai Nicholson, 369. o.-ról származnak és a 1970-es évek elejének Amerikájára vonatkoznak.

13.1. táblázat. *Százalékos iparági koncentráció: Amerika, 1970*

Iparág	A négy legnagyobb vállalat százalékos részesedése	A nyolc legnagyobb vállalat százalékos részesedése
Vas és acél	47	65
Gépkocsi	92	98
Gépkocsialkatrész	60	68
Kőolajfinomítás	33	57
Sütőipar	29	39
Vegyes gépgyártás	7	12
Repülőgépmotor	68	81
Autóabroncs	72	89
Telefon és távíró	94	99
Cigaretta	84	99
Fűrésztelepek	16	20
Női ruha	10	13
Szappan és mosópor	70	79
Gyümölcs- és zöldségkonzervek	21	33

Némileg eltérő és bővebb a következő táblázat. Három nyugat-európai országot mutat be, és a 3 legnagyobb vállalat részesedése mellett bemutatja, hogy maximálisan hány hatékony vállalat férne el a piacon.

13.2. táblázat. *3-koncentráció és hatékony vállalatok maximuma*

	Nagy-Britannia		Franciaország		Ny-Németország	
Iparág	3-konc.	max.	3-konc.	max.	3-konc.	max
Hűtőszekrény	65	1	100	2	72	3
Cigaretta	94	3	100	2	94	3
Kőolajfinomítás	79	8	60	7	47	9
Sörkészítés	47	11	63	5	17	16
Textil	28	57	23	57	16	52
Cipő	17	165	13	128	20	197

Megjegyzés: Az adatok Begg, 195. o.-ról származnak és az 1967–70 Nyugat-Európájára vonatkoznak.

V. RÉSZ. ÁRALAKULÁS A TERMELÉSI TÉNYEZŐK PIACÁN

Némileg bonyolultabb a termelési tényezők piaca, mint a termékpiac. A 9. fejezetben adott tényezőárak (órabérek és bérleti díjak) mellett vizsgáltuk a tényezők (tőke és munka) kínálatát. Bár az egyes vállalatok számára a tényezőárak adottak, a vállalatok összességét tekintve fordítva is okoskodhatunk. Most megfordítjuk a sorrendet, és adott tőke és munka mellett vizsgáljuk az órabéreket és a bérleti díjakat.

14. Tényezőárak a tökéletes versenynél

Először a tökéletes versenypiacot vizsgáljuk.

14.1. tétel. *A profitmaximalizáló vállalatnál a tőke határtermelékenysége megegyezik a reálbérleti díjjal, és a munka határtermelékenysége megegyezik a reálórabérrel:*

$$\mathrm{MP}_K = \frac{v}{P} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{MP}_L = \frac{w}{P}. \tag{14.1}$$

14.2. tétel. *(Komparatív statikus elemzés.) a) Egytényezős modell: ha az órabér csökken, akkor az alkalmazott munka mennyisége nő.*

b) Kéttényezős modell: ha az órabér csökken, akkor a helyettesítési hatás miatt megnövekszik az alkalmazott munka; és a kibocsátási hatás miatt is valószínűleg ugyanez történik.

Definíció. A *tőke és a munka részesedési aránya* a nemzeti jövedelemben rendre vK/pQ, ill. wL/pQ.

14.3. tétel. *a) Tökéletes versenynél a két részesedési arány*

$$\frac{\mathrm{MP}_K \cdot K}{Q} \qquad \text{és} \qquad \frac{\mathrm{MP}_L \cdot L}{Q}. \tag{14.2}$$

b) A két részesedési arány összege akkor és csak akkor 1, ha a termelési függvény skálahozadéka állandó.

c) Ha a termelés helyettesítési rugalmassága nagyobb (kisebb), mint 1, akkor a munka technikai felszereltségének (k) növekedésekor a tőke részesedési aránya nő (csökken).*

Bizonyítás. A b) pont az Euler tételen alapul. ∎

14.1. példa. Cobb–Douglas-féle termelési függvénynél ($Q = AK^\alpha L^\beta$) a tőke részesedése α, a munkáé β. A két részesedés összege akkor és csak akkor 1, ha $\alpha + \beta = 1$ (állandó skálahozadék). ∎

14.4. tétel. *Tegyük föl, hogy az $F(K, L)$ termelési függvény Cobb–Douglas-tipusú és elsőfokú homogén. Ekkor a munka technikai felszereltségének növekedésekor a kamatláb csökken, az órabér pedig nő.*

Megjegyzések. 1*. Ez a süllyedő profitráta neoklasszikus tétele, amely nem feltétlenül érvényes általánosabb modellekben, amelyekben többféle tőke van, (vö. Sraffa (1960) visszaváltás). A tétel és bizonyítása először Ricardo (1817)-ben jelent meg, csak ott K földet jelölt. Marx (1894) helyesen bírálta Ricardo tételét, ti. hogy elhanyagolja a technikai fejlődést.

2.* Marx (1894) hasonló állítása logikailag hibás, mert fölteszi, hogy a tőkések akkor is bevezetnek egy új technikát, ha az sem a munkabért, sem a profitot nem növeli. A helyes megoldást a következő példa mutatja be:

14.2. példa. (Ricardo, 1817 és Sraffa 1960.) Tegyük föl, hogy gabonát gabonával termelnek, és a munkabért is gabonában fizetik ki. Az eredeti technológiában c egység vetőmag és v munkabér kell 1 egység gabona előállításához. Az új technológiában c' és v' az új paraméterpár: $c' > c$ és $v' < v$. (Az órabér mindkét esetben azonos, w, ezért a változó tőke csökkenése a termelékenység növekedéséből következik. Az új technológiát akkor (és csak akkor) érdemes bevezetni, ha az új profithányad nagyobb, mint a régi: $\pi' > \pi$, ahol $\pi = (1 - c - v)/(c + v)$ és $\pi' = (1 - c' - v')/(c' + v')$. Tehát a profitráta nem süllyedhet. ∎

15. Tényezőárak tökéletlen piacokon

Némileg módosul a 14. fej., mert pl. ha a munkaerőpiac monopolizált, akkor $\mathrm{MC}_L = d(wL)/dL = w + Ldw/dL > w$. Ellenkező irányú eltérés is fontos, amikor a *hatékony bér* elmélete szerint a dolgozó a határtermelékenységénél több bért kap, hogy ne legyen érdemes lógnia.

Szeggregált monopszonista munkaerőpiacon a férfi és a női piacon külön-külön valósul meg $\mathrm{MR}_L = \mathrm{MC}_L$. Következésképpen a férfiak órabére magasabb lesz, mint a nőké.

16. A munkaerőpiac

A munkaerőpiac különleges piac, ezért célszerű külön tárgyalni.

Definíció. A munkás *munkaidőkínálatá*t (L-et) az $U(Y,H)$ hasznosságfüggvény maximalizásával határozza meg, ahol Y a fogyasztás mennyisége, H pedig a szabadidőé, $Y = wL$ és $L + H = T$ (a teljes időalap, pl. 24 óra/nap).

16.1. tétel. *Optimális választásnál a szabadidő fogyasztással való helyettesítési határaránya megegyezik az órabérrel:*

$$\mathrm{MRS} = w. \tag{16.1}$$

16.1. példa. Nagyon gyakran előfordul, hogy az órabér növekedésekor a munkások kevesebbet dolgoznak, mert a jövedelemhatás felülmúlja a helyettesítési hatást. A 19. sz. elején a brit gyáriparban a munkások 12–14 órát dolgoztak, 1850 körül jelent meg a 10 órás munkanap, 1890 körül a 8 órás munkanap, s végül 1936-ban a francia Népfront-kormány bevezette a heti 40 órás munkahetet. Érdekes, hogy a legfejlettebb országok körében ma is szóródik az évente ledolgozott munkanapok száma, az USÁ-ban viszonylag nagy, Nyugat-Európában viszonylag kicsi. Ok: nagyobb adóék? ∎

17. Tőke

A tőke is különleges áru, ezért célszerű külön tárgyalni.

Definíciók. 1. *Technikai lehetőségek*nek (Production Possibility, PP) nevezzük azoknak a görbéknek a seregét, amelyek (C_0, C_1) pontjai az idei és a jövő évi fogyasztás lehetséges kombinációit mutatják.

2. *Megtérülési ráta* egyenlő a technikai lehetőség görbe meredeksége–1:

$$r = \frac{dC_1}{dC_0}\bigg|_{\mathrm{PP}} - 1. \tag{17.1}$$

3. A fogyasztó *időpreferenciáját* kifejező (C_0, C_1) közömbösségi görbéken levő párok hasznossága azonos.

4. A fogyasztó leszámítolási lába egyenlő a közömbösségi görbe meredeksége–1:

$$\delta = \frac{dC_1}{dC_0}\bigg|_{\mathbf{U}=\mathrm{const}} - 1. \tag{17.2}$$

17.1. tétel. *Tegyük föl, hogy a termelési lehetőségek görbéje konkáv, a közömbösségi görbék pedig konvexek. Ekkor az egyensúly a termelési lehetőségeknek azon pontja, amelyben a közömbösségi görbe érinti a termelési görbét. Ekkor a megtérülési ráta és a leszámítolási láb megegyezik.*

Definíció. Az egyensúlyi megtérülési rátát *kamatláb*nak nevezzük.

17.1. példa. Tegyük föl, hogy r a kamatláb, P egy örökéletű gép ára és v a gép bérleti díja. Ekkor $r = v/P$. ∎

Definíció. Tegyük föl, hogy egy gép T évig működik, és az i-edik évi hozama R_i, és a kamatláb várható értéke a teljes időszak alatt r. Ekkor a gép hozamának *leszámított jelenértéke* (Present Discounted Value)

$$\mathrm{PDV} = \sum_i \frac{R_i}{(1+r)^i}. \tag{17.3}$$

17.2. tétel. *Piaci egyensúlyban a gép ára a gép hozamának leszámított jelenértékével egyenlő:*

$$P = \mathrm{PDV}. \tag{17.4}$$

Megjegyzés. A matematikusok és a mérnökök a jelenérték fogalmát *Laplace-transzformált* néven ismerhetik. A kapcsolat megvilágítására vegyük a következő feladatot. Egy nyugdíjasnak nyugdíjazásakor A_0 nyugdíjvagyona van, amely évente r kamatláb szerint kamatozik. Minden évben a nyugdíjas c mennyiséget fogyaszthat. Előre ismert T évig él, és halálakor nem akar hagyatékot hagyni. Mekkora a fogyasztása?

a) Egy matematikus fölírja a következő lineáris differenciaegyenletet a t-edik év nyitóvagyonára: $A_t = (1+r)A_{t-1} - c$, $t = 1, \ldots, T$. A megoldó szorzók módszerével felírja A_t képletét, majd $A_{T+1} = 0$ egyenletből kifejezi az ismeretlen c-t.

b) Egy (jó) közgazdász $c = R_i$, PDV $= A_0$ helyettesítéssel megoldja a (17.3) egyenletet.

17.2. példa. Tegyük föl, hogy $T = \infty$ és $R_i = R = v$ (állandó). Ekkor PDV $= v/r$, tehát a 17.1. példa szerint $P =$ PDV. ∎

17.3. példa. Tegyük föl, hogy egy évjáradék T éven keresztül évente R hozamot ad. Legyen $\delta = 1/(1-r)$, ekkor az évjáradék leszámítolt jelenértéke PDV $= R\delta(1-\delta^T)/(1-\delta)$. ∎

17.4. példa. Az *örökjáradék* olyan évjáradék, amely örökké tart: $T = \infty$. Ekkor PDV $= R\delta/(1-\delta) = R/r$. ∎

17.5. példa. A *kötvény* olyan évjáradék, amely a T-edik év végén visszafizeti a P névértéket is: $B =$ PDV $= R\delta + R\delta^2 + ... + (R+P)\delta^T$. ∎

2004–2010 között hazánkban alacsony kezdeti kamatlába miatt nagyon elterjedtté vált a devizalapú autó- és lakáskölcsön, ahol a főleg svájci frankban nyújtott kölcsönt forintba kellett visszafizetni. Mivel 2008–2010 között a frank árfolyama 140-ről 210 Ft-ra szökött, miközben kezelési díjjal megnövelt teljes kamatláb is megugrott, a kölcsönfelvevők jelentős része fizetésképtelenné vált.

VI. RÉSZ. ÁLTALÁNOS EGYENSÚLY ÉS JÓLÉT

Eddig az egyes piacokat elszigetelten vizsgáltuk, most lebontjuk az elválasztó falakat. Az egyszerűség kedvéért kizárjuk a sarokoptimumokat.

18. Gazdasági hatékonyság

A gazdaság egyik legfontosabb kérdése a hatékonyság.

Definíció. Meglévő termékek elosztása *hatékony* (Pareto-optimális), ha nincs olyan újraelosztás, amelynél senki sem jár rosszabbul, és legalább egy valaki jobban jár.

18.1. tétel. *Az elosztás akkor és csak akkor hatékony, ha minden fogyasztónál az adott termékpár helyettesítési határaránya egymással megegyezik:*

(18.1) $$\mathrm{MRS}_i = \mathrm{MRS}_1, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Definíció. Tegyük föl, hogy két fogyasztó és két termék szerepel a piacon. *Edgeworth-doboz*nak nevezzük azt a téglalapot, amelynek DNY-i sarkából az első, ÉK-i sarkából pedig a második fogyasztó közömbösségi görbéit mérjük föl. A doboz szélességét és hosszúságát az elosztható termékek volumene határozza meg.

Megjegyzés. A két fogyasztó közömbösségi görbéinek érintési pontjai az optimális elosztásokat képviselik. Az optimumok halmazát *egyezséggörbé*nek nevezzük.

Definíció. A termelés *hatékony*, ha az adott termelési tényezőket nem lehet úgy újraelosztani, hogy semelyik termék mennyisége ne csökkenjen, de legalább egy terméké nőjön.

18.2. tétel. *Egy vállalat adott termelési tényezőit hatékonyan osztja el, ha minden tényezőt teljesen felhasznál, és a termelési határarány minden terméknél megegyező:*

$$\mathrm{RTS}_X = \mathrm{RTS}_Y. \tag{18.3}$$

Definíciók. 1. A *termelési lehetőségek határa* (Production Possibility Frontier, PPF) a termékhalmaznak azokból az (X, Y) pontjaiból áll, melyek hatékonyan termelhetők.

2. A *termelési transzformáció arányát* (Rate of Production Transformation, RPT) úgy kapjuk, hogy a termelési lehetőségek határának meredekségét –1-gyel beszorozzuk:

$$\mathrm{RPT} = -\frac{dY}{dX}\bigg|_{\mathrm{PPF}}. \tag{18.4}$$

Feltevés. A termelési lehetőségek határa konkáv, azaz a termelési transzformáció aránya növekvő.

18.3. tétel. *Hatékony termelésnél bármely tényező határtermelékenysége minden vállalatnál egyező:*

$$\mathrm{MP}_i = \mathrm{MP}_1, \qquad i = 2, \ldots, n. \tag{18.5}$$

18.4. tétel. *Ha több vállalat ugyanazt a termékpárt állítja elő, akkor a hatékonyság miatt a termelési transzformációs arányuk megegyezik:*

$$\mathrm{RPT}_i = \mathrm{RPT}_1, \qquad i = 2, \ldots, n. \tag{18.6}$$

18.1. példa. (Ricardo, 1817: Komparatív előnyök a külkereskedelemben.) Ha Anglia és Portugália bor- és textiltermelési lehetőség határai különbözőek, akkor külkereskedelem révén mindketten növelhetik fogyasztásukat. (Ez még akkor is igaz, ha Anglia mindkét terméket termelékenyebben állítja elő, mint Portugália.) Ha RPT_2 mindig nagyobb, mint RPT_1, akkor a 2. ország csak textilt termel, az 1. ország pedig csak bort. ∎

Definíció. Az i-edik vállalat $x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{n,i}$ tényezői és termékei közti T_i *transzformációs függvénye* a vállalat inputjai és outputjai közti összefüggést írja le:

$$T_i(x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{n,i}) = 0. \tag{18.7}$$

18.5. tétel. *(Lerner-szabályok.) Tegyük föl, hogy az i-edik és a j-edik vállalat k-adik és m-edik változóit hatékonyan osztjuk el, míg a többi változót rögzítjük. Ekkor x_k és x_m közti cserearány mindkét vállalatnál egyező kell hogy legyen:*

$$\frac{\partial x_{k,i}}{\partial x_{m,i}} = \frac{\partial x_{m,j}}{\partial x_{m,j}}. \tag{18.8}$$

Megjegyzés. A 18.5. tétel a 18.2–18.4. tétel-hármas összefoglalása: 1) ha x_k és x_m tényező, akkor (18.8) a technikai határarányok vállalatok közti egyenlőségét mondja ki; 2) ha x_k tényező, és x_m termék, akkor (18.8) a határtermelékenység vállalatok közti egyenlőségét mondja ki; 3) ha x_k és x_m termék, akkor (18.8) a termelési transzformációs arány vállalatok közti egyenlőségét mondja ki.

Definíció. A kibocsátás, a tényező-elosztás és a fogyasztás *hatékony*, ha nincs olyan alternatív program, amelyben valaki jobban jár, és senki sem jár rosszabbul.

18.6. tétel. *A kibocsátás és a fogyasztás akkor és csak akkor hatékony, ha a korábbi feltételek mellett teljesül még a következő: bármely termékpár helyettesítési határaránya minden fogyasztónál azonos, és egyenlő minden vállalat termelési transzformációs arányával:*

$$\mathrm{MRS}_i = \mathrm{RPT}_j, \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \text{és} \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{18.9}$$

19. Jóléti közgazdaságtan

A jóléti gazdaságtan a közgazdaságtan *normatív* részéhez tartozik, amely nem a *van*nal, hanem a *legyen*nel foglalkozik.

Feltevés. Egyszerűség kedvéért cseregazdaságokra szorítkozunk (kizárjuk a termelést).

Ha az egyéni hasznosságok összehasonlíthatatlanok, akkor a társadalom jóléti optimumai az Edgeworth-doboz egyezséggörbéin találhatók.

Definíció. Ha az egyéni hasznosságfüggvények összehasonlíthatók, akkor a *társadalmi jóléti függvény* az egyéni hasznosságfüggvények növekvő függvénye: $W(U_1, U_2)$.

19.1. példa. (Bentham, 18. sz.) $W(U_1, U_2) = U_1 + U_2$. Az összhasznosság maximalizálása a cél. ∎

19.2. példa. (Rawls, 1971.) $W(U_1, U_2) = \min(U_1, U_2)$. A minimális hasznosság maximalizálása a cél. ∎

Ha nincsenek kardinális hasznosságfüggvények, akkor egyéni preferenciarendezéseket kellene összesíteni. De hogyan lehet ezt elvégezni?

19.3. példa. (Condorcet-paradoxon, 1785.) Három állapotot (a, b és c) három személy (1, 2, 3) a következőképpen rendez: 1: abc, 2: bca és 3: cab. Ekkor például a többségi szavazás eredménye abca, s ez nem tranzitív! ∎

Belátható, hogy ez a példa jelentősen általánosítható. Legyen A a lehetséges választások halmaza, s legyen P_i az i-edik egyén teljes rendezése e halmazon: $i = 1, \dots, n$. Tekintsünk az összes lehetséges rendezést, s próbáljuk meg aggregálni őket egy P társadalmi rendezésbe, amely kielégíti a következő tulajdonságokat:

1. *A társadalmi rendezés teljes*: tetszőleges $x, y \in A$ esetén teljesül xPy vagy yPx.

2. *A társadalmi rendezés tranzitív*: ha xPy és yPz, akkor xPz.

3. *A társadalmi rendezés monoton függvénye az egyéni rendezéseknek*: ha $x, y \in A$ esetén xP_iy minden $i = 1, \dots, n$-re, akkor xPy.

4. *Két állapot társadalmi rendezése független bármely harmadik állapottól*: ha $x, y \in A$ esetén xPy, és elhagyjuk a rendezésből a tőlük különböző $z \in A$ elemet, akkor a szűkebb halmazon is xPy.

5. *A társadalmi rendezés nem diktatorikus*: nincs olyan személy, akinek a rendezése meghatározná a társadalmi rendezést.

19.1. tétel. *(Arrow, 1951.) Triviális esetektől eltekintve, lehetetlen úgy aggregálni az egyéni preferencia-rendezéseket, hogy a fenti öt feltétel egyszerre teljesüljön.*

19.4. példa. Hasonló kérdések vetődnek föl más területeken, például az öt- (vagy tíz)tusa pontozásánál. Legyen a j-edik sportoló teljesítménye az i-edik sportágban x_{ij} valós szám, $i = 1, \dots, I$ és $j = 1, \dots, J$. Milyen $f_i(x_{ij})$ monoton növekedő függvényekkel kell skálázni az egyes teljesítményeket, hogy a j-edik versenyző $y_j = \sum_{i=1}^{I} f_j(x_{ij})$ összpontszáma méltányos legyen? Például az öttusában valahogyan megállapítják a sportági normát, azaz $x_i^* = 1000$, és akkor $f_i(x_{ij}) = 1000x_{ij}/x_i^*$. Balczónak a futás, Onyiscsenkónak a vívás feküdt. Itt a sportág a választó, és az egyének a tárgyak, amelyek között választani kell.

Mivel a vívásnál egymás elleni teljesítmények számítanak, elképzelhető, hogy a C csapat visszalépése miatt megfordul az A és a B csapat egymáshoz képesti sorrendje (4. tulajdonság).

20. A tökéletes verseny hatékonysága

Az előző két fejezetben figyelmen kívül hagytuk az árrendszer szerepét a hatékonyságban. Most ezt a hiányt pótoljuk.

Definíciók. 1. Egy n-termékes (tényezőket és közbülső termékeket is beleértve) gazdaság *egyensúlyi árrendszere* az áraknak egy olyan vektora, amely mellett a kereslet és a kínálat egyensúlyban van.

2. Tökéletes verseny esetén (lásd 10. fej.) az egyensúlyi árrendszert *tökéletes versenyárrendszer*nek nevezzük.

3. *Tökéletes versenypiac*ról beszélünk, ha mind a termelők, mind a fogyasztók adottnak veszik az árakat, s így optimalizálnak. Az optimalizálásnál adódó megoldást *tökéletes versenyegyensúly*nak nevezzük.

20.1. tétel. *A tökéletes versenyegyensúly hatékony.*

Bizonyítás. Az optimalizálási feltevések miatt a határarányok azonosak a megfelelő árarányokkal, tehát egyenlőek egymással, azaz a program hatékony. ∎

Megjegyzések. 1. A 20.1. tétel matematikailag fogalmazza meg Smith (1776) állítását a *láthatatlan kéz* optimalitásáról.

2. Nem igaz az egyensúly hatékonysága, ha a) tökéletlen verseny van ($\mathrm{MR}_X < P_X$ miatt a hatékony mennyiségnél kevesebbet termelnek X-ből) vagy/és b) *külső (externális) hatások* lépnek föl (pl. vasgyártásnál a környezetszennyezéssel növelt társadalmi költségek nagyobbak a piaci költségeknél, s ezért a hatékony mennyiségnél több vasat gyártanak), vagy/és c) közjavak léteznek (pl. minden egyes fogyasztó úgy érezheti, hogy semmi baj nem történik, ha egyedül ő nem fizet az országos járványelhárításért, a TV-műsorért, stb, s ezért az optimálisnál kevesebbet termelnek a közjavakból); d) aszimmetrikus információ akadályozza a biztosítást (nem lehet jó egészségbiztosítást venni); e) sokan nem találnak a piacon tisztességes megélhetést.

20.1. példa. (A gabona-törvények eltörlése a 19. sz.-i Nagy-Britanniában.) 1846-ig Nagy-Britanniában törvény korlátozta a gabona behozatalát. A szabadversenyhez képest magasak voltak a gabonaárak, és túl sok termelési tényezőt használtak föl gabonatermelésre. A gabona-törvények eltörlése után megvalósult a szabad verseny: nőtt a gabonabehozatal, csökkent az angol gabonatermelés, csökkent a gabona ára, nőtt a reálbér és a reáljövedelem. ∎

20.2. példa. Lineáris programozás, sarokoptimumok. ∎

20.2. tétel. *Tökéletes verseny feltételei mellett minden hatékony eloszlás versenyegyensúly.*

Megjegyzés. A 20.2. tétel a 20.1. tétel megfordítása.

Ágazati kapcsolatok modellje

Ebben az alpontban az *általános egyensúlyelmélet* egyik gyakorlati alkalmazására, az *ágazati kapcsolatok modelljé*re, ÁKM-re mutatunk két példát, amely elméletileg is érdekes.

1) Egy n-szektoros gazdaságból indulunk ki, ahol a szektorok közti kapcsolatokat egy *statikus nyílt* Leontief-modell írja le (Bródy, 1969). A jelölési egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy a gazdaság hosszú távon nem nő és nem csökken. Legyen a_{ij} a j-edik szektor egységnyi termeléséhez szükséges anyagigény az i-edik szektortól, legyen y_i az i-edik szektor *kibocsátás*a és c_i a végső fogyasztás az i-edik szektor termékéből. A megfelelő mátrixok és vektorok jele: A, y és c.

Szükség lesz két definícióra.

Definíció. Az A mátrix *spektrálsugar*a az n darab sajátértékek abszolút értékének maximuma; jele: $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$.

Definíció. *Irreducíbilis* mátrixokról beszélünk, ha az $\{1, 2, \dots, n\}$ indexhalmaz nem bontható fel két olyan nem-triviális J és J^* indexhalmazra, amelyre a keletkező A_{J^*J} és A_{JJ^*} blokkok egyike nulla mátrix.

Ahhoz, hogy kevésbé formális legyen a meghatározásunk, érdemes gráfokra lefordítani a definíciót. Képzeljük azt, hogy van egy n-csúcsú irányított gráfunk, amelyben az

i-edik pont akkor és csak akkor van összekötve a j-edikkel, ha az (i,j) mátrixelem pozitív. (Természetesen elképzelhető, hogy az i-edik csúcs össze van kötve a j-edik csúccsal, de fordítva nem.) Ekkor a mátrix irreducibilitása azt jelenti, hogy a hozzá tartozó gráf csúcspontjai nem oszthatók két olyan csoportba, hogy egyik csoport egyik csúcsa sincs összekötve a másik csoport semelyik csúcsával. Természetesen a mátrixot *reducíbilis*nek nevezzük, ha nem irreducíbilis. (Vegyük észre, hogy minden blokk-diagonális mátrix reducíbilis, hiszen ott egyik csoport sincs öszekötve a másikkal.)

Szokás szerint föltesszük, hogy A nem-negatív elemű, irreducíbilis mátrix, melynek spektrálsugara kisebb, mint $1 : \rho(A) < 1$.

Megfelelő mértékegységválasztással biztosítható, hogy $\sum_i a_{ij} < 1$, $i = 1, \ \ldots, n$.

A modell egy egyszerű azonosságon alapul: termelés – termelői fogyasztások összege = végső fogyasztás.

$$(I - A)y = c.$$

A matematikai függelékben belátjuk, hogy ez az egyenlet egyértelműen megoldható:

20.3. tétel. *Feltevéseink mellett az ÁKM-modellnek minden pozitív végső fogyasztásra létezik egyetlen egy pozitív kibocsátása:*

$$y = (I - A)^{-1}c.$$

Definíció. Az $(I - A)^{-1}$ mátrixot az A mátrix *Leontief-inverzé*nek nevezik. Matematikában ezt a típusú mátrixot *rezolvens mátrix*nak nevezik.

A 20.3. tétel azt sugallja, hogy akármilyen végső fogyasztás megvalósítható, csak konzisztensen kell megválasztani a kibocsátási vektort. Köznapi tapasztalatainkból tudjuk, hogy ez nincs így, s ennek alapvetően két oka van. a) Vannak korlátos erőforrások (nyersanyagok és munkaerő), amelyek hosszabb távon sem növelhetők tetszés szerint. b) Az ember által készített eszközök előállítása időt vesz igénybe. Ezzel a második kérdéssel foglalkozunk a következőkben.

2) Rátérünk a *dinamikus zárt* Leontief-modell ismertetésére. Jelölési könnyítés céljából nyílt modellünket bezárjuk: az $(n+1)$-edik szektornak a munkaerő-szektort tekintjük. Ekkor az egységnyi munkaórához szükséges fogyasztást és ráfordítást a bővített $\mathbf{A}$ mátrix $(n+1)$-edik oszlopának, illetve sorának tekintjük, 0-t írva a DK-i sarokba. A termelési vektort is kibővítjük a munkaerő-szektor kibocsátásával (l): Képletben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & f \\ v & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ l \end{pmatrix}.$$

Ekkor a zárt statikus modell egyenlete

$$(I - \mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Most már ábrázolhatjuk a tőkefelhalmozást is. Legyen b_{ij} a j-edik szektor egységnyi beruházásához szükséges tőkeigény az i-edik szektortól, $b = (b_{ij})$. $(I - \mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}$. Tegyük föl, hogy a gazdaság minden szektora folyamatosan és azonos λ ütemben bővül: $\mathbf{y(t)} = \mathbf{y}\mathbf{e}^{\lambda \mathbf{t}}$. Ekkor az egyensúly egyenlete

$$(I - \mathbf{A})\mathbf{y} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{y}.$$

Milyen árak tartoznak e modellhez? Legyen $\mathbf{p}$ az $(n+1)$-dimenziós bővített ár(sor)vektor, amelynek fedeznie kell a $\mathbf{pA}$ folyó kiadások mellett a π normál profitrátához tartozó $\mathbf{pB}$ beruházási kiadásokat. Képletben:

$$\mathbf{p}(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \pi\mathbf{pB}.$$

Belátható a

20.4. tétel. *(Bródy, 1969.) Tegyük föl, hogy a bővített mátrix spektrálsugara is kisebb, mint 1:* $\rho(\mathbf{A}) < \mathbf{1}$

a) A kibocsátási egyensúlyi egyenletnek pontosan egy pozitív növekedési ütem (λ) *és kibocsátási arány vektor* ($\mathbf{y}$) *megoldása van:*

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{y} = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-\mathbf{1}}\mathbf{B}\mathbf{y}.$$

b) Az áregyensúlyi egyenletnek pontosan egy pozitív profitráta (π) *és árarány (sor)vektor* ($\mathbf{p}$) *megoldása van:*

$$\frac{1}{\pi}\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-\mathbf{1}}\mathbf{B}.$$

c) Az egyensúlyi növekedési ütem és profitráta egyenlő: $\lambda = \pi$.

Megjegyzések. 1. Felhívjuk a figyelmet a modell *dualitás*ára: a kibocsátási és az árvektor hasonló kapcsolatban vannak egymással, mint a lineáris programozás primál és duál feladata.

2. Ez a modell Neumann (1938) modelljének egy egyszerűsített változata. Neumann modelljében egy terméket elvben több eljárással lehetett előállítani (például villamos áramot fával, szénnel, olajjal, gázzal és urániummal), és egy eljárásnak elvben több terméke is lehetett (például a tehénnek a tej, a hús és a bőr). Mindkét modellnek közös hibája, hogy a munkaerő szektort úgy kezeli mint a többi szektort, márpedig ez legfeljebb egy rabszolgagazdaságra igaz.

Általános egyensúly létezése

A matematikai közgazdaságtan egyik fő területe az általános egyensúlyelmélet. Legegyszerűbb alakjában a következőképpen lehet megfogalmazni.

Legyen a háztartások száma H, $h = 1, \ldots, H$; és a termékek száma I, $i = 1, \ldots, I$. Legyen a h-adik háztartás vagyonvektora $a^h = (a_{1,h}, \ldots, a_{I,h})$, fogyasztási vektora, $x_h = (x_{1,h}, \ldots, x_{I,h})$ és legyen hasznosságfüggvénye $u_h(x_{1,h}, \ldots, x_{I,h})$. Legyen $p = (p_1, \ldots, p_I)$ a piaci árvektor, amely minden háztartás számára adott. Adott árvektor esetén az i-edik háztartás ($h = 1, \ldots, H$) a következő hasznosságmaximalizálási feladatot oldja meg:

$$u_h(x_{1,h}, \ldots, x_{I,h}) \to \max$$

feltéve, hogy teljesül a költségvetési feltétel:

$$p_1x_{1,h} + \cdots + p_Ix_{I,h} = p_1a_{1,h} + \cdots + p_Ia_{I,h}.$$

Bevezetve az i-edik termék $z_{i,h} = x_{i,h} - a_{i,h}$ egyéni túlkeresletét és $z_i = z_{i,1} + \cdots + x_{i,H}$ piaci túlkeresletét, tömörebben is megfogalmazhatók a feltételek.

Definíció. *Általános egyensúly*ról beszélünk, ha létezik olyan I-dimenziós nemnegatív p^{o} árvektor, amely mellett a fenti sokszereplős feltételes maximalizálási feladat megoldása konzisztens, azaz minden termékből a piaci túlkereslet legfeljebb nulla:

$$z_i \le 0, \qquad i = 1, \ldots, I;$$

és piaci értéke nulla:

$$p_i z_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, I.$$

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy ha $z_i < 0$, akkor $p_i = 0$ – *szabad jószág*, ha viszont $p_i > 0$, akkor $z_i = 0$ – *szűkös jószág.*

20.5. tétel. *(Arrow–Debreu, 1954, Zalai, 1989, 6. fejezet.) Megfelelő monotonitási, konkavitási, zártsági és egyéb feltételek mellett a cseregazdaságban létezik legalább egy piaci egyensúly.*

Megjegyzések. 1. Az eredeti tétel bonyolultabb modellben igazolta az egyensúly létezését, a fogyasztó lehetséges vektorai egy bizonyos halmazba kellett hogy tartozzanak, stb.

2. Bizonyos technikai feltevésekre szükség van. Például abban a kéttermékes-kétfogyasztós esetben, amikor mindkét fogyasztó számára a 2. termék nem kívánatos, de az egyik fogyasztó vagyona csak a 2. termékből áll, akkor akármilyen nagy p_1/p_2 sem lehet egyensúly.

3. A fenti definícióban el van rejtve, hogyan cserélnek a piacon a szereplők. Legegyszerűbb azt gondolni, hogy a modellen kívül létezik valamilyen belső érték nélküli papírpénz, amely lehetővé teszi a cserét olyan partnerek között, akiknek nincs egymás számára értékes feleslegük. Például legyen három termék ($I = 3$), három fogyasztó ($H = 3$) és tegyük föl, hogy az i-edik szereplő vagyona 1 egység i-edik termékből áll, viszont kizárólag $(i + 1)$-edik terméket akar fogyasztani (4=1). Ha körbeállnak és van papírpénz, akkor mindegyik a következőnek átad egy egységet a vagyonából, és megvalósul az egyensúly. Ha azonban nincs pénz (vagy központi kiegyenlítés), akkor nem jön létre az egyensúly. (Ez volt a helyzet például az egykori szocialista országokat tömörítő KGST bilaterális külkereskedelmében.)

Bizonyításvázlat. Normáljuk az árvektort úgy, hogy az elemeinek az összege legyen 1: $\sum_i p_i = 1$. Legyen $z(p) = x(p) - a$ a piaci túlkeresleti függvény. Az egyéni költségvetési korlátok folyományaként fennáll az ún. *Walras-törvény*, a túlkereslet piaci értéke nulla: $p^{\mathbf{T}} z(p) = 0$. Egy olyan T leképezést keressünk, amely „javítja" a nemegyensúlyi árrendszer hibáit. Legyen z_+ a z valós szám pozitív része! Legyen p^* az új árvektor és $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^{\mathbf{T}}$ az összegző oszlopvektor:

$$p^* = T(p) = \frac{[p + z(p)]_+}{[p + z(p)]_+^{\mathbf{T}} \mathbf{1}}.$$

Belátható, hogy T az S_I szimplexnek önmagára való folytonos leképezése, amelynek a Brouwer-féle fixpont-tétel (M.2. tétel) szerint létezik fixpontja. Egyszerű számolással igazolható, hogy T bármely p^{o} fixpontja egyensúly. Valóban, legyen λ a T nevezője, ekkor $p_i^{\mathrm{o}} = \lambda[p_i^{\mathrm{o}} + z_i(p^{\mathrm{o}})]_+$. Amelyik i-re $p_i^{\mathrm{o}} = 0$, arra $z_i(p^{\mathrm{o}}) \le 0$. Amelyik $i \in \mathbf{I}$-re $p_i^{\mathrm{o}} > 0$, azokra $p_i^{\mathrm{o}} = \lambda[p_i^{\mathrm{o}} + z_i(p^{\mathrm{o}})]$, p_i^{o}-lal súlyozva összegezve: $\sum_i p_i^{\mathrm{o}2} = \lambda \sum_i p_i^{\mathrm{o}2} + \lambda \sum_i p_i^{\mathrm{o}} z_i(p^{\mathrm{o}})$, és Walras-törvényt használva $\lambda = 1$, azaz $p_i^{\mathrm{o}} = [p_i^{\mathrm{o}} + z_i(p^{\mathrm{o}})]_+$, tehát $z_i(p^{\mathrm{o}}) \le 0$ és $p_i^{\mathrm{o}} z_i(p^{\mathrm{o}}) = 0$. ∎

Cobb–Douglas cseregazdaság

A Cobb–Douglas hasznosságfüggvények esetén a 20.5. tétel bizonyítása lineáris algebrai, csak a Frobenius–Perron tételre vagy a Markov-lánc ergodicitására szorítkozik.
Legyen $H > 1$ az egyének száma és $I > 1$ a termékeké. Legyen a_{ih} és x_{ih} a h-adik egyén nemnegatív nyitókészlete, illetve zárókészlete, fogyasztása az i-edik termékből. Ha minden termék összesített kezdőkészlete pozitív, akkor a mértékegység megfelelő megválasztásával feltehetjük, hogy minden összesített kezdőkészlet egységnyi:

$$\sum_{h=1}^{H} a_{ih} = 1, \qquad i = 1, \ldots, I.$$

A csere mérlegegyenletei rendre

$$\sum_{h=1}^{H} x_{ih} = 1, \qquad i = 1, \ldots, I.$$

Az egyének hasznosságfüggvénye Cobb–Douglas-féle:

$$u_h(x_{1h}, \ldots, x_{Ih}) = \sum_{i=1}^{I} \beta_{ih} \log x_{ih},$$

ahol a β_{ih} súlyok pozitívak, összegük 1: $\sum_{i=1}^{I} \beta_{ih} = 1$, minden h-ra.

Legyen a keresett egyensúlyi árvektor $p = (p_1, \ldots, p_I)$. Ekkor a h-adik egyén jövedelme $I_h = \sum_{i=1}^{I} p_i a_{ih}$.

A Lagrange-szorzók módszerével az optimális fogyasztás

$$x_{ih} = \frac{\beta_{ih} I_h}{p_i}, \quad i = 1, \ldots, I, \quad h = 1, \ldots, H.$$

Behelyettesítve a mérlegegyenletekbe az optimális fogyasztást és a jövedelmeket:

$$\sum_{h=1}^{H} \beta_{ih} \frac{\sum_{k=1}^{I} p_k a_{kh}}{p_i} = 1, \qquad i = 1, \ldots, I.$$

A $b_{ki} = \sum_{h=1}^{H} \beta_{ih} a_{kh} > 0$ jelölés bevezetésével adódik a fixpont-egyenlet:

$$p_i^{\circ} = \sum_{k=1}^{I} p_k^{\circ} b_{ki}, \qquad i = 1, \ldots, I.$$

Felcserélve az összegzés sorrendjét és felhasználva, hogy a hasznosságsúlyok öszege 1,

$$\sum_{i=1}^{I} b_{ki} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{h=1}^{H} \beta_{ih} a_{kh} = \sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{I} \beta_{ih} a_{kh} = \sum_{i=1}^{I} a_{kh} = 1,$$

a (b_{ki}) sztochasztikus mátrix, tehát a Frobenius–Perron-tétel vagy a Markov-láncok tétele alapján a normálástól eltekintve egyetlen egy pozitív $p^o > 0$ vektor elégíti ki, s ez az egyensúlyi árvektor, 1 sajátértékkel.

20.2. példa. Legegyszerűbb esetben ugyanannyi termék van, mint egyén, és az i-edik termék kezdőkészlete az i-edik egyén tulajdonában van: $I = H$ és $a_{ih} = \delta_{ih}$, ahol δ_{ih} a Kronecker delta. Ekkor $b_{ih} = \beta_{ih}$, azaz az áregyenlet mátrixa a hasznosságsúlyok mátrixa. Ekkor az árarányokat a hasznosságsúlyok mátrixának szerkezete határozza meg.

A kéttermékes gazdaságban $\beta_{11} = 1 - \beta_{21}$ és $\beta_{22} = 1 - \beta_{12}$, $p = (\pi,1)$. A mátrixegyenlet első sora szerint $(1 - \beta_{12})\pi + \beta_{12} = \pi$, azaz $\pi = \beta_{12}/\beta_{21}$. Kvalitatíve: az 1. termék ára akkor és csak akkor nagyobb, mint a 2.-é ($\pi > 1$), ha az 1. egyén a 2. terméknek nagyobb súlyt tulajdonít, mint a 2. egyén az 1. terméknek ($\beta_{12} > \beta_{21}$).

Ebből a példából még az is látható, hogy az egyensúly létezéséhez nem kell feltenni, hogy minden termék minden egyénnek hasznos; elegendő, ha az 1. termék a 2. egyénnek hasznos, a 2. termék pedig az 1. egyénnek: $\beta_{12}, \beta_{21} > 0$.

VII. RÉSZ. KORMÁNYZAT

Eddig olyan helyzeteket vizsgáltunk, ahol a piacon létrejött a versenyző egyensúly. Jegyzetünk végén olyan eseteket vizsgálunk, ahol kormányzati beavatkozásra van szükség az egyensúly megteremtéséhez.

21. A kormányzat elmélete

Először a kormányzat elméletét vázoljuk.

Definíció. *Tiszta közjószág*ról beszélünk, ha a jószág létrehozása után bárkit is nehéz kizárni annak fogyasztásából. Pl. nemzetvédelem, közbiztonság, közegészségügy.

Ilyen javakat szinte lehetetlen piaci eszközökkel előállítani, mert senki sem lenne hajlandó fizetni érte, úgy téve, mintha neki nem is lenne rájuk szüksége (*a potyautas-probléma.*)

Ha ismerjük az egyéni kardinális hasznosságfüggvényeket, és összeadhatjuk őket, akkor kiszámíthatjuk a társadalmi hasznosságfüggvényt, s ennek segítségével annak határfüggvényét is. Kéttermékes világunkban, P a magánjószág, és G a közjószág, a következő mondható.

21.1. tétel. *Az egyensúlyi feltétel: a társadalmi helyettesítési határarány egyenlő a technikai transzformációs rátával:*

$$\mathrm{SMRS} = \mathrm{RPT}.$$

Megjegyzések. 1. Vannak áruk, amelyek a két tiszta kategória közé esnek. Pl. az oktatásnál egyrészt mindenkivel ki lehetne fizettetni a tandíjat, ugyanakkor a tanulatlanul maradók veszélyeztethetik a társadalom működését is.

2. Hiába zárhatók ki a fogyasztásból a nemfizetők, a szabad piac nem biztosítja a társadalmi optimumot. Pl. senki sem fizetne a felsőoktatásért, mert túl kockázatos a befektetés.

3. Önkényes a választóvonal. Pl. a volt szocialista országokban a könyvek viszonylag olcsók voltak, hogy „kultúrálódjék a nép”, viszont állami döntések szabták meg a választékot.

A kormányzat gyakran nem a közjót nézi, hanem saját érdekét, pl. hogy a következő választásnál is hatalomban maradjon. Jelenleg is éles vita folyik a fejlett államokban, hogy mi legyen kormányzati hatáskörben. A skandináv modell 1990 körül elvesztette vonzerejét, de azóta új erőre kapott. A nyugat-európai és az angolszász modell között még folyik a verseny.

22. Külső hatások és tulajdonjogok

Már előzőleg beszéltünk a külső hatásokról. Közkeletű okosság szerint adókat kell kivetni a negatív externáliát termelőkre, és juttatásokban kell részesíteni a pozitív externáliákat termelőket.

Ha *tranzakciós költségek* nélkül lehetne egyezkedni, akkor a tulajdon jogok újraelosztásával kollektivizálás nélkül is meg lehetne teremteni a piaci optimumot (Coase tétele).

FÜGGELÉKEK

M. Matematikai függelék

Ebben a függelékben két matematikai kérdéskört vázolunk, amely általában kimarad a hagyományos matematikai oktatásból.

Nem-negatív mátrixok

A *spektrálsugár* definíciójához szorosan kapcsolódik két további meghatározás. Egy mátrix *domináns sajátértéke* egy olyan sajátérték, amelynek abszolút értéke maximális. Domináns sajátértékhez tartozó sajátvektort *domináns sajátvektor*nak nevezünk, amelynek algebrai és geometriai multiplicitása egyaránt lehet 1-nél nagyobb. (Például az I transzformációnak minden vektor domináns sajátvektora, 1 sajátértékkel: $r = r^* = n$.)

Nyilvánvaló okok miatt a közgazdaságtanban nagyon fontosak a *nem-negatív (pozitív) elemű* mátrixok, ahol $m_{ij} \geq 0$ ($m_{ij} > 0$). (A legújabb magyar helyesírási szabályzat megalkotói nagy hibát követtek el, amikor bevezették a *nem* kezdetű jelzők különírását! Ugyanis a *nem negatív* elemű mátrixok nem azonosak a *nem-negatív* elemű mátrixokkal! Az előbbi osztályba olyan mátrixok tartoznak, amelyeknek van legalább egy nem negatív elemük, míg az utóbbiba olyan mátrixok tartoznak, amelyeknek minden eleme nem negatív!)

Néha blokk-diagonális mátrixokkal dolgozunk, mert azok kisebb méretű mátrixokhoz vezetnek. Máskor éppen ellentétes a célunk, el akarjuk kerülni, hogy a rendszer részeire bomoljék.

A következő tételt és folyományait Perron (pozitív mátrixokra) és Frobenius (nem-negatív mátrixokra) fedezte föl, és az 1950-es évek óta alapvető szerepet játszanak a matematikai közgazdaságtanban.

M.1. tétel. *(Frobenius 1. tétele: 1908, Zalai, 1989, 2. fejezet, Rózsa, 1974.) Legyen a négyzetes M mátrix nem-negatív és irreducíbilis. Ekkor igazak a következő állítások.*

a) M-nek van egy pozitív domináns sajátértéke.

b) Létezik (egy skalárszorzótól eltekintve) egyetlen pozitív sajátvektor, amely a pozitív domináns sajátértékhez tartozik.

c) A pozitív domináns sajátérték algebrai multiplicitása 1.

d) A pozitív domináns sajátérték növekvő függvénye bármely pozitív elemnek.

e) Ha a spektrálsugár kisebb, mint 1, akkor $(I - M)^{-1}$ létezik és pozitív.

A **bizonyítás**ból csak az alapgondolatot említjük meg: Az $x = (x_1, \ldots, x_n)$ esetén

$$\rho(x) = \min \left[\frac{(Mx)_i}{x_i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad x_i \neq 0 \right]$$

függvény jól definiált, és a maximumát az $s_1 > 0$ sajátvektornál veszi föl, értéke: $\rho(M) = \lambda_1$ pozitív domináns sajátérték.

Brouwer-féle fixponttétel

Mind a matematikában, mind a közgazdaságtanban nagyon gyakran találkozunk ún. fixpont-feladatokkal.

Definíció. Legyen $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ egy függvény, amely az $\mathcal{X}$ halmazt önmagába képezi le. Ekkor egy $x^{\mathrm{o}} \in \mathcal{X}$ pontot *fixpont*nak nevezünk, ha a leképezés helyben hagyja:

$$x^{\mathrm{o}} = f(x^{\mathrm{o}}).$$

M.2. tétel. *(Brouwer-féle fixponttétel.) Ha az f folytonos leképezés az n-dimenziós korlátos, zárt és konvex $\mathcal{X}$ halmazt önmagába képezi le (invariancia), akkor létezik legalább egy fixpontja.*

Megjegyzések. 1. Ez a tétel mind a matematikában, mind a közgazdaságtanban alapvető szerepet játszik. Valóban, a fixpont létezése az n-dimenziós zárt és konvex tartományokat önmagukba leképező folytonos leképezések egyik legfontosabb tulajdonsága. Hasonlóan, a fixpont létezése az általános egyensúlyelmélet alapja.

2. A Brouwer-féle fixponttétel azonban nem mondja meg, hogy miképp lehet a fixpontot megtalálni. A Banach-féle fixpont-tétel (a kontrakciós-elv) egy természetes megoldást ad, azonban nagyon megszorító feltevések mellett.

3. A zártság és a korlátosság szerepe nyilvánvaló, a konvexitásét egy egyszerű példán mutatjuk meg.

M.1. példa. Nincs konvexitás $\Rightarrow$ nincs fixpont. Legyen $\mathcal{X}$ egy síkbeli körgyűrű, melynek pontjaira teljesül $1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4$. Legyen f a körgyűrű 90^o-os elforgatása az origó körül. $\mathcal{X}$ korlátos és zárt (de nem konvex), f folytonos, $f(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$, de f-nek nyilván nincs fixpontja. (Az $x_1^2 + x_2^2 \le 4$ körlemeznél $0 = f(0)$ lenne a fixpont!) ∎

M.2. példa. A köztes érték tétele. Skalár függvény esetén ($n = 1$) az M.1. tétel a jól ismert Bolzano-tételre vezet. Valóban, ekkor $\mathcal{X} = [a, b]$, s az $f(x) - x$ függvény a-ban nem negatív, b-ben nem pozitív, azaz egy közbülső $x^{\mathrm{o}} \in \mathcal{X}$ helyen nulla, azaz x^{o} fixpont. ∎

M.3. példa. Homogén véges állapotú Markov-lánc (Rényi, 1966). Legyen I az állapotok száma, m_{ij} annak a feltételes valószínűsége, hogy a j-edik állapotból a rendszer az i-edik állapotba kerül, és $M = (m_{ij})$ az átmenetmátrix. Az $x = (x_1, \ldots, x_I)$ vektor valószínűségi vektor, ha $x \ge 0$ és $\sum_{i=1}^I x_i = 1$. Ekkor $y = Mx$ is valószínűség-vektor. Egy x^* valószínűség-vektor a Markov-lánc stacionárius pontja, ha $x^* = Mx^*$, azaz x^* az M leképezés fixpontja. A teljes valószínűség tétele szerint $\sum_{i=1}^I m_{ij} = 1$ minden j-re, tehát M-nek az $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ összegzővektor 1 sajátértékű bal oldali sajátvektora, tehát van 1 sajátértékű jobb oldali sajátvektora, éppen a stacionárius pont. Az M mátrixra vonatkozó szigorúbb feltevések esetén (van olyan k természetes szám, amelyre $M^k > 0$) éppen a Frobenius–Perron-tétel alapján adódik, hogy a stacionárius pont valószínűségi vektor.

Ekkor az is belátható, hogy az $x_{t+1} = Mx_t$ iteráció tetszőleges x_0 kezdőállapotra aszimptotikusan tart az egyetlen x^* stacionárius állapothoz.

K. Közgazdasági függelék

A 2. és a 6. fejezetben már érintettük a preferenciarendezés és az őt reprezentáló hasznosságfüggvény fogalmát.

A Neumann–Morgenstern féle hasznosságfüggvény

Föltesszük, hogy adott egy preferenciarendezés, amely nemcsak biztos díjakon, hanem bizonytalan kimenetelű lottók halmazán (jele L) is értelmezve van. A fogyasztó p valószínűséggel x-et, $1-p$ valószínűséggel y-t kap, szimbolikusan: $p\text{o}x+(1-p)\text{o}y$. A díj lehet pénz, áru sőt, lottó. Föltesszük, hogy 1) az 1 valószínűségű nyeremény azonosítható a biztossal, 2) a díjak felsorolási rendje közömbös, és 3) a fogyasztó számára közömbös a valószínűségek „csomagolása", azaz

$$q\text{o}(p\text{o}x + (1-p)\text{o}y) + (1-q)\text{o}y \sim (qp)\text{o}x + (1-qp)\text{o}y.$$

A többesélyes lottó visszavezethető a kétesélyes lottóra. Lássuk pl. a háromesélyes lottó visszavezetését:

$$p\text{o}x + q\text{o}y + (1-p-q)\text{o}z \sim (p+q)\text{o}\left(\frac{p}{p+q}\text{o}x + \frac{q}{p+q}\text{o}y\right) + (1-p-q)\text{o}z.$$

A közgazdaságtanban alapvető szerepet játszik a várt hasznosságon alapuló Neumann–Morgenstern féle hasznosság-függvény, amely egy preferenciarendezést speciálisan reprezentál:

Célok: (i) Monotonitás a preferencia-rendezés és az u hasznosságfüggvény között:

$$\text{Ha } x \succeq y, \qquad \text{akkor} \qquad u(x) \geq u(y).$$

(ii) (Várható hasznosság). A kombináció hasznossága a hasznosságok kombinációja:

$$u(p\text{o}x + (1-p)\text{o}y) = pu(x) + (1-p)u(y).$$

Kiegészítő axiómák

C1. Azoknak a p valószínűségeknek a halmaza, melyekre $p\text{o}x + (1-p)\text{o}y \succeq z$, zárt. Ugyanaz $p\text{o}x + (1-p)\text{o}y \preceq z$-re.

C2. Ha két díj között a fogyasztó közömbös, akkor egy harmadik díj azonos valószínűségű hozzákeverése után is fönnmarad a közömbösség:

$$\text{Ha } x \sim y, \qquad \text{akkor} \qquad p\text{o}x + (1-p)\text{o}z \sim p\text{o}y + (1-p)\text{o}z.$$

C3. L-ben van legjobb és legrosszabb díj: b és w. Azaz minden $x \in L$-re $b \succeq x \succeq w$.

K.1. tétel. *Az axiómák teljesülése esetén létezik és lényegében egyértelműen meghatározott az NM-hasznosságfüggvény.*

Bizonyítás-vázlat. Normálás: $u(w) = 0$ és $u(b) = 1$. Konstrukció: Legyen $b \succeq z \succeq w$, ekkor C1 szerint létezik egy pontosan olyan p_z valószínűség, amelyre $p_z\text{o}b + (1-p_z)\text{o}w \sim z$. Ekkor (ii) folytán $u(z) = p_z u(b) + (1-p_z)u(w) = p_z$. Ellenőrzés (számolással): kielégíti a várható hasznosság feltételét és monoton. ∎

Megjegyzés. A bizonyítás nagyon hasonlít a 3.2. tétel 2. megjegyzésében említett Debreu-féle tétel bizonyításához, azonban a jelen tétel 1947-ből származik, Debreu-é pedig 1954-ből!

Kockázatkedvelés vagy kockázatkerülés

Az NM-féle hasznosságfüggvény nem ekvivalens a pénzben kifejezett nyereséggel, hiszen nem a várható pénzre, hanem a várható hasznosságra vonatkozik az additivitás.

K.1. példa. A lottójátékos alkalmanként 200 Ft-os biztos kiadással jut hozzá egy olyan szelvényhez, amelynek várható értéke kb. 60 Ft. Viszont a kis valószínűségű nyereség olyan nagy, hogy hetente több millió szelvényt vesznek 10 milliós országunkban. ∎

Definíció. Egy *személyt kockázatkedvelőnek/kockázatkerülőnek* nevezünk, ha elutasít/előnybe részesít egy biztos pénzdíjat egy olyan lottóval szemben, amelynek a matematikai várható értéke azonos vele:

$$pu(x) + (1-p)u(y) > u(p \circ x + (1-p) \circ y): \qquad \textit{kockázatkedvelő},$$

$$pu(x) + (1-p)u(y) < u(p \circ x + (1-p) \circ y): \qquad \textit{kockázatkerülő}.$$

A továbbiakban kockázatkerülő egyénekkel foglalkozunk, hiszen a normális esetekben ez fontosabb, mint a másik.

K.2. tétel. *Egy döntéshozó akkor és csak akkor kockázatkerülő, ha az u hasznosságfüggvény szigorúan konkáv ($u'' < 0$).*

Bizonyítás. Szigorúan konkáv u függvények egyik tulajdonsága (a Jensen-egyenlőtlenség) szerint két különböző $x \neq y$ pontot összekötő húr végig a függvénygörbe alatt helyezkedik el: tetszőleges $0 < p < 1$ esetén

$$pu(x) + (1-p)u(y) < u(px + (1-p)y).$$

∎

K.2. példa. (Daniel Bernoulli szentpétervári paradoxona 1735-ből.) Fej-vagy-írást játszunk addig, amíg először nem nyerünk. Az n-edik lépésben 2^n a tét. A várható pénznyereség 1, de a várható tőkeigény végtelen. Ha a hasznosságfüggvény konkáv és korlátos, akkor a játék értéke véges. ∎

Definíció. (Pratt (1964) és Arrow (1965).) Ha w a fogyasztó gazdagsága, akkor a *kockázatkerülés abszolút* és *relatív együtthatója*

$$a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} \qquad \text{és} \qquad r(w) = wa(w).$$

A következőkben bebizonyítjuk, hogy $a(w)$ valóban az abszolút kockázattal kapcsolatos, (angolul: Absolute Risk Aversion, rövidítése ARA). Tegyük föl, hogy az u hasznosságfüggvényű w gazdagságú fogyasztó egy p valószínűségű x nyereményért a $q = 1 - p$ valószínűségű $y(x)$ maximális veszteséget hajlandó elviselni.

K.3. tétel. *a) A veszteség/nyeremény arány a nulla határértéknél egyenlő a nyerési-valószínűség/vesztési-valószínűség arányával:*

$$y'(0) = \frac{p}{q}.$$

b) Adott nyerési-valószínűség esetén a maximális veszteség második deriváltja arányos a Pratt-féle abszolút kockázatkerülési együtthatóval:

$$y''(0) = \frac{p}{q^2}a(w).$$

Bizonyítás. a) A közömbösségi feltétel szerint

$$pu(w + x) + qu(w - y(x)) = u(w).$$

Differenciáljuk az azonosságot x szerint:

$$pu'(w + x) - qu'(w - y(x))y'(x) = 0.$$

Lokálisan vizsgálódva ($x = 0$) adódik az első arányosság. b) Mégegyszer differenciáljuk az azonosságot x szerint és $x = 0$-t véve:

$$pu''(w) + qu''(w)y'(0)^2 - qu'(w)y''(0) = 0.$$

Behelyettesítve az $y'(0)$-ra kapott képletet, adódik

$$y''(0) = -\frac{pu''(w)}{q^2u'(w)}.$$

∎

K.3. példa. Állandó abszolút kockázatkerülési együttható (CARA): $u(w) = A^{e-\sigma w}$. ∎

K.4. példa. Állandó relatív kockázatkerülési együttható (CRRA): $u(w) = A\sigma^{-1}w^{\sigma}$, ha $\sigma < 1$, $\sigma \neq 0$ és $u(w) = A\log w$, ha $\sigma = 0$. (Ha $u(w)$-t nem szoroznánk be σ^{-1}-gyel (vagy σ-val), akkor $\sigma < 0$-nál $u(w)$ csökkenő függvény volna!) ∎

Megjegyzés. Ha nincs kockázatvállalás ($\sigma = r(w) = -\infty$), akkor megszűnik az additivitás, eltűnnek a valószínűségek és $u(x,y) = \min(x,y)$.

Biztosítás

Talán a biztosítás a legegyszerűbb példa a kockázatkerülésre. Biztosítási modellünkben egy ügyfél eredeti jövedelme w, amelyet a p valószínűségű baleset $w-c < w$-re csökkent. Mivel az ügyfél hasznosságfüggvénye $W(w,w - c) = pU(w - c) + qU(w)$, $q = 1 - p$ és U *konkáv*, az ügyfélnek érdemes a balesetmentes jövedelmét csökkentenie, hogy baleset esetén megmaradó jövedelmét növelje. A biztosító közömbös a kockázattal szemben, számára csak az fontos, hogy ne veszítsen az üzleten (tökéletes verseny és nulla költség). A b biztosítási díj ellenében a balesetet szenvedő ügyfél k összegű kártérítést kap, így a biztosított fél feltételes jövedelme $w - b$ és $w - c - b + k$. Az ügyfél optimalizál: olyan k-t választ, amelynél $W(w - b,w - c - b + k)$ minimális. Biztosító: $b = pk$.

*Teljes biztosítás*ról beszélünk, ha $k = c$.

K.4. tétel. *Teljes biztosításnál a biztosított biztosan megkapja a biztosítás nélküli jövedelmének várható értékét, jóléti vesztesége minimális.*

Bizonyítás. A Jensen-egyenlőtlenség értelmében $W(w-b,w-c+qk) = pU(w-c+qk)+qU(w-pk) > U[p(w-c+qk)+q(w-pk)] = U(w-pc)$, ahol a minimumhely $w-c+qk = w-pk$, azaz $k^{o} = c$. ∎

Megjegyzések. 1. A valóságban a biztosításnak van költsége (d), sőt π normálprofitot is kell hoznia, ezért az általános esetben $b = pk$ helyett $b = (pk+d)(1+\pi)$ áll.

2. Nagyon gazdag embernek vagy intézménynek (államnak) nem érdemes biztosítást kötnie viszonylag kis károkra (például az osztrák államnak a Burgra, a megyei Volánnak a járműveire), mert a biztosító haszna nagyobb lenne, mint a tulajdonos kockázati vesztesége.

3. A biztosítás ténye és a kártérítés összege növelheti a baleset valószínűségét (p növekvő függvénye k-nak), ezért a probléma bonyolultabb: célszerű lehet csak részleges biztosítást nyújtani, $k < c$. Ezzel a kérdéssel az információgazdaságtan foglalkozik.

O. Függelék: A kőolajár változása

A kőolaj a világ legfontosabb nyersanyaga, és áralakulása különleges fontosságú. 1960 óta a legnagyobb olajexportáló országok zöme, Szaud-Arábiával az élen árkartellt alkotnak OPEC néven (Organization of Petrol Exporting Countries). (Szovjetunió/Oroszország, Kanada és Norvégia nem tagja az OPECnek!) Az olajár vadul ugrál fel-le, és a következő táblázat a fontosabb fordulókat mutatja be, állandó (2009-es áron, hordónként, 159 liter).

O.1. táblázat *Az olajárak ingadozása és külső oka, 2009-es dollár*

Év	Ár/hordó	Esemény
1970	10	Olcsó olaj korszaka
1974	50	Első olajembargó
1980	96	Irak megtámadja Iránt
1985	28	Az embargó végleg összeomlik
1990	39	Irak megtámadja Kuvaitot
1998	17	Ázsiai válság
2008	97	Vihar előtti csend (júliusi csúcs: 146 dollár)
2009	62	Összeomlás
2010	80	Részleges felépülés

Forrás: HVG, 2010. december 25, 127. o.

FELADATOK

A. Fogyasztás

A.1. feladat. Igazoljuk, hogy az $U(X, Y) = X^\alpha Y^\beta$, $(0 \leq \alpha, \beta \leq 1)$ függvény a) akkor és csak akkor konkáv, ha $\alpha + \beta \leq 1$; b) szintvonalai mindig konvexek! (Kvázikonkáv függvény nem mindig konkáv!)

A.2. feladat. Legyen a fogyasztó jövedelme 10 Ft, az X jószág ára 1 Ft és az Y-é 2 Ft. Legyen a fogyasztó hasznosságfüggvénye $U(X, Y) = X + Y$. a) Határozzuk meg a fogyasztó optimális döntését! b) Hogyan változik a döntés, ha X ára fokozatosan nő 1-ről 3 Ft-ra? c) Tegyük föl, hogy az a) esetben a vevő mindkét jószágból legfeljebb 4 egységet vehet (korlátozás). Mi lesz az új optimum? d) A helyettesítési- vagy a jövedelmi hatás nagyobb, ha a b) esetben P_X 1,5 Ft-ra nő?

A.3. feladat. a) 1987-ben Magyarországon a dollár hivatalos árfolyama $P_\mathrm{h} = 50$ Ft/\$, amelyen minden magyar állampolgár évi 100 \$-t vehet forintért. Mivel a fogyasztó összesen $I = 11000$ Ft-ot szán dollárvételre, maradék jövedelmével a feketepiacon támaszt keresletet. Itt az egy fogyasztóra jutó évi kínálat $S_\mathrm{f} = \sigma(P_\mathrm{f} - P_\mathrm{h})$, ahol $\sigma = 10^2/\mathrm{Ft}$ és P_f a feketepiaci árfolyam. Mekkora a feketepiac árfolyama és forgalma? b) Hogyan csökkentheti az állam a feketepiaci árfolyamot 55 Ft/\$-ra (i) a hivatalos kínálat, ill. (ii) a hivatalos árfolyam változtatásával?

A.4. feladat. Életciklus. a) Tegyük föl, hogy egy egyén $D+1$ évig él, i éves korában a fogyasztása c_i, keresete w_i. Írjuk föl az életpálya-költségvetési feltételt, ha $R = 1 + r$ a kamattényező! b) Legyen az életpálya-hasznosságfüggvény $U = \sum_{i=0}^{D} \beta^i \log c_i$, ahol $0 < \beta \leq 1$ az időszaki leszámítolási tényező! Határozzuk meg az optimális fogyasztási pályát!

A.5. feladat. Tegyük föl, hogy a kávé iránti kereslet árfüggvénye $D = I/P^3$. Számítsuk ki a kereslet ár- és jövedelem-rugalmasságát, ha $I = 10000$ Ft és $P = 400$ Ft!

B. Termelés

B.1. feladat. Egy vállalat termelési függvénye $Q = K^{0,5} L^{0,5}$, ahol K és L az alkalmazott tőke és munka mennyisége. Egységnyi tőke és munka díja egyaránt 1000 Ft.

a) Készítsünk táblázatot a rövid távú teljes költségről $K = 1; 2; 3$ és $Q = 1; 2; 3$ esetére! b) Határozzuk meg a hosszú távú teljes költséget $Q = 1; 2; 3$ esetére!

B.2. feladat. Tegyük föl, hogy egy ország termelési függvénye $Q = 10K^{0,25} L^{0,75}$, $K = 16$ és $L = 1$. a) Mekkora az optimális tőkedíj, ill. munkabér a termékár függvényében? b) Mekkora a tőke, ill. a munka részesedése az össztermékből?

B.3. feladat. Legyen egy vállalat termelési függvénye $Q = \min(K,2L)$, ahol Q a termék, K a (rövid távon adott) tőke és L a (rövid távon is változtatható) munka mennyisége. Egységnyi tőke és munka díja 1, ill. 4 Ft. a) Készítsünk táblázatot a rövid távú teljes költségről $K = 1; 2; 3$ és $Q = 1; 2; 3$ esetére! b) Határozzuk meg a hosszú távú teljes költséget $Q = 1; 2; 3$ esetére! c) Számítsuk ki a rövid- és hosszú távú határköltségeket!

B.4. feladat. Tegyük föl, hogy egy vállalat költségfüggvénye $\mathrm{TC}(Q) = a + bQ + cQ^2$, ahol a, b és c pozitív állandók. Bizonyítsuk be, hogy költségminimalizálásnál $\mathrm{AC} = \mathrm{MC}$!

C. Verseny, monopólium és duopólium

C.1. feladat. Egy tökéletes verseny jellemezte iparágban sok egyforma cég létezik. Hosszú távú optimális kibocsátásuk $q_i = 20$, minimális egységköltségük 10 \$. A piaci kereslet $Q = 1500 - 50P$. a) Mi az iparág hosszú távú kínálati görbéje? b) Mekkora a hosszú távú egyensúlyi ár (P^o), az iparág kibocsátása (Q^o), az egyes vállalatok kibocsátása (q^o), a vállalatok száma (n) és profitjuk (π_i)? c) Az egyes vállalatoknak a hosszú távú optimális kapacitás melletti rövid távú teljes költsége $C = 0{,}5q^2 - 10q + 200$. Számítsuk ki a rövid távú átlag- és határköltségeket! Hol lesz az első minimális?

C.2. feladat. Egy monopolista piacon a keresleti görbe $Q = 4/P^2$ és a teljes költség $\mathrm{TC} = 1 + Q^2/2$. Számítsuk ki a monopolista kibocsátását, árát és profitját!

C.3. feladat. Tegyük föl, hogy egy légitársaság monopolizálja a New York és London közti légiutazást. Egy utas egyirányú szállításának költsége 200 \$. Két típusú utas van: 1. a turista és 2. az üzletember. A turista tartózkodási ideje 2 hét és 3 hónap között mozog, az üzletemberé ennél rövidebb vagy hosszabb. A turista/az üzletember keresleti függvénye $Q_i = a_i - b_i P_i$, $i = 1; 2$, ahol $a_1 = 4 \cdot 10^7$, $b_1 = 10^5/\$$ és $a_2 = 2{,}4 \cdot 10^6$, $b_2 = 2 \cdot 10^3/\$$. a) Számítsuk ki a monopolista árait, forgalmát és profitját, ha sikerül külön árat felszámítania a két osztálynak! b) Mi történik, ha minden utasnak azonos árat számíthat föl? c) Mekkora lenne az ár, ha a monopóliumot a szabad verseny váltaná föl?

C.4. feladat. Két vállalat 20, ill. 5 Ft egységköltséggel állít elő egy terméket. A duopól piac keresleti függvénye $Q = 100 - 2P$. Határozzuk meg a két vállalat egyensúlyi kibocsátását, a piaci árat és a profitokat, feltéve, hogy a két vállalat egymástól függetlenül optimalizál!

D. Általános egyensúly

D.1. feladat. Kovács hasznosságfüggvénye $U_1(X_1, Y_1) = \min(2X_1, Y_1)$ és Nagy hasznosságfüggvénye $U_2(X_2, Y_2) = X_2 + 2Y_2$. Kezdeti összgazdagságuk $X^o = 300 = Y^o$. a) Határozzuk meg az Edgeworth-szerződésgörbét (figyelembe véve a sarokoptimumokat)! b) Tegyük föl, hogy Kovács kezdeti gazdagsága $X_1^o = 200$, $Y_1^o = 100$. Határozzuk meg az optimális cserék görbéjét!

D.2. feladat. Kovács hasznosságfüggvénye $U_1(X_1, Y_1) = X_1^2 Y_1$ és Nagy hasznosságfüggvénye $U_2(X_2, Y_2) = X_2 + Y_2$. Kezdeti összgazdagságuk $X^o = 100$ és $Y^o = 200$. a) Határozzuk meg az Edgeworth-szerződésgörbét (figyelembe véve a sarokoptimumokat)! b) Tegyük föl, hogy Kovács kezdeti gazdagsága $X_1^o = 0$, $Y_1^o = 100$. Határozzuk meg az optimális cserék görbéjét!

D.3. feladat. Kovács hasznosságfüggvénye $U_1(X_1, Y_1) = X_1^\alpha Y_1^\beta$ és Nagy hasznosságfüggvénye $U_2(X_2, Y_2) = X_2^\gamma Y_2^\delta$. Kezdeti összgazdagságuk $X^o > 0$ és $Y^o > 0$. a) Határozzuk meg az Edgeworth-szerződésgörbét! b) Tegyük föl, hogy Kovács kezdeti gazdagsága $0 < X_1^o < X^o$, $0 < Y_1^o < Y_1^o$. Határozzuk meg az optimális cserék görbéjét!

D.4. feladat. a) Legyen egy zárt gazdaság termelési lehetőségeinek halmaza $X^2 + Y^2 \leq 100$. A fogyasztó hasznosságfüggvénye $U(X, Y) = \min(2X, Y)$. Mennyi az optimum? b) Tegyük föl, hogy az ország bekapcsolódik a világpiacba, ahol $P_X/P_Y = 3$ a világpiaci árarány. Hogyan módosul az optimális kibocsátás és fogyasztás?

D.5. feladat. Tegyük föl, hogy egy gazdaságnak egyetlen (szűkös) termelési tényezője van: a munka, melynek segítségével két terméket állít elő: egységnyi élelemhez

(E) és iparcikkhez (I) 2, ill. 1 egység munka kell. A gazdaságban összesen 300 egység munka van.

a) Állapítsuk meg az ország termelési lehetőségeinek a határát!

b) Legyen az ország fogyasztóinak hasznosságfüggvénye $U(E, I) = E^2 I$. Zárt gazdaság esetén mi az optimális kibocsátás, ill. - árrendszer?

c) Tegyük föl, hogy az ország bekapcsolódik a világpiacba, ahol $P_E/P_I = 0{,}5$ a világpiaci árarány. Hogyan módosul az optimális kibocsátás és fogyasztás?

D.6. feladat. a) Legyen a zárt A és a B gazdaság termelési lehetőségeinek halmaza $X_{\mathrm{A}}^2 + 4Y_{\mathrm{A}}^2 \leq 400$, ill. $X_{\mathrm{B}} + Y_{\mathrm{B}} \leq 100$. Legyen az A és a B fogyasztó hasznosságfüggvénye $U_{\mathrm{A}}(X_{\mathrm{A}}, Y_{\mathrm{A}}) = X_{\mathrm{A}} Y_{\mathrm{A}}$, ill. $U_{\mathrm{B}}(X_{\mathrm{B}}, Y_{\mathrm{B}}) = \min(4X_{\mathrm{B}}, Y_{\mathrm{B}})$! Mennyi a két ország optimuma?

b) Tegyük föl, hogy a két ország kereskedni kezd egymással! Hogyan módosul az optimális kibocsátás?

c) Hogyan módosul az optimális fogyasztás?

D.7. feladat. Együttélő nemzedékek (vö. A.4). a) Mindenki 2 időszakig él: fiatal és idős, fogyasztása c_0, ill. c_1, keresete w_0, ill. w_1. Ha R a kamattényező, akkor az életciklus-feladat alapján írjuk föl az optimális fogyasztást! b) Írjuk föl a megtakarítási egyensúlyt, feltéve, hogy minden idősre $\nu > 0$ fiatal jut! c) Mennyi az egyensúlyi kamattényező?

E. Gyakorlati kérdések

E.1. feladat. Magyarázzuk meg a monopolista árdiszkrimináció elmélete alapján, hogy miért olcsóbb a minimális és maximális tartózkodási időt megkövetelő menettérti repülőjegy, mint két egyirányú jegy (sőt, mint egy egyirányú jegy).

E.2. feladat. A mikroökonómia melyik részével és hogyan lehet megmagyarázni az OPEC tündöklését és bukását?

E.3. feladat. Tegyük föl, hogy annak idején egy szocialista gazdaságban a kormány bevezette volna a következő lakbérreformot: a) a lakbéreket megemelte volna a burkolt lakbértámogatások összegével, b) a nyilvánossá tett támogatásokat családlétszám szerint osztotta volna el. Mi történt volna?

E.4. feladat. Hogyan lehet mikroökonómiailag megmagyarázni, hogy a szocialista gazdaságban az állami iparban az órabér sokkal alacsonyabb volt, mint a magániparban? Ma ugyanez a hazai és külföldi tulajdonban lévő vállalatokra érvényes.

E.5. feladat. Hozzunk példát olyan monopóliumokra, amelyek hasznosak a fogyasztóra!

E.6. feladat. Hozzunk példákat olyan részpiacokra, ahol a magyar gazdaságban szabadabb verseny van, mint pl. az amerikaiban!

Matematikai függelék

M.1. feladat. Közvetlenül igazoljuk az M.1. tételt $n = 2$-re!

Közgazdasági függelék

K.1. feladat. Racionális lenne-e az a személy, aki egy alkalommal kb. 44 millió lottószelvényt venne, hogy biztos öttalálatosa legyen?

K.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy CARA-nál $a(w) = \sigma$ és CRRA-nál $r(w) = 1 - \sigma$.

K.3. feladat. Egy ember vagyona w, ebből autójának értéke $c < w$. Legyen p annak az eseménynek a valószínűsége, hogy autóját egy év alatt ellopják. a) Mekkora lehet a maximális biztosítási díj, amit a biztosított hajlandó kifizetni (i) egy teljes, illetve (ii) egy $c - k$-önrészesedésű biztosításért, ahol csak $k < c$ a kártérítés? b) Számolja ki az (i) feladatot, ha $U(w) = \sqrt{w}$, $w = 1{,}5$ mFt, $c = k = 1$ mFt és $p = 0{,}03$, ill. a (ii) feladatot, ha $k = 0{,}9$ mFt!

MEGOLDÁSOK

A. Fogyasztás

A.1. feladat. a) Az $U(X, Y)$ függvény akkor és csak akkor konkáv, ha $U''_{XX} \leq 0$, $U''_{YY} \leq 0$ és $U''_{XX}U''_{YY} - {U''_{XY}}^2 \geq 0$ teljesül. Számítsuk ki a szóban forgó másodrendű parciális deriváltakat! $U''_{XX} = \alpha(\alpha - 1)X^{\alpha-2}Y^{\beta}$, $U''_{YY} = \beta(\beta - 1)X^{\alpha}Y^{\beta-2}$, $U''_{XY} = \alpha\beta X^{\alpha-1}Y^{\beta-1}$. $\alpha \leq 1$ miatt $U''_{XX} \leq 0$, $\beta \leq 1$ miatt $U''_{YY} \leq 0$. Behelyettesítéssel: $U''_{XX}U''_{YY} - {U''_{XY}}^2 = \alpha\beta X^{2(\alpha-1)}Y^{2(\beta-1)}((\alpha-1)(\beta-1) - \alpha\beta)$, amely arányos $-\alpha-\beta+1$-gyel. Ez utóbbi pozitivitása ekvivalens $\alpha + \beta \leq 1$-gyel. b) A $c > 0$ állandóhoz tartozó szintvonal implicit egyenlete $U(X, Y) = X^{\alpha}Y^{\beta} = c$, explicit egyenlete $Y = bX^{-\alpha/\beta}$, ahol $b > 0$ egy alkalmas állandó. Szintvonal-függvényünk akkor és csak akkor konvex, ha $Y'(X)$ növekvő. $Y'(X) = b(-\alpha/\beta)X^{-\alpha/\beta-1}$ pedig pozitív α és β mellett mindig növekvő.

A.2. feladat. Mivel a két jószág tökéletesen helyettesíti egymást, és a helyettesítési határarány 1, a fogyasztó teljes jövedelmét az olcsóbb árura költi: a) $X^{\mathrm{o}} = 10$, $Y^{\mathrm{o}} = 0$. b) Az a) döntés érvényes marad, amíg $P_X < 2$ Ft. Ha $P_X = 2$ Ft, akkor végtelen sok optimális döntés van: $0 \leq X^{\mathrm{o}} \leq 10$ és $Y^{\mathrm{o}} = (10 - X^{\mathrm{o}})/2$. Ha $P_X > 2$ Ft, akkor megfordul a kocka: $X^{\mathrm{o}} = 0$ és $Y^{\mathrm{o}} = 5$. c) Ha a kínálat korlátozott, akkor a helyettesítés korlátba ütközik: $X^{\mathrm{o}} = 4$ és $Y^{\mathrm{o}} = 3$. d) A jövedelmi, mert nincs helyettesítés!

A.3. feladat. Definíció szerint a feketepiaci kereslet $D_{\mathrm{f}}(S_{\mathrm{h}}, P_{\mathrm{h}}, P_{\mathrm{f}}) = (I - S_{\mathrm{h}}P_{\mathrm{h}})/P_{\mathrm{f}}$. A feketepiacon egyensúly van: $D_{\mathrm{f}} = S_{\mathrm{f}}$. Helyettesítsük be az egyensúlyi feltételbe D_{f} és S_{f} képletét:

$$(*) \qquad \frac{I - S_{\mathrm{h}}P_{\mathrm{h}}}{P_{\mathrm{f}}} = \sigma(P_{\mathrm{f}} - P_{\mathrm{h}}).$$

a) Rendezzük egyenletünket P_{f}-re: $\sigma P_{\mathrm{f}}^2 - \sigma P_{\mathrm{h}}P_{\mathrm{f}} + S_{\mathrm{h}}P_{\mathrm{h}} - I = 0$. Behelyettesítve adatainkat: $10P_{\mathrm{f}}^2 - 500P_{\mathrm{f}} - 6000 = 0$. Megoldás: $P_{\mathrm{f}}^{\mathrm{o}} = 60$ Ft/\$. (A második megoldás negatív, tehát értelmetlen.) b) Fejezzük ki (*)-ból S_{h}-t, ill. P_{h}-t:

$$(**) \qquad S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{o}} = \frac{I + \sigma P_{\mathrm{f}}(P_{\mathrm{h}} - P_{\mathrm{f}})}{P_{\mathrm{h}}}, \qquad \text{ahol} \qquad P_{\mathrm{h}} = 50 \qquad \text{és} \qquad P_{\mathrm{f}} = 55$$

$$(***) \qquad P_{\mathrm{h}}^{\mathrm{o}} = \frac{\sigma P_{\mathrm{f}}^2 - I}{\sigma P_{\mathrm{h}} - S_{\mathrm{h}}}, \qquad \text{ahol} \qquad S_{\mathrm{h}} = 100 \qquad \text{és} \qquad P_{\mathrm{f}} = 55.$$

Számolással: $S_{\mathrm{h}} = 164$ \$ és $P_{\mathrm{h}} = 42{,}77$ Ft/\$.

A.4. feladat. a) $\sum_{i=0}^{D}(w_i - c_i)R^{-i} = 0$.
b) Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{D} \beta^i \log c_i + \lambda(w_i - c_i)R^{-i}$$

Stacionaritási feltételek: $\mathcal{L}'_{c_i} = \beta^i 1/c_i - \lambda R^{-i} = 0$. Rendezve: $c_i = \lambda^{-1}(\beta R)^i$. Visszahelyettesítve a költségvetési korlátba:

$$\sum_{i=0}^{D} w_i R^{-i} - \lambda^{-1}\beta^i = 0,$$

azaz

$$\lambda^{-1} = \frac{\sum_{i=0}^{D} w_i R^{-i}}{\sum_{i=0}^{D} \beta^{-i}}.$$

A.5. feladat. Ha $D(I, P) = \mu I^{\iota}/P^{\pi}$, akkor differenciálással adódik, hogy a rugalmasságok függetlenek a jövedelemtől és az ártól: $\varepsilon_{D,\,I} = \iota$ és $\varepsilon_{D,\,P} = -\pi$. Konkrétan: 1 és –3.

B. Termelés

B.1. feladat. a) Adott K és Q esetén $L = Q^2/K$, azaz $\mathrm{STC}(K, Q) = vK + wQ^2/K$. Numerikusan: $\mathrm{STC}(K, Q)$ (ezer Ft-ban)

B.1. táblázat. *STC változása*

Kibocsátás Q / Tőke K	1	2	3
1	2	5	10
2	2,5	4	6,5
3	3,33	4,33	6

b) $\mathrm{LTC}(Q) = \min_K(\mathrm{STC}(K, Q))$: Az a) Táblázatból:

B.2. táblázat. *LTC változása*

Kibocsátás Q	1	2	3
LTC	2	4	6

Analitikusan: $\mathrm{STC}'(K) = v + wQ^2/(-K^2)$, azaz $K(Q) = Q(w/v)^{1/2}$. Numerikusan: $K(Q) = Q$, $\mathrm{LTC}(Q) = 1000 \cdot 2Q$.

B.2. feladat. a) Optimális tényezőár egyenlő termékár · határtermelékenység. Konkrétan: $v = \dfrac{\partial Q}{\partial K} = 10 \cdot 0{,}25 \cdot 16^{-0{,}75}1^{0{,}75} = 0{,}3125$ és $w = \dfrac{\partial Q}{\partial L} = 10 \cdot 0{,}75 \cdot 16^{0{,}25}1^{-0{,}25} = 15$. b) $vK/Q = 0{,}3125 \cdot 16/20 = 0{,}25$ és $wL/Q = 15 \cdot 1/20 = 0{,}75$. (Általánosan is igaz, hogy a két részesedés α, ill. β.)

B.3. feladat. a) Rövid távon K adott, Q kibocsátásához legalább Q tőke és $Q/2$ munka kell. $K \geq Q$ és $L = Q/2$. $\mathrm{STC} = vK + wL = vK + wQ/2$.

B.3. táblázat. *LTC változása*

Kibocsátás Q Tőke K	1	2	3
1	3	-	-
2	4	6	-
3	5	7	9

b) Hosszú távon $K = Q$, $\mathrm{LTC} = vQ + wQ/2$.

c) $\mathrm{SMC} = w/2 = 2$, ha $K > Q$ és SMC nincs definiálva, ha $K \leq Q$. $\mathrm{LMC} = v + w/2 = 3$.

B.4. feladat. $\mathrm{AC} = \mathrm{TC}(Q)/Q = a/Q + b + cQ$. Differenciálva Q szerint: $\mathrm{AC}'(Q) = -a/Q^2 + c$. Belső minimum feltétele: $\mathrm{AC}'(Q) = 0$, azaz $Q^{\mathrm{o}} = (a/c)^{1/2}$. Visszahelyettesítve: $\mathrm{AC}_{\min} = a/(a/c)^{1/2} + b + c(a/c)^{1/2} = b + 2(c/a)^{1/2}$. Számítsuk ki a határköltséget: $\mathrm{MC} = \mathrm{TC}'(Q) = b + 2cQ$. Behelyettesítve Q^{o}-t: $\mathrm{MC}^{\mathrm{o}} = b + 2(c/a)^{1/2}$, azaz $\mathrm{MC}^{\mathrm{o}} = \mathrm{AC}_{\min}$ adódik.

C. Verseny, monopólium és duopólium

C.1. feladat. a) $\mathrm{MC}(Q) = P$. b) Tökéletes versenynél hosszú távon $P^{\mathrm{o}} = \min \mathrm{AC} = 10$ \$. A keresleti függvény szerint $Q^{\mathrm{o}} = 1500 - 50 \cdot 10 = 1000$. $n = Q^{\mathrm{o}}/q^{\mathrm{o}} = 1000/20 = 50$. $\pi_i = 0$. c) $\mathrm{SMC} = q - 10$, $\mathrm{SAC} = 0{,}5q - 10 + 200/q$ minimális, ha $q = 20$. $\mathrm{SMC}^{\mathrm{o}} = \mathrm{SAC}^{\mathrm{o}}$.

C.2. feladat. Invertáljuk a keresleti függvényt: $P(Q) = 2Q^{-1/2}$. A monopolista profitja $\pi(Q) = P(Q)Q - \mathrm{TC}(Q) = 2Q^{1/2} - 1 - Q^2/2$, melynek deriváltja $\pi'(Q) = Q^{-1/2} - Q$ csökkenő, azaz π konkáv. π akkor maximális, ha a derivált nulla: $Q_{\mathrm{M}} = 1$, $P_{\mathrm{M}} = 2$ és $\pi_{\mathrm{M}} = 1/2$.

C.3. feladat. A monopolista probléma általános megoldása: $Q = a - bP$, azaz $P = (a - Q)/b$. Feltevés: $\mathrm{MC} = c$. $\pi(Q) = P(Q)Q - \mathrm{TC}(Q)$, $\pi'(Q) = P'(Q)Q + P(Q) - \mathrm{MC} = 0$. Behelyettesítve: $-Q/b + (a - Q)/b = c$, rendezve: $Q\mathrm{M} = (a - bc)/2$, $P\mathrm{M} = (a - bc)/2b$ és $\pi_{\mathrm{M}} = (P_{\mathrm{M}} - c)Q_{\mathrm{M}}$. Numerikusan: a) $Q_1 = 10^7$, $P_1 = 300$ \$, $\pi_1 = 10^9$ \$ $\to Q_2 = 10^6$, $P_2 = 700$ \$, $\pi_2 = 5 \cdot 10^8$ \$. b) $a = a_1 + a_2 = 4{,}24 \cdot 10^7$ és $b = b_1 + b_2 = 1{,}02 \cdot 10^5$; $Q = 1{,}10 \cdot 10^7$, $P = 307{,}8$ \$ és $\pi = 1{,}18 \cdot 10^9\$ < 1{,}5 \cdot 10^9\$ = \pi_1 + \pi_2$.

Megjegyzés. A lineáris keresleti függvény rendellenessége, hogy $Q_1(P_2) = -3 \cdot 10^7 < 0$! Valószínűleg ez okozza a másik galibát is: az árdiszkrimináció megszüntetése nem növeli a forgalmat! c) $\pi_{\mathrm{C}} = 0$, $P_{\mathrm{C}} = 200$ \$, $Q_{\mathrm{C}} = 4{,}24 \cdot 10^7 - 1{,}02 \cdot 10^5 \cdot 200 = 2{,}2 \cdot 10^7$.

C.4. feladat. Fejezzük ki P-t Q függvényében: $P = 50 - Q/2$. Számítsuk ki a két vállalat profitját:

$$\pi_1(Q_1, Q_2) = (P - 20)Q_1 = (30 - (Q_1 + Q_2)/2)Q_1 \tag{$*$}$$

$$\pi_2(Q_1, Q_2) = (P - 20)Q_2 = (45 - (Q_1 + Q_2)/2)Q_2. \tag{$**$}$$

Tegyük föl, hogy az 1. (2.) vállalat adottnak veszi a 2. (1.) vállalat kibocsátását, s így maximalizálja a profitját: (*)-ból $\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = 30 - Q_1 - Q_2/2 = 0$, (**)-ból $\frac{\partial \pi_2}{\partial Q_2} = 45 - Q_1/2 - Q_2 = 0$. Megoldva az egyenletrendszert: $Q_1 = 10$, $Q_2 = 40$, $Q = 50$. Visszahelyettesítve a keresleti egyenletbe: $P = 50 - 50/2 = 25$. Behelyettesítve a profitfüggvényekbe: $\pi_1 = (25 - 20) \cdot 10 = 50$ és $\pi_2 = (25 - 5) \cdot 40 = 800$.

D. Általános egyensúly

D.1. feladat. a) Kovács képtelen helyettesíteni, ezért az ő optimumai ($Y_1 = 2X_1$) szabják meg a szerződési görbét: Mivel $0 \leq X_1, Y_1 \leq 300$, a szóban forgó egyenes $0 \leq X_1 \leq 150$, $0 \leq Y_1 \leq 300$ szakasza adja a szerződési görbét.

b) Mivel a kiinduló gazdagság nincs rajta a szerződési görbén, két szélső eset van: vagy (A) K vagy (B) N mond le minden javításról. Ad (A) K átadja N-nek az $Y_1^{\mathrm{o}} = 100$-hoz tartozó $X(Y_1^{\mathrm{o}}) = 50$ fölötti részt (150-et) Megoldás: $X_1^{\mathrm{A}} = 50$, $Y_1^{\mathrm{A}} = 100$. Ad (B) N hozzáigazítja gazdagságát K igényeihez: $Y_1^{\mathrm{B}} - 100$-ról lemond $200 - X_1^{\mathrm{B}}$ fejében. Ennél az igazodásnál egyrészt 1:2 arányban cserélnek ($Y_1^{\mathrm{B}} - 100 = 2 \cdot (200 - X_1\mathrm{B})$), másrészt a csere után a szerződési görbére kerülnek ($Y_1^{\mathrm{B}} = 2X_1^{\mathrm{B}}$). A második egyenletet helyettesítsük be az elsőbe: $2X_1^{\mathrm{B}} - 100 = 400 - 2X_1^{\mathrm{B}}$. Rendezve: $X_1^{\mathrm{B}} = 125$ és $Y_1^{\mathrm{B}} = 250$. A szerződési görbe A és B pont közti szakasza az optimális megoldások görbéje.

D.2. feladat. a) $Y = c/X^2$, (ahol c egy tetszőleges állandó): $Y' = c(-2)X^{-3}$, amelybe behelyettesítve első egyenletünket, adódik $Y' = -2Y/X$. Kovács helyettesítési határaránya 0-tól végtelenig terjed, tehát az optimum belső pont. A szerződési görbén a két fél MRS-e egyenlő. Mivel $\mathrm{MRS}_2 = 1$, $2Y_1/X_1 = 1$, azaz $Y_1 = X_1/2$. Ez a „görbe" a $0 \leq X_1 \leq 50$ szakaszon van a dobozban benne ($0 \leq Y_1 \leq 100$), ez tehát a szerződésgörbe.

b) Kezdetben $U_1 = 0$, tehát K akár az összes Y-át átengedheti N-nek. $X_1^{\mathrm{A}} = 0$, $Y_1^{\mathrm{A}} = 0$. N végső engedményét az $X + Y = 100$ egyenes metszi ki a szerződési görbéből, (hiszen $U_2 = 100$). A két egyenes metszéspontja $X_1^{\mathrm{B}} = 66{,}7$ és $Y_1^{\mathrm{B}} = 33{,}3$.

D.3. feladat. a) Mivel mindkét közömbösségi görbesereg sima, a szerződési görbe a két közömbösségi görbsereg érintési pontjaiból áll. Egyszerű transzformációval elérhető, hogy $\beta = \delta = 1$. Írjuk föl K közömbösségi görbéit explicit alakban:

$$(*) \qquad Y_1 = uX_1^{-\alpha}.$$

Deriválva és behelyettesítve: $Y_1' = u(-\alpha)X_1^{-\alpha-1} = -\alpha Y_1/X_1$. Szimmetria-okból: $Y_2' = -\gamma Y_2/X_2$. Érintésnél a két meredekség megegyezik: $-\alpha Y_1/X_1 = -\gamma Y_2/X_2$. Figyelembe véve, hogy $X_2 = X^{\mathrm{o}} - X_1$ és $Y_2 = Y^{\mathrm{o}} - Y_1$, számolással a következő képletet kapjuk:

$$(**) \qquad Y_1 = \frac{\gamma X_1 Y^{\mathrm{o}}}{\alpha X^{\mathrm{o}} - \alpha X_1 + \gamma X_1}.$$

Könnyű belátni, hogy $Y_1(X_1)$ egy olyan hiperbola, amely az Edgeworth-doboz DNy-i és ÉK-i sarkán áthalad. Abban a speciális esetben, amikor $\alpha = \gamma$, azaz a két egyén hasznosságfüggvénye azonos (ekvivalens), a szerződésgörbe a doboz emelkedő átlója.

b) Tegyük föl, hogy a kezdeti gazdagság nincs rajta a szerződési görbén, pl. alatta van! Ekkor meg kell határozni e ponton átmenő két közömbösségi görbe és a szerződési görbe metszéspontjait. A két metszéspont közti szakasz az optimális elosztások halmaza.

Általában nem lehet explicite meghatározni a metszéspontokat, mert az (*) és a (**) görbe metszéspontját meghatározó egyenlet nem algebrai (s ha véletlenül mégis az, akkor negyedfokúnál magasabb egyenlet).

D.4. feladat. a) Mivel nincs helyettesítés, az optimum az $Y = 2X$ egyenes és az $X^2 + Y^2 = 100$ negyedkör metszéspontja: $X^2 + 4X^2 = 100$, $X^o = 2 \cdot 5^{1/2} = 4{,}46$ és $Y^o = 4 \cdot 5^{1/2} = 8{,}92$.

b) Az optimális kibocsátás maximalizálja a hazai termelés világpiaci áron mért értékét. Lagrange-módszerrel: $V(X, Y, \mu) = 3X + Y + \mu(X^2 + Y^2 - 100)$. Deriválva: $V_X = 3 + 2\mu X = 0$ és $V_Y = 1 + 2\mu Y = 0$. Rendezve: $X = 3Y$ (Megjegyzés: Ugyanez levezethető az RTS=3 feltételből.) Visszahelyettesítve a termelési határ egyenletébe: $Y^2 + 9Y^2 = 100$, $Y_\mathrm{p} = 10^{1/2} = 3{,}16$, $X_\mathrm{p} = 9{,}48$. A fogyasztó természetesen $Y_\mathrm{c} = 2X_\mathrm{c}$ arányban fogyaszt. Mivel X-ből (Y-ból) viszonylagos többlete (hiánya) van, némi X-et elad, némi Y-t vesz, 3:1 arányban: $Y_\mathrm{p} - Y_\mathrm{c} = 3(X_\mathrm{c} - X_\mathrm{p})$. Behelyettesítve: $3{,}16 - 2X_\mathrm{c} = 3(X_\mathrm{c} - 9{,}48)$. Rendezve: $X_\mathrm{c} = 6{,}32$ és $Y_\mathrm{c} = 12{,}64$.

D.5. feladat. a) Ha az ország kibocsátása (E, I), akkor $L_E = 2E$ és $L_I = I$. Mivel az optimális esetben minden erőforrást fölhasználunk, $L_E + L_I = 300$. Behelyettesítéssel: $2E + I = 300$, s a $E \geq 0$ és $I \geq 0$ feltételpár mellett ez a termelési lehetőségek határa. b) Lagrange-feladatunk: $V(E, I, \mu) = E^2 I + \mu(2E + I - 300)$. Deriválva: $V_E = 2EI + 2\mu = 0$ és $V_I = E^2 + \mu = 0$. Rendezve: $E^o = I^o$. (Megjegyzés: Ez az egyenlet egyébként közvetlenül adódik az MRT=RTS feltételből!) Visszahelyettesítve: $2E^o + E^o = 300$, azaz $E^o = I^o = 100$. - Az optimális árrendszer $p_E = 2p_I$, a munkaértékelmélet most alkalmazható!

c) Nyílt piacon az optimális kibocsátás maximalizálja a világpiaci árakon számított nemzeti jövedelmet. $E + 2I = E + 2 \cdot (300 - 2E) = 600 - 3E$. Nyilvánvaló, hogy a maximumot $E_\mathrm{p} = 0$ és $I_\mathrm{p} = 300$ kibocsátási program adja. A fogyasztói haszon maximalizálásához külkereskedelemre van szükség: Jelölje az optimális fogyasztást E_c és I_c, ekkor a külkereskedelmi csere E_c és $I_\mathrm{p} - I_\mathrm{c}$ ($E_\mathrm{p} = 0$!), a cserearányok 1:2. Az egyenértékű csere feltétele: $E_\mathrm{c} = 2(I_\mathrm{p} - I_\mathrm{c})$. Maximalizálandó az U függvény a cserefeltétel mellett. Behelyettesítéssel: $V(E_\mathrm{c}) = 4(I_\mathrm{p} - I_\mathrm{c})^2 I_\mathrm{p}$. Deriválva: $V' = 4 \cdot 2(I_\mathrm{p} - I_\mathrm{c})I_\mathrm{c} - 4(I_\mathrm{p} - I_\mathrm{c})^2 = 0$. Kizárva $I_\mathrm{c} = I_\mathrm{p}$-t, (ti. E_c nem lehet 0!) marad: $2I_\mathrm{c} = I_\mathrm{p} - I_\mathrm{c}$, azaz $I_\mathrm{c} = I_\mathrm{p}/3 = 100$, és $E_\mathrm{c} = 2 \cdot (300 - 100) = 400$.

D.6. feladat. a) A) A célfüggvény természeténél fogva az optimum a termelési határon helyezkedik el: $X_\mathrm{A}^2 + 4Y_\mathrm{A}^2 - 400 = 0$. Oldjuk meg a feladatot a Lagrange-módszerrel! A Lagrange-függvény $V_\mathrm{A}(X_\mathrm{A}, Y_\mathrm{A}) = X_\mathrm{A} Y_\mathrm{A} + \mu(X_\mathrm{A}^2 + 4Y_\mathrm{A}^2 - 400)$. Deriválva: $\dfrac{\partial V_\mathrm{A}}{\partial X_\mathrm{A}} = Y_\mathrm{A} + 2\mu X_\mathrm{A} = 0$ és $\dfrac{\partial V_\mathrm{A}}{\partial Y_\mathrm{A}} = X_\mathrm{A} + 8\mu Y_\mathrm{A} = 0$, rendezve: $Y_\mathrm{A} = -2\mu X_\mathrm{A}$ és $X_\mathrm{A} = -8\mu Y_\mathrm{A}$. U_A alakja miatt kizárhatjuk a nulla-megoldásokat. Osszuk el a két egyenletet egymással: $X_\mathrm{A} = 2Y_\mathrm{A}$. Visszahelyettesítve a határfeltételbe: $5Y_\mathrm{A}^2 = 400$, azaz $Y_\mathrm{A}^o = 10/2^{1/2} = 7{,}07$ és $X_\mathrm{A}^o = 10 \cdot 2^{1/2} = 14{,}14$.

B) Az előző pont gondolata szerint B ország határfeltétele $X_\mathrm{B} + Y_\mathrm{B} = 100$. A B ország céljai közt nincs helyettesítés: $Y_\mathrm{B} = 4X_\mathrm{B}$. Az optimum: $X_\mathrm{B}^o = 20$ és $Y_\mathrm{B}^o = 80$.

b) Szabad külkapcsolatok esetén a két ország belső optimumában azonos a termelési transzformáció aránya. Mivel B-ben RTS azonosan 1 (ez a *nagy ország* feltevésének legegyszerübb modellezése!), meg kell keresnünk azt a pontot, ahol $\mathrm{RTS_A}$ is 1. $Y_\mathrm{A} = (400 - X_\mathrm{A}^2)^{1/2}/2$, deriválva: $\mathrm{RTS_A} = -Y_\mathrm{A}' = X_\mathrm{A}/2(400 - X_\mathrm{A}^2)^{1/2}$, amelybe visszahelyettesítve a határfeltételt, $\mathrm{RTS_A} = X_\mathrm{A}/4Y_\mathrm{A}$ adódik. Tehát $X_\mathrm{A} = 4Y_\mathrm{A}$, amelyet behelyettesítve a határfeltételbe $16Y_\mathrm{A}^2 + 4Y_\mathrm{A}^2 = 400$, azaz $Y_\mathrm{A}^\mathrm{p} = 2 \cdot 5^{1/2} = 4{,}46$ és $X_\mathrm{A}^\mathrm{p} = 8 \cdot 5^{1/2} = 17{,}64$ termelési optimum adódik. Elfajultság miatt B termelési optimumát egyelőre nem határozzuk meg. Mindenesetre tudjuk, hogy a csere arányai 1:1.

c) Rátérünk fogyasztási optimumok kiszámítására:

A) Legyen E az A exportja és a vele egyező importja: Ekkor $X_\mathrm{A}^\mathrm{p} = X_\mathrm{A}^\mathrm{c} - E$ és $Y_\mathrm{A}^\mathrm{p} = Y_\mathrm{A}^\mathrm{c} + E$ a fogyasztási optimum, amely $U(E) = (X_\mathrm{A}^\mathrm{c} - E)(Y_\mathrm{A}^\mathrm{c} + E)$ függvény maximumhelye. Ezt az $U'(E) = 0$ egyenlet megoldása adja: $E^\mathrm{o} = (X_\mathrm{A}^\mathrm{c} + Y_\mathrm{A}^\mathrm{c})/2 = 3 \cdot 5^{1/2}$. Tehát $X_\mathrm{A}^\mathrm{p} = Y_\mathrm{A}^\mathrm{p} = 5 \cdot 5^{1/2} = 11{,}15$.

B) B ország semmit sem nyer a nyitással, mert termelési alternatívái közti tökéletes helyettesítés miatt már eleve optimális a fogyasztása: $X_\mathrm{B}^\mathrm{c} = X_\mathrm{B}^\mathrm{o}$ és $Y_\mathrm{B}^\mathrm{c} = Y_\mathrm{B}^\mathrm{o}$. Ehhez igazodik a kibocsátás: $X_\mathrm{B}^\mathrm{p} = X_\mathrm{B}^\mathrm{c} - E$ és $Y_\mathrm{B}^\mathrm{p} = Y_\mathrm{B}^\mathrm{c} + E$, (feltéve, hogy elég nagy a kibocsátás ahhoz, hogy az alkalmazkodás végbemehessen!)

D.7. feladat. Együttélő nemzedékek. a) $c_0 + R^{-1}c_1 = w_0 + R^{-1}w_1 = W$, $c_0 = W/(1+\beta)$, $c_1 = \beta R c_0$.

b) $S(R) = \nu(w_0 - c_0) + (w_1 - c_1) = 0$.

c) Beszorozva az egyéni költségvetési feltételt R-rel, majd kivonva belőle a társadalmi megtakarítási feltételt: $(\nu - R)(w_0 - c_0)$. Tipikusan $R_1 = \nu$ vagy

$$\frac{w_0 + R^{-1}w_1}{1+\beta} = c_0 = w_0.$$

Rendezve: $R_2 = w_1/(\beta w_0)$.

E. Gyakorlati kérdések

E.1. feladat. A tartózkodási idő korlátozása miatt menettérti repülőjegyet főleg a turisták vehetik meg, míg az egyirányú jegyeket elsősorban az üzletemberek veszik meg. Az előbbiek kereslete jobban függ az ártól, mint az utóbbiaké; ezért az együttes profitmaximumot kettős árral lehet elérni: rugalmas kereslet - olcsó jegy; rugalmatlan kereslet - drága jegy.

E.2. feladat. Az oligopol-elmélettel. Az árkartell igyekszik a kínálat korlátozásával monopol-profitot elérni, amelyet adott szabály szerint oszt el a résztvevők között. Azonban nagy a kísértés, hogy az egyes tagok megszegjék a megállapodást, feltéve, hogy a többiek betartják a szerződést: a többlettermelő egyedül alig rontja a piacot, viszont jóval több a bevétele. Persze ha sokan engednek a kísértésnek, versenyhelyzet alakul ki: túltermelés és áresés.

E.3. feladat. A nagycsaládosok (N) lakbérre fordítható jövedelme megnőne, a kiscsaládosoké (K) csökkenne. Egyes N-ek kisebb lakásba mennének, egyes K-k nagyobb lakásba mennének. Egyenletesebb lenne a lakáskihasználás. (Bonyolítja a helyzetet a magánlakások piacának hatása.)

E.4. feladat. Több ok van, tehát több jó magyarázat: (i) A magániparban nagyobb a (határ)termelékenység, tehát magasabb bér fizethető. (ii) Fordított összefüggés is érvényesül: magasabb bér nagyobb termelékenységű munkásokat vonz, és nagyobb termelékenységre ösztönöz. (iii) Az állami ipar magas áraiból fizetik a szociális kiadások egy részét, ez a magánipart nem terheli. (Ezért is kellett 1988-ban az új adórendszer bevezetésével csökkenteni a vállalatok adóterheit.)

E.5. feladat. Közüzemek (gáz, víz, tömegközlekedés, telefon, stb), amelyek a méretgazdaságuk miatt olcsóbban szolgálják ki a fogyasztót, mint az egymással versengő vállalatok.

E.6. feladat. Taxi és a mezőgazdaság. New Yorkban a taxik száma korlátozott, és egy taxi engedély beszerzése kb 60 ezer $. Az USA-ban a farmer pénzt kap, ha nem veti be földje egy részét.

M. Matematikai függelék

M.1. feladat. Szükségünk lesz a mátrix másodfokú karakterisztikus polinomjára:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda + \vartheta, \tag{M.1}$$

ahol

$$a = \operatorname{tr} M = m_{11} + m_{22} \qquad \text{és} \qquad \vartheta = \det M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}. \tag{M.2}$$

Feltevésünk szerint m_{11},$m_{22} \geq 0$, M irreducibilitása miatt $m_{12}, m_{21} > 0$. *a)* Ahhoz, hogy legyen pozitív sajátérték, az szükséges, hogy mindkét sajátérték valós legyen. Ellenőrizni kell, hogy $a^2 \geq 4\vartheta$ teljesül-e. Igen, mert (M.2)-t behelyettesítve a feltételbe, rendezéssel $(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21} \geq 0$ adódik. Mivel a két sajátérték összege $(-a)$ nem negatív, és a diszkrimináns pozitív; van pozitív sajátérték, amely (egy) domináns sajátérték.

b) A sajátérték-egyenletet rendezve: $(\lambda - m_{11})x_1 = m_{12}s_2$, $(\lambda - m_{22})x_2 = m_{21}x_2$. Összeszorozva és $x_1x_2 \neq 0$-val egyszerűsítve: $(\lambda - m_{11})(\lambda - m_{22}) = m_{12}m_{21} > 0$. Tegyük föl, hogy $m_{11} \geq m_{22}$. Ekkor $\lambda_2 \leq m_{22} \leq m_{11} \leq \lambda_1$. Domináns pozitív gyökhöz tartozó sajátvektorra: $s_{1,1}/s_{2,1} = m_{12}/(\lambda_1 - m_{11}) > 0$. A másik sajátvektorra: $s_{1,2}/s_{2,2} = m_{12}/(\lambda_2 - m_{11}) < 0$.

c) Mivel a diszkrimináns pozitív, a két sajátérték különböző.

d) $2\rho(M) = m_{11}+m_{22}+\sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21}}$, azaz $\rho(M)$ növekvő függvénye m_{12}-nek és m_{21}-nek. A négyzetgyök-függvény konkavitása miatt a $0 \leq m_{11} \leq m_{22}$ intervallumban m_{11} növekedésével párhuzamosan a diszkrimináns lassabban nő, mint $|m_{11} - m_{22}|$.

e) Szükségünk lesz a $P(\lambda) = (\lambda - m_{11})(\lambda - m_{22}) - m_{12}m_{21}$ karakteriszikus polinomra. Az adjungált mátrix segítségével az $(I - M)$ inverze a következőképpen fejezhető ki:

$$(I - M)^{-1} = P(-1)^{-1} \begin{pmatrix} 1 - m_{22} & m_{12} \\ m_{21} & 1 - m_{11} \end{pmatrix}.$$

Ha M stabil, akkor $P(1) > 0$. A fentiek szerint $m_{ii} \leq \lambda_1 < 1$, tehát $(I - M)^{-1} > 0$.

K. Közgazdasági függelék

K.1. feladat. Nem, mert a nagy számok törvénye szerint minden befizetett Ft-jának csak egy töredékét kapná vissza. (A többi, pár millió résztvevőtől esetleg megszerzett haszon elhanyagolható!)

K.2. feladat. Behelyettesítéssel.

K.3. feladat. a) A maximális biztosítási összeg azt jelenti, hogy a biztosítatlan fogyasztó várható haszna megegyezik a biztosítottéval. Képletben: teljes biztosítás:

$pU(w-c)+qU(w) = U(w-b)$, részleges biztosítás: $pU(w-c)+qU(w) = pU(w-c+qk)+qU(w-pk)$. Kockázatkerülő magatartás esetén U konkáv, tehát van kiegyenlítő b_c és b_k díj. b) Numerikusan: (i) $0{,}03 \cdot 0{,}5^{1/2}+0{,}97 \cdot 1{,}5^{1/2} = (1{,}5-b)^{1/2}$, $1{,}2092^2 = 1{,}4621 = 1{,}5-b$, azaz $b_c = 0{,}0378$ mFt=37,8 eFt. (ii): $1{,}2092 = 0{,}03 \cdot (1{,}4-b_k)^{1/2} + 0{,}97 \cdot (1{,}5-b_k)^{1/2}$ Rendezve: $b_k = 0{,}0359$ mFt=35,9 eFt.

IRODALOM

ARROW, K. J. és HAHN, F. (1971): *General Competitive Analysis*, San Francisco, Holden-Day.

BEGG, D. (1987): *Economics*, London, McGraw Hill.

BERTRAND, J. (1883)) „Théorie Mathématique de la Richesse Social", *Journal des Savants* 499–508.

COURNOT (1838) *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, angolul: *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, New York, Macmillan, 1897.

EDGEWORTH, F. (1897) „La Teoria Pura di Monopolio", *Giornale degli Economisti 40* 13–31, angolul: „The Pure Theory of Monopoly", Edgeworth, ed. *Papers Relating to Policial Economy, 1*, London, Macmillan, 1925.

KOPPÁNYI, M. szerk. (1992): *Mikroökonómia*, Bp., Műszaki Könyvkiadó.

KREPS, D. M. (1989): *A Course in Microeconomic Theory*, Princeton, University Press.

NEUMANN, J. (1938): „Egy általános egyensúlyi modell", *Neumann*, 1965, 160–176.

NEUMANN, J. (1965): *Válogatott előadások és tanulmányok*, Budapest, KJK, 1965.

RÉNYI, A. (1966): *Valószínűségszámítás*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

RÓZSA, P. (1974): *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

SIMONOVITS, A. (1998): *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban,* Budapest, KJK.

TIROLE, J. (1989) *The Theory of Industrial Organization*, Cambridge, MA, MIT Press.

VARIAN, H. (1992): *Microeconomic Analysis*, New York, Norton, 3. kiadás.

VARIAN, H. (1991): *Mikroökonómia középfokon*, Bp, KJK.

WALRAS, L. (1874, 1877): *Elements of Pure Economics*, London, Allen and Unwin (a francia eredeti angol nyelvű fordítása), 1954.

ZALAI, E. (1989): *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba*, Budapest, KJK.