



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:
Farkas Miklós

MATEMATIKA I. kötet
A MATEMATIKA ALAPJAI



Műegyetemi Kiadó, 2007

(Tizennegyedik utánnymás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040796**



**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának**

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 8,4 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 6485/07

AZ OLVASÓHOZ

Ez a jegyzet a Matematika c. jegyzetsorozat I. kötete. A sorozat a következő kötetekből áll:

- I. kötet. A matematika alapjai
- II. kötet. Egyváltozós valós függvények
- III. kötet. Lineáris algebra
- IV. kötet. Végtelen sorok
- V. kötet. Többváltozós valós függvények
- VI. kötet. Differenciálgeometria és vektoranalízis
- VII. kötet. Komplex függvények
- VIII. kötet. Differenciálegyenletek

A sorozat a szigorlati Matematika anyagot tartalmazza. A jegyzet azokhoz a gépészmérnök hallgatókhoz szól, akik a Matematika c. tárgy előadásait és gyakorlatait látogatják. Ezért nem tartalmaz hosszadalmas magyarázatokat, bevezető és illusztratív példákat stb., hanem "csupán" a tulajdonképpeni anyagot lehetőség szerint teljességre és maximális tömörségre törekedve. (A levelező hallgatók számára külön utmutató csatlikozik a sorozathoz.) A sorozatot a Matematika Példatár kötetei egészítik ki, amelyekben az olvasó nagyszámu kidolgozott és kidolgozatlan példát és feladatot talál.

A kötet fejezetekre, a fejezetek pontokra vannak osztva, de a pontok számozása a fejezetektől függetlenül, folyamatosan történt. Az egyes pontokon belül külön-külön számozzuk a definíciókat, tételeket (segédtételeket, következményeket), példákat, formulákat, ill. ábrákat. A példák részben a nehéz fogalmakat, tételeket világítják meg, részben "ellenpéldák" és nagyrészt az elméleti anyag szerves részét képezik. A hivatkozások egy kötetben belül az idézett definíció, tétel stb. számának megadásával, más kötet esetében, ezen kívül a hivatkozott kötet számának megadásával történik (mindkét esetben a fejezet megadása nélkül). Tehát pl. az I. Kötetben az "1. 13.2. Tétel" hivatkozás az I. Kötet 13. pont 2. tételét jelenti; a II. Kötetben ugyanerre a tételre úgy hivatkozunk: "1. I. Kötet, 13.2. Tétel". A bizonyítások végét pont és felkiáltójel jelzi: .!

Az Irodalomjegyzék elsősorban az anyag iránt mélyebben érdeklődő olvasónak ajánlott művek és nem az eredmények eredeti forrásainak címet tartalmazza. Az irodalomjegyzékben felsorolt művekre szögletes zárójelbe tett számokkal hivatkozunk.

Budapest, 1971. március

A szerkesztő

TARTALOMJEGYZÉK

ELSŐ FEJEZET

HALMAZOK ÉS FÜGGVÉNYEK	7
1. Alapfogalmak. Halmazokkal végzett műveletek	7
2. Függvények	9
3. Direkt szorzat. Grafikon	12
4. Számosság	13

MÁSODIK FEJEZET

MATEMATIKAI LOGIKA	16
5. A matematika módszere	16
6. Állításokkal végzett műveletek	18
7. Matematikai állítások és bizonyítási módszerek	21
8. A matematikai indukció. A binomiális tétel	24
9. Állításfüggvények. Kvantorok	28

HARMADIK FEJEZET

A VALÓS SZÁMOK	32
10. A valós számhalmaz axiómatikája	32
11. Fontosabb tulajdonságok. Az abszolút érték	37
12. A számegyenes. Intervallumok	40
13. A valós számhalmaz számossága	44

NEGYEDIK FEJEZET

VÉGTELEN NUMERIKUS SOROZATOK	50
14. Végtelen sorozatok elemi tulajdonságai	50
15. Végtelen sorozat határértéke	52
16. A határérték létezésének feltételei	61
17. Torlódási pontok	66

IRODALOMJEGYZÉK	71
TÁRGYMUTATÓ	72
Betűrendes tárgymutató az I. -VIII. kötethez	75

HALMAZOK ÉS FÜGGVÉNYEK

1. Alapfogalmak. Halmazokkal végzett műveletek

A tapasztalatból ismerjük a halmaz fogalmát, melyen bizonyos dolgok, fogalmak, matematikai objektumok stb. összességét (gyűjteményét, osztályát) értjük. Ha egy x dolog hozzátartozik az X halmazhoz, akkor ezt úgy fejezzük ki, hogy x eleme az X halmaznak. Jelben: $x \in X$. Ha y nem eleme az X halmaznak, azt így jelöljük: $y \notin X$. Egy halmazt akkor tekintünk adótnak (jól definiáltnak), ha összes elemét ismerjük, vagy legalábbis pontos utasításunk (szabályunk) van, melynek alkalmazásával bármiről eldönthető, hogy eleme-e a halmaznak, vagy pedig nem. Ha az X halmazt elemei felsorolásával adtuk meg, és elemei x, y, z stb., akkor ezt így jelöljük: $X = \{x, y, z, \dots\}$. (A halmaz elemeinek felsorolásában a sorrendnek nincs jelentősége.) Ha a halmazt valamilyen utasítással adtuk meg, vagyis X azon x dolgok halmaza, melyek a P tulajdonsággal rendelkeznek, akkor ezt így jelöljük: $X = \{x : P(x)\}$.

Az X és Y halmazokat akkor mondjuk egyenlőnek, $X = Y$, ha elemeik közősek, vagyis, ha abból, hogy $x \in X$, következik $x \in Y$, és fordítva, abból, hogy $y \in Y$, következik, hogy $y \in X$.

Azt a halmazt, amelyiknek nincs eleme üres halmaznak nevezzük és így jelöljük: $\emptyset$.

Azt mondjuk, hogy az X halmaz az Y halmaz részhalmaza, ha X minden eleme Y -nak is eleme, vagyis, ha abból, hogy $x \in X$, következik $x \in Y$. Azt, hogy X az Y -nak részhalmaza, így jelöljük: $X \subset Y$, vagy $Y \supset X$.

Miután minden halmaz egyenlő önmagával, bármely halmaz egyben önmagának részhalmaza is. Ha $X \subset Y$ és $X \neq Y$, akkor X -et Y valódi részhalmazának nevezzük. Világos, hogy az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza és önmagán kívül minden más halmaznak valódi részhalmaza.

Ha megadjuk az X halmazt és a P tulajdonságot, akkor az egyértelműen definiálja X azon elemeinek Y részhalmazát, melyek a P tulajdonsággal rendelkeznek: ezt így jelöljük: $Y = \{x \in X : P(x)\}$.

Lehetséges, hogy egy X halmaznak egyetlen eleme van: x , vagyis $X = \{x\}$. Ebben az esetben sem szabad azonban összekeverni az x elemet

azzal az X halmazzal melynek egyetlen eleme x . Beszélhetünk pl. az $\{\emptyset\}$ halmazról, melynek egyetlen eleme van, éspedig az üres halmaz. $A \setminus \{\emptyset\}$ halmaz nem azonos a $\emptyset$ üres halmazzal, ul. ez utóbbinak nincs eleme, az előbbinek pedig van, ti. $\emptyset$.

1.1. Definíció. Az X és Y halmazok egyesítésének (uniójának) nevezzük és $X \cup Y$ -nal jelöljük azt a halmazt, amelynek x akkor és csak akkor eleme, ha $x \in X$, vagy $x \in Y$. (A "vagy" kötőszót itt és általában az un. megengedő értelemben használjuk, vagyis az előbbi feltétel azt követeli, hogy $x \in X$ és $x \in Y$ közül legalább az egyik teljesüljön.)

1.2. Definíció. Az X és Y halmazok metszetének (közös részének) nevezzük és $X \cap Y$ -nal jelöljük azt a halmazt, melynek x akkor és csak akkor eleme, ha $x \in X$ és $x \in Y$.

Ha $X \cap Y = \emptyset$, vagyis, ha X -nek és Y -nak nincs közös eleme, a két halmazt idegennek (diszjunktak) nevezzük. Az egyesítés és metszetképzés művelete könnyen kiterjeszthető tetszőleges számú halmaz esetére. Tekintsük az X_α halmazok osztályát, ahol α tetszőleges A halmazbeli

elem. α -t indexnek, A -t pedig indexhalmaznak nevezzük. " A " szerepét játszhatja például a természetes számok halmaza: $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ jelöli ekkor azt a halmazt, melynek x akkor és csak akkor eleme, ha van (legalább egy) $\alpha \in A$, hogy $x \in X_\alpha$. $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ jelöli azt a halmazt, melynek x akkor és csak akkor eleme, ha minden $\alpha \in A$ -ra $x \in X_\alpha$.

1.3. Definíció. Az X és Y halmazok különbségének nevezzük és $X \setminus Y$ -nal jelöljük azt a halmazt, melynek x akkor és csak akkor eleme, ha $x \in X$ és $x \notin Y$.

Legyen $X \subset A$, ekkor az $\bar{X} = A \setminus X$ halmazt az X halmaz (A -ra vonatkozó) komplementerének (kiegészítő halmazának) nevezzük.

Az előbbieken un. halmazalgebrai műveleteket definiáltunk, melyek segítségével adott halmazokból új halmazok képezhetők.

A definíciókból azonnal adódnak a következő "műveleti azonosságok":

$$X \cup X = X, \quad X \cap X = X, \quad (\text{Idempotens}), \quad (1.1)$$

$$X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X, \quad (\text{kommutatív}), \quad (1.2)$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap Z, \quad X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup Z, \quad (\text{asszociatív}) \quad (1.3)$$

$$X \cup \emptyset = X, \quad X \cap \emptyset = \emptyset, \quad (1.4)$$

$$X \cap \bar{X} = \emptyset, \quad \bar{\bar{X}} = X. \quad (1.5)$$

Igazak továbbá az

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad (\text{disztributív}) \quad (1.6)$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \quad (1.7)$$

azonosságok.

(1.6) Bizonyítása. Be kell látni, hogy ha x eleme a bal oldalon álló halmaznak, akkor a jobb oldalon álló halmaznak is eleme és fordítva. Legyen $x \in X \cap (Y \cup Z)$; ez azt jelenti, hogy $x \in X$ és $x \in Y$, vagy $x \in Z$ (az első állításnak feltétlenül, az utóbbi kettő közül legalább az egyiknek teljesülnie kell). Ezek szerint $x \in X$ és $x \in Y$, vagy $x \in X$ és $x \in Z$, vagyis $x \in X \cap Y$, vagy $x \in X \cap Z$, tehát $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Legyen most $y \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$; ez azt jelenti, hogy $y \in X \cap Y$, vagy $y \in X \cap Z$. Bármelyik teljesül is, $y \in X$ és emellett az $y \in Y$ és $y \in Z$ közül legalább az egyiknek teljesülnie kell, tehát $y \in X \cap (Y \cup Z)$.!

(1.7) hasonlóan bizonyítható.

Ha $X \subset A$ és $Y \subset A$, akkor érvényesek a de Morgan féle azonosságok:

$$\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y}, \quad \overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}. \quad (1.8)$$

Bizonyításuk (1.6)-hoz hasonlóan történhet.

2. Függvények

Legyen X és Y két halmaz; az $f: X \rightarrow Y$ függvény (leképzés) az X halmazt az Y halmazba képezi le azáltal, hogy X minden egyes x eleméhez hozzárendeli Y -nak pontosan egy (egy és csak egy) y elemét. Az f függvény által $x \in X$ -hez hozzárendelt $y \in Y$ -t a függvény x -ben felvett értékének nevezzük és $f(x)$ -szel jelöljük. X -et az f függvény értelmezési tartományának, Y -t értékhalmazának nevezzük. A függvényt akkor tekintjük adottnak, ha adott értelmezési tartománya, értékhalmaza és a hozzárendelési mód, melynek segít-

ségével meg tudjuk mondani, hogy az értelmezési tartomány tetszőleges eleméhez, milyen függvényérték tartozik. Speciálisan lehetséges, hogy $X = Y$. Ebben az esetben az X halmaznak önmagába való leképezéséről beszélünk.

Az f és g függvényeket akkor nevezzük azonosnak, vagy azonosan egyenlőknek, jelben: $f = g$, vagy $f(x) \equiv g(x)$, ha közös az értelmezési tartományuk, az értékhalmazuk és az értelmezési tartomány minden egyes eleméhez ugyanazt az értéket rendelik hozzá, vagyis ha $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$ és minden $x \in X$ -re $f(x) = g(x)$.

Az $E = \{y \in Y: \text{van } x \in X, \text{ hogy } f(x) = y\}$ halmazt az f függvény értékkészletének nevezzük. Ha $E = Y$, akkor azt mondjuk, hogy f az X halmazt az Y halmazra képezi le.

Legyen $A \subset X$; az A halmaz képének nevezzük és $f(A)$ -val jelöljük az A elemeihez tartozó függvényértékek halmazát, vagyis

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Nyilván $f(A) \subset E$ és $f(X) = E$.

Legyen B tetszőleges halmaz; B inverz képének nevezzük és $f^{-1}(B)$ -vel jelöljük X -nek azt a részhalmazát, melynek elemeihez tartozó függvényértékek B elemei, vagyis

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: X \rightarrow Y$ függvény X -nek Y -ba történő egy-egyértelmű leképezése, ha X különböző elemeihez különböző függvényértékek tartoznak, vagyis; ha minden $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ -re $x_1 \neq x_2$ -ből következik $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: X \rightarrow Y$ függvény X -nek Y -ra történő egy-egyértelmű leképezése (f egy-egyértelmű megfeleltetést létesít X és Y között), ha

- a) minden $y \in Y$, -hoz van $x \in X$, hogy $f(x) = y$,
- b) minden $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ -re $x_1 \neq x_2$ -ből következik $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Nyilvánvaló, hogy ha az f függvény X -nek egy-egyértelmű leképezése Y -ba és E az értékkészlete, akkor f egy-egyértelmű megfeleltetést létesít X és E között.

2.3. Definíció. Legyen az $f : X \rightarrow Y$ függvény X -nek Y -ba történő egy-egyértelmű leképezése és E az értékkészlete; az $f^{-1} : E \rightarrow X$ függvényt, mely minden $y \in E$ -hez azt az $x \in X$ -et rendel hozzá, melynek képe az f leképezésénél y , vagyis melyre $f(x) = y$, az f függvény inverz függvényének nevezzük.

A mondott feltevések mellett f^{-1} valóban függvény, hiszen E tetszőleges eleméhez pontosan egy jól meghatározott függvényérték tartozik. Ha ugyanis f^{-1} egy $y \in E$ -hez X -nek, mondjuk, két különböző elemét, x_1 -et és x_2 -t rendelné, ez azt jelentené, hogy $y = f(x_1) = f(x_2)$ lenne bár $x_1 \neq x_2$, szemben az f -re tett feltevessel. Az f^{-1} inverz függvény értelmezési tartománya E , értékkészlete pedig X . Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \text{minden } x \in X\text{-re.} \quad (2.1)$$

f^{-1} az E halmaznak X -re történő egy-egyértelmű leképezése. Ul. ha E két különböző eleméhez f^{-1} az X halmaz ugyanazon elemét rendelné hozzá, ez azt jelentené, hogy X ezen eleméhez f két értéket rendel, vagyis f nem lenne függvény. Ennek alapján beszélhetünk f^{-1} inverz függvényéről. Nyilvánvaló, hogy f^{-1} inverze $(f^{-1})^{-1} = f$, feltéve, hogy f értékhalmazának E -t tekintjük.

2.4. Definíció. Legyen $f : X \rightarrow Y$ adott függvény és $D \subset X$; a $g : D \rightarrow Y$ függvényt az f függvény D -re való leszűkítésének nevezzük, ha $g(x) = f(x)$ minden $x \in D$ -re ($g(x) \equiv f(x)$ a D halmazon).

2.5. Definíció. Legyen $f : X \rightarrow Y$ adott függvény és $X \subset D$; a $g : D \rightarrow Y$ függvényt az f függvény D -re való kiterjesztésének nevezzük, ha $g(x) = f(x)$ minden $x \in X$ -re.

Világos, hogy egy függvény egyértelműen meghatározza egy adott halmazra vonatkozó leszűkítését, függvénynek egy adott halmazra való kiterjesztése viszont általában többféleképpen végezhető el.

2.1. Példa. Jelölje T (mint már előbb és a továbbiakban is) a természetes számok halmazát, vagyis $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. legyen P a nem-negatív páros számok halmaza, vagyis $P = \{2n : n \in T\}$. Jelölje $f : T \rightarrow T$ azt a függvényt, mely minden természetes számhoz a kétszeresét rendel hozzá, vagyis $f(n) = 2n$ minden $n \in T$ -re. Ez a függvény nyilván T -nek T -be történő egy-egyértelmű leképezése, melynek értékkészlete P (tehát az f függvény T és P között egy-egyértelmű megfeleltetést létesít). Létezik f inverz függvénye : $f^{-1} : P \rightarrow T$, mely minden nem-negatív páros szám-

hoz a felét rendeli. Jelölje N a nem-negatív négyel osztható számok halmazát, $N = \{4n : n \in T\}$. Beszélhetünk f^{-1} -nek N -ra való leszűkítéséről, melyet g -vel jelölünk. $Y: N \rightarrow T$, $g(4n) = f^{-1}(4n) = 2n$ minden $n \in T$ -re.

2.6. Definíció. Legyen az f és g függvény olyan, hogy g értelmezési tartománya megegyezik f értékhalmazával, vagyis $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$; a $g \circ f: X \rightarrow Z$ függvényt, ha $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ minden $x \in X$ -re, az f és g függvények összetett függvényének nevezzük.

A $g \circ f$ összetett függvény tehát az X -halmazt Y közbeiktatásával Z -be képezi le. Nyilvánvaló, hogy ha f az X halmaznak Y -ra, g pedig Y -nak Z -re való egy-egyértelmű leképezése, akkor a $g \circ f$ összetett függvény X -nek Z -re való egy-egyértelmű leképezése. Ebben az esetben létezik $g \circ f$ inverz függvénye és $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

3. Direkt szorzat. Grafikon

Tetszőleges két elemből x -ből és y -ből az (x, y) rendezett párt (rendezett elempárt) alkothatjuk azáltal, hogy meghatározott sorrendben vesszük (írjuk fel) őket; két rendezett párt (x, y) -t és (u, v) -t akkor nevezünk egyenlőnek, $(x, y) = (u, v)$, ha első elemeik is és második elemeik is egyenlők, vagyis ha $x = u$ és $y = v$. Megjegyezzük, hogy szemben a rendezett párokkal, ahol a felírás sorrendjének fontos szerepe van, az x, y , ill. az u, v elemekből álló halmazok $\{x, y\}$, ill. $\{u, v\}$ akkor is egyenlők, lehetnek, ha $x \neq u$, $y \neq v$. Ugyanis $\{x, y\} = \{u, v\}$ akkor is, ha pl. $x = v$, $y = u$.

3.1. Definíció. Legyen X és Y két halmaz: mindazon rendezett párok halmazát, melyek első eleme X -beli elem, második eleme pedig Y -beli elem, e két halmaz direkt szorzatának nevezzük és $X \times Y$ -nal jelöljük, vagyis

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Speciálisan, ha $X = Y$ az $X^2 = X \times X$ halmazt az X halmaz önmagával vett direkt szorzatának nevezzük.

Például, ha $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{0, 1\}$, akkor

$$X \times Y = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}.$$

A direkt szorzat képzés nem felcserélhető (nem kommutatív) "művelet". Például, ha X a páros, Y pedig a páratlan számok halmaza, akkor $X \times Y$ azokból a rendezett párokból áll, amelyek első eleme páros, második eleme páratlan; $Y \times X$ azokból a rendezett párokból, melyek első eleme páratlan, második eleme páros.

A rendezett párhoz hasonlóan képezhetünk 3, 4, ill. n elemből ($n \in T, n \geq 2$) rendezett elemhármasokat, rendezett elemnégyeseket, ill. rendezett elem n - eseteket. Két halmaz direkt szorzatához hasonlóan képezhetjük 3, 4, ill. n halmaz direkt szorzatát.

A direkt szorzat fogalma lehetőséget teremt függvényeknek (leképezéseknek) a direkt szorzat részhalmazaként való "ábrázolására".

3.2. Definíció. Legyen $f : X \rightarrow Y$, függvény és $G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$; Az $X \times Y$ direkt szorzat G részhalmazát az f függvény grafikonjának nevezzük.

E szerint az értelmezési tartomány bármely x elemét tekintjük is, az f függvény G grafikonjának pontosan egy olyan rendezett pár eleme van, melyben az első helyen x áll és ebben a rendezett párban a második helyen az x -ben felvett $f(x)$ függvényértéket találjuk. Például, a 2.1. Példában szereplő f függvény G grafikonja: $G = \{(n, 2n) : n \in T\}$, $G \subset T \times P$; pl. $(3, 6) \in G$, de $(3, 4) \notin G$, bár $(3, 4) \in T \times P$.

4. Számosság

Ebben az pontban halmazok összehasonlításával foglalkozunk abból a szempontból, melyik "nagyobb", melyik tartalmaz több elemet. Ha az A és B halmazok véges sok elemet tartalmaznak, A , ill. B elemeinek száma $m \in T$, ill. $n \in T$, ekkor, ha $m < n$, azt mondjuk, hogy B nagyobb számosságú, mint A , ha $m = n$, pedig azt, hogy A és B egyenlő számosságúak, vagy ekvivalensek. Nyilvánvaló, hogy az utóbbi esetben egy-egyértelmű megfeleltetést lehet létesíteni A és B között (l. 2.2. Definíció) és fordítva, ha az A és B véges sok elemet tartalmazó halmazok között egy-egyértelmű megfeleltetést lehet létesíteni, akkor A és B elemeinek száma egyenlő. Véges halmazoknak ezt a tulajdonságát általánosítjuk tetszőleges halmazok ekvivalenciájának értelmezésére.

4.1. Definíció. Ha az X és Y halmazok között egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető, akkor azt mondjuk, hogy X és Y egyenlő számosságúak (ekvivalensek), jelben $X \sim Y$.

4.1. Példa. Az $X = \{a, b, c\}$ és az $Y = \{1, 2, 3\}$ halmazok ekvivalensek, mivel például az $f: X \rightarrow Y$, $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ függvény egy-egyértelmű megfeleltetést létesít közöttük.

4.2. Példa. Jelölje P a nem-negatív páros, S pedig a pozitív páratlan számok halmazát, vagyis $P = \{2n; n \in T\}$, $S = \{2n + 1; n \in T\}$. $P \sim S$, mivel az $f: P \rightarrow S$, $f(2n) = 2n + 1$ minden $n \in T$ -re, függvény egy-egyértelmű megfeleltetést létesít közöttük.

Könnyen belátható, hogy a halmazok közötti ($\sim$) "ekvivalencia reláció" a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- E1. bármely X halmaz ekvivalens önmagával: $X \sim X$, (reflexivitás);
- E2. ha $X \sim Y$, akkor $Y \sim X$, (szimmetria);
- E3. ha $X \sim Y$, és $Y \sim Z$, akkor $X \sim Z$, (transzitivitás).

4.2. Definíció. Ha az X halmaz ekvivalens az Y halmaz egy valódi részhalmazával és Y nem ekvivalens X egyetlen részhalmazával sem, akkor azt mondjuk, hogy X számossága kisebb, mint Y számossága (Y számossága nagyobb, mint X számossága), jelben $X < Y$, vagy $Y > X$.

Nyilvánvalóan igaz a következő

4.1. Tétel. Legyenek X és Y véges (véges sok elemet tartalmazó) halmazok; $X < Y$ akkor és csak akkor áll fenn, ha X elemeinek száma kisebb, mint Y elemeinek száma.

4.2. Következmény: Ha Y véges halmaz és X az Y halmaz valódi részhalmaza ($X \subset Y$, $X \neq Y$), akkor $X < Y$.

Ha X és Y két tetszőleges halmaz, akkor elvileg a következő relációk valamelyikében állhatnak egymással:

- a) $X \sim Y$ (4.1. Definíció);
- b) $X < Y$ (4.2. Definíció);
- c) $X > Y$ (4.2. Definíció);
- d) X ekvivalens Y egy valódi részhalmazával és Y ekvivalens X egy valódi részhalmazával;
- e) X nem ekvivalens Y egy részhalmazával sem és Y nem ekvivalens X egy részhalmazával sem.

A d) és e) eseteket azonban figyelmen kívül hagyhatjuk. Egyrészt érvényes ui. a következő

4.3. Tétel. (Cantor-Bernstein tétele) Ha X ekvivalens Y egy részhalmazával és Y ekvivalens X egy részhalmazával, akkor $X \sim Y$.

A bizonyításra nézve $\ell. [4]$. Ezek szerint d)-ből a) következik. Másrészt bizonyítható (ugyancsak $\ell. [4]$), hogy az e) eset nem állhat fenn.

Könnyen belátható, hogy a halmazok közötti $(\prec)$ "rendezési reláció" a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

R1) egyetlen X halmazra sem áll fenn $X \prec X$, (irreflexivitás);

R2) ha $X \prec Y$, akkor $Y \prec X$ nem teljesül, (aszimmetria);

R3) ha $X \prec Y$ és $Y \prec Z$, akkor $X \prec Z$, (tranzitivitás); és végül az előbbiekből következik, hogy

R4) bármely két X és Y halmazra az $X \sim Y$, $X \prec Y$, $X \succ Y$ relációk közül pontosan egy teljesül, (trichotómia).

Az R4) tulajdonságból R1) és R2) következik; ez utóbbiakat csak azért soroltuk fel külön is, hogy világosabb legyen a különbség a rendezési reláció alapvető tulajdonságai és az ekvivalencia reláció E1) és E2) tulajdonságai között.

A természetes számok $T = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ halmazának számosságát megszámlálhatóan végtelen (vagy rövidebben megszámlálható számosság-nak nevezzük és $\aleph_0$ -al jelöljük ($\aleph$: alef, a héber abécé első betűje). Ugyanez a számossága természetesen minden T -vel ekvivalens halmaznak. Nyilvánvaló, hogy az $\aleph_0$ számosság minden véges számosságnál nagyobb (véges halmazok számosságát elemeik számával jelöljük, tehát pl. egy hét-elemű halmaz számossága 7), $\aleph_0 > n$ minden $n \in T$ -re.

4.3. Példa. A 2.1. Példában a T halmaz és a nem-negatív páros számok P halmaza között egy-egyértelmű megfeleltetést létesítettünk, tehát $T \sim P$, más szóval P számossága ugyancsak $\aleph_0$, vagyis T ekvivalens egy valódi részhalmazával. A 4.2. Példából kitűnik, hogy a pozitív páratlan számok S halmazának számossága ugyancsak $\aleph_0$. Mivel $T = P \cup S$, példát látunk arra, hogy két megszámlálható számosságú halmaz egyesítése is megszámlálható számosságú halmaz.

A megszámlálható számosság az első "végtelen számosság", mellyel találkozunk. A 13. pontban látni fogjuk, hogy ennél kisebb végtelen számosság nincs, ennél nagyobb viszont van.

MATEMATIKAI LOGIKA

5. A matematika módszere

A matematika tudománya az anyagi világ tanulmányozása során az emberiség szükségleteként fejlődött önálló tudománnyá. Elsőrendű célja, más tudományokhoz hasonlóan, a jelenségek lehetőség szerint pontos leírása, visszatükrözése az emberi tudatban avégett, hogy az ember (a mérnök) jól megértse és saját céljaira felhasználhassa azokat az objektív törvényszerűségeket, melyek meghatározzák az anyagi világban végbemenő jelenségek lefolyását. A matematikát a többi tudományoktól megkülönbözteti, hogy nem a valóságos világ egy többé kevésbé körülhatárolt jelenségcsoportjával foglalkozik (mint a fizika, a kémia, a közgazdaságtudomány stb.), hanem az anyagi világ bizonyos általános összefüggéseiből (mennyiségi viszonyaiból, térbeli elhelyezkedéséből stb.) indul ki, elvonatkoztat a jelenségek konkrét (fizikai, kémiai, közgazdasági stb.) tartalmától, ily módon a valóságos jelenségeknek, összefüggéseknek csak bizonyos lényeges vonásokat tükröző matematikai fogalmakat, összefüggéseket alkot és ezekre vonatkozóan állapít meg szigorú logikai úton törvényszerűségeket. A mai matematikára különösen jellemző a nagyfokú, többlépcsős absztrakció, amennyiben például a matematika tárgyává teszi a matematika már kifejlődött fejezetét is és bizonyos matematikai fogalmakból újabb absztrakció, elvonatkoztatás útján alkot újabb, elvontabb, általánosabb fogalmakat. Éppen a nagyfokú absztrakció, mely kétségtelenül távolítja a matematikát a valóságos jelenségek konkrét tartalmától, teszi alkalmassá a matematikát az anyagi világ egyre pontosabb, nagy hatásfokú tanulmányozására, arra, hogy eredményei igen sokféle, egymástól távol eső jelenség leírására legyenek felhasználhatók. Természetesen a matematika által szolgáltatott eredmények sohasem tekinthetők a valóságos jelenség teljes és abszolút pontos leírásának, hiszen a valóságban mindig hatnak olyan tényezők, melyeket az elvonatkoztatás során elhanyagoltunk. Annak, hogy a matematikai úton nyert eredmények mennyire pontosan tükrözik a valóságot, a gyakorlat a próbaköve. A mai matematikára jellemző az axiomatikus módszer széleskörű alkalmazása. Ennek lényege abban áll, hogy a szóban forgó matematikai elmélet kiinduló pontjává lehetőleg kis számú (definiálatlan) primitív fogalmat és ezek alapvető tulajdonságait, összefüggéseit megadó axiómát (a tapasztalatból, logikai bizonyítás nélkül nyilvánvalóan igaznak elfogadott állítást) teszünk. Minden további fogalmat pontosan definiálunk kizárólag a primitív fogalmak (ill. már definiált fogalmak) felhasználásával és minden további állítást, tételt a

logikai törvények szigorú betartásával bizonyítunk (vezetünk le) kizárólag az axiómák (ill. már bizonyított tételek) felhasználásával.

Ebben a jegyzetben nem helyezkedünk szigorú axiomatikus alapokra. Az előző fejezetben pl. nem soroltuk fel a halmazelmélet alapjául szolgáló axiomarendszert, bár ilyen megadható. A "halmaz", az "elemének lenni" fogalmak primitív fogalmaknak tekinthetők. (Mí a "hozzárendelés" fogalmát is valójában primitív fogalomként írtuk körül, bár axiomatikus tárgyalásban, kis kerülővel, definiálható fogalomként adható meg.) Az az állítás, hogy az üres halmaz létezik, felvehető az axiómák közé. Két halmaz egyesítése definiált fogalom (bár az, hogy két halmaz egyesítése ugyancsak halmaz újabb axiómát kíván).

5.1. Példa. A természetes szám fogalma kifejezi mindazon véges halmazok közös tulajdonságát, melyek ugyanannyi elemet tartalmaznak. E fogalom az emberiségnek a valóságos világ tanulmányozása alapján alkotott egyik legősibb matematikai absztrakciója. Mí eddig is szerepeltettük a természetes számok halmazát anélkül, hogy azt axiomatikusan definiáltuk volna. Példaként megadjuk most a természetes számok Peano-féle axiomarendszerét. Primitív fogalmak a "természetes szám" és a "zérus". A természetes számok rendszere egy T halmaz, melyen egy $r : T \rightarrow T$ függvény van értelmezve és melyből egy $0 \in T$ zéruselem kiválasztva oly módon, hogy teljesülnek a következő axiómák:

T1) az r függvény T -nek T -be történő egy-egyértelmű leképezése
(1. 2.1. Definíció)

T2) $0 \notin r(T)$, vagyis a zérus nem eleme r értékkészletének;

T3) ha $\forall x \in T, 0 \in V$ és minden $n \in V$ -vel együtt $r(n) \in V$, akkor $V = T$.

Az r függvényt rákövetkezési függvénynek nevezzük és, ha $n \in T$, akkor $r(n) \in T$ -t az n természetes számra rákövetkező számnak nevezzük. A T1) axióma szerint különböző számoknak különbözők a rákövetkezői is. T2) szerint 0 nem rákövetkezője egyetlen természetes számnak sem. T3) azt mondja, hogy ha T -nek egy részhalmaza tartalmazza 0 -t és minden elemével együtt annak rákövetkezőjét is, akkor az nem lehet T valódi részhalmaza. Ez utóbbi axiómát a matematikai indukció elvének nevezzük és rá a 8. pontban még visszatérünk. Ha a T halmazban az összeadás és a szorzás műveletét megfelelően definiáljuk, a Peano féle axiómákból a természetes számok rendszerének összes tulajdonsága levezethető anélkül, hogy a természetes számoknak a tapasztalatból ismert bármilyen tulajdonságát fel kellene használnunk. Az összeadás definíciója pl. a következő. Ha $m \in T$ és $n \in T$, akkor $m + n \in T$ definíció szerint: $m + n = r^n(m)$, ahol

$$r^n = \overset{1}{r} \circ \overset{2}{r} \circ \dots \circ \overset{n}{r}$$
 (1. 2.6. Definíció). Ezek szerint $r(m) = m + 1$, $m \in T$.

A matematika tudománya tehát axiómákból, fogalmakból és tételekből, ezek viszont elemi állításokból állnak. A különböző állításokat előzőleg már igaznak elfogadott állításokból logikai úton kell levezetni. A matematikai logika matematikai módszereket használ a gondolkodás formális törvényeinek tanulmányozására. Az állítások konkrét tartalmától elvonatkoztatunk és azokat csak abból a szempontból vizsgáljuk, hogy igazak-e vagy hamisak. Feltételezzük, hogy minden számításba jövő állításról egyértelműen eldönthető, hogy igaz-e vagy hamis (egy állítás nem lehet egyszerre igaz és hamis). Foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogyan lehet adott állításokból új állításokat képezni oly módon, hogy az újonnan képezett állítás igaz, vagy hamis legyen feltéve, hogy a kiinduló állítások igazak, vagy hamisak voltak, függetlenül az utóbbiak tartalmától. Foglalkozunk a következtetés szabályaival.

6. Állításokkal végzett műveletek

Legyenek $P, Q, \dots$ tetszőleges állítások, melyeket kizárólag abból a szempontból vizsgálunk, hogy mi a logikai értékük, vagyis hogy igazak-e vagy hamisak. Egy állítás akkor és csak akkor hamis, ha nem igaz. A $P, Q, \dots$ állításokra műveleteket értelmezünk. A műveletek eredménye újból állítás, és a művelet értelmezésének olyannak kell lennie, hogy a benne szereplő összetevő állítások logikai értéke egyértelműen meghatározza az eredmény logikai értékét.

6.1. Definíció. A P állítás tagadásának (negációjának) nevezzük a "nem P " állítást, jelben $\neg P$, melynek logikai értéke a következő:

$\neg P$ igaz, ha P hamis,
 $\neg P$ hamis, ha P igaz.

Érvényes a kettős negáció törvénye:

$$\neg \neg P \equiv P \quad (6.1)$$

(Két állításokból felépített formulát akkor mondunk azonosan egyenlőnek, $\equiv$, ha a bennük szereplő $P, \dots$ "állításváltozók" helyébe tetszőleges állításokat helyettesítve egyenlő állításokat kapunk.)

6.2. Definíció. A P és Q állítások konjunkciójának nevezzük a " P és Q " állítást, jelben $P \wedge Q$, melynek logikai értéke a következő:

$P \wedge Q$ igaz, ha P (is) és Q (is) igaz,
 $P \wedge Q$ hamis, ha P igaz és Q hamis,
 $P \wedge Q$ hamis, ha P hamis és Q igaz,
 $P \wedge Q$ hamis, ha P (is) és Q (is) hamis.

$P \wedge Q$ tehát akkor és csak akkor igaz, ha P is és Q is igaz. Könnyen belátható, hogy érvényesek a következő azonosságok

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad (6.2)$$

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R), \quad (6.3)$$

$$P \wedge P \equiv P, \quad (6.4)$$

vagyis a konjunkció kommutatív, asszociatív és idempotens művelet.

6.3. Definíció. A P és Q állítások diszjunkciójának nevezzük a " P vagy Q " állítást, jelben $P \vee Q$, melynek logikai értéke a következő:

$P \vee Q$ igaz, ha P (is) és Q (is) igaz,
 $P \vee Q$ igaz, ha P igaz és Q hamis,
 $P \vee Q$ igaz, ha P hamis és Q igaz,
 $P \vee Q$ hamis, ha P (is) és Q (is) hamis.

$P \vee Q$ tehát akkor és csak akkor igaz, ha P és Q közül legalább az egyik igaz. Könnyen belátható, hogy érvényesek a következő azonosságok:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P, \quad (6.5)$$

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R), \quad (6.6)$$

$$P \vee P \equiv P, \quad (6.7)$$

vagyis a diszjunkció kommutatív, asszociatív és idempotens művelet. Igaz továbbá a

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \quad (6.8)$$

azonosság, vagyis a konjunkció a diszjunkcióra nézve disztributív művelet. Érvényes a

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \quad (6.9)$$

azonosság. Nyilvánvaló, hogy a $P \wedge \neg P$ konjunkció azonosan hamis, a $P \vee \neg P$ diszjunkció pedig azonosan igaz állítás, hiszen P és P tagadása egyszerre nem lehet igaz, viszont, P és P tagadása közül az egyik mindig igaz.

Áttérünk arra a kérdésre, hogyan tagadunk konjunkciót, ill. diszjunkciót. A " P és Q " állítás tagadása nyilván akkor és csak akkor igaz, ha vagy P nem igaz, vagy Q nem igaz, tehát

$$\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q \quad (6.10)$$

A " P vagy Q " állítás tagadása nyilván akkor és csak akkor igaz, ha P sem igaz és Q sem igaz, tehát

$$\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q. \quad (6.11)$$

(6.10)-et és (6.11)-et de Morgan-féle azonosságoknak nevezzük. Az "állításalgebra" műveleteit v.ö. a "halmazalgebra" műveleteivel (1. pont).

A matematikában különösen fontosak a "ha P , akkor Q " típusú állítások. Ezeket azonban nem lehet közvetlenül, a P és Q állítások tartalmától függetlenül értelmezni. A "ha P , akkor Q " típusú állítást ugyanis nyilván igaz állításnak tekintjük, ha P is és Q is igaz (pl. "ha a dohányzás ártalmas, akkor a tenger vize sós"), vagy ha P hamis és Q is hamis (pl. "ha te gépészmérnök vagy, akkor én vagyok a római pápa", amit általában akkor mondunk, amikor biztosan tudjuk, hogy társunk nem gépészmérnök), vagy ha P hamis és Q igaz (pl. "ha júliusban esik a hó, akkor Budapest Magyarország fővárosa"). Mindezekben a példákban azonban hiányzik az oksági kapcsolat P és Q között és nem tekinthető teljesen normálisnak az az ember, aki ilyen állításokat gyakorta kapcsol össze ha akkor. Az előbbiekhöz hasonló értelmetlenségeket némileg enyhíthetjük, ha a "ha P , akkor Q " állítást nem közvetlenül, hanem a már megismert logikai műveletek segítségével, közvetve definiáljuk.

6.4. Definíció. A "nem P vagy Q " állítást implikációnak nevezzük, pontosabban azt mondjuk, hogy P implikálja Q -t, (P -ből Q következik), jelben $P \Rightarrow Q$, (ha P , akkor Q), vagyis

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q.$$

P -t az implikáció előtagjának, Q -t utótagjának nevezzük.

A definíció jobb oldalán álló kifejezés vizsgálata alapján könnyen megállapíthatjuk a $P \Rightarrow Q$ implikáció logikai értékét az összes lehetséges esetben.

$P \Rightarrow Q$ igaz, ha P hamis és Q igaz,
 $P \Rightarrow Q$ igaz, ha P hamis és Q hamis,
 $P \Rightarrow Q$ igaz, ha P igaz és Q igaz,
 $P \Rightarrow Q$ hamis, ha P igaz és Q hamis.

Ezek szerint a $P \Rightarrow Q$ implikáció akkor és csak akkor hamis, ha P igaz és Q hamis.

6. 5. Definíció. Azt mondjuk, hogy a P és Q állítások ekvivalensek, jelben $P \Leftrightarrow Q$, ha P implikálja Q-t és Q implikálja P-t, vagyis

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

A definícióból következik, az implikáció és konjunkció lehetséges logikai értékeinek figyelembevételével, hogy a "P ekvivalens Q-val" ($P \Leftrightarrow Q$) állítás logikai értéke az összes lehetséges esetben:

$P \Leftrightarrow Q$ igaz, ha P igaz és Q igaz,
 $P \Leftrightarrow Q$ igaz, ha P hamis és Q hamis,
 $P \Leftrightarrow Q$ hamis, ha P igaz és Q hamis,
 $P \Leftrightarrow Q$ hamis, ha P hamis és Q igaz.

7. Matematikai állítások és bizonyítási módszerek

A matematikai állítások, tételek jelentős része "ha P, akkor Q" típusu, vagyis implikáció. Ha sikerült bebizonyítani a $P \Rightarrow Q$ implikációt, vagyis igaz az, hogy P implikálja Q-t, akkor, amint ez a 6.4. Definíciót követő logikai értéktáblázatból azonnal kitűnik, valahányszor P igaz, Q is igaz, más szóval P teljesülése elegendő ahhoz, hogy Q teljesüljön. Ezért ebben az esetben azt mondjuk, hogy P (az implikáció előtagja) a Q állításnak (az implikáció utótagjának) elégséges feltétele. Q-t a P állítás szükséges feltételének nevezzük, mivel szükségképpen igaznak kell lennie, ha P igaz, ul. ha Q hamis, P sem lehet igaz. Ennek alapján azt, hogy a $P \Rightarrow Q$ implikáció igaz, még a következő módok valamelyikén is kifejezhetjük:

Annak elégséges feltétele, hogy Q teljesüljön, P.
 Annak szükséges feltétele, hogy P teljesüljön, Q.
 Ha P, akkor Q.
 P csak akkor teljesül(het), ha Q (ami nem jelenti azt, hogy P "biztosan" teljesül, ha Q teljesül!)

A matematikai tételek másik jelentős része $P \Leftrightarrow Q$ típusu ekvivalencia állítása. Ha sikerült bebizonyítani azt, hogy P ekvivalens Q-val, vagyis $P \Leftrightarrow Q$ igaz, akkor a 6.5. Definíciót követő logikai értéktáblázatból azonnal kitűnik, hogy valahányszor P igaz, Q is igaz és fordítva, valahányszor Q igaz, P is igaz. Ezért ebben az esetben azt mondjuk, hogy P a Q állításnak szükséges és elégséges feltétele (természetesen akkor Q is a P-nek szükséges és elégséges feltétele). Ennek alapján azt, hogy $P \Leftrightarrow Q$ igaz, még a következő módok valamelyikén is kifejezhetjük:

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy Q teljesüljön, P.
 Q akkor és csak akkor teljesül, ha P.

A különféle bizonyítási módszerek közül csak néhány különösen sokszor előfordulót és jellemzőt ismertetünk. Ekvivalencia állítások bizonyításának módszereivel külön nem foglalkozunk. Ugyanis azt, hogy $P \Leftrightarrow Q$ igaz, úgy bizonyítjuk, hogy külön-külön igazoljuk a $P \Rightarrow Q$ és a $Q \Rightarrow P$ implikációt.

a) Lánckövetkeztetés. Ha igaz az, hogy P-ből következik Q és az, hogy Q-ből következik R, akkor az is igaz, hogy P-ből következik R. Ennek a bizonyítási módszernek a helyessége a következő tételre alapul.

7.1. Tétel. A

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

állítás azoncsan igaz.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} & ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \equiv \\ & \equiv \neg ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)) \vee (\neg P \vee R) \equiv \\ & \equiv \neg ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge P) \vee R \equiv \\ & \equiv \neg ((\neg P \wedge \neg Q \wedge P) \vee (\neg P \wedge R \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P) \vee (Q \wedge R \wedge P)) \vee R \equiv \\ & \equiv \neg (Q \wedge R \wedge P) \vee R \equiv \neg Q \vee \neg R \vee P \vee R, \end{aligned}$$

ami azonosan igaz. A bizonyítás egyes lépéseiben a következő azonosságokat használtuk fel. Első lépés: az implikáció definícióját. Második lépés: a diszjunkció asszociativitását és a (6.10) de Morgan-féle azonosságot. Harmadik lépés: a konjunkció disztributivitását a diszjunkcióra nézve. Negyedik lépés: azt, hogy pl. $P \wedge \neg P$ azonosan hamis. Ötödik lépés: a (6.10) azonosságot. Végül azt, hogy $R \vee \neg R$ azonosan igaz.!

b) Indirekt bizonyítás. Ha a $P \Rightarrow Q$ implikációt nem tudjuk bebizonyítani, bebizonyítjuk helyette a $\neg Q \Rightarrow \neg P$ implikációt; ha ez utóbbi igaz, az eredeti is igaz. Érvényes ui. a következő azonosság:

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P. \quad (7.1)$$

Bizonyítás.

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg(\neg Q) \vee \neg P \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P. !$$

c) Reductio ad absurdum. (ellentmondásra való visszavezetés, egyik eset). Ha a P állítást akarjuk bizonyítani, akkor a következőképpen járhatunk el. Feltételezzük P tagadását, vagyis azt, hogy $\neg P$ igaz; ha $\neg P$ implikál egy Q állítást és Q tagadását is, akkor $\neg P$ nem lehet igaz, mert "abszurdumra" vezet, tehát P igaz. Ennek a módszernek a helyessége a következő tételen alapul.

7.2. Tétel. A

$$((\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow P$$

állítás azonosan igaz.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} ((\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow P &\equiv \\ &\equiv \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \vee P \equiv \\ &\equiv \neg((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)) \wedge \neg P \equiv \\ &\equiv \neg((\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg P)) \vee P \equiv \\ &\equiv \neg((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \vee P \equiv \\ &\equiv (\neg \neg P \vee \neg \neg Q) \vee P \equiv P \vee Q \vee P \equiv P. \end{aligned}$$

Eddig az egyes lépésekben a következő azonosságokat használtuk fel. Első lépés: az implikáció definícióját. Második lépés: a (6.10) de Morgan-féle azonosságot. Harmadik lépés: a konjunkció disztributivitását a disz-

junkcióra nézve. Az utolsó állítás egy négytagu diszjunkció tagadása. A négytagu diszjunkció minden egyes tagja azonosan hamis, mivel pl. $P \wedge \neg P$ azonosan hamis. Ezért a négytagu diszjunkció azonosan hamis, tehát a tagadása azonosan igaz. I

8. A matematikai indukció. A binomiális tétel

A matematikai indukció (helytelen szóhasználat: teljes indukció) elvét az 5.1. Példában a természetes számok Peano-féle axiomarendszerének vázolása során már kimondtuk. Ha a T3) axiómában szereplő $\forall$ halmazt bizonyos meghatározott tulajdonságu természetes számok halmazának tekintjük, akkor ez az elv még a következő alakban is kimondható. Ha a zérus rendelkezik valamilyen tulajdonsággal és abból, hogy egy természetes szám rendelkezik e tulajdonsággal, következik az, hogy a rákövetkező természetes szám is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor az összes természetes szám rendelkezik a szóban forgó tulajdonsággal. A matematikai indukció elve tehát alkalmas olyan állítások bizonyítására, melyek szerint az összes természetes szám rendelkezik egy meghatározott tulajdonsággal. Ha a matematikai indukció elvében a zérust egy másik m természetes számmal helyettesítjük, akkor az elv alkalmas annak bizonyítására, hogy minden m -nél nem kisebb (m -től kezdve minden) természetes szám rendelkezik a kérdéses tulajdonsággal. A matematikai indukcióval végzett bizonyítás két lépésből áll. Először bebizonyítjuk, hogy a kérdéses állítás igaz a 0 természetes számra; másodszor pedig azt, hogy ha feltételezzük: az állítás igaz a tetszőleges n természetes számra; ez implikálja azt, hogy az állítás igaz $(n+1)$ -re is.

Matematikai indukcióval bebizonyítható pl. az, hogy az (1.6) disztributív tulajdonság érvényes akkor is, ha az X halmaznak tetszőleges véges számú $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ halmaz egyesítésével való metszetét képezzük.

Hasonlóan általánosíthatók az (1.1), (1.3), (1.7), (1.8) azonosságok, a matematikai logika megfelelő (6.3), (6.4), (6.6) - (6.11) azonosságai, továbbá a 7.1. Tétel. Ez utóbbinak szóban forgó általánosítása a következőképpen szól: A

$$(P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_3) \wedge \dots \wedge (P_{n-1} \Rightarrow P_n) \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_n)$$

állítás azonosan igaz. A matematikai indukcióval történő bizonyításra példaként igazolni fogunk egy fontos algebrai tételt, a binomiális tételt. Először néhány jelölést vezetünk be.

Legyen adott $(n + 1)$ számú tetszőleges szám: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$;
 e számok összegét a következőképpen jelöljük:

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad (8.1)$$

(olv.: szumma a_k , k megy nullától n -ig), k -t összegező indexnek nevezzük.

Az első n pozitív egész szám szorzatát n faktoriálisnak nevezzük és a következőképpen jelöljük:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n, \quad n \in \mathbb{T}, \quad n \geq 1. \quad (8.2)$$

Megállapodás szerint $0! = 1$.

Legyen n tetszőleges pozitív egész szám, k pedig tetszőleges n -nél nem nagyobb természetes szám; $\binom{n}{k}$ -val jelöljük (olv.: n alatt a k) és binomiális együtthatónak nevezzük a következő kifejezést:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}. \quad (8.3)$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad k > 0. \quad (8.4)$$

Egyszerűen adódik (8.3)-ból, hogy

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad (8.5)$$

és általában

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \quad (8.6)$$

Igaz továbbá a következő azonosság

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad k \geq 1, \quad (8.7)$$

ugyanis, ha $k = 1$, (8.7) azonnal adódik (8.5)-ből, ha viszont $k > 1$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1) \dots (n-k+2)(n-k+1)}{k!} = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+2) k + n(n-1) \dots (n-k+2)(n-k+1)}{k!} = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+2)(n+1)}{k!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

8.1. Tétel. Legyen $x \neq 0$ tetszőleges szám és n pozitív egész, akkor

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Bizonyítás. A bizonyítás n -re vonatkozó matematikai indukcióval történik. Először belátjuk, hogy az állítás 1-re igaz:

$$(1+x)^1 = \binom{1}{0} x^0 + \binom{1}{1} x = 1+x.$$

Másodszor feltételezzük, hogy tetszőleges pozitív egész n -re

$$(1+x)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{\ell}.$$

Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát $(1+x)$ -szel:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x) \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{\ell} + \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{\ell+1}.$$

Jelöljük az első tagban az összegező indexet a továbbiakban k -val és térjünk át a második tagban a $k+1$ összegező indexre, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k = \\ &= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^k + \binom{n}{n} x^{n+1}.\end{aligned}$$

(8.7) alapján:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n}{n} x^{n+1} = \\ &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k,\end{aligned}$$

valóis azt kaptuk, hogy az állítás $n+1$ -re is igaz.!

8.2. Tétel. (Binomiális tétel). Legyenek $a \neq 0$, $b \neq 0$ tetszőleges számok és n pozitív egész, akkor

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Bizonyítás. Kiemeléssel

$$(a+b)^n = b^n \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n.$$

Alkalmazzuk a jobb oldali második tényezőjére a 8.1. Tételt:

$$(a+b)^n = b^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

9. Állításfüggvények. Kvantorok

A matematikai állítások általában valamilyen halmaz elemeire mondanak ki bizonyos tulajdonságokat. Ezek az állítások a következő alakúak: Az X halmaz x elemére P . Az ilyen állítást állításfüggvénynek, X -et az állításfüggvény individuumtartományának nevezzük. Az individuumtartomány az állításfüggvény értelmezési tartománya, melynek minden egyes x eleméhez az állításfüggvény a $P(x)$ (x - re P) állítást rendell hozzá. Az állításfüggvényeknek, csakugy mint általában az állításoknak, elsősorban a logikai értékére vagyunk kíváncsiak. Az állításfüggvény logikai értéke azonban az individuumtartomány bizonyos elemein igaz, más elemein pedig hamis lehet. Az az állítás pl., hogy E = "esik az eső", ha a földrajzi helyet lerögzítjük, valójában a t időpillanat függvénye: $E(t)$, és olyan t_1 időpontban, amikor valóban esik az eső, igaz, más t_2 időpontban, amikor nem esik, hamis.

A matematikai állítások jelentős része azt mondja, hogy valamely X halmaz (mely általában valamilyen más halmaz részhalmaza) minden (bármely, tetszőleges stb.) x eleme rendelkezik bizonyos P tulajdonsággal; az ilyen állítást a következőképpen jelöljük:

$$\forall x ; P(x) = \text{minden } x\text{-re } P,$$

vagy

$$\forall x \in X : P(x) = X \text{ minden } x \text{ elemére } P.$$

Az ezekben a formulákban fellépő $\forall$ jelet univerzális kvantornak nevezzük. A $\forall x : P(x)$ állítás igaz, ha $P(x)$ igaz az individuumtartomány minden x elemére, hamis egyébként.

A matematikai állítások másik jelentős része azt mondja, hogy valamely X halmaznak van (létezik) olyan eleme (legalább egy), amely a P tulajdonsággal rendelkezik; az ilyen állítást a következőképpen jelöljük:

$$\exists x : P(x) = \text{van } x, \text{ hogy } x\text{-re } P,$$

vagy

$$\exists x \in X : P(x) = \text{van } X\text{-nek } x\text{-eleme, hogy } x\text{-re } P.$$

Az ezekben a formulákban fellépő $\exists$ jelet egzisztenciális kvantornak nevezzük. A $\exists x: P(x)$ állítás igaz, ha van (legalább egy) $x \in X$, melyre $P(x)$ igaz, hamis egyébként.

Egy matematikai állításban természetesen több halmaz elemei (vagy egy halmaz elemei többször) is felléphetnek kvantifikáltan, vagyis kvantorokkal ellátott elemek egész sorozatát zárhatja le egy állítás. Ilyen esetekben általában egy egzisztenciális kvantorral ellátott elem az összes azt megelőző elem függvénye. Matematikai tételnek (indirekt uton, vagy reductio ad absurdummal való, 1. 7. pont) bizonyításánál igen fontos az, hogy helyesen tudjunk tagadni állításokat. Bonyolultabb esetekben ezt jelentősen megkönnyíti az állításoknak a matematikai logika szimbólumaival való felírása és a tagadásnak a formális törvények alkalmazásával történő elvégzése. Kvantorokat tartalmazó állítások tagadására vonatkozik a következő

9.1. Tétel. Olyan állítás tagadása, mely univerzális $\forall$ és egzisztenciális $\exists$ kvantorokat és végül egy lezáró állítást tartalmaz, úgy történik, hogy minden $\forall$, ill. $\exists$ helyébe $\exists$ -t, ill. $\forall$ -t írunk és a lezáró állítást a negációjával helyettesítjük.

Bizonyítás. A bizonyítás a fellépő kvantorok számára vonatkozó matematikai indukcióval történik. Első lépés. Ha az állítás egyetlen kvantort, pl. $\forall$ -t tartalmaz:

$$\forall x \in X : P(x),$$

(minden x -re $P(x)$), akkor ennek tagadása nyilván

$$\neg(\forall x \in X : P(x)) \equiv \exists x \in X : \neg P(x),$$

(van x , melyre nem $P(x)$). Hasonlóan

$$\neg(\exists x \in X : P(x)) \equiv \forall x \in X : \neg P(x).$$

Második lépés. Tételezzük fel, hogy n számú kvantort tartalmazó állításra tételünk igaz és legyen adott egy $(n+1)$ számú kvantort tartalmazó állítás, mely pl. a $\forall$ kvantorral kezdődik; ez nyilván a

$$\forall x \in X, \dots : P(x, \dots) \equiv \forall x \in X : Q(x)$$

alakban írható, ahol $Q(x)$ az az állítás, mely az eredeti állításból az első kvantifikált tag elhagyásával keletkezik. Ekkor

$$\neg(\forall x \in X, \dots : P(x, \dots)) \equiv \neg(\forall x \in X : Q(x)) \equiv \\ \equiv \exists x \in X : \neg Q(x)$$

az első lépésben bizonyítottak szerint, $Q(x)$ azonban már csak n számú kvantort tartalmaz, tehát az indukciós feltevés következtében tagadása a tételben előírt módon történik. Hasonló eredményre jutunk, ha az $(n+1)$ számú kvantort tartalmazó állítás $\exists$ -vel kezdődik.

9.1. Példa. A 2.2. Definíció szerint az (a) és (b) feltételnek kell teljesülnie ahhoz, hogy az f függvényt X -nek Y -ra történő egy-egyértelmű leképezésének nevezzük. Formalizáljuk ezt a definíciót. Az f függvény X -nek Y -ra történő egy-egyértelmű leképezése, ha

$$(\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y) \wedge (\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Jelöljük Q -val ezt a hosszú állítást. Q negációja megadja annak a feltételét, hogy az f függvény ne legyen X -nek Y -ra történő egy-egyértelmű leképezése. (6.10) és a 6.4. Definíció felhasználásával:

$$\neg Q = \neg(\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y) \vee \\ \vee \neg(\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X : (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))) \equiv \\ \equiv \neg(\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y) \vee \\ \vee \neg(\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X : (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))).$$

A 9.1. Tétel majd (6.11) alkalmazásával:

$$\neg Q = (\exists y \in Y, \forall x \in X : \neg(f(x) = y)) \vee \\ \vee (\exists x_1 \in X, \exists x_2 \in X : \neg((x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)))) \equiv \\ \equiv (\exists y \in Y, \forall x \in X : f(x) \neq y) \vee \\ \vee (\exists x_1 \in X, \exists x_2 \in X : (x_1 \neq x_2) \wedge (f(x_1) = f(x_2))).$$

Eredményünk az, hogy az f függvény nem X -nek Y -ra való egy-egyértelmű leképezése, ha van $y \in Y$, hogy minden $x \in X$ -re $f(x) \neq y$ ($f(x)$ egy x -re sem egyenlő y -nal, vagyis a leképezés nem Y -ra történik), vagy pedig ha van X -nek x_1 és x_2 eleme, melyek különbözök és (mégis) $f(x_1) = f(x_2)$ (vagyis a leképezés nem egy-egyértelmű).

Az $\forall$ és $\exists$ kvantorokon kívül használatos még az egyértelmű létezés kifejező $\exists!$ egzisztencia- és unicitáskvantor, melyet a következőképpen értelmezzünk:

$\exists! x : P(x)$ = van egy és csak egy x , hogy x -re P .

A $\exists! x : P(x)$ állítás igaz, ha van pontosan egy (egy és csak egy, egy van és több nincs) x , melyre $P(x)$ igaz, hamis egyébként.

Jegyzetünkben csak elvétele fogjuk használni a logikai jelöléseket, igyekszünk viszont az állításokat (definíciókat, tételeket) úgy megfogalmazni, hogy azokat az olvasó könnyen formalizálhassa. Az állításoknak a matematikai logika formális jelöléseivel való átírása hasznos gyakorlat, mely sokszor megkönnyíti a definíciók, tételek szerkezetének világos áttekintését.

A VALÓS SZÁMOK

10. A valós számhalmaz bxiomatikája

A valós szám matematikai fogalma a tudomány előrehaladása során, többlépcsős absztrakció útján fejlődött ki. A fejlődés mozgató rugója az emberiség gyakorlata volt, az, hogy egyre pontosabban, egyre finomabban tudjuk leírni az anyagi valóság kvantitatív viszonyait, egyre pontosabban tükröződjenek az emberi tudatban a távolságok, időtartamok, hőmérsékletek stb. mérőszámai, mód legyen különböző adatok összehasonlítására, az adatokkal műveletek végzésére és ezek alapján konstrukcióra, vagyis a világ megváltoztatására az emberiség szükségletei szerint. A valós számokat, azok elemi tulajdonságait az olvasó előző tanulmányaiból ismeri. Ismeretes, hogy a természetes számok T halmaza a valós számhalmaz részhalmazának tekinthető. A valós számok halmaza tartalmazza a természetes számokon (zérus és a pozitív egész számok) kívül a negatív egész számokat, a racionális számokat (tetszőleges két egész szám hányadosát, ahol a nevező nem zérus), továbbá az irracionális számokat (azokat a valós számokat, melyek nem racionálisak). Bár a valós számhalmaz létezését és elemi tulajdonságait ismertnek tételezzük fel, megadjuk a számhalmaz definícióját azoknak az axiómáknak felsorolásával, melyekből az összes tulajdonság levezethető.

10.1. Definíció. Az R halmazt a valós számok halmazának, elemeit valós számoknak nevezzük, ha a halmazban érvényesek az alábbi A1) - A11) algebrai, az R1) - R4) rendezési és a D) folytonossági axiómák.

Algebrai axiómák:

- A1. Értelmezve van egy $\circ : R \times R \rightarrow R$ függvény, az összeadás, mely az $R \times R$ direkt szorzat (1.3.1. Definíció) minden (x, y) eleméhez R -nek egy $x + y$ -nal jelölt elemét, x és y összegét, rendel.
- A2. $x + y = y + x$ minden $x, y \in R$ -re.
- A3. $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$ minden $x, y, z \in R$ -re.
- A4. Van egy és csak egy zérusnak nevezett $0 \in R$, hogy $x + 0 = x$ minden $x \in R$ -re.

- A5. Minden $x \in R$ -hez van egy és csak egy $y \in R$, hogy $x + y = 0$; ezt az y -t x ellentettjének nevezzük és $y = -x$ -szel jelöljük.
- A6. Értelmezve van egy $s : R \times R \rightarrow R$ függvény, a szorzás, mely az $R \times R$ direkt szorzat minden (x, y) eleméhez R -nek egy xy -nal jelölt elemét, x és y szorzatát, rendeli.
- A7. $xy = yx$ minden $x, y \in R$ -re.
- A8. $x(yz) = (xy)z = xyz$ minden $x, y, z \in R$ -re.
- A9. Van egy és csak egy egyenek nevezett $1 \in R$, $1 \neq 0$, hogy $1x = x$ minden $x \in R$ -re.
- A10. Minden $x \in R$ -hez, $x \neq 0$, van egy és csak egy $y \in R$, hogy $xy = 1$; ezt az y -t x reciprokának nevezzük és $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ -szel jelöljük.
- A11. $(x + y)z = xz + yz$ minden $x, y, z \in R$ -re.

Rendezési axiómák (v.ö. 4. pont):

- R1. Értelmezve van R -ben egy $x < y$ (x kisebb mint y , vagy $y > x$, y nagyobb mint x) rendezési reláció úgy, hogy minden $x \in R$ és $y \in R$ -re az $x = y$, $x < y$, $x > y$, relációk közül pontosan egy teljesül.
- R2. Minden $x, y, z \in R$ -re ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$.
- R3. Minden $x, y, z \in R$ -re ha $x < y$, akkor $x + z < y + z$.
- R4. Minden $x, y \in R$ -re és $z \in R$, $z > 0$ -ra, ha $x < y$, akkor $xz < yz$.

Megjegyezzük, hogy a természetes számok T halmazában is igazak az A1) - A4), A6) - A9), A11) és az R1) - R4) axiómák a többi azonban nem. Az egész számok halmazában teljesül A1) - A9), A11) és R1) - R4), de A10) nem. A racionális számok halmazában az összes eddig felsorolt axióma érvényes.

A kivonás egyértelműen definiálható $x - y = x + (-y)$ -nal. Zérustól különböző számmal való osztás egyértelműen definiálható $\frac{x}{y} = x \frac{1}{y}$ -nal, $y \neq 0$. Az axiómákból az összes aritmetikai szabály könnyen levezethető.

Pl. az $ax = b$ egyenlet a $a \neq 0$ esetén egyértelműen megoldható, és

$$x = \frac{b}{a}, \quad -(-x) = x, \quad x(-y) = -(xy); \quad (-x)(-y) = xy$$

stb. Könnyen bebizonyíthatók az egyenlőtlenségekre vonatkozó elemei szabályok. Pl. ha $x < y$, akkor $-x > -y$; ha $x < y$ és $u < v$, akkor $x + u < y + v$; ha $x < y$ és $z < 0$, akkor $xz > yz$; stb. A szokásos módon

definiálható az egész kitevőre vonatkozó hatványozás azzal az ismert megszorítással, hogy zérusnak negatív egész vagy zérus kitevőre vonatkozó hatványozása nem értelmezhető.

Értelmezhető racionális (tört) kitevőre vonatkozó hatványozás is, azonban az eddig felsorolt axiómák nem biztosítják azt, hogy ez minden esetben elvégezhető legyen. A racionális számok körében, bár az eddig felsorolt axiómák teljesülnek, a tört kitevőre való hatványozás nem mindig végezhető el.

10.1. Példa. A 2 racionális szám $\frac{1}{2}$ kitevős hatványa, $\sqrt{2}$ nem eleme a racionális számok halmazának. Ezt reductio ad absurdummal (1.7. pont) bizonyítjuk. Tételezzük fel ui., hogy $\sqrt{2}$ (az a szám, amelynek négyzete 2) racionális szám, vagyis $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ahol $q \neq 0$ és a p és q egész számok relatív prímek (a tört már tovább nem egyszerűsíthető). Négyzetre emelve $2 = \frac{p^2}{q^2}$, $2 q^2 = p^2$, vagyis p páros szám: $p = 2 r$, r egész.

Behelyettesítve, $2 q^2 = 4 r^2$, $q^2 = 2 r^2$, vagyis q is páros, tehát p és q nem relatív prímek, ami ellentmondás. Állításunk tagadása ellentmondásra vezetett, tehát az állítás, hogy ti. $\sqrt{2}$ nem racionális, igaz.!

Az egyenlőtlenség < jele mellett használjuk a $\leq$ "kisebb vagy egyenlő" ($\geq$ "nagyobb vagy egyenlő") jelet is. $x \leq y$ ($y \geq x$) akkor és csak akkor, ha $x < y$, vagy $x = y$, más szóval, ha x nem nagyobb, mint y.

10.2. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$; azt mondjuk, hogy az A számhalmaz felülről (alulról) korlátos, ha van $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$), hogy minden $x \in A$ -ra $x \leq M$ ($x \geq m$). M-et (m-et) az A halmaz felső (alsó) korlátjának nevezzük. Ha A felülről és alulról korlátos, akkor korlátosnak nevezzük.

Az R2) axiómából azonnal következik, hogy ha M felső korlát (m alsó korlát), akkor minden M-nél nagyobb (m-nél kisebb) szám is felső (alsó) korlát.

10.3. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ felülről (alulról) korlátos, nem üres halmaz: ha van $S \in \mathbb{R}$ ($s \in \mathbb{R}$), mely A-nak felső (alsó) korlátja és minden S-nél kisebb (s-nél nagyobb) szám A-nak már nem felső (alsó) korlátja, akkor azt mondjuk, hogy S az A halmaznak legkisebb felső korlátja, vagy supremuma (s az A halmaznak legnagyobb alsó korlátja, vagy infimuma) és a következőképpen jelöljük: $S = \sup A$, ($s = \inf A$).

sup A -t (ha létezik) tehát a következő két tulajdonság jellemzi: minden $x \in A$ -ra $x \leq \sup A$ és minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $a \in A$, hogy $a > \sup A - \varepsilon$. Hasonlóan: minden $x \in A$ -ra $x \geq \inf A$ és minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $b \in A$, hogy $b < \inf A + \varepsilon$. Nyilvánvaló a definícióból, hogy $\sup A$ (ha létezik) A felső korlátjai halmazának legnagyobb alsó korlátja, és $\inf A$ (ha létezik) A alsó korlátjai halmazának legkisebb felső korlátja. Eddigi axiómáink azonban nem biztosítják azt, hogy minden felülről korlátos (alulról korlátos) számhalmaznak létezzék suprémuma (infimuma). Ezt a hiányosságot csak egy újabb axióma felvételével lehet pótolni.

D) (Dedekind-féle folytonossági axióma) A valós számok halmaza minden nem üres, felülről korlátos részhalmazának van legkisebb felső korlátja.

D)-ből már következik, hogy alulról korlátos, nem üres halmaznak van legnagyobb alsó korlátja. Ha ui. A ilyen halmaz, akkor $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$ felülről korlátos, nem üres halmaz és könnyen belátható, hogy $-\sup B = \inf A$.

A Dedekind-féle folytonossági axióma a racionális számok halmazára nem igaz. D) segítségével bebizonyítható, hogy tetszőleges pozitív valós szám tetszőleges racionális kitevős hatványa valós szám.

A D) axióma felvétele nemcsak abban az értelemben tette "teljessé" axiómarendszerünket, hogy a valós számok összes ismert tulajdonsága levezethetővé vált, hanem abban az értelemben is, hogy ha egy halmaz rendelkezik az A1) - A11), R1) - R4) és D) tulajdonságokkal, akkor az "lényegében" nem lehet más, mint a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza.

102. Példa. A természetes számok $\mathbb{T}$ halmaza, mint a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának részhalmaza alulról korlátos és $\inf \mathbb{T} = 0$.

10.3. Példa. Van egy és csak egy c pozitív valós szám, melynek négyzeté 2 , ezt nevezzük 2 pozitív négyzetgyökének: $c = \sqrt{2}$. Először bebizonyítjuk, hogy 2 -nek legfeljebb egy pozitív négyzetgyöke lehet. Tételezzük fel, hogy $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ és $x_1^2 = x_2^2 = 2$, akkor

$$x_1 - x_2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 + x_2} = 0, \text{ vagyis}$$

$x_1 = x_2$. Most bebizonyítjuk, hogy létezik a $\sqrt{2}$ pozitív valós szám. Legyen

$C = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^2 \leq 2\}$. A C halmaz nem üres, mert pl. $1 \in C$. A C halmaz felülről korlátos. Ezt úgy látjuk be, hogy megmutatjuk: 2 a C halmaz felső korlátja. Ehhez be kell látni azt, hogy $x \in C$ implikálja $x \leq 2$ -t. Ezt az implikációt indirekt úton bizonyítjuk (1.7. pont). Tegyük fel,

hogy $x > 2$, akkor R4) miatt $x^2 > 2x$ és $2x > 4$, ahonnan R2) miatt $x^2 > 4 > 2$ -t kapjuk, vagyis $x \notin C$. Miután C felülről korlátos, D) szerint van legkisebb felső korlátja: $c = \sup C$. Miután $1 \in C$ és 2 felső korlát, $0 < 1 \leq c \leq 2$. Bebizonyítjuk, hogy $c^2 = 2$. Tételezzük fel először, hogy $c^2 < 2$ és tekintsük a

$$0 < \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - c^2}{2c + 1} < \frac{2 - c^2}{2c + 1} < 1$$

számot; R4) és R3) alkalmazásával és $\varepsilon^2 < \varepsilon$ felhasználásával

$$\varepsilon(2c + 1) < 2 - c^2,$$

$$2 > c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon > c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 = (c + \varepsilon)^2;$$

azt kaptuk, hogy $c + \varepsilon \in C$, bár $c + \varepsilon > c = \sup C$, ami ellentmondás. Tételezzük fel most, hogy $c^2 > 2$ és tekintsük a

$$0 < \delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2 - 2}{2c} < \frac{c^2 - 2}{2c} < c$$

számot; innen

$$2c\delta < c^2 - 2,$$

III.

$$2 < c^2 - 2c\delta < c^2 - 2c\delta + \delta^2 = (c - \delta)^2;$$

miután azonban $c = \sup C$, van $x \in C$, hogy $x > c - \delta > 0$, de akkor

$$x^2 > (c - \delta)^2 > 2,$$

ami ellentmondás; R1) alapján, miután sem $c^2 > 2$, sem $c^2 < 2$ nem állhat fenn, $c^2 = 2$ következik.

Hasonló módon lehet igazolni, hogy tetszőleges $p > 0$ valós számhoz és $n \in \mathbb{T}$, $n \geq 2$ -re van egy és csak egy $\sqrt[n]{p} > 0$ valós szám, melyre $(\sqrt[n]{p})^n = p$.

11. Fontosabb tulajdonságok. Az abszolút érték

A valós számok halmaza rendelkezik a következő szemléletes, triviálisnak tűnő, de fontos tulajdonsággal, mely többek között biztosítja azt, hogy tetszőlegesen kis mértékegységet választva, tetszőlegesen nagy mennyiségek mérhetők:

11.1. Tétel. (A valós számok archimedesi tulajdonsága). Minden $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y > 0$ -hoz van $n \in \mathbb{T}$, hogy $nx > y$.

Bizonyítás. (Reductio ad absurdum). Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van $x > 0$, $y > 0$, amelyekre minden $n \in \mathbb{T}$ -re $nx \leq y$ és vezessük be a következő jelölést: $A = \{nx : n \in \mathbb{T}\}$. Az A halmaz nem üres és felülről korlátos, 10. pont D) szerint létezik $s = \sup A$. Mivel $s - x$ már nem felső korlát, van $mx \in A$, hogy $s - x < mx$. Az utóbbi egyenlőtlenség mindkét oldalához x -et hozzáadva és figyelembe véve, hogy $(m+1)x \in A$:

$$s < mx + x = (m+1)x \leq s,$$

vagyis $s < s$, ami ellentmondás.!

11.2. Tétel. (Bernoulli-egyenlőtlenség). Legyen $r > -1$, $r \neq 0$, akkor minden $n \in \mathbb{T}$, $n \geq 2$ -re

$$(1+r)^n > 1 + nr. \quad (11.1)$$

Bizonyítás. (Matematikai indukcióval), $n = 2$ esetén

$$(1+r)^2 = 1 + 2r + r^2 > 1 + 2r,$$

mivel r^2 pozitív. Tegyük fel, hogy

$$(1+r)^n > 1 + nr,$$

és szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát $1+r > 0$ -val:

$$(1+r)^{n+1} > (1+nr)(1+r) = 1 + (n+1)r + nr^2 > 1 + (n+1)r .!$$

Ha elvégezzük a $q = 1 + r$ helyettesítést, $q > 0$, $q \neq 1$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenség a következő alakot veszi fel:

$$q^n > 1 + n(q - 1), \quad n = 2, 3, \dots \quad (11.2)$$

11.1. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$; az x szám abszolút értékét $|x|$ -et a következőképpen értelmezzük:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy valós számok abszolút értékeire fennállnak például a következő összefüggések:

$$\begin{aligned} &\text{Ha } a \geq 0, \\ &|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} &\text{Ha } a \geq 0, \\ &|x| \geq a \iff x < -a, \text{ vagy } x > a. \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|. \quad (11.5)$$

Érvényes minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ -re és tetszőleges $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számokra a

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \quad (11.6)$$

egyenlőtlenség. Az utóbbit a következőképpen bizonyítjuk. A 11.1. Definíció alapján

$$|x_k| \leq x_k \leq |x_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Összeadva ezen n számú egyenlőtlenséget

$$-\left(\sum_{k=1}^n |x_k|\right) \leq \sum_{k=1}^n x_k \leq \sum_{k=1}^n |x_k|;$$

(11.3) alapján ebből (11.6) következik.!

Érvényes továbbá tetszőleges x és y valós számokra az

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \quad (11.7)$$

egyenlőtlenség. (11.7)-et a következőképpen bizonyítottuk:

$$x = (x + y) - y, \quad y = (x + y) - x;$$

innen (11.6) alkalmazásával

$$|x| \leq |x + y| + |y|, \quad |y| \leq |x + y| + |x|,$$

vagyis

$$-|x + y| \leq |x| - |y| \leq |x + y|,$$

ahonnan (11.3) alapján (11.7) következik. Hasonlóan bizonyítható, hogy

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \quad (11.8)$$

Ismertnek tekintjük valós számoknak tizedestört alakjában történő megadási módját, továbbá azt, hogy ilyenkor a racionális számoknak véges, vagy végtelen szakaszos tizedestört felel meg és fordítva, minden véges, vagy végtelen szakaszos tizedestört felírható két egész szám hányadosaként. (Erre még a 16. pontban visszatérünk). A végtelen nem szakaszos tizedestörtek az irracionális számoknak felelnek meg. A gyakorlati, műszaki számításokban a valós számok legtöbbször tizedestört alakjában lépnek fel. Ilyenkor az irracionális számokat általában ún. közelítő törttel - ikkal helyettesítjük. Egy irracionális szám alsó közelítő törtje azok a véges tizedestörtek, melyeket úgy kapunk, hogy bizonyos jegytől kezdve elhagyjuk az adott tizedestört számjegyeit. Ilyenkor tehát az irracionális számot egy nála kisebb racionális számmal pótoljuk és hibát követünk el. Ha azonban elég sok jegyet vettünk figyelembe, a hiba elhanyagolható. Ha az

első elhagyott számjegy 5-nél nem kisebb, akkor az utolsó megtartott számjegyet eggyel megnöveljük (fölfelé kerekítünk). Ebben az esetben az irracionális számot egy felső közelítő törtjével (egy nála nagyobb racionális számmal) pótoltuk.

12. A számegyenes. Intervallumok

A valós számokat szemléletesen a számegyenesen ábrázoljuk. Az egyenest, mint a geometriai szemlélethez, tapasztalatból vett ("intuitív") fogalmat használjuk. Kiválasztjuk az egyenes egy pontját és ezt megfeleltetjük a 0 valós számnak. A "0" pont az egyenest két félegyenesre osztja, ezek közül az egyiket (a baloldalt) negatív félegyenesnek, a másikat (a jobboldalt) pozitív félegyenesnek nevezzük. Valamilyen távolságegységet választunk és minden $x \in \mathbb{R}$ -re az $|x|$ hosszúságú szakaszt felmérjük a 0 pontból mégpedig jobbra, ha $x > 0$ és balra, ha $x < 0$. Az ily módon felmért szakasznak a 0 ponttól különböző végpontját feleltetjük meg az x valós számnak. Ezáltal egy-egyértelmű módon leképeztük az $\mathbb{R}$ halmazt a számegyenesre. Megjegyezzük, hogy ha a Dedekind-féle axiómával (1.10 pont D) nem biztosítottuk volna az irracionális számok létezését, a számegyenes nem minden pontjának felelne meg valós szám. Nem felelne meg valós szám az irracionális hosszúságú szakaszoknak. (Ilyen pl. az egységnyi befogóju, egyenlőszáru, derékszögű háromszög átfogója, melynek hossza $\sqrt{2}$). Az x valós számról ezután mint a számegyenes " x pontjáról" beszélhetünk. Az $\mathbb{R}$ halmaz részhalmazait a számegyenes pontjainak részhalmazaként szemléltetjük.

12.1. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$; az $\mathbb{R}$ halmaz (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, ill. $(-\infty, +\infty)$ részhalmazait ($+\infty$ olv. végtelen), ahol

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\},$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R},$$

rendre a, b nyílt; zárt; alulról nyílt, felülről zárt; alulról zárt, felülről nyílt; $a, +\infty$ alulról nyílt; alulról zárt; $-\infty, a$ felülről nyílt; felülről zárt; ill. $-\infty, +\infty$ intervallumnak nevezzük; közülük az első négyet korlátos, a többi nem-korlátos intervallumnak nevezzük.

Az egyes intervallumokat a számegyenesen véges szakaszok, félegyenesek, ill. a számegyenes ábrázolják. Az (a, b) nyílt intervallumot pl. az "a", ill. b valós számoknak megfelelő pontok által meghatározott egyenesszakasz ábrázolja, melyhez nem számítjuk hozzá végpontjait, az "a", ill. b pontokat. Az $[a, b]$ zárt intervallum képe az előző egyenesszakasz hozzávéve még az "a" és b végpontokat is. Az (a, b) intervallumon kívül az $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ és $(-\infty, \infty)$ intervallumokat is nyílt intervallumoknak nevezzük. Beszélünk néha a zérus hosszúságú $[a, a]$ zárt intervallumról is, melynek egyetlen eleme (pontja) az "a" szám (pont).

12.2. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\varphi > 0$, az a szám φ sugaru környezetének nevezzük és K_a^φ -val jelöljük a következő (nyílt) intervallumot:

$$K_{a\varphi} = \{x \in \mathbb{R} : a - \varphi < x < a + \varphi\}.$$

Ha az "a" szám környezete φ sugarának (mely mindig pozitív szám) nincs jelentősége, akkor egyszerűen az "a" szám K_a környezetéről beszélünk. Nyilvánvaló, hogy ha $0 < \varphi_1 \leq \varphi_2$, akkor $K_{a\varphi_1} \subset K_{a\varphi_2}$.

12.3. Definíció. Legyen $\varphi \in \mathbb{R}$; a végtelen (∞), ill. a mínusz végtelen ($-\infty$) φ határu környezetének nevezzük és $K_{\infty\varphi}$, ill. $K_{-\infty\varphi}$ -val jelöljük a következő (nyílt) intervallumot:

$$K_{\infty\varphi} = \{x \in \mathbb{R} : \varphi < x\} = (\varphi, \infty),$$

ill.

$$K_{-\infty\varphi} = \{x \in \mathbb{R} : x < \varphi\} = (-\infty, \varphi).$$

Ha a ∞ , ill. $-\infty$ környezete φ határának nincs jelentősége, akkor egyszerűen a ∞ , ill. $-\infty$ K_∞ , ill. $K_{-\infty}$ környezetéről beszélünk. Nyilvánvaló, hogy ha $\varphi_1 \leq \varphi_2$, akkor $K_{\infty\varphi_1} \supset K_{\infty\varphi_2}$ és $K_{-\infty\varphi_1} \subset K_{-\infty\varphi_2}$.

Azt hogy a valós számok "hézagmentesen helyezkednek el a számegyenesen" (kitöltik a számegyeneset"), a következő tételben megfogalmazott tulajdonságuk fejezi ki.

12.1. Tétel. (A valós számok Cantor-féle tulajdonsága. Az egymásba skatulyázott intervallumok elve.)

Legyen I_n , $n \in T$ (T a természetes számok halmaza), zárt intervallumok "egymásba skatulyázott sorozata", vagyis minden $n \in T$ -re I_n legyen zárt intervallum és teljesüljön

$$I_n \supset I_{n+1};$$

akkor az I_n , $n \in T$, intervallumok $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ közös része

nem üres, vagyis van $r \in \mathbb{R}$, mely minden I_n intervallumnak eleme.

Bizonyítás. Legyen $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in T$, akkor minden $n \in T$ -re

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

Innen következik, hogy az $A = \{a_n : n \in T\}$ nem üres halmaz felülről korlátos és b_n minden $n \in T$ -re a halmaz felső korlátja (l. 10.2. Definíció).

A 10.pont D) axióma értelmében létezik $r = \sup A \in \mathbb{R}$. A 10.3. Definíció értelmében minden $n \in T$ -re $a_n \leq r \leq b_n$, vagyis $r \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$.

Megjegyezzük, hogy ha a Dedekind-féle folytonossági axióma helyett a valós számok archimedesi és Cantor-féle tulajdonságát (a 11.1. Tételt és a most bebizonyított tételt) axiómaként vesszük fel, ezekből a Dedekind féle folytonossági tulajdonság (10. pont D) axióma) tételként levezethető.

A zárt intervallumok (melyek a 12.1. Definíció értelmében csak korlátosak lehetnek) egy fontos tulajdonságát fejezi ki a következő

12.2. Tétel. (Borel-féle lefedési tétel.) Legyen $[a, b]$ egy zárt intervallum és $\{I_n : n \in \mathbb{Z}\}$ olyan nyílt intervallumok

halmaza ($\mathbb{Z}$ tetszőleges indexhalmaz), melyek egyesítése "lefed $[a, b]$ -t", vagyis melyekre

$[a, b] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$, akkor az $\{I_n : n \in \mathbb{Z}\}$ halmazból kiválasztható

véges sok intervallum úgy, hogy ezek egyesítése ugyancsak lefedje (részalmazként tartalmazza) $[a, b]$ -t.

Bizonyítás. Jelöljük A -val azon $x \in [a, b]$ számok halmazát, melyekre az $[a, x]$ intervallum véges sok I_n intervallum egyesítésének részalmaz (vagyis melyekhez van $m \in \mathbb{Z}$ és $n_0, n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$, hogy

$[a, x] \subset \bigcup_{k=0}^m I_{n_k}$). Az A halmaz nem üres, mivel $a \in A$, hiszen van

$k \in \mathbb{Z}$, hogy $a \in I_k$, vagyis $[a, a] \subset I_k$. Az A halmaz felülről korlátos,

hiszen b egy felső korlátja. Legyen $c = \sup A$. Bebonyítjuk, hogy $c \in A$.

Tudjuk hogy $a \leq c \leq b$, van tehát $\ell \in \mathbb{Z}$, hogy $c \in I_\ell = (\alpha_\ell, \beta_\ell)$. Múltán

$\alpha_\ell < c$, van $x \in A$, hogy $\alpha_\ell < x \leq c$. Múltán $[a, x] \subset \bigcup_{k=0}^m I_{n_k}$,

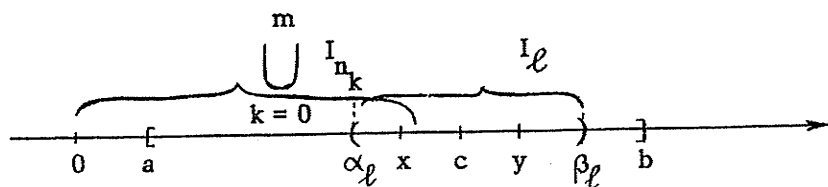
$[a, c] \subset \bigcup_{k=0}^m I_{n_k} \cup I_\ell$, vagyis $c \in A$. Végül bebonyítjuk, hogy $c = b$.

Ennek bizonyítását reductio ad absurdummal végezzük. Tegyük fel, hogy $c < b$. Ekkor, mint az előbb $c \in I_\ell = (\alpha_\ell, \beta_\ell)$, $c < \beta_\ell$. Vezessük be

a $\beta = \min(\beta_\ell, b)$ jelölést (β_ℓ és b közül a kisebbik). Az $y = \frac{1}{2}(c + \beta)$

számra $c < y < \beta$, vagyis $y \in I_\ell$ és $y \in [a, b]$. Nyilván $[a, y] \subset$

$\bigcup_{k=0}^m I_{n_k} \cup I_\ell$ vagyis $y \in A$, ami ellentmond $y > c = \sup A$ -nak.



12.1. ábra

13. A valós számhalmaz számossága

Ebben a pontban, a valós számhalmaz és fontosabb részhalmazai számosságának (1.4.pont) kérdését vizsgáljuk. Először megszámlálható számosságú halmazokkal kapcsolatban bizonyítunk néhány tételt.

13.1. Tétel. Megszámlálható számosságú A halmaz bármely részhalmaza véges, vagy megszámlálható számosságú.

Bizonyítás. Mivel A megszámlálható számosságú, létezik a természetes számok T halmazának egy A -ra történő egy-egyértelmű leképezése. Jelöljük az ezen leképezés során az $n \in T$ -nek megfelelő A -beli elemet a_n -nel. Az $A = \{a_n : n \in T\}$ halmaz elemei tehát "sorozatba rendezhetők":

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (13.1)$$

Legyen $B \subset A$. A (13.1) "sorozaton" végig menve sorrendben kiválogatjuk B elemelt és ezeket a megtalálás sorrendjében rendre megfeleltetjük a $0, 1, 2, \dots$ természetes számoknak. Tehát, ha (13.1)-ben a_{i_1} az

első B -beli elem, azt $b_1 = a_{i_1}$ -gyel, ha a_{i_2} a következő ($i_2 > i_1$), ezt

$b_2 = a_{i_2}$ -vel stb. jelöljük. Mivel (13.1)-ben A összes eleme szerepel, így módon B minden eleméhez eljutunk. Ha az eljárás véges sok lépésben véget ér, mert már B minden elemét kiválasztottuk, akkor B véges halmaz. Ha az eljárás nem ér véget, véges sok lépésben, akkor B nem véges halmaz, de ezen eljárással mindjárt egy-egyértelmű megfeleltetést létesítettünk B és a T halmaz között, vagyis B ekvivalens T -vel.!

A 13.1. Tétel szerint tehát a megszámlálható számosságnál kisebb "végtelen számosság" nem létezik. Az előző bizonyításban szereplő eljáráshoz hasonló módon ugyanis könnyen belátható, hogy minden végtelen halmazból kiválasztható megszámlálható számosságú részhalmaz.

13.2. Tétel. Megszámlálhatóan végtelen sok megszámlálható számosságú, diszjunkt halmaz egyesítése megszámlálható számosságú.

Bizonyítás. Legyen Z az a megszámlálható számosságú halmaz, melynek elemei megszámlálható számosságú diszjunkt halmazok. A T és Z halmazok közötti egy-egyértelmű leképezés során jelöljük az $n \in T$ -nek megfelelő elemet (halmazt) A_n -nel, vagyis $Z = \{A_n : n \in T\}$, ahol az

A_n -ek megszámlálható számosságú halmazok. Minden rögzített $n \in T$ -re végezzük el az egy-egyértelmű megfeleltetést T és A_n között; e megfeleltetés során $m \in T$ képét jelöljük a_{nm} -mel. $A_n = \{a_{nm} : m \in T\}$, $n \in T$. Így módon az A_n halmazok elemeit "sorozatba rendeztük":

$$\begin{aligned} A_0 &= \{a_{00}, a_{01}, a_{02}, \dots, a_{0m}, \dots\} \\ A_1 &= \{a_{10}, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, \dots\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_{n0}, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}, \dots\} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (13.2)$$

Az A_n halmazok egyesítésének $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ -nek minden elemét (és csak azokat) tartalmazza a (13.2) végtelen táblázat és ebben $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ minden egyes elemepontosan egyszer szerepel, hiszen A_n -ek diszjunktok. A (13.2) táblázaton a felső bal sarokból kiindulva és az elemeken az "észak-kelet- délnyugat" iránnyal párhuzamosan végigmenve $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ elemeit rendre megfeleltetjük a T halmaz $0, 1, 2, \dots$ stb. elemeinek:

$$\begin{array}{lcl} 0 & \longrightarrow & a_{00} \\ 1 & \longrightarrow & a_{01} \\ 2 & \longrightarrow & a_{10} \\ 3 & \longrightarrow & a_{02} \\ 4 & \longrightarrow & a_{11} \\ \vdots & & \end{array}$$

Ily módon, miután $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ minden eleméhez eljutunk, egy-egyértelmű megfeleltetést létesítettünk T és $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ között, vagyis az utóbbi megszámlálható számosságú.!

Nyilvánvaló, hogy véges sok megszámlálható számosságú halmaz egyesítése is megszámlálható számosságú (v.ö. 4.3. Példa).

13.3. Tétel. A racionális számok halmazának számossága megszámlálható.

Bizonyítás. Tekintsük először a $\frac{p}{q}$ alaku számok B halmazát,

ahol $p, q \in \mathbb{T}$, $q \neq 0$, melyek közül ideiglenesen kettőt akkor és csak akkor tekintünk egyenlőknek, ha mind a számlálójuk, mind pedig a nevezőjük

meg egyezik, vagyis $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$ akkor és csak akkor, ha $p_1 = p_2$ és

$q_1 = q_2$. B az A_q , $q \in \mathbb{T}$, $q > 0$, halmazok egyesítése, ahol

$A_q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{T} \right\}$. Nyilvánvaló, hogy az A_q , $q \in \mathbb{T}$, $q > 0$, hal-

mazok diszjunktak és megszámlálható számosságúak, tehát a 13.2. Tétel alapján B is, megszámlálható számosságú. A nem-negatív racionális számok halmaza ekvivalens B egy végtelen részhalmazával, melyet úgy kapunk,

hogy az azonos értékű $\frac{p}{q}$ alaku számok közül pontosan egyet tartunk

meg minden $p, q \in \mathbb{T}$, $q \neq 0$ -ra a többi elhagyjuk. Így a 13.1. Tételből következik, hogy a nem-negatív racionális számok halmazának számossága megszámlálható. Miután a negatív racionális számok halmaza nyilván ekvivalens a nem-negatív racionális számok halmazával, a 13.2. Tételt követő megjegyzés szerint a kettő egyesítése, vagyis, a racionális számok halmaza is megszámlálható.

Eredményünk már azért is meglepő, mert intuitíve úgy érezzük, hogy "sokkal több" törtszám van, mint egész szám. Még meglepőbb azonban, ha figyelembe vesszük, hogy érvényes a következő

13.4. Tétel. Bármely két valós szám között végtelen sok racionális szám van.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}$ -re $a < b$ esetén, az $A = \{r : r \text{ racionális, } a < r < b\}$ halmaz végtelen (pontosabban, mivel A racionális számok halmazának részhalmaza, megszámlálható számosságú). Más szóval azt kell bebizonyítani, hogy az "a" és b között elhelyezkedő racionális számok bármely véges B halmazához van $r \in A$ melyre $r \notin B$. Legyen B egy ilyen véges halmaz és jelöljük B legnagyobb elemét c -vel (ha $B = \emptyset$, akkor legyen $c = a$), tehát $a \leq c < b$. Megmutat-

juk, hogy a (c, b) intervallumban van racionális szám. A valós számok archimedesi tulajdonságából (11.1. Tétel) következik, hogy van olyan $q \in \mathbb{T}$, $q > 0$, mely nagyobb, mint a (c, b) intervallum hosszának reciproka: $q > \frac{1}{b - c} > 0$, vagyis $\frac{1}{q} < b - c$. A qc számhoz nyilván található olyan p egész szám, hogy $p-1 \leq qc < p$. Akkor egyrészt $c < \frac{p}{q}$. Másrészt $\frac{p-1}{q} \leq c$, innen

$$\frac{1}{q} + \frac{p-1}{q} < (b - c) + c,$$

vagyis $\frac{p}{q} < b$. Ezek szerint az $r = \frac{p}{q}$ racionális szám a kívánt tulajdonságu: $c < r < b$.!

Ebből az eredményből nem szabad azt a következtetést levonni, mint-ha a racionális számok majdnem teljesen kitöltenék a számegyeneset (annak intervallumait). Igaz ugyanis a következő

13.5. Tétel. Bármely két valós szám között végtelen sok irracionális szám van.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}$ -re $a < b$ esetén a $C = \{s : s \text{ irracionális}, a < s < b\}$ halmaz végtelen. Ugyanúgy mint az előbb ehhez elegendő annyit bebizonyítani, hogy ha $c, b \in \mathbb{R}$ és $c < b$, akkor a (c, b) intervallumban van irracionális szám. Tudjuk az előző tételből hogy van racionális r , melyre $c < r < b$. Megmutatjuk, hogy van irracionális s , melyre $c < r < s < b$. Ehhez elegendő megmutatni, hogy van irracionális t , melyre $0 < t < b - r$; ekkor ugyanis $r < r + t < b$ és az $s = r + t$ szám irracionális (könnyen belátható, hogy egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális). A 11.1. Tételt a $b - r > 0$ és $\sqrt{2} > 0$ számokra alkalmazva, van $n \in \mathbb{T}$, $n > 0$, hogy $n(b-r) > \sqrt{2}$, vagyis $0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < b - r$, tehát a $t = \frac{\sqrt{2}}{n}$ irracionális szám a kívánt tulajdonságu.!

Eszerint, a 13.1 Tétel figyelembevételével, az irracionális számok halmazának számossága legalább akkora, mint a racionális számok halmazának számossága. Megmutatjuk, hogy valójában az irracionális számok halmazának számossága nagyobb mint a racionális számoké. Ehhez először bebizonyítjuk a következő tételt.

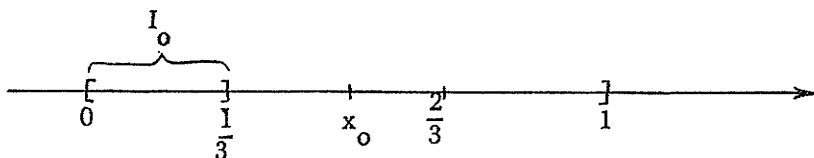
13.6. Tétel. A $[0, 1]$ intervallum (pontjainak) számossága nagyobb, mint $\aleph_0$.

Bizonyítás. A 13.4 vagy a 13.5 Tételből továbbá a 13.1. Tételből következik, hogy a $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$ halmaz számossága legalább $\aleph_0$.

Eszerint tehát a T halmaz egy-egyértelmű módon leképezhető a $[0, 1]$ halmazba (1.2.1. Definíció). Tekintsük T -nek egy $[0, 1]$ -be történő tetszőleges egy-egyértelmű leképezését és jelöljük x_n -nel az $n \in T$ -nek megfelelő $[0, 1]$ -beli valós számot. Megmutatjuk, hogy a $[0, 1] \setminus \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

halmaz nem üres, vagyis, hogy van $x \in [0, 1]$ melyre bármely $n \in T$ -re $x \neq x_n$. Ebből a célból osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot három egyenlő hosszúságú intervallumra:

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$



13.1. ábra

E három intervallum között van legalább egy, melynek x_0 nem eleme, jelöljük ezt (vagy ezek közül az egyiket) I_0 -al. Osszuk fel most az I_0 intervallumot három egyenlő hosszúságú zárt intervallumra és ez utóbbiak közül jelöljük I_1 -gyel azt, melynek x_1 nem eleme, és így tovább. Ily módon egymásba skatulyázott zárt intervallumoknak egy sorozatát kapjuk,

$$[0, 1] \supset I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots,$$

mely a következő tulajdonsággal rendelkezik: minden $n \in T$ -re

$$x_k \notin I_n, \quad 0 \leq k \leq n.$$

$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ A valós számok Cantor-féle tulajdonsága értelmében (12.1. Tétel) nem üres, vagyis van $x \in \mathbb{R}$, hogy $x \in I_n$ minden $n \in T$ -re.

Természetesen $x \in [0, 1]$. Bármilyen $n \in T$ -t veszünk is $x \neq x_n$, mivel $x_n \notin I_n$!

A $[0, 1]$ intervallum számosságát kontinuum számosságnak nevezzük és c -vel jelöljük. Beláttuk, hogy $c > \aleph_0$. Eredményeinkből következik, hogy a $[0, 1]$ intervallumban elhelyezkedő irracionális számok halmazának számossága is nagyobb $\aleph_0$ -nál. Ugyanis a $[0, 1]$ intervallum a benne levő racionális számok halmazának és irracionális számok halmazának egyesítése. Ha a $[0, 1]$ -beli irracionális számok halmazának számossága is $\aleph_0$ lenne, akkor a 13. 2. Tételt követő megjegyzés értelmében $[0, 1]$ számossága is megszámlálható lenne szemben legutóbbi tételünkkel. Behizonyítható, hogy a $[0, 1]$ -beli irracionális számok halmazának számossága is c .

Behizonyítható továbbá, hogy bármely intervallum és így maga az $\mathbb{R}$ halmaz is kontinuum számosságú. A kontinuum számosságnál nagyobb számosság is van. Az a kérdés azonban, hogy van-e számosság $\aleph_0$ és c között, a halmazelmélet axiomatikus felépítésénél külön axiómát kíván. Egy ilyen axiomatikus tárgyalásnál felvehetjük axiómaként azt, hogy $\aleph_0$ és c között nincs számosság ("kontinuum hipotézis"), de felvehetjük, e helyett, ennek ellenkezőjét is. A kétféle alapon felépített halmazelmélet természetesen különbözik egymástól.

VÉGTELEN NUMERIKUS SOROZATOK

14. Végtelen sorozatok elemi tulajdonságai

Műszaki és egyéb számítások során a legegyszerűbb esetekben is gyakran (vagy talán legtöbbször) valójában számsorozatokat határozunk meg. Ezeknek a számsorozatoknak a tagjai "megközelítik" a számítás végeredményét. Miután rendszerint nem kívánatos a számítás vég nélküli folytatása, megállunk a számsorozat egy tagjánál és ezzel pótoljuk a végeredményt. Ez történik általában már két egész szám osztásánál is, amennyiben az végtelen (szakaszos) tizedestörtre vezet. Ez történik abban az esetben is, amikor olyan egész számból vonunk pl. négyzetgyököt az ismert eljárás útján, mely nem négyzetszám. Mindkét esetben (és általában) a pontossági követelményektől függően megállunk 2, 3, 10 vagy 20 tizedesjegy után és az osztási, négyzetgyökvonási stb. algoritmussal nyert számsorozatnak ezt a tagját használjuk a végeredmény helyett. A végtelen számsorozatnak fontos, gyakorlatból ismert fogalmára adunk pontos meghatározást.

14.1. Definíció. Legyen adott egy $a : T \rightarrow R$ függvény (mely tehát a természetes számok halmazát a valós számok halmazába képezi le), ezt a függvényt végtelen (numerikus) sorozatnak nevezzük; az $n \in T$ -hez az "a" leképezés által rendelt valós számot (az "a" függvény értékét az n helyen) a_n -nel jelöljük és a sorozat n -edik tagjának nevezzük.

A végtelen sorozatot általában tagjai felsorolásával adjuk meg. Így a sorozatra a következő jelöléseket használjuk: a_n , $n \in T$; vagy a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ vagy $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ végtelen sorozat. Ha $n \neq m$, $n, m \in T$, akkor a_n és a_m a végtelen sorozat különböző (indexű) tagjai még akkor is, ha az a_n és a_m valós számok egyenlők. A végtelen sorozatot meg kell különböztetnünk a tagjaiból álló valós számhalmaztól az $A = \{a_n : n \in T\} \subset R$ halmaztól. A végtelen sorozatnak mindig (megszámlálhatóan) végtelen sok tagja van, az A halmaz számossága azonban ennél kisebb (A elemeinek száma véges) lehet. (1.4. és 13. pont).

14.1. Példa Az $a_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ végtelen sorozat tagjainból álló $A = \{(-1)^n : n \in T\}$ számhalmaz számossága 2, ugyanis nyilván $A = \{-1, 1\}$.

A sorozat tagjainak "indexezését" természetesen nem szükséges 0-val kezdeni. Nyilván egy $a : N \rightarrow R$ függvény is sorozat, ha $N = T \setminus \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, $m \in T$. Ennek jelölése: a_n , $n = m, m+1, \dots$.

A b_m , $m \in T$ végtelen sorozatot az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat részsorozatának nevezzük, ha minden $m \in T$ -re $b_m = a_{n_m}$, $n_m \in T$ és

$n_m < n_{m+1}$. Azt mondjuk, hogy az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat korlátos, felülről korlátos, ill. alulról korlátos, ha az $\{a_n : n \in T\}$ számhalmaz korlátos, felülről korlátos, ill. alulról korlátos, (1.10.2. Definíció). A sorozat tagjaiból álló $\{a_n$, $n \in T\}$ számhalmaz felső, alsó, legkisebb felső, legnagyobb alsó korlátjait (amennyiben léteznek) az a_n , $n \in T$ sorozat felső stb. korlátjainak nevezzük. Azt mondjuk, hogy az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat monoton növekedő, ill. monoton csökkenő, ha minden $n \in T$ -re $a_n \leq a_{n+1}$, ill. $a_n \geq a_{n+1}$. Azt mondjuk, hogy az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat szigorúan monoton növekedő, ill. szigorúan monoton csökkenő, ha minden $n \in T$ -re $a_n < a_{n+1}$, ill. $a_n > a_{n+1}$. Nyilvánvaló, hogy monoton, ill. szigorúan monoton sorozatnak minden részsorozata is monoton, ill. szigorúan monoton.

14.1. Tétel. Minden a_n , $n \in T$ végtelen sorozatból kiválasztható monoton (növekedő, vagy csökkenő) részsorozat.

Bizonyítás. Bármilyen sorozat is a_n , $n \in T$, a következő három típus valamelyikébe tartozik: (a) nincsen n tagjai, közt legnagyobb; (b) van tagjai között legnagyobb, de véges sok tag elhagyása után a megmaradt részsorozatban már nincs legnagyobb tag; (c) van tagjai közt legnagyobb, és bárhogyan hagyunk el a sorozatból véges sok tagot, a megmaradt részsorozatban is van legnagyobb tag. Ha sorozatunk az (a) típusba tartozik a kívánt b_m , $m \in T$ részsorozatot a következőképpen konstruáljuk meg:

$b_0 = a_0$. Miután a_0 nem a legnagyobb tag, van $n_1 \in T$, $n_1 > 0$, hogy $a_{n_1} \geq a_0$, $b_1 = a_{n_1}$. Miután a_{n_1} nem a legnagyobb tag van $n_2 \in T$, $n_2 > n_1$, hogy $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ (ha csak az n_1 -nél kisebb indexű tagok között lenne a_{n_1} -nél nagyobb tag, akkor a sorozatban lenne legnagyobb tag, mivel véges sok szám között mindig van legnagyobb), $b_2 = a_{n_2}$, és így tovább.

Ily módon, az eljárást vég nélkül folytatva kiválasztottunk a sorozatból egy monoton növekedő részsorozatot. Ha sorozatunk a (b) típusba tartozik, akkor véges sok tag elhagyásával kiválasztunk belőle egy (a) típusú részsorozatot. Ez utóbbi sorozatból az előbbiek szerint kiválasztunk egy monoton növekedő részsorozatot, mely nyilván az eredeti sorozatnak is a kívánt tulajdonsággal rendelkező részsorozata. Végül, ha sorozatunk a (c) típusba tartozik és a_{n_0} a legnagyobb tagja, akkor $b_0 = a_{n_0}$. Az $a_0, a_1, \dots, a_{n_0}$

tagok elhagyása után megmaradt részsorozatban is van legnagyobb tag: a_{n_1} , nyilván $n_1 > n_0$ és $a_{n_1} \leq a_{n_0}$, akkor $b_1 = a_{n_1}$. Az $a_0, a_1, \dots, a_{n_1}$

tagok elhagyása után megmaradt részsorozatban is van legnagyobb tag a_{n_2} , $n_2 > n_1$, $a_{n_2} \leq a_{n_1}$; $b_2 = a_{n_2}$, és így tovább. Az eljárást vég

nélkül folytatva kiválasztottunk a sorozatból egy monoton csökkenő részsorozatot.!

Legyen a_n , $n \in T$ és b_n , $n \in T$ két végtelen sorozat. E két sorozat összegének (különbségének), ill. szorzatának nevezzük az $a_n + b_n$, $n \in T$, ill. $a_n b_n$, $n \in T$ végtelen sorozatokat. Tételezzük fel, hogy $b_n \neq 0$, $n \in T$;

a két sorozat hányadosának nevezzük az $\frac{a_n}{b_n}$, $n \in T$ végtelen sorozatot.

15. Végtelen sorozat határértéke

Az analízis legfontosabb fogalmát, a határértéket értelmezzük végtelen sorozatokra.

15.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat határértéke az ℓ valós szám, jelben: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, vagy $a_n \rightarrow \ell$, ha $n \rightarrow \infty$, ha ℓ minden K_ℓ környezetéhez van a ∞ -nek K_∞ környezete (l. 12.2. és 12.3. Definíció), hogy minden $n \in T \cap K_\infty$ -re $a_n \in K_\ell$.

Az előbbivel nyilván ekvivalens a következő

15.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat határértéke az ℓ valós szám, jelben: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, vagy:

$a_n \rightarrow \ell$, ha $n \rightarrow \infty$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $N \in T$, hogy minden $n \geq N$ -re $|a_n - \ell| < \varepsilon$. N -et az ε -hez tartozó küszöbindexnek nevezzük.

15.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy a_n , $n \in T$ végtelen sorozat konvergens, ha van $\ell \in R$ határértéke.

15.1. Példa Az $\frac{n}{n+1}$, $n \in T$ végtelen sorozat konvergens és

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Ugyanis legyen ε tetszőleges pozitív szám.

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon, \text{ ha } 1 - \frac{n}{n+1} < \varepsilon,$$

mivel $0 \leq \frac{n}{n+1} < 1$ minden $n \in T$ -ra. Innen egyszerű rendezéssel

$$n+1 - n < \varepsilon(n+1)$$

$$1 < \varepsilon n + \varepsilon$$

$$\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} < n.$$

Jelöljük N -nel az első természetes számot, mely $\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$ -nél nagyobb,

vagyis $N \in T$ és $N > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$. Ha $n \geq N$, akkor

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

ami állításunkat bizonyítja. (Másképpen kifejezve ugyanezt: minden

$n \in K_{-\infty, \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}}$ -re $\frac{n}{n+1} \in K_{1, \varepsilon}$)

15.4. Definíció. Ha az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy divergens. Ha az a_n , $n \in T$ divergens sorozatra minden $K_{\infty, \varphi}$ -hoz ($K_{-\infty, \varphi}$ -hoz) van $K_{\infty, r}$, hogy minden $n \in K_{\infty, r}$ -re $a_n \in K_{\infty, \varphi}$ ($a_n \in K_{-\infty, \varphi}$), akkor azt mondjuk, hogy az a_n , $n \in T$ sorozat ∞ -hez ($-\infty$ -hez) divergál, jelben: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$).

15.1. Tétel. Ha az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat konvergens, akkor korlátos.

Bizonyítás. Legyen $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ és adott az $\varepsilon = 1$ pozitív szám, akkor van $N \in T$, hogy minden $n \geq N$ -re $a_n \in K_{l,1}$, vagyis $l-1 < a_n < l+1$. Vezessük be a következő jelöléseket

$$m = \min(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, l-1), M = \max(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, l+1)$$

(m a legkisebb, M pedig a legnagyobb a megfelelő zárójelben felsorolt számok között). Ekkor nyilván

$$m \leq a_n \leq M$$

minden $n \in T$ -re!

15.2. Példa. A 14.1. Példában szereplő $(-1)^n$, $n \in T$ végtelen sorozat divergens (bár korlátos). Megmutatjuk először, hogy 1 nem határértéke a sorozatnak. Van $\varepsilon > 0$, és pedig pl. $\varepsilon = \frac{1}{2}$, hogy minden K_∞ környezetre van $n \in T \cap K_\infty$, hogy $(-1)^n \notin K_{1, \frac{1}{2}}$.

Ugyanis bármilyen nagy számnál nagyobb természetes számokat tekintünk is, azok között van páratlan szám, és ha n páratlan, akkor $(-1)^n = -1 \notin K_{1, \frac{1}{2}}$. Tetszőleges $l \in \mathbb{R}$ -ről hasonlóan látható, hogy nem

határértéke a sorozatnak, ul. vagy 1, vagy -1 nem lesz eleme a $K_{l, \frac{1}{2}}$

környezetnek, márpedig ezek a számok tetszőlegesen nagy indexeken túl is fellépnek a sorozat tagjaként.

Könnyen belátható, hogy ha az a_n , $n \in T$ sorozat konvergens, akkor csak egy határértéke van (több nem). Tegyük fel ul., hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$ és $l \neq k$, pl. $l < k$. Legyen $\varepsilon = \frac{k-l}{2}$, nyilván

$K_{l,\varepsilon} \cap K_{k,\varepsilon} = \emptyset$. Van azonban $K_{\infty p}$, ill. $K_{\infty q}$, hogy minden $n \in K_{\infty p}$ -re $a_n \in K_{l,\varepsilon}$ és minden $n \in K_{\infty q}$ -ra $a_n \in K_{k,\varepsilon}$. Legyen pl. $p \leq q$.

Ha $n \in K_{\infty q}$, akkor $n \in K_{\infty p}$ és $a_n \in K_{l,\varepsilon} \cap K_{k,\varepsilon}$ ellentétben azzal, hogy ez utóbbi az üres halmaz,!

Végtelen sorozatok határértékének kiszámítását könnyítik meg a következő tételek.

15.2. Tétel. Ha az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat konvergens, akkor az

$|a_n|$, $n \in T$ végtelen sorozat is konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right|.$$

Bizonyítás. Legyen $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ és ε tetszőleges pozitív szám (11.8)

és a 15.2. Definíció alapján van $N \in T$, hogy minden $n \geq N$ -re

$$\left| |a_n| - |\ell| \right| \leq \left| a_n - \ell \right| < \varepsilon.$$

15.3. Tétel Ha a_n , $n \in T$ és b_n , $n \in T$ konvergens sorozatok,

akkor összegük (különbségük) is konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Bizonyítás. Legyen $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ és ε tetszőleges pozitív szám. Az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz van $N_1 \in T$ és $N_2 \in T$, hogy minden $n \geq N_1$ -re, ill. minden $n \geq N_2$ -re

$$\left| a_n - a \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ill. } \left| b_n - b \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $N = \max(N_1, N_2)$ (N_1 és N_2 közül a nagyobbik), ekkor minden $n \geq N$ -re mindkét előző egyenlőtlenség fennáll. Innen (11.6) felhasználásával

$$\left| a_n \pm b_n - (a \pm b) \right| \leq \left| a_n - a \right| + \left| b_n - b \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

minden $n \geq N$ -re.!

15.4 Tétel. Ha $a_n, n \in T$ konvergens sorozat és $c \in \mathbb{R}$, akkor a $ca_n, n \in T$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Bizonyítás. Ha $c = 0$, akkor a $ca_n, n \in T$ sorozat a $0, 0, \dots, 0, \dots$ sorozat, mely nyilván konvergens és határértéke 0 . $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Legyen $c \neq 0$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ és ε tetszőleges pozitív szám. Ekkor az $\frac{\varepsilon}{|c|} > 0$ számhoz van $N \in T$, hogy minden $n \geq N$ -re

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|},$$

vagyis

$$|c| |a_n - a| < \varepsilon,$$

és (11.5) alapján

$$|ca_n - ca| < \varepsilon. !$$

15.5. Tétel. Ha $a_n, n \in T$ és $b_n, n \in T$ konvergens sorozatok, akkor szorzatuk is konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Bizonyítás. Legyen $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ és ε tetszőleges pozitív szám. (11.6) és (11.5) felhasználásával megbecsüljük az $a_n b_n - ab$ különbség abszolút értékét.

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = \leq \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = \\ &= |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|. \end{aligned} \quad (15.1)$$

Jelöljük az a_n , $n \in T$ sorozat egy pozitív felső korlátját M -mel (a 15.1 és 15.2 Tételekből következik, hogy ez a sorozat korlátos). Az $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$, ill. az $\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ számhoz van $N_1 \in T$, ill. $N_2 \in T$, hogy minden $n \geq N_1$ -re, ill. minden $n \geq N_2$ -re

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}, \text{ ill. } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$$

Legyen $N = \max(N_1, N_2)$. A (15.1) becslést folytatva, az előbbieket alapján minden $n \geq N$ -re

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \leq \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

15.6. Tétel. Ha a_n , $n \in T$ és b_n , $n \in T$ konvergens sorozatok $b_n \neq 0$, $n \in T$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, akkor hányadosuk is konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Bizonyítás. Ha sikerül bebizonyítanunk, hogy a tett feltevések mellett az $\frac{1}{b_n}$, $n \in T$ sorozat konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b},$$

ahol $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, akkor előző tételünket az a_n , $n \in T$ és $\frac{1}{b_n}$, $n \in T$ sorozatokra alkalmazva adódik állításunk.

Ha megadjuk a b szám $K_b, \frac{1}{2}|b|$ környezetét ($\frac{1}{2}|b| > 0$, mivel $b \neq 0$) van $M \in T$, hogy minden $n \geq M$ -re $b_n \in K_b, \frac{1}{2}|b|$ más szóval $|b_n| > \frac{1}{2}|b| > 0$.

Vezessük be az

$$m = \min (|b_0|, |b_1|, \dots, |b_{M-1}|, \frac{1}{2} |b|)$$

jelölést. A feltevésekből következik, hogy $m > 0$, és a konstrukcióból az, hogy minden $n \in T$ -re $|b_n| \geq m$, $|b| > m$. Legyen ε tetszőleges pozitív szám. Az $\varepsilon m^2 > 0$ számhoz van $N \in T$, hogy minden $n \geq N$ -re $|b_n - b| < \varepsilon m^2$. Azonban

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n b|} |b - b_n| \leq \\ \leq \frac{1}{m^2} \varepsilon m^2 = \varepsilon,$$

ha $n \geq N$.

Megjegyezzük, hogy ha előző tételünkben a $b_n \neq 0$ feltevést elhagyjuk, de a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ feltevést megtartjuk, a tétel "lényegében" igaz marad. Az utóbbi feltevésből, amint ez a bizonyításból kitűnik, következik ugyanis, hogy legalábbis bizonyos $M \in T$ indextől kezdve minden $n \geq M$ -re $b_n \neq 0$. Ezek szerint az $\frac{a_n}{b_n}$, $n \in T$, $n \geq M$ végtelen sorozatra a tétel alkalmazható.

Megjegyezzük továbbá, hogy a 15.1 - 15.6 Tételek megfordításai nem érvényesek. Pl. abból, hogy egy sorozat tagjainak abszolút értékeiből álló végtelen sorozat, ill. két sorozat összege stb. konvergens, nem következik, hogy az eredeti sorozat, ill. sorozatok is konvergenssek.

Az előbbi tételek bizonyításaihoz hasonlóan igazolhatók a következő tételek. A bizonyításokat gyakorlásképpen az olvasóra bizzuk.

15.7. Tétel. Konvergens sorozatnak minden részsorozata is konvergens és minden részsorozat határértéke megegyezik a sorozat határértékével.

15.8. Tétel. Legyenek $a_n, n \in T$; $b_n, n \in T$ és $c_n, n \in T$ végtelen sorozatok és az első kettő konvergens; ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$ és minden n -re $a_n \leq c_n \leq b_n$, akkor a $c_n, n \in T$ sorozat is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \ell$.

15.9. Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$.

15.10. Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ és $c \neq 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = \pm \infty$ aszerint amint $c \gtrless 0$.

15.11. Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és $a_n b_n$, $n \in T$ sorozat korlátos, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$.

15.12. Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ és $|b_n| > p > 0$, minden $n \in T$ -re, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = \infty$.

15.13. Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ és $a_n b_n \neq 0$, $n \in T$ sorozat korlátos, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \infty$.

15.14. Tétel. Ha $|a_n| > p > 0$ minden $n \in T$ -re, $b_n \neq 0$, $n \in T$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \infty$.

15.15. Tétel. Ha a_n , $n \in T$ korlátos és $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

15.16. Tétel. Ha egy sorozat $\pm \infty$ -hez divergál, akkor minden részsorozata is $\pm \infty$ -hez divergál.

15.17. Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$ és minden $n \in T$ -re $b_n \gtrless a_n$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm \infty$.

És így tovább.

15.3. Példa. Legyen $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$, akkor a q^n , $n \in \mathbb{T}$ végtelen sorozat ∞ -hez divergál, ugyanis fennáll a (11.2) Bernoulli-féle egyenlőtlenség és az $1 + n(q - 1)$, $n \in \mathbb{T}$ végtelen sorozat ∞ -hez divergál.

15.4. Példa. Legyen $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, akkor a q^n , $n \in \mathbb{T}$ végtelen sorozat konvergens és határértéke 0. Ugyanis, ha $q = 0$ az állítás nyilvánvalóan igaz. Ha $q \neq 0$, az előző példa alapján az $\left| \left(\frac{1}{q} \right)^n \right| = \left| \frac{1}{q} \right|^n$, $n \in \mathbb{T}$ sorozat ∞ -hez divergál $\left(\left| \frac{1}{q} \right| > 1 \right)$, $q^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{q} \right)^n}$ és a 15.15. Tételt az $a_n = 1$, $n \in \mathbb{T}$, ill. $b_n = \left(\frac{1}{q} \right)^n$, $n \in \mathbb{T}$ sorozatokra alkalmazva állításunk adódik.

15.5. Példa. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
($\sqrt[n]{a}$ -n, ahol $n \in \mathbb{T}$, $n \geq 2$ mindig az "a" szám pozitív gyökét értjük, l. a megjegyzést a 10. pont végén.)

Állításunkat először az $a > 1$ feltevés mellett igazoljuk. Ebben az esetben nyilván $a_n = \sqrt[n]{a} > 1$, és $q = \sqrt[n]{a}$ -ra alkalmazva a (11.2) Bernoulli-féle egyenlőtlenséget

$$a > 1 + n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right),$$

ahonnan

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a - 1}{n}.$$

Ezek szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra

$$\left| \sqrt[n]{a} - 1 \right| < \frac{a - 1}{n} < \varepsilon,$$

feltéve, hogy $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$. Ha $0 < a < 1$, akkor $\frac{1}{a} > 1$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

16. A határérték létezésének feltételei

A 15.1. Tétel szükséges feltételt adott végtelen sorozat konvergenciájára. Most először a konvergenciának egy elégséges feltételét bizonyítjuk.

16.1. Tétel. Legyen az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat monoton növekedő (csökkenő) és felülről (alulról) korlátos, akkor a sorozat konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \in T\}, \quad (\inf \{a_n : n \in T\}).$$

Bizonyítás. Csak monoton növekedő sorozat esetére bizonyítjuk a tételt, monoton csökkenő sorozat esetében a bizonyítás analóg módon végezhető el. Legyen $s = \sup \{a_n : n \in T\}$. Minden $K_{s,\varepsilon}$ -hoz van $N \in T$, hogy $a_N \in K_{s,\varepsilon}$ (ti. $s - \varepsilon < a_N \leq s$). Azonban miután a sorozat monoton növekedő, minden $n \geq N$ -re $a_n \geq a_N$, és mivel $a_n \leq s$, $a_n \in K_{s,\varepsilon}$!

16.1. Példa. Az előző tétel a konvergenciára csak elégséges, de nem szükséges feltételt ad. A $\frac{(-1)^n}{n+1}$, $n \in T$ sorozat nyilván nem monoton, de konvergens:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0.$$

16.2. Példa. Az $(1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in T$, $n \geq 1$ sorozat konvergens. Megmutatjuk először, hogy e sorozat monoton növekedő. A binomiális tétel (8.1. Tétel) alapján tetszőleges $n \in T$, $n \geq 1$ -re

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k! n^k} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right], \end{aligned} \quad (16.1)$$

hasonlóan

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \right] + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \quad (16.2)$$

A (16.2) kifejezésben szereplő n -tagú szumma k -adik tagja minden $1 \leq k \leq n$ -re nagyobb, mint a (16.1) kifejezésben szereplő szumma megfelelő tagja, mivel $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \dots, \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$ rendre nagyobb, mint $\left(1 - \frac{1}{n}\right), \dots, \left(1 - \frac{2}{n}\right), \dots, \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$. Ezért (16.2) szummája nagyobb, mint (16.1) szummája. Miután ezen kívül (16.2)-ben még egy pozitív tag szerepel, mely (16.1)-ben nem lép fel,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{T}, \quad n \geq 1.$$

Másodszor megmutatjuk, hogy a sorozat felülről korlátos. A (16.1) -ben szereplő szumma minden tagját megnöveljük, ha a szögletes zárójelben álló szorzat helyébe 1-et írunk. Ezért

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

Azonban nyilván

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

vagyis a véges geometriai sor összegképletét használva

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3, \quad n \in T, \quad n \geq 1.$$

A 16.1. Tételből következik a sorozat konvergenciája. A sorozat határértékére az

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jelölést vezetjük be. Mivel a sorozat első tagja 2 és a sorozat monoton növekedő,

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \quad n = 2, 3, \dots$$

Igy határértékére az e számra is fennáll

$$2 < e \leq 3.$$

Az e szám fontos szerepet játszik az analízisben, e irracionális szám,

$$e = 2,71828\dots$$

A most következő tételt később konvergencia-feltételek bizonyításánál felhasználjuk.

16.2. Tétel (Bolzano-Weierstrass-tétel). Korlátos végtelen sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. A 14.1. Tétel alapján az adott korlátos sorozatnak van monoton részsorozata. Mivel e monoton részsorozat is korlátos, tehát a 16.1. Tétel alapján konvergens.

16.3. Tétel. (Cauchy-féle kritérium). Az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal: minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $N \in T$, hogy minden $n, m \geq N$ -re

$$|a_n - a_m| < \varepsilon. \quad (16.4)$$

Bizonyítás. Mután a tétel állítása szerint a feltétel a konvergenciának szükséges és elégséges feltétele (l. 7. pont), a bizonyítás két részből áll.

Először bebizonyítjuk, hogy ha a sorozat konvergens, akkor rendelkezik a feltételként megadott tulajdonsággal. Legyen $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ és ε tetszőleges pozitív szám. Az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz van $N \in T$, hogy minden $n \geq N$, ill. $m \geq N$ -re $a_n \in K_{\ell, \frac{\varepsilon}{2}}$ és $a_m \in K_{\ell, \frac{\varepsilon}{2}}$. Mután a $K_{\ell, \frac{\varepsilon}{2}}$ intervallum hossza ε , innen (16.4) következik.

Másodszor bebizonyítjuk, hogy ha a feltétel teljesül, akkor a sorozat konvergens. Az $\varepsilon = 1$ számhoz a feltétel következtében van $N \in T$, hogy minden $n \geq N$ -re

$$|a_n - a_N| < 1, \text{ vagyis}$$

$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1.$$

Vezessük be az

$$m = \min(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N - 1)$$

$$M = \max(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N + 1)$$

jelölést. Minden $n \in T$ -re $m \leq a_n \leq M$, vagyis a sorozat korlátos. A Bolzano-Weierstrass-tétel alapján van a sorozatnak konvergens részsorozata:

$$a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots; n_k < n_{k+1}, k \in T;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = r. \quad (16.5)$$

Megmutatjuk, hogy r az eredeti sorozatnak is határértéke. Legyen ε tetszőleges pozitív szám, akkor az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz egyrészt (16.5) miatt van $N_1 \in T$, hogy minden $n_k \geq N_1$ -re

$$|a_{n_k} - r| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (16.6)$$

másrészt a feltétel miatt van $N_2 \in T$, hogy minden $n_k \geq N_2$, $n \geq N_2$ -re.

$$|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (16.7)$$

Vezessük be a $N = \max(N_1, N_2)$ jelölést. Minden n_k , $n \geq N$ -re fennáll mind (16.6), mind pedig (16.7), tehát

$$\begin{aligned} |a_n - r| &= |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - r| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - r| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{minden } n \geq N \text{-re!} \end{aligned}$$

A Cauchy-féle kritériumnak nagy elméleti jelentősége van, bár konkrét sorozatok konvergenciájának eldöntésére gyakorlatilag nem használjuk. A konvergencia eldöntése a Cauchy-kritérium alapján ugyanis semmivel sem könnyebb, mint közvetlenül a határérték definíciója alapján. Azokat a sorozatokat, amelyek rendelkeznek a Cauchy-kritériumban megszövegezett tulajdonsággal, Cauchy-sorozatoknak nevezzük. Előző tételünk így azt mondja, hogy egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

Visszatérve a valós számoknak végtelen tizedestörtek alakjában történő előállításához azt mondhatjuk, hogy bármilyen végtelen tizedestört az alsó közelítő törtjeiből álló végtelen sorozat határértéke. Egy végtelen tizedestört alsó közelítő törtjeiből álló sorozat ui. mindig Cauchy-sorozat, mivel ha $m, n \in T$ és pl. $m < n$, akkor az n -edik (a tizedesvessző után n jegyet tartalmazó) és az m -edik alsó közelítő tört különbsége kisebb, mint $10^{-m} < \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$ tetszőleges), ha m elég nagy (l. 15.4. Példa, $q = 0, 1$). A $\sqrt[3]{3}$ valós szám pl. a gyökvonás algoritmusa útján nyert

$$1; 1,7; 1,73; 1,732; \dots$$

sorozat határértéke.

16.3. Példa. Felírjuk a $0,6\dot{3} = 0,636363 \dots$ végtelen szakaszos tizedestörtöt két egész szám hányadosaként. A $0,6\dot{3}$ végtelen tizedestörttel adott valós szám alsó közelítő törtjei

$$0; 0,6; 0,63; 0,636; 0,6363; \dots$$

sorozatának határértéke. Mivel ez a sorozat Cauchy-sorozat, konvergens. A 15.7. Tételből következik, hogy a

$$0; \quad 0,63; \quad 0,6363; \quad 0,636363; \quad \dots$$

részsorozat is konvergens és határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével. Ennek a részsorozatnak az n -edik tagja

$$\begin{aligned} 0,6363\dots63 &= 63 \cdot 10^{-2} + 63 \cdot 10^{-4} + 63 \cdot 10^{-6} + \dots + 63 \cdot 10^{-2n} = \\ &= 63 \cdot 10^{-2} \sum_{k=0}^{n-1} (10^{-2})^k = 63 \cdot 10^{-2} \frac{1 - 10^{-2n}}{1 - 10^{-2}}, \end{aligned}$$

ahol a véges geometriai sor összegképletét használtuk. A sorozat határértéke a 15.3 és 15.4. Tételek valamint a 15.4 Példa eredményének felhasználásával

$$0,63 = \lim_{n \rightarrow \infty} 63 \cdot 10^{-2} \frac{1 - 10^{-2n}}{1 - 10^{-2}} = 0,63 \frac{1}{0,99} = \frac{7}{11}.$$

17. Torlódási pontok

17.1. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$; $t \in \mathbb{R}$ -t az A halmaz torlódási pontjának nevezzük, ha minden K_t környezethez van végtelen számosságú $B \subset A$, hogy $B \subset K_t$.

A t torlódási pont minden környezetében tehát A -nak "végtelen sok" eleme van. Torlódási pontja ezek szerint csak végtelen számhalmaznak lehet. Az előbbi definícióval ekvivalens a következő

17.1' Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$; $t \in \mathbb{R}$ -t az A halmaz torlódási pontjának nevezzük, ha minden K_t környezetre $K_t \cap (A \setminus \{t\}) \neq \emptyset$.

E második definíció értelmében t torlódási pont, ha minden környezetében van A -nak t -től különböző eleme. Megjegyezzük, hogy a t torlódási pont nem szükségképpen eleme A -nak. Rátérve a két definíció ekvivalenciájának bizonyítására, az nyilvánvaló, hogy ha t torlódási pont a 17.1. Definíció értelmében, akkor a 17.1' értelmében is az. Fordítva, ha t torlódási pont a 17.1' Definíció értelmében és K_t egy tetszőleges környezete, akkor van $a_0 \in A$, hogy $a_0 \neq t$ és $a_0 \in K_t$. Vezessük be a $\mathcal{S}_1 = \{a_0 - t\} > 0$ jelölést. Van $a_1 \in A$, hogy $a_1 \neq t$, $a_1 \in K_t$ $\mathcal{S}_1 \subset K_t$. A $\mathcal{S}_2 = \{a_1 - t\} > 0$ jelölést bevezetve van $a_2 \in A$, hogy $a_2 \neq t$, $a_2 \in K_t$ $\mathcal{S}_2 \subset K_t$ $\mathcal{S}_1 \subset K_t$, és így tovább. Az eljárást vég nélkül folytatva a $B = \{a_n : n \in T\} \subset A$ végtelen halmazt kapjuk, $a_n \neq a_m$, ha $n \neq m$ és $B \subset K_t$, vagyis t torlódási pont a 17.1. Definíció értelmében is.!

17.1. Példa. A 13.4. ill. 13.5. Tételből következik, hogy bármely $t \in \mathbb{R}$ a racionális számok halmazának is és az irracionális számok halmazának is torlódási pontja.

17.2. Definíció. Legyen a_n , $n \in T$ végtelen számsorozat; $t \in \mathbb{R}$ -t e sorozat torlódási pontjának nevezzük, ha minden K_t környezethez van végtelen számosságú $P \subset T$, hogy

$$\{a_n : n \in P\} \subset K_t.$$

Ez a definíció analóg a számhalmaz torlódási pontjára adott 17.1. Definícióval. 17.1' -vel analóg definíció azonban sorozatokra nem adható, amint ez a következő példából kiderül.

17.2. Példa. A 14.1. és 15.2. Példában szereplő $(-1)^n$, $n \in T$ végtelen sorozatának 1 és -1 torlódási pontjai, hiszen pl. minden K_1 környezetre

$$\{(-1)^n : n = 2k, k \in T\} \subset K_1.$$

Azonban nyilván pl.

$$K_{1,1} \cap \left(\{(-1)^n, n \in T\} \setminus \{1\} \right) = \emptyset.$$

17.1. Tétel. Az $a_n, n \in T$ végtelen sorozatnak t akkor és csak akkor torlódási pontja, ha van $a_n, n \in T$ -nek t -hez konvergáló részsorozata.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha van $a_{n_k}, n_k < n_{k+1}, k \in T$ részsorozat, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = t$, akkor t az eredeti sorozatnak torlódási pontja. Legyen u_1, K_t a t pontnak egy tetszőleges környezete. Van K_∞ , hogy minden $n_k \in K_\infty$ -re, és ilyen n_k "végtelen sok" van, $a_{n_k} \in K_t$.

Másodszor megmutatjuk, hogy ha t az $a_n, n \in T$ sorozat torlódási pontja, akkor van t -hez konvergáló részsorozat. Tekintsük a $K_{t,1}$ környezetet; van $P_0 \subset T$ végtelen halmaz, hogy $a_n \in K_{t,1}$, ha $n \in P_0$. Legyen $n_0 \in P_0$ és $b_0 = a_{n_0}$. Tekintsük $K_{t, \frac{1}{2}}$ környezetet; van $P_1 \subset T$ végtelen halmaz, hogy $a_n \in K_{t, \frac{1}{2}}$, ha $n \in P_1$. Legyen $n_1 \in P_1, n_1 > n_0$ (ilyen nyilván van) és $b_1 = a_{n_1}$. És így tovább a k -adik lépésben tekintsük a $K_{t, \frac{1}{k}}$ környezetet, van $P_k \subset T$ végtelen halmaz, hogy $a_n \in K_{t, \frac{1}{k}}$, ha $n \in P_k$. Legyen $n_k \in P_k, n_k > n_{k-1} > \dots > n_1 > n_0$ és $b_k = a_{n_k}$. Az eljárást folytatva egy $b_k, k \in T$ részsorozatot kaptunk. Tetszőleges K_t környezetet véve van $N \in T$, hogy $K_{t, \frac{1}{N}} \subset K_t$. Ekkor azonban minden $k \geq N$ -re $b_k \in K_{t, \frac{1}{k}} \subset K_{t, \frac{1}{N}} \subset K_t$!

Ezen tétel szerint tehát konvergens sorozatnak pontosan egy torlódási pontja van és ez a határérték (l. 15.7. Tétel, melyből az is következik, hogy ha egy sorozatnak egynél több torlódási pontja van, akkor a sorozat divergens). A sorozat torlódási pontjának fogalma a határérték fogalmának általánosítása divergens sorozatokra (melyeknek határértékük nincs, de torlódási pontjuk lehet).

17.3. Példa. Az $(-1)^n \frac{n+1}{n}, n \in T, n \neq 0$ végtelen sorozatnak két torlódási pontja van 1 és -1. A $\frac{2k+1}{2k}, k \in T, k \neq 0$ részsorozat

határértéke $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{2k} = 1$, $a - \frac{(2k+1)+1}{2k+1}$, $k \in T$ részsorozat határ-
 értéke $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(- \frac{(2k+1)+1}{2k+1} \right) = -1$.

17.2. Tétel. Korlátos végtelen sorozatnak van torlódási pontja.

Bizonyítás. A Bolzano-Weierstrass-tétel alapján (16.2. Tétel) korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata és így állításunk a 17.1. Tételből azonnal következik.!

17.3. Tétel. Ha az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat torlódási pontjainak C halmaza nem üres és felülről (alulról) korlátos, akkor van legnagyobb (legkisebb) torlódási pont, vagyis $\sup C$ ($\inf C$) torlódási pont.

Bizonyítás. A bizonyítást csak felülről korlátos C esetre végezzük el. Alulról korlátos C esetében a bizonyítás analóg módon történik. Ha a torlódási pontok C halmaza nem üres és felülről korlátos, akkor létezik $L = \sup C$. Minden K_L környezethez van $t \in C$, hogy $t \in K_L$, de akkor elég kicsiny $\varepsilon > 0$ -t választva $K_{t,\varepsilon} \subset K_L$ és miután a sorozatnak "végtelen sok" tagja eleme K_t -nak, ugyanaz érvényes K_L -re, vagyis $L \in C$!

17.3. Definíció. Jelöljük az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat torlódási pontjainak halmazát C -vel; ha a sorozat felülről korlátos és $\sup C$ létezik, akkor ezt a számot a sorozat límes superiorjának nevezzük és $\limsup a_n$ -nel jelöljük; ha a sorozat felülről nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy $\limsup a_n = +\infty$; ha a sorozat felülről korlátos, de $C = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy $\limsup a_n = -\infty$.

17.4. Definíció. Jelöljük az a_n , $n \in T$ végtelen sorozat torlódási pontjainak halmazát C -vel; ha a sorozat alulról korlátos és $\inf C$ létezik, akkor ezt a számot a sorozat límes inferiorjának nevezzük és $\liminf a_n$ -nel jelöljük; ha a sorozat alulról nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy $\liminf a_n = -\infty$; ha a sorozat alulról korlátos, de $C = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy $\liminf a_n = +\infty$.

Definícióink olyanok, hogy minden sorozatnak van límes superiorja és límes inferiorja.

17.4. Példa. A 17.3. Példában szereplő $(-1)^n \frac{n+1}{n}$, $n \in T$, $n \neq 0$ sorozatra

$$\overline{\lim} (-1)^n \frac{n+1}{n} = 1, \quad \underline{\lim} (-1)^n \frac{n+1}{n} = -1.$$

17.5. Példa. A $2^{(-1)^n}$, $n \in T$ sorozatra

$$(1, \frac{1}{2}, 2^2, \frac{1}{2^3}, \dots, 2^{2k}, \frac{1}{2^{2k+1}}, \dots)$$

$$\overline{\lim} 2^{(-1)^n} = +\infty, \quad \underline{\lim} 2^{(-1)^n} = 0.$$

A limes superior, ill. a limes inferior jellemző tulajdonságait adják a következő tételek, melyek bizonyítását gyakorlásképpen az olvasóra hagyjuk.

17.4. Tétel. $L \in \mathbb{R}$ az a_n , $n \in T$ végtelen sorozatnak akkor és csak limes superiorja, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra $L + \varepsilon$ -nál nagyobb tag legfeljebb csak véges sok, $L - \varepsilon$ -nél nagyobb tag pedig "végtelen sok" van a sorozatban.

17.5. Tétel. $\ell \in \mathbb{R}$ az a_n , $n \in T$ végtelen sorozatnak akkor és csak akkor limes inferiorja, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra $\ell - \varepsilon$ -nál kisebb tag legfeljebb csak véges sok, $\ell + \varepsilon$ -nél kisebb tag pedig "végtelen sok" van a sorozatban.

17.6. Tétel. $L \in \mathbb{R}$, ($L = +\infty$, ill. $L = -\infty$) az a_n , $n \in T$ végtelen sorozatnak akkor és csak akkor limes superiorja, ha L ($+\infty$, ill. $-\infty$) az a legnagyobb "szám", amelyhez konvergáló (divergáló) részsorozata van a sorozatnak.

17.7. Tétel. $\ell \in \mathbb{R}$ ($\ell = -\infty$ ill. $\ell = +\infty$) az a_n , $n \in T$ végtelen sorozatnak akkor és csak akkor limes inferiorja, ha ℓ ($-\infty$, ill. $+\infty$) az a legkisebb "szám", melyhez konvergáló (divergáló) részsorozata van a sorozatnak.

Az előző két tételben a szám szót azért tettük idézőjelbe, mert ezekben a tételekben a számok közé soroljuk a $+\infty$, ill. $-\infty$ szimbólumokat is, melyeket minden valós számnál nagyobbak, ill. kisebbnek tekintünk.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Matematika Példatár (szerkesztette: Monostory I.) I. kötet, Tankönyvkiadó, 1971.
- [2] Gáspár Gy.: Műszaki matematika I. kötet, Tankönyvkiadó, 1968.
- [3] Ruzsa Imre, Urbán János: A matematika néhány filozófiai problémájáról. Matematikai logika, Tankönyvkiadó, 1966.
- [4] Alekszandrov, P. Sz. : Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe, Akadémiai Kiadó, 1952.
- [5] Banach, S.: Differenciál- és integrálszámítás, Tankönyvkiadó, 1965.
- [6]
- Фихтенгольц, Г.М.: Курс дифференциального и интегрального исчисления I., Гостехиздат, 1949, Москва.
- [7] Flett, T. M.: Mathematical Analysis, Mc Graw Hill, 1960. London.

Tárgymutató

- abszolút érték (valós számé) 38
állítás 18
állításfüggvény 28
archimedesi tulajdonság 37
aszimmetrikus 15
asszociatív 9
axióma 16

Bernoulli-egyenlőtlenség 37
binomiális együttható 25
—— tétel 27
bizonyítás 17
Bolzano-Weierstrass tétel (sorozatokra vonatkozó) 63
Borel-féle lefedési tétel 42

Cantor-Bernstein tétel 15
Cantor-féle tulajdonság 42
Cauchy-féle kritérium (sorozatokra) 63
Cauchy-sorozat 65

Dedekind-féle folytonossági axióma 35
definíció 16
direkt szorzat 12
diszjunkció 19
diszjunkt (idegen) 8
disztributív 9

egy-egyértelmű leképezés 10
egyenlő halmazok 7
egyenlő számosságú (ekvivalens) halmazok 13
egyesítés (unio) 8
egymásba skatulyázott intervallumok 42
ekvivalencia reláció 14
ekvivalens állítások 21
ekvivalens (egyenlő számosságú) halmazok 13
elégőséges feltétel 21

függvény (leképezés) 9
—— értéke 9
—— értékhalmaza 9
—— értékészlete 10
—— értelmezési tartománya 9
—— inverz ——— 11
—— kiterjesztése 11
—— leszűkitése 11
—— összetett ——— 12

grafikon 13
 halmaz 7
 —— eleme 7
 —— inverz képe 10
 —— képe 10
 rész ——— 7
 üres ——— 7
 valódi rész ——— 7
 halmazalgebrai műveletek 8
 határérték (sorozaté) 52
 idempotens 8
 implikáció 20
 —— előtagja, utótagja 20
 indexhalmaz 8
 indirekt bizonyítás 23
 individuum tartomány 28
 infimum 34
 intervallum 40
 korlátos——41
 inverz függvény 11
 irracionális szám 32
 irreflexiv 15
 kettős negáció törvény 18
 kommutativ 8
 komplementer (kiegészítő) halmaz 8
 konjunkció 18
 korlát 34
 korlátos számhalmaz 34
 környezet 41
 —— sugara 41
 közelítő tört 39
 különbség-halmaz 8
 küszöbindex 53
 kvantor 28
 egzisztencia- és unicitás ——— 31
 egzisztenciális ——— 29
 univerzális ——— 28
 lánckövetkeztetés 22
 legnagyobb alsó korlát (infimum) 34
 legkisebb felső korlát (suprémum) 34
 leképezés (függvény) 9
 limes inferior 69

- limes superior 69
- logikai érték 18
- matematikai indukció 17, 24
- metszet (közös rész) 8
- de Morgan-féle azonosságok 9
- negáció (tagadás) 18
- Peano-féle axiómarendszer 17
- racionális szám 32
- reductio ad absurdum 23
- reflexiv 14
- rendezési reláció 15
- rendezett elem n-esek 13
 - elempár 12
- sorozat (végtelen numerikus) 50
 - divergens —— 53
 - felülről korlátos, alulról korlátos —— 51
 - határértéke 52
 - konvergens —— 53
 - korlátos —— 51
 - monoton —— 51
 - n-edik tagja 50
 - rész —— 51
- supremum 34
- számosság 13
 - kontinuum —— 49
 - megszámlálhatóan végtelen —— 15
- számegyenes 40
- szimmetrikus 14
- szükséges és elégséges feltétel 22
- szükséges feltétel 21
- T gadás (negáció) 18
- tétel 16
- torlódási pont 66, 67
- tranzitív 14, 15
- trichotom 15
- valós szám 32
- valós számhalmaz axiómái 32

Abel csoport III.141
abszcissa II.8
abszolút érték I.38, III.7, 43
abszolút konvergencia IV.26
abszolút konvergens sor IV.25
abszolút maximum, minimum II.14, V.23
adjungált III.104, 173
a kereszt tenzor VI.103
alap III.128
 degenerált ——— III.128
 optimális ——— III.128
alapláma VIII.97
alaplámláma III.128
alaplámszám VIII.94, 151
alaplámszámrendszer III.128
algebra alaptétele III.53, VII.24
algebrai függvény II.54
állandó együtthatós lineáris parciális differenciálegyenlet VIII.192
 elliptikus ——— VIII.196
 hiperbolikus ——— VIII.196
 parabolikus ——— VIII.196
állandók variálása VIII.26, 99, 100, 155
állítás I.18
állításfüggvény I.28
alsó összeg II.158 V.98
általánosított Cauchy-féle integrálképlet VII.60
általános koordináta-rendszer VI.181
általános megoldás VIII.25, 26, 95, 99, 152, 154
altér III.79, 153
 — bázisa III.80
alulról korlátos sorozat IV.17
analitikus függvény IV.50, VII.31, 49
analitikus megoldás VIII.47, 52
Ansatz VIII.52, 165

approximáció IV. 7, 88
 áramvonal VI. 115
 Archimedesi spirális II. 142
 archimedesi tulajdonság I. 37
 arcus III. 45
 arcus függvény II. 57, 60
 area függvények II. 125
 argumentum III. 45
 aszimmetrikus I. 15
 aszimptota II. 116
 aszimptotikusan stabilis VIII. 128
 aszimptotikusan stabilis rendszer VIII. 133
 aszimptotikus egyenlőség II. 116
 asszociatív I. 9, -III. 9, 38, 64
 átlagos eltérés minimuma IV. 88, 89
 átlós mátrix III. 61
 átviteli elv VIII. 73, 149
 autonóm rendszer VIII. 135
 axióma I. 16

 bal oldali differenciálhányados II. 74
 bal oldali folytonosság II. 42
 bal oldali határérték II. 37
 bal rendszer III. 18
 balról differenciálható függvény II. 74, IV. 76
 bázis III. 24, 75, 150
 bázistranszformáció III. 157
 ——— mátrixa III. 157
 bázisvektorok III. 24
 Bernoulli-egyenlőtlenség I. 37
 Bernoulli-l' Hospital szabály II. 100
 belső függvény V. 29
 belső pont V. 11, VII. 9
 belső szög II. 184
 belső terület II. 184
 Bessel-egyenlet IV. 90
 Bessel-függvények VIII. 176
 ——— integrál formulája VIII. 180
 ——— rekurziós formulái VIII. 176
 Bézout tétele II. 16 III. 53. VIII. 106
 binormális VI. 28
 binomiális együttható I. 25, IV. 55
 binomiális sor IV. 55, 56
 binomiális sorfejtés IV. 57, 61
 binomális tétel I. 27
 bizonyítás I. 17

Bolzano-tétele II. 49, 50 V. 34
 Bolzano-Weierstrass tétel I. 63, V. 17
 Borel-féle lefedési tétel I. 42, V. 20
 Bunyakovszkij-egyenlőtlenség III. 148, IV. 83, 93
 Cantor-Bernstein-tétel I. 15
 Cantor-féle tulajdonság I. 42, V. 20
 Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség III. 147
 Cauchy-egyenlőtlenség III. 148
 Cauchy-féle gyökkritérium IV. 20
 — integrálformula VII. 54
 — közéértéktétel II. 99
 — kritérium I. 63, II. 36, IV. 8, 37, V. 17, 28
 — normálalak VIII. 76
 — szorzat IV. 31, 32
 Cauchy-Hadamard-tétel IV. 47, VII. 57
 Cauchy-Lipschitz-tétel VIII. 79
 Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenletek VII. 29
 Cauchy-sorozat I. 65
 Cauchy-tétel VII. 49
 Cayley-Hamilton-tétel VIII. 107
 célfüggvény III. 127
 centripetális gyorsulás VI. 35
 centrum VIII. 143
 ciklois II. 137
 cirkuláció VI. 135
 Cramer-szabály III. 118
 csavarvonal VI. 22, 41
 Csebisev-polinom IV. 94, 95
 csomópont VIII. 139
 labilis — VIII. 139
 nem stabilis — VIII. 139
 stabilis — VIII. 139
 csoport III. 141
 kommutatív — III. 141
 d' Alembert-féle-hányadoskritérium IV. 21
 d' Alembert-módszer VIII. 213
 Dedekind-féle folytonossági axióma I. 35
 definíció I. 16
 definit másodfokú alak III. 182
 de Moivre-formula III. 47
 de Morgan-féle azonosságok I. 9
 deriválási szabályok VI. 11, 91
 derivált II. 72, VI. 44

- iránymenti — VI. 96
- parciális — VI. 44
- függvény II. 89
- mátrix V. 79
- sor IV. 48
- vektor VI. 89
- tenzor VI. 117, 187
- Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer II. 8, III. 28
- determináns III. 27, 84, 95
- determináns differenciálása V. 57
- diád III. 66. VI. 102
- diadikus szorzat III. 66
- diagonális mátrix III. 61
- differenciálhányados II. 72
- differenciál II. 74, V. 43. VI. 10, 89
- differenciálegyenlet VIII. 7
 - állandó együtthatós lineáris — VIII. 157
 - Bernoulli-féle — VIII. 31
 - Bessel-féle — VIII. 172
 - egzakt — VIII. 37, 39, 40
 - elsőrendű explicit — VIII. 9
 - elsőrendű lineáris — VIII. 21, 25, 43
 - Euler-típusú — VIII. 163
 - explicit — VIII. 8
 - hiányos másodrendű — VIII. 76
 - homogén lineáris — VIII. 8, 150
 - implicit — VIII. 8
 - inhomogén lineáris — VIII. 8,
 - közönséges — VIII. 7
 - lineáris — VIII. 8
 - n-ed rendű — VIII. 8
 - parciális — .8, 191
 - szeparábilis — VIII. 15
 - szétválasztható változóju — VIII. 15
- integrálása VIII. 7
- differenciálegyenlet rendszer VIII. 69
 - állandó együtthatós homogén lineáris — — VIII. 115
 - — megoldása VIII. 69
 - — megoldás-vektor VIII. 70
- differenciál-függvény V. 43
- differenciálhányados II. 72, VIII. 27
- differenciálhatóság II. 71, V. 36 VI. 9, 89, 117, 119
- differenciál-operátor VI. 124
- dilatáció III. 180

dimenzió III.144
 dinamikai rendszer VIII.135
 Dirichlet-féle formula IV.75
 Dirichlet-függvény II.12, 179
 diszjunkció I.19
 diszjunkt (idegen) I.8
 disztributív I.9, III.11, 16, 38
 divergencia VI.123, 156, 167, 188
 divergenciamentes vektor-vektor függvény VI.174
 divergens részsorozat IV.10
 divergens sor IV.8, 9, 19
 egy-egyértelmű leképezés I.10
 egyenes V.10
 egyenletesen folytonos függvény IV.71, 73, V.32
 egyenletesen konvergens függvény-sor IV.39
 egyenletes konvergencia IV.43, 37, 36
 egyenletes folytonosság II.47
 egyenlő halmazok I.7
 egyenlő számosságú (ekvivalens) halmazok I.13
 egyensúlyi helyzet VIII.35, 128
 egyesítés (unió) I.8
 egymásba skatulyázott intervallumok I.42
 egységgyökök III.47
 egységmátrix III.61
 egységoperátor III.165
 egységtenzor VI.102
 egységvektor III.10
 egyszerűen összefüggő felületdarab VI.168
 ——— siktartomány VI.168
 ——— tartomány VII.10
 ——— térbeli tartomány VI.168
 egyszerű sokszögtartomány II.183
 együtttható mátrix III.115
 egyváltozós valós függvény II.7
 ekvivalencia reláció I.14
 ekvivalens állítások I.21
 ekvivalens (egyenlő számosságú) halmazok I.13
 elégséges feltétel I.21
 elemi függvények II.134
 elemi oszlopműveletek III.112
 elemi sorműveletek III.108
 elliptikus integrál IV.61, 62
 elmozdulás III.7
 előjeles aldetermináns III.86
 elsőfajú elliptikus integrál IV.61

elsőfajú szakadási hely IV. 71
 elsőrendű explicit differenciálegyenlet rendszer VIII. 69
 elsőrendű nyomaték II. 239, V. 108
 első variációs rendszer VIII. 137
 eredő vektor III. 9
 érintő egyenlete II. 77
 érintő egységvektor VI. 22
 érintőmódszer II. 146
 érintősík V. 44 VI. 51
 érintővektor VI. 16
 erővonal VI. 115
 euklideszi tér II. 9, III. 145. IV. 82, 83
 komplex ——— III. 146
 n-dimenziós valós ——— III. 146
 Euler-féle reláció VII. 39
 ——— töröttvonal VIII. 58, 59
 Euler formula III. 50
 Euler-módszer VIII. 65
 Euler-tételei VI. 75
 evoluta VI. 37, 39
 evolvens VI. 37, 39
 exponenciális függvény II. 63, 65, VII. 38
 fázistér VIII. 135
 Fejér-tétel IV. 81
 felcserélési tétel III. 21
 felosztás finomsága II. 160, V. 98 VI. 130
 felső összeg III. 158, V. 98
 felszín II. 238, VI. 60
 felszín-vektor VI. 139
 feltételes konvergencia VI. 26
 felület V. 22, 23, VI. 54
 egyszerű zárt ——— VI. 55
 forgás ——— VI. 63
 irányítható ——— VI. 54
 nívó ——— VI. 93
 reguláris ——— VI. 54
 szint ——— VI. 93
 felület-darab
 egyszeresen összefüggő ——— VI. 168
 egyszerű ——— VI. 48
 reguláris ——— VI. 48, 54
 felületi görbe VI. 50
 felületi pont
 elliptikus ——— VI. 84

hiperbolikus ——— VI. 84
 parabolikus ——— VI. 84
 planáris ——— VI. 84
 szférikus ——— VI. 84
 felülről korlátos sorozat IV. 16, 18
 feszültség-tenzor VI. 110, 113
 fluxus VI. 142, 143
 fókusz VIII. 143
 labilis ——— VIII. 143
 stabilis ——— VIII. 143
 folytonosan differenciálható függvény II. 89, 90, VI. 121
 folytonos függvény II. 42, 47, V. 29
 folytonosság II. 42, VI. 8, 9, 117
 folytonossági modulus V. 32
 folytonos ut V. 10
 forgásfelület II. 237, VI. 63
 — felszine II. 236, VI. 63
 forgásszög II. 21
 — cosinusa II. 21
 — sinusa II. 21
 forgástest térfogata II. 236
 forgatónyomaték III. 18
 forrás VI. 143
 forráserősség VI. 154
 — sűrűség VI. 156
 forrásmentes vektor-vektor függvény VI. 174
 Fourier-együtthatók IV. 66, 68, 70, 88
 általánosított ———
 Fourier-módszer VIII. 102, 209, 220
 Fourier-sor IV. 64, 66, 67, 70, 81
 ————— részletösszegei IV. 75
 főérték III. 45
 főirány VI. 75
 főnormális VI. 26
 főtengety tétel III. 177, 181
 frekvencia II. 26
 Frenet-féle formulák VI. 31
 funkcionál II. 163
 függvény I. 9, II. 7, IV. 88, V. 22, VI. 7
 egyparaméteres vektor-skalár ——— VI. 7
 háromparaméteres vektor-skalár ——— VI. 182
 inverz ——— I. 11
 kétparaméteres vektor-skalár ——— VI. 43
 korlátos ——— II. 13, V. 23

monoton ——— II. 12
 összetett ——— I. 12, V. 29, VI. 45
 páratlan ——— II. 13
 páros ——— II. 13
 periodikus ——— II. 13
 skalár-vektor ——— VI. 87
 szigorúan monoton ——— II. 12
 vektor-vektor ——— V. 144
 ——— értéke I. 9
 ——— értékhalmaza I. 9
 ——— értékkészlete I. 10
 ——— értelmezési tartománya I. 9
 ——— grafikonja alatti tartomány II. 189
 ——— kiterjesztése I. 11
 ——— leszűkítése I. 11
 ——— lokális tulajdonsága II. 29
 ——— megváltozása V. 43
 függvények II. 12, VI. 7, 22, VIII. 23, 90
 ——— átlagos eltérése IV. 84
 ——— hányadosa II. 12
 ——— lineáris függetlensége VIII. 23, 90
 ——— lineáris összefüggése VIII. 23, 90
 ——— összege II. 12
 ——— szorzata II. 12
 ——— szögének cosinusa IV. 84
 ——— távolsága IV. 84
 függvényrendszer (ortogonális) IV. 90
 függvénytörzs IV. 7, 39
 ——— egyenletesen konvergens ——— IV. 39
 ——— konvergens ——— IV. 39
 ——— maradékösszege IV. 39
 ——— összege (határfüggvény) IV. 39
 ——— részletösszegei IV. 39
 ——— tagjai IV. 39
 függvényssorozat IV. 34
 függvényvizsgálat II. 106
 Gauss-féle első alapforma VI. 67
 ——— elsőrendű főmennyiség VI. 60
 ——— második alapforma VI. 84
 ——— másodrendű főmennyiség VI. 68
 ——— módszer III. 118
 Gauss-Osztrogradszkij-tétel VI. 149, 168
 geometriai-sor IV. 9, 40, 46
 golyó V. 10
 ——— zárt ——— V. 12

gömb V.12
 gömbi koordináták V.91
 görbe egyenlete II.9
 — érintője II.75
 — ivhossza II.233
 görbék érintkezése II.120
 görbesereg VI.37
 görbesereg differenciálegyenlete VIII.12
 görbevonalu koordináta-rendszer VI.181
 görbület II.121, VI.25, 70
 fő — VI.78
 normál — VI.74
 összeg — VI.80
 szorzat — VI.80
 görbületi kör VI.32
 görbületi középpont VI.32
 görbületi sugár II.121, VI.32
 gradiens VI.89, 185
 grafikon I.13, II.9, V.23
 Green-tétel VI.165
 gyorsulás vektor VI.18
 gyök III.52
 gyökkritérium, Cauchy-féle IV.20, 22
 gyök multiplicitása II.17
 gyökök elkülönítése II.144
 gyökök és együttthatók közötti összefüggések II.56
 gyöktényező II.15, III.53
 gyöktényező alak III.53
 gyűrű III.142
 halmaz I.7
 rész — I.7
 üres — I.7
 valódi rész — I.7
 — eleme I.7
 — inverz képe I.10
 — képe I.10
 halmazalgebrai műveletek I.8
 halmazfüggvény II.191
 Hamilton-féle operátor VI.124
 hányadoskritérium (d' Alembert-féle) IV.21, 22
 hármas integrál V.104
 harmónikus függvény VI.175, VII.31
 harmónikus sor IV.9
 harmónikus társ VII.32
 háromszög-egyenlőtlenség III.148, V.7

hasonló mátrixok III. 169
 határérték I. 52, II. 29, 31, 35, IV. 8, V. 24, 25, VI. 8, 116, VII. 11, 18
 határfüggvény IV. 35, 36, 38
 határozatlan együtthatók módszere VIII. 52, 54
 határozatlan integrál II. 202, VI. 14
 határozott integrál II. 164, 173
 határpont V. 11, VII. 9
 hatványfüggvény II. 88
 hatványsor IV. 45, 49, VII. 55
 ——— együtthatója IV. 45
 ——— konvergencia intervalluma IV. 47, 49
 ——— ——— sugara IV. 47, VII. 57
 ——— ——— tartománya IV. 46
 hatványsorba fejtés IV. 59
 hatványsor módszer VIII. 47
 helyvektor III. 28
 henger koordináták V. 92
 Hermite-féle interpolációs polinom VIII. 108
 hiba V. 45
 abszolút ——— V. 45
 öröklött ——— V. 45
 relatív ——— V. 45
 hibakorlát V. 44
 hibaszámítás V. 44
 hiperbolikus függvények II. 125
 hiperbolikus spirális II. 142
 hiperharmonikus sor IV. 24
 homogén lineáris függvény II. 74
 homogén lineáris vektor-vektor függvény III. 165
 Horner-féle elrendezés II. 152
 hővezetés differenciálegyenlete VIII. 201
 hurmódszer II. 145
 Hurwitz-polinom VIII. 129

 idempotens I. 8
 identitásoperátor III. 165
 imaginárius rész III. 42
 implicit függvény II. 54
 implicit függvényrendszer V. 89
 irracionális szám I. 32
 irreflexív I. 15
 iteráció II. 149
 iterációsorozat VIII. 65
 ivelem-négyzet VI. 67
 ivhossz VI. 18
 izoklina VIII. 10

izolált szinguláris hely VII. 61
 Jacobi-féle függvénydetermináns V. 79, VI. 52
 jobb oldali differenciálhányados II. 74
 jobb oldali folytonosság II. 42
 jobb oldali határérték II. 37
 jobb rendszer III. 18
 jobbról differenciálható függvény II. 74, IV. 76
 Jordan-féle területfogalom II. 185
 kanonikus alak VIII. 192
 karakterisztikus egyenlet III. 126, 170 VIII. 159
 karakterisztikus polinom III. 126
 Kepler-féle hordószabály II. 246
 képzetes egység III. 41
 ——— szám III. 42
 ——— tengely III. 42
 kettős integrál V. 99
 kettős negáció törvény I. 18
 kétváltozós függvény grafikonja V. 23
 ——— ——— ——— alatti tartomány V. 105
 kezdetiérték feladat VIII. 8
 kezdőfázis II. 26
 kibővített mátrix III. 116
 kicsiben aránytartó leképezés VII. 37
 kifejtési tétel III. 22
 kísérő triéder VI. 29
 kisördő II. 73
 kommutatív I. 8, III. 9, 16, 38, 63
 komplementer (kiegészítő) halmaz I. 8, VII. 9
 komplex függvény VII. 10
 ——— ——— differenciálhatósága VII. 27
 ——— ——— folytonossága VII. 21
 ——— ——— kanonikus alakja VII. 17
 ——— ——— vonalintegrálja VII. 42
 komplex függvénytan főtétele VII. 49
 komplex potenciál VII. 32
 komplex szám III. 38, 142
 ——— ——— abszolút értéke III. 43
 ——— ——— algebrai alakja III. 41
 ——— ——— arcusa III. 45
 ——— ——— argumentuma III. 45
 ——— ——— imaginárius része III. 42
 ——— ——— kanonikus alakja III. 41
 ——— ——— konjugáltja III. 43

——— modulusa III. 43
 ——— n -edig gyöke III. 47
 ——— reális része III. 42
 ——— trigonometrikus alakja III. 45
 komplex számok halmaza III. 38
 ——— hányadosa III. 39
 ——— osztása III. 40
 komplex számsík III. 41
 komplex számsorozat VII. 10
 ——— konjugált sorozata VII. 13
 ——— konvergenciája VII. 12
 komponensek III. 9
 konformis leképezés VII. 34, 37
 konjunkció I. 18
 konkáv II. 110
 konvergenca IV. 7, 8
 abszolút ——— IV. 26
 átlagos ——— IV. 84
 egyenletes ——— IV. 34, 85
 feltételes ——— IV. 26
 pontonkénti ——— IV. 71, 76, 85
 ——— intervallum IV. 47
 ——— sugár IV. 47
 ——— szükséges feltétele IV. 9, 8
 ——— tartomány IV. 45
 konvergens sor IV. 8, 10, 11, 12
 konvergens sorozat I. 53
 konvex II. 110
 konvex tartomány V. 10
 konzervatív vektor-vektor függvény VI. 169
 koordinátafelület VI. 182
 koordináta oszlopvektor III. 51
 koordináta-sorozat IV. 92
 koordinátavonal VI. 182
 korlátos I. 34, VII. 7, 11
 korlátos pontsorozat V. 16
 korlátos sorozat I. 51, VI. 16, 17, 18
 korlátos tartomány V. 9
 körevolvens VI. 41
 körfrekvencia II. 26
 környezet I. 41, V. 11, VI. 7, 145, VII. 8
 ——— sugara I. 41
 közelítés IV. 7
 közelítő tört I. 39
 középértéktételek II. 93

közepes sűrűség V. 107
 Kronecker szimbólum III. 61, 82
 kupszelet egyenlete II. 54
 különbség-halmaz I. 8
 különbségi hányados II. 72
 külső függvény V. 29
 külső pont V. 11, VII. 9
 külső sokszög II. 184
 külső terület II. 184
 küszöbindex I. 53, VI. 35, 36
 kvadratikusan forma III. 180
 kvadratikusan mátrix III. 61
 kvadratura VIII. 15
 kvantor I. 28
 egzisztencia- és unicitás ——— I. 31
 egzisztenciális ——— I. 29
 univerzális ——— I. 28
 Lagrange-féle interpolációs polinom II. 19
 ——— középértéktétel II. 96, V. 62, VI. 12, 93
 ——— maradéktag II. 124, V. 65
 ——— multiplikátor VIII. 42
 Lamé-féle együtthatók VI. 183
 lánckövetkeztetés I. 22
 láncszabály II. 81, V. 54, VI. 45, 91
 Laplace-féle parciális differenciálegyenlet VI. 175, VII. 31
 Laplace-operátor VI. 126, 192, 193
 Laurent-sor VII. 61
 Lebesgue-féle integrál IV. 92
 legkisebb felső korlát (suprémum) I. 34
 legkisebb négyzetek módszere V. 74
 legnagyobb alsó korlát (infimum) I. 34
 Leibniz-formula II. 92
 Leibniz-tétel IV. 14
 Leibniz típusú sor IV. 15
 leképezés (függvény) I. 9
 lényeges szinguláris hely VII. 62
 limes inferior I. 69
 limes superior I. 69
 lineáris differenciálegyenlet rendszer VIII. 87
 homogén ——— ——— ——— VIII. 89
 inhomogén ——— ——— ——— VIII. 98
 lineáris egyenletrendszer III. 115
 homogén ——— ——— ——— III. 121
 inhomogén ——— ——— ——— III. 121

- ——— alaprendszere III.124
- ——— általános megoldása III.124
- ——— megoldása III.115
- ——— triviális megoldása III.121
- lineáris funkcionál II.182
- lineáris függetlenség III.14, 28, 73, 143
- lineáris harmonikus rezgés II.26
- lineáris kombináció III.12, 13, 72, IV. 81
 - nem triviális ——— ——— III.72
- lineáris operátor II.182, III.165
 - antiszimmetrikus ——— ——— III.192
 - ferdén szimmetrikus ——— ——— III.192
 - izometrikus ——— ——— III.194
 - nem elfajuló ——— ——— III.166
 - önadjungált ——— ——— III.175
 - pozitív definit ——— ——— III.195
 - szimmetrikus ——— ——— III.175
- ——— adjungáltja III.173
- ——— invariáns altere III.170
- ——— koordináta mátrixa
- ——— sajátértéke III.170
- ——— sajátvektora II.170
- lineáris összefüggés III.14, 28, 72, 143, VIII.24
- lineáris tér III.143, IV.83
 - n-dimenziós ——— ——— III.144
- lineáris törtfüggvény VII.37
- Lipschitz-feltétel VIII.77
 - egységes ——— VIII.78
 - lokális ——— VIII.77
- Ljapunov értelmében stabilis VIII.128
- logaritmikus spirális II.142
- logaritmus függvény II.63, 67, VII.40
- logikai érték I.183
- lokális bázis VI.183
 - konvexitás II.109
- maximum II.14, V.23
- minimum II.14
- növekedés tétele II.94
- szélsőérték II.94, V.23, 67, 73
- lokálisan konkáv II.108
 - konvex II.108
- Maclaurin-sor IV.49, 51
- magasabbrendű differenciál V.64
- majoráló sor IV.24, 46
- majoráns kritérium II.223, IV.17, 46
- maradékösszeg VI.13

— sor IV. 13
 — sorozat IV. 13
 másodfoku alak III. 180, 182
 minden határon túl finomodó felosztás II. 160
 minimálpolinom VIII. 112
 minimum II. 107
 Minkowski-egyenlőtlenség IV. 83
 minoráló sor IV. 24
 minoráns kritérium II. 224, IV. 18
 minormátrix III. 85, 109
 monoton növekedés tétele II. 107
 Möbius-szalag VI. 54
 multiplicitás III. 56
 multiplikátor módszer VIII. 42
 munka VI. 129

 nabla-operátor VI. 124
 n-dimenziós golyó V. 10
 n-dimenziós metrikus tér V. 8
 n-edfoku Taylor polinom II. 122
 n-edrendű érintkezés II. 120
 n-edrendű mátrix III. 61
 n-edrendű mátrix III. 61
 negáció (tagadás) I. 18
 négyzetesen integrálható függvény IV. 82
 négyzetes mátrix III. 61
 nem izolált szinguláris pont VIII. 145
 neutrális elem III. 141
 Newton-Leibniz formula II. 204, 206
 Newton-Raphson-módszer II. 146
 norma III. 146
 normális VI. 26
 felületi — VI. 68
 normálmetszet VI. 71
 normálpolinom III. 52
 normálsík VI. 29
 normáltartomány V. 111, 114, 120
 normál vektor III. 31, VI. 51
 — egységvektor VI. 51
 növekmények összehasonlításának elve II. 115
 nulloperátor III. 165
 nullsorozat IV. 13
 null-tenzor VI. 102
 nullvektor III. 7, 72
 numerikus integrálás II. 243

numerikus sor IV.7
numerikus sorozat IV.7
n-változós valós függvény V.22

nyelő VI.143
nyeregponth VII.140
nyílt halmaz VII.9
nyílt tartomány V.12
nyom VI.108
nyomaték V.108

ordináta II.8
origó III.28
ortogonális III.8, 18, 149, 152, 158, 159, VI.86
—— bázis III.152, IV.81
—— bázistranszformáció III.158
—— függvényrendszer IV.86, 87, 92
 súlyfüggvényre nézve ——— IV.93, 95
—— mátrix III.159
—— sor IV.88, 90
 súlyfüggvény melletti ——— IV.96
—— trajektória VI.37, VIII.12
ortonormált bázis III.24, 153, IV.81
ortonormált függvényrendszer IV.86, 87, 92
 súlyfüggvényre nézve ———
oszillációs összeg II.169, V.100
oszlopmátrix III.60
oszlopvektor III.60, 71

örvénymentes vektor-vektor függvény VI.170
összefüggő tartomány V.10
összetett függvény V.29
—— ——— differenciálja V.56
összetezők III.9

pálya VI.17
pályagörbe VIII.72
pályamenti gyorsulás VI.35
pályamenti sebesség VI.35
paralelogramma szabály III.9
paralel-körök VI.64
paraméteresen adott görbék II.134
paraméteres integrál V.94
paraméter sík VI.43
paramétertranszformációk VI.21, 52

paramétervonalak VI. 48
 parciális derivált V. 36, 40
 k-adrendű ——— V. 47
 másodrendű ——— V. 47
 tisztá ——— V. 48
 vegyes ——— V. 48
 parciális integrálás II. 211
 parciális törtek II. 21
 Parseval-formula IV. 92
 Peano-féle axiómarendszer I. 17
 peremfeltétel VIII. 9
 periodikus függvény VI. 17
 periodikus rezgőmozgás II. 26
 periódus II. 13, 26
 Picard-féle sorozatos közelítés VIII. 80
 Poisson-féle parciális differenciálegyenlet VI. 175
 polárkoordináták II. 139
 polárkoordinátákban adott görbék II. 134
 —— normál tartomány V. 120
 —— téglalap tartomány V. 117
 polár koordináta-rendszer II. 138, V. 90
 polárszög II. 139
 polártengely II. 139
 poligon II. 183, VI. 18
 polinom II. 15, III. 52
 —— fokszáma II. 15
 —— gyöke II. 15
 polinom átrendezése IV. 105
 polinom-elemű mátrix VIII. 105
 pólus II. 139, VII. 61
 pólus rendje VII. 61
 pontbeli sűrűség V. 107
 pontthalmaz V. 17
 pont környezete V. 11
 pontmegoldás VIII. 35, 128
 pontsorozat V. 16
 divergens ——— V. 17
 konvergens ——— V. 16
 potenciálfüggvény VI. 169, VIII. 40
 potenciális vektor-vektor függvény VI. 168
 pozitív definit másodfokú alak III. 182
 pozitív tagú sor IV. 16, 18
 primitív függvény II. 201, 202, VI. 14, VII. 52
 produktum függvény differenciálja V. 56

racionális egész függvény II. 15
 — szám I. 32
 — törtfüggvény II. 19
 rádiuszvektor II. 139
 rang III. 108
 reális rész III. 42
 reciprok mátrix III. 104
 reductio ad absurdum I. 23
 reflexiv I. 14
 reguláris térgörbe VI. 25
 rektifikálható görbe VI. 18
 rektifikáló sík VI. 29
 rendezési reláció I. 15
 rendezett elem n -esek I. 13
 rendezett elempár I. 12
 rendezett szám n -es III. 71, V. 7
 részintervallum IV. 23
 részletösszeg IV. 8
 részletösszegek sorozata IV. 9, 16, 30, 42, 52
 részlettörtek II. 21
 részsorozat IV. 9, 10, 29
 — határértéke IV. 11
 rezgés amplitúdója II. 26
 — fázisa II. 26
 rezgésszám II. 26
 reziduum VII. 67
 reziduum tétel VII. 67
 rezultáns vektor III. 9
 Riemann-féle integrál IV. 82
 Riemann-integrálhatóság IV. 92
 Riemann-Lebesgue-lemma IV. 71, 79
 Riemann szerint integrálható függvény II. 164
 Riemann-tétel IV. 27
 Riesz Frigyes tétele IV. 92
 Rolle-tétel II. 95
 rotáció VI. 124, 164, 167, 192
 rotációmentes vektor-vektor függvény VI. 170, 179
 Ruffini-Abel-tétel II. 144
 rugalmas hur rezgései VIII. 210
 rugalmas membrán rezgései VIII. 217

 sajátérték III. 125, 170, VIII. 159
 sajátvektor III. 124, 170
 sebességvektor VI. 17
 semidefinit másodfoku alak III. 182

sík III. 31
 ——— egyenletének Hesse-féle normálalakja III. 31
 ——— paraméteres vektoregyenlete III. 33
 ——— vektoregyenlete III. 31
 siktartomány II. 191, V. 9
 ——— területe II. 183, 185
 simulókör II. 120, VI. 32
 simulósík VI. 27
 Simpson-szabály II. 246
 skalár eloszlás VI. 87
 skalárinvariáns VI. 108
 skaláris szorzás III. 15, 145, 146, IV. 82, 85
 skalármező VI. 87
 sokszög II. 183
 sokszögvonal II. 183
 sor IV. 7
 geometriai ——— IV. 9
 harmonikus ——— IV. 9
 hiperharmonikus ——— IV. 24
 ortogonális ——— IV. 88
 ——— átrendezése IV. 26
 ——— konvergenciája IV. 8
 ——— összege IV. 8
 sormátrix III. 61
 sorozat (végtelen numerikus) I. 50, IV. 7
 divergens ——— I. 53, IV. 10, 17
 felülről korlátos, alulról korlátos ——— I. 51
 konvergens ——— I. 53, IV. 11
 korlátos ——— I. 51
 monoton ——— I. 51
 rész ——— I. 51
 szigorúan monoton ——— I. 51
 ——— határértéke I. 52
 ——— n -edik tagja I. 50
 sor-oszlop kombinálás II. 65
 sorvektor III. 61, 71
 spur VI. 108
 stabilis mátrix VIII. 131
 stabilis rendszer VIII. 133
 stabilitás VIII. 127
 Stokes-tétel VI. 156, 167
 sugárpont VIII. 29
 súlyfüggvény IV. 85
 súlyfüggvényre vonatkozó norma IV. 85

súlyfüggvény szerinti integrálközép II. 200
 súlyozott számtani közép II. 196
 súlypont II. 240, III. 35
 supremum I. 34
 sűrűség V. 107

szakadási hely II. 45
 elsőfajú ——— II. 46
 lényeges ——— II. 46
 másodfajú ——— II. 46
 megszüntethető ——— II. 45
 számosság I. 13
 kontinuum ——— I. 49
 megszámlálhatóan végtelen ——— I. 15
 számegyenes I. 40
 szektortartomány II. 231
 szélsőérték-hely II. 94
 "szemi faktoriális" II. 220
 szigoruan csökkenő II. 107
 szigoruan növekvő II. 107
 szimmetrikus I. 14
 szimplex táblázat III. 138
 szinguláris hely VII. 61
 szinguláris megoldás VIII. 35, 128
 szorzatsor IV. 31
 szögsebesség vektor III. 34, VI. 110
 szögtartó leképezés VII. 37
 szukcesszív approximáció VIII. 80
 szuperpozíció elve VIII. 155
 szükséges és elégséges feltétel I. 22
 szükséges feltétel I. 21

tagadás (negáció) I. 18
 tartomány V. 9, VII. 10
 —— átmérője V. 9
 —— határa V. 11
 —— felosztása V. 97
 —— lezárása V. 12
 tartományok távolsága V. 9
 távolság III. 28, V. 7
 Taylor-formula V. 65, VI. 13, 46
 Taylor-polinom IV. 49
 Taylor-sor IV. 49 VII. 58
 —— egyértelműsége IV. 50

téglalap V.14
 nyílt ——— V.14
 zárt ——— V.14
 téglalap szabály II.244
 téglalösszeg II.167
 tenzor III.165, VI.100
 térfogattorzulás mértéke VI.109
 térgörbe VI.15
 zárt ——— VI.15
 természetes alapu logaritmus függvény II.88
 természetes paraméter VI.21
 terület II.185
 test III.142
 tétel I.16
 torlódási pont I.66, 67, V.17, 18, VII.8
 torusz VI.66
 torzió VI.30
 totálisan differenciálható függvény VI.45
 totális differenciálhatóság V.38
 többes integrál V.104
 többszörös gyök II.16
 tömeg V.107
 tömegközéppont V.108
 trajektória VI.17, VIII.72, 135
 transzponált mátrix III.62
 trapéz szabály II.245
 tranzitív I.14, 15
 trichotom I.15
 trigonometrikus azonosságok II.22
 trigonometrikus függvény szerint haladó sor IV.69
 trigonometrikus polinom IV.64
 trigonometrikus sor IV.64
 triviális megoldás III.121, VIII.22
 valós euklideszi tér IV.83
 valós szám I.32, III.142
 valós számhalmaz axiómái I.32
 valós tengely III.42
 váltakozó előjelű sor IV.14
 Vandermonde-determináns III.100
 véges differenciák módszere VIII.57
 végtelen függványsorozat IV.34
 —— ——— konvergenciája IV.34
 végtelen komplex számsor VII.15
 —— ——— abszolút konvergenciája VII.16

————— feltételes konvergenciája VII.7
 végtelen lineáris kombináció IV.81
 végtelen numerikus sor IV.7
 ————— divergenciája IV.8
 ————— konvergenciája IV.8
 ————— összege IV.8
 végtelen numerikus sorozat IV.7
 vegyesszorzat III.21
 vektor III.7, 143, IV.81
 ————— abszolút értéke III.7
 ————— állása III.7
 ————— ellentettje III.9
 ————— hossza III.7
 ————— iránya III.7
 ————— kezdőpontja III.8
 ————— koordinátái III.24, 151
 ————— négyzete III.17
 ————— végpontja III.8
 vektoregyenlet III.30
 vektoreloszlás VI.114
 vektorális szorzat III.19
 vektorinvariáns VI.106
 vektormező VI.114
 vektorok III.7, IV.181
 kollineáris ——— III.7
 komplanáris ——— III.7, 28
 párhuzamos ——— III.7, 20
 ————— osztása III.24
 ————— szöge III.8, 149
 vektor-tér III.143
 vektorvonal VI.115
 Vietá-féle formulák II.56
 vonalelem VIII.9
 Weierstrass-kritérium IV.39, 44
 Weierstrass tétele II.51, V.33, VII.9
 Wronski-féle determináns VIII.23, 90

 zárt halmaz VII.9
 zárt tartomány V.12
 zérushely III.52
 zérusmátrix III.60
 zérusvektor III.72