

**BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR**

MATEMATIKA

Szerkesztette:
Farkas Miklós

VI. kötet

DIFFERENCIÁLGEOMETRIA ÉS VEKTORANALÍZIS

Írta:
Farkas Miklós - Sonkoly Pál



Műegyetemi Kiadó, 2000.

(Negyedik utánnnyomás)

Jegyzet azonosító: **040757**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Kar

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

Felelős vezető: Veress János

Terjedelem: 17,5 (A5) ív

Nyomtatta és kötötte: **Műegyetemi Nyomda**

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 061/2000

AZ OLVASÓHOZ

Ez a jegyzet a Matematika c. jegyzetsorozat VI. kötete. A sorozat a következő kötetekből áll:

- I. kötet. A matematika alapjai
- II. kötet. Egyváltozós valós függvények
- III. kötet. Lineáris algebra
- IV. kötet. Végtelen sorok
- V. kötet. Többváltozós valós függvények
- VI. kötet. Differenciálgeometria és vektoranalízis
- VII. kötet. Komplex függvények
- VIII. kötet. Differenciálegyenletek

A sorozat a szigorlati Matematika anyagot tartalmazza. A jegyzet azokhoz a gépészmérnök hallgatókhoz szól, akik a Matematika c. tárgy előadásait és gyakorlatait látogatják. Ezért nem tartalmaz hosszadalmas magyarázatokat, bevezető és illusztratív példákat stb., hanem "csupán" a tulajdonképpeni anyagot lehetőség szerint teljességre és maximális tömörségre törekedve. (A levelező hallgatók számára külön utmutató csatlakozik a sorozathoz). A sorozatot a Matematika Példatár kötetel egészítették ki, amelyekben az olvasó nagy számu kidolgozott és kidolgozatlan példát és feladatot talál.

A kötet fejezetekre, a fejezetek pontokra vannak osztva, de a pontok számozása a fejezetektől függetlenül, folyamatosan történt. Az egyes pontokon belül külön-külön számozzuk a definíciókat, tételeket (segéd tételeket, következményeket), példákat, formulákat, ill. ábrákat. A példák részben a nehéz fogalmakat, tételeket világítják meg, részben "ellenpéldák" és nagyrészt az elméleti anyag szerves részét képezik. A hivatkozások egy kötetben belül az idézett definíció, tétel stb. számának megadásával, más kötet esetében, ezen kívül a hivatkozott kötet számának megadásával történik (mindkét esetben a fejezet megadása nélkül). Tehát pl. az I. Kötetben a "1. 13.2 Tétel" hivatkozás az I. Kötet 13. pont 2. tételét jelenti; a II. Kötetben ugyanerre a tételre ugy hivatkozunk: "I. I. Kötet, 13.2 Tétel". A bizonyítások végét pont és felkiáltójel jelzi: .!

Az Irodalomjegyzék elsősorban az anyag iránt mélyebben érdeklődő olvasónak ajánlott művek és nem az eredmények eredeti forrásainak címét tartalmazza. Az irodalomjegyzékben felsorolt művekre szögletes zárójelbe tett számokkal hivatkozunk.

Budapest, 1971. március

A szerkesztő

TARTALOMJEGYZÉK

Első fejezet.	Térgörbék	7
	1. Egyparaméteres vektor-skalár függvények	7
	2. Érintő. Ivhossz	15
	3. Frenet-képletek	24
	4. Evolvens és evoluta	36
Második fejezet.	Felületek	43
	5. Kétparaméteres vektor-skalár függvények	43
	6. Felületek megadása. Érintősíkok	47
	7. Felszín	58
	8. Felületi görbe ivhossza és görbülete	66
	9. Felületi pontok osztályozása	79
Harmadik fejezet.	Vektoranalízis	87
	10. Skalár-vektor függvények	87
	11. Tenzoralgebra	100
	12. Vektor-vektor függvények, A deriválttenzor	114
	13. Vonal- és felületi integrál	129
	14. Integrálátalakító tételek	145
	15. A potenciálmélet elemei	168
	16. Ortogonális görbevonalu koordináta- rendszerek	181
Irodalomjegyzék		195
Tárgymutató		196

TÉRGÖRBÉK

1. Egyparaméteres vektor-skalár függvények

A közösleges (háromdimenziós euklideszi) térben elhelyezkedő görbék - röviden térgörbék - leírására az "egyparaméteres vektor-skalár függvényeket" használjuk. Az $\underline{r}(t)$, $t \in D$ függvényt, ahol $D \subset \mathbb{R}$ egyparaméteres vektor-skalár függvénynek nevezzük, ha a valós számegyenes D részhalmazát a közösleges tér vektorainak halmazába képezi le. A közösleges térben lerögzítjük az O origót, és az egyparaméteres vektor-skalár függvény értékkészletének $\underline{r}(t)$ elemeit általában az origóból kiinduló helyvektoroknak tekintjük. Alkalmasan megválasztott - pl. derékszögű - koordinátarendszerben az $\underline{r}(t)$ vektort koordinátáira bonthatjuk:

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

Ebből látható, hogy $\underline{r}(t)$ megadása ekvivalens három skalárfüggvény megadásával. Az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ rendezett függvényhármas a térgörbe paraméteres megadásának tekinthető. Ez azt mutatja, hogy az egyváltozós függvényekre érvényes fogalmak egy része átöröklődik $\underline{r}(t)$ -re.

Ebben a pontban az egyparaméteres vektor-skalár függvények legfontosabb függvénytanai tulajdonságaival, a határérték, a folytonosság, a differenciálhányados stb. fogalmával foglalkozunk. Főleg azokat a tulajdonságokat vizsgáljuk, melyek a koordinátarendszer megválasztásától függetlenek, annak eltolásakor vagy elforgatásakor nem változnak: "invariáns tulajdonságok".

1.1 Definíció.

Az $\underline{r}_0$ vektor $\vartheta > 0$ sugarú környezetének nevezzük a

$$K_{\underline{r}_0, \vartheta} = \{ \underline{r} : | \underline{r} - \underline{r}_0 | < \vartheta \}$$

halmazt. (Ha a környezet ϑ sugarának nincs jelentősége, most is a $K_{\underline{r}_0}$ jelölést használjuk.)

1.2 Definíció.

Azt mondjuk, hogy az $\underline{r}(t)$, $t \in D$ függvény határértéke a D értelmezési tartomány t_0 torlódási

pontjában az $\underline{a}$ vektor, jelben: $\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}(t) = \underline{a}$,

vagy $\underline{r}(t) \rightarrow \underline{a}$, $t \rightarrow t_0$, ha $\underline{a}$ minden $K_{\underline{a}, \varepsilon}$ környezetéhez van t_0 -nak $K_{t_0, \delta}$ -környezete, melyre

$$t \in (K_{t_0, \delta} \setminus \{t_0\}) \cap D \Rightarrow \underline{r}(t) \in K_{\underline{a}, \varepsilon}.$$

Más megfogalmazásban:

1.2' Definíció.

Legyen t_0 a D halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy $\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}(t) = \underline{a}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy $t \in D$ és $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow$

$$|\underline{r}(t) - \underline{a}| < \varepsilon.$$

Belátható, hogy ha az $\underline{a}$ határérték létezik, akkor $\underline{r}(t)$ koordinátáinak is van határértéke, ezek a határértékek éppen $\underline{a}$ megfelelő koordinátái és ennek az állításnak a megfordítása is igaz.

1.3 Definíció.

Azt mondjuk, hogy az $\underline{r}(t)$, $t \in D$ függvény a D értelmezési tartomány t_0 torlódási pontjában

folytonos, ha

a) létezik a véges $\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}(t)$ határértéke, és

b) $\underline{r}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \underline{r}(t)$.

Más megfogalmazásban:

1.3' Definíció.

Legyen $t_0 \in D$ a D halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy $\underline{r}(t)$ a t_0 helyen folytonos, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $t \in D$ és

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)| < \varepsilon.$$

Itt is belátható, hogy $\underline{r}(t)$ folytonosságából következik koordinátáinak folytonossága és viszon.

A vektor-skalár függvényeknél is beszélhetünk jobb- és baloldali határértékekről, ill. folytonosságról.

1.4 Definíció.

Azt mondjuk, hogy az $\underline{r}(t)$, $t \in D$ függvény $H \subset D$ halmazon folytonos, ha $\underline{r}(t)$ folytonos minden $t \in H$ helyen.

Az egyváltozós skalár függvényekhez hasonlóan itt is belátható, hogy folytonos vektor-skalár függvények összege, különbsége, folytonos skalár-függvénnyel való, valamint skaláris és vektoriális szorzata is folytonos. Továbbá ha $\underline{r}(t)$ folytonos, akkor az $|\underline{r}(t)|$ skalárfüggvény is folytonos. Érvenyes például a következő

1.1 Tétel.

Ha $\underline{r}_1(t)$ és $\underline{r}_2(t)$, melyek közös értelmezési tartománya $D \subset \mathbb{R}$, folytonos a $t_0 \in D$ pontban, akkor az $\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t)$ vektor-skalár függvény is folytonos t_0 -ban.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} & \left| \underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t) - \underline{r}_1(t_0) \times \underline{r}_2(t_0) \right| \leq \\ & \leq \left| \underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t) - \underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t_0) \right| + \\ & + \left| \underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t_0) - \underline{r}_1(t_0) \times \underline{r}_2(t_0) \right| \leq \\ & \leq \left| \underline{r}_1(t) \right| \left| \underline{r}_2(t) - \underline{r}_2(t_0) \right| + \left| \underline{r}_1(t) - \underline{r}_1(t_0) \right| \left| \underline{r}_2(t_0) \right|. \quad (1.1) \end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott és $M_2 > |\underline{r}_2(t_0)| \cdot |\underline{r}_1(t)|$, ill. $\underline{r}_2(t)$ folytonosságából következik, hogy t_0 elég kis környezetében $|\underline{r}_1(t)|$ korlátos, $|\underline{r}_1(t)| < M_1$ és $|\underline{r}_1(t) - \underline{r}_1(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2 M_2}$, ill. $|\underline{r}_2(t) - \underline{r}_2(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2 M_1}$. Így az (1.1) kifejezés kisebb, mint ε , ha $0 < |t - t_0|$ elég kicsi és $t \in D$.

1.5 Definíció.

Legyen adott az $\underline{r}(t)$, $t \in D$ vektor-skalár függvény és $t_0 \in D$. Azt mondjuk, hogy $\underline{r}(t)$ differentiálható a t_0 helyen, ha az

$$\frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0}; \quad t \in D \setminus \{t_0\}$$

különbségi hányadosnak $t \rightarrow t_0$ esetén van véges határértéke, vagyis létezik a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0}$$

véges határérték; ezt a határértéket $\underline{r}(t)$ differenciálhányadosának (deriváltjának) nevezzük. Jelölése:

$$\dot{\underline{r}}(t_0), \frac{d\underline{r}(t_0)}{dt}, \left[\frac{d\underline{r}}{dt} \right]_{t=t_0}.$$

A fenti határérték $t - t_0 = \Delta t$; $\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0) = \Delta \underline{r}$ jelölésekkel még a következő alakokban is írható:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{r}(t_0 + \Delta t) - \underline{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}.$$

1.5' Definíció.

Legyen $t_0 \in D$, azt mondjuk, hogy $\underline{r}(t)$ a t_0 helyen deriválható, ha van olyan $\underline{d}$ és $\underline{\varepsilon}(\Delta t)$ vektor, hogy minden elég kicsi $|\Delta t|$ -re, melyre $t_0 + \Delta t \in D$, a függvény megváltozása így írható fel:

$$\underline{r}(t_0 + \Delta t) - \underline{r}(t_0) = \underline{d} \Delta t + \underline{\varepsilon}(\Delta t) \Delta t, \quad (1.2)$$

$$\text{ahol } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \underline{\varepsilon}(\Delta t) = \underline{0}.$$

Belátható (a II. Kötet, 11.1 Tételével analóg módon), hogy ha $\underline{r}(t)$ az 1.5 Definíció értelmében deriválható, akkor az 1.5' Definíció értelmében is az, és $\underline{d}$ az $\dot{\underline{r}}(t_0)$ (Δt -től független) deriváltvektor.

Az (1.2) képlet jobb oldalán álló első tag a vektor-skalár függvény megváltozásának főrésze, melyet a függvény differenciáljának nevezünk, és $d\underline{r}$ -rel jelölünk. A $\Delta t = dt$ jelöléssel:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \cdot dt \quad (1.3)$$

A differenciál dt -nek homogén lineáris függvénye. (1.2) jobb oldalának második tagja az un. elenyésző rész. Ennek u.i. mindkét tényezője 0-hoz tart, $|\dot{\mathbf{r}}(\Delta t) \Delta t| = o(\Delta t)$ (kisodó Δt , erősebben tart 0-hoz, mint Δt , ezért kicsiny Δt esetén elhanyagolható).

Ha $\mathbf{r}(t)$ deriválható, akkor folytonos is, ezen állítás azonban általában nem fordítható meg.

Könnyen bizonyíthatók, és az ismert deriválási szabályoknak megfelelnek az alábbi deriválási szabályok (feltéve, hogy a tagok, ill. tényezők deriválhatók):

$$[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]' = \dot{\mathbf{r}}_1(t) + \dot{\mathbf{r}}_2(t), \quad (1.4)$$

$$[c \mathbf{r}(t)]' = c \dot{\mathbf{r}}(t), \quad (1.5)$$

$$[a(t) \mathbf{r}(t)]' = \dot{a}(t) \mathbf{r}(t) + a(t) \dot{\mathbf{r}}(t), \quad (1.6)$$

$$[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)]' = \dot{\mathbf{r}}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2(t), \quad (1.7)$$

$$[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)]' = \dot{\mathbf{r}}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \dot{\mathbf{r}}_2(t), \quad (1.8)$$

(itt lényeges a sorrend),

$$[\mathbf{r}(t)^2]' = 2 \mathbf{r}(t) \dot{\mathbf{r}}(t), \quad (1.9)$$

$$\frac{d}{d\tau} [\mathbf{r}(t(\tau))] = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad (1.10)$$

(1.7) Bizonyítása. A különbségi hányados

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{r}_1(t+\Delta t) \cdot \mathbf{r}_2(t+\Delta t) - \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)}{\Delta t} = \\ &= \frac{\mathbf{r}_1(t+\Delta t) \cdot \mathbf{r}_2(t+\Delta t) - \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t+\Delta t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t+\Delta t) - \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)}{\Delta t} = \\ &= \frac{\mathbf{r}_1(t+\Delta t) - \mathbf{r}_1(t)}{\Delta t} \cdot \mathbf{r}_2(t+\Delta t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \frac{\mathbf{r}_2(t+\Delta t) - \mathbf{r}_2(t)}{\Delta t} \rightarrow \\ &\rightarrow \dot{\mathbf{r}}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2(t), \text{ ha } \Delta t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

(1.9) Bizonyítása. (1.7) felhasználásával:

$$[\underline{r}(t)^2]' = [\underline{r}(t) \cdot \underline{r}(t)]' = \dot{\underline{r}}(t) \cdot \underline{r}(t) + \underline{r}(t) \cdot \dot{\underline{r}}(t) = 2 \underline{r}(t) \cdot \dot{\underline{r}}(t).!$$

Ha $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ differenciálható, akkor koordinátái is differenciálhatók és

$$\dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}(t)\underline{i} + \dot{y}(t)\underline{j} + \dot{z}(t)\underline{k}, \quad (1.11)$$

ugyanis $x(t) = \underline{i} \cdot \underline{r}(t)$ és figyelembe véve (1.7)-et, valamint azt, hogy állandó vektor deriváltja zérus, $\dot{x}(t) = \underline{i} \cdot \dot{\underline{r}}(t)$ adódik.

1.2 Tétel.

Ha $|\underline{r}(t)| \equiv \text{konstans}$, $\underline{r}(t)$ deriválható, akkor minden $t \in D$ helyen $\dot{\underline{r}}(t)$ merőleges $\underline{r}(t)$ -re.

Bizonyítás.

Az $|\underline{r}(t)| \equiv c$ azonosságból $[\underline{r}(t)]^2 \equiv c^2$ adódik. Az utóbbi azonosságot deriválva (1.9) szerint azt kapjuk, hogy $2 \underline{r}(t) \cdot \dot{\underline{r}}(t) = 0$, ahonnan a III. Kötet, 2.2 Tétel alapján állításunk következik.!

Természetesen, ha az $\dot{\underline{r}}(t)$ derivált vektor-skalár függvény is differenciálható, akkor beszélhetünk az $\ddot{\underline{r}}(t)$ második deriváltról, és így tovább a magasabbrendű deriváltakról.

A differenciálható skalár függvényekre vonatkozó Lagrange-féle középértéktétel nem vihető át közvetlenül vektor-skalár függvényekre. Ha ui. az $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ függvény az $[\alpha, \beta]$ intervallumban differenciálható, akkor a koordinátákra alkalmazott Lagrange-féle középértéktételből (II. Kötet, 15.4 Tétel) $\underline{r}(\beta) - \underline{r}(\alpha)$ koordinátáira az adódik, hogy

$$\begin{aligned} x(\beta) - x(\alpha) &= \dot{x}(\tau_1)(\beta - \alpha), & \tau_1 &\in (\alpha, \beta), \\ y(\beta) - y(\alpha) &= \dot{y}(\tau_2)(\beta - \alpha), & \tau_2 &\in (\alpha, \beta), \\ z(\beta) - z(\alpha) &= \dot{z}(\tau_3)(\beta - \alpha), & \tau_3 &\in (\alpha, \beta), \end{aligned}$$

Itt azonban τ_1 , τ_2 és τ_3 nem szükségképpen egyenlők, tehát $\dot{x}(\tau_1)$, $\dot{y}(\tau_2)$, $\dot{z}(\tau_3)$ általában nem az $\underline{r}(t)$ vektor koordinátái valamely rögzített t értéknél. A Lagrange-féle középértéktétel megfelelője helyett mindjárt az általánosabb II. Kötet, 18.3 Tétel megfelelőjét fogalmazzuk meg vektor-skalár függvényekre.

1.3 Tétel.

(Taylor-formula). Legyen $\underline{r}(t)$ $(n+1)$ -szer folytonosan differenciálható a t_0 pont egy K_{t_0} környezetében; ekkor mindent $t_0 + h \in K_{t_0}$ -ra

$$\left| \underline{r}(t_0 + h) - \sum_{k=0}^n \frac{\underline{r}^{(k)}(t_0)}{k!} h^k \right| \leq M \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (1.12)$$

$$\text{ahol } M = \max_{t \in [t_0, t_0 + h]} \left| \underline{r}^{(n+1)}(t) \right|.$$

Nyilvánvaló, hogy ha (1.12) fennáll, akkor az is igaz, hogy

$$\underline{r}(t_0 + h) - \sum_{k=0}^n \frac{\underline{r}^{(k)}(t_0)}{k!} h^k = \underline{\varrho}(h), \quad (1.13)$$

$$\text{ahol } |\underline{\varrho}(h)| = o(h^n), \text{ vagyis } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{\varrho}(h)}{h^n} = 0.$$

Megjegyezzük továbbá, hogy az $n = 0$ esetben speciálisan (1.12) a következő alakot ölti:

$$\left| \underline{r}(t_0 + h) - \underline{r}(t_0) \right| \leq M_1 h, \quad (1.14)$$

$$\text{ahol } M_1 = \max_{t \in [t_0, t_0 + h]} \left| \dot{\underline{r}}(t) \right|.$$

Bizonyítás. Legyen $\underline{e}$ tetszőlegesen adott egységvektor ($|\underline{e}| = 1$), és tekintsük az $f(t) = \underline{e} \underline{r}(t)$ skalárfüggvényt, mely nyilván $(n+1)$ -szer folytonosan differenciálható K_{t_0} -ban. E függvényre alkalmazhatjuk a II. Kötet, 18.3 Tételt:

$$f(t_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(t')}{(n+1)!} h^{n+1},$$

vagyis

$$\underline{r}(t_0+h) = \underline{e} \sum_{k=0}^n \frac{\underline{r}^{(k)}(t_0)}{k!} h^k + \underline{e} \frac{\underline{r}^{(n+1)}(t')}{(n+1)!} h^{n+1},$$

ahol $t' \in (t_0, t_0+h)$. Rendezve és az abszolút értékeket véve kapjuk, hogy

$$\left| \underline{e} \left[\underline{r}(t_0+h) - \sum_{k=0}^n \frac{\underline{r}^{(k)}(t_0)}{k!} h^k \right] \right| = \left| \underline{e} \underline{r}^{(n+1)}(t') \right| \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (1.15)$$

Mivel $\left| \underline{e} \underline{r}^{(n+1)}(t') \right| \leq 1 \cdot \left| \underline{r}^{(n+1)}(t') \right| \leq M$, és ez az egyenlőtlenség (rögzített h mellett) minden $\underline{e}$ egységvektorra fennáll, (1.15)-ből (1.12) adódik.!

1.6 Definíció.

Legyen $\underline{r}(t)$ az $[\alpha, \beta]$ intervallumon folytonos; azt mondjuk, hogy az $[\alpha, \beta]$ intervallumon differenciálható $\underline{u}(t)$ vektor-skalár függvény az $\underline{r}(t)$ függvény primitív függvénye, ha

$$\dot{\underline{u}}(t) = \underline{r}(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Az $\underline{r}(t)$ függvény primitív függvényeinek halmazát

$$\int \underline{r}(t) dt \quad \text{-vel}$$

jelöljük és $\underline{r}(t)$ határozatlan integráljának nevezzük.

Könnyen belátható, hogy ha $\underline{u}(t)$ az $\underline{r}(t)$ függvény primitív függvénye, akkor $\underline{r}(t)$ határozatlan integrálja

$$\int \underline{r}(t) dt = \underline{u}(t) + \underline{c},$$

ahol $\underline{c}$ tetszőleges állandó vektor. Nyilvánvaló továbbá, hogy ha $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$, akkor

$$\int \underline{r}(t) dt = \underline{i} \int x(t) dx + \underline{j} \int y(t) dt + \underline{k} \int z(t) dt.$$

Vektor-skalár függvény adott intervallumra vonatkozó határozott integrálja is értelmezhető, ezt azonban nem részletezzük.

2. Érintő. Ívhossz

A térgörbéről természetesen van bizonyos szemlélet s elképzelésünk. Célszerű azonban lehetőleg pontosan körülhatárolni azt, hogy a tér pontjainak milyen halmazait tekintjük még térgörbéknek és milyeneket már nem. A közönséges térben lerögzítjük az O origót és a pontokat helyvektoraikkal azonosítjuk.

2.1 Definíció.

A közönséges tér pontjainak γ halmazát térgörbének nevezzük, ha van I intervallum és I -n folytonos $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény, melyre

$$\gamma = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(t), \quad t \in I \},$$

és amely még kielégíti a következő követelményeket is: e függvény legyen I minden nyílt részintervallumának (ha I nyílt, akkor magának I -nek) a közönséges térbe való egy-egyértelmű leképezése, és az inverz leképezés, mely γ -t I -be képezi le, legyen szintén folytonos. Ha $I = [\alpha, \beta]$ (korlátos) zárt intervallum és $\underline{r}(\beta) = \underline{r}(\alpha)$, akkor zárt térgörbéről beszélünk.

2.1 Példa. Az $\underline{r}$ és $\underline{r}_0 + t\underline{v}$, $t \in (-\infty, \infty)$ egyenletű "térgörbe" az $\underline{r}_0$ ponton áthaladó $\underline{v} \neq \underline{0}$ irányvektoru egyenes. Ha az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban $\underline{r}_0 = x_0 \underline{i} + y_0 \underline{j} + z_0 \underline{k}$, $\underline{v} = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}$, akkor az egyenest leíró $\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + t\underline{v}$ vektor-skalár függvény koordinátái: $x_0 + t v_1, y_0 + t v_2, z_0 + t v_3$ (v. ö. III. Kötet, 4.4 Tétel).

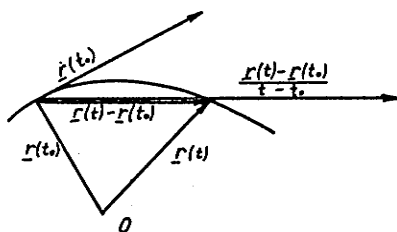
2.2 Definíció.

Legyen $\underline{r}_0$ a γ térgörbén rögzített pont és $\underline{r}$ a γ térgörbe egy tetszőleges $\underline{r}_0$ -tól különböző pontja; tekintsük az $\underline{r}_0$ és $\underline{r}$ pontokon áthaladó egyenest (a görbe szelőjét); ha $\underline{r} \rightarrow \underline{r}_0$ esetén a szelő irányvektora a zérusvektortól különböző $\underline{v}$ határértékhez tart, akkor azt mondjuk, hogy γ -nak $\underline{r}_0$ -ban létezik az érintője és az az $\underline{r}_0$ ponton áthaladó $\underline{v}$ irányvektoru egyenes.

2.1 Tétel.

Ha a γ térgörbét leíró $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény a t_0 pontban differenciálható, és $\underline{r}(t_0) \neq \underline{0}$, akkor γ -nak az $\underline{r}(t_0)$ pontban van érintője és annak irányvektora $\dot{\underline{r}}(t_0)$. Az $\dot{\underline{r}}(t_0)$ vektort ezért érintővektornak nevezzük.

Bizonyítás. Az $\frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0}$, $t \neq t_0$, vektor a szelő irányvektora (l. 2.1 ábra); mivel $\underline{r}(t)$ t_0 -ban differenciálható, létezik



2.1 ábra

$$\dot{\underline{r}}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0},$$

és a feltevés értelmében nem zérus.!

Az $\dot{\underline{r}}(t_0) = \underline{0}$ esetben az előbbi tétel alapján nem tudjuk meghatározni az érintővektort és ezzel az érintőt. Érvényes azonban a

2.2 Tétel.

Ha a γ térgörbét leíró $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény a t_0 pontban $(n+1)$ -szer folytonosan differenciálható, $\dot{\underline{r}}(t_0) = \ddot{\underline{r}}(t_0) = \dots = \underline{r}^{(n-1)}(t_0) = \underline{0}$, de $\underline{r}^{(n)}(t_0) \neq \underline{0}$, akkor γ -nak a t_0 pontban van érintője és annak irányvektora (az érintővektor) $\underline{r}^{(n)}(t_0)$.

Bizonyítás. Az $\underline{r}(t_0+h) - \underline{r}(t_0)$ vektorral együtt $\frac{1}{h^n} (\underline{r}(t_0+h) - \underline{r}(t_0))$ is a szelő irányvektora ($h \neq 0$).

Az (1.13) formula felhasználásával

$$\frac{1}{h^n} (\underline{r}(t_0+h) - \underline{r}(t_0)) = \frac{1}{h^n} \left(\frac{\underline{r}^{(n)}(t_0)}{n!} h^n + \underline{\zeta}(h) \right),$$

ahonnan a $h \rightarrow 0$ határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} (\underline{r}(t_0 + h) - \underline{r}(t_0)) = \frac{\underline{r}^{(n)}(t_0)}{n!} \parallel \underline{r}^{(n)}(t_0) \neq 0.$$

Az előbbieken vektor-skalár függvény deriváltjának geometriai jelentésével foglalkoztunk, igen fontos azonban e függvények mechanikai interpretációja is. Ha a t változó az időt jelöli, az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény valamely "pontoszerűnek tekinthető" test mozgását írja le. E függvény $\underline{r}(t)$ értéke a mozgó pont térbeli helyzetét jelenti a t időpillanatban.

A $p = \{ \underline{r} : \underline{r}(t), t \in I \}$ halmaz, ahol I valamilyen időintervallum, a mozgás pályája (trajektoriája). Mivel a mozgó pont különböző időpontokban is tartózkodhat a tér ugyanazon pontjában, a p pálya nem szükségképpen térgörbe a 2.1 Definíció értelmében. A gyakorlatban előforduló pályák azonban általában véges sok térgörbe egyesítései. Lehetséges továbbá az, hogy a mozgást leíró $\underline{r}(t)$, $t \in R$ vektor-skalár függvény periodikus és a $\tau > 0$ szám a periodusa, vagyis $\underline{r}(t + \tau) = \underline{r}(t)$, $t \in R$. Ha mostan az $\underline{r}(t)$ függvény leszűkítése pl. a $[0, \tau]$ intervallumra térgörbét határoz meg, vagyis

$\gamma = \{ \underline{r} : \underline{r}(t), t \in [0, \tau] \}$ zárt térgörbe, akkor γ egyben a mozgás pályája is, melyet a mozgó pont végtelen sokszor befut.

Ha a mozgást leíró $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény differenciálható, akkor a deriváltnak fontos mechanikai jelentése van. $\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)$ a pont elmozdulása a $[t_0, t]$ időintervallumban, vagyis $|t - t_0|$ idő alatt. Az

$$\frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0}$$

különbségi hányados az időegység alatti elmozdulás, vagy az átlagos sebesség. Ennek határértéke $t \rightarrow t_0$ esetén $\dot{\underline{r}}(t_0)$, a t_0 időpontbeli (pillanatnyi) sebességvektor. Ha a mozgás sebessége, mint az idő függvénye, vagyis az $\dot{\underline{r}}(t)$ vektor-skalár függvény is differenciálható, akkor

$$\frac{\dot{\underline{r}}(t) - \dot{\underline{r}}(t_0)}{t - t_0}$$

a pillanatnyi sebesség időegység alatti megváltozása, vagyis az átlagos gyorsulás

sulás. Ennek határértéke $t \rightarrow t_0$ esetén, $\ddot{\underline{r}}(t_0)$ a t_0 időpontbeli (pillanatnyi) gyorsulásvektor.

Legyen A és B a tér két tetszőleges pontja és γ egy őket összekötő "irányított" térgörbe (ezen azt értjük, hogy γ -n ki van jelölve a haladási irány, és pedig A-ból B-be). Vegyünk fel γ -n a haladási iránynak megfelelő sorrendben $n+1$ számú pontot: $P_0 = A, P_1, P_2, \dots, P_n = B$. A $\overline{P_0 P_1}, \overline{P_1 P_2}, \dots, \overline{P_{n-1} P_n}$ szakaszok egyesítését egy γ -ba írt poligonnak nevezzük. A $\overline{P_{k-1} P_k}$ szakasz hosszát $\overline{P_{k-1} P_k}$ -val jelölve a poligon hossza $\sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1} P_k}$. A térgörbe "hosszát" a γ -ba írt poligonok hossza segítségével értelmezzük.

2.3 Definíció.

Azt mondjuk, hogy a tér A és B pontját összekötő γ térgörbe rektifikálható (kiegyenesíthető), ha a γ -ba írt poligonok hosszának létezik a határértéke, mikor a poligonok maximális hosszúságú szakaszának hossza zérushoz tart, (" γ felosztása minden határon túl finomodik"), vagyis, ha van $s \geq 0$ szám, melyre minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $\delta > 0$, hogy

$$\max_{1 \leq k \leq n} \overline{P_{k-1} P_k} < \delta$$

esetén

$$\left| s - \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1} P_k} \right| < \varepsilon,$$

ahol $P_0 P_1 \dots P_n$ γ -ba írt poligon. Ekkor az

$$s = \lim_{\max \overline{P_{k-1} P_k} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1} P_k}$$

számot a γ térgörbe ív hosszának nevezzük.

2.3 Tétel.

Ha a $\gamma = \{ \underline{r}: \underline{r}(t), t \in [\alpha, \beta] \}$ térgörbét leíró $\underline{r}(t)$ vektor-skálár függvény kétszer folytonosan deriválható, akkor γ rektifikálható és ivhossza

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\underline{r}}(t)| dt \quad (2.1)$$

Megjegyezzük, hogy e tétel már lényegesen gyengébb feltételek mellett is igaz; elegendő annyit feltenni, hogy $\underline{r}(t)$ differenciálható, és $|\dot{\underline{r}}(t)|$ korlátos és integrálható.

Bizonyítás. Felhasználjuk a Taylor formulát (1.3 Tétel) a következő alakban:

$$\left| \underline{r}(t+h) - \underline{r}(t) - \dot{\underline{r}}(t)h \right| \leq \frac{Mh^2}{2!}, \quad (2.2)$$

ahol $M = \max_{t \in [\alpha, \beta]} |\ddot{\underline{r}}(t)|$. Bebizonyítjuk, hogy a γ -ba írt poligonok hosszának

és a (2.1) integrál integrál-közelítő összegének eltérése zérushoz tart, ha a görbe felosztása minden határon túl finomodik.

Mivel a görbe és az (α, β) intervallum közötti megfeleltetés egy-egy értelmű, γ minden $A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = B$ felosztásához tartozik

$[\alpha, \beta]$ egy $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ felosztása, ahol $\underline{r}(t_k) = \vec{OP}_k$. A poligonhossz és az integrál-közelítő összeg eltérése

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n |\underline{r}(t_k) - \underline{r}(t_{k-1})| - \sum_{k=1}^n |\dot{\underline{r}}(t_{k-1})| |t_k - t_{k-1}| \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \left| |\underline{r}(t_k) - \underline{r}(t_{k-1})| - |\dot{\underline{r}}(t_{k-1})| |t_k - t_{k-1}| \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \left| \underline{r}(t_k) - \underline{r}(t_{k-1}) - \dot{\underline{r}}(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \right|, \quad (2.3) \end{aligned}$$

mivel minden $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorra $||\underline{a}| - |\underline{b}|| \leq |\underline{a} - \underline{b}|$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott, és $\max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) < \delta$, ahol δ értékét később rögzítjük. (2.2) felhasználásával (2.3) kisebb vagy egyenlő, mint

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{M (t_k - t_{k-1})^2}{2} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{M \delta (t_k - t_{k-1})}{2} = \frac{M \delta}{2} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \\ &= \frac{M \delta}{2} (\beta - \alpha) < \varepsilon, \end{aligned}$$

ha

$$\delta = \begin{cases} \frac{2}{M(\beta - \alpha)}, & M \neq 0 \text{ esetén} \\ \text{tetszőleges,} & M = 0 \text{ esetén.} \end{cases}$$

A γ -ba írt poligonok hossza tehát a (2.1) integrálhoz tart, ha az $[\alpha, \beta]$ intervallum felosztása minden határon túl finomodik. A γ görbe és az $[\alpha, \beta]$ intervallum felosztása azonban "egyszerre finomodik minden határon túl", mivel a 2.1 Definíció szerint nemcsak $\underline{r}(t)$, hanem az általa létesített leképezés inverze is folytonos.

2.2 Példa. A 2.1 Példában szereplő $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v} t$ egyenletű egyenes $\underline{r}(\alpha) = \underline{r}_0 + \underline{v} \alpha$ és $\underline{r}(\beta) = \underline{r}_0 + \underline{v} \beta$ pontjai közötti szakaszának hossza (mivel $\dot{\underline{r}} = \underline{v}$)

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} |\underline{v}| dt = |\underline{v}| (\beta - \alpha) = |\underline{r}(\beta) - \underline{r}(\alpha)|,$$

amint ez minden integrálás nélkül is nyilvánvaló.

Ha a 2.3 Tétel feltételei mellett $\underline{r}(t) = x(t) \underline{i} + y(t) \underline{j} + z(t) \underline{k}$, akkor (1.11) figyelembe vételével

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (2.4)$$

Ha a görbe speciálisan xy síkbeli síkgörbe, akkor $z(t) \equiv \dot{z}(t) \equiv 0$ és (2.4)-ből a II. Kötet, (31.4) (ott definiáló) formuláját kapjuk. Ha az xy síkbeli

görbe egyenlete $y = f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, vagyis a görbe az $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ egyváltozós valós függvény grafikonja, akkor előállítható például az

$$\underline{r}(x) = x \underline{i} + f(x) \underline{j} + 0 \underline{k} \quad (2.5)$$

vektor-skalár függvény segítségével. Mivel ekkor $\dot{\underline{r}}(x) = \underline{i} + f'(x) \underline{j}$, ezért az ívhossz (v.ö. II. Kötet, (31.5))

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} (1 + f'(x)^2)^{\frac{1}{2}} dx. \quad (2.6)$$

Ha adott a $\gamma = \{ \underline{r}: \underline{r}(t), t \in [\alpha, \beta] \}$ térgörbe, az $\alpha' \leq \tau \leq \beta'$ intervallumban szigorúan monoton $t(\tau)$ folytonos függvény és pl. $\alpha = t(\alpha')$, $\beta = t(\beta')$, akkor nyilván $\gamma = \{ \underline{r}: \underline{r}(t(\tau)), \tau \in [\alpha', \beta'] \}$, vagyis az $\underline{r}(t(\tau))$ vektor-skalár függvény ugyanazt a térgörbét állítja elő. $\underline{r}(t(\tau))$ - ekkor a γ térgörbe egy másik paraméterezésének, a t paraméterről a τ paraméterre vonatkozó áttérést paramétertranszformációnak nevezzük.

Abban a törekvésünkben, hogy a görbe invariáns tulajdonságait vegyük vizsgálat alá, legcélszerűbb olyan paraméterre való áttérés, amelynek segítségével állításaink csak magára a görbére, nem pedig annak paraméterezésére vonatkoznak. Olyan paramétert akarunk választani, amely a görbe geometriai tulajdonságát tükrözi. Erre a célra az "előjeles ívhossz" mutatkozik legalkalmasabbnak. Ha a γ térgörbét leíró $\underline{r}(t)$ függvény kielégíti a 2.3 Tétel feltételeit és $\dot{\underline{r}}(t) \neq 0$, akkor $|\dot{\underline{r}}(t)| > 0$, és így rögzítve: $t_0 \in [\alpha, \beta]$ -ra a γ térgörbe $\underline{r}(t_0)$ és $\underline{r}(t)$ pontjai közötti darabjának előjeles ívhossza (pozitív, ha $t > t_0$, negatív ha $t < t_0$)

$$s = \int_{t_0}^t |\dot{\underline{r}}(u)| du \quad (2.7)$$

a felső határ szigorúan monoton növekedő, deriválható függvénye, $\frac{ds}{dt} = |\dot{\underline{r}}(t)| \neq 0$, tehát van inverz függvénye, $t(s)$. Ekkor áttérhetünk a γ térgörbe ún. természetes paraméterezésére: $\underline{r}(t(s))$, ahol az s paraméter a görbe valamely pontjától mért ívhosszat jelenti. Az $\underline{r}(t(s))$ vektor-skalár függvény derivált vektora az összetett függvény és az inverz függvény differenciálási szabályát alkalmazva:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{r}} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} . \quad (2.8)$$

A természetes paraméter (az ívhossz) szerinti deriválást a következőkben vesszővel jelöljük. Így azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| \equiv 1. \quad (2.9)$$

Ha tehát a γ térgörbe természetes paraméterezésben van adva, akkor az ő t leíró vektor-skalár függvény derivált vektora minden pontban egységvektor. Megmutatjuk, hogy (2.9) a természetes paraméterezés jellemző tulajdonsága, vagyis ha a γ térgörbét leíró (kétszer folytonosan differenciálható) $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalár függvény deriváltvektora egységvektor, $|\dot{\mathbf{r}}(t)| \equiv 1$, akkor t a természetes paraméter, (vagy attól legfeljebb egy állandó tagban különbözik). Valóban, akkor a görbe $\mathbf{r}(t_0)$ pontjától mért előjeles ívhossz:

$$s = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}(u)| du = \int_{t_0}^t du = t - t_0 ,$$

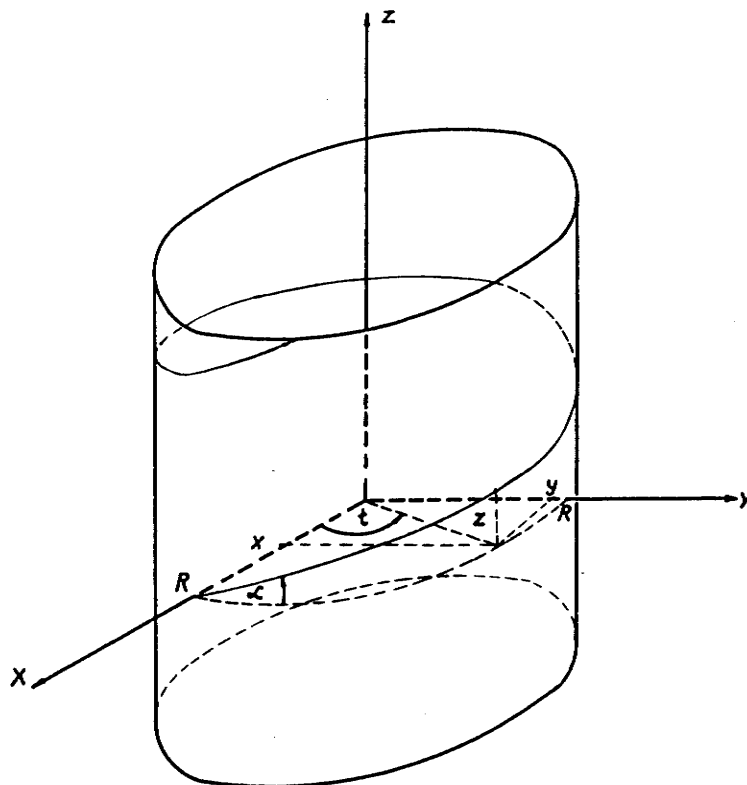
vagyis $t = s + t_0$.

Legyen γ rektifikálható, irányított görbe (ezen általában azt értjük, hogy lerögzítettük a görbe valamely pontjából mért előjeles ívhossz növekedésének irányát a görbén), és az ő t leíró vektor-skalár függvény kétszer folytonosan differenciálható. A görbe tetszőleges pontjában az érintő egységvektort, melynek iránya megfelel az ívhossz-növekedés irányának, $\mathbf{t}$ -vel jelöljük. (2.9)-ből nyilvánvaló, hogy ha a görbe természetes paraméterezésben adott, akkor

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) . \quad (2.10)$$

2.3 Példa. Tekintsünk egy ABC derékszögű háromszöget, melynek A csúcspontjánál levő hegyesszöge α , és B-nél levő szöge a derékszög. Ha a derékszögű háromszöget papírból kivágjuk és rácsavarjuk egy R sugarú egyenes körhenger palástjára úgy, hogy az AB befogó merőleges legyen a henger alkotóira, akkor az AC átfogó a hengeren egy csavarvonal egy szakaszát jelöli ki. Ha most a hengert úgy helyezzük el az x y z derékszögű Descartes-féle koordinátarendszerben, hogy tengelye a z tengely legyen és az A

pont az $(R, 0, 0)$ pontba essék, akkor a megfelelő teljes csavarvonal egy paraméteres előállítás (lásd 2.2. ábra)



2.2 ábra

$$\underline{r}(t) = R \cos t \underline{i} + R \sin t \underline{j} + R t \operatorname{tg} \alpha \underline{k}, \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (2.11)$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = -R \sin t \underline{i} + R \cos t \underline{j} + R \operatorname{tg} \alpha \underline{k}. \quad (2.12)$$

A csavarvonal $\underline{r}(0)$ és $\underline{r}(t)$ pontja közötti szakaszának előjeles ívhossza az $m = R \operatorname{tg} \alpha$ jelölés bevezetésével

$$s = \int_0^t |\dot{\underline{r}}(u)| du = \int_0^t (R^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} du = (R^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \cdot t.$$

Innen

$$t = \frac{s}{(R^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}},$$

és a csavarvonal természetes paraméterezése

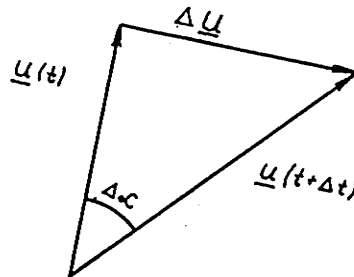
$$\underline{r}(s) = R \cos \frac{s}{(R^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}} \underline{i} + R \sin \frac{s}{(R^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}} \underline{j} + \frac{ms}{(R^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}} \underline{k}. \quad (2.13)$$

3. Frenet-képletek

3.1 Segédétel.

Tekintsük az $\underline{u}(t)$, $t \in D$ vektor-skalár függvényt, és jelöljük $\Delta\alpha$ -val az $\underline{u}(t)$ és $\underline{u}(t + \Delta t)$ vektorok által bezárt szöget. Ha $\underline{u}(t)$ deriválható és $\underline{u}(t) \neq 0$, akkor

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right| = \frac{|\underline{u}(t) \times \dot{\underline{u}}(t)|}{(\underline{u}(t))^2}. \quad (3.1)$$



A (3.1) formula tehát megadja a "függvényértékek irányának változási sebességét."

Bizonyítás. A $\Delta \underline{u} = \underline{u}(t + \Delta t) - \underline{u}(t)$ jelölés bevezetésével (lásd 3.1 ábra) és a vektoriális szorzat elemi tulajdonságainak felhasználásával

3.1 ábra

$$\left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\Delta\alpha}{\sin \Delta\alpha} \cdot \frac{\sin \Delta\alpha}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta\alpha}{\sin \Delta\alpha} \frac{|\underline{u}(t) \times [\underline{u}(t) + \Delta \underline{u}]|}{|\Delta t| |\underline{u}(t)| |\underline{u}(t) + \Delta \underline{u}|} =$$

$$= \frac{\Delta \alpha}{\sin \Delta \alpha} \frac{|\underline{u}(t) \times \underline{u}(t) + \underline{u}(t) \times \Delta \underline{u}|}{|\Delta t| |\underline{u}(t)| |\underline{u}(t) + \Delta \underline{u}|} = \frac{|\underline{u}(t) \times \frac{\Delta \underline{u}}{\Delta t}|}{|\underline{u}(t)| |\underline{u}(t) + \Delta \underline{u}|} \frac{\Delta \alpha}{\sin \Delta \alpha}.$$

Ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor $\Delta \alpha \rightarrow 0$ és a II. Kötet 4.3 Példa eredménye alapján (3.1) adódik.!

3.1 Definíció.

A $\gamma = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(t), t \in I \}$ térgörbét, ahol I valamilyen intervallum, regulárisnak nevezzük, ha az $\underline{r}(t)$ függvény háromszor folytonosan differenciálható és $\dot{\underline{r}}(t) \neq 0, t \in I$.

A következőkben kizárólag reguláris térgörbékkel foglalkozunk.

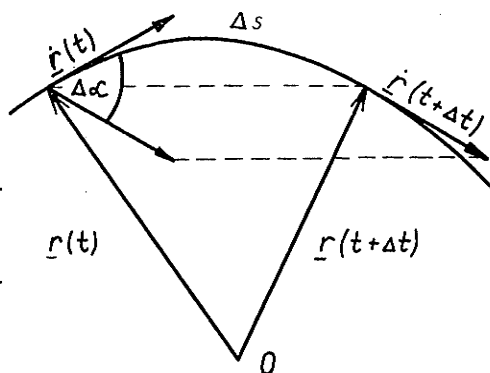
3.2 Definíció.

Legyen γ reguláris térgörbe és jelöljük a görbe $\dot{\underline{r}}(t)$ és $\dot{\underline{r}}(t + \Delta t)$ érintővektora által bezárt szöget $\Delta \alpha$ -val, az $\underline{r}(t)$ és $\underline{r}(t + \Delta t)$ pontok közti görbeszakasz ívhosszát Δs -sel (lásd 3.2 ábra); a

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$$

határértéket a görbe $\underline{r}(t)$ pontbeli görbületének nevezzük.

$\frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$ megadja a görbe érintőjének átlagos irányváltozási sebességét, miközben a görbén Δs hosszúságú szakaszon elmozdulunk. E hányados határértéke, a görbület a görbe (ívhosszra vonatkoztatott) irányváltozási sebessége, vagyis azt mutatja, hogy a görbe mennyire tér el az egyenestől, mekkora a "görbültsége". Nyilvánvaló a definícióból, hogy ha a görbület létezik, akkor az nem-negatív szám, ill. a görbület, mint a paraméter függvénye, nem negatív függvény: $\kappa(t) \geq 0$.



3.2 ábra

3.2 Tétel.

A reguláris γ térgörbe görbülete létezik és

$$\chi(t) = \frac{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}{|\dot{\underline{r}}(t)|^3} \quad (3.2)$$

Bizonyítás. Felhasználjuk a 3.1 Segédteét $\underline{u}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$, $\underline{u}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$ választásával. (2.7) figyelembevételével

$$\begin{aligned} \chi &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{|\Delta \underline{t}|} \cdot \frac{|\Delta \underline{t}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \right| \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \underline{t}}{\Delta s} \right| = \\ &= \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^2} \cdot \frac{1}{|\dot{\underline{r}}|} = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3} \cdot 1 \end{aligned}$$

Ha a görbe speciálisan xy síkbeli síkgörbe, melynek egyenlete $y = f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, vagyis a görbe az $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ egyváltozós valós függvény grafikonja, akkor előállítható például a (2.5) vektor-skalár függvény segítségével. Ekkor (v.ö. II. Kötet (18.7) $\dot{\underline{r}}(x) = \underline{i} + f'(x) \underline{j}$, $\ddot{\underline{r}}(x) = f''(x) \underline{j}$ és

$$\chi = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}} \quad (3.3)$$

Ha t a természetes paraméter, akkor (2.9)-ből és az 1.2 Tételből következik, hogy $\underline{r}' \perp \underline{r}''$ és

$$\chi = |\underline{r}''| = |\underline{t}'| \quad (3.4)$$

Az érintőre merőleges irányok az ún. normálisok. Az előbbieket szerint $\underline{r}''$ szintén merőleges az érintőre. Ha $\underline{r}'' \neq 0$, akkor $\underline{r}''$ egységvektorát főnormális egységvektornak nevezzük és $\underline{n}$ -el jelöljük, vagyis

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}''}{|\underline{r}''|} = \frac{\underline{t}'}{\chi} \quad (3.5)$$

Ebből

$$\underline{t}' = \chi \underline{n} \quad (3.6)$$

3.3 Tétel.

A reguláris γ térgörbe akkor és csak akkor egyenes, ha görbülete azonosan zérus.

Bizonyítás. a) Ha γ egyenes, akkor egyenlete $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}s$ alakban írható (s a természetes paraméter). Így $\underline{r}' = \underline{v}$; $\underline{r}'' = 0$ és (3.4) alapján $\chi \equiv 0$.

b) Ha $\chi \equiv 0$, akkor (3.4) alapján $\underline{r}'' = 0$. Az 1.6 Definíció után mondottakból következik, hogy $\underline{r}' = \underline{v}$ állandó és $\underline{r} = \underline{v}s + \underline{r}_0$, vagyis a térgörbe egyenes.

3.3 Definíció.

Legyen a γ reguláris térgörbe $\underline{r}(t_0)$ pontjában a görbület zérustól különböző, $\chi(t_0) \neq 0$; ekkor az $\underline{r}(t_0)$ ponton áthaladó, a $\underline{t}$ érintő egységvektor és $\underline{n}$ főnormális egységvektor által kifeszített síkot, a görbe $\underline{r}(t_0)$ pontbeli simulósíkjának nevezzük.

Megmutatjuk, hogy a 3.3 Definícióban leírt feltételek mellett az $\ddot{\underline{r}}(t_0)$ vektor párhuzamos a simulósíkkal. (2.8) alapján

$$\dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \underline{r}' \frac{ds}{dt}. \quad (3.7)$$

Az utóbbi azonosságot t szerint differenciálva

$$\ddot{\underline{r}} = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \underline{r}'' \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \underline{r}' \frac{d^2 s}{dt^2},$$

vagy (3.6) felhasználásával

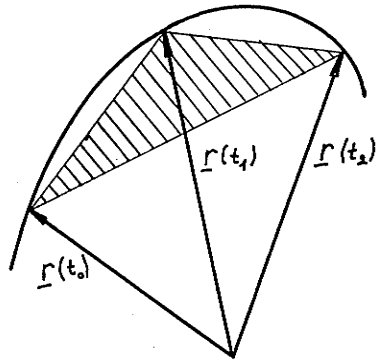
$$\ddot{\underline{r}} = \frac{d^2 s}{dt^2} \underline{t} + \chi \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \underline{n}, \quad (3.8)$$

amiből állításunk adódik. Mivel az $\dot{\underline{r}}$ érintővektor természetesen párhuzamos a simulósíkkal, és mivel $\chi(t_0) \neq 0$ -ból, (3.2) miatt következik,

hogy $\dot{\underline{r}}$ nem párhuzamos $\ddot{\underline{r}}$ -tal, az $\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}$ vektor a simulósík normálvektora (bármilyen paraméterezésben van is adva a reguláris térgörbe). Speciálisan a simulósíknak normálvektora a

$$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n} \quad (3.9)$$

egységvektor is. A (3.9)-cel értelmezett $\underline{b}$ vektort a térgörbe adott pontjában binormális egységvektorának nevezzük.



3.3 ábra

A reguláris térgörbén, melynek rögzített $\underline{r}(t_0)$ pontjában a görbület, $\chi(t_0)$ nem zérus, vegyünk fel még két pontot $\underline{r}(t_1)$ -et és $\underline{r}(t_2)$ -t. E három ponton áthaladó sík normálvektora legyen $\underline{m}$ és e sík egyenlete

$$(\underline{r} - \underline{r}(t_0)) \underline{m} = 0. \quad (3.10)$$

Ha $t_1 \rightarrow t_0$ és $t_2 \rightarrow t_0$ (vagy ami ugyanaz, $\underline{r}(t_1) \rightarrow \underline{r}(t_0)$ és $\underline{r}(t_2) \rightarrow \underline{r}(t_0)$) esetén e sík határhelyezetbe tart, vagyis e sík $\underline{m}$ normálvektora az $\underline{m}_0 \neq 0$ vektorhoz

tart, akkor e határhelyzet nem más mint az $\underline{r}(t_0)$ pontbeli simulósík. Ezt az állításunkat a következőképpen bizonyítjuk be. Mivel a (3.10) egyenletű sík áthalad az $\underline{r}(t_0)$, $\underline{r}(t_1)$ és $\underline{r}(t_2)$ pontokon, ezért

$$(\underline{r}(t_0) - \underline{r}(t_0)) \underline{m} = 0, (\underline{r}(t_1) - \underline{r}(t_0)) \underline{m} = 0,$$

$$(\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_0)) \underline{m} = 0.$$

Vezessük be a következő skalárfüggvényt:

$$f(t) = (\underline{r}(t) - \underline{r}_0) \underline{m}.$$

Ennek a függvénynek az értéke a t_0 , t_1 és t_2 helyeken zérus, az f függvény $[t_0, t_1]$ -ben és $[t_1, t_2]$ -ben deriválható, tehát alkalmazható rá Rolle tétele, mely szerint van olyan $t_3 \in [t_0, t_1]$ és $t_4 \in [t_1, t_2]$, hogy

$$\dot{f}(t_3) = 0, \dot{f}(t_4) = 0, \quad t_3 \neq t_4.$$

A $[t_3, t_4]$ intervallumban az f függvényre ismét alkalmazható Rolle tétele; van olyan $t_5 \in [t_3, t_4]$, hogy $\ddot{f}(t_5) = 0$, vagyis

$$\dot{f}(t_3) = \dot{\underline{r}}(t_3) \underline{m} = 0, \quad \ddot{f}(t_5) = \ddot{\underline{r}}(t_5) \underline{m} = 0.$$

$t_1 \rightarrow t_0$ és $t_2 \rightarrow t_0$ -ból következik, hogy t_3 , t_4 és t_5 is t_0 -hoz tart, ezért

$$\dot{\underline{r}}(t_0) \cdot \underline{m}_0 = 0 \text{ és } \ddot{\underline{r}}(t_0) \underline{m}_0 = 0. \quad (3.11)$$

A határhelyzet sík $\underline{m}_0$ normálvektora (3.11) szerint merőleges az $\dot{\underline{r}}(t_0)$ és $\ddot{\underline{r}}(t_0)$ vektorokra, tehát a simulósík normálvektora!

Egy reguláris térgörbe adott pontjához tartozó érintő, főnormális és binormális egységvektorok, $\underline{t}$, $\underline{n}$ és $\underline{b}$ páronként egymásra merőlegesek és (3.9) szerint az adott sorrendben jobbrendszer alkotnak. E rendezett vektorhármast (mely a térgörbe minden olyan pontjában értelmezve van, ahol a görbület nem zérus) kísérő triédernek nevezzük. A $\underline{t}$ és $\underline{n}$ vektorok síkja a simulósík. $\underline{n}$ és $\underline{b}$ síkját normálsíknak, $\underline{t}$ és $\underline{b}$ síkját rektifikáló síknak nevezzük.

Ha a γ reguláris görbe síkgörbe (vagyis van olyan sík, mely minden pontját tartalmazza) és görbülete nem zérus, akkor érintővektora minden pontban párhuzamos a görbe síkjával. Így ha $\underline{r}(s)$ a görbe természetes paraméterezése, akkor

$$\frac{\underline{r}'(s+\Delta s) - \underline{r}'(s)}{\Delta s}$$

is párhuzamos a görbe síkjával, tehát határértéke $\underline{r}''$ és az $\underline{n}$ főnormális is párhuzamos a görbe síkjával. Ezek szerint a $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$ binormális egységvektor állandó, tehát a simulósík a görbe minden pontjában egybeesik a görbe síkjával.

A binormális egységvektor, a simulósík normálvektora irányának változási sebességével mérhetjük a simulósík állása megváltozásának sebességét, vagy más szavakkal azt, hogy a görbe mennyire tér el a síkgörbétől.

3.4 Definíció.

Legyen a reguláris γ térgörbe görbülete κ zérustól különböző, jelöljük a $\underline{b}(t)$ és $\underline{b}(t+\Delta t)$ binormális egységvektorok által bezárt szöveget $\Delta\beta$ -val, az $\underline{r}(t)$ és $\underline{r}(t+\Delta t)$ pontok közötti görbeszakasz ívhosszát Δs -sel; a

$$|\tau| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta s}$$

határértéket a görbe torziója abszolút értékének nevezzük.

3.4 Tétel.

Ha a reguláris γ térgörbe görbülete nem zérus, akkor torziója létezik és

$$|\tau| = \frac{(\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}} \times \underline{\ddot{\ddot{r}}})}{|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}|^2}. \quad (3.12)$$

Bizonyítás. Felhasználjuk a 3.1 Segédtelet $\underline{u} = \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}$ választással, $\Delta \alpha = \Delta \beta$ jelöléssel és (2.7)-et, majd a kifejtési tételt (III. Kötet, (2.17)) $\underline{a} = \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}$, $\underline{b} = \underline{\dot{r}}$, $\underline{c} = \underline{\ddot{r}}$ választással:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta s} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta}{|\Delta t|} \frac{|\Delta t|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \beta}{\Delta t} \right| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta t}{\Delta s} \right| = \\ &= \frac{|(\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}) \times (\underline{\ddot{r}} \times \underline{\ddot{\ddot{r}}} + \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{\ddot{r}}})|}{|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}|^2} \frac{1}{|\underline{\dot{r}}|} = \frac{|(\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}) \times (\underline{\ddot{r}} \times \underline{\ddot{\ddot{r}}})|}{|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}|^2} \frac{1}{|\underline{\dot{r}}|} = \\ &= \frac{|\underline{\dot{r}}(\underline{\ddot{r}} \times \underline{\ddot{\ddot{r}}}) - \underline{\ddot{r}}(\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{\ddot{r}}})|}{|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}|^2} \cdot \frac{1}{|\underline{\dot{r}}|} = \frac{|\underline{\ddot{r}} \times \underline{\ddot{\ddot{r}}}| |\underline{\dot{r}}|}{|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}|^2 |\underline{\dot{r}}|} = \frac{|\underline{\ddot{r}} \times \underline{\ddot{\ddot{r}}}|}{|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}|^2}. \end{aligned}$$

A térgörbe τ ("előjeles") torzióját a 3.4 Tétel feltételei fennállása esetén a következőképpen értelmezzük:

$$\tau = \frac{\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}} \times \underline{\ddot{\ddot{r}}}}{|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}|^2}. \quad (3.13)$$

Természetes paraméterezés esetén (3.6) és (3.9) figyelembevételével a torzióra a következő kifejezést kapjuk:

$$\tau = \frac{(\underline{r}' \times \underline{r}'') \cdot \underline{r}'''}{|\underline{r}' \times \underline{r}''|^2} = \frac{(\underline{t} \times \underline{\chi n}) \underline{r}'''}{|\underline{t} \times \underline{\chi n}|^2} = \frac{\chi \underline{b} \cdot \underline{r}'''}{\chi^2},$$

vagyis

$$\tau = \frac{\underline{b} \cdot \underline{r}'''}{\chi} . \quad (3.14)$$

3.5 Tétel.

(Frenet-féle formulák). Legyen a reguláris γ tér-
görbe görbülete zérustól különböző; ekkor fennáll-
nak a

$$\underline{t}' = \chi \underline{n} , \quad (3.15)$$

$$\underline{n}' = -\chi \underline{t} + \tau \underline{b} , \quad (3.16)$$

$$\underline{b}' = -\tau \underline{n} . \quad (3.17)$$

formulák, ahol a vessző az ívhossz szerinti deri-
váltást jelöli.

Bizonyítás. (3.15) azonos a (3.6) formulával, tehát már bizonyítottuk.
(3.16) bizonyítása. Legyen a kísérő triéder által alkotott bázisban

$$\underline{n}' = \alpha \underline{t} + \beta \underline{n} + \delta \underline{b} , \quad (3.18)$$

ahol α, β, δ egyelőre ismeretlenek. (3.18) mindkét oldalát $\underline{n}$ -nel, ill.
 $\underline{t}$ -vel skalárisan szorozva és figyelembe véve, hogy $|\underline{n}| \equiv 1$ miatt $\underline{n} \cdot \underline{n}' = 0$ (1.2 Tétel), a

$$0 = \beta ,$$

$$\underline{n}' \cdot \underline{t} = \alpha$$

összefüggéseket kapjuk. Deriváljuk most a $\underline{t} \cdot \underline{n} \equiv 0$ azonosságot:

$$\underline{t}' \cdot \underline{n} + \underline{t} \cdot \underline{n}' = 0 ,$$

amiből $\underline{t}' \cdot \underline{n} + \alpha = 0$, vagyis $\alpha = -\underline{t}' \cdot \underline{n}$ adódik. Tehát (3.15) felhasználásával

$$\alpha = -\chi \underline{n}^2 = -\chi . \quad (3.19)$$

Ha viszont (3.18) mindkét oldalát $\underline{b}$ -vel szorozzuk skalárisan, az $\underline{n}' \cdot \underline{b} = \delta$ eredményt kapjuk. (3.5)-öt differenciálva

$$\underline{n}' = \left(\frac{1}{\chi}\right)' \underline{r}'' + \frac{1}{\chi} \underline{r}''' = \left(\frac{1}{\chi}\right)' \chi \underline{n} + \frac{1}{\chi} \underline{r}''' .$$

(3.14) felhasználásával

$$\delta = \underline{n}' \underline{b} = \frac{1}{\kappa} \underline{b} \underline{r}''' = \underline{\tau}. \quad (3.20)$$

(3.19)-et, $\beta = 0 - t$ és (3.20)-at (3.18)-ba helyettesítve (3.16)-ot kapjuk.

(3.17) bizonyítása. Deriváljuk a (3.9) azonosságot mindkét oldalát és használjuk fel a már bebizonyított (3.15) és (3.16) formulákat

$$\begin{aligned} \underline{b}' &= \underline{t}' \underline{x} \underline{n} + \underline{t} \underline{x} \underline{n}' = \underline{\kappa} \underline{n} \underline{x} \underline{n} + \underline{t} \underline{x} (-\underline{\kappa} \underline{t} + \underline{\tau} \underline{b}) = \\ &= \underline{\tau} \underline{t} \underline{x} \underline{b} = -\underline{\tau} \underline{n}. \end{aligned}$$

A Frenet-formulák alkalmazásaként megmutatjuk, hogy érvényes a következő

3.6 Tétel.

A reguláris γ térgörbe, melynek görbülete sehol sem zérus, akkor és csak akkor síkgörbe, ha torziója τ azonosan zérus.

Bizonyítás. Ha γ síkgörbe, akkor simulósíkja minden pontban ugyanaz a sík, és ennek normálisa, a binormális egységvektor állandó, tehát (3.17) alapján $\underline{\tau} = -\underline{b}' \underline{n} \equiv 0$. Megfordítva, ha $\underline{\tau} \equiv 0$, akkor (3.17) formula szerint $\underline{b}' \equiv 0$, $\underline{b} \equiv \underline{b}_0$, állandó, tehát $\underline{t} \underline{b} = \underline{r}' \underline{b}_0 = 0$. De akkor $(\underline{r}(s) \underline{b}_0)' = \underline{r}'(s) \underline{b}_0 + \underline{r}(s) \underline{b}_0' \equiv 0$, tehát $\underline{r}(s) \underline{b}_0 \equiv \underline{r}_0 \underline{b}_0$ állandó. Rendezve, az $(\underline{r}(s) - \underline{r}_0) \underline{b}_0 \equiv 0$ azonosságot kapjuk. Ez azt jelenti, hogy γ minden pontja kielégíti az $(\underline{r} - \underline{r}_0) \underline{b}_0 = 0$ egyenletet, vagyis γ e síkban van.!

3.5 Definíció.

Legyen a reguláris γ görbe görbülete az $\underline{r}(t_0)$ pontban zérustól különböző, $\kappa(t_0) \neq 0$; azt a kört, mely az $\underline{r}(t_0)$ pontbeli simulósíkban van, melynek középpontja az $\underline{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa} \underline{n}(t_0)$ pont és sugara $\rho = \frac{1}{\kappa}$, a γ görbe $\underline{r}(t_0)$ pontbeli simuló körének (görbületi körének), e kör ρ sugarát görbületi sugárnak, a simuló kör középpontját görbületi középpontnak nevezzük.

A reguláris γ térgörbe legyen természetes paraméterezésben megadva és tételezzük fel, hogy a rögzített $\underline{r}(s_0)$ pontban a görbület, $\kappa(s_0)$ nem zérus. Vegyünk fel γ -n még két pontot $\underline{r}(s_1)$ -et és $\underline{r}(s_2)$ -t. E három ponton áthaladó kör középpontja legyen $\underline{c}$ és sugara legyen R , vagyis a kör pontjait elégítsék ki az

$$(\underline{r} - \underline{c})^2 - R^2 = 0$$

egyenletet. Ha $s_1 \rightarrow s_0$ és $s_2 \rightarrow s_0$ (vagy ami ugyanaz $\underline{r}(s_1) \rightarrow \underline{r}(s_0)$ és $\underline{r}(s_2) \rightarrow \underline{r}(s_0)$) esetén a három pont által meghatározott sík határhelyzetéhez (és ekkor szükségképpen a simuló síkhoz) tart, és a három pont által meghatározott kör ugyancsak egy határkörhöz tart, mely szükségképpen a simuló síkban van és melynek középpontja, ill. sugara $\underline{c}_0$, ill. R_0 , akkor e határkör nem más, mint a simuló kör. Ezt az állításunkat a következőképpen bizonyítjuk be. A feltevésekből következik, hogy

$$(\underline{r}(s_0) - \underline{c})^2 - R^2 = 0, \quad (\underline{r}(s_1) - \underline{c})^2 - R^2 = 0,$$

$$(\underline{r}(s_2) - \underline{c})^2 - R^2 = 0.$$

Vezessük be a következő skalárfüggvényt:

$$f(s) = (\underline{r}(s) - \underline{c})^2 - R^2.$$

Ennek a függvénynek az értéke az s_0 , s_1 és s_2 helyeken zérus, az f függvény $[s_0, s_1]$ -ben és $[s_1, s_2]$ -ben folytonosan deriválható, tehát alkalmazható rá Rolle tétele, mely szerint van olyan $s_3 \in [s_0, s_1]$ és $s_4 \in [s_1, s_2]$, hogy

$$f'(s_3) = 0, \quad f'(s_4) = 0, \quad s_3 \neq s_4.$$

Az $[s_3, s_4]$ intervallumban az f' függvényre ismét alkalmazható Rolle tétele; van olyan $s_5 \in [s_3, s_4]$, hogy $f''(s_5) = 0$, vagyis

$$f''(s_5) = 2(\underline{r}(s_5) - \underline{c}) \underline{r}'(s_5) = 0,$$

$$f''(s_5) = 2[\underline{r}'(s_5)]^2 + 2(\underline{r}(s_5) - \underline{c}) \underline{r}''(s_5) = 0.$$

$s_1 \rightarrow s_0$ és $s_2 \rightarrow s_0$ -ből következik, hogy s_3 , s_4 és s_5 is s_0 -hoz tart, ezért

$$(\underline{r}(s_0) - \underline{c}_0) \underline{r}'(s_0) = 0 \quad (3.21)$$

és

$$[\underline{r}'(s_0)]^2 + (\underline{r}(s_0) - \underline{c}_0) \underline{r}''(s_0) = 0. \quad (3.22)$$

Mivel a határkör és annak $\underline{c}_0$ középpontja a simuló síkban van, az $\underline{r}(s_0) - \underline{c}_0$ vektor párhuzamos a simuló síkkal és (3.21) szerint merőleges $\underline{t}$ -re, tehát párhuzamos $\underline{n}$ -nel. (3.22)-ből az első Frenet-formula felhasználásával az

$$(\underline{r}(s_0) - \underline{c}_0) \underline{n} = \frac{-1}{\kappa}$$

egyenlőséget kapjuk. Innen egyrészt az adódik, hogy a határkör sugara

$$R_0 = |\underline{r}(s_0) - \underline{c}_0| = \frac{1}{\kappa} = \rho,$$

másrészt azt, hogy az $\underline{r}(s_0) - \underline{c}_0$ vektor $\underline{n}$ -nel ellentétes állásu (mivel skaláris szorzatuk negatív), vagyis

$$\underline{c}_0 - \underline{r}(s_0) = \frac{1}{\kappa} \underline{n},$$

$$\underline{c}_0 = \underline{r}(s_0) + \frac{1}{\kappa} \underline{n}.$$

A Frenet-féle formuláknak alapvető jelentőségük van a térgörbék elméletében. Segítségükkel bizonyítható be a görbeelmélet alaptétele (a bizonyításra nézve lásd [4]):

3.7 Tétel.

Ha $\kappa(s) > 0$ és $\tau(s)$ adott, folytonosan deriválható függvények, akkor - merevtest-szerű mozgásoktól eltekintve - egy és csak egy olyan görbe van, melynek valamely pontjától mért ívhossza s , görbülete, ill. torziója, mint az ívhossz függvénye $\kappa(s)$ -vel, ill. $\tau(s)$ -sel egyenlő.

3.1 Példa. Meghatározzuk a 2.3 Példában megadott csavarvonal görbületét és torzióját. A csavarvonal egyenlete (2.11):

$$\underline{r} = R \cos t \underline{i} + R \sin t \underline{j} + m t \underline{k},$$

$$\dot{\underline{r}} = -R \sin t \underline{i} + R \cos t \underline{j} + m \underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}} = -R \cos t \underline{i} - R \sin t \underline{j},$$

$$\ddot{\underline{r}} = R \sin t \underline{i} - R \cos t \underline{j},$$

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \underline{i} (mR \sin t) - \underline{j} (mR \cos t) + \underline{k} R^2,$$

$$|\dot{\underline{r}}| = \sqrt{R^2 + m^2}; \quad |\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}| = R \sqrt{R^2 + m^2}; \quad (\dot{\underline{r}} \ddot{\underline{r}} \ddot{\underline{r}}) = m R^2,$$

$$\chi = \frac{R \sqrt{R^2 + m^2}}{(R^2 + m^2)^{3/2}} = \frac{R}{R^2 + m^2},$$

$$\tau = \frac{m R^2}{R^2 (R^2 + m^2)} = \frac{m}{R^2 + m^2}. \quad (3.23)$$

Ezek szerint a csavarvonal görbülete is, torziója is állandó.

3.2 Példa. Gyorsulásvektor felbontása. Ha $\underline{r} = \underline{r}(t)$ egy "pontoszerűnek tekinthető" test mozgását írja le az idő függvényében, akkor a megtett ut is az idő függvénye: $s = s(t)$ (lásd 2.7) képletet), $\dot{s} = |\dot{\underline{r}}(t)| = v$ a pályamenti sebesség, $\ddot{s} = \dot{v} = a$ a pályamenti gyorsulás. A sebességvektor (3.7) alapján

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{t} v$$

A gyorsulásvektor (3.8) alapján

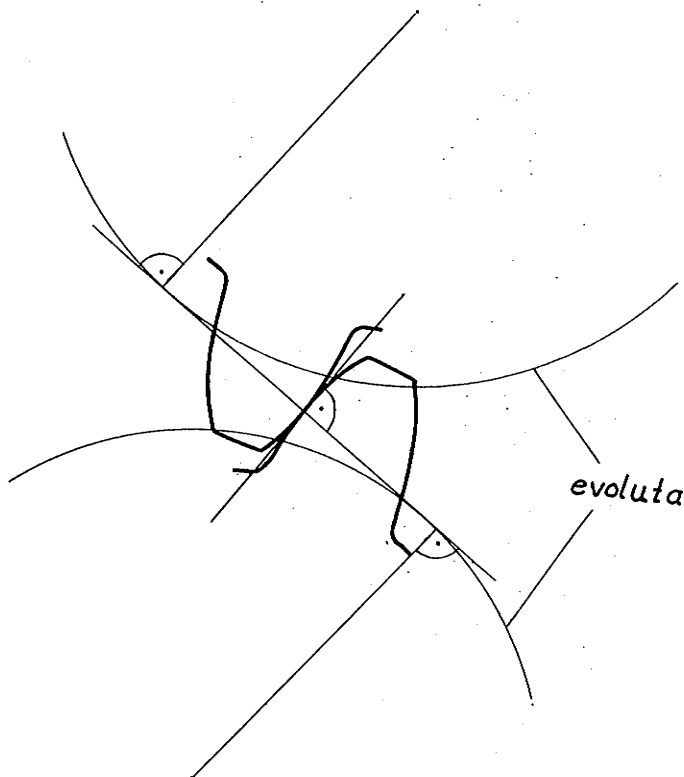
$$\ddot{\underline{r}}(t) = a \underline{t} + \frac{v^2}{\varrho} \underline{n}, \quad (3.24)$$

ahol ϱ a pálya görbületi sugara. A gyorsulásvektor felbontására kapott (3.24) képlet azt fejezi ki, hogy a gyorsulásvektor benne van a simulósíkban, érintőirányu komponense a pályamenti gyorsulás, normális irányu komponense pedig a centripetális gyorsulás. Ezek szerint ennek az általános pontmozgásnak a centripetális gyorsulása minden rögzített t_0 pillanatban

megegyezik egy olyan test centripetális gyorsulásával, mely a pálya $r(t_0)$ pontjához tartozó simuló körön egyenletes $v(t_0)$ sebességgel kering.

4. Evolens és evoluta

Fogaskerék áttétellel történő erőátvitelnél a fogaskerékrendszer helyes működésének alapvető feltétele a következő: a hajtó és a meghajtott fogaskerék éppen érintkezésben levő fogainak profilja a fogprofilok egymáson való legördülése során, minden pillanatban úgy érintkezzék, hogy az érintkezési pontban a fogprofil érintője a hajtó és a meghajtott kerék közös érintőjére (lásd 4.1 ábra) merőleges legyen.



4.1 ábra

Az átvitt erő ugyanis a két kerék közös érintője mentén hat, és ha ennek az erőnek a fogprofil érintője irányába eső komponense nem zérus, akkor a fogprofilok csusznak egymáson. A 4.1 ábrából látható, hogy ez az alapvető feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha a fogprofil jellemző görbe a fogas-

kerék érintőit minden pontjában merőlegesen metszi, vagyis ha e görbe a kör érintőinek "ortogonális trajektoriája".

Térgörbék valamiíven halmazát görbeseregnek nevezzük. Ha például I egy intervallum, minden $c \in I$ -re I_c is intervallum és minden rögzített c -re ($c \in I$)

$$\gamma_c = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}_c(t), \quad t \in I_c \}$$

reguláris térgörbe, akkor a $\Gamma = \{ \gamma_c : c \in I \}$ görbehalmazt egyparaméteres görbeseregnek nevezzük. Például az

$$\underline{r}_a(t) = a \cos t \underline{i} + a \sin t \underline{j}, \quad a \in (0, \infty)$$

vektor-skalár függvény által leírt görbe xy síkbeli origó középpontú " a " sugarú kör. E körök halmaza, $a \in (0, \infty)$, egyparaméteres görbesereg.

Legyen a reguláris görbékből álló Γ görbesereg olyan, hogy a tér minden pontján a Γ görbeseregnek legfeljebb egy egyede halad keresztül. Ha a g reguláris térgörbe olyan, hogy minden pontjában merőlegesen metszi Γ valamelyik egyedét, akkor g - t a Γ görbesereg egy ortogonális trajektoriájának nevezzük.

4.1 Definíció.

Legyen γ reguláris térgörbe, melynek görbülete sehol sem zérus; γ érintőinek tetszőleges ortogonális trajektoriáját γ egy evolvensének nevezzük. Az evolvenst származtató γ görbe neve: evolúta.

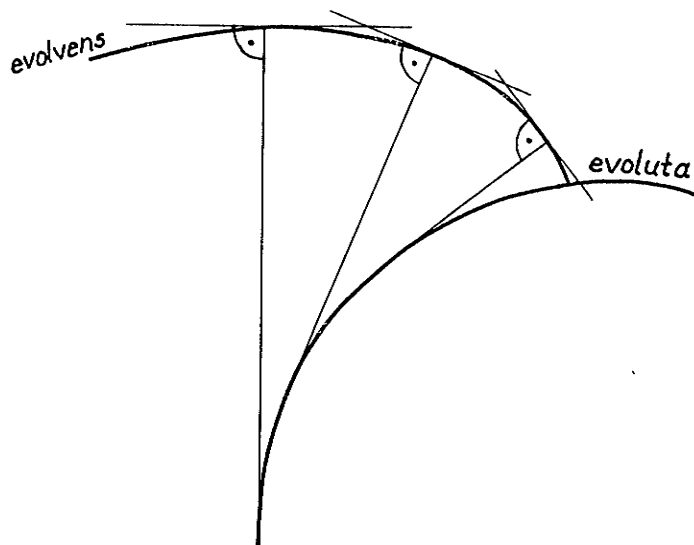
4.1 Tétel.

Legyen γ evolvens g , P_1 és P_2 a γ görbe tetszőleges két különböző pontja, a P_1 , ill. a P_2 pontjait érintőnek g -vel való metszéspontja Q_1 , ill. Q_2 ; ekkor a γ görbe P_1 és P_2 közötti szakaszának ívhossza egyenlő a $P_1 Q_1$ és a $P_2 Q_2$ szakaszok különbségével.

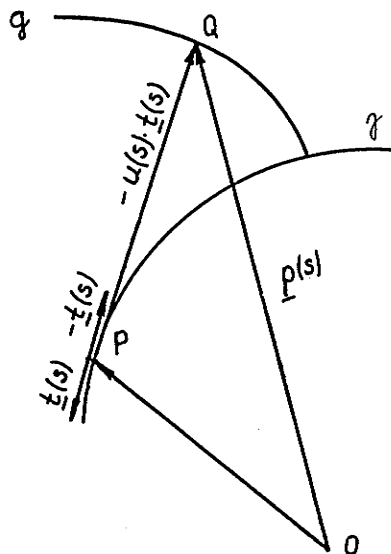
Ezt a tételt szemléletesen a következőképpen fogalmazhatjuk meg: a γ térgörbe evolvens g az a görbe, melyet "a γ görbéhez görbitett fonál egy megadott pontja leír, ha a fonalat állandóan γ érintőinek irányában kifeszítve, onnan lefejtjük".

Bizonyítás. Legyen a γ térgörbe természetes paraméterezésben az $\underline{r}(s)$ vektor-skálár függvénnyel megadva. Ha a γ görbe $\underline{r}(s)$ pontjához tartozó érintőnek a g evolvenssel való metszéspontja $\underline{p}(s)$, akkor

$$\underline{p}(s) = \underline{r}(s) - u(s) \underline{t}(s),$$



4.2 ábra



4.3 ábra

ahol $u(s)$ az $\underline{r}(s)$ és $\underline{p}(s)$ pont közötti távolság: $u(s) = |\underline{p}(s) - \underline{r}(s)|$. A $\underline{p}(s)$ vektor-skálár függvény leírja a g evolvenst (azonban s az evolvensen nem természetes paraméter, "az evolvens az evoluta ívhossza szerint van parametrizálva"). g érintő-vektora a $\underline{p}(s)$ pontban az első Frenet-formula, (3.15) felhasználásával:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{p}}(s) &= \underline{r}'(s) - u'(s) \underline{t}(s) - u(s) \underline{t}'(s) = \\ &= [1 - u'(s)] \underline{t}(s) - u(s) \chi(s) \underline{n}(s). \end{aligned}$$

A 4.1 Definíció szerint $\dot{\underline{p}}$ merőleges az evoluta $\underline{t}$ érintővektorára, tehát $\dot{\underline{p}} \underline{t} = 0$. Az előző azonosságot $\underline{t}$ -vel skalárisan megszorozva kapjuk, hogy $\underline{t} - \underline{u}' \equiv 0$ vagyis $\underline{u}' \equiv \underline{t}$, tehát $\underline{u} = \underline{s} + \underline{c}$, ahol $\underline{c}$ tetszőleges állandó. Ha P_1 , P_2 , Q_1 , ill. Q_2 helyvektora $\underline{r}(s_1)$, $\underline{r}(s_2)$, $\underline{p}(s_1)$, ill. $\underline{p}(s_2)$, akkor az előbbiekből a $P_2 Q_2$ és $P_1 Q_1$ szakasz különbségére

$$\begin{aligned} P_2 Q_2 - P_1 Q_1 &= |\underline{p}(s_2) - \underline{r}(s_2)| - |\underline{p}(s_1) - \underline{r}(s_1)| = \\ &= u(s_2) - u(s_1) = s_2 - s_1 \end{aligned}$$

adódik.!

A 4.1 Tétel bizonyításából látható, hogy az evolvens egyenlete

$$\underline{r} = \underline{r}(s) - (s + c) \underline{t}(s), \quad (4.1)$$

ahol c tetszőleges állandó. Innen az is látszik, hogy egy evolutának végtelesen sok evolvensse van.

(4.1) annak a feladatnak a megoldása, hogy hogyan kapjuk meg az evoluta $\underline{r} = \underline{r}(s)$ egyenletéből az evolvens $\underline{r} = \underline{p}(s)$ egyenletét. Legyen most ennek fordítottja a feladatunk: hogyan kapjuk meg az evolvensből az evolutát. Ezt a problémát csak síkban tárgyaljuk.

4.2 Tétel.

Ha az evoluta síkgörbe, akkor minden evolvens is síkgörbe, és az evoluta az evolvens görbületi középpontjainak mértani helye.

Megjegyezzük, hogy szükség van a tétel ilyen "óvatos" megfogalmazására, ugyanis egyrészt abból, hogy az evolvens síkgörbe, nem következik az, hogy az evoluta is síkgörbe (lásd e pont végén a 4.2 Példát), másrészt nem síkgörbékre általában a tétel állítása nem igaz.

Bizonyítás. A tétel első része nem szorul különösebb bizonyításra, mert a síkgörbének egyetlen simulósíkja van, és ebben az egész görbe, az összes érintő, tehát az evolvens is benne van. A tétel második részének bizonyításához felhasználjuk az evolvens (4.1) előállítását. Legyen tehát az evolutát leíró vektor-skalár függvény természetes paraméterezésben $\underline{r}(s)$, az evolvenset leíró függvény pedig $\underline{p}(s) = \underline{r}(s) - (s+c) \underline{t}(s)$, az evoluta kísérő triéderének vektorai $\underline{t}$, $\underline{n}$, ill. $\underline{b}$, az evoluta görbülete κ .

$$\dot{\underline{p}} = \underline{r}' - \underline{t} - (s+c) \underline{t}' = - (s+c) \chi \underline{n},$$

$$\ddot{\underline{p}} = - \chi \underline{n} - (s+c) \chi' \underline{n} - (s+c) \chi \underline{n}',$$

ahonnan a második Frenet-formula, (3.16) felhasználásával, figyelembe véve, hogy az evoluta síkgörbe lévén, torziója, $\tau \equiv 0$:

$$\ddot{\underline{p}} = - \chi \underline{n} - (s+c) \chi' \underline{n} + (s+c) \chi^2 \underline{t} =$$

$$= - (\chi + s \chi' + c \chi') \underline{n} + (s+c) \chi^2 \underline{t}.$$

$$\dot{\underline{p}} \times \ddot{\underline{p}} = - (s+c)^2 \chi^3 \underline{n} \times \underline{t} = (s+c)^2 \chi^3 \underline{b}.$$

Az evolvens K görbülete

$$K = \frac{|\dot{\underline{p}} \times \ddot{\underline{p}}|}{|\dot{\underline{p}}|^3} = \frac{(s+c)^2 \chi^3}{(s+c)^3 \chi^3} = \frac{1}{s+c}.$$

Ha az evolvens főnormális egységvektorát $\underline{v}$ -vel jelöljük, a 3.5 Definíció szerint az evolvens görbületi középpontja

$$\underline{p}(s) - \frac{1}{K(s)} \underline{v}(s) = \underline{r}(s) - (s+c) \underline{t}(s) +$$

$$+ (s+c) \frac{(\dot{\underline{p}} \times \ddot{\underline{p}}) \times \dot{\underline{p}}}{|\dot{\underline{p}} \times \ddot{\underline{p}}| |\dot{\underline{p}}|} =$$

$$= \underline{r}(s) - (s+c) \underline{t}(s) + (s+c) \frac{-(s+c)^3 \chi^4 \underline{b} \times \underline{n}}{(s+c)^2 \chi^3 (s+c) \chi} =$$

$$= \underline{r}(s) - (s+c) \underline{t}(s) + (s+c) \underline{t} = \underline{r}(s).!$$

4.1 Példa. Az xy síkbeli, origó középpontu "a" sugaru kör egy előállítás

$$\underline{r} = a \cos \varphi \underline{i} + a \sin \varphi \underline{j}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

A φ paraméter és az s ívhossz paraméter közötti összefüggés nyilván $s = a \varphi$, vagyis a kör egyenlete természetes paraméterezésben

$$\underline{r} = a \cos \frac{s}{a} \underline{i} + a \sin \frac{s}{a} \underline{j}.$$

A körevolvens egyenletét állítjuk elő. Mivel $\underline{t}(s) = \underline{r}'(s) = -\sin \frac{s}{a} \underline{i} + \cos \frac{s}{a} \underline{j}$, ezért egy evolvensst leíró vektor-skalár függvény ((4.1)-ben $c=0$ választással)

$$\begin{aligned} \underline{p}(s) = \underline{r}(s) - s \underline{t}(s) &= a \cos \frac{s}{a} \underline{i} + a \sin \frac{s}{a} \underline{j} + s \sin \frac{s}{a} \underline{i} - \\ &- s \cos \frac{s}{a} \underline{j}, \end{aligned}$$

vagyis a φ paraméterre visszatérve a körevolvens egyenlete

$$\underline{r} = a (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \underline{i} + a (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \underline{j}. \quad (4.2)$$

4.2 Példa. Az

$$\underline{r} = a \cos \varphi \underline{i} + a \sin \varphi \underline{j} + m \varphi \underline{k} \quad (4.3)$$

egyenletű csavarvonal természetes paraméterezése (2.13) szerint

$$\underline{r}(s) = a \cos \sqrt{\frac{s}{a^2 + m^2}} \underline{i} + a \sin \sqrt{\frac{s}{a^2 + m^2}} \underline{j} + \sqrt{\frac{ms}{a^2 + m^2}} \underline{k}.$$

Mivel

$$\underline{r}' = \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + m^2}} \left(-a \sin \sqrt{\frac{s}{a^2 + m^2}} \underline{i} + a \cos \sqrt{\frac{s}{a^2 + m^2}} \underline{j} + m \underline{k} \right),$$

a csavarvonal egy evolvensét leíró vektor-skalár függvény ((4.1)-ben $c=0$ választással)

$$\begin{aligned} \underline{p}(s) &= \underline{r}(s) - s \underline{t}(s) = \\ &= a \cos \sqrt{\frac{s}{a^2 + m^2}} \underline{i} + a \sin \sqrt{\frac{s}{a^2 + m^2}} \underline{j} + \sqrt{\frac{ms}{a^2 + m^2}} \underline{k} - \end{aligned}$$

$$\frac{s}{\sqrt{a^2 + m^2}} \left(-a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + m^2}} \underline{i} + a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + m^2}} \underline{j} + m \underline{k} \right).$$

Vagyis a φ paraméterre visszatérve az evolvens egyenlete

$$\underline{r} = a (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \underline{i} + a (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \underline{j},$$

ami ugyanaz, mint (4.2). A (4.2) egyenletű síkgörbének tehát nemcsak az ugyanazon síkbeli, origó középpontú "a" sugarú kör, hanem minden (4.3) egyenletű csavarvonal ($-\infty < m < \infty$) is evolútája. A körevolvens görbületi középpontjainak mértani helye az δ evoluta-köre, az evoluta-csavarvonalak azonban nyilván nem mértani helyei a körevolvens görbületi középpontjainak.

FELÜLETEK

5. Kétparaméteres vektor-skalár függvények

A közös síkban elhelyezkedő felületek leírására általában "kétparaméteres (kétváltozós) vektor-skalár függvényeket" használunk. Az $\underline{r}(u_1, u_2)$ függvény kétparaméteres vektor-skalár függvénynek nevezzük, ha

D értelmezési tartománya a valós számok halmaza önmagával vett direkt szorzatának részhalmaza, $D \subset \mathbb{R}^2$, és a függvény minden $(u_1, u_2) \in D$ -hez egy vektort rendel függvényértékként. Az $\mathbb{R}^2$ halmazt paramétersíknak nevezzük és elemeit, az (u_1, u_2) rendezett számpárokat a közös sík pontjaival szemléltetjük úgy, hogy u_1 és u_2 a sík megfelelő pontjának Descartes-féle derékszögű koordinátái. Ha a közös síkban lerögzítettük az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázist, akkor az $\underline{r}(u_1, u_2)$ függvény értéke az értelmezési tartomány minden $(u_1, u_2) \in D$ helyén az

$$\underline{r}(u_1, u_2) = x(u_1, u_2) \underline{i} + y(u_1, u_2) \underline{j} + z(u_1, u_2) \underline{k} \quad (5.1)$$

alakban adható meg. Az $\underline{r}(u_1, u_2)$ függvény $x(u_1, u_2)$, $y(u_1, u_2)$ és $z(u_1, u_2)$ koordinátái kétváltozós skalár függvények, melyek közös értelmezési tartománya D. Rögzített bázisban tehát a kétparaméteres vektor-skalár függvény megadása ekvivalens három kétváltozós skalár függvény rögzített sorrendben való megadásával.

5.1 Példa. A III. Kötet, 4.3 Tételben megadtuk az $\underline{r}_0$ helyvektoru ponton áthaladó az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamos vektorokkal párhuzamos sík paraméteres vektoregyenletét. A III. Kötet, (4.7) formulában szereplő $\underline{r}_0 + u_1 \underline{a} + u_2 \underline{b}$ kifejezés egy kétparaméteres vektor-skalár függvényt határoz meg. Ha $\underline{r}_0 = x_0 \underline{i} + y_0 \underline{j} + z_0 \underline{k}$, $\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$ és $\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$, akkor e vektor-skalár függvény megadása ekvivalens kétváltozós skalár függvények következő rendezett hármasának megadásával:

$$(x_0 + a_1 u_1 + b_1 u_2, y_0 + a_2 u_1 + b_2 u_2, z_0 + a_3 u_1 + b_3 u_2), \text{ ahol}$$

$$(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

A kétparaméteres vektor-skalár függvények elmélete úgy viszonylik az egy-paraméteres vektor-skalár függvények elméletéhez, mint a kétváltozós (skalár) függvényeké az egyváltozósakéhoz. Az olvasóra bizzuk e függvények határértékének, folytonosságának stb. formális definícióját, mely analógia alapján könnyen elvégezhető, továbbá a határértékkel és folytonossággal kapcsolatos alapvető tételek kimondását és bizonyítását. A derivált helyébe a parciális deriváltak lépnek.

5.1 Definíció.

Az $r(u_1, u_2)$ függvény $(u_1, u_2) \in D$ pontbeli u_1 , ill. u_2 szerinti parciális deriváltjának nevezzük és (a szokásos jelöléseken kívül) $r_1(u_1, u_2)$ - vel, ill. $r_2(u_1, u_2)$ - vel jelöljük a következő határértékeket (ha léteznek):

$$\begin{aligned} r_1(u_1, u_2) &= r'_{u_1}(u_1, u_2) = \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{r(u_1 + h_1, u_2) - r(u_1, u_2)}{h_1}, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} r_2(u_1, u_2) &= r'_{u_2}(u_1, u_2) = \\ &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{r(u_1, u_2 + h_2) - r(u_1, u_2)}{h_2}. \end{aligned}$$

Ha a parciális derivált függvények parciális deriváltjai léteznek, akkor ezeket $r(u_1, u_2)$ másodrendű parciális deriváltjainak nevezzük és használjuk az $r_{ij} = r''_{u_i, u_j}$, $(i = 1, 2; j = 1, 2)$, jelöléseket. Hasonlóan beszélünk a magasabbrendű parciális deriváltakról is.

A többváltozós skalár függvények totális differenciálhatóságához hasonló módon értelmezzük kétparaméteres vektor-skalár függvények totális differenciálhatóságát (v.ö. V. Kötet, 5.2 Definíció).

5.2 Definíció.

Azt mondjuk, hogy az $r(u_1, u_2)$ függvény az (u_1^0, u_2^0) pontban totálisan differenciálható, ha $r(u_1^0 + h_1, u_2^0 + h_2) - r(u_1^0, u_2^0)$ megváltozása, mint (h_1, h_2) függvénye a következő alakban állítható elő:

$$\begin{aligned} r(u_1^0 + h_1, u_2^0 + h_2) - r(u_1^0, u_2^0) = \\ = r_1 h_1 + r_2 h_2 + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2, \quad (5.2) \end{aligned}$$

ahol r_1 és r_2 állandó, (h_1, h_2) -től független vektorok és $\varepsilon_i \rightarrow 0$,
ha $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$, $i = 1, 2$.

Könnyen belátható, hogy ha a függvény totálisan differenciálható, akkor folytonos, léteznek a parciális deriváltjai, és az (5.2) formulában szereplő r_1 , ill. r_2 nem más mint $r(u_1, u_2)$ u_1 , ill. u_2 szerinti parciális deriváltja az (u_1^0, u_2^0) pontban. Könnyen igazolható az is, hogy ha a függvény parciális deriváltjai folytonosak, akkor a függvény totálisan differenciálható.

Az alapvető "deriválási szabályok" értelemszerűen érvényesek és pl. az egyparaméteres vektor-skalár függvényekre vonatkozó megfelelő szabályokból könnyen levezethetők. Így ezeknek a kimondását is elhagyjuk, csupán kettőt írunk fel (bizonyítás nélkül).

Legyen a vektor-skalár függvény (5.1) szerint koordinátáival adott; $r(u_1, u_2)$ parciális deriváltjai akkor és csak akkor léteznek, ha koordináta függvényei parciálisan differenciálhatók és

$$r_i = x'_{u_1} \frac{i}{1} + y'_{u_1} \frac{j}{1} + z'_{u_1} \frac{k}{1}, \quad i = 1, 2. \quad (5.3)$$

Ha $r(u_1, u_2)$ folytonosan differenciálható (a parciális deriváltak léteznek és folytonosak), az $u_1(t)$, $u_2(t)$ függvények is folytonosan differenciálhatók, és képezhető az $r(u_1(t), u_2(t))$ összetett (egyparaméteres vektor-skalár) függvény, akkor ez utóbbi is folytonosan differenciálható és érvényes a láncszabály:

$$\dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{r}_1 \dot{u}_1 + \underline{r}_2 \dot{u}_2, \quad (5.4)$$

ahol a pont a t változó szerinti deriválást jelöli.

5.1 Tétel.

(Taylor formula, "n = 2") Legyen $\underline{r}(u_1, u_2)$ háromszor folytonosan differenciálható az (u_1^0, u_2^0) pont egy $K(u_1^0, u_2^0)$ környezetében; ekkor minden

$$(u_1^0 + h_1, u_2^0 + h_2) \in K(u_1^0, u_2^0) \text{-re}$$

$$\begin{aligned} & \underline{r}(u_1^0 + h_1, u_2^0 + h_2) - [\underline{r}(u_1^0, u_2^0) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \underline{r}_i(u_1^0, u_2^0) h_i + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \underline{r}_{ij}(u_1^0, u_2^0) h_i h_j] = \underline{q}(h_1, h_2), \quad (5.5) \end{aligned}$$

ahol

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|\underline{q}(h_1, h_2)|}{h_1^2 + h_2^2} = 0,$$

$$\text{vagyis } |\underline{q}(h_1, h_2)| = o(h_1^2 + h_2^2).$$

Bizonyítás. A tételt ahhoz hasonlóan vezetjük vissza az 1.3 Tételre, ahogyan a V. Kötet, 9.3 Tételt a II. Kötet, 15.4 Tételre visszavezettük. Legyen az (u_1^0, u_2^0) és az $(u_1^0 + h_1, u_2^0 + h_2)$ pontokat összekötő egyenes egyenlete a következő módon adva:

$$u_1 = u_1^0 + t \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}, \quad u_2 = u_2^0 + t \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

A

$$\underline{p}(t) = \underline{r} \left(u_1^0 + t \sqrt{\frac{h_1^2}{h_1^2 + h_2^2}}, u_2^0 + t \sqrt{\frac{h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}} \right),$$

$t \in \left[0, \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \right]$ összetett (egyparaméteres vektor-skalár) függvény háromszor folytonosan differenciálható, tehát

$$\begin{aligned} \underline{r}(u_1^0 + h_1, u_2^0 + h_2) &= \underline{p} \left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \right) = \underline{p}(0) + \dot{\underline{p}}(0) \sqrt{h_1^2 + h_2^2} + \frac{1}{2} \ddot{\underline{p}}(0) \left(h_1^2 + h_2^2 \right) + \\ &\quad + \underline{q} \left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \right), \end{aligned}$$

ahol $\left| \underline{q} \left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \right) \right| = o(h_1^2 + h_2^2)$. Mivel (5.4) szerint

$$\dot{\underline{p}}(0) = \underline{r}_1(u_1^0, u_2^0) \sqrt{\frac{h_1^2}{h_1^2 + h_2^2}} + \underline{r}_2(u_1^0, u_2^0) \sqrt{\frac{h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}},$$

és

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{p}}(0) &= \underline{r}_{11}(u_1^0, u_2^0) \frac{h_1^2}{h_1^2 + h_2^2} + \\ &\quad + 2\underline{r}_{12}(u_1^0, u_2^0) \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} + \underline{r}_{22}(u_1^0, u_2^0) \frac{h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}, \end{aligned}$$

behelyettesítés, egyszerűsítés és rendezés után (5.5)-öt kapjuk.!

6. Felületek megadása. Érintősík

A közönséges térben elhelyezkedő felületekről természetesen van szemléletes fogalmunk, azonban ahhoz, hogy e felületek elméletét matematikai módszerekkel tárgyalni tudjuk, szabatos definícióra van szükségünk. A definíciónak elég tágnak kell lennie ahhoz, hogy a síkon kívül például az elliptikus paraboloidot (III. Kötet, 19.4 ábra), a gömböt, a hengert, sőt esetleg ezeknél valamivel még bonyolultabb alakzatokat is felületnek tekinthessünk. Ugyanakkor a definíciónak eléggé szűknek is kell lennie ahhoz, hogy túl bonyolult alakzatok fellépése ne nehezítse túlságosan a tárgyalást.

Ilyen definícióhoz csak több lépésben tudunk eljutni. A térben lerögzítünk egy O pontot, az origót, és a tér pontjait helyvektorokkal azonosítjuk.

6.1 Definíció.

A közönséges tér pontjainak F halmazát egyszerű felületdarabnak nevezzük, ha van $\underline{r}(u_1, u_2)$ kétparaméteres vektor-skalár függvény, melynek $D \subset \mathbb{R}^2$ értelmezési tartománya nyílt és összefüggő, $\underline{r}(u_1, u_2)$ folytonos D -ben, az általa létesített leképezés D -nek a közönséges térbe való egy-egyértelmű leképezése, az inverz leképezés is folytonos és

$$F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D \}.$$

6.2 Definíció.

Ha F egyszerű felületdarab, az F -et leíró $\underline{r}(u_1, u_2)$ függvény háromszor folytonosan differenciálható, és

$$\underline{r}_1(u_1, u_2) \times \underline{r}_2(u_1, u_2) \neq 0, (u_1, u_2) \in D, (6.1)$$

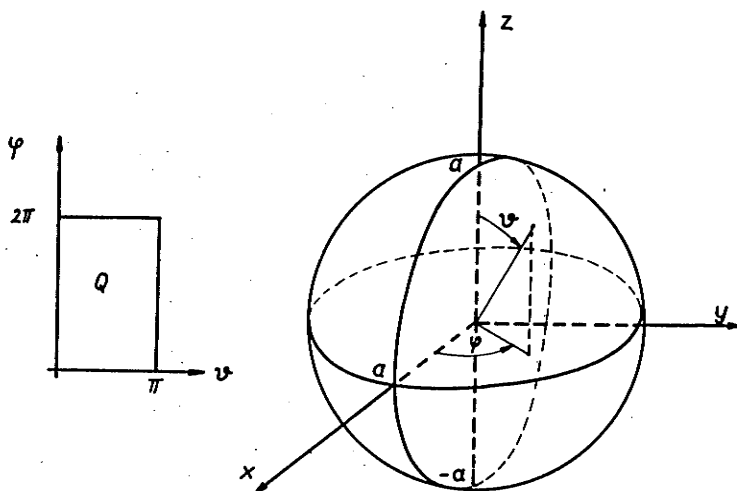
akkor F -et reguláris felületdarabnak nevezzük.

Ha a reguláris F felületdarabot leíró $\underline{r}(u_1, u_2)$ függvényben az egyik változót lerögzítjük, pl. $u_2 = u_2^0$, állandó, akkor az $\underline{r}(u_1, u_2^0)$ egyparaméteres vektor-skalár függvény reguláris térgörbét ír le (lásd 3.1 Definíció; érintővektora, $\underline{r}_1(u_1, u_2^0)$ sehol sem zérus a (6.1) feltétel miatt). Ez a térgörbe az F felületen halad és e görbe mentén csak az u_1 paraméter változik (e görbe F azon pontjainak mértani helye, melyekhez tartozó u_2 érték állandó u_2^0). Ezért ezt a görbét egy u_1 paramétervonalnak (u_1 -vonalnak) nevezzük. Hasonlóan értelmezzük F -en az u_2 paramétervonalakat, melyek érintő vektora $\underline{r}_2$. Világos, hogy F minden pontján pontosan egy u_1 - és egy u_2 -vonal halad át és e két görbe által bezárt szög O -nál nagyobb és π -nél kisebb (érintő vektoraik (6.1) miatt nem párhuzamosak). Az u_1 -, ill. az u_2 -vonalak "egyrétűen behálózzák" F -et és így F -nek egy "koordinátázását" alkotják.

6.1 Példa. Az origó középpontú, $a > 0$ sugaru gömb (azon pontok mértani helye, melyeknek az origótól mért távolsága "a") majdnem teljesen" előállítható reguláris felületdarabként a következőképpen. Vezessük be a térbe az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázist és legyen

$$\underline{r}(\vartheta, \varphi) = a \sin \vartheta \cos \varphi \underline{i} + a \sin \vartheta \sin \varphi \underline{j} + a \cos \vartheta \underline{k},$$

$$0 < \vartheta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$



6.1 ábra

Könnyen látható, hogy (6.2) a paramétersík $Q = \{(\vartheta, \varphi): 0 < \vartheta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ nyílt téglalapjának az "a" sugaru gömbfelületbe való egy-egyértelmű leképezése. A gömbfelületből azonban kimaradt a $(0, 0, a)$ "északi sarkot" a $(0, 0, -a)$ "déli sarkkal" összekötő és az "egyenlítő" $(a, 0, 0)$ pontján áthaladó "délkör" (ami valójában, természetesen egy félkör, lásd 6.1 ábra). A gömb (6.2) előállításában a ϑ -vonalak a "délkörök", a φ -vonalak pedig a "szélességi körök". Tudjuk, hogy az északi és a déli sark kivételével a gömb minden pontján át pontosan egy délkör és egy szélességi kör halad át.

$$\underline{r}_1 = \underline{r}'_{\vartheta} = a \cos \vartheta \cos \varphi \underline{i} + a \cos \vartheta \sin \varphi \underline{j} - a \sin \vartheta \underline{k},$$

$$\underline{r}_2 = \underline{r}'_{\varphi} = -a \sin \vartheta \sin \varphi \underline{i} + a \sin \vartheta \cos \varphi \underline{j}.$$

$$\begin{aligned} \underline{r}_1 \times \underline{r}_2 &= a^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi \underline{i} + a^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \underline{j} + \\ &+ a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \underline{k}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$|\underline{r}_1 \times \underline{r}_2| = a^2 \sin \vartheta \neq 0, \quad 0 < \vartheta < \pi. \quad (6.4)$$

Ha a Q téglalaphoz hozzávesszük annak $\{(\vartheta, \varphi): 0 < \vartheta < \pi, \varphi = 0\}$ oldalát, akkor ugyan $\underline{r}(\vartheta, \varphi)$ értelmezési tartománya már nem lesz nyílt, de a leképezés még mindig egy-egyértelmű, és a (6.1) feltétel is teljesül. Ekkor már csak az északi és a déli sark maradt ki a gömbfelülethez. Ha viszont megengedjük a $\vartheta = 0$, ill. a $\vartheta = \pi$ értéket is, akkor a leképezés már nem egy-egyértelmű, hiszen pl. a Q téglalap $\{(\vartheta, \varphi): \vartheta = 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ oldala összes pontjának a képe egyetlen pont, az északi sark. E pontokban a (6.1) feltétel sem teljesül, hiszen

$$|\underline{r}_1(0, \varphi) \times \underline{r}_2(0, \varphi)| = a^2 \sin 0 = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$|\underline{r}_1(\pi, \varphi) \times \underline{r}_2(\pi, \varphi)| = a^2 \sin \pi = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Visszatérve az egyszerű felületdarab regularitásának (6.1) feltételéhez megmutatjuk, hogy e feltételnek igen szemléletes és fontos geometriai jelentése van. Legyen F egyszerű reguláris felületdarab és γ e felületen haladó reguláris térgörbe, $\gamma \subset F$, ekkor γ -t felületi görbének nevezzük. Ha az F felületet leíró függvény $\underline{r}(u_1, u_2)$, akkor γ megadható az $(u_1(t), u_2(t))$, $t \in I$, rendezett függvénytér segítségével, ahol I valamilyen intervallum abban az értelemben, hogy az $\underline{r}(u_1(t), u_2(t))$ összetett függvény leírja a γ görbét. (Ilyen felületi görbék például a paramétervonalak).

6.1 Tétel.

Legyen $F = \{\underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D\}$ reguláris felületdarab és $\underline{r}(u_1^0, u_2^0)$ a felület egy pontja; minden az $\underline{r}(u_1^0, u_2^0)$ ponton áthaladó reguláris felületi görbe érintővektora merőleges az $\underline{r}_1(u_1^0, u_2^0) \times \underline{r}_2(u_1^0, u_2^0)$ vektorra.

Bizonyítás. Legyen $\gamma = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1(t), u_2(t)), t \in I \}$ az $\underline{r}(u_1^0, u_2^0)$ ponton áthaladó felületi görbe. Van $t_0 \in I$, hogy $u_1^0 = u_1(t_0)$, $u_2^0 = u_2(t_0)$. Képezzük γ érintővektorát az $\underline{r}(u_1^0, u_2^0)$ pontban. Az (5.4) láncszabály szerint

$$\dot{\underline{r}}(u_1(t_0), u_2(t_0)) = \underline{r}_1(u_1^0, u_2^0) \dot{u}_1(t_0) + \underline{r}_2(u_1^0, u_2^0) \dot{u}_2(t_0). \quad (6.5)$$

Tehát $\dot{\underline{r}}$ az $\underline{r}_1$ és $\underline{r}_2$ vektorok lineáris kombinációja, ami állításunkat igazolja.!

Az előbbi tétel szerint tehát reguláris felület egy pontján áthaladó összes felületi görbe e pontbeli érintője egy síkban, éspedig az adott ponton áthaladó $\underline{r}_1 \times \underline{r}_2$ normálvektoru síkban van. $\underline{r}_1 \times \underline{r}_2$ valóban meghatározza e sík állását, mivel (6.1) szerint nem zérusvektor.

6.3 Definíció.

Legyen $F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D \}$ reguláris felületdarab; az

$$\underline{m}(u_1^0, u_2^0) = \underline{r}_1(u_1^0, u_2^0) \times \underline{r}_2(u_1^0, u_2^0)$$

vektort F $\underline{r}(u_1^0, u_2^0)$ pontbeli normálvektorának, az

$$\underline{m}^0 = \frac{\underline{r}_1 \times \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \times \underline{r}_2|} \quad (6.6)$$

vektort normál egységvektornak, az $\underline{r}(u_1^0, u_2^0)$ ponton áthaladó $\underline{m}(u_1^0, u_2^0)$ normálvektoru síkot F e pontbeli érintősíkjának nevezzük. (Normálvektornak nevezünk minden $\underline{m}$ -mel párhuzamos nem zérus vektort is.)

Egy reguláris F felületdarab természetesen általában többféleképpen is előállítható kétparaméteres vektor-skalár függvények segítségével. Lehetőséges, hogy

$$\begin{aligned} F &= \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{p}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D_u \} = \\ &= \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{q}(v_1, v_2), (v_1, v_2) \in D_v \}, \end{aligned}$$

ahol a $p(u_1, u_2)$ és a $q(v_1, v_2)$ függvények kielégítik a 6.2 Definíció feltételeit. Ilyenkor azt mondjuk, hogy F kétféle paraméterezésben van megadva. Minket F -nek azok a tulajdonságai érdekelnek, melyek a paraméterezéstől függetlenek. Az egyik, (u_1, u_2) paraméterezésről a másik, (v_1, v_2) paraméterezésre való áttérést (paramétertranszformációt, átparaméterezést) megengedettnek tekintjük, ha D_v egy-egyértelmű módon leképezhető D_u -ra, a leképezést létesítő

$$u_1 = u_1(v_1, v_2), \quad u_2 = u_2(v_1, v_2) \quad (6.7)$$

transzformációs formulákban szereplő $u_1(v_1, v_2)$, $u_2(v_1, v_2)$ függvények háromszor folytonosan differenciálhatók és e függvényrendszer Jacobi-determinánsa (lásd V. Kötet, (11.6)) nem zérus

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)} \neq 0, \quad (v_1, v_2) \in D_v. \quad (6.8)$$

Ha a reguláris F felületdarabot előállító $p(u_1, u_2)$ függvény kielégíti a 6.2 Definíció feltételeit és végrehajtjuk a (6.7) megengedett paramétertranszformációt, akkor az F -et előállító

$$q(v_1, v_2) \equiv p(u_1(v_1, v_2), u_2(v_1, v_2))$$

függvény is kielégíti a 6.2 Definíció feltételeit. Ugyanis, a $q(v_1, v_2)$ összetett függvény nyilván háromszor folytonosan differenciálható és

$$\begin{aligned} q'_{v_1} &= p'_{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} + p'_{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial v_1}, \\ q'_{v_2} &= p'_{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial v_2} + p'_{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial v_2}, \\ q'_{v_1} \times q'_{v_2} &= p'_{u_1} \times p'_{u_2} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_2} + p'_{u_2} \times p'_{u_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_1} \frac{\partial u_1}{\partial v_2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\underline{p}'_1 \times \underline{p}'_2) \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_2} - \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \frac{\partial u_2}{\partial v_1} \right) = \\
&= (\underline{p}_1 \times \underline{p}_2) \frac{\partial (u_1, u_2)}{\partial (v_1, v_2)} \neq 0
\end{aligned} \quad (6.9)$$

a (6.8) feltétel miatt.

Igen fontos speciális eset az, amikor egy reguláris felület valamilyen kétváltozós valós függvény grafikonjaként írható le. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt és összefüggő tartomány, és az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény háromszor folytonosan differenciálható. f grafikonja, a $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ halmaz a közönséges tér azon felületének tekinthető, melyet az

$$\underline{r}(x, y) = x \underline{i} + y \underline{j} + f(x, y) \underline{k}, \quad (x, y) \in D$$

kétparaméteres vektor-skalár függvény ír le. A G felület és a D tartomány között egy-egyértelmű és mindkét irányban folytonos megfeleltetés létesíthető pl. azáltal, hogy G pontjait merőlegesen vetítjük az x, y síkra. Továbbá

$$\underline{r}_1 = \underline{r}'_x = \underline{i} + f'_x \underline{k},$$

$$\underline{r}_2 = \underline{r}'_y = \underline{j} + f'_y \underline{k},$$

és

$$\underline{r}_1 \times \underline{r}_2 = \underline{r}'_x \times \underline{r}'_y = -f'_x \underline{i} - f'_y \underline{j} + \underline{k} \neq 0, \quad (6.10)$$

vagyis G reguláris felületdarab. E felület $\underline{r}(x_0, y_0) = x_0 \underline{i} + y_0 \underline{j} + f(x_0, y_0) \underline{k}$, $(x_0, y_0) \in D$, pontjához tartozó érintősíkj egyenlete

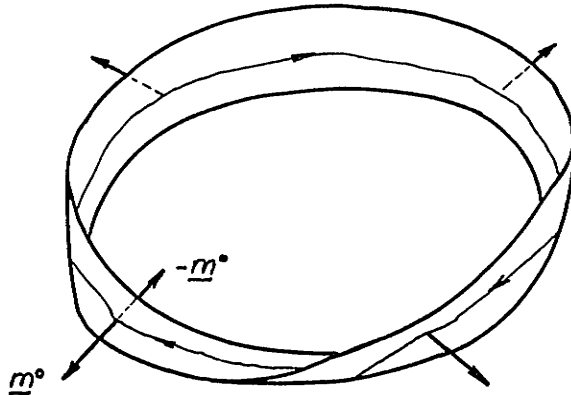
$$-f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z - z_0 = 0,$$

vagyis

$$z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (6.11)$$

összhangban az V. Kötet, (6.5) formulával.

Amint ezt a 6.1 Példában láttuk, a (6.2) paraméterezéséből nem következik, hogy a teljes gömb reguláris felületdarab. Elvileg ez még nem bizonyítja, hogy a gömb nem ilyen, hiszen elképzelhető lenne, hogy lehet "jobb" paraméterezést találni. Bizonyítható azonban (lásd [4]), hogy a gömb nem egyszerű felületdarab. Mivel a gömböt és a hozzá hasonló felépítésű "zárt felületeket" nem kívánjuk kirekeszteni a tárgyalásból, a felület fogalmát ki kell terjesztenünk. Ugyanakkor csak olyan felületekkel kívánunk foglalkozni, melyeknek "két oldaluk van", más szóval "irányíthatók". Egy



6.2 ábra

"sima felületet" akkor nevezünk irányíthatónak, ha minden pontjához egyértelműen hozzárendelhető a normál egységvektora (a normál-vektor állásán kívül két lehetséges iránya közül kijelölhető az egyik minden pontban) úgy, hogy a normál egységvektor, mint a hely függvénye az egész felületen folytonos legyen. A 6.2 ábrán látható az ún. Möbius szalag, mely nem irányítható felület. Ugyanis, ha e felület egy tetszőleges P pontjában tetszőlegesen kijelöljük a normál egységvektor irányát és a normál egységvektort az ábrán látható felületi görbe pontjaiban úgy adjuk meg, hogy az folytonosan változzék, a P pontba visszaérve az eredetivel ellenkező irányú normál egységvektort kapunk. E megfontolások alapján azokat a legáltalánosabb felületeket, melyekkel foglalkozni kívánunk a következőképpen értelmezzük.

6.4 Definíció.

A közös tér F részhalmazát reguláris felületnek nevezzük, ha megadható véges számú reguláris felületdarab,

$$F_i = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}^i(u_1^i, u_2^i), (u_1^i, u_2^i) \in D_i \},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{T}, \quad n \geq 1,$$

ugy, hogy

$$a) F = \bigcup_{i=1}^n F_i,$$

b) az F_i , $i = 1, 2, \dots, n$ felületdarabok közül

akárhányat véve, ezek közös része (ha nem üres) reguláris felületdarab,

c) Ha az F felület egy pontja egyszerre több F_i

felületdarabnak pontja, például $\underline{r}^i(a_1, a_2) =$

$\underline{r}^j(b_1, b_2)$, $(a_1, a_2) \in D_i$, $(b_1, b_2) \in D_j$, akkor

(b_1, b_2) -nek van olyan környezete, melyben az

(u_1^j, u_2^j) -ről az (u_1^i, u_2^i) -re való áttérés megenge-

dett paramétertranszformáció, és

$$\frac{\underline{r}_1^i(a_1, a_2) \times \underline{r}_2^i(a_1, a_2)}{|\underline{r}_1^i(a_1, a_2) \times \underline{r}_2^i(a_1, a_2)|} = \frac{\underline{r}_1^j(b_1, b_2) \times \underline{r}_2^j(b_1, b_2)}{|\underline{r}_1^j(b_1, b_2) \times \underline{r}_2^j(b_1, b_2)|}, \quad (6.12)$$

d) továbbá ha F összefüggő (lásd V. Kötet, 1.2 Definíció).

A 6.4 Definíció (6.12) feltételének teljesülése biztosítja azt, hogy reguláris felület mindig irányított (irányítható) abban az értelemben, ahogyan erről a 6.4 Definíciót megelőző bekezdésben szó esett. A reguláris felületet "lefedő" reguláris felületdarabok normális egységvektorai ugyanis a lefedő felületdarabok közös részén megegyeznek (irányuk (!) megegyezik). Természetesen minden reguláris felület pontosan kétféleképpen irányítható. Az irányítás a paraméterezéstől függ, pontosabban attól, hogy melyik paramétert tekintjük "első változónak" és melyiket "második változónak", még más szóval attól, hogy az $\underline{r}_1 \times \underline{r}_2$ vektor, vagy az $\underline{r}_2 \times \underline{r}_1 = -\underline{r}_1 \times \underline{r}_2$ vektor rögzíti a normális irányát. A Möbius szalag is előállítható két reguláris felületdarab, például két "papírból kivágott, hosszú, slmán meghajlított téglalap" egyesítéseként, azonban a 6.4 Definíció c) feltétele nem teljesül.

A reguláris F felületet egyszerű zárt felületnek nevezzük, ha a teret két részre V_1 -re és V_2 -re bontja úgy, hogy a.) V_1 , F és V_2 egyesítése az egész tér, b.) V_1 és F , F és V_2 , ill. V_1 és V_2 közös része üres, c.) V_1 és V_2 egyesítése nem összefüggő halmaz (lásd V. Kötet, 1.2 Definíció)

d.) V_1 is és V_2 is összefüggő, és e.) közülük az egyik, pl. V_1 korlátos.

6.2 Példa. Megmutatjuk, hogy az origó középpontu, $a > 0$ sugaru S gömb reguláris felület. A 6.1 Példában láttuk, hogy az

$$S_1 = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}^1(\vartheta, \varphi), (\vartheta, \varphi) \in Q_1 \}$$

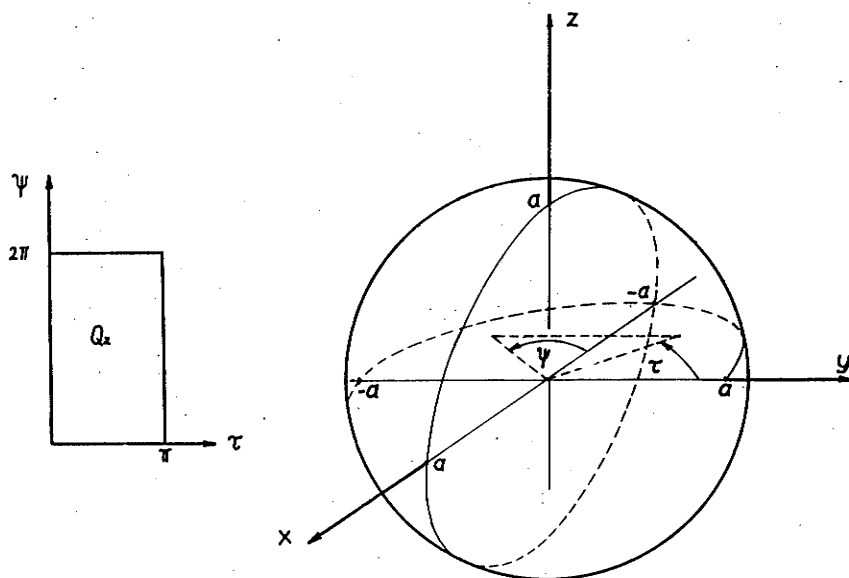
halmaz, ahol

$$Q_1 = \{ (\vartheta, \varphi) : 0 < \vartheta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi \}$$

és

$$\underline{r}^1(\vartheta, \varphi) = a \sin \vartheta \cos \varphi \underline{i} + a \sin \vartheta \sin \varphi \underline{j} + a \cos \vartheta \underline{k},$$

$$(\vartheta, \varphi) \in Q_1$$



6.3 ábra

reguláris felületdarab. (6.3) szerint

$$\frac{\underline{r}^1}{\vartheta} \times \frac{\underline{r}^1}{\varphi} = a \sin \vartheta \underline{r}^1(\vartheta, \varphi) \neq 0, \quad (\vartheta, \varphi) \in Q_1. \quad (6.13)$$

A "majdnem teljes" gömböt még a következőképpen is paraméterezhetjük: a ϑ -hoz hasonló jelentésű τ szöget az y-tengely pozitív irányától és a φ -hez hasonló jelentésű ψ szöget az x-tengely negatív irányától mérjük (lásd a 6.3 ábrát). Ekkor az

$$\underline{r}^2(\tau, \psi) = -a \sin \tau \cos \psi \underline{i} + a \cos \tau \underline{j} + a \sin \tau \sin \psi \underline{k}$$

kétparaméteres vektor-skalár függvény a

$$Q_2 = \{(\tau, \psi) : 0 < \tau < \pi, 0 < \psi < 2\pi\}$$

nyílt téglalapnak a gömbfelületbe való egy-egyértelmű leképezése (a gömbfelületből kimarad az "egyenlítőnek" a (0, a, 0) és (0, -a, 0) pontokat a (-a, 0, 0) ponton át összekötő szakasza).

Mivel

$$\underline{r}_{\tau}^{2'} = -a \cos \tau \cos \psi \underline{i} - a \sin \tau \underline{j} + a \cos \tau \sin \psi \underline{k},$$

$$\underline{r}_{\psi}^{2'} = a \sin \tau \sin \psi \underline{i} + a \sin \tau \cos \psi \underline{k},$$

$$\begin{aligned} \underline{r}_{\tau}^{2'} \times \underline{r}_{\psi}^{2'} &= -a \sin^2 \tau \cos \psi \underline{i} + a^2 \sin \tau \cos \tau \underline{j} + a^2 \sin^2 \tau \sin \psi \underline{k} = \\ &= a \sin \tau \underline{r}^2(\tau, \psi) \neq 0, \quad (\tau, \psi) \in Q_2, \end{aligned} \quad (6.14)$$

ezért az

$$S_2 = \{\underline{r} : \underline{r} = \underline{r}^2(\tau, \psi), (\tau, \psi) \in Q_2\}$$

halmaz reguláris felületdarab. Ezek után az S gömböt, mint az S_1 és S_2 reguláris felületdarabok egyesítését állítjuk elő: $S = S_1 \cup S_2$. Pontról pont-ra meg lehet győződni arról, hogy ez az előállítás kielégíti a 6.4 Definíció feltételeit. Ezt nem részletezzük, csupán azt mutatjuk meg, hogy ha a gömb egy pontja S_1 -nek és S_2 -nek is pontja, akkor e pontban (6.11) fennáll.

Legyen ugyanis $\underline{r}^1(\vartheta_0, \varphi_0) = \underline{r}^2(\tau_0, \psi_0)$; ekkor (6.13) és (6.14) miatt, továbbá figyelembe véve az $|\underline{r}^1(\vartheta, \varphi)| = |\underline{r}^2(\tau, \psi)| \equiv a$ azonosságot, és az a $\sin \vartheta \geq 0$, a $\sin \tau \geq 0$ egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy e pontban

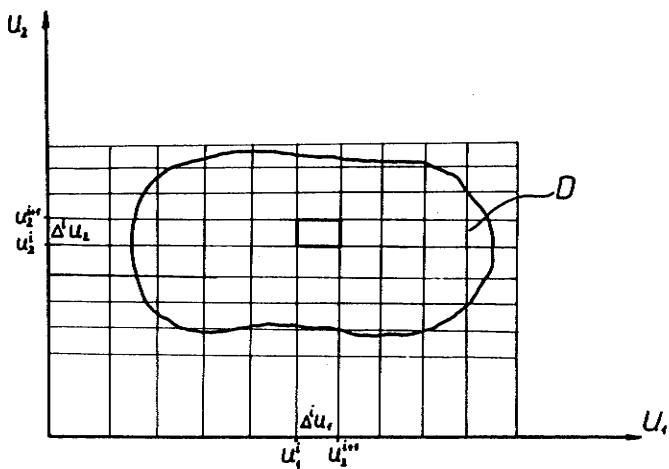
$$\frac{\frac{\underline{r}_o^{1'} \times \underline{r}_\varphi^{1'}}{|\underline{r}_o^{1'} \times \underline{r}_\varphi^{1'}|} = \frac{1}{a} \cdot \underline{r}^1(\varphi_o, \varphi_o) =$$

$$= \frac{1}{a} \underline{r}^2(\tau_o, \psi_o) = \frac{\underline{r}^{2'} \times \underline{r}^{2'}}{|\underline{r}^{2'} \times \underline{r}^{2'}|},$$

vagyis mindkét paraméterezésben a normálvektor a gömbfelület által határolt térrészből "kifelé" mutat. Nyilvánvaló, hogy a gömb egyben egyszerű zárt felület is.

7. Felszín

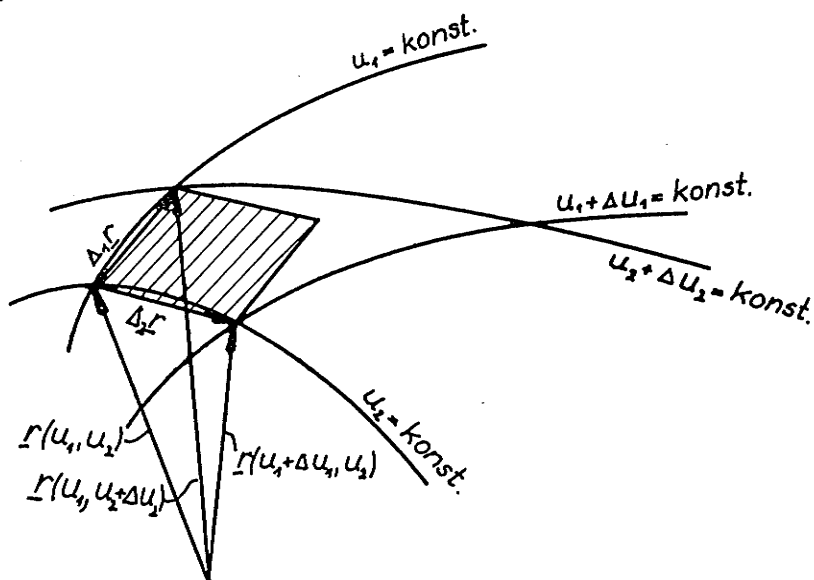
Ebben a pontban korlátos, reguláris felületdarabok mértékét, a fel-szint értelmezzük.



7.1 ábra

Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, mérhető területű tartomány (lásd II. Kötet, 24.2 Definíció) és $F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D \}$ reguláris felületdarab. Készítsük el a D tartomány 7.1 ábra szerinti - elemi téglalapokra való - felosztását. Ennek az F felületdarabon a megfelelő paramétervonalak által történő "elemi felületi négyszögekre" való felosztás felel meg.

Tekintsük a paramétersík (u_1, u_2) ; $(u_1 + \Delta u_1, u_2)$; $(u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2)$; és $(u_1, u_2 + \Delta u_2)$ pontjai, mint csúcspontok által meghatározott téglalaphoznak megfelelő, az $\underline{r}(u_1, u_2)$; $\underline{r}(u_1 + \Delta u_1, u_2)$; $\underline{r}(u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2)$; és $\underline{r}(u_1, u_2 + \Delta u_2)$ felületi pontok által meghatározott elemi felületi négyszög-darabot. Ennek "felszínét" a



7.2 ábra

$$\Delta_1 \underline{r} = \underline{r}(u_1 + \Delta u_1, u_2) - \underline{r}(u_1, u_2)$$

$$\Delta_2 \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2 + \Delta u_2) - \underline{r}(u_1, u_2)$$

vektorok által kifeszített parallelogramma területével pótoljuk. $\Delta_1 \underline{r}$, ill. $\Delta_2 \underline{r}$ a Taylor formula (1.3 Tétel) alapján

$$\Delta_1 \underline{r} = \underline{r}(u_1 + \Delta u_1, u_2) - \underline{r}(u_1, u_2) \approx \underline{r}_1(u_1, u_2) \Delta u_1;$$

$$\Delta_2 \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2 + \Delta u_2) - \underline{r}(u_1, u_2) \approx \underline{r}_2(u_1, u_2) \Delta u_2.$$

Igy a parallelogramma területe

$$|\Delta \underline{r}_1 \times \Delta \underline{r}_2| \approx |\underline{r}_1 \Delta u_1 \times \underline{r}_2 \Delta u_2| = |\underline{r}_1 \times \underline{r}_2| \Delta u_1 \Delta u_2.$$

Az átalakítást a felosztás minden szöbajövő elemi felületdarabjára elvégezve, az elemi parallelogrammák területének összege, mely közelítőleg a felületdarab még definiálandó "felszínét" kell, hogy adja

$$\sum_i |\underline{r}_1(u_1^i, u_2^i) \times \underline{r}_2(u_1^i, u_2^i)| \Delta u_1^i \Delta u_2^i.$$

Ez az összeg azonban nem más, mint egy kettős integrál közelítő összege. Éppen ezzel a kettős integrállal definiáljuk a felszínét.

7.1 Definíció.

Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, mérhető területű tartomány és

$$F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D \}$$

reguláris felületdarab; F felszínének a

$$\text{mes } F = \iint_D |\underline{r}_1 \times \underline{r}_2| du_1 du_2 \quad (7.1)$$

integrál értékét nevezzük.

Vezessük be az $\underline{r}(u_1, u_2)$ kétparaméteres vektor-skalár függvény parciális deriváltjaiból képezhető ún. Gauss-féle elsőrendű főmennyiségeket:

$$g_{11} = \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_1, \quad g_{22} = \underline{r}_2 \cdot \underline{r}_2, \quad g_{12} = g_{21} = \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2. \quad (7.2)$$

(Szokták ezeket rendre E, G, F-fel is jelölni.)

Érvényes az

$$(\underline{r}_1 \times \underline{r}_2)^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \quad (7.3)$$

azonosság. (7.3) belátására képezzük $\underline{r}_1 \times \underline{r}_2$ -nek önmagával való skaláris szorzatát. A skaláris szorzat második tényezőjét egyetlen vektornak tekintve vegyes szorzatot kapunk. A vegyes szorzat megengedett "asszociativitásának" és a kifejtési tételnek (lásd III. Kötet, (2.17) felhasználásával

$$\begin{aligned} (\underline{r}_1 \times \underline{r}_2) \cdot (\underline{r}_1 \times \underline{r}_2) &= \underline{r}_1 \cdot (\underline{r}_2 \times (\underline{r}_1 \times \underline{r}_2)) = \\ &= \underline{r}_1 \cdot ((\underline{r}_2^2) \underline{r}_1 - (\underline{r}_1 \underline{r}_2) \underline{r}_2) = \underline{r}_1^2 \underline{r}_2^2 - (\underline{r}_1 \underline{r}_2)^2 = \\ &= g_{11} g_{22} - g_{12}^2. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy (7.3)-ból és F regularitásából következik a

$$\det [g_{ik} (u_1, u_2)] = g_{11} (u_1, u_2) g_{22} (u_1, u_2) - g_{12}^2 (u_1, u_2) \geq 0, (u_1, u_2) \in D \quad (7.4)$$

egyenlőtlenség. Az

$$|\underline{r}_1 \times \underline{r}_2| = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$$

kifejezést (7.1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\text{mes } F = \iint_D (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)^{\frac{1}{2}} du_1 du_2. \quad (7.5)$$

A (7.1) képlettel definiált felszínfogalom kielégíti a pontthalmazok mértékével szemben támasztott (a II. Kötet, 24. pont végén felsorolt) négy alapvető követelményt a következő értelemben:

- a) $\text{mes } F \geq 0$. Ez nyilvánvaló.
- b) Ha $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ és $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és mérhető területű tartományok, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ (D_1 -nek és D_2 -nek lehet közös határoló görbéje),
 $F_1 = \{ \underline{r}: \underline{r} = \underline{p} (u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D_1 \}$ és
 $F_2 = \{ \underline{r}: \underline{r} = \underline{q} (u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D_2 \}$ reguláris felületdarabok,

$F_1 \cup F_2 = \emptyset$ (legfeljebb a két felületdarab határvonala lehet közös), akkor az

$$F = F_1 \cup F_2 = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D_1 \cup D_2 \}$$

felületnek, ahol

$$\underline{r}(u_1, u_2) = \begin{cases} \underline{p}(u_1, u_2), & \text{ha } (u_1, u_2) \in D_1, \\ \underline{q}(u_1, u_2), & \text{ha } (u_1, u_2) \in D_2, \end{cases}$$

is van felszíne, és

$$\text{mes } F = \text{mes } F_1 + \text{mes } F_2. \quad (7.6)$$

Ez a kettős integrál additivitásából (lásd V. Kötet, 13.7 Tétel) azonnal adódik.

c) Ha az F felületdarabot merev testszerűen elmozdítjuk a térben, felszíne nem változik. Ugyanis először, ha az $F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D \}$ reguláris felületdarabot eltoljuk a térben, akkor az $\bar{F} = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2) + \underline{r}_0, (u_1, u_2) \in D \}$ felületdarabot kapjuk, ahol $\underline{r}_0$ állandó. Mivel $\underline{r}_1$ és $\underline{r}_2$ F -re és $\bar{F}$ -ra ugyanaz, $\text{mes } \bar{F} = \text{mes } F$. Másodszor, ha F -et el is forgatjuk, akkor $\underline{r}_1$ és $\underline{r}_2$ ugyan megváltozik, de az általuk kifeszített parallelogramma területe $|\underline{r}_1 \times \underline{r}_2|$, ami (7.1) integrandusa, változatlan marad.

d) Az $F = \{ \underline{r} : \underline{r} = u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j}, 0 < u_1 < 1, 0 < u_2 < 1 \}$ felületdarab, az egységnyi oldalú négyzet, felszíne $\text{mes } F = 1$. Ez nyilvánvaló.

A b) követelmény teljesülés miatt reguláris felületdarabokból összetett felület felszíne is értelmezve van.

Bár a felszín 7.1 Definíciója a pontthalmazok mértékére vonatkozó követelményeket kielégíti, hibája az, hogy látszólag a paraméterezéstől függ. Érvényes azonban a következő

7.1 Tétel.

Az $F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{p}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D_u \}$ reguláris felületdarab felszíne független a paraméterezéstől, megengedett paramétertranszformációval szemben invariáns.

Bizonyítás. Tekintsük a (6.7) megengedett paramétertranszformációt, és vezessük be a $q(v_1, v_2) = p(u_1(v_1, v_2), u_2(v_1, v_2))$ jelölést. Ekkor $F = \{r: r = q(v_1, v_2), (v_1, v_2) \in D_v\}$, és fennáll a (6.8) összefüggés. Az $u_j(v_1, v_2)$ paraméterezésben felírt F felületdarab felszínét a (6.9) és az V. Kötet, (16.7) formula alapján átalakítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \iint_{D_v} |q'_{v_1} \times q'_{v_2}| dv_1 dv_2 &= \iint_{D_v} |p'_{u_1}(u_1(v_1, v_2), u_2(v_1, v_2)) \times \\ &\times p'_{u_2}(u_1(v_1, v_2), u_2(v_1, v_2))| \left| \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)} \right| dv_1 dv_2 = \\ &= \iint_{D_u} |p'_{u_1} \times p'_{u_2}| du_1 du_2. \end{aligned}$$

Abban az esetben, amikor egy reguláris felületdarab valamely kétváltozós valós függvény grafikonjaként írható fel, (lásd a (6.10) előtt mondottakat) a felszint definiáló (7.1) formula (6.10) felhasználásával a

$$\text{mes } F = \iint_{D_v} \sqrt{f'_x{}^2 + f'_y{}^2 + 1} dx dy. \quad (7.7)$$

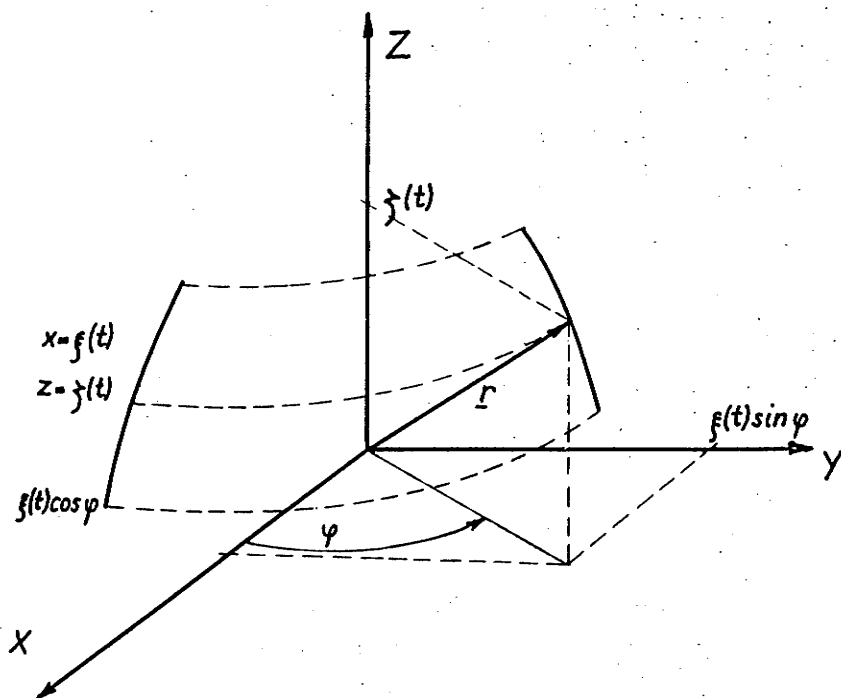
alakot veszi fel.

7.1 Példa. Forgásfelület előállítás és felszíne. Vezessük be a közösleges térben, a szokásos módon az x, y, z Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert és legyen $x = \xi(t)$, $z = \zeta(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ egy xz síkbeli görbe paraméteres előállítása. (Feltételezzük, hogy ξ és ζ háromszor folytonosan differenciálhatók,

$\xi(t) \neq 0$, $\dot{\xi}^2(t) + \dot{\zeta}^2(t) \neq 0$, $t \in (\alpha, \beta)$). Forgassuk meg e görbét a z tengely körül; a görbe pontjai által végigsöpört F pontthalmazt forgásfelületnek nevezzük. Az F forgásfelület egy paraméteres előállítása, amint ez a 7.3 ábráról könnyen leolvasható:

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \xi(t) \cos \varphi \underline{i} + \xi(t) \sin \varphi \underline{j} + \zeta(t) \underline{k}, \\ \alpha &< t < \beta, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (7.8)$$

A $\varphi = \text{állandó}$ t -vonalakat meridiánvonalaknak, a $t = \text{állandó}$ φ -vonalakat parallel-köröknek nevezzük (ez utóbbiak valóban körök, az előbbieket közé tartozik maga a megforgatott görbe is).



7.3 ábra

$$\underline{r}_1 = \underline{r}'_t = \dot{\xi} \cos \varphi \underline{i} + \dot{\xi} \sin \varphi \underline{j} + \dot{\zeta} \underline{k},$$

$$\underline{r}_2 = \underline{r}'_\varphi = -\xi \sin \varphi \underline{i} + \xi \cos \varphi \underline{j},$$

$$\underline{r}_1 \times \underline{r}_2 = -\xi \dot{\zeta} \cos \varphi \underline{i} - \xi \dot{\zeta} \sin \varphi \underline{j} + \xi \dot{\xi} \underline{k},$$

$$g_{11} = \underline{r}_1^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2, \quad g_{22} = \underline{r}_2^2 = \xi^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = 0,$$

$$(g_{11} g_{22} - g_{12}^2)^{\frac{1}{2}} = |\underline{r}_1 \times \underline{r}_2| = |\xi| (\dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.9)$$

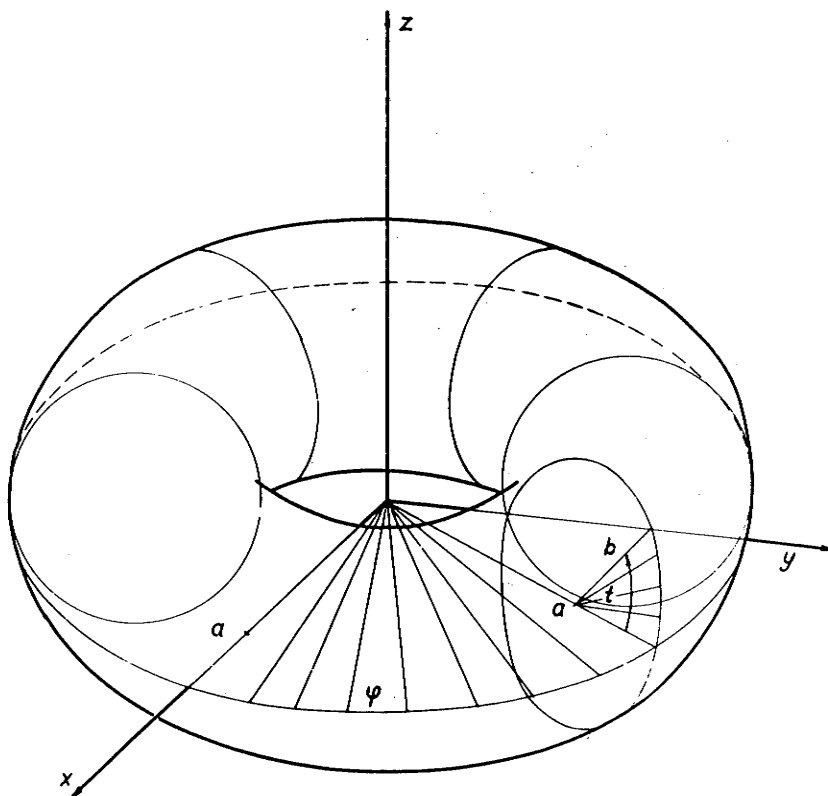
A felszín

$$\begin{aligned} \text{mes } F &= \int_0^\beta \int_0^{2\pi} |\xi(t)| \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2} \frac{1}{2} d\varphi dt = \\ &= 2\pi \int_0^\beta |\xi(t)| \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2} \frac{1}{2} dt, \end{aligned} \quad (7.10)$$

(v. ö. II. Kötet, (31.9)).

72. Példa. Legyen az xz síkbeli $(a, 0, 0)$ középpontú és b sugarú ($a \geq 0$, $0 < b \leq a$) kör a következőképpen megadva

$$x = a + b \cos t, \quad z = b \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$



7.4 ábra

Ha e kört a z tengely körül megforgatjuk un. toruszfelületet kapunk (lásd 7.4 ábra). A 7.1 Példa eredményeit felhasználva az F toruszfelületet egy előállítás

$$\underline{r} = (a+b \cos t) \cos \varphi \underline{i} + (a+b \cos t) \sin \varphi \underline{j} + b \sin t \underline{k},$$

$$0 \leq t < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (7.11)$$

és

$$(g_{11} g_{22} - g_{12}^2)^{\frac{1}{2}} = (a + b \cos t) b.$$

A torusz felszíne

$$\text{mes } F = 2\pi \int_0^{2\pi} b (a + b \cos t) dt = 4\pi^2 ab. \quad (7.12)$$

8. Felületi görbe ívhossza és görbülete

Tekintsük az $F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D \}$ reguláris felület-darabon levő $\gamma = \{ \underline{r} : \underline{r}(u_1(t), u_2(t)), t \in I \}$ felületi görbét, ahol I valamilyen intervallum. Ennek ívhossza (2.1) szerint (a pont a t változó szerinti deriválást jelöli)

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\underline{r}}| d\tau.$$

Az összetett függvény differenciálási szabálya és (7.2) felhasználásával

$$\begin{aligned} |\dot{\underline{r}}(u_1(t), u_2(t))|^2 &= |\underline{r}_1 \dot{u}_1 + \underline{r}_2 \dot{u}_2|^2 = \underline{r}_1^2 \dot{u}_1^2 + \\ &+ 2\underline{r}_1 \underline{r}_2 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \underline{r}_2^2 \dot{u}_2^2 = g_{11} \dot{u}_1^2 + 2g_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + g_{22} \dot{u}_2^2. \end{aligned}$$

Ezt a kifejezést az ívhosszt előállító integrálba helyettesítve kapjuk, hogy

$$s(t) = \int_{t_0}^t (g_{11} \dot{u}_1^2 + 2g_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + g_{22} \dot{u}_2^2)^{\frac{1}{2}} d\tau. \quad (8.1)$$

Az ívhossz differenciálja

$$ds(t, dt) = \left[g_{11} \left(\frac{du_1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{du_1}{dt} \cdot \frac{du_2}{dt} + g_{22} \left(\frac{du_2}{dt} \right)^2 \right] \frac{1}{2} dt$$

ennek négyzete az $u_1(t)$ és $u_2(t)$ függvények differenciáljaira átvérve

$$ds^2 = g_{11} du_1^2 + 2g_{12} du_1 du_2 + g_{22} du_2^2. \quad (8.2)$$

A (8.2) formula jobb oldalát, mely du_1 , du_2 kvadratikus formája (az együtt-hatók u_1, u_2 függvényei), a felület ivelem-négyzetének (Gauss-féle első alap-formájának) nevezzük.

Az ivedem-négyzet pozitív definit kvadratikus forma (lásd III. Kötet, 19.3 Definíció). Ugyanis a $[g_{ik}]$ együttható mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{vmatrix} g_{11} - \lambda & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(g_{11} + g_{22}) + \det[g_{ik}].$$

A Vietá-formulából (III. Kötet, 7.8 Tétel) következik, hogy a sajátértékek összege $g_{11} + g_{22}$, szorzata pedig $\det[g_{ik}]$. (7.2)-ből és (7.4)-ből az

adódik, hogy a sajátértékek összege és szorzata is pozitív, vagyis a sajátértékek pozitívak. Így (8.2) pozitív definitása a III. Kötet, 19.3 Tételből következik.

Az ivedem-négyzet megadja közelítőleg az $\underline{r}(u_1, u_2)$ és $\underline{r}(u_1 + du_1, u_2 + du_2)$ "közeli" felületi pontok felületen mért távolságának négyzetét.

8.1 Példa. A 6.1 Példa eredményeinek felhasználásával az "a" sugaru gömbre

$$g_{11} = \underline{r}_1^2 = a^2; \quad g_{12} = g_{21} = \underline{r}_1 \underline{r}_2 = 0;$$

$$g_{22} = \underline{r}_2^2 = a^2 \sin^2 \vartheta,$$

tehát az "a" sugaru gömb ivedem-négyzete

$$ds^2 = a^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (8.3)$$

A felületi görbék görbületének vizsgálatához bevezetjük a

$$b_{11} = \underline{r}_{11} \underline{m}^0; \quad b_{12} = b_{21} = \underline{r}_{12} \underline{m}^0; \quad \text{és} \quad b_{22} = \underline{r}_{22} \underline{m}^0 \quad (8.4)$$

Gauss-féle másodrendű főmennyiségeket (szokták ezeket rendre, L, M, N-nel is jelölni) ahol

$$\underline{r}_{11} = \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u_1^2}, \quad \underline{r}_{12} = \underline{r}_{21} = \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u_1 \partial u_2}, \quad \underline{r}_{22} = \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u_2^2},$$

és $\underline{m}^0$ a felületi normális egységvektor (6.6). A (8.4) formulák újabb alakját kapjuk, ha az

$$\underline{r}_1 \underline{m}^0 \equiv 0, \quad \underline{r}_2 \underline{m}^0 \equiv 0 \quad (8.5)$$

azonosságokat u_1 , ill. u_2 szerint parciálisan deriváljuk. Az $\underline{m}_1^0 = \frac{\partial \underline{m}^0}{\partial u_1}$

és $\underline{m}_2^0 = \frac{\partial \underline{m}^0}{\partial u_2}$ jelöléssel

$$\underline{r}_{11} \underline{m}^0 + \underline{r}_1 \underline{m}_1^0 = 0, \quad \underline{r}_{12} \underline{m}^0 + \underline{r}_1 \underline{m}_2^0 = 0,$$

$$\underline{r}_{21} \underline{m}^0 + \underline{r}_2 \underline{m}_1^0 = 0, \quad \underline{r}_{22} \underline{m}^0 + \underline{r}_2 \underline{m}_2^0 = 0, \quad (8.6)$$

ahonnan a Gauss-féle másodrendű főmennyiségek következő alakját kapjuk:

$$b_{11} = -\underline{r}_1 \underline{m}_1^0; \quad b_{12} = b_{21} = -\underline{r}_1 \underline{m}_2^0 = -\underline{r}_2 \underline{m}_1^0;$$

$$b_{22} = -\underline{r}_2 \underline{m}_2^0. \quad (8.7)$$

A továbbiak során tételezzük fel, hogy (legalábbis egyes izolált pontok kivételével)

$$b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{22}^2 \geq 0.$$

Ezzel az általánosságot nem szűkítettük lényegesen, érvényes ugyanis a következő

8.1 Tétel.

Ha az $F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D \}$ reguláris felület Gauss-féle másodrendű főnennyiségei azonosan eltűnnek, akkor a felület sík.

Bizonyítás. Az $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$ és $\underline{m}^0$ vektorok lineárisan függetlenek. Az 1.2 Tétel miatt érvényes az $\underline{m}_1^0 \underline{m}^0 \equiv 0$ azonosság. Mivel $b_{ik} = 0$; $i, k = 1, 2$, (8.7)-ből $\underline{m}_1^0 \underline{r}_1 = \underline{m}_1^0 \underline{r}_2 = 0$ adódik. Ezek szerint $\underline{m}_1^0$ három lineárisan független vektorra merőleges, tehát zérusvektor. Ugyanez érvényes az $\underline{m}_2^0$ vektorra is, amiből az következik, hogy $\underline{m}_0(u_1, u_2) \equiv \underline{e}$ állandó egységvektor. Vezessük most be segédfüggvényként az

$$f(u_1, u_2) = \underline{e} \cdot \underline{r}(u_1, u_2)$$

függvényt. Mivel $\underline{e}$ a felület normálvektora, f parciális deriváltjai azonosan nullák:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \underline{e} \cdot \underline{r}_1 \equiv 0; \quad \frac{\partial f}{\partial u_2} = \underline{e} \cdot \underline{r}_2 \equiv 0.$$

következésképpen

$$f(u_1, u_2) = \underline{e} \cdot \underline{r}(u_1, u_2) \equiv \underline{e} \cdot \underline{r}_0 \text{ állandó.}$$

Az utóbbi azonosságot rendezve az

$$\underline{e} \cdot (\underline{r}(u_1, u_2) - \underline{r}_0) \equiv 0$$

azonosságot kapjuk. Ez azt jelenti, hogy az $\underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2)$ felület minden pontja kielégíti az $\underline{e} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$ sík egyenletét. !

8.2 Tétel.

Tegyük fel, hogy az $F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D \}$ reguláris felületdarabon levő

$\gamma = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1(t), u_2(t)), t \in I \}$ reguláris

felületi görbe simulósíkja nem esik egybe a felület érintősíkjával, vagyis γ főnormális egységvektora, $\underline{n}$ nem merőleges az $\underline{m}^0$ felületi normális

vektorra; ekkor γ görbülete

$$\chi = \frac{1}{\underline{n} \cdot \underline{m}^0} \frac{b_{11} \dot{u}_1^2 + 2b_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + b_{22} \dot{u}_2^2}{g_{11} \dot{u}_1^2 + 2g_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + g_{22} \dot{u}_2^2}. \quad (8.8)$$

Bizonyítás. A (3.15) Frenet-féle formula szerint $\underline{r}' = \underline{r}'' = \chi \underline{n}$. Ezt $\underline{m}^0$ -al skalárisan szorozva, rendezés után a

$$\chi = \frac{\underline{m}^0 \cdot \underline{r}''}{\underline{n} \cdot \underline{m}^0}$$

összefüggést kapjuk. A láncszabály szerint

$$\underline{r}' = \underline{\dot{r}} \frac{dt}{ds} = (\underline{r}_1 \dot{u}_1 + \underline{r}_2 \dot{u}_2) \frac{dt}{ds},$$

és

$$\begin{aligned} \underline{r}'' = \ddot{\underline{r}} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \underline{\dot{r}} \frac{d^2 t}{ds^2} = & \left[(\underline{r}_{11} \dot{u}_1 + \underline{r}_{12} \dot{u}_2) \ddot{u}_1 + \right. \\ & \left. + \underline{r}_{11} \ddot{u}_1 + (\underline{r}_{21} \dot{u}_1 + \underline{r}_{22} \dot{u}_2) \ddot{u}_2 + \underline{r}_{22} \ddot{u}_2 \right] \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \underline{\dot{r}} \frac{d^2 t}{ds^2}. \end{aligned}$$

Felhasználva $\underline{m}^0$ merőlegességét $\underline{r}_1$ -re, $\underline{r}_2$ -re és $\underline{\dot{r}}$ -ra, továbbá a (8.2) formulát

$$\begin{aligned} \underline{m}^0 \cdot \underline{r}'' &= \left[\underline{r}_{11} \underline{m}^0 \dot{u}_1^2 + 2\underline{r}_{12} \underline{m}^0 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \underline{r}_{22} \underline{m}^0 \dot{u}_2^2 \right] \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = \\ &= \left(b_{11} \dot{u}_1^2 + 2b_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + b_{22} \dot{u}_2^2 \right) \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^2} = \frac{b_{11} \dot{u}_1^2 + 2b_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + b_{22} \dot{u}_2^2}{g_{11} \dot{u}_1^2 + 2g_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + g_{22} \dot{u}_2^2}. \end{aligned}$$

Ebben a fejezetben, a következőkben felületen mindig reguláris felületdarabot, felületi görbén mindig reguláris görbét kell érteni. A (8.8) formulából kiolvasható, hogy a görbület függ a görbe simulósíkjának a felület érintősíkjával bezárt szögétől. Ha a második tényezőben $\dot{u}_1$ helyében $\propto \dot{u}_1$ -ot, $\dot{u}_2$ helyébe $\propto \dot{u}_2$ -ot írunk, a kifejezés értéke nem változik. Ez azt jelenti,

hogy a közös irányu érintővel (lásd (6.5)-öt) és főnormálissal rendelkező felületi görbék görbülete azonos. Érvényes tehát a

8.3 Következmény.

Adott felület felületi görbéjének görbülete csak érintőjének és főnormálisának irányától függ.

A felület adott pontján áthaladó felületi görbe simulósíkja kímetsz a felületről egy síkgörbét. A két görbe érintőjének és főnormálisának párhuzamossága miatt az adott pontban görbületük egyenlő; kimondható tehát a

8.4 Következmény.

Egy felületi görbe P pontbeli görbülete megegyezik a P ponthoz tartozó simulósíkja által kímetszett felületi síkgörbe P-beli görbületével.

Adott felületen tehát elegendő a síkmetszetek görbületét vizsgálni.

A felület egy rögzített $\underline{r}(u_1^0, u_2^0)$ pontjához tartozó érintősíkban az

$\underline{r}_1(u_1^0, u_2^0), \underline{r}_2(u_1^0, u_2^0)$ vektorok (általában nem ortogonális) bázist alkotnak.

Az $(\dot{u}_1, \dot{u}_2) \neq (0, 0)$ rendezett számpár megadása egy irányt rögzít az érintősíkban, melyet az $\dot{u}_1 \underline{r}_1 + \dot{u}_2 \underline{r}_2$ vektor definiál. Ilyen értelemben beszélünk az érintősíkban az $(\dot{u}_1, \dot{u}_2)$ irányról. Rögzítsük az érintősíkban az $(\dot{u}_1, \dot{u}_2)$ irányt, tekintsük az $\underline{r}(u_1^0, u_2^0)$ ponton át ebben az irányban haladó egyenest és az ezen egyenesre illeszkedő, az érintősíkra merőleges síkot. Ennek a síknak és a felületnek a metszésvonalát az $\underline{r}(u_1^0, u_2^0)$ pontbeli $(\dot{u}_1, \dot{u}_2)$ irányhoz tartozó normálmetszetnek nevezzük, és görbületét $|\chi_n|$ -kel, főnormálisát $\underline{n}_n$ -el jelöljük. Mivel $\underline{m}^0 \cdot \underline{n}_n = \pm 1$, ezért

$$|\chi_n| = \frac{b_{11}\dot{u}_1^2 + 2b_{12}\dot{u}_1\dot{u}_2 + b_{22}\dot{u}_2^2}{g_{11}\dot{u}_1^2 + 2g_{12}\dot{u}_1\dot{u}_2 + g_{22}\dot{u}_2^2}. \quad (8.9)$$

8.5 Tétel.

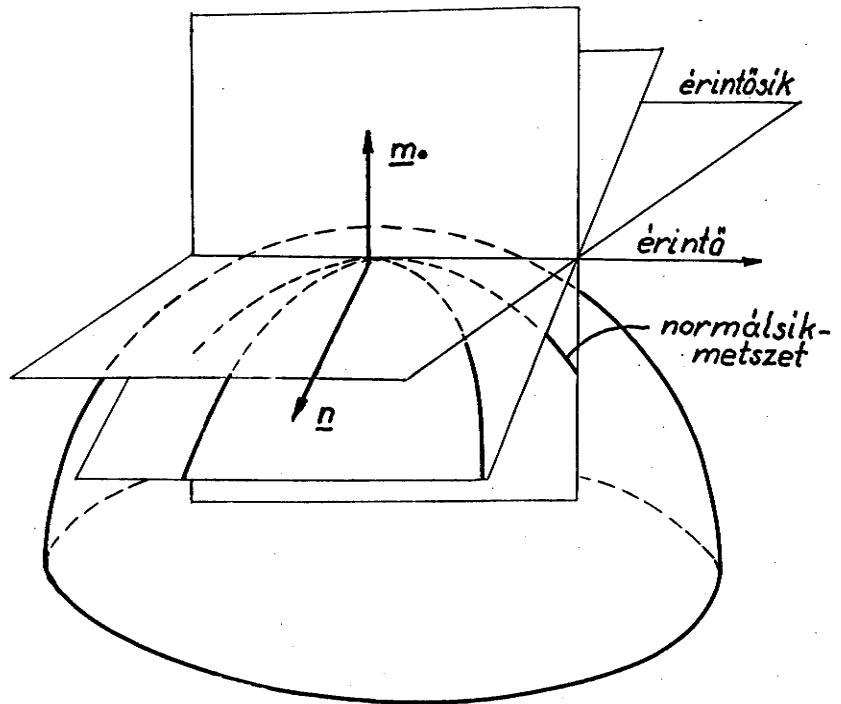
(Meusnier tétele). Tekintsük a felület $\underline{r}(u_1^0, u_2^0)$ pontján áthaladó, az $(\dot{u}_1, \dot{u}_2)$ irányu egyenesre illeszkedő tetszőleges (az érintősíktól különböző) σ síkot, legyen a σ sík által kímetszett felületi görbe görbülete χ , az $(\dot{u}_1, \dot{u}_2)$ irányhoz tartozó normálmetszet görbülete $|\chi_n|$ és a σ sík-

nak a normálmetszet síkjával bezárt szöge
 α ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$), lásd (8.1 ábra); ekkor

$$\chi = \frac{|\chi_n|}{\cos \alpha}. \quad (8.10)$$

Bizonyítás. Jelöljük a $\mathcal{S}$ sík által kimetszett felületi görbe főnormális egységvektorát $\underline{n}$ -nel. (8.8) szerint

$$\chi = \frac{1}{\underline{n} \cdot \underline{m}^0} \frac{\sum_{i,k=1}^2 b_{ik} \dot{u}_i \dot{u}_k}{\sum_{i,k=1}^2 g_{ik} \dot{u}_i \dot{u}_k}.$$



8.1 ábra

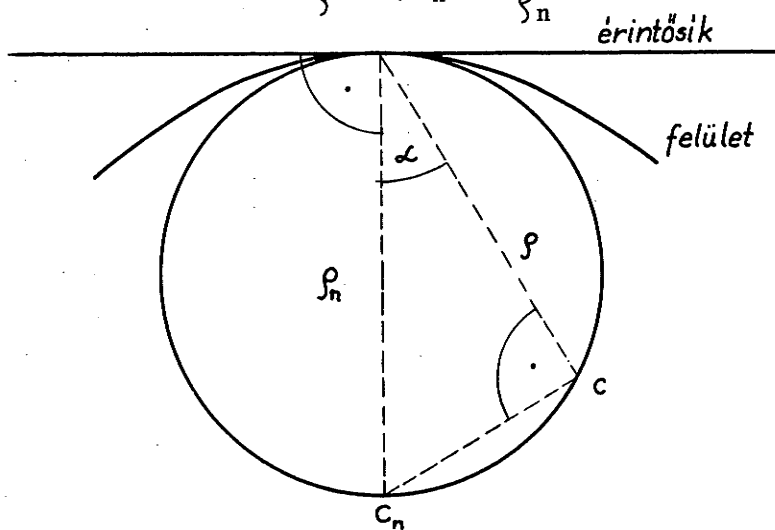
(8.9) felhasználásával

$$\chi = \frac{1}{|\underline{n} \cdot \underline{m}^0|} |\chi_n|.$$

Azonban az $\underline{n}$ és az $\underline{m}^0$ egységvektorok szöge vagy α -val, vagy pedig $(\pi - \alpha)$ -val egyenlő. Mivel $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, ezért $|\underline{n} \cdot \underline{m}^0| = \cos \alpha$!

Meusnier tételének szemléletes jelentést adhatunk, ha a görbület helyett a simulókör sugarát behelyettesítjük. A

$$\chi = \frac{1}{\rho} ; |\chi_n| = \frac{1}{\rho_n}$$



8.2 ábra

jelölésekkel (8.10) a

$$\rho = \rho_n \cos \alpha \quad (8.11)$$

alakot veszi fel. (8.11) azt jelenti, hogy ha az érintősíkra és a normálmetszet síkjára merőleges síkban a felület szöbanforgó pontján és a normálmetszet C_n görbületi középpontján át ρ_n átmérőjű kört rajzolunk, akkor a "ferde metszetek" C görbületi középpontjai e "Thalesz-körön" helyezkednek el.

Adott felületen tehát elegendő a normálmetszetek görbületét ismerni, az összes felületi görbe görbüllete ezekből kiszámítható.

A következőkben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan függ a felület egy rögzített pontjában a normálmetszet görbülete az (érintő síkbeli) iránytól. Ebből a célból célszerű a normálmetszetek görbületét "előjeles mennyiségnek" tekinteni.

8.1 Definíció.

Tekintsük a felület rögzített pontjában a $(t_1, t_2) \neq (0, 0)$ rendezett számpár (vagyis a $t_1 \underline{r}_1 + t_2 \underline{r}_2$ vektor) által meghatározott érintő-síkbeli irányt; a

$$\kappa_n = \frac{\sum_{i,k=1}^2 b_{ik} t_i t_k}{\sum_{i,k=1}^2 g_{ik} t_i t_k} \quad (8.12)$$

számot a felület (t_1, t_2) irányu normálgörbületének nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy a normálgörbület abszolút értéke az adott irányhoz tartozó normálmetszet (8.9) görbületével egyenlő. Ha $\kappa_n \neq 0$ és $\underline{n}$ -nel jeleljük a normálmetszet főnormális egységvektorát, a normálmetszet görbülete (mely mindig nem negatív szám)

$$|\kappa_n| = \frac{1}{\underline{n} \cdot \underline{m}_0} \kappa_n > 0,$$

ahol $\underline{n} \cdot \underline{m}_0 = +1$ aszerint, amint $\underline{n}$ és $\underline{m}_0$ egyirányú, vagy ellentétes vektorok. Ezek szerint ha κ_n nem zérus, akkor az $\underline{n} \cdot \underline{m}_0 = 1$ esetben $\kappa_n > 0$, az

$\underline{n} \cdot \underline{m}_0 = -1$ esetben pedig $\kappa_n < 0$. A normálmetszet $|\kappa_n|$ görbülete természetesen független a felület paraméterezésétől. κ_n előjele, s κ_n azonban függ a paraméterezéstől. Ugyanis $\underline{n}$ mindig az adott irányu normálmetszet "konkáv oldalára" mutat, a felületi normál egységvektor, $\underline{m}_0$ iránya azonban átparaméterezéskor ellentétesre változhat. Ilyen esetben minden irányu normálgörbület egyszerre vált előjelet. A normálgörbület tehát függ a paraméterezéstől, azonban az, hogy két különböző irányu normálgörbület egyenlő, vagy ellenkező előjelű-e, a paraméterezéstől független.

Az érintő sík $t_1 \underline{r}_1 + t_2 \underline{r}_2$ vektorai közül elegendő az egységvektorokat figyelembe venni az összes lehetséges irány megadásánál (κ_n nem függ

a $t_1 \underline{r}_1 + t_2 \underline{r}_2$ vektor hosszától, csak irányától). Ha $t_1 \underline{r}_1 + t_2 \underline{r}_2$ egységvektor, akkor (7.2) alapján

$$1 = (t_1 \underline{r}_1 + t_2 \underline{r}_2)^2 = \sum_{i,k=1}^2 g_{ik} t_i t_k, \quad (8.13)$$

vagyis a normálgörbület

$$\chi_n = \sum_{i,k=1}^2 b_{ik} t_i t_k \quad (8.14)$$

Most megmutatjuk, hogy ha a felület egy rögzített pontjában megfelelően választott két irányban ismerjük a normálgörbületet, akkor az összes normálgörbületet ismerjük. Érvényes ugyanis a

8.6 Tétel.

(Euler tétele). A felület rögzített pontjában van két egymásra merőleges (érintő síkbeli) ún. fő-irány, melyekben a normálgörbületet χ_1 -gyel, ill χ_2 -vel jelölve, tetszőleges irányu χ_n normálgörbületre

$$\chi_n = \chi_1 \cos^2 \varphi + \chi_2 \sin^2 \varphi, \quad (8.15)$$

ahol φ a χ_n -hez tartozó irány és az első főirány által bezárt szög.

Bizonyítás. A normálgörbületet bármely irányban a (8.14) másodfoku alak szolgáltatja, feltéve, hogy a t_1, t_2 változók kielégítik a (8.13) feltételt. t_1 és t_2 az érintő síkbeli vektorok koordinátái az $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ bázisban, mely azonban általában nem ortonormált bázis. Abból a célból, hogy a χ_n -et szolgáltató másodfoku alakra a III. Kötet, 19. pont eredményeit alkalmazhassuk, kiválasztunk az érintősíkban egy tetszőleges ortonormált bázist, melynek vektorai legyenek

$$\tilde{\underline{e}}_1 = t_{11} \underline{r}_1 + t_{21} \underline{r}_2, \quad \tilde{\underline{e}}_2 = t_{12} \underline{r}_1 + t_{22} \underline{r}_2.$$

(Annak feltétele, hogy $\tilde{\underline{e}}_1, \tilde{\underline{e}}_2$ ortonormált bázis legyen, most a következő:

$$\tilde{\underline{e}}_k^2 = \left(\sum_{i=1}^2 t_{ik} \underline{r}_i \right)^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} t_{ik} t_{jk} = 1, k=1, 2,$$

és

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{e}}_1 \tilde{\underline{e}}_2 &= (t_{11} \underline{r}_1 + t_{21} \underline{r}_2) (t_{12} \underline{r}_1 + t_{22} \underline{r}_2) = \\ &= \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} t_{i1} t_{j2} = 0. \end{aligned}$$

Ha a $t_1 \underline{r}_1 + t_2 \underline{r}_2$ vektor koordinátái az új $\tilde{\underline{e}}_1, \tilde{\underline{e}}_2$ bázisban $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$, vagyis $t_1 \underline{r}_1 + t_2 \underline{r}_2 = \tilde{t}_1 \tilde{\underline{e}}_1 + \tilde{t}_2 \tilde{\underline{e}}_2$, akkor a III. Kötet (17.15) formula szerint, a $\underline{T} = [t_{ik}]$ jelöléssel

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \underline{T} \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{bmatrix}, \quad (8.16)$$

Vezessük be a $\underline{B} = [b_{ik}]$ jelölést; ezzel (8.14) a következő alakban írható

$$\chi_n = [t_1, t_2] \underline{B} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}.$$

(8.16)-ot és a (8.16) mindkét oldalának transzponálásával kapott

$$[t_1, t_2] = [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2] \underline{T}'$$

formulát ez utóbbi kifejezésbe helyettesítve, az új bázisban

$$\chi_n = [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2] \underline{T}' \underline{B} \underline{T} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

vagy a $\tilde{\underline{B}} = \underline{T}' \underline{B} \underline{T} = [\tilde{b}_{ik}]$ jelöléssel

$$\chi_n = \sum_{i,k=1}^2 \tilde{b}_{ik} \tilde{t}_i \tilde{t}_k. \quad (8.17)$$

(Természetesen $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$ -nek ki kell elégítenie azt a feltételt, melyet a (8.16) transzformációs formulának a (8.13) feltételbe való behelyettesítésével nyertünk. Miután most már ortonormált bázisban vagyunk, ez a feltétel nem más, mint $\tilde{t}_1^2 + \tilde{t}_2^2 = 1$.) Könnyen belátható, hogy mivel a $\underline{B}$ mátrix szimmetrikus, a $\tilde{\underline{B}}$ mátrix is az, vagyis $\tilde{b}_{12} = \tilde{b}_{21}$. A (8.17) másodfokú alakra már alkalmazható a főtengety tétel (III. Kötet, 19.12 Tétel). Jelöljük a $\tilde{\underline{B}}$ szimmetrikus mátrix sajátértékeit χ_1 -gyel és χ_2 -vel (legyen pl. $\chi_1 \leq \chi_2$) és a χ_1 -hez, ill. a χ_2 -höz tartozó egymásra merőleges egység-sajátvektorokat $\underline{s}_1$ -gyel, ill. $\underline{s}_2$ -vel. Az $\tilde{\underline{e}}_1, \tilde{\underline{e}}_2$ ortonormált bázisról az $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ ortonormált bázisra áttérve, az $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ bázisban a vektorok koordinátáit (τ_1, τ_2) -vel jelölve (8.17) a következő alakot veszi fel:

$$\chi_n = \chi_1 \tau_1^2 + \chi_2 \tau_2^2.$$

Mivel a (8.13) feltétel értelmében

$$t_1 \underline{r}_1 + t_2 \underline{r}_2 = \tilde{t}_1 \tilde{\underline{e}}_1 + \tilde{t}_2 \tilde{\underline{e}}_2 = \tau_1 \underline{s}_1 + \tau_2 \underline{s}_2$$

egységvektor, ezért τ_1 és τ_2 a vektor iránykoszinuszai, vagyis a vektornak az $\underline{s}_1$ vektorral alkotott szögét φ -vel jelölve

$$\tau_1 = \cos \varphi, \tau_2 = \sin \varphi. \text{ Tehát}$$

$$\chi_n = \chi_1 \cos^2 \varphi + \chi_2 \sin^2 \varphi.$$

Mivel a $\varphi = 0$, ill. a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ helyettesítést elvégezve $\chi_n = \chi_1$, ill. $\chi_n = \chi_2$ adódik, ezért χ_1 , ill. χ_2 valóban az $\underline{s}_1$, ill. $\underline{s}_2$ irányu normál-görbület.

Az $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ által meghatározott főirányokban a normálgörbületeket, χ_1 -et és χ_2 -t a felület szóban forgó pontjabeli főgörbületeknek nevezzük.

8.7 Következmény.

A felület rögzített pontjában az egymásra merőleges főirányokat adják meg az $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ egységvektorok, a megfelelő főgörbületek legyenek χ_1 és χ_2 , $\chi_1 \leq \chi_2$, és jelöljük az $\underline{s}_1$ vektorral φ szöget bezáró irányban a normálgörbületet $\chi_n(\varphi)$ - vel, $\varphi \in [0, \pi]$; akkor $\chi_n(\varphi)$ a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumban monoton növekedő, a $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ intervallumban monoton csökkenő függvény, $\chi_n(\varphi) = \chi_n(\pi - \varphi)$; és

$$\chi_1 = \min \chi_n(\varphi), \chi_2 = \max \chi_n(\varphi).$$

Bizonyítás. A (8.15) formulából

$$\begin{aligned} \chi_n(\varphi) &= \chi_1(1 - \sin^2 \varphi) + \chi_2 \sin^2 \varphi = \\ &= \chi_1 + (\chi_2 - \chi_1) \sin^2 \varphi \geq \chi_1, \end{aligned}$$

mivel $\chi_2 - \chi_1 \geq 0$. Innen a $\chi_n(\varphi)$ függvény monotonitására és szimmetriájára vonatkozó állítás is következik. (8.15)-öt másképpen átalakítva

$$\begin{aligned} \chi_n(\varphi) &= \chi_1 \cos^2 \varphi + \chi_2(1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= \chi_2 - (\chi_2 - \chi_1) \cos^2 \varphi \leq \chi_2. \end{aligned}$$

Az előbbiekből most már az is látható, hogy ha a felület egy pontjában a főgörbületek különbözők, akkor azon a két egymásra merőleges főírányon kívül, melyek létezését a 8.6 Tételben bebizonyítottunk, más főírány nincs. (Természetesen a normálgörbület egy adott irányban és az ellentétes irányban ugyanaz, vagyis az irányokat megadó vektoroknak csak az állása érdekes). Ha viszont a két főgörbület megegyezik, $\kappa_1 = \kappa_2$, akkor a normálgörbület minden irányban ezzel a közös értékkel egyenlő, vagyis ebben az esetben minden irány főirány. Ez a helyzet áll fenn az "a" sugarú gömb minden egyes pontjában, mivel minden normálmetszet "a" sugarú "főkör", ezek főnormális egységvektora ugyanaz a gömb középpontja felé mutató vektor, és így ha a gömbfelület normálvektorát is "befelé" irányítjuk, a normálgörbület minden irányban $\frac{1}{a}$.

A 8.6 Tétel bizonyítása során használt módszer egyben alkalmas a főgörbületek és a főirányok meghatározására is. A következő pontban azonban erre egy gyorsabban célravezető módszert mutatunk be.

8.2 Példa. Ha egy forgásfelület (lásd 7.1 Példa) tetszőleges pontját kiválasztjuk, akkor a ponton áthaladó meridiánvonal iránya főirány és így főirány a meridiánt merőlegesen metsző parallel kör iránya is (a parallel kör általában, természetesen nem normálmetszet!). Ez egyszerűen a szimmetriából következik. Az érintősíokban ui. (valamilyen forgásirányt pozitívként lerögzítve) a meridián irányával tetszőleges α szöget bezáró irányban a normálgörbület ugyanakkora, mint a meridiánnal $-\alpha$ szöget bezáró irányban. Miután két egymásra merőleges főirány között a normálgörbület monoton változik, a meridián iránya szükségképpen főirány.

9. Felületi pontok osztályozása

Felület főgörbületi fontos, meghatározó szerepet játszanak a rugalmasságtanban, rugalmas lemezekből alkotott "héjak" szilárdságának vizsgálatában. Ebben a pontban először azt mutatjuk meg, hogyan lehet a főgörbületeket a felület Gauss-féle elsőrendű és másodrendű főmennyiségei segítségével meghatározni. Ha ismernénk (a felület egy pontjában) a κ_1 és

κ_2 főgörbületek szorzatát és összegét, akkor a Vietà-féle formulák alapján (III. Kötet, 7.8 Tétel) a főgörbületek a $\lambda^2 - (\kappa_1 + \kappa_2)\lambda + \kappa_1 \kappa_2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei.

9.1 Definíció.

Felület rögzített pontjában a két főgörbület szorzatát, ill. összegét, vagyis a

$$K = \kappa_1 \kappa_2, \text{ ill. a } H = \kappa_1 + \kappa_2$$

számokat a felület Gauss-féle szorzatgörbületének, ill. összeggörbületének nevezzük.

Ha a felület szorzatgörbületét és összeggörbületét ismerjük, akkor az előbbiek szerint a főgörbületek a

$$\lambda^2 - H\lambda + K = 0 \quad (9.1)$$

másodfoku egyenlet megoldásai. Most megmutatjuk, hogy K és H az elsőrendű és másodrendű főmennyiségek segítségével egyszerűen meghatározhatók.

9.1 Tétel.

Felület K szorzatgörbületére, ill. H összeggörbületére fennáll a

$$K = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det [b_{ik}]}{\det [g_{ik}]}, \quad (9.2)$$

ill. a

$$H = \frac{g_{11} b_{22} - 2g_{12} b_{12} + g_{22} b_{11}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \quad (9.3)$$

összefüggés.

Bizonyítás. Ha a felület egy rögzített pontjában a normálgörbület (8.12) kifejezéséből levonjuk az egyik főgörbületet, akkor a 8.7 Következmény miatt e különbség értéke minden $(t_1, t_2) \neq (0, 0)$ -ra vagy nem-negatív, vagy, nem-pozitív lesz. A főgörbületeket κ_1 -gyel és κ_2 -vel jelölve

$$\kappa_n - \kappa_j = \frac{\sum_{i,k=1}^2 \frac{b_{ik} t_i t_k}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}}{\sum_{i,k=1}^2 \frac{g_{ik} t_i t_k}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}} - \kappa_j \geq 0, \quad j = 1, 2,$$

aszerint, amint χ_j a minimális, ill. maximális főgörbület. Ezt az egyenlőtlenséget a $\sum_{i,k=1}^2 g_{ik} t_i t_k \geq 0$ kifejezéssel megszorozva és rendezve azt kapjuk, hogy a

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^2 b_{ik} t_i t_k - \chi_j \sum_{i,k=1}^2 g_{ik} t_i t_k &= \\ &= \sum_{i,k=1}^2 (b_{ik} - \chi_j g_{ik}) t_i t_k \end{aligned}$$

másodfoku alak pozitív, vagy negatív semidefinit (lásd III. Kötet, 19.3 Definíció). E másodfoku alak nem definit, mivel a főirányokban zérus értéket vesz fel. A III. Kötet, 19.13 Tétel alapján ebből az következik, hogy az együttható mátrix egyik sajátértéke zérus. Ha azonban a

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \chi_j g_{11} - \lambda & b_{12} - \chi_j g_{12} \\ b_{21} - \chi_j g_{21} & b_{22} - \chi_j g_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

karakterisztikus egyenlet egyik gyöke zérus, akkor ebben az egyenletben a "konstans tag" zérus:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \chi_j g_{11} & b_{12} - \chi_j g_{12} \\ b_{21} - \chi_j g_{21} & b_{22} - \chi_j g_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

vagy kifejtve

$$\chi_j^2 (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) - \chi_j (g_{11} b_{22} - 2g_{12} b_{21} + g_{22} b_{11}) + (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) = 0,$$

$$j = 1, 2 \quad .$$

Ezek szerint κ_1 és κ_2 a

$$\lambda^2 - \frac{g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{21} + g_{22}b_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \lambda + \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 0$$

egyenlet megoldásai. (Pontosabban, az is látható, hogy κ_j akkor és csak akkor főgörbület, ha ez utóbbi másodfoku egyenlet megoldása). Ez utóbbi egyenletet (9.1)-gyel összehasonlítva a (9.2) és (9.3) formulákat kapjuk.!

9.1 Példa. Tételezzük fel, hogy a forgásfelület meridián görbájének egyenlete az xz síkban $x = f(z)$ alakban adott, $z \in (\alpha, \beta)$. (Lásd 7.1 Példa, a t paraméter szerepét most z játssza). Ekkor a 7.1 Példa eredményei a következőképpen módosulnak:

$$\underline{r} = f(z) \cos \varphi_{\underline{i}} + f(z) \sin \varphi_{\underline{j}} + z \underline{k},$$

$$\underline{r}_1 = f'(z) \cos \varphi_{\underline{i}} + f'(z) \sin \varphi_{\underline{j}} + \underline{k},$$

$$\underline{r}_2 = -f(z) \sin \varphi_{\underline{i}} + f(z) \cos \varphi_{\underline{j}},$$

$$\underline{r}_1 \times \underline{r}_2 = -f(z) \cos \varphi_{\underline{i}} - f(z) \sin \varphi_{\underline{j}} + f'(z) \underline{k},$$

$$g_{11} = 1 + f'^2, \quad g_{22} = f'^2, \quad g_{12} = 0.$$

$$g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = f'^2 (1 + f'^2).$$

Kiszámítjuk a másodrendű főmennyiségeket. Ehhez:

$$\underline{m}^0 = (1 + f'^2)^{-\frac{1}{2}} (-\cos \varphi_{\underline{i}} - \sin \varphi_{\underline{j}} + f' \underline{k})$$

$$\underline{r}_{11} = f'' \cos \varphi_{\underline{i}} + f'' \sin \varphi_{\underline{j}},$$

$$\underline{r}_{22} = -f \cos \varphi_{\underline{i}} - f \sin \varphi_{\underline{j}},$$

$$\underline{r}_{12} = -f' \sin \varphi_{\underline{i}} + f' \cos \varphi_{\underline{j}},$$

$$b_{11} = r_{11} \underline{m}^0 = -f'' (1+f'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$b_{22} = r_{22} \underline{m}^0 = f (1+f'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$b_{12} = r_{12} \underline{m}^0 = 0.$$

A szorzatgörbület:

$$K = \frac{b_{11} b_{22}}{g_{11} g_{22}} = \frac{-f'' (1+f'^2)^{-1}}{f^2 (1+f'^2)} = -\frac{1}{f} \frac{f''}{(1+f'^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{f(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{f''}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

A 8.2 Példában láttuk, hogy az egyik főgörbület a meridiánvonal görbülete. Mivel a meridián (előjeles) görbülete a (3.3) formula szerint éppen az utóbbi kifejezés második tényezője, ezért a főgörbületek

$$\kappa_1 = \frac{f''}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{f(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (9.4)$$

(9.4) második formulájának az a geometriai jelentése, hogy a meridián irányára merőleges főirányban a normálmetszet görbületi középpontja a forgástengelyen van.

Valamely felület pontjait abból a szempontból osztályozzuk, hogy van-e a pontnak olyan környezete, melyben a felület a pontbeli érintősíkkal meghatározott egyik féltérben (az érintősíkkal egyik oldalán) helyezkedik el, vagy a pont bármilyen kis környezetében van-e a felületnek pontja az egyik féltérben is és a másik féltérben is. Legyen $\underline{m}^0$ a felület normál egységvektora. A 8.1 Definíció után mondtuk rámutattunk arra, hogy ha egy érintő síkbeli irányban a normálgörbület pozitív, akkor az ehhez az irányhoz tartozó normálmetszet $\underline{m}^0$ irányában konkáv ("a felület az $\underline{m}^0$ irányban görbül"), ha pedig egy másik irányban a normálgörbület negatív, akkor az utóbbi irányhoz tartozó normálmetszet az $\underline{m}^0$ -al ellentétes irányban konkáv (az utóbbi irányban "a felület az $\underline{m}^0$ -al ellentétes irányban görbül"). Ha κ_1 és κ_2 a két főgörbület és pl. $\kappa_1 \leq \kappa_2$, akkor minden κ_n normálgörbületre

$$\kappa_1 \leq \kappa_n \leq \kappa_2$$

Ha tehát κ_1 és κ_2 előjele megegyezik, akkor minden normálgörbület előjele megegyezik, és a felület minden érintősíkbeli irányban az érintő sík ugyanazon oldala felé konkáv. Ha κ_1 és κ_2 előjele különböző, akkor a felület egyes irányokban az érintő sík egyik, más irányokban az érintő sík másik oldala felé konkáv. Az az eset, amikor az egyik főgörbület zérus, átmenetet képez az előző két eset között. Azt megfogalmazni, hogy milyen κ_1 és κ_2 egymáshoz viszonyított előjele, legegyszerűbben a $K = \kappa_1 \kappa_2$ szorzatgörbület segítségével lehet.

9.2 Definíció.

Ha a felület egy pontjában a K szorzatgörbület pozitív, negatív, ill. zérus, akkor azt mondjuk, hogy ez a pont a felületnek elliptikus, hiperbolikus, ill. parabolikus pontja.

Ha $\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$, akkor a pontot (mely nyilván elliptikus) szférikus pontnak nevezzük. Ha $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, akkor a pontot (mely nyilván parabolikus) planáris pontnak nevezzük. Gömb minden pontja szférikus pont (lásd a 8.7 Következmény utáni megjegyzést). Sík minden pontja planáris pont, mivel sík minden normálmetszete egyenes, melynek görbülete zérus.

A

$$\sum_{i,k=1}^2 b_{ik} t_i t_k = b_{11} t_1^2 + 2b_{12} t_1 t_2 + b_{22} t_2^2$$

másodfoku alakot a felület Gauss-féle második alapformájának nevezzük.

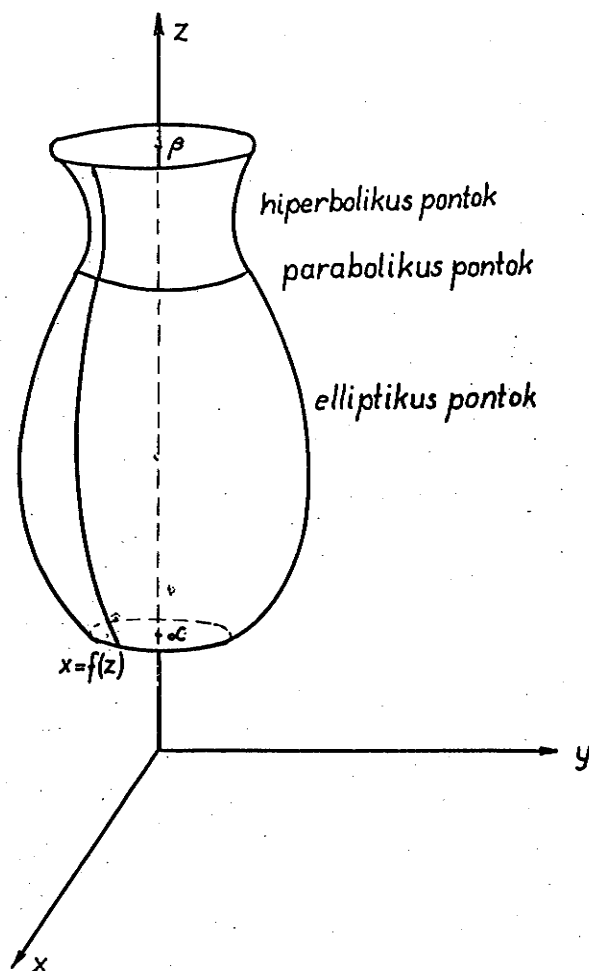
9.2 Tétel.

A felület valamely pontja elliptikus, hiperbolikus, ill. parabolikus aszerint, amint ebben a pontban a második alapforma definit, indefinit, ill. semi-definit.

Bizonyítás. A második alapforma együttható mátrixának karakterisztikus polinomja

$$\lambda^2 - \lambda(b_{11} + b_{22}) + \det [b_{ik}]$$

A sajátértékek szorzata $\det [b_{ik}]$. A III. Kötet, 19.13 Tétel alapján ezek szerint a második alapforma akkor és csak akkor definit, indefinit, ill. semidefinit, ha $\det [b_{ik}] > 0$, $\det [b_{ik}] < 0$, ill. $\det [b_{ik}] = 0$ (v. ö. másodrendű görbék osztályozásával, III. Kötet, 19.1 Példa). (9.2)-ből azonban látható, mivel $\det [g_{ik}] > 0$, hogy e három eset éppen a $K > 0$, $K < 0$, ill. $K = 0$ eseteknek felel meg.



9.1 ábra

9.2 Példa. A 9.1 ábrán látható az $x = f(z)$ egyenletű, xz síkbeli görbe megforgatása után előálló forgásfelület. Az ábrán látható esetben $f(z) > 0$, $z \in (\alpha, \beta)$. Ezért (9.4) második képlete szerint a χ_2 főgörbület minden

pontban negatív. A forgásfelület azon pontjai, melyeket az $x = f(z)$ görbe alulról (a z -tengely felől) konkáv szakasza söpör végig, elliptikus pontok, mivel e pontokban $f''(z) < 0$, így a (9.4) első képlete szerint χ_1 is negatív és $K = \chi_1 \chi_2 > 0$. A forgásfelület azon pontjai, melyeket az $x = f(z)$ görbe alulról konvex szakasza söpör végig, hiperbolikus pontok, mivel e pontokban $f''(z) > 0$, $\chi_1 > 0$ és $K = \chi_1 \chi_2 < 0$. Végül annak a párhuzamos körnek a pontjai, melyet az $x = f(z)$ görbe inflexiós pontja söpör végig, parabolikus pontok, mivel e pontokban $f''(z) = 0$, $\chi = 0$ és $K = \chi_1 \chi_2 = 0$.

VEKTORANALÍZIS

10. Skalár-vektor függvények

A fizikai (mechanikai) jelenségek térben és időben játszódnak le. A jelenségeket befolyásoló, vagy jellemző fizikai mennyiségek általában a helynek és az időnek függvényei. Ebben a fejezetben olyan függvényekkel foglalkozunk, melyek időtől független ("stacionárius"), csak a helytől függő fizikai (mechanikai) mennyiségek leírására alkalmasak. Természetesen ezek a függvények felhasználhatók időtől is függő fizikai mennyiségek leírására is feltéve, hogy a fizikai mennyiség az időben elég lassan változik, és minket csak "pillanatnyi" (igen rövid ideig tartó) viselkedése érdekel. Ebben a pontban skalárértékű (valós szám értékű) függvényekkel foglalkozunk. Ilyen függvények írják le például rögzített időpontban a hőmérséklet, nyomás, vagy a "potenciál" eloszlását a tér egy részében. Lerögzítjük a közösleges térben az O origót és a pontokat helyvektoraikkal azonosítjuk. Legyen D a közösleges tér pontjainak (helyvektorainak) egy részhalmaza; az $u(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ függvényt skalár-vektor függvénynek (skalár mezőnek, skalár eloszlásnak) nevezzük, ha minden $\underline{r} \in D$ vektorhoz pontosan egy $u(\underline{r})$ skalár számot rendel hozzá.

Ha a térben az O origó mellett lerögzítjük az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázist és az ezen alapuló Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert, akkor minden helyvektor egyértelműen előállítható az $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ alakban és a helyvektorok halmaza, ill. a rendezett számhármások halmaza között egy-egyértelmű a megfeleltetés. Ilyenkor az $u(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ skalár-vektor függvény azzal a háromváltozós $f(x, y, z)$ valós függvénnyel reprezentálható, amelyet a következő összefüggés definiál

$$f(x, y, z) = u(\underline{r}), \quad \underline{r} \in D,$$

ha $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$. Azt is mondhatjuk, hogy rögzített koordinátarendszerben egy skalár-vektor függvény megadása egy háromváltozós függvény megadásával ekvivalens. A skalár-vektor függvény és a háromváltozós valós függvény fogalma között azonban lényeges elvi különbség van. Ha ugyanis egy helytől függő fizikai mennyiséget skalár-vektor függvénnyel adunk meg, akkor e függvény kizárólag az adott mennyiség térbeli eloszlását (és az origó megválasztását), vagyis a fizikai lényeget tükrözi. (Az origó megválasztása ugyan önkényes, de ez az "önként" matematikailag könnyen felismerhetően és egyszerűen tükröződik: az origó megváltoztatása egy állandó vek-

tornak a független változó vektorhoz való hozzáadásával történik). Ezzel szemben, ha a fizikai mennyiséget koordináta-rendszer bevezetése után, háromváltozós függvénnyel adjuk meg, akkor e függvény nemcsak a fizikai lényegét, hanem a koordináta-rendszer esetlegességét is tükrözi. Ugyanazon skalár-vektor függvény különböző koordináta-rendszerekben különböző háromváltozós függvényekkel ekvivalens. Ez az oka annak, hogy bár a következőkben felhasználjuk a skalár-vektor függvények háromváltozós valós függvényekkel való előállításának lehetőségét, a skalár-vektor függvények tulajdonságait igyekszünk ettől az előállítástól függetlenül, direkt módon értelmezni és vizsgálni. Ugyanakkor, ha ez nem félreérthető, akkor az $u(\underline{r})$ skalár-vektor függvényt megadó háromváltozós függvényt is $u(x, y, z)$ -vel jelöljük.

10.1 Példa. Az

$$u = \frac{1}{|\underline{r}|}, \quad \underline{r} \neq 0 \quad (10.1)$$

formulával értelmezett függvény skalár-vektor függvény. Ha bevezetjük az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázison alapuló Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert, ahol

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}, \quad \text{akkor } |\underline{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{és a} \quad (10.1)$$

függvényt az

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

háromváltozós függvény reprezentálja. Ha gömbi koordináta-rendszert vezetünk be (lásd V. Kötet, (11.22)), akkor (10.1)-et a

$$g(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r}, \quad 0 < r < \infty$$

függvény reprezentálja. Ha henger koordináta-rendszert vezetünk be (lásd V. Kötet, (11.24)), akkor (10.1)-et a

$$h(r, \varphi, z) = \frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq r < \infty, \quad -\infty < z < \infty, \\ r^2 + z^2 > 0$$

függvény reprezentálja.

A közöséges tér helyvektorainak halmaza nyilván metrikus tér (lásd V. Kötet, 1. pont); ennek a térnek és az ezen a téren értelmezett valós értékű függvényeknek, a skalár-vektor függvényeknek a tulajdonságai formailag megegyeznek az V. Kötet, Első fejezetében közöltekkel. Az olyan fogalmakat, mint pl. a környezet, pontsorozat torlódási pontja, nyílt és zárt halmazok, függvények határértéke és folytonossága stb. ismertnek tekintjük. Érvényben vannak a függvény határértékére vonatkozó tételek (V. Kötet, 3. pont) és a folytonos függvények alapvető tulajdonságai (V. Kötet, 4. pont). Hangsúlyozzuk azonban, hogy mindezekkel a dolgokkal itt a teljes formai analógia miatt és a helykímélés végett nem foglalkozunk. Elvileg mindezt újra kellene tárgyalni, mivel a közöséges teret nem a rendezett számhalmazok, hanem a koordinátarendszertől független pontok (helyvektorok) halmazának tekintjük.

A következőkben skalár-vektor függvény differenciálhatóságát és deriváltját, a "gradienst" értelmezzük.

10.1 Definíció.

Az $u(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ skalár-vektor függvényt a D tartomány $\underline{r}_0 \in D$ torlódási pontjában differenciálhatónak (deriválhatónak) mondjuk, ha megváltozása tetszőleges $(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) \in D$ -re a következő alakban írható fel:

$$u(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - u(\underline{r}_0) = \underline{d} \Delta \underline{r} + \xi(\Delta \underline{r}) \Delta \underline{r}, \quad (10.2)$$

ahol a $\underline{d}$ vektor nem függ $\Delta \underline{r}$ -től és az ξ vektor a nullvektorhoz tart,

$$\xi(\Delta \underline{r}) \rightarrow 0, \quad \text{ha } \Delta \underline{r} \rightarrow 0.$$

Ekkor a $\underline{d}$ vektort az $u(\underline{r})$ skalár-vektor függvény deriváltvektorának vagy gradiensének nevezzük, jelölése:

$$\begin{aligned} \underline{d} &= \left[\frac{du}{d\underline{r}} \right]_{\underline{r}_0} = \left[\text{grad } u(\underline{r}) \right]_{\underline{r}_0} = \\ &= \text{grad } u(\underline{r}_0). \end{aligned}$$

A növekmény $\underline{d} \cdot \Delta \underline{r} = \text{grad } u \cdot \Delta \underline{r}$ főrésztét u differenciáljának nevezzük és du -val jelöljük.

Bebizonyítjuk, hogy ha az $u(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ skalár-vektor függvény az $\underline{r}_0$ pontban differenciálható, akkor gradiense egyértelműen meg van határozva.

Tegyük fel ugyanis, hogy

$$u(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - u(\underline{r}_0) = \underline{d}_1 \Delta \underline{r} + \underline{\xi}_1 \Delta \underline{r},$$

$$u(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - u(\underline{r}_0) = \underline{d}_2 \Delta \underline{r} + \underline{\xi}_2 \Delta \underline{r},$$

ahol $\underline{\xi}_1 \rightarrow \underline{0}$, $\underline{\xi}_2 \rightarrow \underline{0}$, ha $\Delta \underline{r} \rightarrow \underline{0}$. Legyen $\underline{e}$ tetszőlegesen rögzített egységvektor és $\Delta \underline{r} = \Delta s \underline{e}$. Ekkor

$$u(\underline{r}_0 + \Delta s \underline{e}) - u(\underline{r}_0) = \Delta s \underline{d}_1 \underline{e} + \Delta s \underline{\xi}_1 \underline{e} = \Delta s \underline{d}_2 \underline{e} + \Delta s \underline{\xi}_2 \underline{e},$$

amiből $\Delta s \neq 0$ -val való osztás és rendezés után

$$\underline{0} = (\underline{d}_1 - \underline{d}_2) \underline{e} + (\underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_2) \underline{e}$$

következik. Ha most $\Delta s \rightarrow 0$, akkor $\underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_2 \rightarrow \underline{0}$, tehát $(\underline{d}_1 - \underline{d}_2) \underline{e} = \underline{0}$.

Mivel $\underline{e}$ tetszőleges, ezért $\underline{d}_1 - \underline{d}_2$ csak a nullvektor lehet, vagyis

$$\underline{d}_1 = \underline{d}_2 \quad . \quad !$$

10.1 Tétel.

Ha az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázison alapuló Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben az $\underline{r}_0 = x_0 \underline{i} + y_0 \underline{j} + z_0 \underline{k}$ pontban differenciálható $u(\underline{r})$ skalár-vektor függvényt az $u(x, y, z)$ háromváltozós függvény reprezentálja, akkor $u(x, y, z)$ az (x_0, y_0, z_0) pontban totálisan differenciálható és

$$\begin{aligned} \text{grad } u(\underline{r}_0) &= u'_x(x_0, y_0, z_0) \underline{i} + \\ &+ u'_y(x_0, y_0, z_0) \underline{j} + \\ &+ u'_z(x_0, y_0, z_0) \underline{k}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Bizonyítás. Vezessük be a $\text{grad } u(\underline{r}_0) = d_1 \underline{i} + d_2 \underline{j} + d_3 \underline{k}$, $\Delta \underline{r} = \Delta x \underline{i} + \Delta y \underline{j} + \Delta z \underline{k}$, és az $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_1 \underline{i} + \varepsilon_2 \underline{j} + \varepsilon_3 \underline{k}$ jelöléseket. Ezekkel a háromváltozós $u(x, y, z)$ függvény megváltozása

$$\begin{aligned} & u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - u(x_0, y_0, z_0) = \\ & = u(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - u(\underline{r}_0) = \text{grad } u(\underline{r}_0) \cdot \Delta \underline{r} + \underline{\varepsilon} \cdot \Delta \underline{r} = \\ & = d_1 \Delta x + d_2 \Delta y + d_3 \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z, \end{aligned}$$

ahol $\underline{\varepsilon} \rightarrow 0$, ha $\Delta \underline{r} \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3$. Ezt az eredményt az V. Kötet 5.2 Definíciójával és 5.2 Következményével összevetve állításunk adódik.

Az ismert deriválási szabályoknak felelnek meg a következő deriválási szabályok ($u_1(\underline{r})$, $u_2(\underline{r})$, $u(\underline{r})$ és $\underline{r}(t)$ deriválható skalár-vektor, ill. vektor-skalár függvények és c állandó):

$$\text{grad}(u_1 + u_2) = \text{grad } u_1 + \text{grad } u_2 ; \quad (10.4)$$

$$\text{grad}(u_1 \cdot u_2) = u_2 \text{grad } u_1 + u_1 \text{grad } u_2 ; \quad (10.5)$$

$$\text{grad} \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2 \text{grad } u_1 - u_1 \text{grad } u_2}{u_2^2}, u_2 \neq 0, \quad (10.6)$$

$$\text{grad } c \equiv 0 ; \quad (10.7)$$

$$\text{grad}(c u) = c \text{grad } u ; \quad (10.8)$$

$$\frac{d u(\underline{r}(t))}{dt} = \text{grad } u \cdot \frac{d \underline{r}}{dt} \quad (\text{láncszabály}), \quad (10.9)$$

ha $u(\underline{r})$ értelmezési tartománya $\underline{r}(t)$ értékkészletét tartalmazza.

A fenti szabályok könnyen bizonyíthatók. Például
 (10.5) bizonyítása. Legyen $U(\underline{r}) = u_1(\underline{r}) \cdot u_2(\underline{r})$, és $\Delta u_1 = u_1(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - u_1(\underline{r}_0)$, $\Delta u_2 = u_2(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - u_2(\underline{r}_0)$. Az $U(\underline{r})$ szorzat megváltozása

$$\begin{aligned} U(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - U(\underline{r}_0) &= u_1(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) u_2(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - u_1(\underline{r}_0) u_2(\underline{r}_0) = \\ &= (u_1(\underline{r}_0) + \Delta u_1)(u_2(\underline{r}_0) + \Delta u_2) - u_1(\underline{r}_0) u_2(\underline{r}_0) = \\ &= u_2(\underline{r}_0) \Delta u_1 + u_1(\underline{r}_0) \Delta u_2 + \Delta u_1 \Delta u_2 = u_2(\underline{r}_0) \text{grad } u_1(\underline{r}_0) \Delta \underline{r} + \\ &\quad + u_1(\underline{r}_0) \xi_1 \Delta \underline{r} + u_1(\underline{r}_0) \text{grad } u_2(\underline{r}_0) \Delta \underline{r} + u_1(\underline{r}_0) \xi_2 \Delta \underline{r} \\ &\quad + \Delta u_1 (\text{grad } u_2(\underline{r}_0) + \xi_2) \Delta \underline{r}, \end{aligned}$$

ahol $\xi_1 \rightarrow 0$, $\xi_2 \rightarrow 0$, ha $\Delta \underline{r} \rightarrow 0$. Innen

$$\begin{aligned} U(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - U(\underline{r}_0) &= (u_2(\underline{r}_0) \text{grad } u_1(\underline{r}_0) + u_1(\underline{r}_0) \text{grad } u_2(\underline{r}_0)) \Delta \underline{r} + \\ &\quad + \varepsilon \Delta \underline{r}, \varepsilon \rightarrow 0, \text{ ha } \Delta \underline{r} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ahonnan a szorzat deriválhatósága és (10.5) következik.!

(10.9) bizonyítása. Ha t megváltozik Δt -vel, akkor $\underline{r}(t)$ megváltozása $\Delta \underline{r} = \underline{r}(t + \Delta t) - \underline{r}(t)$ és $u(\underline{r})$ megváltozása

$$\Delta u = u(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - u(\underline{r}) = \text{grad } u \Delta \underline{r} + \xi \Delta \underline{r},$$

ahol $\xi \rightarrow 0$, ha $\Delta \underline{r} \rightarrow 0$. Innen az $u(\underline{r}(t))$ összetett függvény különbségi hányadosa

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \text{grad } u \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} + \xi \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}.$$

Ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor a jobboldal $\text{grad } u \cdot \dot{\underline{r}}$ -hoz tart, vagyis

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \text{grad } u \cdot \dot{\underline{r}} \quad !$$

10.2 Tétel.

(Lagrange-féle középértéktétel). Legyen D a közönséges tér pontjainak (helyvektorainak) egy konvex részhalmaza, és $u(\underline{r})$ D minden pontjában deriválható skalár-vektor függvény. Minden $\underline{r}$ -hez és $\Delta \underline{r}$ -hez, melyre $\underline{r}, (\underline{r} + \Delta \underline{r}) \in D$ van $0 < \vartheta < 1$ szám, hogy

$$u(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - u(\underline{r}) = [\text{grad } u]_{\underline{r}} + \vartheta \Delta \underline{r} \cdot \Delta \underline{r}; \quad (10.10)$$

másszóval az $\underline{r}$ és $\underline{r} + \Delta \underline{r}$ helyvektoru pontok által meghatározott egyenes-szakasznak van olyan $\underline{r} + \vartheta \Delta \underline{r}$ helyvektoru pontja, amelyben véve a gradiens értékét, ennek $\Delta \underline{r}$ -rel való skaláris szorzata éppen az $u(\underline{r})$ függvénynek ezen a szakaszon történt megváltozását adja.

A tétel bizonyítását, - minthogy az megfelel az V.Kötet, 9.1 Tétel bizonyításának, - az olvasóra bizzuk.

A skalár-vektor függvények szemléltetése, "ábrázolása" általában az un. "szintfelületek" segítségével történik. Megadunk egy c valós számot és megkeressük a térben azokat az $\underline{r}$ pontokat, amelyekben a függvény a c értéket veszi fel. E pontok mértani helye a "szintfelület". Gyakran már egy néhány "szintfelület" megadása jól szemlélteti a skalár-vektor függvényt.

10.2 Definíció.

Az $u(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ skalár-vektor függvénynek a $c \in \mathbb{R}$ értékhez tartozó szintfelülete (nívófelülete) az

$$F_c = \{ \underline{r} : u(\underline{r}) = c, \underline{r} \in D \}$$

halmaz.

F_c természetesen lehet az üres halmaz is, (ha $u(\underline{r})$ a c értéket sehol sem veszi fel). Nyilvánvaló, hogy minden $\underline{r} \in D$ ponton egy és csak egy szintfelület halad keresztül, vagyis a szintfelületek egyesítése "egyrésztlenül lefedi (kitölti)" a D értelmezési tartományt.

10.3 Tétel.

Legyen az $u(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ skalár-vektor függvény a nyílt és összefüggő D tartomány minden pontjában differenciálható, Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben az $u(\underline{r})$ -nek megfelelő $f(x, y, z)$ háromváltozós függvény háromszor folytonosan differenciálható, az $\underline{r}_0 \in D$ pontban $u(\underline{r}_0) = c$

és $\text{grad } u(\underline{r}_0) \neq \underline{0}$; ekkor az F_c szintfelületnek $\underline{r}_0$ elég kis sugaru környezetébe eső darabja reguláris felületdarab (lásd 6.2 Definíció.)

Bizonyítás. Legyen $\underline{r}_0 = x_0 \underline{i} + y_0 \underline{j} + z_0 \underline{k}$; így $f(x_0, y_0, z_0) = u(\underline{r}_0) = c$. Mivel $\text{grad } u(\underline{r}_0) = f'_x(\underline{r}_0) \underline{i} + f'_y(\underline{r}_0) \underline{j} + f'_z(\underline{r}_0) \underline{k} \neq \underline{0}$, ezért f három elsőrendű parciális deriváltja közül legalább az egyik nem zérus. Legyen például $f'_z(\underline{r}_0) \neq 0$. Az F_c szintfelület egyenlete $f(x, y, z) = c$. Az f függvény az (x_0, y_0, z_0) pontban kielégíti az implicit függvény létezésére és differenciálhatóságára vonatkozó V. Kötet 11.3 Tétel feltételeit, vagyis van pontosan egy $\varphi(x, y)$ folytonosan differenciálható függvény, melynek segítségével az F_c szintfelület egyenlete $\underline{r}_0$ egy környezetében a $z = \varphi(x, y)$ alakban adható meg. Mivel f háromszor folytonosan differenciálható, az V. Kötet (11.14) formulából látható, hogy φ is háromszor folytonosan differenciálható. Ezek szerint (lásd a (6.10) előtt és után mondottakat) az

$$\underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j} + \varphi(x, y) \underline{k}$$

megadási felületdarab reguláris. !

Az előző tételből következik, hogy ha az egyéb feltételek teljesülése mellett $\text{grad } u$ sehol sem zérus, az $u(\underline{r})$ skalár-vektor függvény bármely szintfelülete reguláris felületdarabok egyesítése. Kedvező esetben a szintfelület reguláris felület (lásd 6.4 Definíció). Ha $\text{grad } u$ nem zérus, akkor nemcsak azt tudjuk, hogy a szintfelület elég kis darabja reguláris felületdarab, hanem ismerjük a szintfelület normálvektorát is. Erről szól a következő

10.4 Tétel.

Ha $\text{grad } u(\underline{r}_0) \neq \underline{0}$, akkor $\text{grad } u(\underline{r}_0)$ az $\underline{r}_0$ ponton áthaladó szintfelület $\underline{r}_0$ -beli normálvektora.

Bizonyítás. Legyen az $u(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ skalár-vektor függvény $\underline{r}_0$ ponton átmenő szintfelületének egyenlete $u(\underline{r}) = c$. Tekintsük most ezen a szintfelületen elhelyezkedő azon reguláris felületi görbéket, melyek az $\underline{r}_0$ ponton áthaladnak. Legyen ezek egyikének egyenlete $\underline{r} = \underline{r}(t)$ és $\underline{r}(t_0) = \underline{r}_0$. Miután e görbe minden pontja kielégíti a szintfelület egyenletét, ezért $u(\underline{r}(t)) \equiv c$. Differenciáljuk az utóbbi azonosságot mindkét oldalát. A (10.9) formula felhasználásával

$$\frac{du(\underline{r}(t))}{dt} = \text{grad } u(\underline{r}(t)) \cdot \dot{\underline{r}}(t) \equiv 0,$$

vagyis a $t = t_0$ helyen $\text{grad } u(\underline{r}_0) \cdot \dot{\underline{r}}(t_0) = 0$. Minthogy $\underline{r} = \underline{r}(t)$ akármelyik $\underline{r}_0$ ponton áthaladó - szintfelületi görbe lehet, ezért az utóbbi egyenlőség azt jelenti, hogy $\text{grad } u(\underline{r}_0)$ merőleges minden $\underline{r}_0$ -on áthaladó felületi görbére.!

Az előző tétel lehetőséget nyújt "implicit alakban adott felület" normálvektorának és érintősíkjának egyszerű meghatározására. Azt mondjuk, hogy az $F(x, y, z) = 0$ egyenlet egy felületet ad meg implicit alakban, ha minden (x, y, z) pontban, mely kielégíti az egyenletet, az F háromváltozós függvény háromszor folytonosan differenciálható és legalább az egyik elsőrendű parciális deriváltja nem zérus. Ebben az esetben ugyanis az egyenlet minden olyan pont bizonyos környezetében, mely kielégíti, egy kétváltozós, háromszor folytonosan differenciálható függvényt definiál és e környezetben éppen e kétváltozós (implicit megadásu) függvény grafikonjának egyenlete. (Lásd a (6.10) előtt mondottakat és az V. Kötet, 11.3 Tételt).

10.5 Következmény.

Legyen egy implicit alakban adott felület egyenlete

$$F(x, y, z) = 0 \quad (10.11)$$

és (x_0, y_0, z_0) a felület egy pontja (vagyis $F(x_0, y_0, z_0) = 0$); ekkor a felület (x_0, y_0, z_0) -beli normálvektora az

$$[F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)] \quad (10.12)$$

vektor és a felület e ponthoz tartozó érintősíkjának egyenlete

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0. \quad (10.13)$$

Bizonyítás. Tekintsük azt a skalár-vektor függvényt, melyet a lerögzített Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben az F háromváltozós függvény reprezentál. A (10.11) egyenletű felület e skalár-vektor függvény szintfelülete, melynek normálvektora a gradiens. A gradiens azonban a (10.3) formula szerint éppen a (10.12) vektor.!

Legyen D a közönséges tér pontjainak konvex részhalmaza. A következőkben az $u(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ skalár-vektor függvény változási sebességét vizsgáljuk az értelmezési tartomány valamely $\underline{a} \in D$ pontjában, miközben $\underline{a}$ -ból valamely $\underline{b} \neq \underline{a}$, $\underline{b} \in D$ pont irányában mozgunk. Jelöljük $\Delta \underline{r}$ -rel az $\underline{r}-\underline{a}$ vektort, és legyen

$$s = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{a} + (\underline{b} - \underline{a}) t, \quad t \in (0, 1] \} \quad (10.14)$$

az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontokat összekötő szakasz. Az

$$\frac{u(\underline{r}) - u(\underline{a})}{|\underline{r} - \underline{a}|} = \frac{u(\underline{r}) - u(\underline{a})}{|\Delta \underline{r}|} \quad (10.15)$$

hányados az $u = u(\underline{r})$ skalár-vektor függvény átlagos változási sebessége, ha $\underline{a}$ -ból az értelmezési tartomány $\underline{r}$ pontjába megyünk. E hányados függvénynek az s szakaszra vonatkozó leszűkítése megadja u átlagos változási sebességét az s által meghatározott irányban.

10.3 Definíció.

Legyen adott az $u(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ skalár-vektor függvény, ahol D a közönséges tér pontjainak konvex részhalmaza és $\underline{a}, \underline{b} \in D$. A (10.15) hányados (10.14)-re való leszűkítésének határértékét - mikor $\underline{r} \rightarrow \underline{a}$ - az $u(\underline{r})$ skalár-vektor függvény $\underline{a}$ pontbeli s irányu iránymenti deriváltjának nevezzük és $\frac{\partial u}{\partial s}$ -sel jelöljük, vagyis

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\substack{\underline{r} \rightarrow \underline{a} \\ \underline{r} \in s}} \frac{u(\underline{r}) - u(\underline{a})}{|\underline{r} - \underline{a}|} \quad (10.16)$$

10.6 Tétel.

Ha az $u(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ függvény az $\underline{a} \in D$ pontban differenciálható és a (10.14)-gyel adott $s \subset D$, akkor létezik az $\underline{a}$ pontbeli, s irányu iránymenti derivált és

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \text{grad } u(\underline{a}) \cdot \underline{e} \quad (10.17)$$

$$\text{ahol } \underline{e} = \frac{\underline{b} - \underline{a}}{|\underline{b} - \underline{a}|} \quad \text{egységvektor.}$$

Bizonyítás. Mivel $u(\underline{r})$ differenciálható $\underline{a}$ -ban, $u(\underline{r}) - u(\underline{a}) = \text{grad } u(\underline{a}) \cdot (\underline{r} - \underline{a}) + \varepsilon \cdot (\underline{r} - \underline{a})$, ahol $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $\underline{r} \rightarrow \underline{a}$, $\underline{r} \in \bar{D}$. Legyen most (10.14) szerint $\underline{r} - \underline{a} = (\underline{b} - \underline{a}) t$, $t \in (0, 1]$; így

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\underline{r} \rightarrow \underline{a} \\ \underline{r} \in \bar{S}}} \frac{u(\underline{r}) - u(\underline{a})}{|\underline{r} - \underline{a}|} &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\text{grad } u(\underline{a}) \cdot (\underline{b} - \underline{a})t + \varepsilon \cdot (\underline{b} - \underline{a})t}{|\underline{b} - \underline{a}| t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \left(\text{grad } u(\underline{a}) \cdot \frac{\underline{b} - \underline{a}}{|\underline{b} - \underline{a}|} + \varepsilon \cdot \frac{\underline{b} - \underline{a}}{|\underline{b} - \underline{a}|} \right) = \text{grad } u(\underline{a}) \cdot \underline{e}. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy (10.17) megfelel az V.Kötet (8.19) iránymenti derivált - képletének ($\underline{e} = \cos \alpha \underline{i} + \cos \beta \underline{j} + \cos \gamma \underline{k}$).

10.7 Tétel.

A gradiens vektor abba az irányba mutat, amelyben a skalár-vektor függvény értéke a leggyorsabban növekszik és a gradiens abszolút értéke egyenlő a maximális iránymenti deriválttal.

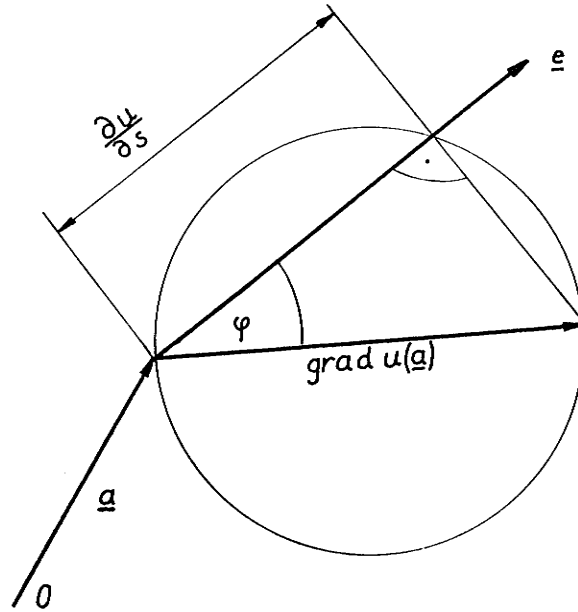
Bizonyítás. (10.17) szerint, tetszőleges $\underline{e}$ egységvektor által adott $\bar{S}$ irányban

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \text{grad } u \cdot \underline{e} = |\text{grad } u| |\underline{e}| \cos \varphi = |\text{grad } u| \cos \varphi,$$

ahol φ a $\text{grad } u$ és $\underline{e}$ által bezárt szög. (Lásd 10.1 ábra). Ez akkor maximális, ha $\cos \varphi = 1$, $\varphi = 0$, vagyis ha $\underline{e}$ a $\text{grad } u$ irányában mutat.!

A (10.17) formula alapján az iránymenti derivált szemléletessé tehető. A $\text{grad } u(\underline{a})$ vektornak megfelelő egyenesszakasz legyen egy gömb átmérője; a $\text{grad } u(\underline{a})$ -val hegyesszöget bezáró $\underline{e}$ vektor kijelöli a gömb egyik $\underline{a}$ -n átmenő főkörének $\underline{a}$ -tól a gömb belseje felé irányított szelőjét. Thales tétele alapján az iránymenti derivált nagysága egyenlő az $\underline{a}$ -n átmenő $\underline{e}$ irányu hur hosszával. A $\text{grad } u$ és $\underline{e}$ vektoron átfektetett síkban az iránymenti derivált a 10.1 ábra szerint meg is szerkeszthető. A $\text{grad } u$ -val tompaszöget bezáró irányokban az iránymenti derivált negatív, speciálisan, a $\text{grad } u$ -val ellentétes irányban minimális az iránymenti derivált. A $\text{grad } u$ -ra merőleges irányokban az iránymenti derivált zérus.

A skalár-vektor függvényről eddig elmondottak síkvektorokkal kapcsolatban hasonlóan értelmezhetők. Legyen most D a kétdimenziós euklideszi



10.1 ábra

tér pontjainak (helyvektorainak) egy részhalmaza; az $u(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ skalár-vektor függvény minden $\underline{r}$ síkvektorhoz pontosan egy $u(\underline{r})$ skalár számot rendel hozzá. Ha ebben a síkban az O origó mellett lerögzítjük az $\underline{i}$, $\underline{j}$ bázist és az ezen alapuló Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert, akkor a helyvektorok $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$ alakban állíthatók elő, és az $u(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ skalár-vektor függvény azzal a kétváltozós $f(x, y)$ függvénnyel reprezentálható, melyet a következő összefüggés definiál

$$f(x, y) = u(\underline{r}), \quad \underline{r} \in D,$$

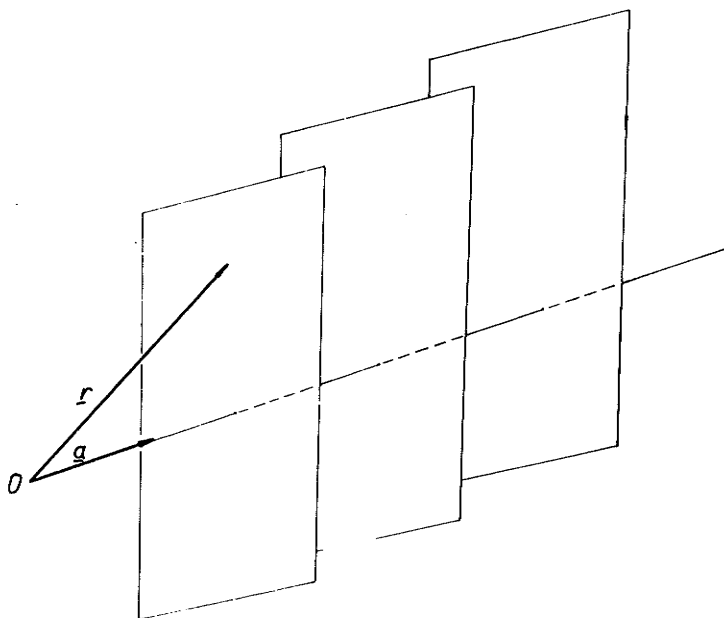
ha $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$. Az $u = c$ szintfelületeknek itt szintvonalak felelnek meg. A gradiens-vektor (itt síkvektor) ezekre merőleges, és abba az irányba mutat, amelyben a skalár-vektor függvény értéke a leggyorsabban növekszik.

A "szintvonalas" térképek ilyen síkbeli skalár-eloszlást ábrázolnak ahol a sík minden pontjához az e pont feletti tereppont tengerszint feletti magasságának értéke van hozzárendelve, s a szintvonalak az egyenlő tengerszint feletti magasságú pontokat kötik össze. A gradiens a legmeredekebb emelkedés irányába mutat.

A skalár-vektor függvény fogalma speciálisan egydimenziós térre is leszűkíthető (pl. vékony egyenes rudban fellépő hőmérsékleteloszlás) és rögzített koordinátarendszerben a megadása egy egyváltozós függvény megadásával ekvivalens; de ugyanúgy kiterjeszthető n dimenziós térre is.

10.2 Példa. A 10.1 Példában szereplő $u = \frac{1}{|\underline{r}|}$ formulával értelmezett skalár-vektor függvény szintfelületei origó középpontú koncentrikus gömbfelületek.

$$\text{grad } u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (-x\underline{i} - y\underline{j} - z\underline{k}) = \frac{a - \underline{r}}{|\underline{r}|^3}. \quad (10.18)$$



10.2 ábra

$\text{grad } u$ iránya tehát ellentétes $\underline{r}$ irányával. A skaláreloszlás maximális változási sebességének nagysága az $\underline{r}$ pontban $|\text{grad } u| = \frac{1}{2|\underline{r}|^3}$ az origótól

mért távolság négyzetével fordítva arányos.

10.3 Példa. Meghatározzuk az $u = \underline{a} \cdot \underline{r}$; ($\underline{a} \neq \underline{0}$ állandó vektor) skalár-vektor függvény szintfelületeit és gradiensét.

$$u = c \text{ állandó, ha } \underline{a} \cdot \underline{r} = c = \underline{a} \cdot \underline{r}_0, \text{ ahol } \underline{r}_0$$

alkalmasan választott vektor, vagyis ha $\underline{a} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$.

Tehát a szintfelületek $\underline{a}$ -ra merőleges síkok. A gradines-vektor $\frac{du}{d\underline{r}} = \underline{a}$ a szintfelületek normálvektora, mely ebben az esetben a 10.1 Definíció alapján kapható. Ugyanis minden $\underline{r}$ pontban minden $\Delta \underline{r}$ megváltozásra

$$u(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - u(\underline{r}) = \underline{a} \cdot (\underline{r} + \Delta \underline{r}) - \underline{a} \cdot \underline{r} = \underline{a} \cdot \Delta \underline{r} + 0 \cdot \Delta \underline{r}.$$

11. Tenzoralgebra

Az euklideszi teret önmagába leképező függvényeknek egy alapvető osztályával, a lineáris operátorokkal, a tenzorokkal, (a tenzor a rugalmasságtani alkalmazásokból kölcsönvett kifejezés, tensio = feszültség, latin) már a III. Kötet Ötödik fejezetében részletesen foglalkoztunk. Ott a tárgyalást az n -dimenziós valós E^n euklideszi térben végeztük. Most az alkalmazásokra való tekintettel a háromdimenziós közönséges euklideszi térben fogunk maradni. Ebben az E^3 térre kimondott eredmények érvényben maradása mellett még speciális - csak E^3 -ra jellemző és az alkalmazásokban fontos szerepet betöltő - összefüggések lépnek fel. A vektorokat jelölő betűket ebben a kötetben, eddig, kényelmi okokból csak egyszer húztuk alá. Ebben a pontban és helyenként a későbbiekben is a vektort kétszer húzzuk alá azért, hogy az adott bázisban öt reprezentáló oszlopvektortól megkülönböztessük.

A tenzorról szemléletes képet úgy kaphatunk, ha a tér $\underline{x}$ "tárgyvektorainak" halmazához hozzárendelt $\underline{y}$ "képvektorok" halmazát vizsgáljuk. A tenzor homogén linearitása miatt elegendő az E^3 térben tetszőlegesen rögzített $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ortonormált bázis vektoraihoz hozzárendelt képvektorok vizsgálata. Ugyanis, mint a III. Kötet 18. pontjában láttuk, az

$$\underline{a}_k = \underline{A} \underline{e}_k, \quad k = 1, 2, 3$$

jelöléssel egy tetszőleges $\underline{x} = \sum_{k=1}^3 x_k \underline{e}_k$ vektor $\underline{y}$ képvektora a lerögzített bázisban

$$\underline{y} = \underline{A} \underline{x} = \underline{A} \sum_{k=1}^3 x_k \underline{e}_k = \sum_{k=1}^3 x_k \underline{A} \underline{e}_k = \sum_{k=1}^3 x_k \underline{a}_k$$

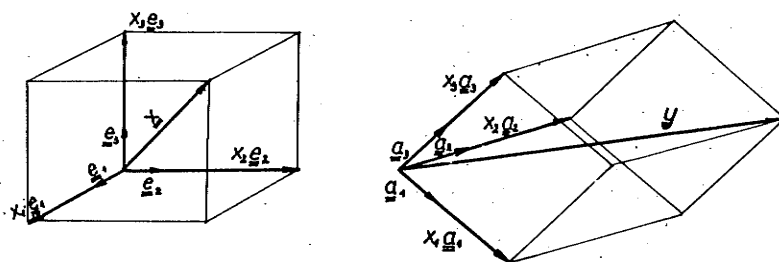
alakban írható fel. Ha az $\underline{a}_k$ vektorokat ismerjük, $\underline{y}$ -t is ismerjük. Az $\underline{a}_k$

vektorokat ezért - rögzített bázisban - a tenzor vektorkomponenseinek nevezzük. Ha

$$\underline{a}_k = \sum_{i=1}^3 a_{ik} \underline{e}_i,$$

akkor

$$\underline{y} = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k \right) \underline{e}_i.$$



11.1 ábra

Mint a III. Kötetben láttuk, rögzített bázisban minden A tenzorhoz egy A mátrixot rendelhetünk hozzá. A hozzárendelés egy-egyértelmű. Az A tenzorhoz tartozó A mátrix az előbbi jelölésekkel éppen az $\underline{A} = [a_{ik}]$ mátrix. A oszlopai tehát éppen az $\underline{a}_k$ vektoroknak az adott bázisban megfelelő oszlopvektorok. Jelben, ha az adott bázisban $\underline{A} \cong \underline{A}$ és $\underline{a}_k \cong \underline{a}_k$ $k=1,2,3$, akkor $\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3]$.

A tenzor tulajdonságai a bázis választásától független tulajdonságok ugyan, az alkalmazásokban a tenzor mégis leggyakrabban komponenseiben, ill. mátrix-alakban jelenik meg. Ezek a komponensek a választott bázistól függenek. Számunkra a tenzorok bázistól független tulajdonságai a legfontosabbak. Ezeknek a meghatározására két út kínálkozik. A tulajdonságokat, relációkat vagy bázismentesen értelmezzük, vagy ha komponensek segítségével értelmeztük, akkor meg kell mutatnunk, hogy ez a bázis-választástól független. Az alábbiakban mindkét módszert használjuk.

11.1 Példa. Egységtenzor. Az $\underline{\underline{E}}$ egységtenzor minden $\underline{r}$ vektorhoz önmagát rendeli:

$$\underline{\underline{E}} \underline{r} = \underline{r}.$$

Minden bázisban $\underline{\underline{E}} \approx \underline{\underline{E}}$, ahol $\underline{\underline{E}}$ a harmadrendű egységmátrix. $\underline{\underline{E}}$ szimmetrikus, mert

$$(\underline{r}_1, \underline{\underline{E}} \underline{r}_2) = (\underline{r}_1, \underline{r}_2) = (\underline{r}_2, \underline{r}_1) = (\underline{r}_2, \underline{\underline{E}} \underline{r}_1).$$

$(\underline{r}_1, \underline{r}_2)$ jelöli a két vektor skaláris szorzatát). $\underline{\underline{E}}$ -nek minden vektor sajátvektora, de csak egy sajátértéke van, $\lambda = 1$.

11.2 Példa. Nulltenzor. A $\underline{\underline{O}}$ nulltenzor minden vektorhoz a nullvektort rendeli: $\underline{\underline{O}} \underline{r} = \underline{0}$. Minden bázisban $\underline{\underline{O}} \approx \underline{\underline{O}}$, ahol $\underline{\underline{O}}$ a harmadrendű zérusmátrix.

A nulltenzornak minden vektor sajátvektora, de csak egy sajátértéke van, $\lambda = 0$.

11.3 Példa. Diád. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in E^3$ nem zérusvektorok. $\underline{a} \circ \underline{b}$ -vel jeleljük és diádnak nevezzük azt a tenzort, mely minden $\underline{r}$ vektorhoz az

$$(\underline{a} \circ \underline{b}) \underline{r} = \underline{a} (\underline{b}, \underline{r}) \quad (11.1)$$

vektort rendeli.

Könnyen belátható, hogy a diád valóban tenzor. Ugyanis a skaláris szorzat és a skalárral való szorzás tulajdonságai alapján minden $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ vektorra és c_1, c_2 számra

$$\begin{aligned} (\underline{a} \circ \underline{b}) (c_1 \underline{r}_1 + c_2 \underline{r}_2) &= \underline{a} (\underline{b}, c_1 \underline{r}_1 + c_2 \underline{r}_2) = \\ &= c_1 \underline{a} (\underline{b}, \underline{r}_1) + c_2 \underline{a} (\underline{b}, \underline{r}_2) = \\ &= c_1 (\underline{a} \circ \underline{b}) \underline{r}_1 + c_2 (\underline{a} \circ \underline{b}) \underline{r}_2. \end{aligned}$$

A (11.1) formulából kiolvasható az is, hogy az $\underline{a} \circ \underline{b}$ diád minden vektort a irányu vektorba viszi át, tehát elfajuló. E szerint $\underline{a}$ az $\underline{a} \circ \underline{b}$ diád sajátvektora, s a hozzá tartozó sajátérték az $(\underline{a}, \underline{b})$ skaláris szorzat. Ezenkívül - mivel a diád a $\underline{b}$ -re merőleges vektorokat a nullvektorba viszi át - a $\underline{b}$ -re merőleges vektorok is sajátvektorok 0 sajátértékkel. A $\underline{b}$ -re merőleges sík tehát "sajátsík". (2 dimenziós invariáns altér. Lásd III. Kötet, 18.4 Definíció.) Ebben a síkban kiválasztható két egymásra merőleges sajátvektor. Harmadik - ezekre merőleges - sajátvektor általában nincs, tehát a diád általában nem szimmetrikus tenzor. Ha azonban $\underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor szimmetrikus is: van három egymásra ortogonális sajátvektora.

Ha az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ortonormált bázisban

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \underline{e}_i, \quad \underline{b} = \sum_{j=1}^3 b_j \underline{e}_j, \quad \text{akkor}$$

$$(\underline{a} \circ \underline{b}) \underline{e}_k = \underline{a}(\underline{b}, \underline{e}_k) = b_k \underline{a} = \sum_{i=1}^3 a_i b_k \underline{e}_i, \quad k = 1, 2, 3$$

vagyis

$$\underline{a} \circ \underline{b} \cong \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

(V.ö. III. Kötet, (8.13)).

11.4 Példa. $\underline{a}$ kereszt. Legyen $\underline{a} \neq \underline{0}$ vektor. Azt a tenzort, mely minden $\underline{r}$ vektorhoz az $\underline{a} \times \underline{r}$ vektort rendeli, $\underline{a}$ keresztnek nevezzük. $\underline{a} \times$ valóban tenzor. Ez következik a vektoriális szorzat disztributivitásából és a III. Kötet, (2.10) formulájából: $\underline{a} \times (c_1 \underline{r}_1 + c_2 \underline{r}_2) = c_1 \underline{a} \times \underline{r}_1 + c_2 \underline{a} \times \underline{r}_2$ minden $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ vektorra és c_1, c_2 számra.

$\underline{a} \times$ minden $\underline{r}$ vektort $\underline{a}$ -ra merőleges vektorba viszi át. Az $\underline{a}$ -ra merőleges vektorok invariáns alteret képeznek, de ebben egyetlen sajátvektor sincs. Maga az $\underline{a}$ vektor sajátvektor $\lambda = 0$ sajátértékkel.

Ha az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ jobbrendszer alkotó ortonormált bázisban

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \underline{e}_i, \text{ akkor } \underline{a} \times \underline{e}_k = \sum_{i=1}^3 a_i (\underline{e}_i \times \underline{e}_k),$$

vagyis

$$\underline{a} \times \underline{e}_1 = -a_2 \underline{e}_3 + a_3 \underline{e}_2 \approx \begin{bmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{a} \times \underline{e}_2 = a_1 \underline{e}_3 - a_3 \underline{e}_1 \approx \begin{bmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{a} \times \underline{e}_3 = -a_1 \underline{e}_2 + a_2 \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ezek szerint

$$\underline{a} \times \approx \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11.3)$$

(11.3)-ból látható, hogy $\underline{a} \times$ mátrixa antiszimmetrikus mátrix. $\underline{a} \times$ el-fajuló tenzor, mátrixa szinguláris.

(11.3)-ból is látható, de közvetlenül megmutatjuk, hogy az $\underline{a} \times$ tenzor antiszimmetrikus (lásd III. Kötet, 20.1 Definíció). Ugyanis minden $\underline{r}_1$ és $\underline{r}_2$ vektorra a vegyesszorzat III. Kötet (2.14) tulajdonsága alapján

$$(\underline{r}_1, \underline{a} \times \underline{r}_2) = (\underline{r}_1 \underline{a} \underline{r}_2) = -(\underline{r}_2 \underline{a} \underline{r}_1) = -(\underline{r}_2, \underline{a} \times \underline{r}_1)$$

Ennek az állításnak a megfordítása is igaz. Érvényes a

11.1 Tétel.

Legyen $\underline{Z}$ antiszimmetrikus tenzor. Van egy és csak egy $\underline{a}$ vektor, hogy minden $\underline{r} \in E^3$ -ra

$$\underline{Z} \underline{r} = \underline{a} \times \underline{r},$$

vagyis

$$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{x}}.$$

Bizonyítás. Legyen az $\underline{\underline{e}}_1, \underline{\underline{e}}_2, \underline{\underline{e}}_3$ (jobbrendszert alkotó) ortonormált bázisban $\underline{\underline{Z}} \approx \underline{\underline{Z}} = [z_{ik}]$. $\underline{\underline{Z}}$ antiszimmetrikus mátrix, vagyis $z_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$ és $z_{ik} = -z_{ki}$, $i \neq k$. Vezessük be az $a_1 = z_{32} = -z_{23}$, $a_2 = z_{13} = -z_{31}$, $a_3 = z_{21} = -z_{12}$ jelöléseket. E jelölésekkel a $\underline{\underline{Z}}$ mátrix a (11.3) alakot veszi fel és minden $\underline{\underline{r}} \approx \underline{\underline{r}}$ vektorra

$$\underline{\underline{Z}} \underline{\underline{r}} \approx \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{r}} = \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{r}} \approx \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{r}}, \quad (11.4)$$

ahol $\underline{\underline{a}} = a_1 \underline{\underline{e}}_1 + a_2 \underline{\underline{e}}_2 + a_3 \underline{\underline{e}}_3$. Beláttuk, hogy a tetszőlegesen rögzített $\underline{\underline{e}}_k$, $k = 1, 2, 3$ bázisban található $\underline{\underline{Z}}$ - hez $\underline{\underline{a}}$ vektor úgy, hogy a (11.4) azonosság fennálljon. Be kell bizonyítanunk, hogy $\underline{\underline{a}}$ választása nem függ a bázistól. Legyen $\underline{\underline{e}}_k$, $k = 1, 2, 3$ egy másik ortonormált bázis és $\underline{\underline{M}}$ az előző, ill. az utóbbi bázis közötti transzformáció ortogonális mátrixa. Legyen továbbá az új bázisban $\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}}$ ill. $\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{a}}$. Ekkor (lásd III. Kötet, (17.23), ill. (18.16))

$$\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{M}}' \underline{\underline{a}}, \quad \text{ill.} \quad \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{M}}' \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{M}},$$

és minden $\underline{\underline{r}} \approx \underline{\underline{r}} \approx \underline{\underline{r}}$ vektorra (III. Kötet, (17.19) felhasználásával)

$$\underline{\underline{Z}} \underline{\underline{r}} \approx (\underline{\underline{M}}' \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{M}}) (\underline{\underline{M}}' \underline{\underline{r}}) = \underline{\underline{M}}' (\underline{\underline{Z}} \underline{\underline{r}}) = \underline{\underline{M}}' (\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{r}}) = \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{r}},$$

ahol $\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{r}} \approx \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{r}}$ az új bázisban. Mivel azonban az új bázisban $\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{r}} \approx \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{r}}$, azt kapjuk, hogy $\underline{\underline{Z}} \underline{\underline{r}} = \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{r}}$, ahol $\underline{\underline{a}} \approx \underline{\underline{a}}$ az új bázisban. Az egyértelműség is könnyen belátható. Tegyük fel ugyanis, hogy $\underline{\underline{Z}}$ - hez két vektor tartozik úgy, hogy fennáll a

$$\underline{\underline{Z}} \underline{\underline{r}} = \underline{\underline{a}}_1 \times \underline{\underline{r}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{r}} = \underline{\underline{a}}_2 \times \underline{\underline{r}}$$

azonosság. Kivonással és rendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{0}} = (\underline{\underline{a}}_1 - \underline{\underline{a}}_2) \times \underline{\underline{r}}$$

minden $\underline{r}$ vektorra. Ez csak úgy lehetséges, ha $\underline{a}_1 - \underline{a}_2 = \underline{0}$, tehát $\underline{a}_1 = \underline{a}_2$.!

11.1 Definíció.

Legyen $\underline{Z}$ antiszimmetrikus tenzor és $\underline{a}$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\underline{Z} = \underline{a} \times$; az $\underline{a}$ vektor kétszeresét, a $\underline{w} = 2 \underline{a}$ vektort $\underline{Z}$ vektorinvariánsának nevezzük. Másszóval a $\underline{Z}$ antiszimmetrikus tenzor vektorinvariánsa az a $\underline{w}$ vektor, melyre fennáll a

$$\underline{Z} \underline{r} = -\frac{1}{2} \underline{w} \times \underline{r} \quad (11.5)$$

azonosság.

Tudjuk (lásd III. Kötet, 20.2 Tétel), hogy minden tenzor egyértelműen felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor összegére.

11.2 Definíció.

Egy tetszőleges tenzor vektorinvariánsának a tenzor antiszimmetrikus részének vektorinvariánsát nevezzük.

11.5 Példa. Tekintsük azt az $\underline{M}$ izometrikus tenzort (lásd III. Kötet, 20.2 Definíció), melynek mátrixa az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisban

$$\underline{M} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ennek antiszimmetrikus része

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

tehát vektorinvariánsának fele

$$\underline{a} = \frac{1}{3} (2 \underline{i} + \underline{k}) .$$

Számolással meggyőződhetünk arról, hogy $\underline{a}$ egyúttal $\underline{M}$ sajátvektora is $\lambda = 1$ sajátértékkel, ($\underline{M} \underline{a} = \underline{a}$), vagyis mivel $\underline{M}$ egy merevtest-szerű forgatást jelent, ezért $\underline{a}$ a forgástengely irányvektora. Ugyancsak meggyőződ-

hetünk arról is, hogy $\underline{M}$ az $\underline{a}$ és $\underline{i}$ vektorok által kifeszített síkot az $\underline{a}$ és, $\underline{a}_1 = \frac{1}{3} (2\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k})$ által ($\underline{a}_1$ az $\underline{M}$ tenzor első vektorkomponense) kifeszített síkba képezi le. Ebből az elfordulás szöge is megállapítható. A tárgysík normálisa ugyanis $\underline{n}_1 = \underline{a} \times \underline{i} = \frac{1}{3} \underline{j}$, a képsík normálisa

$$\underline{n}_2 = \underline{a} \times \underline{a}_1 = \frac{1}{9} (-\underline{i} - 2\underline{j} + 2\underline{k}); \quad \cos \alpha = \frac{(\underline{n}_1, \underline{n}_2)}{|\underline{n}_1| |\underline{n}_2|} = -\frac{2}{3}.$$

11.2 Tétel.

Legyen az $\underline{A}$ tenzor vektorinvariánsa $\underline{w}$; ekkor minden $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorra fennáll az

$$(\underline{a}, \underline{w}, \underline{b}) = (\underline{a}, \underline{A}, \underline{b}) - (\underline{b}, \underline{A}, \underline{a}) \quad (11.6)$$

azonosság, ahol a baloldalon a három vektor vegyesszorzata áll.

Bizonyítás. Legyen $\underline{A} = \underline{S} + \underline{Z}$, ahol $\underline{S}$ szimmetrikus, $\underline{Z}$ pedig antiszimmetrikus tenzor (lásd III. Kötet, 20.2 Tétel).

$$(\underline{a}, \underline{A}, \underline{b}) = (\underline{a}, \underline{S}, \underline{b}) + (\underline{a}, \underline{Z}, \underline{b})$$

$$(\underline{b}, \underline{A}, \underline{a}) = (\underline{b}, \underline{S}, \underline{a}) + (\underline{b}, \underline{Z}, \underline{a}).$$

Vonjuk ki az első azonosságból a másodikat:

$$(\underline{a}, \underline{A}, \underline{b}) - (\underline{b}, \underline{A}, \underline{a}) = (\underline{a}, \underline{S}, \underline{b}) - (\underline{b}, \underline{S}, \underline{a}) + (\underline{a}, \underline{Z}, \underline{b}) - (\underline{b}, \underline{Z}, \underline{a}).$$

Felhasználva a szimmetrikus, ill. az antiszimmetrikus tenzor definícióját (III. Kötet, (19.3) ill. (20.1)), továbbá (11.5)-öt

$$(\underline{a}, \underline{A}, \underline{b}) - (\underline{b}, \underline{A}, \underline{a}) = 2 (\underline{a}, \underline{Z}, \underline{b}) = (\underline{a}, \underline{w} \times \underline{b}).$$

Az alkalmazásokban igen fontos szerep jut tenzor vektorinvariánsának és az alábbiakban definiálásra kerülő skalárinvariánsoknak. Valamely tenzor sajátértékeit bázistól függetlenül értelmeztük, a sajátértékek (a komplex sajátértékek is) a bázistól független "invariánsok" (lásd III. Kötet, 18.4, 18.5 Tétel és 18.6 Következmény). Ezen azt értjük, hogy a tenzort különböző bázisokban reprezentáló mátrixok sajátértékeinek halmaza (multiplicitásokkal együtt) ugyanaz. A tenzor sajátértékeinek halmaza (multiplicitásokkal együtt) a tenzornak a bázistól független invariánsa, s ugyancsak invariáns

a multiplicitásokkal vett sajátértékek bármely szimmetrikus kifejezése is. Ezek közül a legfontosabbakra vonatkozik a következő

11.3 Definíció.

Legyenek az $\underline{A}$ tetszőleges tenzor sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, (ezek között egyenlők, ill. komplexek is lehetnek); az

$$i_I = \text{Sp } \underline{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (11.7)$$

számot a tenzor első skalárinvariánsának, (az $\underline{A}$ tenzor nyomának, spurjának), az

$$i_{II} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \quad (11.8)$$

számot $\underline{A}$ második skalárinvariánsának, az

$$i_{III} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (11.9)$$

számot $\underline{A}$ harmadik skalárinvariánsának nevezzük.

11.3 Tétel.

Jelöljük az $\underline{A}$ tenzor $\underline{A} \approx \underline{A}$ mátrixának elemeit valamely rögzített ortonormált bázisban a_{ik} -val, az ezekhez tartozó előjeles aldeterminánsokat D_{ik} -val, $\underline{A}$ karakterisztikus egyenletét $(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$ -val, ennek $(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$ -val ennek gyökei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ -mal; akkor

$$i_I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad (11.10)$$

$$i_{II} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = D_{11} + D_{22} + D_{33}, \quad (11.11)$$

$$i_{III} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det \underline{A}. \quad (11.12)$$

Bizonyítás. A karakterisztikus egyenlet részletes felírása, a determináns (első sor szerinti) kifejtése, annak λ hatványai szerint való rendezése után, a Vietà-formulák (III. Kötet, 7.8 Tétel) alkalmazásával az állítás adódik.!

Megjegyezzük, hogy bár a tenzor sajátértékei között komplex számok is lehetnek, mindhárom skalárinvariáns valós szám. Ez (11.10)-(11.12)-ből azonnal következik, hiszen a tenzor mátrixa valós elemű. Következik azonban a (11.7)-(11.9) definiáló formulákból is, ha figyelembe vesszük, hogy vagy mindhárom sajátérték valós, vagy az egyik valós, a másik kettő pedig konjugált komplex.

11.4 Következmény.

A tenzor első skalárinvariánsa megegyezik szimmetrikus részének első skalárinvariánsával.

A tenzor harmadik skalárinvariánsának szemléletes jelentése van. Rögzített ortonormált bázisban a bázisvektorok egy T_0 kockát feszítenek ki, melynek térfogata $\text{mes } T_0 = 1$. Ezt az $\underline{A} \approx \underline{A}$ tenzor egy $\underline{A} (T_0)$ parallelepipedonra képezi le (lásd 11.1 ábrát) melynek térfogata a tenzor vektor-komponenseinek vegyesszorzata: $\text{mes } \underline{A} (T_0) = (\underline{a}_1 \underline{a}_2 \underline{a}_3) = \det \underline{A} = i_{III}$. A tetszőleges $\underline{a} \approx \underline{a}$, $\underline{b} \approx \underline{b}$, $\underline{c} \approx \underline{c}$ nem komplanáris vektorok által kifeszített T parallelepipedon térfogata

$$\text{mes } T = |(\underline{a} \underline{b} \underline{c})| = |\det \underline{B}|, \text{ ahol } \underline{B} = [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}].$$

A képvektorok által kifeszített $\underline{A} (T)$ "képparallelepipedon" térfogata:

$$\begin{aligned} \text{mes } \underline{A} (T) &= |(\underline{A} \underline{a}, \underline{A} \underline{b}, \underline{A} \underline{c})| = |\det [\underline{A} \underline{a}, \underline{A} \underline{b}, \underline{A} \underline{c}]| = \\ &= |\det (\underline{A}, \underline{B})| = |\det \underline{A} \det \underline{B}| = |\det \underline{A}| \text{mes } T. \end{aligned}$$

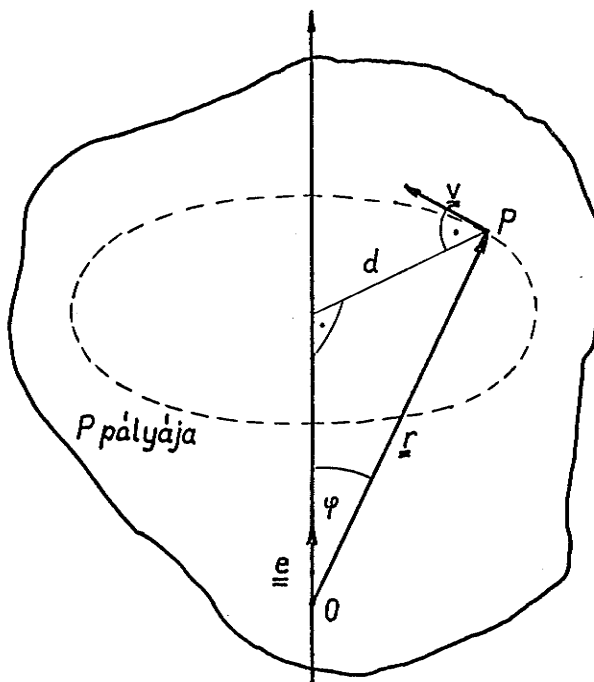
Tehát

$$|i_{III}| = |\det \underline{A}| = \frac{\text{mes } \underline{A} (T)}{\text{mes } T},$$

a térfogattorzulás mértéke. (Ha i_{III} pozitív, akkor a tenzor jobbrendszer-tartó, vagyis jobbrendszert alkotó vektorokat jobbrendszerbe viszi át; ha i_{III} negatív, akkor jobbrendszert alkotó vektorok képei balrendszert alkotnak).

11.6 Példa. Antiszimmetrikus tenzor első, ill. harmadik skalárinvariánsa nulla, mert a fődiagonálisában csupa nulla áll, illetve mert a 11.1 Tétel szerint az antiszimmetrikus tenzor egy rögzített vektorral való vektorlális szorzásnak felel meg, és így minden vektort egy síkba visz át, elfajuló, determinánsa nulla.

11.7 Példa. Forogjon a merev test az origón áthaladó e egyenes körül állandó ω szögsebességgel. Az e egyenes egység irányvektorát $\underline{e}$ - t irányítsuk úgy, hogy $\underline{e}$ -vel szembe nézve a merev test pontjai pozitív irányú forgást végezzenek a tengely körül. A merev test tetszőleges $\underline{r}$ helyvektoru pontjának (vonalmonti) sebessége az ω szögsebesség és a tengelytől mért távolság (lásd 11.2 ábra) szorzata, vagyis $\omega |\underline{r}| \sin \varphi$, ahol φ az $\underline{r}$ és $\underline{e}$ vektorok által bezárt szög. Az $\underline{r}$ pont $\underline{v}$ sebességvektora $\underline{e}$ és $\underline{r}$ síkjára merőleges és az $\underline{e}$, $\underline{r}$, $\underline{v}$ vektorok jobbrendszert alkotnak. Az $\underline{\omega} = \omega \underline{e}$ vektort szögsebesség vektornak nevezzük.



11.2 ábra

Az előbbiek szerint

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}.$$

Az $\underline{\omega} \times$ tenzor tehát a forgó merev test minden pontjához (a pont helyvektorához) hozzárendeli a pontbeli sebességvektort.

11.8 Példa. Ebben a példában megmutatjuk, hogyan lehet egy rugalmas test állapotát a test tetszőleges pontjában egy tenzorral az ún. "feszültségtenzorral" megadni. Legyen $\underline{r}_0$ a test egy tetszőleges pontja és S az $\underline{r}_0$ ponton áthaladó, kis, mérhető területű siktartomány, melynek egység normálvektora $\underline{n}$.

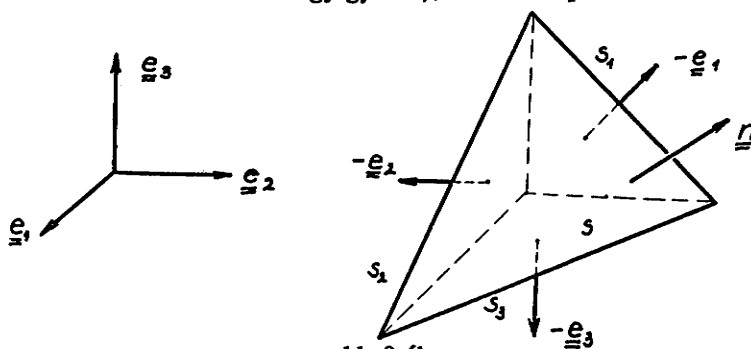
A rugalmas igénybevételnek kitett testnek az a része, mely felé $\underline{n}$ mutat, az S tartomány egységnyi területű darabjára $\underline{p}(\underline{n})$ erővel hat. Ezt a $\underline{p}(\underline{n})$ erőt feszültségnek nevezzük ($\underline{p}(\underline{n})$ általában nem párhuzamos $\underline{n}$ -nel). A teljes S síklapra ható rugalmas erő mes $S \cdot \underline{p}(\underline{n})$. Vegyük fel a térben az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ortonormált bázist, és legyen S most olyan $\underline{r}_0$ -on áthaladó háromszög-lap, melynek oldalai párhuzamosak a "koordinátasíkokkal". Egészítsük ki S -et egy tetraéderré úgy, hogy a tetraéder három S -től különböző lapja rendre párhuzamos legyen az $\underline{e}_1, \underline{e}_2$, az $\underline{e}_2, \underline{e}_3$, ill. az $\underline{e}_3, \underline{e}_1$ vektorok síkjával (lásd 11.3 ábra). A tetraéder "hátsó", "baloldali", ill. "alsó" lapja legyen S_1, S_2, S_3 . Ezeknek a tetraéderből kifelé mutató normál egységvektorai rendre $-\underline{e}_1, -\underline{e}_2$, ill. $-\underline{e}_3$. A tetraéder által határolt térrészt jelöljük V -vel, V térfogatát mes $_3 V$ -vel. A tetraéder S_k lapjára a rugalmas testnek a tetraéderen kívüli része a $-$ mes $S_k \underline{p}_k$ erővel hat, ahol $\underline{p}_k = \underline{p}(\underline{e}_k)$ az $\underline{e}_k$ normálvektoru síkdarabon a feszültség. Legyen a test sűrűsége ρ , a testre ható tömegerő (nehézségi erő) $\underline{f}$ és a tetraéder gyorsulása $\underline{a}$. Ekkor a mozgásegyenlet

$$\underline{f} \rho \text{ mes}_3 V + \text{mes } S \underline{p}(\underline{n}) - \sum_{k=1}^3 \text{mes } S_k \underline{p}_k = \underline{a} \rho \text{ mes}_3 V.$$

Az S_k háromszög az S háromszög vetülete az $\underline{e}_k$ normálvektoru síkra, ezért

$$\text{mes } S_k = \text{mes } S \cos(\underline{n}, \underline{e}_k), k=1, 2, 3.$$

Ezt az összefüggést később általánosabb esetre igazoljuk (lásd a 14.2 Segéd-tételt és az utána következő megjegyzést); ebben a speciális esetben az



11.3 ábra

olvasó maga is könnyen igazolhatja. Így a mozgásegyenlet az

$$(\underline{f} - \underline{a}) \cdot \underline{S} \cdot \text{mes}_3 V + \text{mes } S \cdot (\underline{p} \cdot (\underline{n}) - \sum_{k=1}^3 \underline{p}_k \cos(\underline{n}, \underline{e}_k)) = 0$$

alakot vesz fel. Osszuk el az utóbbi egyenletet $\text{mes } S$ -sel és zsugorodjék az S háromszög az $\underline{r}_0$ pontra úgy, hogy a háromszög oldalainak aránya változatlan maradjon. Ekkor természetesen a V tetraéder-test is $\underline{r}_0$ -ra zsugorodik és mivel $\text{mes}_3 V = \frac{1}{3} h \text{ mes } S$, ahol h a tetraéder zérushoz tartó magassága

$$\lim \frac{\text{mes}_3 V}{\text{mes } S} = 0.$$

Azt kapjuk tehát, hogy

$$\underline{p} \cdot (\underline{n}) = \sum_{k=1}^3 \underline{p}_k \cos(\underline{n}, \underline{e}_k). \quad (11.13)$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $\underline{p} \approx \underline{p}$,

$$\underline{p}_k = \sum_{i=1}^3 p_{ik} \underline{e}_i, \quad \underline{n} = \sum_{k=1}^3 n_k \underline{e}_k,$$

ahol $n_k = \cos(\underline{n}, \underline{e}_k)$ az $\underline{n}$ egységvektor iránykoszinusza, vagyis

$$\underline{p}_k \approx \underline{p}_k = \begin{bmatrix} p_{1k} \\ p_{2k} \\ p_{3k} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \quad \underline{n} \approx \underline{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix},$$

továbbá

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} . \quad (11.14)$$

E jelölésekkel az adott bázisban az $\underline{n}$ egység normálvektoru síkállás-hoz tartozó $\underline{p}$ feszültség

$$\underline{p} = \underline{P} \underline{n} . \quad (11.15)$$

Az adott bázisban joggal nevezhetjük a $\underline{P}$ mátrixot feszültségmátrix-nak, mivel minden $\underline{n}$ egységvektorra $\underline{P} \underline{n}$ az $\underline{n}$ állásu síkra ható feszültség. $\underline{P}$ oszlopvektorai a bázisvektorok által meghatározott síkállásokra ható feszültségek. Megmutatjuk, hogy $\underline{P}$ egy olyan tenzor mátrixa, amely bázistól függetlenül jellemzi a test adott pontjában a feszültségállapotot. Vezessük be az új $\underline{\tilde{e}}_1, \underline{\tilde{e}}_2, \underline{\tilde{e}}_3$ ortonormált bázist. Ebben a bázisban az előbbi levezetés lépésről lépésre megismételhető. Legyen $\underline{q}_k$ az $\underline{\tilde{e}}_k$ -hoz tartozó feszültség; ekkor a $\underline{p}(\underline{n})$ -et előállító (11.13)-mal analóg összefüggés

$$\underline{p}(\underline{n}) = \sum_{k=1}^3 \underline{q}_k \cos(\underline{n}, \underline{\tilde{e}}_k) . \quad (11.16)$$

A régről az új bázisra való áttérés transzformáció mátrixa legyen az $\underline{M}$ ortogonális mátrix (lásd III. Kötet, (17.17)). Az új bázisban legyen $\underline{\tilde{p}} = \underline{M} \underline{p}$, $\underline{\tilde{n}} = \underline{M} \underline{n}$, $\underline{q}_k = \underline{\tilde{q}}_k$ és a (11.14) -gyel analóg mátrix $\underline{\tilde{Q}} = [\underline{\tilde{q}}_1, \underline{\tilde{q}}_2, \underline{\tilde{q}}_3]$. Ekkor (11.16)-nak (11.15)-tel analóg átírása

$$\underline{\tilde{p}} = \underline{\tilde{Q}} \underline{\tilde{n}} . \quad (11.17)$$

Azonban a III. Kötet, (17.23) transzformációs formula alapján

$$\underline{\tilde{p}} = \underline{M}' \underline{p}, \quad \underline{\tilde{n}} = \underline{M}' \underline{n} .$$

Az utóbbi kifejezéseket (11.17)-be helyettesítve

$$\underline{M}' \underline{p} = \underline{\tilde{Q}} \underline{M}' \underline{n} ,$$

vagy $\underline{M}$ -mel balról szorozva és III. Kötet, (17.22)-t felhasználva

$$\underline{P} = \underline{M} \widetilde{\underline{Q}} \underline{M}' \underline{n}.$$

Vonjuk ki az utóbbi egyenlőséget (11.15)-ből, kapjuk, hogy

$$(\underline{P} - \underline{M} \widetilde{\underline{Q}} \underline{M}') \underline{n} = 0$$

minden $\underline{n}$ egységvektorra, vagyis a zárójelben álló mátrix a zérusmátrix. Ezek szerint $\underline{P} = \underline{M} \widetilde{\underline{Q}} \underline{M}'$, vagy balról $\underline{M}'$ -vel és jobbról $\underline{M}$ -mel szorozva

$$\widetilde{\underline{Q}} = \underline{M}' \underline{P} \underline{M}.$$

Az utóbbi egyenlőséget III. Kötet, (18.16)-tal összehasonlítva azt látjuk, hogy $\underline{P}$ ill. $\widetilde{\underline{Q}}$ ugyanazon tenzor koordinátamátrixa a régi, ill. az új bázisban. Ezek után mondhatjuk, hogy a rugalmas test minden pontjában valóban létezik egy bázistól független, kizárólag a test feszültségi állapotától függő (ill. azt meghatározó) $\underline{P}$ feszültségtenzor. Minden $\underline{n}$ egységvektorra a $\underline{Pn}$ vektor az $\underline{n}$ által adott síkálláshoz tartozó feszültség vektor.

12. Vektor-vektor függvények. A deriválttenzor

A fizikai (mechanikai) jelenségek térbeli leírására alkalmas függvények közül az előző pontban a lineáris operátorokai (tenzorokat) vizsgáltuk. Igen fontosak azonban az euklideszi teret önmagába leképező függvények közül azok is, melyek maguk nem lineárisak ugyan, de lineárisakkal megközelíthetők. Ebben a pontban a nem homogén lineáris vektor-vektor függvényekkel, vektormezőkkel foglalkozunk. Ilyen függvények írják le pl. rögzített időpontban a folyadékok, gázok áramlás-viszonyait, az elektromos, mágneses, gravitációs erőtereket stb.

A matematikának a vektorváltozós függvényekkel foglalkozó ága, a vektoranalízis, a matematika és a mechanika kapcsolatának klasszikus területe. Problémáiról - mint az előbb felsorolt példák is mutatják - többnyire könnyen felismerhető a mechanikai származás.

További tárgyalásaink során általában lerögzítjük az origót és a pontokat helyvektoraikkal azonosítjuk.

Legyen D a közönséges tér pontjainak (helyvektorainak) egy részhalma: a $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ függvényt vektor-vektor függvénynek (vektormezőnek, vektoreloszlásnak) nevezzük, ha minden $\underline{r} \in D$ vektorhoz pontosan egy $\underline{v}(\underline{r})$ vektort rendel hozzá.

Ha a térben lerögzítjük az O origó mellett az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ ortonormált

bázist és az ezen alapuló Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert, akkor az $\underline{r}$ helyvektor egyértelműen előállítható $\underline{r} = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3$, és a $\underline{v}$ vektor a

$$\begin{aligned}\underline{v}(\underline{r}) &= v_1(\underline{r})\underline{e}_1 + v_2(\underline{r})\underline{e}_2 + v_3(\underline{r})\underline{e}_3 = \\ &= v_1(x, y, z)\underline{e}_1 + v_2(x, y, z)\underline{e}_2 + v_3(x, y, z)\underline{e}_3 = \underline{v}(x, y, z)\end{aligned}$$

alakban. Az itt szereplő $v_1(\underline{r})$, $v_2(\underline{r})$, $v_3(\underline{r})$ függvények a 10. pontból ismert skalár-vektor függvények (adott bázisban). Így azt is mondhatjuk, hogy rögzített koordináta-rendszerben egy vektor-vektor függvény megadása három darab háromváltozós (vagy skalár-vektor) függvény megadásával ekvivalens. Itt is hangsúlyozzuk azonban hogy a $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ függvény megadása az adott fizikai mennyiség térbeli eloszlását (és az origó megválasztását) tükrözi, ezzel szemben a $v_1(\underline{r})$, $v_2(\underline{r})$, $v_3(\underline{r})$ függvényhármass a koordináta-rendszer esetlegességét is.

A vektor-vektor függvények szemléltetésére azok a görbék a legalkalmasabbak, melyek érintői a tér minden pontjában párhuzamosak a görbeponthoz rendelt vektorral. Ezeket a görbéket vektorvonalaknak nevezzük. A vektorvonalak csupán a vektormező irányáról adnak szemléletes képet. A vektormezőnek nemcsak irányáról, de nagyságáról is szemléletes képet adnak az ún. erővonalak (áramvonalak). Ezekhez a következőképpen jutunk el: a vektorvonalak közül csak néhányat "rajzolunk meg" olyan módon, hogy a megmaradó vektorvonalak (erővonalak, áramvonalak) sűrűsége arányos legyen a vektormező nagyságával. Ezen azt értjük, hogy ha az $\underline{r}_0$ ponthoz rendelt vektor $\underline{v}_0 = \underline{v}(\underline{r}_0)$, akkor a $\underline{v}_0$ -ra merőleges egységnyi területű felületdarabon $|\underline{v}_0|$ számú erővonal (áramvonal) halad át.

Nem homogén-lineáris vektor-vektor függvényekkel már eddig is találkoztunk. Az $u(\underline{r})$ deriválható skalár-vektor függvények deriváltvektora, a gradiens vektor ugyanis a hely függvénye, vagyis vektor-vektor függvény.

12.1 Példa. A $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{1}{|\underline{r}|^3} \underline{r}$ (V.ö. a (10.18) formulával) vektor-vektor

függvény az origóban elhelyezett, pontszerű, egységnyi pozitív elektromos töltés által keltett erőter térerősségét írja le, vagyis $\underline{v}(\underline{r})$ az az erő, mellyel az erőter az $\underline{r}$ pontba helyezett pozitív egységnyi töltést taszítja. Jellemző és fontos tulajdonsága, hogy a (10.18) formulával leírt gradiens-függvény (-1) -szerese. Abszolút értéke

$$|\underline{v}| = \frac{1}{|\underline{r}|^2}, \quad (12.1)$$

vagyis az erő a távolság négyzetével fordítva arányos. $\underline{v} \parallel \underline{r}$ miatt a vektorvonalak origóból kiinduló félegyeneseek. Az erővonalak sűrűsége olyan, hogy az origó középpontú 1 cm sugaru gömb felületén 4π számú erővonal halad át. Nagyon fontos és jellemző tulajdonsága, hogy bármilyen $R > 0$ -ra az origó középpontú, R sugaru gömb felületén az origóban elhelyezett töltésből kiinduló 4π számú erővonal halad át. Az erővonalak száma ugyanis $|\underline{v}|$ szorozva a gömb felszínével, vagyis $\frac{1}{R^2} 4R^2\pi = 4\pi$. Az erővonalak száma R növekedésével nem szaporodik és nem csökken.

12.2 Példa.
$$\underline{v}(\underline{r}) = c \frac{\underline{e}_3 \times \underline{r}}{|\underline{r}|^2} \quad (12.2)$$

rögzített koordinátarendszerben a z tengely mentén haladó, végtelen hosszúnak gondolt vezető mágneses terét írja le, ha a vezetőben elektromos áram folyik. Ez a vektormező a z -tengelyre merőleges síkokon azonos eloszlást mutat, ezért elegendő a $z = 0$ síkban vizsgálni.

$$\underline{v} = c \frac{-y \underline{e}_1 + x \underline{e}_2}{x^2 + y^2} \quad (12.3)$$

$$|\underline{v}| = \frac{c}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ a } z \text{ tengelytől mért távolsággal fordítva arányos. } \underline{v} \perp \underline{r}$$

és $\underline{v} \perp \underline{e}_3$ miatt vektorvonalai "vízszintes" koncentrikus körök, melyek középpontja a z tengelyen van. Az erővonalak sűrűsége az origótól távolodva csökken.

12.1 Definíció.

Legyen az $\underline{a}$ pont a $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ vektor-vektor függvény D értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy $\underline{v}$ határértéke az $\underline{a}$ pontban $\underline{b}$, szimbolikus jelöléssel

$$\lim_{\underline{r} \rightarrow \underline{a}} \underline{v}(\underline{r}) = \underline{b} \quad ,$$

ha $\underline{b}$ minden $K_{\underline{b}}$ környezetéhez van $\underline{a}$ -nak olyan $K_{\underline{a}}$ környezete, hogy minden

$$\underline{r} \in (K_{\underline{a}} \setminus \{\underline{a}\}) \cap D \text{-re } \underline{v}(\underline{r}) \in K_{\underline{b}}.$$

12.2 Definíció.

Azt mondjuk, hogy a $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ függvény az $\underline{a} \in D$ helyen folytonos, ha létezik a $\lim_{\underline{r} \rightarrow \underline{a}} \underline{v}(\underline{r})$ határérték, és $\underline{v}(\underline{a}) = \lim_{\underline{r} \rightarrow \underline{a}} \underline{v}(\underline{r})$.

A határértéknek és folytonosságnak az egyparaméteres vektor-skalár függvények mintájára ε -nal és δ -val való megfogalmazását, a vektor-vektor függvények összege, különbsége, skalárral való, valamint skaláris és vektoriális szorzata folytonosságának bizonyítását az olvasóra bizzuk.

Mint a vektor-skalár függvényeknél, itt is érvényes, hogy $\underline{v}(\underline{r})$ folytonosságából következik koordinátáinak folytonossága és viszont.

12.3 Definíció.

Azt mondjuk, hogy a $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ a $H \subset D$ halmazon folytonos, ha $\underline{v}(\underline{r})$ folytonos minden $\underline{r} \in H$ helyen.

Az előzőekben tárgyalt függvénytípusoknál, az egy- és többváltozós valós függvényeknél, a vektor-skalár és a skalár-vektor függvényeknél fontos kérdés volt az, hogy vajon egy pont környezetében a függvény közelíthető-e lineáris függvénnyel (a függvény megváltozása homogén lineáris függvény-nyel), vagyis differenciálható-e. A vektor-vektor függvények között is különösen fontosak azok, melyek lineáris vektor-vektor függvénnyel megközelíthetők: deriválhatók.

12.4 Definíció.

A $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ -vektor-vektor függvényt a D tartomány $\underline{r}_0 \in D$ torlódási pontjában differenciálhatónak (deriválhatónak) mondjuk, ha megváltozása tetszőleges $(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) \in D$ -re a következő alakban írható fel:

$$\Delta \underline{v} = \underline{v}(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - \underline{v}(\underline{r}_0) = \underline{\underline{A}} \Delta \underline{r} + \underline{\underline{\omega}}(\Delta \underline{r}) \Delta \underline{r} \quad (12.4)$$

ahol az $\underline{\underline{A}}$ tenzor nem függ $\Delta \underline{r}$ -től és a $\underline{\underline{\omega}}$ tenzor a zérustenzorhoz tart, $\underline{\underline{\omega}}(\Delta \underline{r}) \rightarrow \underline{0}$, ha $\Delta \underline{r} \rightarrow \underline{0}$.

Ekkor $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\underline{r}_0)$ -t a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény $\underline{r}_0$ -beli deriválttenzorának nevezzük. Jelölések:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{v}}' = \frac{d\underline{\underline{v}}}{d\underline{\underline{r}}}.$$

A $\frac{d\underline{\underline{v}}}{d\underline{\underline{r}}}$ szimbólum annak ellenére használatos a derivált jelölésére, hogy a $\underline{\underline{\Delta r}}$ -rel való osztás nem értelmezhető.

Meg kell mondanunk, mit értünk azon, hogy a $\underline{\underline{\Delta r}}$ vektortól függő $\underline{\underline{(\ominus)}}$ tenzor zérushoz tart, ha $\underline{\underline{\Delta r}}$ tart zérushoz. Ezen a következőt értjük: minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $0 < |\underline{\underline{\Delta r}}| < \delta(\varepsilon)$, akkor minden $\underline{\underline{e}}$ egységvektorra $|\underline{\underline{(\ominus)}}(\underline{\underline{\Delta r}})\underline{\underline{e}}| < \varepsilon$. Ennek a meghatározásnak az alapján a 12.4 Definícióban a (12.4) egyenlőség jobb oldalának második tagjára tett kikötés a következőképpen is megfogalmazható. $\underline{\underline{(\ominus)}}(\underline{\underline{\Delta r}})\underline{\underline{\Delta r}}$ olyan vektor, mely $|\underline{\underline{\Delta r}}|$ -rel osztva is zérushoz tart, ha $\underline{\underline{\Delta r}}$ tart zérushoz.

A (12.4) formula jobb oldalának első tagját, a növekmény főrészt, $\underline{\underline{v}}$ differenciáljának nevezzük és $d\underline{\underline{v}}$ -vel jelöljük:

$$d\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Delta r}},$$

(vagy a $d\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{\Delta r}}$ jelöléssel $d\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{A}} d\underline{\underline{r}}$).

Bebizonyítjuk, hogy ha a $\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}})$, $\underline{\underline{r}} \in D$ vektor-vektor függvény az $\underline{\underline{r}}_0$ pontban deriválható, akkor deriválttenzora egyértelműen meg van határozva. Tegyük fel ugyanis, hogy

$$\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}}_0 + \underline{\underline{\Delta r}}) - \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}}_0) = \underline{\underline{A}}_1 \underline{\underline{\Delta r}} + \underline{\underline{(\ominus)}}_1 \underline{\underline{\Delta r}} \text{ és}$$

$$\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}}_0 + \underline{\underline{\Delta r}}) - \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}}_0) = \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{\Delta r}} + \underline{\underline{(\ominus)}}_2 \underline{\underline{\Delta r}},$$

ahol $\underline{\underline{(\ominus)}}_1 \rightarrow \underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{(\ominus)}}_2 \rightarrow \underline{\underline{0}}$, ha $\underline{\underline{\Delta r}} \rightarrow \underline{\underline{0}}$. Legyen $\underline{\underline{e}}$ tetszőlegesen rögzített egységvektor és $\underline{\underline{\Delta r}} = \Delta s \underline{\underline{e}}$. Ekkor $\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}}_0 + \Delta s \underline{\underline{e}}) - \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}}_0) = \Delta s \underline{\underline{A}}_1 \underline{\underline{e}} + \Delta s \underline{\underline{(\ominus)}}_1 \underline{\underline{e}} = \Delta s \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{e}} + \Delta s \underline{\underline{(\ominus)}}_2 \underline{\underline{e}}$, amiből $\Delta s \neq 0$ -val való osztás és rendezés után

$$\underline{\underline{0}} = (\underline{\underline{A}}_1 - \underline{\underline{A}}_2) \underline{\underline{e}} + (\underline{\underline{(\ominus)}}_1 - \underline{\underline{(\ominus)}}_2) \underline{\underline{e}}$$

következik. Ha most $\Delta s \rightarrow 0$, akkor $\underline{\underline{(\ominus)}}_1 - \underline{\underline{(\ominus)}}_2 \rightarrow \underline{\underline{0}}$ tehát $(\underline{\underline{A}}_1 - \underline{\underline{A}}_2) \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{0}}$. Mivel $\underline{\underline{e}}$ tetszőleges volt, ezért $\underline{\underline{A}}_1 - \underline{\underline{A}}_2$ csak a zérustenzor lehet, vagyis $\underline{\underline{A}}_1 = \underline{\underline{A}}_2$.!

12.1 Tétel.

Legyen az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisban

$$\underline{v}(\underline{r}) = \sum_{k=1}^3 v_k(x_1, x_2, x_3) \underline{e}_k ;$$

a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény az $\underline{r}_0 = x_{10}\underline{e}_1 + x_{20}\underline{e}_2 + x_{30}\underline{e}_3$ pontban akkor és csak akkor differenciálható, ha koordinátafüggvényei, a

$v_k(x_1, x_2, x_3)$ függvények ($k = 1, 2, 3$) az

(x_{10}, x_{20}, x_{30}) pontban totálisan differenciálhatók. Ekkor

$$\frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \cong \underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (12.5)$$

Bizonyítás. Ha $\underline{v}(\underline{r})$ az $\underline{r}_0$ pontban differenciálható, akkor a 12.4 Definíció alapján a $\Delta \underline{r} = \Delta x_1 \underline{e}_1 + \Delta x_2 \underline{e}_2 + \Delta x_3 \underline{e}_3$ jelöléssel

$$\begin{aligned} & (v_1(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - v_1(\underline{r}_0))\underline{e}_1 + (v_2(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - v_2(\underline{r}_0))\underline{e}_2 + \\ & + (v_3(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - v_3(\underline{r}_0))\underline{e}_3 = \left(\sum_{k=1}^3 a_{1k} \Delta x_k \right) \underline{e}_1 + \\ & + \left(\sum_{k=1}^3 a_{2k} \Delta x_k \right) \underline{e}_2 + \left(\sum_{k=1}^3 a_{3k} \Delta x_k \right) \underline{e}_3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{k=1}^3 \psi_{1k} \Delta x_k \right) e_1 + \left(\sum_{k=1}^3 \psi_{2k} \Delta x_k \right) e_2 + \\
& + \left(\sum_{k=1}^3 \psi_{3k} \Delta x_k \right) e_3,
\end{aligned}$$

ahol a deriválttenzor koordinátamátrixának elemeit $[a_{ik}]$ -val, a $\odot$ -tenzor koordinátamátrixának elemeit $[\psi_{ik}]$ -val jelöltük. A bal-, ill. a jobboldalon álló vektor megfelelő koordinátáit összehasonlítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
& v_i(x_{10} + \Delta x_1, x_{20} + \Delta x_2, x_{30} + \Delta x_3) - v_i(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = \\
& = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \Delta x_k + \sum_{k=1}^3 \psi_{ik} \Delta x_k,
\end{aligned} \tag{12.6}$$

ahol $\psi_{ik} \rightarrow 0$, ha $\Delta x_k \rightarrow 0$, ($i, k = 1, 2, 3$). Innen következik, hogy a v_i függvény ($i = 1, 2, 3$) totálisan differenciálható és

$$a_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{12.7}$$

Fordítva, ha a koordinátafüggvények totálisan differenciálhatók, vagyis (12.6) fennáll (ekkor a_{ik} -kat (12.7) szolgáltatja), akkor

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 (v_i(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - v_i(\underline{r}_0)) e_i = \\
& \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 (a_{ik} + \psi_{ik}) \Delta x_k \right) e_i,
\end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{bmatrix} v_1(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - v_1(\underline{r}_0) \\ v_2(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - v_2(\underline{r}_0) \\ v_3(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - v_3(\underline{r}_0) \end{bmatrix} = \underline{A} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} + \underline{\Theta} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix}$$

ahol $\underline{A} = [a_{ik}]$ és a $\underline{\Theta} = [\theta_{ik}]$ mátrix zérushoz tart, ha $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) \rightarrow (0, 0, 0)$. Ha most tekintjük azt az $\underline{A}$, ill. $\underline{\Theta}$ tenzort, melynek koordinátamátrixa az adott bázisban $\underline{A}$, ill. $\underline{\Theta}$, akkor

$$\underline{v}(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - \underline{v}(\underline{r}_0) = \underline{A} \Delta \underline{r} + \underline{\Theta} \Delta \underline{r},$$

ahol a $\underline{\Theta}$ tenzor a zérustenzorhoz tart, ha $\Delta \underline{r} \rightarrow 0$.

Ha a $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ vektor-vektor függvény D minden pontjában differenciálható, akkor minden $\underline{r} \in D$ ponthoz hozzá van rendelve a deriválttenzora. A deriválttenzor tehát a hely függvénye, vagyis egy tenzor-vektor függvény (tenzormező.) Viszonylag könnyen lehetne értelmezni ilyen tenzormezők folytonosságát, sőt differenciálhatóságát is, ettől azonban megkíméljük az olvasót. Mivel mégis szükségünk lesz a "folytonosan differenciálható vektor-vektor függvény" fogalmára, ezt a következőképpen értelmezzük. Azt mondjuk, hogy a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény folytonosan differenciálható, ha differenciálható és rögzített bázisban deriválttenzora koordinátamátrixának elemei folytonos (háromváltozós) függvények. Könnyen belátható, hogy ha egy bázisban a koordinátamátrix elemei folytonosak, akkor minden más bázisban is folytonosak.

Néhány differenciálási szabály ($\underline{u}(\underline{r})$, $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{w}(\underline{r})$, ill. $\underline{r}(t)$ deriválható skalár-vektor, vektor-vektor, ill. vektor-skalár függvények és c_1 , c_2 állandók):

$$\frac{d}{d\underline{r}} (c_1 \underline{v} \pm c_2 \underline{w}) = c_1 \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \pm c_2 \frac{d\underline{w}}{d\underline{r}}; \quad (12.8)$$

$$\frac{d}{d\underline{r}} (\underline{u} \underline{v}) = \underline{v} \circ \text{grad } \underline{u} + \underline{u} \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}}, \quad (\text{lásd 11.3 Péllda}); \quad (12.9)$$

$$\frac{d}{d\underline{r}} (\underline{v} \cdot \underline{w}) = \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{w}) = \left(\frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \right)' \underline{w} + \left(\frac{d\underline{w}}{d\underline{r}} \right)' \underline{v}; \quad (12.10)$$

ahol $\underline{A}'$ az $\underline{A}$ tenzor adjungáltját jelöli (lásd III. Kötet, 19.1 Definíció);

$$\frac{d\underline{v}(\underline{r}(t))}{dt} = \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \frac{d\underline{r}}{dt} \text{ (láncszabály),} \quad (12.11)$$

ha $\underline{v}(\underline{r})$ értelmezési tartománya $\underline{r}(t)$ értékkészletét tartalmazza.
(12.8) bizonyítását az olvasóra bizzuk.

(12.9) bizonyítása. Legyen $\underline{w}(\underline{r}) = \underline{u}(\underline{r}) \underline{v}(\underline{r})$, és $\Delta \underline{u} = \underline{u}(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - \underline{u}(\underline{r})$, $\Delta \underline{v} = \underline{v}(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - \underline{v}(\underline{r})$. A $\underline{w}(\underline{r})$ szorzat megváltozása

$$\begin{aligned} \underline{w}(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - \underline{w}(\underline{r}) &= \underline{u}(\underline{r} + \Delta \underline{r}) \underline{v}(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - \underline{u}(\underline{r}) \underline{v}(\underline{r}) = \\ &= (\underline{u}(\underline{r}) + \Delta \underline{u})(\underline{v}(\underline{r}) + \Delta \underline{v}) - \underline{u}(\underline{r}) \underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r}) \Delta \underline{u} + \\ &+ \underline{u}(\underline{r}) \Delta \underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) (\text{grad } \underline{u}(\underline{r}) \Delta \underline{r}) + \underline{v}(\underline{r}) (\underline{\xi} \Delta \underline{r}) + \\ &+ \underline{u}(\underline{r}) \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \Delta \underline{r} + \underline{u}(\underline{r}) \underline{\Theta} \Delta \underline{r}, \end{aligned}$$

ahol $\underline{\xi} \rightarrow 0$, $\underline{\Theta} \rightarrow \underline{0}$, ha $\Delta \underline{r} \rightarrow 0$. Innen

$$\begin{aligned} \underline{w}(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - \underline{w}(\underline{r}) &= (\underline{v}(\underline{r}) \circ \text{grad } \underline{u}(\underline{r}) + \underline{u}(\underline{r}) \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}}) \Delta \underline{r} \\ &+ (\underline{v}(\underline{r}) \circ \underline{\xi} + \underline{u}(\underline{r}) \underline{\Theta}) \Delta \underline{r}, \end{aligned}$$

ahonnan a szorzat deriválhatósága és (12.9) következik.!

(12.10) bizonyítása. Legyen $\underline{u}(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r})$. $\underline{w}(\underline{r})$ és $\Delta \underline{v} = \underline{v}(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - \underline{v}(\underline{r})$,
 $\underline{w} = (\underline{r} + \Delta \underline{r}) - \underline{w}(\underline{r})$. Az $\underline{u}(\underline{r})$ szorzat megváltozása.

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - \underline{u}(\underline{r}) &= \underline{v}(\underline{r} + \Delta \underline{r}) \underline{w}(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - \underline{v}(\underline{r}) \underline{w}(\underline{r}) = \\ &= (\underline{v}(\underline{r}) + \Delta \underline{v})(\underline{w}(\underline{r}) + \Delta \underline{w}) - \underline{v}(\underline{r}) \underline{w}(\underline{r}) = \Delta \underline{v} \underline{w} + \underline{v} \Delta \underline{w} = \end{aligned}$$

$$\text{Azonban } \Delta \underline{v} = \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \Delta \underline{r} + \underline{\Theta}_1 \Delta \underline{r}; \Delta \underline{w} = \frac{d\underline{w}}{d\underline{r}} \Delta \underline{r} + \underline{\Theta}_2 \Delta \underline{r},$$

ahol $\underline{\Theta}_i \rightarrow \underline{0}$, ha $\Delta \underline{r} \rightarrow 0$, ($i = 1, 2, \dots$). A III. Kötet, 19.1 Definíció szerint

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - \underline{u}(\underline{r}) &= \underline{w} \cdot \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \Delta \underline{r} + \underline{w} \cdot \underline{\Theta}_1 \Delta \underline{r} + \underline{v} \cdot \frac{d\underline{w}}{d\underline{r}} \Delta \underline{r} + \\ &+ \underline{v} \cdot \underline{\Theta}_2 \Delta \underline{r} = \Delta \underline{r} \cdot \left(\frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \right)' \underline{w} + \Delta \underline{r} \cdot \underline{\Theta}_1' \underline{w} + \Delta \underline{r} \cdot \left(\frac{d\underline{w}}{d\underline{r}} \right)' \underline{v} + \\ &+ \Delta \underline{r} \cdot \underline{\Theta}_2' \underline{v} \end{aligned}$$

$$+\Delta \underline{r} \cdot \underline{\underline{\Theta}}_2' \underline{v},$$

ahol a ' a tenzor adjungáltját jelöli. Ezek szerint

$$u(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - u(\underline{r}) = \left[\left(\frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \right)' \underline{w} + \left(\frac{d\underline{w}}{d\underline{r}} \right)' \underline{v} \right] \cdot \Delta \underline{r} + \\ + \left(\underline{\underline{\Theta}}_1' \underline{w} + \underline{\underline{\Theta}}_2' \underline{v} \right) \Delta \underline{r},$$

ahol a $(\underline{\underline{\Theta}}_1' \underline{w} + \underline{\underline{\Theta}}_2' \underline{v})$ vektor zérushoz tart, ha $\Delta \underline{r} \rightarrow 0$!

(12.11) bizonyítása. Ha t megváltozik Δt -vel, akkor $\underline{r}(t)$ megváltozása

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(t + \Delta t) - \underline{r}(t) = \dot{\underline{r}}(t) \Delta t + \underline{\xi} \Delta t,$$

és $\underline{v}(\underline{r})$ megváltozása

$$\Delta \underline{v} = \underline{v}(\underline{r} + \Delta \underline{r}) - \underline{v}(\underline{r}) = \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \Delta \underline{r} + \underline{\underline{\Theta}} \Delta \underline{r},$$

ahol $\underline{\xi} \rightarrow 0$, $\underline{\underline{\Theta}} \rightarrow 0$, $\Delta \underline{r} \rightarrow 0$, ha $\Delta t \rightarrow 0$.

A $\underline{v}(\underline{r}(t))$ vektor-skalár függvény megváltozása

$$\Delta \underline{v} = \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} (\dot{\underline{r}}(t) \Delta t + \underline{\xi} \Delta t) + \underline{\underline{\Theta}} (\dot{\underline{r}}(t) \Delta t + \underline{\xi} \Delta t) = \\ = \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \dot{\underline{r}}(t) \Delta t + \left(\frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \underline{\xi} + \underline{\underline{\Theta}} \dot{\underline{r}}(t) + \underline{\underline{\Theta}} \underline{\xi} \right) \Delta t,$$

ahol a $\left(\frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \underline{\xi} + \underline{\underline{\Theta}} \dot{\underline{r}}(t) + \underline{\underline{\Theta}} \underline{\xi} \right)$ vektor zérushoz tart,

ha $\Delta t \rightarrow 0$!

12.5 Definíció.

A $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ deriválható vektor-vektor függvény $\underline{r}$ pontbeli derivált-tenzorának első skalárinvariánsát $\underline{v}(\underline{r})$ -beli divergenciájának nevezzük és $\text{div } \underline{v}(\underline{r})$ -rel jelöljük

$\text{div } \underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ nyilván skalár-vektor függvény. Rögzített ortonormált bázisban legyen $\underline{v}(\underline{r}) = v_1(\underline{r}) \underline{e}_1 + v_2(\underline{r}) \underline{e}_2 + v_3(\underline{r}) \underline{e}_3$. Ekkor (12.5)-ből és (11.10)-ből azonnal adódik, hogy

$$\operatorname{div} \underline{v} = \operatorname{Sp} \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} . \quad (12.12)$$

12.6 Definíció.

A $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ deriválható vektor-vektor függvény $\underline{r}$ pontbeli deriválttenzorának vektorinvariánsát $\underline{v}$ rotációjának nevezzük és $\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r})$ -rel jelöljük.

$\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ nyilván vektor-vektor függvény. Rögzített ortonormált bázisban legyen $\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3$. Ekkor (12.5)-ből és a 11.2 Definícióból adódik, hogy

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{v} = & \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \underline{e}_2 + \\ & + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \underline{e}_3 . \end{aligned} \quad (12.13)$$

12.3 Példa. A 11.7 Példában szereplő $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{\omega} \times \underline{r}$ vektor-vektor függvény az $\underline{\omega}$ szögsebességgel forgó merev test sebesség-mezője, $\underline{v}(\underline{r})$ derivált tenzora az $\underline{\omega} \times$ tenzor. Ennek vektorinvariánsa $2 \underline{\omega}$,

$$\operatorname{rot} (\underline{\omega} \times \underline{r}) = 2 \underline{\omega} ,$$

vagyis a rotáció a forgásra jellemző szögsebesség vektor kétszerese. Ez indokolja az elnevezést.

A divergencia és a rotáció fontos fizikai jelentésének tárgyalására a 14. pontban visszatérünk.

Skalár-vektor függvény gradiensének, vektor-vektor függvény divergenciájának és rotációjának felírását, az ezekkel a mennyiségekkel végzett számolást megkönnyíti az ún. "nabla-szimbolika" használata. Azt a "(vektor) differenciál-operátort", melyet az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ortonormált bázisban a

$$\nabla = \underline{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (12.14)$$

szimbolum jelöl, nabla-operátornak (Hamilton-féle operátornak) nevezzük. ∇ -nak az u "skalárral" (skalár-vektor függvénnyel) való szorzata, ill. a $\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3$ "vektorral" (vektor-vektor függvénnyel) való skaláris, ill. vektorális szorzata definíció szerint:

$$\nabla u = \underline{e}_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \underline{e}_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \underline{e}_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = \text{grad } u, \quad (12.15)$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \text{div } \underline{v}, \quad (12.16)$$

$$\nabla \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \text{rot } \underline{v}. \quad (12.17)$$

Az előző összefüggésekben ∇ valóban "vektorként viselkedik", melynek

koordinátái a $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\frac{\partial}{\partial x_3}$

szimbolumok. $\frac{\partial}{\partial x_i}$ -nek egy v_k skálár függvénnyel való szorzata

$\frac{\partial}{\partial x_i} v_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$. Ha a függvények szorzatára alkalmazzuk, akkor a

∇ operátor "differenciáloperátorként viselkedik" és követi a "szorzat differenciális szabályát". Érvényesek a következő azonosságok, $(u_1, u_2, u, \text{ ill.}$

$\underline{v}, \underline{w}$ differenciálható skálár-vektor, ill. vektor-vektor függvények).

$$\nabla(u_1 u_2) = u_2 \nabla u_1 + u_1 \nabla u_2,$$

vagyis

$$\text{grad}(u_1 u_2) = u_2 \text{grad } u_1 + u_1 \text{grad } u_2 \quad (12.18)$$

$$\nabla(u \underline{v}) = \underline{v} \cdot \nabla u + u \nabla \underline{v},$$

vagyis

$$\text{div}(u \underline{v}) = \underline{v} \cdot \text{grad } u + u \text{div } \underline{v}. \quad (12.19)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\underline{u} \underline{v}) &= (\nabla \underline{u}) \times \underline{v} + \underline{u} \nabla \times \underline{v} = \\ &= -\underline{v} \times \nabla \underline{u} + \underline{u} (\nabla \times \underline{v}),\end{aligned}$$

vagyis

$$\text{rot } (\underline{u} \underline{v}) = \underline{u} \text{ rot } \underline{v} - \underline{v} \times \text{grad } \underline{u} . \quad (12.20)$$

A (12.18) - (12.20) azonosságok közvetlenül igazolhatók a bal-, ill. a jobboldalak (rögzített ortonormált bázisban való) kiszámítása útján.

A ∇ szimbólum "négyzete" (önmagával való skaláris szorzata) ugyan-csak fontos differenciáloperátor:

$$\begin{aligned}\Delta &= \nabla^2 = (\underline{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3})^2 = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} . \quad (12.21)\end{aligned}$$

A (12.21) szimbólumot Laplace-operátornak nevezzük. Ha az $u(\underline{r})$ skalár-vektor függvényt a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben az $u(x_1, x_2, x_3)$ háromváltozós függvény reprezentálja, akkor (12.15)-ből és (12.21)-ből látható, hogy

$$\Delta u = \nabla(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \text{div grad } u(\underline{r}) \quad (12.22)$$

A ∇ operátor vektor-jellege mutatkozik meg a következő fontos azonosságokban (u , ill. $\underline{v}$ kétszer folytonosan differenciálható skalár-vektor, ill. vektor-vektor függvény:) ∇ természetesen nem vektor és így a következő e-képleteket követő "indokolások" nem bizonyítások!

$$\nabla \times (\nabla u) = \underline{0} ,$$

vagyis

$$\text{rot grad } u \equiv \underline{0}, \quad (12.23)$$

("u.i. a ∇ és a skalárszor ∇ vektor párhuzamos, tehát a vektoriális szorzat zérus").

$$\nabla (\nabla \times \underline{v}) = 0,$$

vagyis

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{v} \equiv 0, \quad (12.24)$$

("u.i. a vegyesszorzat zérus, ha két tényezője megegyezik").

vagyis

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{v}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{v}) - \nabla^2 \underline{v},$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{v} - \Delta \underline{v}, \quad (12.25)$$

("kifejtési tétel", lásd III. Kötet, (2.17)), ahol Δ a Laplace-operátor és $\Delta \underline{v} = \underline{e}_1 \Delta v_1 + \underline{e}_2 \Delta v_2 + \underline{e}_3 \Delta v_3$. A (12.23) és (12.24) formulákat - fontosságuk miatt - az alábbiakban bebizonyítjuk. (12.25) bizonyítását az olvasóra bizzuk.

(12.23) bizonyítása. Legyen $u = u(\underline{r})$ kétszer folytonosan deriválható skálárvektor függvény és

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \underline{e}_3.$$

$\operatorname{grad} u$ deriválttenzorának mátrixa (12.5) szerint

$$\frac{d (\operatorname{grad} u (\underline{r}))}{d \underline{r}} = \begin{bmatrix} u''_{x_1 x_1} & u''_{x_1 x_2} & u''_{x_1 x_3} \\ u''_{x_2 x_1} & u''_{x_2 x_2} & u''_{x_2 x_3} \\ u''_{x_3 x_1} & u''_{x_3 x_2} & u''_{x_3 x_3} \end{bmatrix}$$

A vegyes parciális deriváltak egyenlősége miatt ez a mátrix szimmetrikus, tehát vektorinvariánsa zérus.!

(12.24)bizonyítása. Legyen $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ kétszer folytonosan deriválható vektor-
vektor függvény. Deriválttenzorának mátrixa

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{v} = & \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \underline{e}_2 + \\ & + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \underline{e}_3 \end{aligned}$$

deriválttenzorának mátrixa (csak a főátló elemeit írjuk ki)

$$\frac{d \text{rot } \underline{v}(\underline{r})}{d\underline{r}} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_3} & \\ & \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2 \partial x_1} & \\ & & \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3 \partial x_2} \end{bmatrix}$$

A vegyes parciális deriváltak egyenlősége miatt a főátlóban levő elemek
összege zérus.!

13. Vonal- és felületi integrál

A vektoranalízis alkalmazásában, az erőterek és sebességeloszlások vizsgálatában számos olyan jellemző mennyiség lép fel, mely matematikailag vektor-vektor függvény valamilyen - a célnak megfelelően értelmezett - integráljával írható le. Ebben a pontban a vektor-vektor függvények skalár-értékű vonalintegrálját és felületi integrálját tárgyaljuk részletesebben, mivel e két integrálfogalom fizikai jelentése a legfontosabb és legszemléletesebb.

Vektor-vektor függvény vonalintegráljának a fogalmát előbb egy erőter által végzett munka kiszámításával közelítjük meg.

Gondoljunk egy elektromos, mágneses, vagy gravitációs erőterre. A tér erősségét tetszőleges pontban egy egységnyiinek vett próbarészecskével mérjük le. A próbarészecskére a tér minden pontjában meghatározott nagyságú és irányú, általában pontról pontra folytonosan változó erő hat. Az $\underline{r}$ pontban ható erőt az $\underline{f}(\underline{r})$ erővektor (térerősség) fejezze ki. A próbarészecske mozogjon egy adott γ irányított görbedarab ("pálya") mentén. Kérdés, mekkora a munkavégzés, miközben a próbatest a γ görbe a pontjából a görbe mentén a $\underline{b}$ pontba mozog? Tudjuk, (lásd III. Kötet 2.1 Példa), hogy a munka az erő- és az elmozdulásvektor skaláris szorzata. Ez az értelmezés azonban csak akkor használható, ha a mozgás egyenespályán történik, s az erő eközben állandó. Általában a két követelmény egyike sem teljesül. Ha azonban a γ görbét igen kis elemi szakaszokra bontjuk, s a kis szakaszokat a hozzájuk tartozó hurral helyettesítjük, ilyen kis szakaszon az út már egyenes, az erő pedig közelítőleg állandó. A γ görbét az irányításának megfelelő sorrendben az $\underline{r}_i$ osztópontokkal ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) bontjuk fel kis szakaszokra. Az i -edik görbeszakasz hurvektorát $\Delta \underline{r}_i$ -vel, a hur mentén állandónak tekintett erőt $\underline{f}(\underline{r}_i)$ -vel jelölve, az ezen a szakaszon végzett "elemi munka" közelítő értéke $L_i \approx \underline{f}(\underline{r}_i) \Delta \underline{r}_i$. Az egész görbedarab mentén végzett munka közelítő értéke az egyes szakaszokon vett munkák közelítő értékének összege

$$L \approx \sum_{i=1}^n \underline{f}(\underline{r}_i) \Delta \underline{r}_i .$$

Minél finomabb felosztást készítünk, annál jobban megközelíti ez az összeg a keresett munka értékét, végül is a munka ezen összeg határértékeként adódik. (Ha a γ görbén történő mozgás során az erőter által végzett munka több, mint az erőter ellenében végzett munka, akkor L pozitív, az ellenkező esetben negatív). Az előbbi gondolatmenet általánosításaként jutunk a vonalintegrál fogalmához.

13.1 Definíció.

Legyen γ irányított, reguláris térgörbe; az irányított, reguláris γ_i görbedarabok $P = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ halmazát γ egy felosztásának nevezzük, ha

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i, \quad \gamma_i \text{-nek } (i=1, 2, \dots, n) \text{ nincs közös}$$

pontja a többi γ_k -val, kivéve γ_{i+1} kezdőpontját, mely γ_i végpontjával azonos és γ_{i-1} végpontját, mely γ_i kezdőpontjával azonos ($i = 2, 3, \dots, n-1$).

Jelöljük γ_i kezdőpontját $\underline{r}_{i-1}$ -gyel, végpontját $\underline{r}_i$ -vel ($\underline{r}_0$, ill. $\underline{r}_n$ a γ görbe kezdő, ill. végpontja); $\underline{r}_i$ -t a felosztás i -edik osztópontjának, a $\Delta P = \max |\Delta \underline{r}_i|$ számot, ahol $\Delta \underline{r}_i = \underline{r}_i - \underline{r}_{i-1}$, a P felosztás finomságának nevezzük. A γ görbe felosztásainak egy P_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, végtelen sorozatát minden határon túl finomodónak nevezzük, ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta P_k = 0. \quad (\text{V. ö. II. Kötet, 22.1, 22.3 és 22.4 Definíció}).$$

13.2 Definíció.

Legyen $\underline{v}(\underline{r}), \underline{r} \in D$, folytonos vektor-vektor függvény, $P = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ a $\gamma \subset D$ irányított, reguláris térgörbe egy felosztása és $\underline{\rho}_i \in \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; a

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{\rho}_i) \Delta \underline{r}_i$$

összeget a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvénynek a γ görbe P felosztásához tartozó egyik integrálközelítő összegének nevezzük (v. ö. II. Kötet, 22.6 Definíció).

13.3 Definíció.

Legyen $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ folytonos vektor-vektor függvény, $\gamma \subset D$ irányított, reguláris térgörbe, és P_k , $k = 1, 2, \dots$ a γ görbe egy minden határon túl finomodó felosztássorozata; a P_k felosztáshoz ($k = 1, 2, \dots$) tartozó ζ_k integrálközelítő összegek végtelen sorozatának határértékét $\underline{v}(\underline{r})$ γ -ra vonatkozó vonalegintegráljának nevezzük és a következőképpen jelöljük

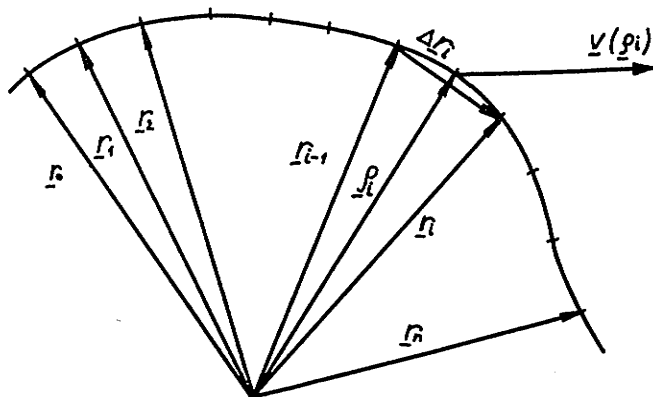
$$\int_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = \lim_{\Delta P_k \rightarrow 0} \zeta_{P_k} \quad (13.1)$$

$$\left(\lim_{\Delta P_k \rightarrow 0} \zeta_{P_k} = \ell \in \mathbb{R} \text{ azt jelenti, hogy min-} \right.$$

den $\varepsilon > 0$ -hoz van $\delta(\varepsilon) > 0$, melyre

$\Delta P_k < \delta(\varepsilon)$ -ből $|\zeta_{P_k} - \ell| < \varepsilon$ következik.

(V. ö. II. Kötet, 22. 7 Definíció és 22. 10 Tétel).



13.1 ábra

A következő tételben megmutatjuk, hogyan lehet a (13.1) vonalintegrál kiszámítását egyváltozós valós függvény határozott integráljának kiszámítására visszavezetni. Egyben bebizonyítjuk, hogy a 13.3 Definícióban tett kikötések mellett a (13.1) limes létezik és független a P_k , $k = 1, 2, \dots$ sorozat megválasztásától.

13.1 Tétel.

Legyen a $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ vektormező folytonos és $\gamma = \{\underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(t), t \in [\alpha, \beta] \subset D\}$ irányított reguláris térgörbe; ekkor

$$\int_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \underline{v}(\underline{r}(t)) \dot{\underline{r}}(t) dt. \quad (13.2)$$

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy a (13.2) jobb oldalán álló határozott integrál létezik. Kimutatjuk, hogy γ bármely minden határon túl finomodó P_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ felosztássorozatára $\underline{v}(\underline{r})$ megfelelő integrálközelítő-összeg sorozata (13.2) jobb oldalához tart. A P_k felosztás osztópontjai legyenek $\underline{r}_i = \underline{r}(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. A γ görbe P_k felosztásának megfelel az $[\alpha, \beta]$ intervallum $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = \beta$ osztáspontokkal adott felosztása. Ha a P_k felosztás elég finom, akkor az $[\alpha, \beta]$ intervallum megfelelő felosztása is elég finom (v.ö. a 2.3 Tétel bizonyítása végén mondottakkal).
Legyen

$$\sigma_{P_k} = \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{Q}_i) \Delta \underline{r}_i$$

(lásd 13.2 Definíció), ahol $\underline{Q}_i = \underline{r}(\tau_i)$, $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Megmutatjuk, hogy σ_{P_k} eltérése (13.2) megfelelő téglányösszegétől ε -nál kisebb lesz, ha ΔP_k , a felosztás finomsága elég kicsi. A $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ jelöléssel

$$\begin{aligned}
& \left| \sigma_{p_k} - \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{x}(t_{i-1})) \dot{\underline{x}}(t_{i-1}) \Delta t_i \right| = \\
& = \left| \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{x}(\tau_i)) \Delta \underline{x}_i - \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{x}(t_{i-1})) \dot{\underline{x}}(t_{i-1}) \Delta t_i \right| \leq \\
& \leq \left| \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{x}(\tau_i)) \Delta \underline{x}_i - \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{x}(t_{i-1})) \Delta \underline{x}_i \right| + \\
& + \left| \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{x}(t_{i-1})) \Delta \underline{x}_i - \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{x}(t_{i-1})) \dot{\underline{x}}(t_{i-1}) \Delta t_i \right| \leq \\
& \leq \left| \sum_{i=1}^n \left| \underline{v}(\underline{x}(\tau_i)) - \underline{v}(\underline{x}(t_{i-1})) \right| \Delta \underline{x}_i \right| + \\
& + \sum_{i=1}^n \left| \underline{v}(\underline{x}(t_{i-1})) \right| \left| \Delta \underline{x}_i - \dot{\underline{x}}(t_{i-1}) \Delta t_i \right|.
\end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon_1 > 0$ tetszőlegesen adott. Miután a $|\underline{v}(\underline{x}(t))|$ egyváltozós skálár függvény az $[\alpha, \beta]$ intervallumon egyenletesen folytonos,

$$\left| \underline{v}(\underline{x}(\tau_i)) - \underline{v}(\underline{x}(t_{i-1})) \right| < \varepsilon_1$$

minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re, ha már $\max \Delta t_i$, vagyis Δp_k elég kicsi. Így az

első összeg $\varepsilon_1 \sum_{i=1}^n |\Delta \underline{x}_i| \leq \varepsilon_1$ mes γ -val becsülhető (mes γ : γ iv-

hossza). A második összeg becsülésére felhasználjuk a Taylor-formulát (1.3 Tétel) a következő alakban:

$$\left| \Delta \underline{r}_1 - \dot{\underline{r}}(t_{1-1}) \Delta t_1 \right| = \left| \underline{r}(t_1) - \underline{r}(t_{1-1}) - \dot{\underline{r}}(t_{1-1}) \Delta t_1 \right| \leq M \Delta t_1^2$$

ahol $M = \max_{[\alpha, \beta]} \left| \ddot{\underline{r}}(t) \right|$. Bevezetve az $m = \max \left| \underline{v}(\underline{r}(t)) \right|$ jelölést, a második összeg kisebb mint

$$m M \sum_{i=1}^n \Delta t_i^2 \leq m M \max_i \Delta t_i \cdot (\beta - \alpha) < \varepsilon_1,$$

ha $\max_i \Delta t_i$ vagyis ΔP_k elég kicsi. Összegezve

$$\left| \sigma_{P_k} - \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{r}(t_{i-1})) \dot{\underline{r}}(t_{i-1}) \Delta t_i \right| \leq \varepsilon_1 \text{ mes } \gamma + \varepsilon_1 < \varepsilon,$$

ha ε_1 -et a következőképpen választjuk $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{1 + \text{mes } \gamma}$ és a felosztás már ennek az ε_1 -nek megfelelően elég finom!

Vektormező vonalintegrálja rendelkezik az integráloktól megszokott következő tulajdonságokkal:

$$\int_{\gamma} (\underline{v}_1(\underline{r}) + \underline{v}_2(\underline{r})) d\underline{r} = \int_{\gamma} \underline{v}_1(\underline{r}) d\underline{r} + \int_{\gamma} \underline{v}_2(\underline{r}) d\underline{r}. \quad (13.3)$$

$$\int_{\gamma} c \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = c \int_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r}. \quad (13.4)$$

Ha γ jelenti a γ görbedarabot ellenkező irányban történő befutással, akkor

$$\int_{-\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = - \int_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r}. \quad (13.5)$$

Ha $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, γ_1 végpontja megegyezik γ_2 kezdőpontjával és γ_1 -nek γ_2 -vel más közös pontja nincs, akkor

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} + \int_{\gamma_2} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} \quad (13.6)$$

(13.6) alapján terjeszthetjük ki a vonalintegrál fogalmát reguláris darabokból töréspontokban összeillesztett görbékre.

Ezen tulajdonságok bizonyítását az olvasóra bizzuk (V.ö. II. Kötet, 23. pont).

Ha ortonormált bázisban a $\underline{v}$ és $\underline{r}$ vektorokat koordinátáikkal adjuk meg,

$$\underline{v}(\underline{r}) = v_1(\underline{r})\underline{e}_1 + v_2(\underline{r})\underline{e}_2 + v_3(\underline{r})\underline{e}_3,$$

$$\underline{r} = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3,$$

$$d\underline{r} = dx\underline{e}_1 + dy\underline{e}_2 + dz\underline{e}_3,$$

akkor a $\underline{v}(\underline{r}) d\underline{r}$ skaláris szorzást elvégezve a vonalintegrál másik szokásos jelölésére jutunk:

$$\int_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = \int_{\gamma} (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz).$$

A vektormezőnek valamely γ zárt görbén vett integrálját cirkuláció-nak nevezzük és az alábbi módon jelöljük:

$$\oint_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r}.$$

13.1 Példa. Meghatározzuk a 12.2 Példában szereplő

$$\underline{v}(\underline{r}) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \underline{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \underline{j} = \frac{\underline{k} \times \underline{r}}{r^2}$$

vektormező (a z tengely mentén elhelyezett, végtelen hosszúnak tekintett, árammal átfolyt vezető mágneses tere) az (x,y) síkban fekvő, origó középpontu, R sugaru, pozitív irányítású kör mentén vett cirkulációját (a fiktív pozitív egységnyi mágneses tömeg mozgatasakor végzett munkát).

A görbét leíró vektor-skalár függvény

$$\underline{r}(t) = R \cos t \underline{i} + R \sin t \underline{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = -R \sin t \underline{i} + R \cos t \underline{j},$$

$$\underline{v}(\underline{r}(t)) = \frac{1}{R} (-\sin t \underline{i} + \cos t \underline{j})$$

$$\oint_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{v}(\underline{r}(t)) \dot{\underline{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \left[t \right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Látjuk, hogy a körre vonatkozó cirkuláció a kör sugarától független.

13.2 Példa. Meghatározzuk $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}(x, y, z) = x^2 \underline{i} + 2xy \underline{j}$ síkbeli vektormező cirkulációját az $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ ellipszis mentén. Az ellipszis paraméteres megadása

$$\underline{r}(t) = \sqrt{2} \cos t \underline{i} + \sin t \underline{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = -\sqrt{2} \sin t \underline{i} + \cos t \underline{j},$$

$$\underline{v}(\underline{r}(t)) = 2 \cos^2 t \underline{i} + 2 \sqrt{2} \cos t \sin t \underline{j}.$$

Mínt hogy ebben az esetben az integrandus $\underline{v}(\underline{r}(t)) \dot{\underline{r}}(t) \equiv 0$, ezért a cirkuláció zérus.

13.3 Példa. Az origóban elhelyezett tömeg gravitációs erőterét - az egy-
ségek megfelelő megválasztása esetén - a $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{-1}{|\underline{r}|^3} \underline{r}$ vektor-vektor függvény írja le. Számítsuk ki ennek cirkulációját az (x, y) síkban fekvő $C(2, 0)$ középpontú $R = 1$ sugarú körön

$$\underline{r}(t) = (2 + \cos t) \underline{i} + \sin t \underline{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = -\sin t \underline{i} + \cos t \underline{j},$$

$$\underline{v}(\underline{r}(t)) = \frac{-1}{(5 + 4 \cos t)^{\frac{3}{2}}} \left[(2 + \cos t) \underline{i} + \sin t \underline{j} \right],$$

$$\oint_{\gamma} \underline{v} d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \frac{2 \sin t}{(5 + 4 \cos t)^{\frac{3}{2}}} dt = \left[\frac{1}{(5 + 4 \cos t)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

mert az alsó és felső határon vett helyettesítési érték megegyezik.

Vektormező "felületi integrálját" a következőképpen definiáljuk:

13.4 Definíció.

Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, mérhető területű tartomány,

$$F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2) ; (u_1, u_2) \in D \}$$

irányított reguláris felületdarab, és $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ ezen értelmezett folytonos vektor-vektor függvény.

A $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ vektormező F felületen vett felületi integrálját a következőképpen definiáljuk:

$$\begin{aligned} \iint_F \underline{v}(\underline{r}) dF &= \iint_D (\underline{v}(\underline{r}_1, \underline{r}_2)) du_1 du_2 = \\ &= \iint_D \underline{v}(\underline{r}(u_1, u_2)) (\underline{r}_1(u_1, u_2) \times \underline{r}_2(u_1, u_2)) du_1 du_2. \end{aligned} \quad (13.7)$$

A felületi integrál látszólag nemcsak a vektor-vektor függvénytől és az F felülettől függ, hanem a felület paraméterezésétől is. Ez azonban valójában nem így van, érvényes ugyanis a következő:

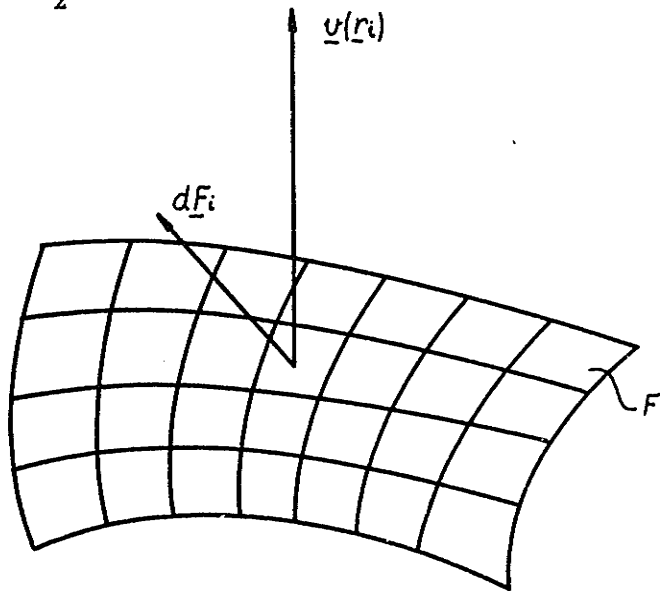
13.2 Tétel.

Az $F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{p}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D_u \}$ irányított reguláris felületdarabon értelmezett $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ folytonos vektormező felületi integráljának értéke független a paraméterezéstől, pontosabban a felületi normálvektor irányítását megőrző paraméter-transzformációval szemben invariáns. (A normálvektor irányítását megfordító átparaméterezésnél a felületi integrál értéke (-1) -szeresére változik).

Bizonyítás. Tekintsük a (6.7) megengedett paramétertranszformációt, és vezessük be a $\underline{q}(v_1, v_2) = \underline{p}(u_1(v_1, v_2), u_2(v_1, v_2))$ jelölést. Ekkor $F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{q}(v_1, v_2), (v_1, v_2) \in D_v \}$ és fennáll a (6.8) összefüggés. Az új (v_1, v_2) paraméterezésben felírt felületi integrál képletét a (6.9) és az V. Kötet, (16.7) formula alapján átalakítva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
& \iint_{D_v} \underline{v}(\underline{q}(v_1, v_2)) (\underline{q}'_{v_1} \times \underline{q}'_{v_2}) dv_1 dv_2 = \\
& = \iint_{D_v} \underline{v}(\underline{q}(v_1, v_2)) (\underline{p}'_{u_1} \times \underline{p}'_{u_2}) \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)} dv_1 dv_2 = \\
& = \pm \iint_{D_u} \underline{v}(\underline{p}(u_1, u_2)) (\underline{p}'_{u_1} \times \underline{p}'_{u_2}) du_1 du_2,
\end{aligned}$$

aszerint +, ill. -, hogy $\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)}$ pozitív, ill. negatív. (6.9)-ből látható, hogy $\underline{p}'_{u_1} \times \underline{p}'_{u_2}$ iránya az első esetben egyenlő, a másodikban pedig ellentétes $\underline{q}'_{v_1} \times \underline{q}'_{v_2}$ irányával.!



13.2 ábra

A felületi integrál fogalmához a következőképpen is el lehet jutni:
 Legyen adott az $F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D \}$ irányított reguláris felületdarab, és az ezen értelmezett $\underline{v}(\underline{r})$ folytonos vektor-vektor

függvény. Az F felületet felosztjuk kis ΔF_i részekre, mindegyikben kijelölünk egy $\underline{r}_i$ pontot. A felület $\underline{r}_i$ -beli normál egységvektorát $\underline{m}_i^0$ -vel jelölve, a

$$\Delta \underline{F}_i = \underline{m}_i^0 \text{ mes } \Delta F_i \quad (13.8)$$

vektort a ΔF_i felületdarab felszín-vektorának nevezzük. A felszínvektor hossza tehát a kis felületdarab felszíne, állása pedig jellemző a felületdarab állására (ha e felületdarab elég kicsi). Az $\underline{r}_i$ pontra lokalizált $\underline{v}(\underline{r})$ vektort $\underline{v}(\underline{r}_i)$ -vel jelölve képezzük a $\underline{v}(\underline{r}_i) \Delta \underline{F}_i$ skaláris szorzatot. Ezt minden felületelemmel elvégezve, az adott felosztáshoz tartozó

$$\sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{r}_i) \Delta \underline{F}_i \quad (13.9)$$

összeget képezzük. Ha F felosztása minden határon túl finomodik, (13.9) a felületi integrálhoz tart:

$$\lim \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{r}_i) \Delta \underline{F}_i = \iint_F \underline{v}(\underline{r}) d\underline{F}. \quad (13.10)$$

(13.10)-et nem bizonyítjuk, mivel meglehetősen szemléletes állítás. Vegyük ugyanis figyelembe, hogy ha F -et az $\underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2)$ egyenlet adja meg,

ΔF_i az (u_{1i}, u_{2i}) , $(u_{1i} + \Delta u_{1i}, u_{2i})$, $(u_{1i} + \Delta u_{1i}, u_{2i} + \Delta u_{2i})$, $(u_{1i}, u_{2i} + \Delta u_{2i})$ csúcspontok által meghatározott "görbevonalu négyszög" és $\underline{r}_i = \underline{r}(u_{1i}, u_{2i})$, akkor $\underline{v}(\underline{r}_i) = \underline{v}(\underline{r}(u_{1i}, u_{2i}))$ és

$$\begin{aligned} \Delta \underline{F}_i &\approx \frac{\underline{r}_1 \times \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \times \underline{r}_2|} |\underline{r}_1 \times \underline{r}_2| \Delta u_{1i} \Delta u_{2i} = \\ &= \underline{r}'_{u_1}(u_{1i}, u_{2i}) \times \underline{r}'_{u_2}(u_{1i}, u_{2i}) \Delta u_{1i} \Delta u_{2i}. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Tehát

$$\sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{r}_i) \Delta \underline{F}_i \approx \sum_{i=1}^n (\underline{v}(\underline{r}(u_{1i}, u_{2i}))) \underline{r}_1(u_{1i}, u_{2i}) \underline{r}_2(u_{1i}, u_{2i}) \Delta u_{1i} \Delta u_{2i},$$

ami a (13.7) jobb oldalán álló kettős integrál közelítő összege.

Vektormező felületi integrálja rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$$\iint_{\underline{F}} (\underline{v}_1(\underline{r}) + \underline{v}_2(\underline{r})) d\underline{F} = \iint_{\underline{F}} \underline{v}_1(\underline{r}) d\underline{F} + \iint_{\underline{F}} \underline{v}_2(\underline{r}) d\underline{F} \quad (13.12)$$

$$\iint_{\underline{F}} c \underline{v}(\underline{r}) d\underline{F} = c \iint_{\underline{F}} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{F}. \quad (13.13)$$

Ha $-\underline{F}$ jelenti az $\underline{F}$ felületdarabból a felületi normális irányításának ellenkezőre változtatásával keletkező irányított felületet, akkor

$$\iint_{-\underline{F}} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{F} = - \iint_{\underline{F}} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{F}. \quad (13.14)$$

Ha az $\underline{F}$ felületdarabot két részre, $\underline{F}_1$ -re és $\underline{F}_2$ -re bontjuk $\underline{F}$ és $\underline{F}_1$ valamint $\underline{F}$ és $\underline{F}_2$ normálisának egyező irányítása esetén

$$\iint_{\underline{F}} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{F} = \iint_{\underline{F}_1} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{F} + \iint_{\underline{F}_2} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{F}. \quad (13.15)$$

Ezek igazolását az olvasóra bizzuk.

A felületi integrál (13.7) formuláját szokás még a következő jelölésekkel is felírni

$$\iint_{\underline{F}} \underline{v} d\underline{F} = \iint_{\underline{F}} \underline{v} \underline{m}^0 dF = \iint \underline{v} \underline{m}^0 dF, \quad (13.16)$$

ahol $\underline{m}^0 = \frac{\underline{r}_1 \times \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \times \underline{r}_2|}$ a felületi egység normálvektor, dF a "felszínelem"

és $\underline{v} \underline{m}^0 = \underline{v} \underline{m}^0$ a $\underline{v}$ vektor vetülete a felületi normálison.

Ha Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben az F reguláris felületdarab valamely kétváltozós valós függvény grafikonjaként írható fel, (lásd a (6.10) előtt mondottakat)

$$\underline{r}(x, y) = x\underline{i} + y\underline{j} + f(x, y)\underline{k} \text{ és}$$

$$\underline{v}(\underline{r}(x, y)) = v_1(x, y)\underline{i} + v_2(x, y)\underline{j} + v_3(x, y)\underline{k},$$

akkor a felületi integrált definiáló (13.7) formula (6.10) felhasználásával az

$$\iint_F \underline{v}(\underline{r}) \, dF = \iint_D [-v_1(x, y) f'_x(x, y) - v_2(x, y) f'_y(x, y) + v_3(x, y)] dx dy \quad (13.17)$$

alakban írható fel.

A felületi integrálnak a fizika különböző ágaiban különböző szemléletes jelentése van. Az áramlástanban $\underline{v}(\underline{r})$ az áramló folyadék sebességi vektormezője, amin azt értjük, hogy a tér $\underline{r}$ helyvektoru pontjához az ott tartózkodó folyadék-részecske $\underline{v}$ sebességvektorát hozzárendeljük. Helyezzünk el a folyadék útjába egy képzelt felületdarabot és vizsgáljuk, hogy azon Δt idő alatt mennyi folyadékmennyiség lép át. (A folyadékmennyiséget a térfogattal mérjük. Ha a folyadék összenyomhatatlan, akkor tömege arányos a térfogatával). Osszuk fel a felületdarabot kicsiny ΔF_1 részekre. Ha a vektormező folytonos, akkor rendeljük hozzá a ΔF_1 felületelem minden pontjához a felületelem $\underline{r}_1$ pontjához tartozó $\underline{v}(\underline{r}_1)$ sebességvektort. (A felületelem többi pontjához tartozó sebességvektorok ettől csak keveset térnek el). A felületelemen Δt idő alatt áthaladó folyadék-részecskék egy-közeli-tőleg ferde hasábnak tekinthető - térrészt töltene ki, alaplapja mes $\Delta F_1 = |\Delta F_1|$, éllei $|\underline{v}(\underline{r}_1)| \Delta t$ méretűek. Az $\underline{r}_1$ -hez tartozó ΔF_1 felületi normálvektor és a $\underline{v}(\underline{r}_1)$ vektor szögét α -val jelölve, ennek a ferde hasábnak a térfogata

$$|\Delta F_1| |\underline{v}(\underline{r}_1)| \cos \alpha \Delta t = \underline{v}(\underline{r}_1) \Delta F_1 \Delta t.$$

Ez a mennyiség pozitív vagy negatív aszerint, hogy a folyadék az elemi felületen a normális irányban, vagy az ellenkező irányban lép-e át. Az egész felületen Δt idő alatt átáramlott folyadékmennyiség előjeles összege közelítőleg:

$$\sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{r}_i) \Delta \underline{F}_i \Delta t.$$

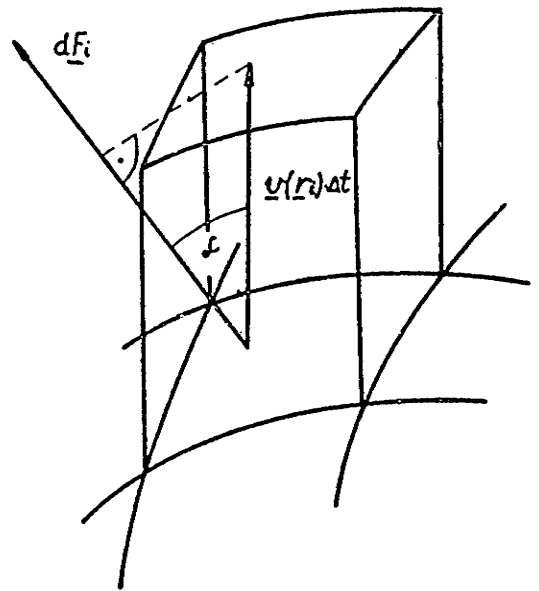
Az időegység alatt áthaladó folyadékmennyiség előjeles értéke közelítőleg

$$\sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{r}_i) \Delta \underline{F}_i.$$

A (13.10) formulában szereplő felületi integrál tehát ebben az esetben azt adja meg, hogy az F felületdarabon időegység alatt mennyivel több folyadék halad át a normális irányában, mint az ellenkező irányban. Ezért ezt az értéket a vektoreloszlás F -re vonatkozó fluxusának nevezik.

Ha F egyszerű, zárt reguláris felület, akkor az F -re vonatkozó felületi integrált a következőképpen jelöljük:

$$\oint_F \underline{v}(\underline{r}) d\underline{F}. \quad (13.18)$$



13.3 ábra

Lyenkor általában F -et úgy írnyltjuk, hogy a normálvektor az F által határolt térrészből kifelé mutasson.

A (13.18) formula folyadékáramlás esetén azt adja meg, hogy az F felülettel bezárt térrészből időegység alatt mennyivel több folyadék lép ki, mint amennyi be lép.

Ha a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező erőteret ír le, akkor $\underline{v}(\underline{r}_1) \triangle \underline{F}_1$ a $\triangle F_1$ felületelemen a normális irányában áthaladó erővonalak számát adja meg.

$$\sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{r}_i) \triangle \underline{F}_i \text{ az fejezi ki, hogy a felületdarabon időegység alatt}$$

közelítőleg mennyivel több erővonal halad át a normális irányában, mint az ellenkező irányban. A

$$\lim \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{r}_i) \triangle \underline{F}_i = \iint_F \underline{v}(\underline{r}) d\underline{F}$$

felületi integrált ilyenkor is fluxusnak nevezzük. Ha F zárt felület, akkor a (13.18) felületi integrál azt fejezi ki, hogy az F felülettel bezárt térrészből mennyivel több erővonal lép ki, mint amennyi belépett.

Sebességeloszlás, ill. erőter esetében a zárt felületre vonatkozó felületi integrál csak akkor lehet zérustól különböző, ha az áramló folyadéknak, ill. az erővonalaknak forrása (negatív érték esetén nyelője) van a zárt felület belsejében. (Elektromos erőterben az erővonalak forrása a pozitív, nyelője a negatív töltés.)

13.4 Példa. Az origóban elhelyezett "e" pozitív elektromos töltés erőterében, az origó középpontú, R sugarú G gömb felületén kiszámítjuk a zárt felületi integrál értékét kifelé mutató normálissal. Az egységek megfelelő választásával az $\underline{r}$ pontban elhelyezett pozitív egységnyi próbatestre gyakorolt erő

$$\underline{v}(\underline{r}) = e \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}.$$

Gömbi koordinátákkal számolva, felhasználva a 6.1 Példa eredményeit

$$\underline{r}'_{\vartheta} \cdot \underline{r}'_{\varphi} = R^2 (\sin^2 \vartheta \cos \varphi \underline{i} + \sin^2 \vartheta \sin \varphi \underline{j} + \cos \vartheta \sin \vartheta \underline{k})$$

irányítása megfelelő: az első térnyolcadban a $\underline{k}$ irányu komponense pozitív.

$$\underline{v}(\underline{r}(\vartheta, \varphi)) = \frac{e}{R^2} [\sin \vartheta \cos \varphi \underline{i} + \sin \vartheta \sin \varphi \underline{j} + \cos \vartheta \underline{k}]$$

$$(\underline{v}(\underline{r}(\vartheta, \varphi)) \underline{r}'_{\vartheta} \cdot \underline{r}'_{\varphi}) = e \cdot \sin \vartheta,$$

$$\iint_G e \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} d\underline{F} = e \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = e \int_0^{2\pi} [-\cos \vartheta]_0^{\pi} d\varphi =$$

$$= 2e \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi e, \text{ a sugártól függetlenül. Az "e" töltés tehát } 4\pi e$$

számu erővonal "forrása". (V. 8. 12.1 Példa).

A $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező skalárértékű vonalintegráljához és felületi integráljához hasonlóan értelmezni szokták még többek között, az alábbi integrálokat.

$$\int_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) ds \quad (13.19)$$

vektor-vektor függvény γ görbére vonatkozó (vektor-értékű) "ívhossz szerinti integrálja".

$$\int_{\gamma} u(\underline{r}) d\underline{r} \quad (13.20)$$

skalár-vektor függvény γ görbére vonatkozó (vektorértékű) "vonallintegrálja".

$$\iint_F u(\underline{r}) d\underline{F} \quad (13.21)$$

skalár-vektor függvény F felületre vonatkozó (vektorértékű) "felületi integrálja".

$$\iint_F u(\underline{r}) dF \quad (13.22)$$

skalár-vektor függvény F felületre vonatkozó "felszín szerinti integrálja."

Az utóbbi integrálfogalomhoz pl. a következő módon is eljuthatunk: Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ -korlátos és mérhető területű tartomány,

$$F = \{ \underline{r}: \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D \}$$

reguláris felületdarab és $u = u(\underline{r})$ ezen értelmezett folytonos skalár-vektor függvény. Felosztjuk az F felületet kis $\triangle F_i$ részekre, mindegyikben kijelölünk egy $\underline{r}_i$ pontot. Az $u(\underline{r}_i)$ értéket $\triangle F_i$ felszínével szorozva és e szorzatokkal összeadva a

$$\sum_{i=1}^n u(\underline{r}_i) \text{ mes } \Delta F_i$$

"integrálközelítő összeget" nyerjük. Ha F felosztása minden határon túl finomodik, ezen összeg határértékét, az

$$\iint_F u(\underline{r}) dF = \lim \sum_{i=1}^n u(\underline{r}_i) \text{ mes } \Delta F_i \quad (13.23)$$

számot az $u(\underline{r})$ függvény F -re vonatkozó felszín szerinti integráljának nevezzük.

Mivel egy "elemi paraméternégyyszög" felszíne $\text{mes } \Delta F_i \approx \left| \underline{r}_1(u_{11}', u_{21}') \times \underline{r}_2(u_{11}', u_{21}') \right| \Delta u_{11} \Delta u_{21}'$, ezért a felszín szerinti integrál kiszámítása az

$$\iint_F u(\underline{r}) dF = \iint_D u(\underline{r}(u_1, u_2)) \left| \underline{r}_1(u_1, u_2) \times \underline{r}_2(u_1, u_2) \right| du_1 du_2 \quad (13.24)$$

formulával kettős integrál kiszámítására vezethető vissza.

14. Integrálátalakító tételek

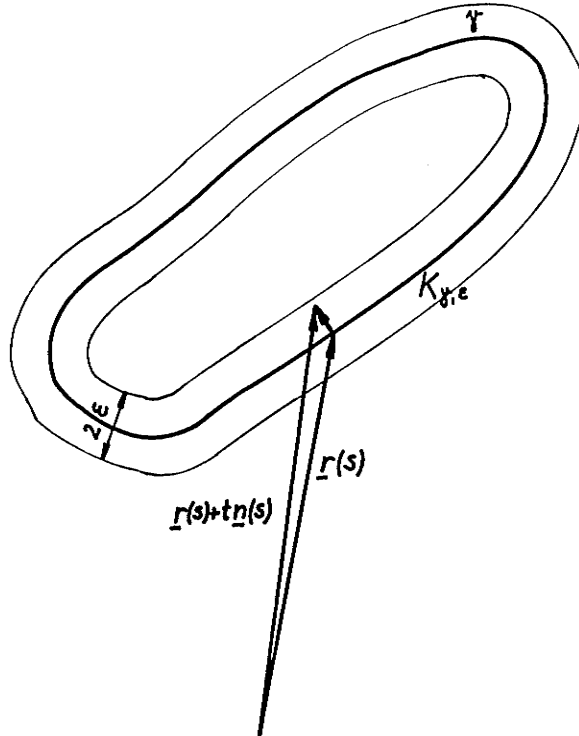
A vektoranalízis alkalmazásaiban, a mechanikában, a termodinamikában, a potenciálméletben, általában a matematikai fizikában alapvetően fontos szerepet játszanak az ún. "integrálátalakító tételek". Ezek segítségével vektor-vektor függvény zárt felületre, ill. zárt görbére vonatkozó integrálját átírhatjuk divergenciájának, ill. rotációjának "térfogati", (hármass), ill. felületi integráljává. E tételek bizonyos esetekben megkönnyítik a szóban forgó integrálok kiszámítását. Lényegesebb azonban az, hogy ezeknek a tételeknek a segítségével fizikai jelenségeket leíró, általános törvények vezethetők le. E tételek alapján mutatható meg az is, hogy mi a vektoreloszlás divergenciájának, ill. rotációjának szemléletes, fizikai jelentése.

Először vektor-vektor függvény zárt felületre vonatkozó integráljának térfogati integrállá való átalakításával foglalkozunk. Szükségünk lesz két segédtétele. Egy γ síkgörbe ε -környezetének nevezzük a sík azon pontjainak, $K_{\gamma, \varepsilon}$ halmazát, melyek távolsága γ -tól kisebb, mint ε ($\varepsilon > 0$ adott szám). A $K_{\gamma, \varepsilon}$ "2 ε szélességű sáv" területére vonatkozik a:

14.1 Segédteétel.

Legyen γ egyszerű, reguláris, zárt síkgörbe, melynek görbülete csak véges sok pontban zérus, jelöljük γ hosszát ℓ -lel és a görbület maximumát M -mel; ekkor minden $0 < \varepsilon < \frac{1}{M}$ számra a $K_{\gamma, \varepsilon}$ sáv területe

$$\text{mes } K_{\gamma, \varepsilon} \leq 2 \ell \varepsilon .$$

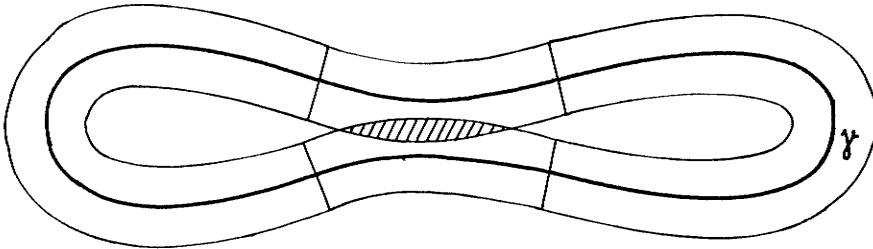


14.1 ábra

Bizonyítás. Legyen γ természetes paraméterezésben az $\underline{r} = \underline{r}(s)$ egyenlettel adva, ahol $0 \leq s \leq \ell$. Jelöljük γ főnormális egységvektorát $\underline{n}(s)$ -sel, görbületét $\kappa(s)$ -sel. A feltevésekből következik, hogy $\kappa(s)$ folytonos a $[0, \ell]$ zárt intervallumon és maximuma, M pozitív szám. Azokban a pontokban, amelyekben a görbület zérus, $\underline{n}(s)$ nincs értelmezve. Értelmezzük azonban $\underline{n}(s)$ -et ezekben a pontokban is például úgy, hogy balról folytonos legyen. A $K_{\gamma, \varepsilon}$ sávot ("gyűrűt", lásd 14.1 ábra) kétparaméteres vektor-skalár függvény segítségével, mint (síkbeli) felületdarabot állítjuk elő:

$$K_{\gamma, \varepsilon} = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(s) + t \underline{n}(s), \quad 0 \leq s \leq \ell, -\varepsilon < t < \varepsilon \}.$$

Ha a $K_{\gamma, \varepsilon}$ sávot, elég sok helyen, többek között azokban a pontokban, amelyekben γ görbülete zérus, γ -ra merőleges egyenesekkel, kis darabokra vágjuk, akkor az egyes darabok reguláris felületdarabok.



14.2 ábra

$K_{\gamma, \varepsilon}$ e reguláris felületdarabok egyesítése és területe (felszíne) ezek szerint kisebb, vagy egyenlő, mint e reguláris felületdarabok felszínének összege. (E felületdarabok átfedhetik egymást, lásd 14.2 ábra). Bevezetve az $\underline{r}(s, t) = \underline{r}(s) + t \underline{n}(s)$ jelölést

$$\underline{r}'_s = \underline{r}'(s) + t \underline{n}'(s) = \underline{t}'(s) + t(-\gamma(s) \underline{t}(s)) = (1 - t \gamma(s)) \underline{t}(s),$$

ahol felhasználtuk a (3.16) Frenet-féle formulát és azt, hogy γ torziója, zérus. $\underline{r}'_t = \underline{n}(s)$. Így

$$|\underline{r}'_s \times \underline{r}'_t| = |(1 - t \gamma(s)) \underline{t} \times \underline{n}| = |1 - t \gamma(s)| = 1 - t \gamma(s) > 0,$$

mivel ha $\gamma(s) \neq 0$, akkor

$$|t \gamma(s)| < \varepsilon \gamma(s) < \frac{1}{M} \gamma(s) \leq 1.$$

(7.1) alapján

$$\text{mes } K_{\gamma, \varepsilon} \leq \int_0^\ell \int_{-\varepsilon}^\varepsilon (1 - t \gamma(s)) dt ds = 2 \ell \varepsilon.$$

Megjegyezzük, hogy az előbbi bizonyításban az $\varepsilon < \frac{1}{M}$ feltétel lényeges. Ezt biztosítja ui. azt, hogy a $K_{\gamma, \varepsilon}$ sáv $\underline{r}(s) + t \underline{n}(s)$ pontjának a görbé-

től mért $|t|$ távolsága (ami egyben a görbe $\underline{r}(s)$ pontjától mért távolság) kisebb, mint a görbe bármely " $\underline{r}(s)$ -hez közeli" pontjától mért távolság, vagyis azt, hogy az $(s, t) \mapsto \underline{r}(s) + t \underline{n}(s)$ megfeleltetés legalábbis "lokálisan" egy-egyértelmű. Ezt mutatja az is, hogy $|\underline{r}'_s \times \underline{r}'_t| > 0$. Természetesen ha $K_{\gamma, \varepsilon}$ nem fedi át önmagát, akkor mes $K_{\gamma, \varepsilon} = 2 \ell \varepsilon$, ami az ℓ magasságu 2ε alapu téglalap területe.

Megjegyezzük továbbá, hogy a 14.1 Segédtétel akkor is érvényben marad, ha a γ egyszerű, zárt síkgörbe töréspontokban csatlakozó reguláris darabokból áll, ill. ha egyenesszakaszokat (melyek mentén a görbület azonosan zérus) is tartalmaz.

14.2 Segédtétel.

Legyen D az xy sík zárt, összefüggő, mérhető területű tartománya és a $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény folytonosan differenciálható, jelöljük a $z = \varphi(x, y)$ egyenletű F reguláris felületdarab "felfelé irányított" normál egységvektorát $\underline{m}(x, y)$ -nal, $\underline{m}$ -nek az x, y sík $\underline{k}$ normálvektorával bezárt szögét $\alpha(x, y)$ -nal: ekkor van $(x_0, y_0) \in D$ pont (F -nek olyan pontja), hogy D területe F felszínének és az e pontbeli α szög cosinusának szorzata:

$$\text{mes } D = \text{mes } F \cos \alpha(x_0, y_0).$$

Bizonyítás. (6.10) alapján F "felfelé irányított" normál egységvektora

$$\underline{m} = - \frac{\varphi'_x}{\left(1 + \varphi'^2_x + \varphi'^2_y\right)^{\frac{1}{2}}} \underline{i} - \frac{\varphi'_y}{\left(1 + \varphi'^2_x + \varphi'^2_y\right)^{\frac{1}{2}}} \underline{j} + \frac{1}{\left(1 + \varphi'^2_x + \varphi'^2_y\right)^{\frac{1}{2}}} \underline{k},$$

vagyis

$$\cos \alpha = \frac{1}{\left(1 + \varphi'^2_x + \varphi'^2_y\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (14.1)$$

F felszíne

$$\text{mes } F = \iint_D \left(1 + \varphi'^2_x + \varphi'^2_y\right)^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

A kettős integrálokra vonatkozó középértéktétel (V. Kötet, 13.10 Tétel) szerint van $(x_0, y_0) \in D$, hogy

$$\begin{aligned} \text{mes } F &= (1 + \varphi'_x{}^2(x_0, y_0) + \varphi'_y{}^2(x_0, y_0)) \frac{1}{2} \iint_D dx dy = \\ &= (1 + \varphi'_x{}^2(x_0, y_0) + \varphi'_y{}^2(x_0, y_0)) \frac{1}{2} \text{ mes } D, \end{aligned}$$

ahonnan (14.1) alapján állításunk következik.

Abban a speciális esetben, amikor F siktartomány, F normál egységvektora állandó (minden pontban ugyanaz): F síkjának a normálvektora. Ekkor D nem más, mint az F siktartomány vetülete az x, y síkra $\propto$ pedig az F síkjának normálvektora és D síkjának normálvektora által bezárt (hegyes) szög. Miután a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer tet-szőlegesen felvehető, előző eredményünk ebben a speciális esetben a következőképpen szól. Az F siktartomány D vetületének területe egyenlő F területének és az F , ill. D sík által bezárt hegyes szög cosinusának szorzatával.

14.3 Tétel.

(Gauss-Osztrogradszkij-tétel). Legyen F egyszerű zárt reguláris felület, kifelé irányított normálvektorral, az F felület által határolt V térrész mérhető térfogatu és létezzék olyan x, y, z Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer, melyben V mind az xy , mind az yz mind pedig a zx síkra normáltartomány (lásd V. Kötet, 15.2 Definíció), tételezzük fel továbbá azt, hogy a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény a $V \cup F$ halmazon folytonosan differenciálható; ekkor

$$\oint_F \underline{v} dF = \iiint_V \operatorname{div} \underline{v} dV, \quad (14.2)$$

vagyis a $\underline{v}(\underline{r})$ függvénynek F -re vonatkozó felületi integrálja egyenlő divergenciájának V -re vonatkozó hármas integráljával.

Bizonyítás. A (14.2) egyenlőség mindkét oldalán a koordinátarendszer megválasztásától független szám áll. Ha tehát egy speciális koordinátarendszerben felírva (14.2) bal és jobb oldalát, az egyenlőség fennáll, akkor bármilyen más koordinátarendszerben is érvényes. (14.2) bal, ill. jobb oldalának létezéséhez F -ről, ill. V -ről csak annyit kell feltételezni, hogy F egyszerű zárt reguláris felület V pedig mérhető térfogatu tartomány legyen.

A bizonyítás során F-re, ill. V-re néhány pótlólagos "regularitási" feltevést teszünk, ezek azonban az általános esethez képest nem jelentenek lényeges megszorítást. Az x, y, z Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben legyen

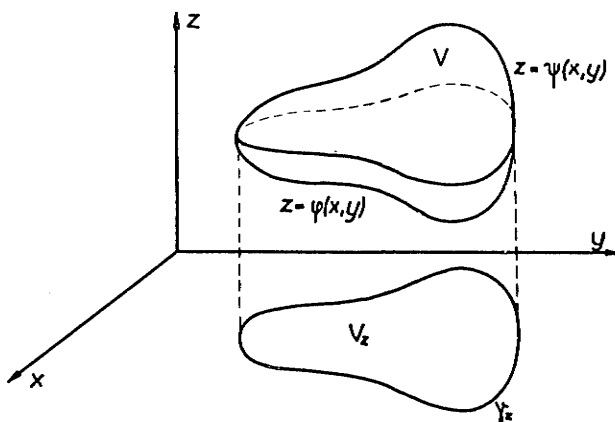
$$\underline{v}(\underline{r}) = v_1(x, y, z) \underline{i} + v_2(x, y, z) \underline{j} + v_3(x, y, z) \underline{k}.$$

Ekkor

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

(14.2) jobb oldalából indulunk ki:

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{v} dV = \iiint_V \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (14.3)$$



14.3 ábra

Először az integrandus harmadik tagját integráljuk és ennek során V-t az xy síkra normáltartományként kezeljük. V-nek az xy síkra vetett vetületét V_z -vel, a V_z siktartomány határoló görbét γ_z -vel jelöljük. Pótlólagosan feltesszük, hogy γ_z reguláris darabokból összetett, egyszerű, zárt síkgörbe. A V tartományt felülről, ill. alulról határoló felület egyenlete legyen $z = \psi(x, y)$, ill. $z = \varphi(x, y)$. A $\psi(x, y)$ és $\varphi(x, y)$ kétváltozós függvényekről pótlólagosan feltesszük, hogy (nemcsak folytonosak, hanem) folytonosan differenciálhatók a V_z (nyílt!) tartományon (lásd 14.3 ábra).

Az V. Kötet, 14. 6 Tétel alapján

$$\begin{aligned}
 \iiint_V \frac{\partial v_3(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{V_z} \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial v_3(x, y, z)}{\partial z} dz \right) dx dy = \\
 &= \iint_V [v_3(x, y, \psi(x, y)) - v_3(x, y, \varphi(x, y))] dx dy = \\
 &= \iint_{V_z} v_3(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \iint_{V_z} v_3(x, y, \varphi(x, y)) dx dy. \quad (14.4)
 \end{aligned}$$

Legyen ε elég kicsi pozitív szám és tekintsük a γ_z görbe $K_{\gamma_z, \varepsilon}$ környezetét. Először (14. 4) jobb oldalának első tagját számítjuk ki.

$$\begin{aligned}
 \iint_{V_z} v_3(x, y, \psi(x, y)) dx dy &= \iint_{V_z \setminus K_{\gamma_z, \varepsilon}} v_3(x, y, \psi(x, y)) dx dy + \\
 &+ \iint_{V_z \cap K_{\gamma_z, \varepsilon}} v_3(x, y, \psi(x, y)) dx dy. \quad (14.5)
 \end{aligned}$$

Mivel $v_3(x, y, \psi(x, y))$ a $V_z \cup \gamma_z$ zárt tartományon folytonos, ezért korlátos és így az V. Kötet, 13. 9 Tétel, illetve a 14. 1 Segédétel alapján van $P > 0$ szám, hogy minden elég kicsi $\varepsilon > 0$ -ra

$$\left| \iint_{V_z \cap K_{\gamma_z, \varepsilon}} v_3(x, y, \psi(x, y)) dx dy \right| \leq P \varepsilon. \quad (14.6)$$

Legyen $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ a $V_z \setminus K_{\gamma_z, \varepsilon}$ tartomány tetszőleges felosztása. (14. 5) jobb oldalának első integrálja a

$$\sum_{i=1}^n \iint_{D_i} v_3(x_i, y_i, \psi(x_i, y_i)) \text{ mes } D_i$$

integrálközelítő összeg (ahol $(x_i, y_i) \in D_i$) határértéke, mikor a felosztás minden határon túl finomodik. $V_z \setminus K_{\gamma_z, \varepsilon}$ e felosztásának megfelel az

$F_{+\varepsilon} = \{(x, y, z): z = \psi(x, y), (x, y) \in V_Z \setminus K_{\psi_Z, \varepsilon}\}$ felület egy $F_1, \dots, F_n$ felosztása. Minden i -re ($i = 1, 2, \dots, n$) alkalmazható a 14.2 Segéd-tétel, vagyis van $(x_i, y_i) \in D_i$, hogy

$$\text{mes } D_i = \text{mes } F_i \cdot \cos \alpha_3(x_i, y_i),$$

ahol $\cos \alpha_3(x_i, y_i)$ az F felület $(x_i, y_i, \psi(x_i, y_i))$ pontbeli kifelé mutató normálvektorának harmadik iránykoszinusza. Az (x_i, y_i) pontot (14.7)-ben ennek megfelelően választva

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n v_3(x_i, y_i, \psi(x_i, y_i)) \text{mes } D_i = \\ & = \sum_{i=1}^n v_3(x_i, y_i, \psi(x_i, y_i)) \cos \alpha_3(x_i, y_i) \text{mes } F_i. \end{aligned}$$

Ha a $\{D_1, \dots, D_n\}$ felosztás minden határon túl finomodik, akkor az $\{F_1, \dots, F_n\}$ felosztás is minden határon túl finomodik és az utóbbi integrálközelítő összeg az

$$\iint_{F_{+\varepsilon}} v_3(x, y, z) \cos \alpha_3(x, y) dF$$

felszín szerinti integrálhoz tart. Ezek szerint

$$\iint_{V_Z \setminus K_{\psi_Z, \varepsilon}} v_3(x, y, \psi(x, y)) dx dy = \iint_{F_{+\varepsilon}} v_3 \cos \alpha_3 dF.$$

Jelöljük F_+ -szal a V térrészt "felülről" határoló felületdarabot, vagyis az F reguláris felület azon darabját, ahol a kifelé mutató felületi normális a $\underline{k}$ egységvektorral hegyes szöget zár be. Ha $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor $F_{+\varepsilon} \rightarrow F_+$, az $F_{+\varepsilon}$ -on vett felszín szerinti integrál tart az F_+ -on vett felszín szerinti integrálhoz (az integrandus folytonos és F_+ reguláris felület, bár $z = \psi(x, y)$ nem reguláris előállítás a "széleken"), (14.5) jobb oldalának második tagja pedig (14.6) miatt zérushoz tart. Így:

$$\iiint_V v_3(x, y, \psi(x, y)) dx dy = \iint_{F_+} v_3 \cos \alpha_3 dF.$$

(14.4) jobb oldalának második tagját hasonló módon írhatjuk át. F_- -szal jelöljük az F felület azon darabját, ahol a kifelé mutató normálvektor a $\underline{k}$ egységvektorral tompa szöget zár be:

$$- \iint_{F_-} v_3(x, y, \varphi(x, y)) dx dy = \iint_{F_-} v_3 \cos \alpha_3 dF.$$

A jobboldalon álló, F_- -ra vonatkozó felszín szerinti integrálban α_3 a kifelé mutató normálvektor $\underline{k}$ -val bezárt szöge. Mivel F_- a V térrészt "alulról" határolja, itt a kifelé mutató normálvektor "lefelé" mutat. A 14.2 Segédétel alkalmazásakor ezért fellép egy (-1) -es szorzó. Az utóbbi két kifejezést (14.4)-be helyettesítve

$$\iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_{F_+} v_3 \cos \alpha_3 dF + \iint_{F_-} v_3 \cos \alpha_3 dF.$$

Az F felületnek vannak pontjai, melyek sem F_+ -hoz, sem F_- -hoz nem tartoznak hozzá, t. i. azok a pontok, ahol F normálvektora a $\underline{k}$ vektorra merőleges. E pontokban azonban $\cos \alpha_3 = 0$ és így a $v_3 \cos \alpha_3$ függvénynek F ezen darabjára vonatkozó felszín szerinti integrálja zérus. Írhatjuk tehát, hogy

$$\iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_F v_3 \cos \alpha_3 dF.$$

Analóg módon írhatjuk át a (14.3) jobb oldalán fellépő integrandus első, ill. második tagjának integrálját. Az első esetben V -t az yz síkra normáltartományként, a második esetben a zx síkra normáltartományként kezeljük. Az első esetben először x szerint, a második esetben először y szerint integrálunk. Természetesen analóg, "pótlólagos" feltevésekkel kell élnünk. Végreddményben azt kapjuk, hogy

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{v} dV = \iint_F (v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + v_3 \cos \alpha_3) dF,$$

ahol $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$ és $\cos \alpha_3$ az F felület kifelé mutató normálvektorának iránykoszinuszai. Az utóbbi felszín szerinti integrál azonban nem más mint a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény F -re vonatkozó felületi integrálja.!

A Gauss-Osztrogradszkij-tétel bizonyításában bizonyos nem túl lényeges kiegészítő feltevéseket tettünk, valójában azonban a tétel lényegesen gyengébb feltételek mellett is érvényes. A (14.2) formula akkor is igaz, ha F egyszerű zárt felület, mely "élekben csatlakozó" reguláris felületdarabokból áll, és az F által határolt V térrész mérhető térfogatu (lásd [6]). A továbbiakban a Gauss-Osztrogradszkij-tételt ebben az általános megfogalmazásban használjuk fel.

A (14.2) formula bal oldalán álló felületi integrál a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvénynek az F zárt felületre vonatkozó fluxusa. Ha $\underline{v}(\underline{r})$ valamilyen áramló közeg sebességeloszlása, akkor az F-re vonatkozó fluxus megadja az F felületen időegység alatt átáramló közeg mennyiségét. Ezt az értéket azonban "előjelesen" kapjuk. A fluxus F azon darabján, melyen a kifelé mutató normálvektor $\underline{v}$ vel hegyes szöget zár be, pozitív, azon darabján pedig, melyen a kifelé mutató normálvektor $\underline{v}$ -vel tompa szöget zár be, negatív. A közeg az előbbi darabon a V térrészből kifelé, az utóbbi darabon a V térrészbe áramlik, (14.2) bal oldala tehát a V térrészből időegység alatt kiáramló közeg-mennyiség (ha negatív, akkor időegység alatt V-be több közeg áramlik be, mint amennyi kiáramlik belőle). Ha feltételezzük, hogy az áramló közeg "összenyomhatatlan" (pl. összenyomhatatlan folyadék), vagyis a közeg egy térfogategysége mindig ugyanakkora közeg-mennyiséget képvisel és a V térrészben közeg nem keletkezik és nem is vész el, akkor a V-ből kifelé és a V-be időegység alatt áramló közeg-mennyiség algebrai összege, vagyis az F-re vonatkozó fluxus zérus. Ha az F-re vonatkozó fluxus pozitív (negatív), akkor értéke (abszolútértéke) egyenlő a V térrészben időegység alatt keletkező (elvesző) közeg-mennyiséggel, vagyis a V térrész forráserősségével (nyelési erősségével). E megfontolások alapján, összenyomhatatlan közeg áramlását szem előtt tartva jogosult a következő fogalomalkotás.

14.1 Definíció.

Legyen F reguláris felületdarabokból összetett, egyszerű, zárt felület kifelé irányított normálvektorral, az F által határolt V térrész mérhető térfogatu és a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény folytonos F-en; ekkor az

$$\frac{1}{\text{mes } V} \iint_F \underline{v} \cdot \underline{d}F$$

hányadost a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény V-re vonatkozó átlagos forráserősségének nevezzük.

14.1 Példa. Legyen $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$ és F az origó középpontu "a" sugaru gömb. F kifelé mutató normál egységvektora $\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$, felszine lenne a 6.1 Példa szerinti paraméterezésben $a^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$. Ezek szerint $\underline{v}(\underline{r})$ - nek F-re vonatkozó fluxusa $|\underline{r}| = a$, figyelembe vételével

$$\begin{aligned} \iint_F \underline{v}(\underline{r}) d\underline{F} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} a^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi [-\cos \vartheta]_0^{\pi} = 4\pi. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy a fluxus független a gömb "a" sugarától. Az F gömbfelület által határolt golyóra vonatkozó átlagos forráserősség

$$\frac{4\pi}{\frac{4}{3}a^3\pi} = \frac{3}{a^3}.$$

A következő tétel a divergencia alapvető fontosságu fizikai jelentésére világít rá és megmutatja a divergencia kapcsolatát a vektoreloszlás forráserősségével.

14.4 Tétel.

Legyen $\underline{v}(\underline{r})$ az $\underline{r}_0$ pont egy $K_{\underline{r}_0}$ környezetében

folytonosan differenciálható, F_n , ($n = 1, 2, \dots$)

reguláris felületdarabokból összetett, egyszerű, zárt felületeknek egy végtelen sorozata, melyre az F_n által határolt V_n térrész mérhető térfogatu, tegyük fel továbbá, hogy az F_n , ($n = 1, 2, \dots$)

végtelen sorozat "az $\underline{r}_0$ pontra zsugorodik", vagyis

$\underline{r}_0$ eleme minden V_n -nek és F_n átmérője zérushoz tart, ha n tart végtelenhez (ekkor természetesen $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } V_n = 0$): e feltevések mellett a $\underline{v}(\underline{r})$ -

vektor-vektor függvény V_n -nek-re vonatkozó átlagos forráserősségeinek sorozata konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{mes } V_n} \iint_{F_n} \underline{v} \, dF = \text{div } \underline{v}(\underline{r}_0). \quad (14.8)$$

E tétel indokolja, hogy $\underline{v}(\underline{r})$ divergenciáját egy tetszőleges $\underline{r}$ pontban $\underline{v}(\underline{r})$ $\underline{r}$ -beli forrásereősség-sűrűségének nevezzük.

Bizonyítás. Ha F_n átmérője már elég kicsi, akkor $F_n \subset K_{\underline{r}_0}$, $V_n \subset K_{\underline{r}_0}$

és fennállnak a Gauss-Osztrogradskij-tétel feltételei, vagyis

$$\iint_{F_n} \underline{v} \, dF = \iiint_{V_n} \text{div } \underline{v} \, dV.$$

A jobboldalon álló integrálra alkalmazhatjuk a középértéktételt (az V. Kötet, 13.10 Tétel hármas integrálokra vonatkozó analógonját), mely szerint van $\underline{r}_n$ pont V_n -ben, hogy

$$\iint_{F_n} \underline{v} \, dF = \text{div } \underline{v}(\underline{r}_n) \iiint_{V_n} dV = \text{div } \underline{v}(\underline{r}_n) \text{mes } V_n.$$

Innen a V_n -re vonatkozó átlagos forrásereősség

$$\frac{1}{\text{mes } V_n} \iint_{F_n} \underline{v} \, dF = \text{div } \underline{v}(\underline{r}_n).$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor F_n és vele V_n az $\underline{r}_0$ pontra zsugorodik, tehát $\underline{r}_n \rightarrow \underline{r}_0$, ahonnan $\text{div } \underline{v}$ folytonossága miatt állításunk következik.!

Áttérünk vektor-vektor függvény zárt görbére vonatkozó vonalintegráljának felületi integrállá való átalakítására.

14.5 Tétel.

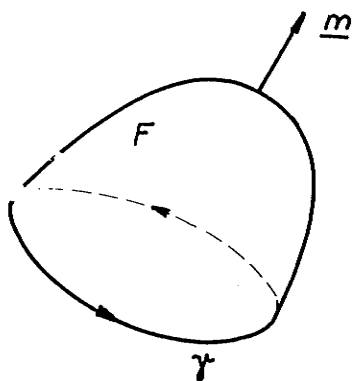
(Stokes-tétel). Legyen $\hat{F}$ reguláris felületdarab, γ irányított, egyszerű, reguláris, zárt felületi görbe $\hat{F}$ -en; $\hat{F}$ normálvektorát irányítsuk úgy, hogy annak irányából nézve a γ -n kijelölt haladási irány pozitív (az óramutató járásával ellenkező (lásd 14.4 ábra) legyen; $\hat{F}$ -nek γ által határolt darabját F -fel jelöljük és feltételezzük, hogy $\hat{F}$ -nek van olyan $\underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2)$ előállítás, melyben

$$F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D \},$$

$$\gamma = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in g \},$$

ahol D mind az u_1 -, mind pedig az u_2 tengelyre normáltartomány (lásd V. Kötet, 15.1 Definíció) és a D -t határoló g görbe egyszerű, reguláris, zárt síkgörbe; legyen továbbá a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény az $F \cup \gamma$ halmazon folytonosan differenciálható; e feltevések mellett $\underline{v}(\underline{r})$ -nek γ -ra vonatkozó vonalintegrálja (cirkulációja) egyenlő $\underline{v}$ rotációjának F -re vonatkozó felületi integráljával:

$$\oint_{\gamma} \underline{v} d\underline{r} = \iint_F \text{rot } \underline{v} d\underline{F} \quad (14.9)$$



14.4 ábra

Bizonyítás. A (14.9) formulának a bal, ill. a jobb oldala független a γ görbe, ill. az F felület paraméterezésétől (feltéve, hogy a paraméterezés az irányítást nem változtatja meg). Ezért, ha (14.9) valamilyen paraméterezésben fennáll, akkor paraméterezéstől függetlenül igaz. (14.9) jobb oldalából indulunk ki. A (13.7) formula, a vektor-szorzat elemi tulajdonságai és a 11.2 Tétel felhasználásával (az $\underline{r}_1 = \underline{r}'_{u_1}$, $\underline{r}_2 = \underline{r}'_{u_2}$ jelölések alkalmazásával)

$$\begin{aligned} \iint_F \text{rot } \underline{v} d\underline{F} &= \iint_D (\text{rot } \underline{v}(\underline{r}(u_1, u_2))) \underline{r}_1 \underline{r}_2 du_1 du_2 = \\ &= - \iint_D (\underline{r}_1 \text{ rot } \underline{v} \underline{r}_2) du_1 du_2 = \\ &= - \iint_D (\underline{r}_2 \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \underline{r}_2 - \underline{r}_2 \frac{d\underline{v}}{d\underline{r}} \underline{r}_1) du_1, du_2 = \\ &= \iint_D (\underline{r}_2 \frac{d\underline{v}(\underline{r}(u_1, u_2))}{d\underline{r}} \underline{r}_1 - \underline{r}_1 \frac{d\underline{v}(\underline{r}(u_1, u_2))}{d\underline{r}} \underline{r}_2) du_1, du_2. \end{aligned}$$

Azonban az összetett függvény differenciálási szabálya alapján

$$\frac{dv(\underline{r}(u_1, u_2))}{d\underline{r}} \underline{r}_1 = \frac{\partial}{\partial u_1} v(\underline{r}(u_1, u_2)) ,$$

$$\frac{dv(\underline{r}(u_1, u_2))}{d\underline{r}} \underline{r}_2 = \frac{\partial}{\partial u_2} v(\underline{r}(u_1, u_2)) .$$

Az utóbbi kifejezéseket az előző egyenlőségbe behelyettesítve

$$\begin{aligned} \iint_F \operatorname{rot} \underline{v} dF &= \iint_D \underline{r}_2 \frac{\partial}{\partial u_1} v(\underline{r}(u_1, u_2)) du_1 du_2 - \\ &- \iint_D \underline{r}_1 \frac{\partial}{\partial u_2} v(\underline{r}(u_1, u_2)) du_1 du_2 = I_1 - I_2 , \end{aligned} \quad (14.10)$$

ahol az első integrált I_1 -gyel, a másodikat I_2 -vel jelöltük. Az I_1 kettős integrál kiszámítása során D -t az u_2 -tengelyre normáltartománynak, I_2 kiszámítása során D -t az u_1 -tengelyre normáltartománynak tekintjük. Legyen az első esetben

$$D = \{ (u_1, u_2) : \varphi_1(u_2) < u_1 < \psi_1(u_2) , \alpha_2 < u_2 < \beta_2 \} .$$

a második esetben

$$D = \{ (u_1, u_2) : \varphi_2(u_1) < u_2 < \psi_2(u_1) , \gamma_1 < u_1 < \delta_1 \} .$$

A D -re és a g -re tett feltevésekből következik, hogy a φ_1 , φ_2 , ill. ψ_1 , ψ_2 függvények izolált pontok kivételével folytonosan differenciálhatóak, először szigorúan monoton csökkenők, majd szigorúan növekedők, ill. fordítva, grafikonjuk csak annak a pontnak környezetében tartalmazhat vízszintes egyenesszakaszt, ahol minimumukat, ill. maximumukat veszik fel (ez utóbbi lehetőséget azonban az egyszerűség kedvéért kizárjuk; a tárgyalás könnyen kiterjeszthető erre az esetre is). Megjegyezzük, hogy e függvények deriváltja az értelmezési tartomány végpontjai környezetében (és

esetleg néhány más izolált pontban) végtelenné válik, ezért a továbbiakban improprius integrálok is fellépnek.

Ekkor

$$I_1 = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\psi_1(u_2)}^{\varphi_1(u_2)} \underline{r}'_{u_2}(u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial u_1} \underline{v}(\underline{r}(u_1, u_2)) du_1 \Big] du_2.$$

Most parciálisan integrálunk (lásd II. Kötet, 29.8 Következmény. Az integrandus itt két vektor skaláris szorzata, ahol a második tényező egy u_1 -változó szerinti derivált. Az, hogy a parciális integrálás elve ebben az esetben ugyanugy alkalmazható, mint skalár függvények esetében, a skaláris szorzat (1.7) differenciálási szabálya alapján könnyen belátható). Az

$\underline{r}_{12} = \underline{r}''_{u_2 u_1} = \underline{r}''_{u_1 u_2}$ jelölés alkalmazásával

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left\{ \left[\underline{r}_2(u_1, u_2) \underline{v}(\underline{r}(u_1, u_2)) \right]_{\psi_1(u_2)}^{\varphi_1(u_2)} - \int_{\psi_1(u_2)}^{\varphi_1(u_2)} \underline{r}_{12} \underline{v}(\underline{r}(u_1, u_2)) du_1 \right\} du_2 = \\ &= \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \underline{v}(\underline{r}(\psi_1(u_2), u_2)) \underline{r}_2(\psi_1(u_2), u_2) du_2 - \\ &- \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \underline{v}(\underline{r}(\varphi_1(u_2), u_2)) \underline{r}_2(\varphi_1(u_2), u_2) du_2 - \\ &- \iint_D \underline{r}_{12} \underline{v}(\underline{r}(u_1, u_2)) du_1 du_2. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Az összetett függvény differenciálási szabálya szerint azonban

$$\frac{d}{du_2} \underline{r}(\psi_1(u_2), u_2) = \underline{r}_1(\psi_1(u_2), u_2) \psi_1'(u_2) + \underline{r}_2(\psi_1(u_2), u_2),$$

vagyis

$$\underline{r}_2(\psi_1(u_2), u_2) = \frac{d}{du_2} \underline{r}(\psi_1(u_2), u_2) - \underline{r}_1(\psi_1(u_2), u_2) \psi_1'(u_2).$$

Analóg módon

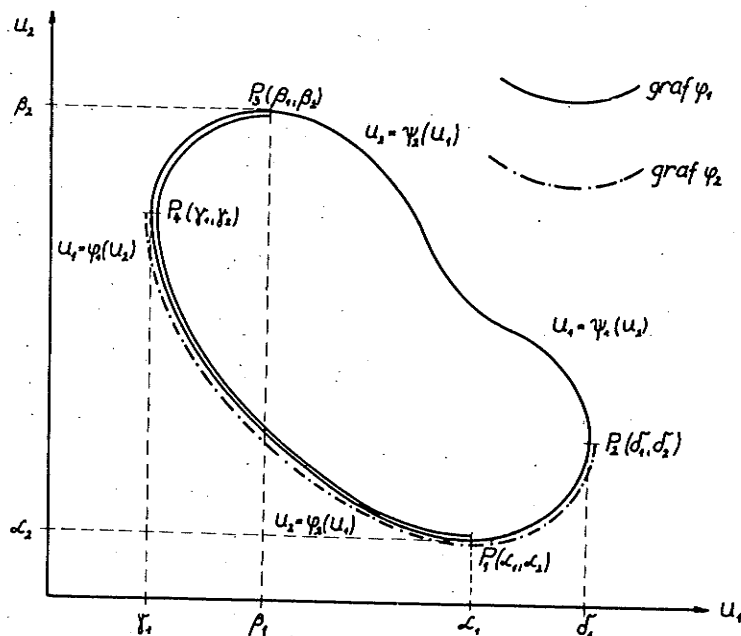
$$\underline{r}_2(\varphi_1(u_2), u_2) = \frac{d}{du_2} \underline{r}(\varphi_1(u_2), u_2) - \underline{r}_1(\varphi_1(u_2), u_2) \varphi_1'(u_2).$$

Az utóbbi kifejezéseket (14.11)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \underline{v}(\underline{r}(\psi_1(u_2), u_2)) \frac{d}{du_2} \underline{r}(\psi_1(u_2), u_2) du_2 + \\ & + \int_{\beta_2}^{\alpha_2} \underline{v}(\underline{r}(\varphi_1(u_2), u_2)) \frac{d}{du_2} \underline{r}(\varphi_1(u_2), u_2) du_2 - \\ & - \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \underline{v}(\underline{r}(\psi_1(u_2), u_2)) \underline{r}_1(\psi_1(u_2), u_2) \psi_1'(u_2) du_2 + \\ & + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \underline{v}(\underline{r}(\varphi_1(u_2), u_2)) \underline{r}_1(\varphi_1(u_2), u_2) \varphi_1'(u_2) du_2 - \\ & - \iint_D \underline{r}_{12} \underline{v}(\underline{r}(u_1, u_2)) du_1 du_2. \end{aligned} \quad (14.12)$$

$\underline{r} = \underline{r}(\psi_1(u_2), u_2)$ a γ térgörbe azon darabjának az előállítás, mely a g síkgörbe $P_1 P_2 P_3$ szakaszának felel meg (lásd 14.5 ábra.) Miközben u_2 az α_2 értékről β_2 -re nő, a g görbén befutjuk a $P_1 P_2 P_3$ ívet. $\underline{r} = \underline{r}(\varphi_1(u_2), u_2)$ a γ térgörbe azon darabjának az előállítás, mely a síkgörbe $P_3 P_4 P_1$ szakaszának felel meg. Miközben u_2 a β_2 értékről lecsökken az α_2 értékre, a g görbén befutjuk a $P_3 P_4 P_1$ ívet. Eközben az $u_1 u_2$ síkbeli g görbét pozitív irányban jártuk körül. Ennek az irányításnak a γ görbén

ugyancsak pozitív irányítás felel meg, ha F -et az u_1, u_2 paraméterezés által meghatározott $\underline{r}_1 \times \underline{r}_2$ normálvektor irányából nézzük. Miután a felületi integrál kiszámításában éppen ezt a normálvektort használtuk, γ irányítása a tétel követelményeinek eleget tesz. Ezek szerint I_1 utóbbi kifejezésében az első két integrál összege éppen $\underline{v}(\underline{r})$ -nek a megfelelően irányított γ görbére vonatkozó vonalintegrálja.



14.5 ábra

(14.12) harmadik, ill. negyedik integráljában végrehajtjuk az $u_1 = \psi_1(u_2)$, ill. az $u_1 = \varphi_1(u_2)$ helyettesítést. A $\psi_1(u_2)$ függvény inverz függvénye az (α_2, δ_2) intervallumon a $\varphi_2(u_1)$, $u_1 \in (\alpha_1, \delta_1)$ függvény, a (δ_2, β_2) intervallumon a $\psi_2(u_1)$, $u_1 \in (\delta_1, \beta_1)$ függvény (lásd 14.5 ábra); így

$$\begin{aligned}
& - \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \underline{v}(\underline{r}(\psi_1(u_2), u_2)) \underline{r}_1(\psi_1(u_2), u_2) \psi_1'(u_2) du_2 = \\
& = - \int_{\alpha_1}^{\delta_1} \underline{v}(\underline{r}(u_1, \varphi_2(u_1))) \underline{r}_1(u_1, \varphi_2(u_1)) du_1 - \\
& - \int_{\delta_1}^{\beta_1} \underline{v}(\underline{r}(u_1, \psi_2(u_1))) \underline{r}_1(u_1, \psi_2(u_1)) du_1.
\end{aligned}$$

A $\varphi_1(u_2)$ függvény inverz függvénye az (α_2, γ_2) intervallumon a $\varphi_2(u_1)$, $u_1 \in (\alpha_1, \gamma_1)$ függvény, a (γ_2, β_2) intervallumon a $\psi_2(u_1)$, $u_1 \in (\gamma_1, \beta_1)$ függvény; így

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \underline{v}(\underline{r}(\varphi_1(u_2), u_2)) \underline{r}_1(\varphi_1(u_2), u_2) \varphi_1'(u_2) du_2 = \\
& = \int_{\alpha_1}^{\gamma_1} \underline{v}(\underline{r}(u_1, \varphi_2(u_1))) \underline{r}_1(u_1, \varphi_2(u_1)) du_1 + \\
& + \int_{\gamma_1}^{\beta_1} \underline{v}(\underline{r}(u_1, \psi_2(u_1))) \underline{r}_1(u_1, \psi_2(u_1)) du_1.
\end{aligned}$$

Ezeket az eredményeket (14.12)-be helyettesítve, ahol szükséges az integrálós határokat felcserélve és az azonos integrandusok integrálját összevonva I_1 -re a következő kifejezést kapjuk:

$$I_1 = \oint_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} + \int_{\gamma_1}^{\delta_1} \underline{v}(\underline{r}(u_1, \psi_2(u_1))) \underline{r}_1(u_1, \psi_2(u_1)) du_1 -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\gamma_1}^{\delta_1} \underline{v}(\underline{r}(u_1, \varphi_2(u_1))) \underline{r}_1(u_1, \varphi_2(u_1)) du_1 - \\
& - \iint_D \underline{r}_{12} \underline{v}(\underline{r}(u_1, u_2)) du_1 du_2.
\end{aligned}$$

Az I_2 integrálra teljesen hasonló módon a (14.11) formulával analóg

$$\begin{aligned}
I_2 = & \int_{\gamma_1}^{\delta_1} \underline{v}(\underline{r}(u_1, \psi_2(u_1))) \underline{r}_1(u_1, \psi_2(u_1)) du_1 - \\
& - \int_{\gamma_1}^{\delta_1} \underline{v}(\underline{r}(u_1, \varphi_2(u_1))) \underline{r}_1(u_1, \varphi_2(u_1)) du_1 - \\
& - \iint_D \underline{r}_{12} \underline{v}(\underline{r}(u_1, u_2)) du_1 du_2
\end{aligned}$$

kifejezést kapjuk. I_1 és I_2 utóbbi kifejezéseit (14.10)-be helyettesítve az I_1 kifejezésben álló első tagon kívül az összes tag kiesik és eredményül a

$$\iint_F \text{rot } \underline{v} d\underline{F} = \oint_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r}$$

egyenlőség adódik.!

Hasonlóan a Gauss-Osztrogradszkij-tételhez a Stokes-tétel is érvényes lényegesen gyengébb feltételek mellett, mint azok, melyek a 14.5 Tétel kimondásában szerepelnek. Elhagyhatók a D -re és g -re tett megszorítások, és a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvényre tett feltevések mellett a Stokes-tétel érvényes feltéve, hogy F élekben csatlakozó reguláris felületdarabokból összetett egyszerű, irányított felületdarab, melyet egyetlen reguláris görbék-ből összetett egyszerű zárt γ görbe határol (lásd [6]). A továbbiakban a Stokes-tételt ebben az általános megfogalmazásban használjuk fel.

A (14.9) egyenlőség bal oldalán a $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-eloszlás γ -ra vonatkozó cirkulációja áll. Ha $\underline{v}(\underline{r})$ valamilyen (tömegek, elektromos, vagy mágneses töltések által létrehozott) erőter térerősség vektor-eloszlása, akkor a cirkuláció megadja a végzett munkát, miközben a "próbarészecske" γ -n körbe mozgatva visszatér eredeti helyzetébe. Ha a cirkulációt elosztjuk a γ által határolt felületdarab felszínével, megkapjuk azt az átlagos munkát,

melyet a próbarészecskének adott állásu és egységnyi felszíni felületdarab határoló görbéjén való körbe mozgatása során végezni kell, miközben a próbarészecske eredeti helyzetébe visszatér (ha a cirkuláció pozitív, a munkát az erőter végzi, ha negatív, az erőter ellenében kell végezni). Ezek a megfontolások indokolják a következő tétel kimondását, mely szemléletes fizikai jelentést ad a rot $\underline{v}$ vektornak.

14.6 Tétel.

Legyen $\underline{v}(\underline{r})$ az $\underline{r}_0$ pont egy $K_{\underline{r}_0}$ környezetében folytonosan differenciálható, F az $\underline{r}_0$ ponton áthaladó reguláris felületdarab, melynek $\underline{r}_0$ pontbeli egység normálvektora $\underline{n}$, γ_k ($k=1, 2, 3, \dots$) F -en levő $\underline{n}$ irányából nézve pozitív körüljárásu, egyszerű, zárt reguláris felületi görbék végtelen sorozata melyre F -nek γ_k által határolt F_k darabja az $\underline{r}_0$ pontot tartalmazza; tegyük fel továbbá, hogy a γ_k ($k=1, 2, \dots$) végtelen sorozat az $\underline{r}_0$ pontra zsugorodik, vagyis γ_k átmérője zérushoz tart, (ekkor természetesen a γ_k által határolt F_k felületdarab mes F_k felszíne zérushoz tart); e feltevések mellett

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{mes } F_k} \oint_{\gamma_k} \underline{v} d\underline{r} = \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} \quad (14.13)$$

Bizonyítás. Legyen $F = \{ \underline{r} : \underline{r} = \underline{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D \}$, $\underline{r}(u_1^0, u_2^0) = \underline{r}_0$, F_k -nak az u_1, u_2 síkban megfelelő tartomány D_k , ($k = 1, 2, \dots$), $\underline{m}^0(u_1^0, u_2^0) =$

$$= \frac{\underline{r}_1 \times \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \times \underline{r}_2|} \text{ és } \underline{m}^0(u_1^0, u_2^0) = \underline{n}. \text{ A Stokes-tétel értelmében}$$

$$\oint_{\gamma_k} \underline{v} d\underline{r} = \iint_{F_k} \text{rot } \underline{v} d\underline{F} = \iint_{D_k} (\text{rot } \underline{v} \cdot \underline{r}_1 \underline{r}_2) du_1 du_2.$$

A kettős integrálokra vonatkozó középértéktétel (V.Kötet, 13.10 Tétel) szerint van $(u_1^k, u_2^k) \in D_k$, hogy

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_k} \underline{v} d\underline{r} &= (\text{rot } \underline{v} \cdot \underline{r}_1 \underline{r}_2)(u_1^k, u_2^k) \text{mes } D_k = \\ &= \text{rot } \underline{v}(\underline{r}(u_1^k, u_2^k)) \cdot \underline{m}^0(u_1^k, u_2^k) \mid \underline{r}_1(u_1^k, u_2^k) \times \underline{r}_2(u_1^k, u_2^k) \mid \cdot \text{mes } D_k, \end{aligned}$$

ahonnan

$$(\operatorname{rot} \underline{m}^0)(u_1^k, u_2^k) = \frac{1}{|(\underline{r}_1 \times \underline{r}_2)(u_1^k, u_2^k)| \operatorname{mes} D_k} \oint_{\gamma_k} \underline{v} \, d\underline{r} =$$

$$= \frac{\operatorname{mes} F_k}{|(\underline{r}_1 \times \underline{r}_2)(u_1^k, u_2^k)| \operatorname{mes} D_k} \cdot \frac{\oint_{\gamma_k} \underline{v} \, d\underline{r}}{\operatorname{mes} F_k}.$$

Azonban $\operatorname{mes} F_k$ -ra alkalmazva a kettős integrálokra vonatkozó középérték-tételt, van $(t_1^k, t_2^k) \in D_k$, hogy

$$\operatorname{mes} F_k = \iint_{D_k} |\underline{r}_1 \times \underline{r}_2| \, du_1 \, du_2 = |(\underline{r}_1 \times \underline{r}_2)(t_1^k, t_2^k)| \operatorname{mes} D_k.$$

Ezt az előbbi egyenlőségbe helyettesítve és $\operatorname{mes} D_k$ -val egyszerűsítve

$$(\operatorname{rot} \underline{m}^0)(u_1^k, u_2^k) = \frac{|(\underline{r}_1 \times \underline{r}_2)(t_1^k, t_2^k)|}{|(\underline{r}_1 \times \underline{r}_2)(u_1^k, u_2^k)|} \cdot \frac{\oint_{\gamma_k} \underline{v} \, d\underline{r}}{\operatorname{mes} F_k}.$$

Ha most $k \rightarrow \infty$ akkor γ_k és F_k az $\underline{r}_0 = \underline{r}(u_1^0, u_2^0)$ pontra zsugorodik, $(u_1^k, u_2^k) \rightarrow (u_1^0, u_2^0)$, $(t_1^k, t_2^k) \rightarrow (u_1^0, u_2^0)$. A baloldal a szereplő függvények folytonossága miatt $\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}_0) \cdot \underline{n}$ -hez tart, a jobboldal első tényezője pedig 1-hez. Ezért a jobboldal második tényezője konvergens és

$$\underline{n} \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\oint_{\gamma_k} \underline{v} \, d\underline{r}}{\operatorname{mes} F_k}.$$

Még egy az alkalmazásokban gyakran felhasznált integrálátalakító télt bizonyítottunk.

14.7 Tétel.

("Szimmetrikus" Green-tétel.) Legyen F egyszerű zárt, reguláris felület kifelé irányított normálvektorral, az F által határolt V térrész mérhető térfogatu és létezzék olyan x, y, z Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer, melyben V a koor-

dinátasikokra normáltartomány (lásd V. Kötet, 15.2 Definíció). Tételezzük fel továbbá, hogy az $u(\underline{r})$ és $v(\underline{r})$ skalármezők a $V \cup F$ halmazon kétszer folytonosan deriválhatók, ekkor

$$\oint_F (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) d\underline{F} = \iiint_V (u \Delta v - v \Delta u) dV. \quad (14.14)$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt (14.3 Tétel) az $u(\underline{r}) \operatorname{grad} v(\underline{r})$ és a $v(\underline{r}) \operatorname{grad} u(\underline{r})$ vektor-vektor függvényekre. Felhasználjuk a (12.19) formulát a következő alakban:

$$\operatorname{div} (u \operatorname{grad} v) = \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u \operatorname{div} \operatorname{grad} v,$$

ill.

$$\operatorname{div} (v \operatorname{grad} u) = \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u + v \operatorname{div} \operatorname{grad} u.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \oint_F u \operatorname{grad} v d\underline{F} &= \iiint_V \operatorname{div} (u \operatorname{grad} v) dV = \\ &= \iiint_V (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u \operatorname{div} \operatorname{grad} v) dV, \end{aligned}$$

vagyis

$$\oint_F u \operatorname{grad} v d\underline{F} = \iiint_V (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u \Delta v) dV \quad (14.15)$$

(A (14.15) formulát szokás "aszimmetrikus Green-tételnek" is nevezni.)
 u és v szerepcseréjével hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$\oint_F v \operatorname{grad} u d\underline{F} = \iiint_V (\operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u + v \Delta u) dV \quad (14.16)$$

A (14.15) és a (14.16) formulákat egymásból kivonva, állításunk adódik.!

A felületelem-vektor $d\underline{F} = \underline{m}^0 dF$, és az iránymenti derivált $\operatorname{grad} u \cdot \underline{m}^0 = \frac{\partial u}{\partial m^0}$, ill. $\operatorname{grad} v \cdot \underline{m}^0 = \frac{\partial v}{\partial m^0}$ jelölésével (14.14) még a következő alakban is felírható

$$\oint_F \left(u \frac{\partial v}{\partial m^0} - v \frac{\partial u}{\partial m^0} \right) dF = \iiint_V (u \Delta v - v \Delta u) dV, \quad (14.17)$$

ahol a baloldali integrál már skalár-vektor függvény felszín szerinti integrálja. (Lásd (13.24) formula).

14.2 Példa. Alkalmazzuk a Stokes-tételt (14.5 Tétel) az xy síkban fekvő reguláris görbékkel összetett, egyszerű, zárt pozitív irányítású γ görbére és az xy síknak azon T mérhető tartományára, melyet γ határol, legyen továbbá $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}(x, y) = v_1(x, y)\underline{i} + v_2(x, y)\underline{j}$ a $T \cup \gamma$ halmazon folytonosan deriválható síkbeli vektormező. Ekkor

$$\text{rot } \underline{v} = \underline{k} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right); \quad d\underline{F} = \underline{k} \, dx \, dy$$

és $\oint_{\gamma} \underline{v} \, d\underline{r} = \iint_F \text{rot } \underline{v} \, d\underline{F}$ részletesen kiírva a következő alakot veszi fel:

$$\oint_{\gamma} (v_1(x, y) dx + v_2(x, y) dy) = \iint_T \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy. \quad (14.18)$$

A (14.18) formulát síkbeli Stokes-tételnek, a $\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$ kifejezést síkbeli rotációnak nevezzük.

14.3 Példa. Alkalmazzuk a (14.18) formulát $\underline{w} = v_2(x, y)\underline{i} - v_1(x, y)\underline{j}$ síkbeli vektormezőre, vagyis írjuk (14.18)-ban v_2 helyére v_1 -et, v_1 helyére $-v_2$ -t. Rendezéssel kapjuk, hogy

$$\oint_{\gamma} (v_1(x, y) dy - v_2(x, y) dx) = \iint_T \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dx dy. \quad (14.19)$$

Ha most még definiáljuk a $d\underline{r}$ -re merőleges, vele egyenlő abszolút értékű, a T tartományból kifelé mutató $d\underline{n} = \underline{n} \, ds = dy \underline{i} - dx \underline{j}$ "ívelem-normálvektort" ($\underline{n}$ a γ síkgörbe normális egységvektora) és a

$$\text{div } \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \quad (14.20)$$

un. síkbeli divergenciát, akkor a (14.19) formula még a következő alakban is felírható:

$$\oint_{\gamma} \underline{v} \underline{n} \, ds = \iint_T \text{div } \underline{v} \, dT, \quad (14.21)$$

ahol $\underline{v}(\underline{r}) = v_1(x, y) \underline{i} + v_2(x, y) \underline{j}$ síkbeli vektormező és a baloldalon álló kifejezés a $\underline{v} \cdot \underline{n}$ skaláris szorzat "ívhossz-szerinti integrálja.

A (14. 21) formulát síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tételnek nevezzük.

15. A potenciálelmélet elemei

15.1 Definíció.

A sík valamely D tartományát egyszeresen összefüggőnek nevezzük, ha minden D -ben haladó zárt c görbével együtt, a c görbe által határolt siktartomány is D részhalmaza.

Egyszeresen összefüggő például egy téglalap, vagy egy körlap. Nem egyszeresen összefüggő egy körgyűrű, vagy az a tartomány, ami a síkból úgy keletkezik, hogy a sík egy pontját elhagyjuk.

15.2 Definíció.

Az egyszerű F felületdarabot egyszeresen összefüggőnek nevezzük, ha egy egyszeresen összefüggő D siktartomány képe (a 6.1 Definíció értelmében).

Egyszeresen összefüggő felületdarab például egy félgömb. Nem egyszeresen összefüggő egy "lyukas" félgömb.

15.3 Definíció

A közösleges tér valamely V részhalmazát egyszeresen összefüggő térbeli tartománynak nevezzük, ha bármely $\gamma \subset V$ szakaszonként reguláris, egyszerű, zárt görbére illeszthető egyszeresen összefüggő, reguláris F felületdarab, mely V -ben van, vagyis melyre $F \subset V$ és melynek határoló görbéje γ .

Eszerint pl. két koncentrikus gömbfelület közötti térrész egyszeresen összefüggő, a tórusz (lásd 7.4 ábra) és a hegygyűrű (lásd 15.1 ábra) "kétszeresen összefüggő". Ha a hengeren - a tengelyével párhuzamos tengelyű, kisebb sugaru (közös részt nem tartalmazó) hengerekkel két, ill. három furatot készítünk, ez a tartományt "három-, ill. négyszeresen összefüggővé" teszi. A többszörösen összefüggő térbeli tartományok a határoló felületre rajzolt zárt görbére illeszkedő metszőfelületekkel "felmetszhetők" egyszeresen összefüggő tartománnyá. (lásd 15.1 ábra).

15.4 Definíció.

Azt mondjuk, hogy a $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ folytonos vektor-vektor függvény a közösleges tér D nyílt tartományában potenciális, ha van olyan $u(\underline{r})$ folytonosan deriválható skalár-vektor függvény, melyre

$$\underline{v}(\underline{r}) = \text{grad } u(\underline{r}), \quad \underline{r} \in D.$$

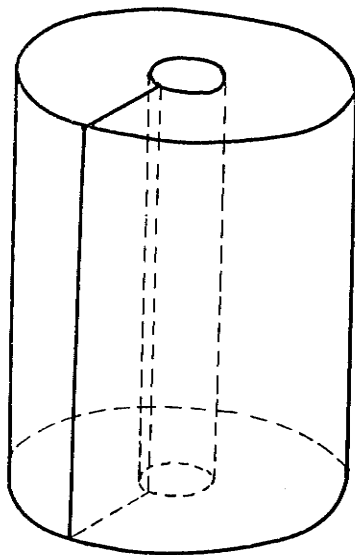
Ezt az $u(\underline{r})$ függvényt $\underline{v}(\underline{r})$ potenciálfüggvényének nevezzük.

Mivel az azonosan állandó függvény gradiense azonosan zérus, nyilvánvaló, hogy ha $u(\underline{r})$ potenciálfüggvény, akkor tetszőleges c állandóra $u(\underline{r}) + c$ is potenciálfüggvény. Később látni fogjuk, hogy egyszerűen összefüggő tartományban ennek a "megfordítása" is igaz, vagyis, hogy ha $\underline{v}(\underline{r})$ potenciálos, akkor potenciálfüggvényei állandóban különböznek egymástól.

15.5 Definíció.

A $\underline{v}(\underline{r}), \underline{r} \in D$ folytonos vektor-vektor függvényt konzervatívnak mondjuk a közönséges tér egy nyílt, egyszerűen összefüggő $V \subset D$ tartományában, ha bármely $\gamma \subset V$ szakaszonként reguláris, irányított, zárt görbén vett vonalintegrálja (cirkulációja) zérus:

$$\oint_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = 0, \quad \gamma \subset V.$$



15.1 ábra

15.1 Tétel.

Ha a $\underline{v}(\underline{r}), \underline{r} \in D$ folytonos vektor-vektor függvény konzervatív a közönséges tér egy nyílt, egyszerűen összefüggő $V \subset D$ tartományában, akkor tetszőleges $\underline{a} \in V$ és $\underline{b} \in V$ pontok közötti vonalintegrálja az utvónaltól független, csakis a kezdő és végponttól függ és fordítva, ha V -ben a vonalintegrál az utvónaltól független, akkor $\underline{v}(\underline{r})$ konzervatív.

Bizonyítás. Legyen $\gamma_1 \subset V$, ill. $\gamma_2 \subset V$ az $\underline{a}$ pontot $\underline{b}$ -vel összekötő irányított, reguláris görbe. Az ellenkezőleg ($\underline{b}$ -ből $\underline{a}$ -ba) irányított γ_2 görbét $-\gamma_2$ -vel jelöljük. Ekkor $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ zárt görbe.

$\underline{v}(\underline{r})$ konervativitása és a vonalintegrálnak a (13.4) és (13.6) formulával leírt tulajdonságai miatt

$$0 = \oint_{\gamma} \underline{v} \, d\underline{r} = \int_{\frac{a}{\gamma_1}}^{\frac{b}{\gamma_1}} \underline{v} \, d\underline{r} + \int_{\frac{b}{\gamma_2}}^{\frac{a}{\gamma_2}} \underline{v} \, d\underline{r} = \int_{\frac{a}{\gamma_1}}^{\frac{b}{\gamma_1}} \underline{v} \, d\underline{r} - \int_{\frac{a}{\gamma_2}}^{\frac{b}{\gamma_2}} \underline{v} \, d\underline{r} .$$

Az utóbbi egyenlőséget rendezve azt kapjuk, hogy

$$\int_{\frac{a}{\gamma_1}}^{\frac{b}{\gamma_1}} \underline{v} \, d\underline{r} = \int_{\frac{a}{\gamma_2}}^{\frac{b}{\gamma_2}} \underline{v} \, d\underline{r} .$$

Fordítva, legyen $\gamma \subset V$ tetszőleges, irányított, szakaszonként reguláris, egyszerű, zárt görbe és $\underline{a}, \underline{b} \in \gamma$. $\underline{a}$ és $\underline{b}$ a γ görbét $\underline{a}$ -ból $\underline{b}$ -be irányított γ_1 és $\underline{a}$ -ból $\underline{b}$ -ba irányított γ_2 görbéké osztja. Mivel

$$\int_{\frac{a}{\gamma_1}}^{\frac{b}{\gamma_1}} \underline{v} \, d\underline{r} = \int_{\frac{a}{\gamma_2}}^{\frac{b}{\gamma_2}} \underline{v} \, d\underline{r} ,$$

ezért

$$0 = \int_{\frac{a}{\gamma_1}}^{\frac{b}{\gamma_1}} \underline{v} \, d\underline{r} - \int_{\frac{a}{\gamma_2}}^{\frac{b}{\gamma_2}} \underline{v} \, d\underline{r} = \int_{\frac{a}{\gamma_1}}^{\frac{b}{\gamma_1}} \underline{v} \, d\underline{r} + \int_{\frac{b}{\gamma_2}}^{\frac{a}{\gamma_2}} \underline{v} \, d\underline{r} = \oint_{\gamma} \underline{v} \, d\underline{r} .!$$

15.6 Definíció.

A $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ folytonosan differenciálható vektor-vektor függvényt rotációmentesnek (örvénymentesnek) nevezzük a közönséges tér egy nyílt, egyszeresen összefüggő $V \subset D$ tartományában, ha

$$\text{rot } \underline{v} \equiv 0, \quad \underline{r} \in V.$$

Bebizonyítjuk, hogy a 15.4, 15.5 és 15.6 Definíciók ekvivalensek valamely egyszeresen összefüggő tartományban, ha $\underline{v}(\underline{r})$ folytonosan deriválható.

15.2 Tétel.

A $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ folytonos vektor-vektor függvény a közönséges tér egy nyílt, egyszeresen összefüggő $V \subset D$ tartományában akkor és csak akkor potenciális, ha ott konzervatív.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\underline{v}(\underline{r})$ potenciális V -ben, azaz van $u = u(\underline{r})$ skalármező, melyre $\underline{v}(\underline{r}) = \text{grad } u(\underline{r})$. Legyen az $\underline{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ által leírt reguláris, irányított γ térgörbe kezdőpontja $\underline{a} = \underline{r}(\alpha)$, végpontja $\underline{b} = \underline{r}(\beta)$. Ekkor a (13.2) és (10.9) formulák felhasználásával

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\underline{a}}{\gamma}}^{\underline{b}} \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} \text{grad } u(\underline{r}(t)) \cdot \dot{\underline{r}}(t) \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du(\underline{r}(t))}{dt} \, dt = \\ &= [u(\underline{r}(t))]_{\alpha}^{\beta} = u(\underline{r}(\beta)) - u(\underline{r}(\alpha)) = u(\underline{b}) - u(\underline{a}) \quad (15.1) \end{aligned}$$

az utvonaltól függetlenül, vagyis $\underline{v}(\underline{r})$ konzervatív.

Tegyük fel másodszor, hogy a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező konzervatív $V \subset D$ -ben, $\underline{a} \in V$ és $\gamma \subset V$ tetszőleges $\underline{a}$ kezdőpontu ($\underline{r}$ végpontu) reguláris görbe. Ekkor a 15.1 Tétel miatt az

$$u(\underline{r}) = \int_{\frac{\underline{a}}{\gamma}}^{\underline{r}} \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r}, \quad \underline{r} \in V$$

formula egy γ -tól független, csak $\underline{r}$ -től függő skalármezőt definiál. Bebizonyítjuk, hogy ez a skalármező potenciálfüggvény.

Legyen $\underline{r}_0 \in V$, az $\underline{r}_0$ pont $K_{\underline{r}_0}$ környezete V részhalmaza, $K_{\underline{r}_0} \subset V$; és $\underline{r}_0 + \Delta \underline{r} \in K_{\underline{r}_0}$. Az $\underline{r}_0$ pontot az $\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}$ ponttal összekötő (irányított) egyeneszszakasz egyenlete $\underline{r} = \underline{r}_0 + \Delta \underline{r} t$, $0 \leq t \leq 1$. u megváltozása

$$u(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - u(\underline{r}_0) = \int_{\frac{\underline{a}}{\gamma}}^{\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}} \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} - \int_{\frac{\underline{a}}{\gamma}}^{\underline{r}_0} \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} =$$

$$= \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = \int_0^1 \underline{v}(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r} t) \Delta \underline{r} dt.$$

Az integrációs utat először nem írtuk ki, mivel az integrál független az ut-tól; végül az egyenes mentén a (13.2) formula alapján írtuk fel a vonalintegrált. Az utolsó integrálra alkalmazhatjuk az integrálszámítás középértéktételét (II. Kötet, 26.2 Tétel), tehát van $0 < \vartheta < 1$, hogy

$$u(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - u(\underline{r}_0) = \underline{v}(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r} \vartheta) \Delta \underline{r}.$$

Mivel azonban $\underline{v}(\underline{r})$ folytonos, $\underline{v}(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r} \vartheta) = \underline{v}(\underline{r}_0) + \underline{\varepsilon}(\Delta \underline{r})$, ahol $\underline{\varepsilon}(\Delta \underline{r}) \rightarrow 0$, ha $\Delta \underline{r} \rightarrow 0$. Ezért

$$u(\underline{r}_0 + \Delta \underline{r}) - u(\underline{r}_0) = \underline{v}(\underline{r}_0) \Delta \underline{r} + \underline{\varepsilon}(\Delta \underline{r}) \Delta \underline{r},$$

ahol $\underline{\varepsilon}(\Delta \underline{r}) \rightarrow 0$, ha $\Delta \underline{r} \rightarrow 0$, ami azt jelenti, hogy $u(\underline{r})$ differenciálható és $\text{grad } u(\underline{r}_0) = \underline{v}(\underline{r}_0)$.!

15.3 Következmény. Ha a $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ folytonos vektor-vektor függvény potenciális az egyenesen összefüggő, nyílt $V \subset D$ tartományban, akkor bármely két potenciálfüggvénye állandóban különbözik egymástól.

Bizonyítás. Legyen $\text{grad } u_1(\underline{r}) = \text{grad } u_2(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in V$ és $\underline{a} \in V$. Ekkor (15.1)-ből adódik, hogy minden $\underline{r} \in V$ -re

$$u_1(\underline{r}) - u_1(\underline{a}) = u_2(\underline{r}) - u_2(\underline{a}),$$

vagyis $u_1(\underline{r}) - u_2(\underline{r}) = u_1(\underline{a}) - u_2(\underline{a}) = \text{állandó.}$!

Folytonos vektor-vektor függvény potenciálfüggvényeknek halmaza tehát az egyváltozós függvények határozatlan integráljával analóg tulajdonságokat mutat.

15.4 Tétel.

A $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ folytonosan deriválható vektor-vektor függvény akkor és csak akkor konzervatív a tér egy nyílt, egyszeresen összefüggő $V \subset D$ tartományában, ha rotációmentes.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) \equiv 0$, $\underline{r} \in V$. Ekkor a Stokes-tétel (14.5 Tétel) miatt bármely $\gamma \subset V$ zárt, reguláris, irányított térgörbére és az erre - mint határgörbére - illeszkedő $F \subset V$ reguláris felületdarabra

$$\oint_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = \iint_F \text{rot } \underline{v} dF = 0.$$

Tegyük fel másodszor, hogy bármely zárt, reguláris, irányított $\gamma \subset V$ térgörbére $\oint_{\gamma} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = 0$. Ebből $\text{rot } \underline{v} \equiv 0$ következik, mert ha pl. $\underline{r}_0 \in V$ -ben $\text{rot } \underline{v}(\underline{r}_0) \neq 0$, akkor $\text{rot } \underline{v}$ folytonossága miatt $\underline{r}_0$ -nak volna olyan kis környezete, pl. az $\underline{r}_0$ -on áthaladó $\text{rot } \underline{v}(\underline{r}_0)$ -ra merőleges kis F_1 siktartomány, melyet a c zárt, irányított, reguláris görbe határol, ahol $\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) \neq 0$, $\underline{r} \in F_1$. Ekkor $\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) \approx \text{rot } \underline{v}(\underline{r}_0) = |\text{rot } \underline{v}(\underline{r}_0)| \underline{m}^0$, ahol $\underline{m}^0$ az F_1 siktartomány egység normálvektora, és $\text{rot } \underline{v}(\underline{r}_0) \cdot \underline{m}^0 > 0$. A Stokes-tétel alkalmazásával

$$\oint_c \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = \iint_{F_1} \text{rot } \underline{v}(\underline{r}) dF \approx \text{rot } \underline{v}(\underline{r}_0) \cdot \underline{m}^0 \cdot \text{mes } F_1 > 0$$

a feltevéssel ellentétben.!

A két tételt egybefoglalja a következő

15.5 Tétel.

Az, hogy a $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ folytonosan differenciálható vektor-vektor függvény a $V \subset D$ egyszeresen összefüggő, nyílt tartományban potenciális, konzervatív, ill. rotációmentes, ekvivalens állítások.

Most röviden azzal foglalkozunk, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkezik a vektormező, ha divergenciája zérus.

15.7 Definíció.

Azt mondjuk, hogy a $\underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in D$ folytonosan deriválható vektormező divergenciamentes (forrásmentes) a $V \subset D$ nyílt tartományban, ha $\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) \equiv 0$ $\underline{r} \in V$.

A Gauss-Osztrogradszij tételből (14.3 Tétel) következik, hogy ekkor minden olyan $F \subset V$ zárt felületre, mely által határolt térrész V részhalmaza,

$$\oint_F \underline{v} \, d\underline{F} \equiv 0, \text{ továbbá a } \gamma \subset V \text{ zárt, irányított}$$

reguláris görbére, mint határoló vonalra kifeszített $F_1 \subset V$ és $F_2 \subset V$ -reguláris felületeken számított fluxus egyenlő,

$$\iint_{F_1} \underline{v} \, d\underline{F} = \iint_{F_2} \underline{v} \, d\underline{F} ,$$

feltéve, hogy az $F_1 \cup F_2$ zárt felületek által határolt térrész V részhalmaza és F_1 valamint F_2 (γ -nak megfelelően) egyformán van irányítva.

Ennek bizonyítását (a felületi integrálok (13.14) és (13.15) tulajdonságainak felhasználásával a 15.1 Tétel bizonyításával analóg módon) az olvasóra bizzuk.

Hasonlóan belátható, hogy ha $V_1 \subset V_2 \subset V$, a V_1 tartományt az F_1 , a V_2 tartományt az F_2 reguláris zárt felület határolja és az F_1 és F_2 közötti térrészben $\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) \equiv 0$, $\underline{r} \in (V_2 \setminus V_1)$, akkor

$$\oint_{F_1} \underline{v} \, d\underline{F} = \oint_{F_2} \underline{v} \, d\underline{F} .$$

Különösen figyelemre méltóak és fontos szerepet játszanak azok a vektormezők, melyek egyszerre rotáció- és divergenciamentesek. Ha a kétszer folytonosan deriválható $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező divergencia- és rotációméntes egy egyszeresen összefüggő, nyílt V tartományban, akkor létezik $u(\underline{r})$ potenciálfüggvénye és

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u(\underline{r}) = \Delta u \equiv 0,$$

vagyis a potenciálfüggvény kielégíti (Descartes-féle derékszögű koordinátákban) a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (15.2)$$

Laplace-féle parciális differenciálegyenletet.
(V.ö. (12.22) formula).

Ha $\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) \equiv 0$, de $\text{div } \underline{v}(\underline{r}) = \varrho(\underline{r}) \neq 0$, $\underline{r} \in V$, akkor $\underline{v}$ potenciális,
 $\underline{v}(\underline{r}) = \text{grad } u(\underline{r})$,

$$\text{div grad } u(\underline{r}) = \Delta u(\underline{r}) = \varrho(\underline{r}) \neq 0$$

vagyis u kielégíti a

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \varrho(x, y, z) \quad (15.3)$$

Poisson-féle parciális differenciálegyenletet.

A (15.2) és (15.3) parciális differenciálegyenletek bal oldalának síkbeli alakja

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{div grad } u. \quad (15.4)$$

15.8 Definíció.

A Laplace-féle parciális differenciálegyenletet kielégítő kétszer folytonosan differenciálható függvényeket harmonikus függvényeknek nevezzük.

15.1 Példa. Síkban az

térben az $u_1 = \ln |\underline{r}| = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, $|\underline{r}| \neq 0$,

$$u_2 = \frac{1}{|\underline{r}|} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad |\underline{r}| \neq 0$$

függvény harmonikus. Ugyanis

$$\begin{aligned} \text{grad } u_1 &= \frac{x}{x^2 + y^2} \underline{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \underline{j} \\ \text{div grad } u_1 &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \equiv 0. \end{aligned}$$

$$\text{grad } u_2 = \frac{-1}{(\underline{x}^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2)^{\frac{3}{2}}} (\underline{x}\underline{i} + \underline{y}\underline{j} + \underline{z}\underline{k}),$$

$$\begin{aligned} \text{div grad } u_2 &= \frac{1}{(\underline{x}^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2)^{\frac{5}{2}}} \left[(2\underline{x}^2 - \underline{y}^2 - \underline{z}^2) + (2\underline{y}^2 - \underline{x}^2 - \underline{z}^2) + \right. \\ &\quad \left. + (2\underline{z}^2 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2) \right] \equiv 0. \end{aligned}$$

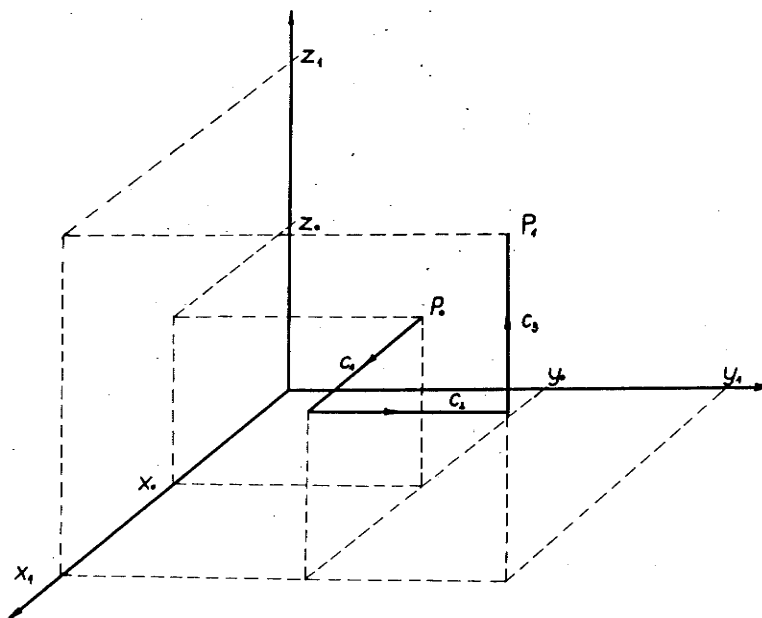
15.2 Példa. Meghatározzuk az origóban elhelyezett egységnyi tömegű pont gravitációs mezőjének potenciálfüggvényét. Az egységek alkalmas megválasztásával

$$\underline{v} = \frac{-\underline{r}}{|\underline{r}|^3} = (\underline{x}^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2)^{-\frac{3}{2}} [-\underline{x}\underline{i} - \underline{y}\underline{j} - \underline{z}\underline{k}], \quad \underline{r} \neq 0.$$

$\text{rot } \underline{v} = \nabla \times \underline{v} \equiv 0$, tehát $\underline{v}$ potenciális.

Rögzített $P_0 (\underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$ ponttól - az integrálás tartamára rögzített, de utána futó pontnak tekintendő $P_1 (\underline{x}_1, \underline{y}_1, \underline{z}_1)$ pontig tetszés szerinti útvonalon számíthatjuk a vonalintegrált. Legegyszerűbb a koordinátatengelyekkel párhuzamos c_1, c_2, c_3 egyenesszakaszokból álló c törtvonalat választani (lásd 15.2 ábra). $\underline{r} \neq 0$ miatt P_0 nem lehet az origó.

$$\begin{aligned}
 \int_{P_0}^{P_1} \underline{y} d\underline{r} &= - \int_{x_0}^{x_1} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx - \int_{y_0}^{y_1} \frac{y}{(x_1^2+y^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}} dy - \int_{z_0}^{z_1} \frac{z}{(x_1^2+y_1^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \\
 &= \left[(x^2+y_0^2+z_0^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_{x_0}^{x_1} + \left[(x_1^2+y^2+z_0^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_{y_0}^{y_1} + \left[(x_1^2+y_1^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_{z_0}^{z_1} = \\
 &= (x_1^2+y_1^2+z_1^2)^{-\frac{1}{2}} - (x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\underline{r}|} - \frac{1}{|\underline{r}_0|}.
 \end{aligned}$$



15.2 ábra

A potenciálfüggvény $u = \frac{1}{|\underline{r}|} + c$, ahol c tetszőleges állandó. (V.ö. 10.2 és 13.3 Példa).

Most ugyanezen a példán egy másik módszert (a "primitív függvény keresés módszerét") mutatunk be a potenciálfüggvény meghatározására. Az u potenciálfüggvény kielégíti a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}\quad (15.5)$$

"parciális differenciálegyenlet rendszert". Az első egyenletet x szerint "parciálisan" integráljuk, vagyis megkeressük a jobboldalnak, mint x függvényének a primitív függvényeit:

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + c_1(y, z),$$

ahol c_1 tetszőleges folytonosan differenciálható függvény, kielégíti (15.5) első egyenletét. Ahhoz, hogy u (15.5) második egyenletét is kielégítse, fenn kell állnia a

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + c_1(y, z) \right] = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

feltételnek. Innen

$$\frac{\partial c_1(y, z)}{\partial y} \equiv 0,$$

vagyis c_1 nem függ y -től. Az

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + c_2(z)$$

függvény, ahol c_2 tetszőleges (egyváltozós) folytonosan differenciálható függvény, már kielégíti a (15.5) rendszer első két egyenletét. Ahhoz, hogy u (15.5) harmadik egyenletét is kielégítse, fenn kell állnia a:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + c_2(z) \right] = -z (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

feltételnek. Innen $c_2' \equiv 0$, vagyis c_2 állandó. A potenciálfüggvény

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + c,$$

ahol c tetszőleges állandó.

15.3 Példa. A 13.1 Példában szereplő

$$\underline{v}(\underline{r}) = - \frac{y}{x^2 + y^2} \underline{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \underline{j}$$

vektormező rotációmentes abban a tartományban, amit úgy kapunk, hogy a térből elhagyjuk a z -tengely pontjait. Ez azonban nem egyszerűen összefüggő tartomány. (Ha $\underline{v}(\underline{r})$ -et xy síkbeli vektormezőnek tekintjük, akkor az xy síkból az origót kell elhagynunk. Az ily módon kilyukasztott sík nem egyszerűen összefüggő siktartomány). A 13.1 Példa mutatja, hogy e vektormező, a szóbanforgó tartományban nem konzervatív. Megkísérelhetjük $\underline{v}(\underline{r})$ potenciálfüggvényét meghatározni a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

egyenletekből. A "primitív függvény keresés módszerét" alkalmazva (a harmadik egyenlet szerint u nem függ z -től)

$$u = \arctg \frac{y}{x} + c_1(y),$$

ahonnan y szerint deriválva

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + c_1' = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

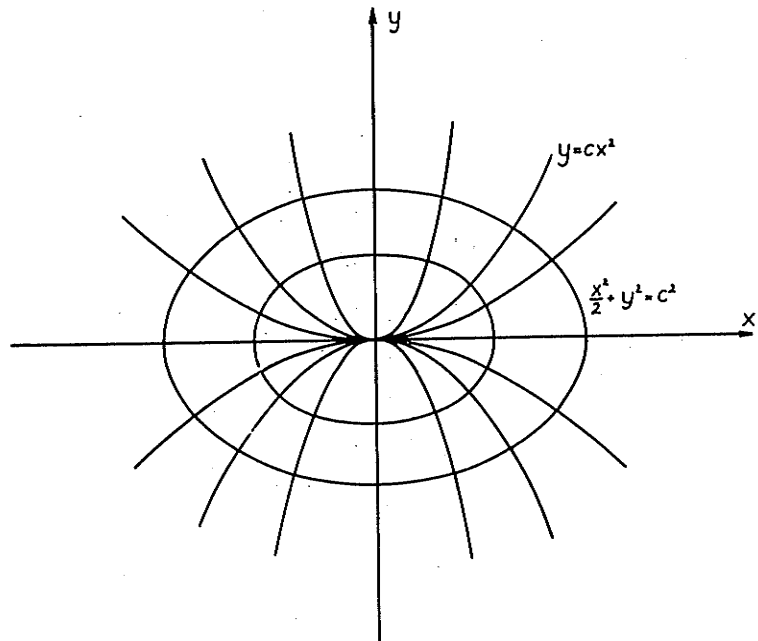
vagyis $c_1' \equiv 0$, $c_1 = c$ állandó. $\underline{v}(\underline{r})$ tehát az

$$u = \arctg \frac{y}{x} + c$$

függvény gradiense. E függvény azonban csak az $x > 0$ (ill. $x < 0$) egyenlőtlenséggel jellemzett féltérben van értelmezve. Ebben a féltérben (mely már egyszeresen összefüggő tartomány) $\underline{v}(\underline{r})$ már konzervatív és $\underline{v}(\underline{r}) = \text{grad } u$.

Egy vektormező potenciálosságának nem elegendő kritériuma az, hogy egy-két vagy akár végtelen sok zárt görbén vett cirkuláció értéke zérus. Minden zárt görbén zérusnak kell lennie. Ezt mutatja meg a következő

15.4 Példa. Tekintsük a $\underline{v}_1 = x\underline{i} + 2y\underline{j}$ és $\underline{v}_2 = x\underline{v}_1 = x^2\underline{i} + 2xy\underline{j}$ (v.ö. 13.2 Példa) síkbeli vektormezőket. $\text{rot } \underline{v}_1 \equiv 0$, $\text{rot } \underline{v}_2 = 2y$, tehát $\underline{v}_1$ potenciális, $\underline{v}_2$ nem. Mégis a 13.2 Példa tanulsága szerint $\underline{v}_2$ cirkulációja az adott ellipszisen zérus. De nemcsak ezen az ellipszisen tűnik el a cirkulációja, hanem az összes $-\frac{x^2}{2} + y^2 = c^2$ ellipszisen (c tetszőleges állandó).



15.3 ábra

Ez a következő módon látható be. $\underline{v}_1$ annak az $u = \frac{x^2}{2} + y^2$ potenciálfüggvénynek a gradiense, melynek szintvonalai az $\frac{x^2}{2} + y^2 = c^2$ ellipszisek; ezek ortogonális trajektóriái az $y = cx^2$ parabolák, melyek $\underline{v}_1$ -nek és $\underline{v}_2$ -nek

egyaránt vektorvonalai. (Lásd a 12.1 Példa előtt mondottakat és a 15.3 ábrát). Az adott ellipszisek érintővektora $\underline{v}_2$ -re mindenütt merőleges, a vonalintegrál integrandusa tehát $\underline{v}_2 \cdot d\underline{r} \equiv 0$.

16. Ortogonális görbevonali koordinátarendszerek

Az alkalmazásokban gyakran fordul elő, hogy a megoldandó feladat gömbszimmetriát, vagy hengerszimmetriát mutat, és a fizikai, mechanikai stb. jelenség matematikai modellje különösen egyszerű alakot vesz fel gömbi, vagy hengerkoordináta rendszerben (lásd V. Kötet, 11.3 Példa). Gyakran előfordul, hogy a megoldandó feladat az előbbiektől különböző, speciális koordinátarendszer bevezetését követeli meg. Legyen a térben adott az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ortonormált bázis és az ezen alapuló x_1, x_2, x_3 Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer. Ha megadunk három háromszor folytonosan differenciálható háromváltozós függvényt $x_i(q_1, q_2, q_3)$, $(i=1, 2, 3)$, melyek Jacobi-féle függvénydeterminánsa (lásd V. Kötet, (11.6)) nem zérus,

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0. \quad (16.1)$$

és melyekre az

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3 &= x_3(q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \quad (16.2)$$

hozzárendelés az egész térben, vagy legalábbis annak egy részében egyértelmű, akkor azt mondjuk, hogy görbevonali (vagy általános) koordinátarendszert vezetünk be. Mivel a pontokat helyvektoraikkal azonosítottuk, a (16.2) görbevonali koordinátarendszer bevezetése azt jelenti, hogy

a pontok $\underline{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \underline{e}_i$ helyvektorait megadtuk, mint a q_1, q_2, q_3 változók függvényeit:

$$\underline{r}(q_1, q_2, q_3) = \sum_i x_i(q_1, q_2, q_3) \underline{e}_i. \quad (16.3)$$

(E pontban minden szumma 1-től 3-ig megy, ezért ezt külön nem jelöljük, csupán azt, hogy melyik indexre történik az összegezés). (16.3)-ban $\underline{r}$ -et mint "háromparaméteres vektor-skalár függvényt" fogjuk fel. Ha a három változó közül kettőt rögzítünk, pl. $q_2 = q_{20}$, $q_3 = q_{30}$, akkor

$$\underline{r} = \underline{r}(q_1, q_{20}, q_{30}) \quad (16.4)$$

egy un. q_1 -koordinátavonalnak az egyenlete (e görbe mentén csak a q_1 koordináta változik, q_2 és q_3 állandó). Hasonló értelemben beszélünk q_2 , ill. q_3 -koordinátavonalakról. A tér minden pontján pontosan egy q_1 , egy q_2 - és egy q_3 -vonal halad át. Ha a három változó közül egyet rögzítünk, pl. $q_1 = q_{10}$, akkor

$$\underline{r} = \underline{r}(q_{10}, q_2, q_3)$$

egy un. q_1 -koordinátafelületnek az egyenlete (e felület mentén q_1 állandó). Hasonló értelemben beszélünk q_2 , - ill. q_3 -koordinátafelületekről. A tér minden pontján pontosan egy q_1 , egy q_2 - és egy q_3 -felület halad át.

16.1 Példa. Az V. Kötet, 11.3 Példában tárgyalt gömbi koordinátarendszerben az r -vonalak az origóból kiinduló félegyeneseek, a ϑ vonalak azok a félkörök, melyek a z -tengely (x_3 -tengely) origóra szimmetrikus pontjait kötik össze, a φ -vonalak pedig azok "vizszintes" körök, melyek középpontja a z -tengelyen van. Az r -felületek az origó középpontu gömbök, a ϑ -felületek azok a kupok (valójában félkupok), melyek csúcspontja az origó, tengelye a pozitív, vagy negatív z -tengely, a φ -felületek a z -tengelyre illeszkedő (a z -tengely által határolt) félsíkok.

16.2 Példa. Az V. Kötet, 11.4 Példájában tárgyalt hengerkoordinátarendszerben az r -vonalak a z -tengely pontjaiból kiinduló "vizszintes" félegyeneseek, a φ -vonalak azok a "vizszintes" körök, melyek középpontja a z -tengelyen van, a z -vonalak a "függőleges" egyeneseek. Az r -felületek a z -tengelyű körhengerek, a φ -felületek a z -tengelyre illeszkedő (a z tengely által határolt) félsíkok, a z felületek a "vizszintes" síkok.

A koordinátavonalak általában nem egyeneseek, éppen ezért nevezzük a koordinátarendszereket görbevonaluaknak. A (16.2) függvényrendszerre tett feltevésekből, (16.1)-ből következik, hogy a koordinátavonalak egymást O-nál nagyobb és π -nél kisebb szögben metszik. Ha a koordinátavonalak

egymást minden pontban derékszögben metszik, akkor a görbevonalu koordinátarendszert ortogonálisnak nevezzük. A továbbiakban kizárólag ortogonális koordinátarendszerekkel foglalkozunk. (Könnyű látni, hogy a gömbi és a hengerkoordináta rendszer ortogonális.)

Nyilvánvaló, hogy a q_1 -vonal érintővektora a $\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_1}$ vektor és

$$H_k = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} \right| > 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (16.5)$$

A $H_k(q_1, q_2, q_3)$ mennyiségeket ($k = 1, 2, 3$) Lamé-féle együtthatóknak nevezzük. Az ortogonális koordinátarendszereket jellemzi, hogy

$$\underline{r}'_{q_i} \cdot \underline{r}'_{q_k} = H_i^2 \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (16.6)$$

ahol δ_{ik} a Kronecker-féle szimbólum (lásd III. Kötet, 8.3 Definíció).
Mivel

$$\underline{r}'_{q_k} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \underline{e}_j, \quad k = 1, 2, 3 \quad (16.7)$$

ezért

$$H_k^2 = \left(\underline{r}'_{q_k} \right)^2 = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \quad (16.8)$$

ill.

$$\underline{r}'_{q_i} \cdot \underline{r}'_{q_k} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = 0, \quad \text{ha } i \neq k. \quad (16.9)$$

Jelöljük a q_k -vonal érintő egységvektorát $\tilde{\underline{e}}_k$ -val vagyis legyen

$$\underline{r}'_{q_k} = H_k \tilde{\underline{e}}_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (16.10)$$

Az $\tilde{\underline{e}}_k$ vektor természetesen a hely, vagyis (q_1, q_2, q_3) függvénye, de a tér minden rögzített pontjában $\tilde{\underline{e}}_1, \tilde{\underline{e}}_2, \tilde{\underline{e}}_3$ ortonormált bázist alkot. Ezt úgy fejezzük ki, hogy az ortogonális, görbevonalu koordinátarendszer a tér minden pontjához hozzárendeli az $\tilde{\underline{e}}_1, \tilde{\underline{e}}_2, \tilde{\underline{e}}_3$ lokális bázist. A következőkben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy hogyan transzformálódnak valamely

vektor koordinátái, ha az x_1, x_2, x_3 Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerről a q_1, q_2, q_3 ortogonális görbevonalú koordinátarendszerre térünk át. Pontosabban arról van szó, hogy valamely vektor-vektor függvénynek az értelmezési tartomány tetszőleges $\underline{r}$ pontjában felvett $\underline{v}(\underline{r})$ értékét az $\underline{r}$ pontbeli lokális bázisban írjuk fel és meghatározzuk, hogyan fejezhető ki az utóbbi bázisra vonatkozó koordináták az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisra vonatkozó koordináták segítségével. (16.7)-ből és (16.10)-ből következik, hogy

$$\tilde{\underline{e}}_k = \sum_j \frac{1}{H_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \underline{e}_j, \quad k = 1, 2, 3, \quad (16.11)$$

vagyis a bázistranszformáció ortogonális mátrixa (lásd III. Kötet, (17.17))

$$\underline{M} = [m_{ik}] , \text{ ahol } m_{ik} = \frac{1}{H_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}. \quad (16.12)$$

Legyen

$$\underline{v}(\underline{r}) = \sum_i v_i \underline{e}_i,$$

illetve

$$\underline{v}(\underline{r}) = \sum_k \tilde{v}_k \tilde{\underline{e}}_k.$$

A III. Kötet, (17.23) formula alapján a "vektor-koordináták transzformációs törvénye"

$$\tilde{v}_k = \sum_i m'_{ki} \cdot v_i = \sum_i m_{ik} v_i = \sum_i \frac{1}{H_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} v_i, \quad k = 1, 2, 3 \quad (16.13)$$

(16.13)-ból közvetlenül is kifejezhetők v_i -k a $\tilde{v}_k$ -ok segítségével. Egyszerűbb azonban, ha figyelembe vesszük, hogy $\underline{M}\underline{M}' = \underline{M}\underline{M}^{-1} = \underline{E}$ miatt a

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{bmatrix} = \underline{M}' \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

transzformációs formulából

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \underline{M} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{bmatrix}$$

következik. Így

$$v_j = \sum_h m_{jh} \tilde{v}_h = \sum_h \frac{1}{H_h} \frac{\partial x_j}{\partial q_h} \tilde{v}_h, \quad (16.14)$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Legyen $u(\underline{r})$ differenciálható skalár-vektor függvény. Ekkor

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \underline{e}_3.$$

$\text{grad } u$ koordinátái a lokális bázisban, (16.13) alapján és a láncszabály alkalmazásával

$$\tilde{\underline{e}}_k \text{grad } u = \sum_i \frac{1}{H_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{H_k} \frac{\partial u}{\partial q_k},$$

$k = 1, 2, 3,$

vagyis ortogonális görbevonalu koordinátarendszerben a gradiens:

$$\text{grad } u = \sum_k \frac{1}{H_k} \frac{\partial u}{\partial q_k} \tilde{\underline{e}}_k. \quad (16.15)$$

Áttérünk differenciálható vektor-vektor függvény deriválttenzora koordináta-mátrixának felírására lokális bázisban. Legyen $\underline{v}(\underline{r}) = \sum_i v_i \underline{e}_i = \sum_k \tilde{v}_k \tilde{\underline{e}}_k$ differenciálható vektor-vektor függvény. Deriválttenzorának koordinátamátrixát a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben $\underline{D}$ -vel, a lokális bázisban $\underline{\tilde{D}}$ -mal jelöljük, vagyis az $\underline{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ bázisban

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{r}} \approx \underline{D} = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right],$$

az $\tilde{\underline{e}}_k$, $k = 1, 2, 3$ bázisban pedig

$$\frac{d\underline{y}}{d\underline{x}} \approx \underline{\tilde{D}} = [\tilde{d}_{ik}].$$

A (16.11) ortogonális bázistranszformációnál tenzor koordináta mátrixa a III. Kötet, (18.16) formula szerint transzformálódik, vagyis

$$\underline{\tilde{D}} = \underline{M}' \underline{D} \underline{M}.$$

Ezek szerint

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{ik} &= \sum_{j,\ell} m'_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_\ell} m_{\ell k} = \sum_{j,\ell} m_{ji} m_{\ell k} \frac{\partial v_j}{\partial x_\ell} = \\ &= \sum_{j,\ell} \frac{1}{H_i} \frac{1}{H_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_\ell}. \end{aligned}$$

A láncszabály alkalmazásával az ℓ -re vonatkozó összegezés elvégezhető és

$$\tilde{d}_{ik} = \sum_j \frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial v_j}{\partial q_k}.$$

v_j helyébe (16.14)-et helyettesítjük:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{ik} &= \sum_j \frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_h \frac{1}{H_h} \frac{\partial x_j}{\partial q_h} \tilde{v}_h = \\ &= \sum_{j,h} \frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\tilde{v}_h}{H_h} \right) + \frac{\tilde{v}_h}{H_h} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_h} \right) = \\ &= \sum_{j,h} \frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_h} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\tilde{v}_h}{H_h} \right) + \\ &+ \sum_{j,h} \frac{\tilde{v}_h}{H_i H_k H_h} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_h}. \end{aligned}$$

Az első szummában, rögzített h mellett, először a j -re vonatkozó összegezést végezzük el. (16.8) és (16.9) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{lk} &= \sum_h \frac{1}{H_i H_k} H_i^2 \delta_{ih} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(-\frac{\tilde{v}_h}{H_h} \right) + \\ &+ \sum_{j,h} \frac{\tilde{v}_h}{H_i H_k H_h} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_h} = \\ &= \frac{H_i}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(-\frac{\tilde{v}_i}{H_i} \right) + \sum_{j,h} \frac{\tilde{v}_h}{H_i H_k H_h} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_h},\end{aligned}$$

(16.16)

$i, k = 1, 2, 3.$

Ha tehát a vektor-vektor függvény ortogonális görbevonalu koordinátarendszerben adott, akkor derivált-tenzorának koordináta-mátrixa a (16.16) elemekből álló mátrix.

Meghatározzuk (16.16)-ból a $\underline{v}(\underline{r})$ függvény divergenciáját és rotációját

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{v} &= \sum_i \tilde{d}_{ii} = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(-\frac{\tilde{v}_i}{H_i} \right) + \\ &+ \sum_{j,h,i} \frac{\tilde{v}_h}{H_i^2 H_h} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_h} = \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(-\frac{\tilde{v}_i}{H_i} \right) + \sum_{i,h} \frac{\tilde{v}_h}{H_i^2 H_h} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_h} \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right)^2 = \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(-\frac{\tilde{v}_i}{H_i} \right) + \sum_{i,h} \frac{\tilde{v}_h}{H_i^2 H_h} \frac{1}{2} \frac{\partial H_i^2}{\partial q_h},\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk (16.8)-at. További azonos átalakításokat végzünk:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{v} &= \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\tilde{v}_i}{H_i} \right) + \sum_{i,h} \frac{\tilde{v}_h}{H_i H_h} \frac{\partial H_i}{\partial q_h} = \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\tilde{v}_i}{H_i} \right) + \sum_h \frac{\tilde{v}_h}{H_h} \sum_i \frac{\partial \ln H_i}{\partial q_h} = \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\tilde{v}_i}{H_i} \right) + \sum_h \frac{\tilde{v}_h}{H_h} \frac{\partial}{\partial q_h} \ln (H_1 H_2 H_3),\end{aligned}$$

vagy a második szummában is i -vel jelölve az összegező indexet

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{v} &= \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\tilde{v}_i}{H_i} \right) + \sum_i \frac{\tilde{v}_i}{H_i} \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_1 H_2 H_3)}{\partial q_i} = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_i \left[H_1 H_2 H_3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\tilde{v}_i}{H_i} \right) + \frac{\tilde{v}_i}{H_i} \frac{\partial (H_1 H_2 H_3)}{\partial q_i} \right].\end{aligned}$$

A szögletes zárójelben egy szorzat deriváltja áll. Összevonva, végül a divergenciára a következő formulát kapjuk:

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 \tilde{v}_i}{H_i} \right). \quad (16.17)$$

A rotáció előállításához a $\tilde{D}$ mátrix antiszimmetrikus része elemeinek kétszeresét, vagyis a $\tilde{d}_{ik} - \tilde{d}_{ki}$, $i \neq k$ különbségeket határozzuk meg először. Az áttekinthetőség kedvéért az $i = 1$, $k = 2$ esetet számoljuk végig részletesen. Mivel az 1, 2, 3 indexek szerepe szimmetrikus, a másik két elemet analógia alapján kapjuk meg. (16.16)-ból

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{12} - \tilde{d}_{21} &= \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\tilde{v}_1}{H_1} \right) + \sum_{j,h} \frac{\tilde{v}_h}{H_1 H_2 H_h} \frac{\partial x_j}{\partial q_1} - \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \frac{\partial x_j}{\partial q_h} - \\
&- \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\tilde{v}_2}{H_2} \right) - \sum_{j,h} \frac{\tilde{v}_h}{H_2 H_1 H_h} \frac{\partial x_j}{\partial q_2} - \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_1 \partial q_h} = \\
&= \frac{1}{H_1 H_2} \left[H_1^2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\tilde{v}_1}{H_1} \right) - H_2^2 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\tilde{v}_2}{H_2} \right) \right] + \\
&+ \sum_{j,h} \frac{\tilde{v}_h}{H_1 H_2 H_h} \left[\frac{\partial x_j}{\partial q_1} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_2 \partial q_h} - \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_1 \partial q_h} \right].
\end{aligned}$$

Az első tagban differenciáljuk a hányadosokat, a másodikban kiírjuk a h-ra való összegezést:

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{12} - \tilde{d}_{21} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[H_1 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial q_2} - \tilde{v}_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - H_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial q_1} + \tilde{v}_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right. \\
&+ \frac{\tilde{v}_1}{H_1} \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_1} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_2 \partial q_1} - \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_1^2} \right) + \\
&+ \frac{\tilde{v}_2}{H_2} \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_1} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_2^2} - \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_1 \partial q_2} \right) + \\
&\left. + \frac{\tilde{v}_3}{H_3} \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_1} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_2 \partial q_3} - \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_1 \partial q_3} \right) \right].
\end{aligned}$$

A szögletes zárójelben álló három szummát külön-külön számítjuk ki. Ha a (16.9) azonosságot ($l = 1, k = 2$) q_1 szerint differenciáljuk, kapjuk, hogy

$$0 = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_1} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_2 \partial q_1} + \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_1^2} \right),$$

vagyis

$$- \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_1^2} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_1} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_2 \partial q_1}.$$

Ennek felhasználásával az első kiszámítandó szumma

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{v}_1}{H_1} \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_1} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_2 \partial q_1} - \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_1^2} \right) = \\ & = \frac{\tilde{v}_1}{H_1} 2 \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_1} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\tilde{v}_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_2} \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_1} \right)^2 = \\ & = \frac{\tilde{v}_1}{H_1} \frac{\partial H_1^2}{\partial q_2} = 2 \tilde{v}_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2}. \end{aligned}$$

A második kiszámítandó szumma az elsőből az 1-es és 2-es indexek felcserélésével és az előjel megváltoztatásával keletkezik, tehát

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{v}_2}{H_2} \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_1} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_2^2} - \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_1 \partial q_2} \right) = \\ & = - 2 \tilde{v}_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1}. \end{aligned}$$

A harmadik kiszámítandó szummát vektorok skaláris szorzatának különbségeként írjuk fel, majd ugyanazt a tagot hozzáadjuk és levonjuk:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tilde{v}_3}{H_3} \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_1} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_2 \partial q_3} - \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_1 \partial q_3} \right) = \\
 & = \frac{\tilde{v}_3}{H_3} (\underline{r}'_{q_1} \cdot \underline{r}''_{q_2} q_3 - \underline{r}'_{q_2} \cdot \underline{r}''_{q_1} q_3) = \\
 & = \frac{\tilde{v}_3}{H_3} (\underline{r}'_{q_1} \cdot \underline{r}''_{q_2} q_3 + \underline{r}'_{q_3} \cdot \underline{r}''_{q_1} q_2 - \underline{r}'_{q_3} \cdot \underline{r}''_{q_1} q_2 - \underline{r}'_{q_2} \cdot \underline{r}''_{q_1} q_3) = \\
 & = \frac{\tilde{v}_3}{H_3} ((\underline{r}'_{q_1} \cdot \underline{r}'_{q_3})'_{q_2} - (\underline{r}'_{q_3} \cdot \underline{r}'_{q_2})'_{q_1}) \equiv 0
 \end{aligned}$$

(16.9) miatt. Kapott eredményeinket $\tilde{d}_{12} - \tilde{d}_{21}$ legutolsó kifejezésébe helyettesítve

$$\begin{aligned}
 \tilde{d}_{12} - \tilde{d}_{21} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[H_1 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial q_2} - \tilde{v}_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - H_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial q_1} + \tilde{v}_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \tilde{v}_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - 2 \tilde{v}_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right] = \\
 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[H_1 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial q_2} + \tilde{v}_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \left(H_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial q_1} + \tilde{v}_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (H_1 \tilde{v}_1)}{\partial q_2} - \frac{\partial (H_2 \tilde{v}_2)}{\partial q_1} \right].
 \end{aligned}$$

A $\tilde{d}_{23} - \tilde{d}_{32}$, ill. a $\tilde{d}_{31} - \tilde{d}_{13}$ különbségekre vonatkozó kifejezéseket innen az indexek megfelelő cseréjével kapjuk. A 11.2 Definíció alapján tehát a rotációra vonatkozó formula a következő:

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{v} = & \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial(H_3 \tilde{v}_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(H_2 \tilde{v}_2)}{\partial q_3} \right] \tilde{e}_1 + \\ & + \frac{1}{H_3 H_1} \left[\frac{\partial(H_1 \tilde{v}_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(H_3 \tilde{v}_3)}{\partial q_1} \right] \tilde{e}_2 + \\ & + \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(H_2 \tilde{v}_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(H_1 \tilde{v}_1)}{\partial q_2} \right] \tilde{e}_3. \end{aligned} \quad (16.18)$$

Végezetül felírjuk a Laplace-operátort ortogonális görbevonalu koordinátarendszerben. Legyen $u(\underline{r})$ kétszer folytonosan differenciálható skalárvektor függvény. (16.15) és (16.17) alapján

$$\begin{aligned} \Delta u = \text{div grad } u = \\ = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (16.19)$$

163. Példa. Felírjuk a Laplace-operátort gömbi koordináta-rendszerben (lásd 16.1 Példa és V. Kötet, 11.3 Példa). V. Kötet, (11.22)-ből differenciálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \underline{r}'_r &= \sin \vartheta \cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \vartheta \sin \varphi \underline{e}_2 + \cos \vartheta \underline{e}_3 \\ \underline{r}'_\vartheta &= r \cos \vartheta \cos \varphi \underline{e}_1 + r \cos \vartheta \sin \varphi \underline{e}_2 - r \sin \vartheta \underline{e}_3 \\ \underline{r}'_\varphi &= -r \sin \vartheta \sin \varphi \underline{e}_1 + r \sin \vartheta \cos \varphi \underline{e}_2, \end{aligned}$$

ahonnan a Lamé-féle együtthatók:

$$H_1 = |\underline{r}'_r| = 1, \quad H_2 = |\underline{r}'_\vartheta| = r, \quad H_3 = |\underline{r}'_\varphi| = r \sin \vartheta.$$

Ezeket (16.19)-be behelyettesítve

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (16.20)$$

16.4 Példa. Felírjuk a Laplace-operátort hengerkoordináta rendszerben (lásd 16.2 Példa és V. Kötet, 11.4 Példa). V. Kötet, (11.24)-ből differenciálással kapjuk, hogy

$$\underline{r}'_r = \cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2$$

$$\underline{r}'_\varphi = -r \sin \varphi \underline{e}_1 + r \cos \varphi \underline{e}_2$$

$$\underline{r}'_z = \underline{e}_3,$$

ahonnan a Lamé-féle együtthatók:

$$H_1 = |\underline{r}'_r| = 1, \quad H_2 = |\underline{r}'_\varphi| = r, \quad H_3 = |\underline{r}'_z| = 1.$$

Ezeket (16.19)-be helyettesítve

$$\Delta u = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]. \quad (16.21)$$

16.5 Példa. Felírjuk a (kétdimenziós) Laplace-operátort síkbeli polárkoordináta rendszerben (lásd V. Kötet, 11.2 Példa). Ha $u(\underline{r})$ az $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ bázisvektorok által kifeszített síkon van értelmezve, vagyis a független változó, $\underline{r} = x \underline{e}_1 + y \underline{e}_2$, akkor $u(\underline{r})$ gradiense is $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ síkjával párhuzamos vektor. $u(\underline{r})$ ebben az esetben egy olyan skaláreloszlás leszűkítésének tekinthető az "xy síkra", mely a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer harmadik koordinátájától, z -től független. Ha az xy síkon bevezetjük

az r, φ polárkoordináta rendszert, akkor r , ill. φ egyben a pontok első, ill. második hengerkoordinátája, és Δu kifejezését a síkbeli polárkoordináta rendszerben (16.21)-ből kapjuk annak figyelembevételével, hogy $u(r)$ nem függ z -től:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right],$$

vagyis

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (16.22)$$

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Matematika Példatár (szerkesztette: Monostory Iván)
VI. kötet, Tankönyvkiadó, 1972.
- [2] Норден, А.П.: Краткий курс дифференциальной геометрии, Гос.
Изд. физ.-Мат.Лит., 1958, Москва.
- [3] Кочин, Н.Е.: Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд. А.Н. СССР, 1951, Москва.
- [4] Laugwitz, D.: Differentialgeometrie, Teubner,
1960, Stuttgart.
- [5] Stoker, J. J.: Differential Geometry, Wiley-Interscience,
1969, New York.
- [6] Kellogg, O. D.: Foundations of Potential Theory,
Springer, 1929, Berlin.

TÁRGYMUTATÓ

a kereszt tenzor 103
 általános koordináta-rendszer 181
 áramvonal 115
 binormális 28
 centripetális gyorsulás 35
 cirkuláció 135
 csavarvonal 22, 41
 deriválási szabályok 11, 91
 derivált
 iránymenti ——— 96
 parciális ——— 44
 — vektor 89
 — tenzor 117, 187
 diád 102
 differenciál 10, 89
 differenciálhatóság 9, 10, 89, 117, 119
 differenciál-operátor 124
 divergencia 123, 156, 167, 188
 divergenciamentes vektor-vektor függvény 174
 egységtenzor 102
 egyszeresen összefüggő felületdarab 168
 siktartomány 168
 térbeli tartomány 168
 érintő egységvektor 22
 érintősík 51
 érintővektor 16
 erővonal 115
 Euler-tétel 75
 evolvens 37, 39
 evoluta 37, 39

felosztás finomsága 130

felszín 60

felszín-vektor 139

felület

egyszerű zárt	—	55
forgás	—	63
irányítható	—	54
nívó	—	93
reguláris	—	54
szint	—	93

felület-darab

egyszeresen összefüggő	—	168
egyszerű	—	48
reguláris	—	48, 54

felületi görbe 50

felületi pont

elliptikus	—	—	84
hiperbolikus	—	—	84
parabolikus	—	—	84
planáris	—	—	84
szférikus	—	—	84

feszültség-tenzor 110, 113

fluxus 142, 143

folytonosan differenciálható függvény 121

folytonosság 9, 117

forrás 143

forráserősség 54

— sűrűség 156

forrásminták vektor-vektor függvény 174

főirány 73

főnormális

Frenet-féle formulák 31

függvény

egyparaméteres vektor-skalár	—	7
dekomparaméteres vektor-skalár	—	182
kétparaméteres vektor-skalár	—	43
összetett	—	45
skalár-vektor	—	87
vektor-vektor	—	144

Gauss-féle első alapforma 67

- elsőrendű főmennyiség 60
- második alapforma 84
- másodrendű főmennyiség 68

Gauss-Osztrogradszkij-tétel 149, 168

görbesereg

görbevonali koordináta-rendszer 181

görbület 25, 70

fő	————	78
normál	————	74
összeg	————	80
szorzat	————	80

görbületi kör 32

görbületi középpont 32

görbületi sugár 32

gradiens 89, 185

Green-tétel 165

gyorsulás vektor 18

Hamilton-féle operátor 124

harmonikus függvény 175

határérték 8, 116

határozatlan integrál 14

integrál

ív hossz szerinti	————	144, 145
felszín szerinti	————	144,
felületi	————	137, 144
vonali	————	129, 131, 144

ívelem-négyzet 67

ív hossz 18

Jacobi-determináns 52

kisérő triéder 29

konzervatív vektor-vektor függvény 169

koordinátafelület 182

koordinátavonal 182

körevolvens 41

környezet 7, 145

Langrange-féle középértéktétel 12, 93
 Lamé-féle együtthatók 183
 láncszabály 45, 91
 Laplace-féle parciális differenciálegyenlet 175
 Laplace-operátor 126, 192, 193
 lokális bázis 183

meridián vonal 64
 Meusnier-tétel 71
 Möbius-szalag 54
 munka 129

nabla-operátor 124
 normális 26

felületi ————— 68
 normálmetszet 71
 normálsík 29
 normál vektor 51

— egység-vektor 51
 null-tenzor 102

nyelő 143
 nyom 108

ortogonális trajektória 37

örvénymentes vektor-vektor függvény 170

pálya 17
 pályamenti gyorsulás 35
 pályamenti sebesség 35
 parallel-körök 64
 paraméter sík 43
 paramétertranszformációk 21, 52
 paramétervonalak 48
 periodikus függvény 17
 Poisson-féle parciális differenciálegyenlet 175
 poligon 18
 potenciálfüggvény 169
 potenciálos vektor-vektor függvény 168
 primitív függvény 14

reguláris térgörbe 25
 rektifikálható görbe 18
 rektifikáló sík 29
 rotáció 124, 164, 167, 192
 rotációmentes vektor-vektor függvény 170, 179

sebességvektor 17
 simulókörr 32
 simulósik 27
 skalár eloszlás 87
 skalárinvariáns 108
 skalármező 87
 spur 108
 Stokes-tétel 156, 167
 szögsebesség vektor 110
 Taylor-formula 13, 46
 tenzor 100
 térfogattorzulás mértéke 109
 térgörbe 15
 zárt ——— 15
 természetes paraméter 21
 torusz 66
 torzió 30
 totálisan differenciálható függvény 45
 trajektória 17
 vektoreloszlás 114
 vektorinvariáns 106
 vektormező 114
 vektorvonal 115