



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:

Farkas Miklós

MATEMATIKA
III. kötet
LINEÁRIS ALGEBRA

Írta:

Farkas Miklós - Farkas Miklósné

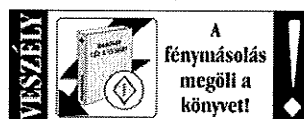


Műegyetemi Kiadó, 2006.

(Tizenharmadik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040798**



A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 18,2(A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 5782/06

AZ OLVASÓHOZ

Ez a jegyzet a Matematika c. jegyzetsorozat III. kötete. A sorozat a következő kötetekből áll:

- I. kötet. A matematika alapjai
- II. kötet. Egyváltozós valós függvények
- III. kötet. Lineáris algebra
- IV. kötet. Végtelen sorok
- V. kötet. Többváltozós valós függvények
- VI. kötet. Differenciálgeometria és vektoranalízis
- VII. kötet. Komplex függvények
- VIII. kötet. Differenciálegyenletek

A sorozat a szigorlati Matematika anyagot tartalmazza. A jegyzet azokhoz a gépészmérnök hallgatókhoz szól, akik a Matematika c. tárgy előadásait és gyakorlatait látogatják. Ezért nem tartalmaz hosszadalmas magyarázatokat, bevezető és illusztratív példákat stb., hanem "csupán" a tulajdonképpeni anyagot lehetőség szerint teljességre és maximális tömörségre törekedve. (A levelező hallgatók számára külön utmutató csatolkozik a sorozathoz.) A sorozatot a Matematika Példatár kötetel egészítik ki, amelyekben az olvasó nagy számú kidolgozott és kidolgozatlan példát és feladatot talál.

A kötet fejezetekre, a fejezetek pontokra vannak osztva, de a pontok számozása a fejezetektől függetlenül, folyamatosan történt. Az egyes pontokon belül külön-külön számozzuk a definíciókat, tételeket (segéd tételeket, következményeket), példákat, formulákat, ill. ábrákat. A példák részben a nehéz fogalmakat, tételeket világítják meg, részben "ellenpéldák" és nagyrészt az elméleti anyag szerves részét képezik. A hivatkozások egy kötetben belül az idézett definíció, tétel stb. számának megadásával, más kötet esetében, ezen kívül a hivatkozott kötet számának megadásával történik (mindkét esetben a fejezet megadása nélkül). Tehát pl. az I. Kötetben a "I. 13.2 Tétel" hivatkozás az I. Kötet 13. pont 2. tételét jelenti; a II. Kötetben ugyanerre a tételre ugy hivatkozunk: "I. I. Kötet, 13.2 Tétel". A bizonyítások végét pont és felkiáltójel jelzi: .!

Az Irodalomjegyzék elsősorban az anyag iránt mélyebben érdeklődő olvasónak ajánlott művek és nem az eredmények eredeti forrásainak címeit tartalmazza. Az Irodalomjegyzékben felsorolt művekre szögletes zárójelbe tett számokkal hivatkozunk.

Budapest, 1971. március

A szerkesztő

TARTALOMJEGYZÉK

Első fejezet	
Elemi vektoralgebra	7
1. A közösleges tér vektorai. Elemi műveletek vektorokkal	7
2. Vektorok szorzása	14
3. Bázis. Vektorok koordinátái	24
4. Koordináta-geometria és mechanikai alkalmazások ...	28
Második fejezet	
Komplex algebra	37
5. Komplex számok	37
6. Komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakja	45
7. Polinomok	52
Harmadik fejezet	
Mátrix algebra	59
8. Elemi műveletek mátrixokkal	59
9. A rendezett szám n -esek lineáris tere	71
10. Determinánsok	83
11. Az inverzmátrix	103
12. Mátrix rangja	107
Negyedik fejezet	
Lineáris egyenletrendszerek	115
13. Lineáris egyenletrendszer megoldásának létezése és egyértelműsége	115
14. A Gauss-féle megoldási módszer. A megoldáshalmaz szerkezete	118
15. A lineáris programozás alapfeladata	126

Ötödik fejezet

Lineáris operátorok az euklideszi térben	141
16. Az n -dimenziós lineáris, illetve euklideszi tér	141
17. Bázis. Bázistranszformációk	149
18. Lineáris operátorok. Sajátérték, sajátvektor	164
19. Szimmetrikus operátorok. Másodfoku alakok osztályo- zása	173
20. Lineáris operátorok felbontásai	192
Irodalomjegyzék	200
Tárgymutató	201

ELEMI VEKTORALGEBRA

1. A közönséges tér vektorai. Elemi műveletek vektorokkal

A mechanikai, ill. fizikai törvényekben fellépő mennyiségek jelentős része nem jellemezhető egyetlen valós szám megadásával. Az elmozdulás, a sebesség, az erő stb. olyan mennyiségek, amelyeket csak akkor tekinthetünk egyértelműen adottaknak, ha nagyságuk mellett irányuk is ismert. Az elmozdulás, például, olyan művelet, melynek során a tér egy tetszőlegesen kiválasztott pontja egy másik meghatározott pontba megy át. Valamely $\underline{x}$ elmozdulás megadásához meg kell adnunk annak "nagyságát" (egy nemnegatív számot), azt az "egyenes állást", amellyel párhuzamos az elmozdulás (egy adott állásu egyenest), végül az "irányt", amelyben az elmozdulás történik (az adott egyenesen a két lehetséges haladási irány közül az elmozdulásnak megfelelőt). A tér tetszőleges két rögzített sorrendben adott A és B pontja meghatároz egy és csak egy $\underline{x}$ elmozdulást, mely A-t B-be viszi át. Ezt az elmozdulást azután a tér bármely más pontjából kiindulva elvégezhetjük. Fordítva, a tér tetszőleges A pontja és egy tetszőleges $\underline{x}$ elmozdulás meghatároznak egy és csak egy B pontot, melybe $\underline{x}$ az A pontot átviszi. Két elmozdulás egymás utáni elvégzése újból elmozdulást eredményez, ez utóbbit az előbbi két elmozdulás "összegének" tekintjük. Az elmozdulás szemléletes ("intuitív") fogalmát szem előtt tartva fogunk a továbbiakban "vektorról" beszélni.

Azt mondjuk, hogy megadtuk az $\underline{x}$ vektort, ha adott $\underline{x}$ hossza (abszolút értéke): $|\underline{x}|$, állása és iránya, vagyis egy nem-negatív valós szám, egy egyenesállás és a kijelölt állásu egyeneseken a haladási irány. A vektorokat aláhúzott kis latin betűkkel jelöljük. Két vektor akkor és csak akkor egyenlő (ugyanaz), ha hosszuk, állásuk és irányuk megegyezik. Ha az $\underline{x}$ vektor hossza zérus, $|\underline{x}| = 0$, akkor $\underline{x}$ -et nullvektornak nevezzük és $\underline{0}$ -val jelöljük. Azt mondjuk, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok párhuzamosak (kollinéárisak), $\underline{a} \parallel \underline{b}$, ha állásuk megegyezik, illetve, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok komplanárisak, ha van olyan sík, mellyel mindhárom párhuzamos.

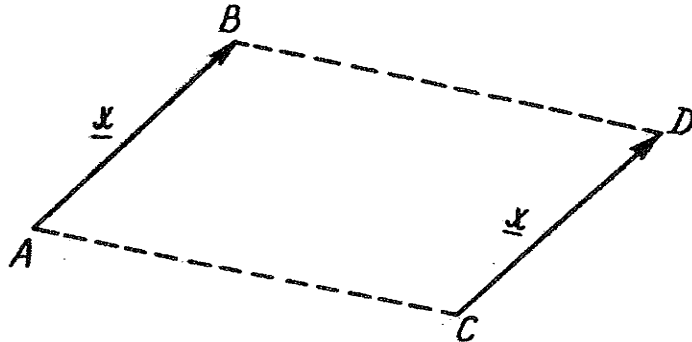
A tér tetszőleges két rögzített sorrendben adott A és B pontja meghatároz egy és csak egy $\underline{x} = \underline{AB}$ vektort, éspedig azt, amelynek hossza az AB szakasszal egyenlő, állása az A és B által meghatározott egyenes állásával megegyezik és iránya az A-ból B-be mutató irány. Az A és A pont megadása a $\underline{0} = \underline{AA}$ nullvektort határozza meg. A nullvektor állása határozatlan; a nullvektort bármely vektorral párhuzamosnak tekintjük. Az A és B pont által meghatározott $\underline{x} = \underline{AB}$ vektort az irányított AB egyenesszakasz-

szal ábrázolhatjuk. Ilyenkor A-t az $\underline{x}$ vektor kezdőpontjának, B-t végpontjának nevezzük és B-hez nyílhegyet rajzolunk.

A tér tetszőleges A pontja és a tetszőleges $\underline{x}$ vektor meghatároznak egy és csak egy B pontot, és pedig annak a szakasznak A-tól különböző végpontját, melyet úgy kapunk, hogy az A-n áthaladó $\underline{x}$ által meghatározott állású egyenesre $\underline{x}$ irányában rámérjük $|\underline{x}|$ -et. Nyilván $\underline{x} = \overrightarrow{AB}$.

Az AB irányított egyenesszakasz (mely az A ponthoz és az A, B által meghatározott egyeneshez van rögzítve) ábrázolja az $\overrightarrow{AB}$ vektort, de nem azonos vele. $\overrightarrow{AB}$ -t minden $\overrightarrow{AB}$ -ből párhuzamos eltolással nyert irányított egyenes szakasz ugyanúgy ábrázolja. Az előbb elmondottakból következik, hogy ha A, B és C tetszőleges pontok és $\underline{x} = \overrightarrow{AB}$, akkor a C és $\underline{x}$ által meghatározott D ponttal, melyre $\underline{x} = \overrightarrow{CD}$, az $\underline{x}$ vektor egy másik felírását kaptuk: $\underline{x} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Időnként szükség van arra, hogy a vektorokat ponthoz rögzítsük. Szokásos az előbbieket úgy fogalmazni, hogy a $\overrightarrow{CD}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ vektorból az $\underline{x}$ vektornak A-ból C-be történt párhuzamos eltolásával nyertük. Valójában természetesen $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ ugyanaz a vektor.

A paralelogramma elemi tulajdonságaiból adódik, hogy ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, akkor $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.



1.1. ábra

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok α szögét a következőképpen értelmezzük. Legyen A a tér tetszőleges pontja és $\underline{a} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{b} = \overrightarrow{AC}$, az $\alpha = \angle BAC$ -et a két vektor szögének nevezzük. Nyilvánvaló, hogy α nem függ A megválasztásától és $0 \leq \alpha \leq \pi$. Ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szöge $\frac{\pi}{2}$, akkor azt mondjuk, hogy $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egymásra merőlegesek (ortogonálisak). A nullvektor és bármely más vektor szöge határozatlan; a nullvektort bármely vektorra merőlegesnek tekintjük.

1.1 Definíció. Legyen adott az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor és legyen A tetszőleges pont, határozzuk meg $\underline{a}$ B, ill. a C pontot a következőképpen: $\underline{a} = \underline{AB}$, $\underline{b} = \underline{BC}$; az $\underline{AC}$ vektort $\underline{a}$ és $\underline{b}$ összegének nevezzük és $\underline{a} + \underline{b}$ -vel jelöljük.

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok összege független A megválasztásától. Legyen u. i. A' a tér egy tetszőleges pontja és határozzuk meg a B', ill. C' pontot a követzőképpen: $\underline{a} = \underline{A'B'}$, $\underline{b} = \underline{B'C'}$. Mivel $\underline{AB} = \underline{A'B'}$ és $\underline{BC} = \underline{B'C'}$, ezért $\underline{AA'} = \underline{BB'} = \underline{CC'}$, innen azonban következik, hogy $\underline{AC} = \underline{A'C'}$!

Az összeadandó vektorokat összetevőknek (komponenseknek), az összegvektort eredőnek (rezultánsnak) nevezzük. Az összeadás művelete a következő műveleti azonosságoknak tesz eleget (ezek az azonosságok az 1.1 Definíció egyszerű következményei).

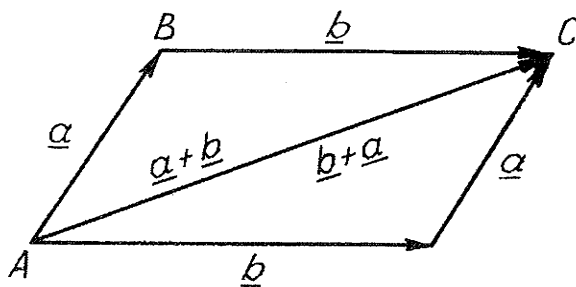
$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}, \quad (1.1)$$

vagyis az összeadás kommutatív művelet.

Az 1.2. ábrán bemutatott összeadási szabályt az erők összeadásának "paralelogramma szabály"-a néven ismerjük.

$$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}), \quad (1.2)$$

vagyis az összeadás asszociatív művelet.



1.2. ábra

E két szabály ismételt alkalmazásával adódik, hogy véges sok vektor eredője változatlan marad, ha az összetevőket felcseréljük vagy tetszőlegesen csoportosítjuk.

$$\underline{a} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{a} = \underline{a}, \quad (1.3)$$

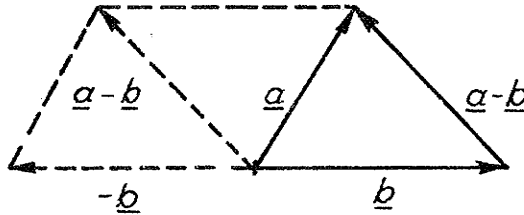
vagyis a vektor nem változik meg, ha a nullvektort adjuk hozzá.

Az $\underline{a}$ vektor ellentettjének nevezzük és $-\underline{a}$ -val jelöljük azt a vektort, melyre

$$\underline{a} + (-\underline{a}) = (-\underline{a}) + \underline{a} = \underline{0}. \quad (1.4)$$

Ha A tetszőleges pont és $\underline{a} = \overrightarrow{AB}$, akkor nyilván $-\underline{a} = \overrightarrow{BA}$. Látható, hogy $\underline{a}$ és $-\underline{a}$ hossza és állása megegyezik, iránya pedig ellentétes.

1.2 Definíció. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok különbségének nevezzük az $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$ vektort.



1.3. ábra

Amint ez az 1.3. ábrából látható az $\underline{a} - \underline{b}$ különbségvektort úgy szerkesztjük meg, hogy $\underline{a}$ -t és $\underline{b}$ -t közös kezdőpontból mérjük fel és megszerkesztjük a kivonandó végpontjából a kisebbítendő végpontjába mutató vektort.

1.3 Definíció. (Vektor szorzása "skalár" számmal.)

- Legyen $\lambda \geq 0$ valós szám és $\underline{a}$ adott vektor, akkor $\lambda \underline{a}$ az a vektor melynek hossza $\lambda |\underline{a}|$, állása megegyezik $\underline{a}$ állásával és iránya megegyezik $\underline{a}$ irányával.
- Legyen $\lambda < 0$ valós szám és $\underline{a}$ adott vektor, akkor $\lambda \underline{a}$ az a vektor melynek hossza $|\lambda| |\underline{a}|$, állása megegyezik $\underline{a}$ állásával és iránya ellentétes $\underline{a}$ irányával.

Az elvi különbség ellenére az eddig csak a valós számok szorzásakor használt "·" jelet most szám és vektor szorzásának jelölésére is használjuk. A $(-1) \cdot \underline{a}$ vektor nyilván $-\underline{a}$ -val, $\underline{a}$ ellentettjével egyenlő. Ha $|\underline{a}| \neq 0$, akkor az $\underline{a}^0 = \frac{1}{|\underline{a}|} \underline{a} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ vektort $\underline{a}$ egységvektorának nevezzük, mivel $\underline{a}$ -val egyenlő állásu, irányu és $|\underline{a}^0| = \left| \frac{1}{|\underline{a}|} \underline{a} \right| = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{a}|} = 1$.

Nyilvánvaló, hogy a $\lambda \underline{a}$ vektor akkor és csak akkor $\underline{0}$, ha $\lambda = 0$ és az $\underline{a} = \underline{0}$ feltételeknek legalább az egyike teljesül.

A skalárral való szorzás a következő műveleti azonosságoknak tesz eleget. (λ és μ tetszőleges valós számok, $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges vektorok):

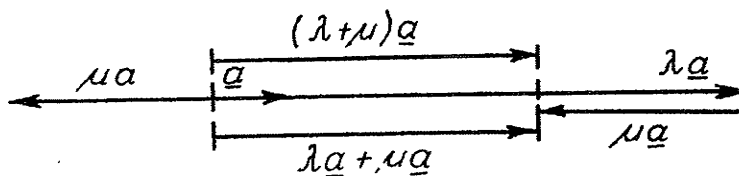
$$\lambda \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot \lambda \quad (1.5)$$

$$(\lambda \mu) \cdot \underline{a} = \lambda (\mu \cdot \underline{a}) = \lambda \mu \cdot \underline{a}, \quad (1.6)$$

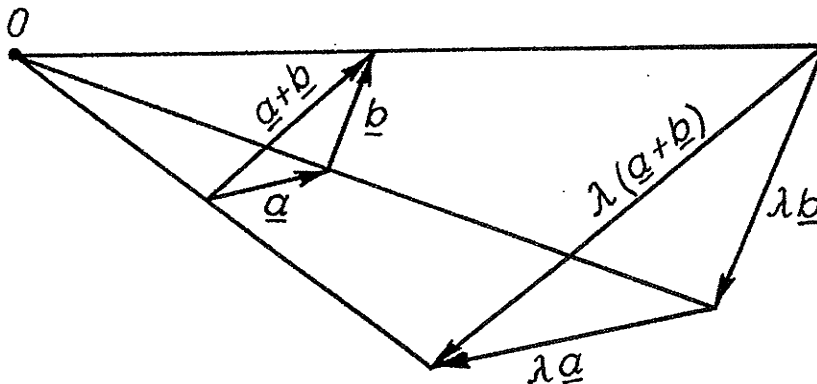
$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{a}, \quad (1.7)$$

$$\lambda (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}, \quad (1.8)$$

vagyis a skalárral való szorzás művelete a vektorok összeadására nézve disztributív. (1.5) egyszerű jelölésbeli megállapodás. (1.6) - (1.8) könnyen igazolható. Bizonyítás helyett l. az 1.4. és 1.5. ábrát. A következőkben néhány egyszerű, de fontos tételt igazolunk.



1.4. ábra



1.5. ábra

1.1 Tétel. Ha $\underline{a} \neq 0$ és $\lambda \underline{a} = \mu \underline{a}$, akkor $\lambda = \mu$.

Bizonyítás. Mivel $\lambda \underline{a}$ akkor és csak akkor egyenlő $\mu \underline{a}$ -val, ha különbségük $\underline{0}$, $\lambda \underline{a} - \mu \underline{a} = \underline{0}$, amiből (1.7) alapján $\lambda - \mu = 0$ következik.!

1.2 Tétel. $\underline{a}$ akkor és csak akkor párhuzamos $\underline{b}$ -vel ha egyikük a másik skalárszorosa.

Bizonyítás. A feltétel szükséges. Legyen $\underline{a} \parallel \underline{b}$ és pl. $\underline{b} \neq 0$. Ekkor irányuk két különböző esetének megfelelően

$$\underline{a}^0 = \underline{b}^0, \text{ vagy}$$

$$\underline{a}^0 = -\underline{b}^0 \text{ teljesül, ahol } \underline{a}^0, \text{ ill. } \underline{b}^0 \text{ az } \underline{a}, \text{ ill.}$$

$\underline{b}$ vektor egységvektora.

Az első esetben $\underline{a} = \underline{b}^0$ $|\underline{a}| = \frac{|\underline{b}|}{|\underline{b}|}$ $|\underline{a}| = \lambda |\underline{b}|$,

ahol $\lambda = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{b}|}$.

A második esetben $\underline{a} = \mu \underline{b}$, ahol $\mu = -\frac{|\underline{a}|}{|\underline{b}|}$.

Ha $\underline{b} = \underline{0}$, akkor $\underline{b} = \underline{0}$. $\underline{a}$ miatt igaz az állítás.

A feltétel elégséges. Tegyük fel, hogy van olyan λ szám, hogy $\underline{a} = \lambda \underline{b}$, vagy olyan μ szám, hogy $\underline{b} = \mu \underline{a}$. Az 1.3 Definíció szerint az esetek bármelyikében az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ azonos állású vektor, tehát $\underline{a} \parallel \underline{b}$.

Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges vektorok λ_1 és λ_2 pedig tetszőleges valós számok, akkor a $\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b}$ vektor nyilván $\underline{a}$ -val és $\underline{b}$ -vel komplanáris. Ennek megfordítását mondja ki a következő

1.3 Tétel

Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamos vektorok és a $\underline{v}$ tetszőleges, $\underline{a}$ -val és $\underline{b}$ -vel komplanáris vektor; akkor található egy és csak egy λ_1 λ_2 rendezett számpár, amellyel

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b},$$

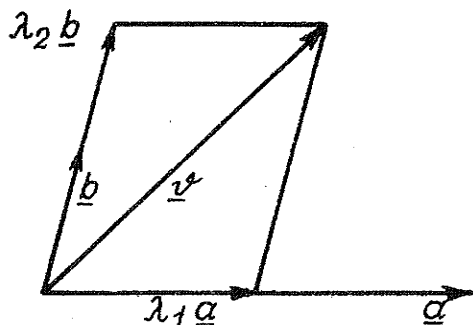
vagyis $\underline{v}$ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok egyértelmű "lineáris kombinációja".

Bizonyítás. λ_1 és λ_2 létezését vagyis egzisztenciáját geometriai szerkesztéssel mutatjuk meg úgy, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{v}$ vektorokat közös kezdőpontból felmérjük és $\underline{v}$ végpontján át párhuzamos egyeneseket húzunk az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ állásával. Mivel $\underline{a} \nparallel \underline{b}$ -vel, így egyikük sem $\underline{0}$, és az előbb húzott egyenesek metszik az $\underline{a}$, ill. $\underline{b}$ állású egyeneseket. Az 1.2 Tétel alapján a közös kezdőpontból a metszéspontokig húzott két vektor egyike $\lambda_1 \underline{a}$ -val másika pedig $\lambda_2 \underline{b}$ -vel jelölhető. A konstrukció miatt

(l. 1.6. ábra).

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b}.$$

Megmutatjuk indirekt módon a felbontás egyértelműségét (unicitását). Tegyük fel, hogy van μ_1 , μ_2 valós számpár, melyre



1.6. ábra

$\underline{v} = \mu_1 \underline{a} + \mu_2 \underline{b}$. Akkor $\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} = \mu_1 \underline{a} + \mu_2 \underline{b}$, vagy átrendezve $(\lambda_1 - \mu_1) \underline{a} = (\mu_2 - \lambda_2) \underline{b}$.

Ha pl. $\lambda_1 \neq \mu_1$, akkor $\underline{a} = \frac{\mu_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \mu_1} \underline{b}$, vagyis $\underline{a} \parallel \underline{b}$, ami ellentmondás. Hasonló ellentmondásra jutunk, ha $\lambda_2 \neq \mu_2$ -t tételezzük fel. Tehát $\lambda_1 = \mu_1$ és $\lambda_2 = \mu_2$!

1.4 Tétel. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ nem komplanáris vektorok és $\underline{v}$ tetszőleges vektor, akkor található egy és csak egy $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ rendezett számhármas, amelyre

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} \quad (1.9)$$

vagyis $\underline{v}$ az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok egyértelmű lineáris kombinációja.

Bizonyítás. Mivel $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ nem komplanárisok, egyikük sem nullvektor és nincs köztük két párhuzamos vektor sem. Legyen A a tér tetszőleges pontja és mérjük fel az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{v}$ vektorokat a közös A kezdőpontból. A $\underline{v}$ vektor C végpontján át húzzuk meg a $\underline{c}$ vektorral párhuzamos egyenest. Ez az egyenes az A ponton áthaladó $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által meghatározott síkot egyetlen pontban, a B pontban metszi (mivel $\underline{c}$ nem párhuzamos e síkkal). $\underline{v} = \underline{AB} + \underline{BC}$. Azonban $\underline{AB}$ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$

vektorokkal komplanáris, tehát az 1.3 Tétel alapján $\underline{AB} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b}$; $\underline{BC}$

pedig $\underline{c} \neq \underline{0}$ -val párhuzamos, tehát az 1.2 Tétel alapján $\underline{BC} = \lambda_3 \underline{c}$. Innen $\underline{v} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c}$ adódik (l. 1.7. ábra).

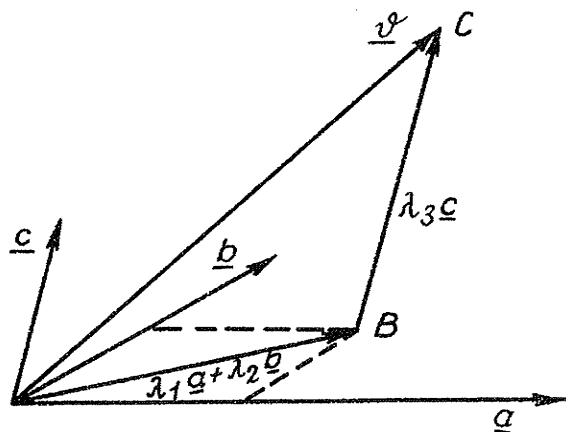
Tegyük fel most, hogy van μ_1, μ_2, μ_3 szám-

hármas, melyre $\underline{v} = \mu_1 \underline{a} + \mu_2 \underline{b} + \mu_3 \underline{c}$ ugyan-

csak fennáll. Akkor

$$\mu_1 \underline{a} + \mu_2 \underline{b} + \mu_3 \underline{c} =$$

$$\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c}, \text{ vagy átrendezve } (\mu_1 - \lambda_1) \underline{a} + (\mu_2 - \lambda_2) \underline{b} + (\mu_3 - \lambda_3) \underline{c} = \underline{0}.$$



1.7. ábra

Ha pl. $\mu_1 \neq \lambda_1$, akkor $\underline{a} = \frac{\mu_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \mu_1} \underline{b} + \frac{\mu_3 - \lambda_3}{\lambda_1 - \mu_1} \underline{c}$, vagyis $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$

komplanárisak ellentétben a feltevessel. Hasonló ellentmondásra vezet a $\mu_2 \neq \lambda_2$, ill. a $\mu_3 \neq \lambda_3$ feltevés. Ezek szerint $\mu_1 = \lambda_1$, $\mu_2 = \lambda_2$, $\mu_3 = \lambda_3$, vagyis az (1.9) felbontás egyértelmű!

Az 1.3, ill. 1.4 Tételből következik, hogy két nem párhuzamos, ill. három nem komplanáris vektor "kifeszíti" a síkot, ill. a teret, mivel lineáris kombinációjukként a sík, ill. a tér bármely vektora egyértelműen előállítható.

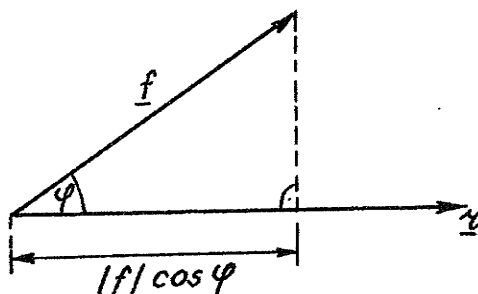
Két (vagy több) párhuzamos, három (vagy több) komplanáris, ill. négy (vagy több) tetszőleges vektort "lineárisan összefüggőknek" nevezünk, mivel az 1.2, 1.3, ill. 1.4 Tételek alapján legalább az egyik közülük kifejezhető, mint a többi lineáris kombinációja. Két nem párhuzamos, ill. három nem komplanáris vektor "lineárisan független", mivel egyik sem írható fel a másik, ill. a másik kettő lineáris kombinációjaként. V.ö. 9.1 Tétel.

2. Vektorok szorzása

Két vektor szorzatát kétféleképpen értelmezzük úgy, hogy a szorzás műveletének eredménye az egyik esetben skalár, a másikban vektor.

2.1 Példa. Ha a P pontban levő pontszerű testre az $\underline{f}$ vektorral adott erő hat és a pont az erő hatására, vagy annak ellenében az $\underline{r}$ vektorral adott elmozdulást végzi, akkor a végzett munka L "az erő nagyságának és az

erő irányában megtett utnak a szorzata", vagy másképpen "a megtett utnak és az erő elmozdulásirányu vetületének szorzata": $L = |\underline{f}| |\underline{r}| \cos \varphi$, ahol φ az $\underline{f}$ és $\underline{r}$ vektorok szöge (l. 2.1. ábra).



2.1. ábra

2.1 Definíció. Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges vektor; $\underline{a}$ és $\underline{b}$ skaláris szorzatának nevezzük a következő valós számot

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos \varphi,$$

ahol φ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szöge.

Ha az előbbi definícióban szereplő vektorok között nullvektor is szerepel, akkor a két vektor szöge nincs egyértelműen értelmezve. Ekkor azonban a definiáló egyenlőség jobb oldalán a nullvektor abszolút értéke, zérus is felép tényezőként, tehát a skaláris szorzat ebben az esetben is értelmezve van és értéke zérus.

2.1 Tétel. Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges vektorok; $\underline{a}$ felírható, mint egy $\underline{b}$ -vel párhuzamos és egy $\underline{b}$ -re merőleges vektor összege; ha $\underline{b} \neq \underline{0}$, az $\underline{a}$ vektor $\underline{b}$ -vel párhuzamos komponense

$$\underline{a}_p = (\underline{a} \cdot \underline{b}^0) \underline{b}^0,$$

ahol $\underline{b}^0$ a $\underline{b}$ vektor egységvektora.

Bizonyítás. Ha $\underline{b} = \underline{0}$, akkor az $\underline{a} = \underline{0} + \underline{a}$ triviális felbontás meg'elel, mivel $\underline{a}$ merőleges a nullvektorra. Ha $\underline{b} \neq \underline{0}$, legyen A a tér tetszőleges pontja, mérjük fel $\underline{a}$ -t és $\underline{b}$ -t a közös A kezdőpontból és jelöljük C-vel a végpontját. Vetítsük C-t az A-n áthaladó $\underline{b}$ irányú egyenesre és jelöljük a vetületi pontot B-vel. $\underline{a} = \underline{AB} + \underline{BC}$ a kívánt felbontás.

$$|\underline{AB}| = |\underline{a}| \cos \varphi = |\underline{a}| |\underline{b}^0| \cos \varphi = |\underline{a} \cdot \underline{b}^0|$$

ahol φ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szöge (l. 2.2. ábra). Az $\underline{AB}$ vektor $\underline{b}$ -vel, vagy ami ugyanaz, $\underline{b}^0$ -al egyállású, iránya pedig megegyezik, ill. ellentétes $\underline{b}^0$ irányával aszerint, amint φ hegyes, ill. tompaszög ($\cos \varphi > 0$, ill. $\cos \varphi < 0$,

a $\varphi = \frac{\pi}{2}$, vagyis a $\cos \varphi = 0$

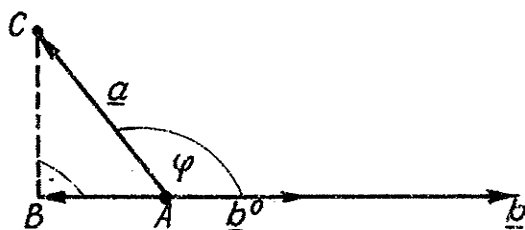
esetben a triviális felbontással az állítás igaz). Az első

esetben $\underline{AB} = |\underline{a} \cdot \underline{b}^0| \underline{b}^0 =$

$= (\underline{a} \cdot \underline{b}^0) \underline{b}^0$. A második esetben $\underline{AB} = |\underline{a} \cdot \underline{b}^0| (-\underline{b}^0) =$

$-(\underline{a} \cdot \underline{b}^0) (-\underline{b}^0) = (\underline{a} \cdot \underline{b}^0) \underline{b}^0$.

A skaláris szorzás művelete a következő műveleti azonosságoknak tesz eleget.



2.2. ábra

A 2.1 Definícióból azonnal következik, hogy

$$\underline{ab} = \underline{ba}, \quad (2.1)$$

vagyis a skaláris szorzás kommutatív.

Tetszőleges λ valós számra

$$(\lambda \underline{a})\underline{b} = \lambda (\underline{ab}). \quad (2.2)$$

Ezt a következőképpen láthatjuk be ($\cos(\underline{a}; \underline{b})$ stb. a megfelelő két vektor szögének cosinusát jelöli):

$$\begin{aligned} (\lambda \underline{a})\underline{b} &= |\lambda \underline{a}| |\underline{b}| \cos(\lambda \underline{a}; \underline{b}) = |\lambda| |\underline{a}| |\underline{b}| \cos(\lambda \underline{a}; \underline{b}) = \\ &= \begin{cases} \lambda |\underline{a}| |\underline{b}| \cos(\underline{a}; \underline{b}) = \lambda (\underline{ab}), & \text{ha } \lambda \geq 0, \\ \text{u.i. ekkor } \cos(\lambda \underline{a}; \underline{b}) = \cos(\underline{a}; \underline{b}). \\ -\lambda |\underline{a}| |\underline{b}| (-\cos(\underline{a}; \underline{b})) = \lambda (\underline{ab}), & \text{ha } \lambda \leq 0, \\ \text{u.i. ekkor } \cos(\lambda \underline{a}; \underline{b}) = -\cos(\underline{a}; \underline{b}). \end{cases} \end{aligned}$$

A skaláris szorzás disztributív az összeadásra nézve, vagyis

$$\underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{ab} + \underline{ac}. \quad (2.3)$$

Bizonyítás. Ha $\underline{a} = \underline{0}$, akkor (2.3) igaz, mivel (2.3) mindkét oldalán zérus áll. Ha $\underline{a} \neq \underline{0}$, legyen $\underline{a}^0$ az egységvektora. Először az

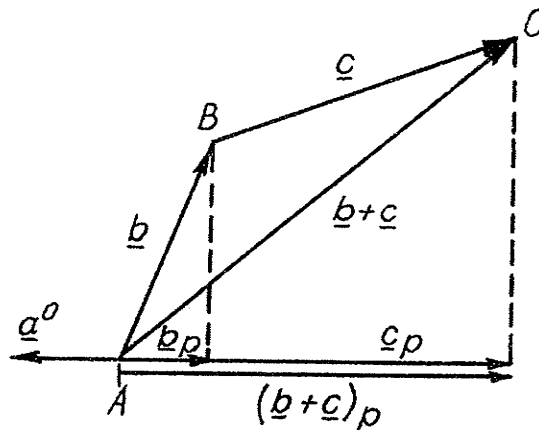
$$\underline{a}^0(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}^0\underline{b} + \underline{a}^0\underline{c} \quad (2.4)$$

egyenlőséget igazoljuk. Legyen A a tér tetszőleges pontja, $\underline{b} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{c} = \overrightarrow{BC}$, $\underline{b} + \underline{c} = \overrightarrow{AC}$ és vetítsük az ABC háromszöget az A ponton áthaladó $\underline{a}^0$ irányú egyenesre. A vetület vektorokra, vagyis a $\underline{b}$, $\underline{c}$, ill. $\underline{b} + \underline{c}$ vektorok $\underline{a}^0$ -al párhuzamos komponenseire

$$(\underline{b} + \underline{c})_p = \underline{b}_p + \underline{c}_p.$$

(l. 2.3. ábra). A 2.1 Tétel alapján ez az egyenlőség a következőképpen írható

$$(\underline{a}^0(\underline{b} + \underline{c}))\underline{a}^0 = (\underline{a}^0\underline{b})\underline{a}^0 + (\underline{a}^0\underline{c})\underline{a}^0 = (\underline{a}^0\underline{b} + \underline{a}^0\underline{c})\underline{a}^0,$$



2.3. ábra

ahol felhasználtuk (1.7)-et. Innen az 1.1 Tétel alapján (2.4) következik. Ha (2.4)-et $\underline{a}$ -kel megszorozzuk és minden tagban (2.2)-t használjuk (2.3)-at kapjuk. I

Matematikai indukcióval igazolható, hogy a (2.3) disztributív azonosság érvényes tetszőleges véges számú vektor összegére is.

Az a vektor önmagával képzett skaláris szorzatát a négyzetének nevezzük. A 2.1 Definícióból

$$\underline{a}^2 = \underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}|^2 \cos 0 = |\underline{a}|^2,$$

vagyis

$$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}^2}. \quad (2.5)$$

A 2.1 Definícióból látható, mivel minden φ -re $|\cos \varphi| \leq 1$, hogy tetszőleges $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorra fennáll az

$$|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq |\underline{a}| |\underline{b}| \quad (2.6)$$

egyenlőtlenség. Mivel a háromszög két oldalának összege mindig nagyobb vagy egyenlő, mint a harmadik oldal, az 1.2 ábrából látható, hogy minden $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorra

$$|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}| \quad (2.7)$$

ahonnan, ugyanugy mint I. Kötet (11.8) következik az

$$||\underline{a}| - |\underline{b}|| \leq |\underline{a} - \underline{b}| \quad (2.8)$$

egyenlőtlenség.

2.2 Tétel. Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk zérus.

Bizonyítás. Legyen $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$. Ha a vektorok egyike $\underline{0}$, akkor az minden vektorra, így a másikra is merőleges. Ha a vektorok egyike sem $\underline{0}$ és szögük φ , akkor $|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos \varphi = 0$ -ból következik, hogy $\cos \varphi = 0$, amiből $0 \leq \varphi \leq \pi$ miatt $\varphi = \frac{\pi}{2}$ adódik és így a két vektor egymásra merőleges. Ha most a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ feltevésből indulunk ki, akkor $\cos \varphi = 0$ és a 2.1 Definícióból $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.!

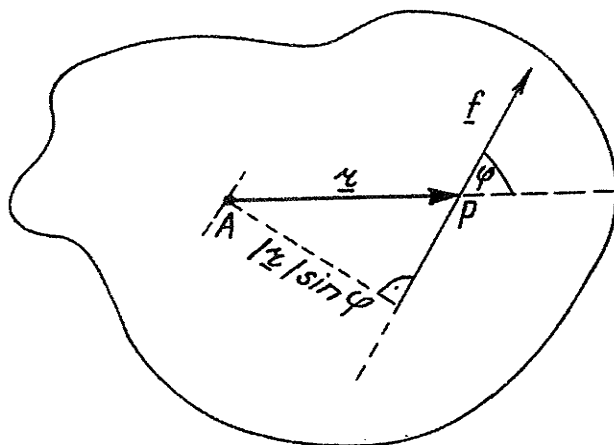
2.3 Tétel. Legyenek $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$ és $\underline{u}_3$ nem-komplanáris vektorok és $\underline{v}$ mindháromra merőleges vektor, akkor $\underline{v} = \underline{0}$.

Bizonyítás. Az 1.4 Tétel alapján $\underline{v} = \lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \lambda_3 \underline{u}_3$. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát skalárisan $\underline{v}$ -vel. (2.2), (2.3) és a 2.2 Tétel felhasználásával $\underline{v}^2 = \lambda_1 (\underline{u}_1 \cdot \underline{v}) + \lambda_2 (\underline{u}_2 \cdot \underline{v}) + \lambda_3 (\underline{u}_3 \cdot \underline{v}) = 0$, tehát $\underline{v} = \underline{0}$.!

2.2 Definíció. A közös kezdőponttól felmért nemkomplanáris $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ rendezett vektorhármas jobbrendszert alkot, ha $\underline{c}$ irányából nézve az $\underline{a}$ vektor iránya az óramutató járásával ellenkező és π szögnél kisebb forgatással a $\underline{b}$ vektor irányába forgatható.

Nyilvánvaló, hogy ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{a}$ valamint $\underline{c}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ is jobbrendszert alkot. $\underline{c}$, $\underline{b}$, $\underline{a}$; $\underline{b}$, $\underline{a}$, $\underline{c}$; valamint $\underline{a}$, $\underline{c}$, $\underline{b}$ viszont nem alkot jobbrendszert (balrendszert alkot).

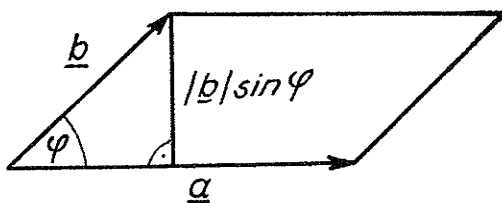
2.2 Példa. A mechanikában a forgatónyomatékot (statikai nyomatékot, elsőrendű nyomatékot) általánosan vektorként definiáljuk. Az A pontjában rögzített merev testre a P pontban támasdó $\underline{f}$ erő A-ra vonatkozó forgatónyomatékot gyakorol. A forgatónyomaték azzal az $\underline{m}$ vektorral jellemezhető, amelynek abszolút értéke $|\underline{f}| |\underline{r}| \sin \varphi$, ahol $\underline{AP} = \underline{r}$, φ az $\underline{r}$ és $\underline{f}$ vektorok szöge, és így $|\underline{r}| \sin \varphi$ az "erő karja". (l. 2.4. ábra.) $\underline{m}$ állása merőleges az $\underline{r}$ és $\underline{f}$ vektorok által kifeszített síkra, iránya olyan, hogy $\underline{r}$, $\underline{f}$, $\underline{m}$ jobbrendszert alkot ($\underline{m}$ irányának ilyen választásával $\underline{m}$ irányából nézve a test az erő hatására az óramutató járásával ellenkező, pozitív forgást végez). Ha a merev testre különböző pontokban különböző erők hatnak, akkor az így definiált forgatónyomaték-vektorok vektori összeadásával nyerjük az eredő forgatónyomatékot.



2.4. ábra

2.3 Definíció. Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges vektor és φ a szögük; az adott sorrendben vett $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorális szorzatának nevezzük azt a $\underline{c}$ vektort, amelynek hossza $|\underline{c}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \sin \varphi$, állása merőleges az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorra, iránya olyan, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobbrendszert alkot.

A vektorális szorzatot $\underline{a} \times \underline{b}$ -vel jelöljük (olv. $\underline{a}$ kereszt $\underline{b}$). Ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektort a közös P_0 kezdőpontból mérjük fel és $\underline{a} = \overrightarrow{P_0 P_1}$, $\underline{b} = \overrightarrow{P_0 P_2}$, $\underline{a} + \underline{b} = \overrightarrow{P_0 P_3}$, akkor azt mondjuk, hogy a $P_0 P_1 P_3 P_2$ csúcspontú paralelogrammát az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok határozzák meg, vagy feszítik ki. A vektorális szorzat abszolút értéke a tényező vektorok által meghatározott paralelogramma területének mérszáma (2.5. ábra). Ha a tényezők között a nullvektor szerepel, ill. ha a tényezők párhuzamosak, akkor φ , ill. a vektorális szorzat állása nincs egyértelműen meghatározva. Ez azonban nem okoz nehézséget, mivel mindkét esetben nullvektor a szorzat értéke.



2.5. ábra

2.3 Példa. Legyenek $\underline{a} \neq \underline{0}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$ tetszőleges vektorok és $\underline{a} \neq \underline{b}$. Tudjuk, hogy $\underline{a}$ felírható mint egy $\underline{b}$ -vel párhuzamos és egy $\underline{b}$ -re merőleges vektor összege (l. 2.1 Tétel). Igazoljuk, hogy ebben a felbontásban az $\underline{a}$ vektor $\underline{b}$ -re merőleges komponense

$$\underline{a}_m = (\underline{b}^0 \times \underline{a}) \times \underline{b}^0.$$

Tudjuk, hogy $\underline{a}_m = \underline{a} - \underline{a}_p = \underline{a} - (\underline{ab}^0)\underline{b}^0$. Ha α az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok szöge, akkor $|\underline{a}_m| = |\underline{a}| \sin \alpha$ és $|(\underline{b}^0 \times \underline{a}) \times \underline{b}^0| = |\underline{b}^0 \times \underline{a}| |\underline{b}^0| \sin \frac{\pi}{2} = |\underline{a}| \sin \alpha$, tehát $|\underline{a}_m| = |(\underline{b}^0 \times \underline{a}) \times \underline{b}^0|$. E két vektor állása is megegyezik, mert mindkettő $\underline{b}^0$ és $\underline{a}$ síkjában van (az utóbbi azért, mert $\underline{b}^0 \times \underline{a}$ -ra merőleges) és $\underline{b}^0$ -ra merőleges. $\underline{b}^0$, $\underline{a}$, $\underline{b}^0 \times \underline{a}$ jobbrendszert alkot, csakúgy mint $\underline{b}^0 \times \underline{a}$, $\underline{b}^0$, $\underline{a}$ is ("ciklikus" csere). $(\underline{b}^0 \times \underline{a})$, $\underline{b}^0$ és $(\underline{b}^0 \times \underline{a}) \times \underline{b}^0$ szintén jobbrendszert alkot, vagyis $\underline{a}$ és $(\underline{b}^0 \times \underline{a}) \times \underline{b}^0$ a $\underline{b}^0 \times \underline{a}$ és $\underline{b}^0$ által meghatározott síkállásból ugyanabba a féltérbe mutat. Mivel azonban $(\underline{b}^0 \times \underline{a}) \times \underline{b}^0$ e síkállásra merőleges, az $\underline{a}$ és a $(\underline{b}^0 \times \underline{a}) \times \underline{b}^0$ vektorok szöge kisebb mint $\frac{\pi}{2}$. Másrészt $\underline{a}$ és $\underline{a}_m$ szöge is kisebb, mint $\frac{\pi}{2}$ (az $\underline{a}_p + \underline{a}_m = \underline{a}$ összeadás elvégzésekor előálló derékszögű háromszög egyik hegyesszöge). Ezért $\underline{a}_m$ és $(\underline{b}^0 \times \underline{a}) \times \underline{b}^0$ szöge sem lehet π , akkor viszont zérus, tehát $\underline{a}_m = (\underline{b}^0 \times \underline{a}) \times \underline{b}^0$!

2.4 Tétel. Két vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha vektoriális szorzatuk $\underline{0}$.

Bizonyítás. Legyen $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$. Ha a vektorok egyike $\underline{0}$, akkor az minden vektorral, így a másikkal is párhuzamos. Ha egyik vektor sem $\underline{0}$, és szögük φ , akkor $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \varphi = 0$ -ból következik, hogy $\sin \varphi = 0$, amiből $0 \leq \varphi \leq \pi$ miatt $\varphi = 0$, vagy $\varphi = \pi$ adódik. Ha most a $\varphi = 0$, vagy a $\varphi = \pi$ feltevésből indulunk ki, akkor $\sin \varphi = 0$ és így $|\underline{a} \times \underline{b}| = 0$!

A vektoriális szorzás művelete a következő műveleti azonosságoknak tesz eleget.

A 2.3 Definícióból azonnal következik, hogy

$$\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a}), \quad (2.9)$$

vagyis a vektoriális szorzás nem kommutatív.

Tetszőleges λ valós számra

$$\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda \underline{b}). \quad (2.10)$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló az állítás ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ párhuzamosak, vagy ha $\lambda = 0$. Ha $\underline{a}$ nem párhuzamos $\underline{b}$ -vel, akkor elegendő a $\lambda > 0$, ill. a $\lambda = -1$ skalárokkal elvégezni a bizonyítást, mert ha $\lambda < 0$, akkor úgy szorozunk, hogy az egyik vektortényezőt először $|\lambda|$ -kel majd -1 -gyel szorozzuk. Ha $\lambda > 0$, akkor $\underline{a}$ és $\lambda \underline{a}$, ill. $\underline{b}$ és $\lambda \underline{b}$ egyirányú vektorok és így a 2.3 Definícióból (2.10) következik. Ha $\lambda = -1$ és $\underline{a}$, $\underline{b}$ szögét α -val jelöljük, akkor $(-\underline{a}) \times \underline{b}$ és $\underline{a} \times (-\underline{b})$ hossza és állása, $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ miatt, az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor hosszával és állásával megegyezik, iránya viszont ezzel ellentétes, vagyis

$$-(\underline{a} \times \underline{b}) = (-\underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (-\underline{b}).$$

Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ tetszőleges vektorok, az

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$$

számot az adott sorrendben vett $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok vegyesszorzatának nevezzük és $(\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c})$ -vel jelöljük. Ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorokat közös P_0 kezdőpontból mérjük fel és $\underline{a} = \underline{P_0 P_1}$, $\underline{b} = \underline{P_0 P_2}$, $\underline{c} = \underline{P_0 P_3}$, akkor az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által meghatározott, vagy kifeszített paralelepipedonnak nevezzük azt a paralelepipedont, melynek P_0 csúcspontjába összefutó három éle $\underline{P_0 P_1}$, $\underline{P_0 P_2}$ és $\underline{P_0 P_3}$. A 2.3 Definícióból és a 2.1 Tételből következik, hogy a vegyeszorzat abszolút értéke a tényező vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata, u.i. $|(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}| = |\underline{a} \times \underline{b}| |(\underline{a} \times \underline{b})^0 \cdot \underline{c}|$ és itt $|\underline{a} \times \underline{b}|$ a paralelepipedon egyik lapjának területe, $|(\underline{a} \times \underline{b})^0 \cdot \underline{c}|$ pedig az e laphoz tartozó magasság.

Az előbbiek következménye a

2.5 Tétel. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok akkor és csak akkor komplanárisak, ha vegyeszorzatuk zérus.

Bizonyítás. Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egysiku, akkor az általuk meghatározott paralelepipedon elfajuló és köbtartalma 0, tehát $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = 0$. Ha $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = 0$ és $\underline{a} \times \underline{b} \neq 0$, akkor a 2.4 Tétel szerint $\underline{a}$ párhuzamos $\underline{b}$ -vel tehát $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egysiku vektorok, ha $\underline{a} \times \underline{b} \neq 0$, akkor a 2.2 Tétel felhasználásával $\underline{c}$ merőleges $\underline{a} \times \underline{b}$ -re, tehát párhuzamos az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által meghatározott síkkal.

Érvényes a felcserélési tételnek nevezett azonosság:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}). \quad (2.11)$$

Bizonyítás. (2.11) jobb oldalának abszolút értéke (csakugy mint a bal oldalé) az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata, mert $|\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})| = |\underline{b} \times \underline{c}| |(\underline{b} \times \underline{c})^0 \cdot \underline{a}|$ és $|\underline{b} \times \underline{c}|$ a paralelepipedon egyik lapjának területe, $|(\underline{b} \times \underline{c})^0 \cdot \underline{a}|$ pedig az e laphoz tartozó magasság. Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobbrendszer alkot, akkor egyrészt $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ szöge hegyes-

szög és $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ előjele pozitív, másrészt $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{a}$ is jobbrendszert alkot és ezért $(\underline{b} \times \underline{c}) \cdot \underline{a}$ előjele is pozitív. Ellenkező esetben (ha a vektorok balrandszert alkotnak), (2.11) mindkét oldalának előjele negatív.!

(2.11) bizonyításában követett módon igazolható, hogy

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot \underline{b}. \quad (2.12)$$

(2.11) és (2.12) kimondja azt, hogy a vegyesszorzat nem változik, ha a tényezőket "ciklikusan" cseréljük fel, vagyis

$$(\underline{a} \underline{b} \underline{c}) = (\underline{b} \underline{c} \underline{a}) = (\underline{c} \underline{a} \underline{b}), \quad (2.13)$$

és a vegyesszorzat -1-szeresére változik ha a tényezők ciklusát megváltoztatjuk, vagyis

$$(\underline{c} \underline{b} \underline{a}) = (\underline{b} \underline{a} \underline{c}) = (\underline{a} \underline{c} \underline{b}) = -(\underline{a} \underline{b} \underline{c}). \quad (2.14)$$

A vektoriális szorzás disztributív az összeadásra nézve, vagyis

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}. \quad (2.15)$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a (2.15) átrendezésével képezett $\underline{v} = \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) - (\underline{a} \times \underline{b}) - (\underline{a} \times \underline{c})$ vektor $\underline{0}$. Legyen u. i. $\underline{u}$ tetszőleges vektor; (2.3) és (2.13) felhasználásával

$$\begin{aligned} \underline{v} \cdot \underline{u} &= [\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c})] \underline{u} - (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{u} - (\underline{a} \times \underline{c}) \underline{u} = \\ &= (\underline{u} \times \underline{a}) (\underline{b} + \underline{c}) - (\underline{u} \times \underline{a}) \underline{b} - (\underline{u} \times \underline{a}) \underline{c} = 0 \end{aligned}$$

adódik. Mivel $\underline{v}$ minden $\underline{u}$ vektorra merőleges, a 2.3 Tételből következik, hogy $\underline{v} = \underline{0}$.!

Érvényes a kifejtési tételnek nevezett azonosság:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a}. \quad (2.16)$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a (2.16) átrendezésével képezett $\underline{v} = (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} - (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} + (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a}$ vektor $\underline{0}$. Ha $\underline{a}$ párhuzamos $\underline{b}$ -vel, akkor az állítás nyilvánvaló mert az $\underline{a} = a^0 \underline{a}$ ill. $\underline{b} = \pm a^0 \underline{a}$ vektorok (2.16)-ba való helyettesítése után mindkét oldalon $\underline{0}$ áll. Ha $\underline{a}$ nem párhuzamos $\underline{b}$ -vel, akkor a 2.3 Tételben levő $\underline{u}_k$ vektorokat válasszuk a következőképpen:

$$\underline{u}_1 = \underline{a}, \quad \underline{u}_2 = \underline{b}, \quad \text{és} \quad \underline{u}_3 = \underline{a} \times \underline{b},$$

majd igazoljuk, hogy

$$\underline{v} \cdot \underline{a} = \underline{v} \cdot \underline{b} = \underline{v} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = 0.$$

(2.13), (2.2) és (2.3) alapján a skaláris szorzatokat átalakítva, majd a 2.3 Példa eredményét felhasználva

$$\begin{aligned}\underline{v} \cdot \underline{a} &= ((\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c}) - (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} \cdot \underline{a} + (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a} \cdot \underline{a} = \\ &= (\underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{b})) \underline{c} - (\underline{b} \cdot \underline{a}) (\underline{a} \cdot \underline{c}) + \underline{a}^2 (\underline{b} \cdot \underline{c}) = \\ &= |\underline{a}|^2 \left[\underline{a}^0 \times (\underline{a}^0 \times \underline{b}) - (\underline{b} \underline{a}^0) \underline{a}^0 + \underline{b} \right] \cdot \underline{c} = \\ &= |\underline{a}|^2 \left\{ \underline{b} - [(\underline{a}^0 \underline{b}) \underline{a}^0 + (\underline{a}^0 \times \underline{b}) \times \underline{a}^0] \right\} \cdot \underline{c} = \\ &= |\underline{a}|^2 [\underline{b} - \underline{b}] \cdot \underline{c} = 0;\end{aligned}$$

analóg módon

$$\begin{aligned}\underline{v} \cdot \underline{b} &= ((\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c}) - (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} \cdot \underline{b} + (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a} \cdot \underline{b} = \\ &= |\underline{b}|^2 \left[\underline{b}^0 \times (\underline{a} \times \underline{b}^0) - \underline{a} + \underline{b}^0 (\underline{a} \cdot \underline{b}^0) \right] \cdot \underline{c} = \\ &= |\underline{b}|^2 \left[(\underline{a} \cdot \underline{b}^0) \underline{b}^0 + (\underline{b}^0 \times \underline{a}) \times \underline{b}^0 - \underline{a} \right] \cdot \underline{c} = 0;\end{aligned}$$

illetve a 2.5 Tétel alapján

$$\begin{aligned}\underline{v}(\underline{a} \times \underline{b}) &= ((\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c} (\underline{a} \times \underline{b})) - (\underline{a} \cdot \underline{c}) (\underline{b} \underline{a} \underline{b}) + \\ &+ (\underline{b} \cdot \underline{c}) (\underline{a} \underline{a} \underline{b}) = 0.\end{aligned}$$

Ezekután a 2.3 Tételből állításunk következik.!

A kifejtési tétel másik alakja:

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c} \quad (2.17)$$

(2.17) igazolása a (2.16) bizonyításában követett módon, vagy (2.16) felhasználásával a következő megfontolással történhet:

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = -(\underline{b} \times \underline{c}) \times \underline{a},$$

ezért (2.16) $\underline{a}$ vektora helyébe $\underline{b}$ -t, $\underline{b}$ vektora helyébe $\underline{c}$ -t, $\underline{c}$ vektora helyébe $\underline{a}$ -t helyettesítve:

$$\begin{aligned}-(\underline{b} \times \underline{c}) \times \underline{a} &= -[(\underline{b} \underline{a}) \underline{c} - (\underline{c} \underline{a}) \underline{b}] = \\ &= (\underline{c} \underline{a}) \underline{b} - (\underline{b} \underline{a}) \underline{c},\end{aligned}$$

adódik, ami ugyanaz mint (2.17).

Felhívjuk még a figyelmet arra, hogy vektorok körében az osztást nem értelmeztük és nem is tudjuk értelmezni. A valós számok körében a zérustól különböző számmal való osztás egyértelmű elvégezhetősége más-képpen kifejezve azt jelenti, hogy az $ax = b$ egyenletnek tetszőleges b esetén van egy és csak egy megoldása, ha $a \neq 0$; éppen ez a megoldás az $x = \frac{b}{a}$ hányados. Speciálisan $b = 0$ esetén $ax = 0$, $a \neq 0$ -ból $x = 0$ következik.

Ez azonban vektoroknak sem skaláris, sem pedig vektoriális szorzatára nem igaz: $\underline{a} \cdot \underline{x} = 0$, ill. $\underline{a} \times \underline{x} = \underline{0}$, $\underline{a} \neq \underline{0}$ -ból nem következik egyértelműen $\underline{x} = \underline{0}$, u.i. az első egyenletet minden $\underline{a}$ -ra merőleges, a másodikat minden $\underline{a}$ -val párhuzamos $\underline{x}$ vektor kielégíti.

3. Bázis. Vektorok koordinátái

A vektorokkal való műveletek gyakorlati elvégzését az teszi lehetővé és könnyíté, hogy az 1.4 Tétel alapján egy-egyértelmű megfeleltetés léte-síthető a vektorok halmaza és a rendezett számhármasok halmaza között.

3.1 Definíció. Ha az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ vektorok nem komplanárisak, akkor azt mondjuk, hogy bázist alkotnak a térben; $\underline{e}_1$ -et, $\underline{e}_2$ -t és $\underline{e}_3$ -at a bázis vektorainak, röviden bázisvektoroknak nevezzük.

Ha $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázist alkotnak, akkor az 1.4 Tétel szerint tetszőleges $\underline{v}$ vektor pontosan egyféleképpen írható fel

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3 \quad (3.1)$$

alakban. Rögzített bázis esetén tehát egy-egyértelmű a megfeleltetés a vektorok, ill. a rendezett számhármasok halmaza között, ha minden $\underline{v}$ vektor-hoz a (3.1)-ben szereplő $[v_1, v_2, v_3]$ rendezett számhármatot rendeljük.

v_1 -et, v_2 -t és v_3 -at a $\underline{v}$ vektor koordinátáinak nevezzük. $\underline{v}$ és koordinátái összetartozását $\underline{v} \cong [v_1, v_2, v_3]$ -mal jelöljük.

3.2 Definíció. Ha $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázist alkotnak és páronként merőlegesek, akkor az általuk alkotott bázist ortogonálisnak (merőlegesnek) nevezzük; ha ezen kívül $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ és $\underline{e}_3$ egységvektorok, akkor az általuk alkotott bázist ortonormálnak nevezzük.

Ebben a fejezetben a továbbiakban feltételezzük, hogy bevezettük és lerögzítettük az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ortonormált bázist és azt, hogy az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisvektorok jobbrendszert alkotnak. E feltevések mellett $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ -at rendre $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ -val is jelöljük. Az ortonormált, jobbrendszert alkotó $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázist a következő egyenlőségek jellemzik:

$$\underline{i}^2 = \underline{j}^2 = \underline{k}^2 = 1, \quad (3.2)$$

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{i} = 0, \quad (3.3)$$

$$\underline{k} = \underline{i} \times \underline{j}, \quad \underline{i} = \underline{j} \times \underline{k}, \quad \underline{j} = \underline{k} \times \underline{i}, \quad (3.4)$$

$$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = 0. \quad (3.5)$$

Ha $\underline{v}$ tetszőleges vektor és a

$$\underline{v} = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}$$

egyenlőséget rendre megszorozzuk skalárisan $\underline{i}$ -vel, $\underline{j}$ -vel, ill. $\underline{k}$ -val (3.2) és (3.3) felhasználásával a koordináták következő kifejezéseikhez jutunk:

$$\begin{aligned} v_1 &= \underline{v} \cdot \underline{i} = |\underline{v}| \cos \alpha \\ v_2 &= \underline{v} \cdot \underline{j} = |\underline{v}| \cos \beta \\ v_3 &= \underline{v} \cdot \underline{k} = |\underline{v}| \cos \gamma \end{aligned} \quad (3.6)$$

ahol α, β ill. γ $\underline{v}$ -nek és $\underline{i}$ -nek, $\underline{j}$ -nek, ill. $\underline{k}$ -nak a szöge. Ha $\underline{v} \neq 0$, akkor képezhető $\underline{v}^0 = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$ egységvektora. $\underline{v}^0$ koordinátáit v_1^0 -et, v_2^0 -t és v_3^0 -at $\underline{v}$ iránykoszinuszainak nevezzük, mivel (3.6)-ból nyilván

$$v_1^0 = \cos \alpha, \quad v_2^0 = \cos \beta, \quad v_3^0 = \cos \gamma. \quad (3.7)$$

A következőkben megmutatjuk, hogyan kell az 1. és 2. pontban értelmezett műveleteket elvégezni, ha a vektorok koordinátáikkal adottak. Legyenek $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ tetszőleges vektorok, λ tetszőleges skalár szám és

$$\underline{a} \cong [a_1, a_2, a_3], \quad \underline{b} \cong [b_1, b_2, b_3], \quad \underline{c} \cong [c_1, c_2, c_3].$$

$$\begin{aligned}\underline{a} \pm \underline{b} &= (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}) \pm (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}) = \\ &= (a_1 \pm b_1) \underline{i} + (a_2 \pm b_2) \underline{j} + (a_3 \pm b_3) \underline{k},\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk (1.2)-t és (1.7)-et. Azt kaptuk, hogy

$$\underline{a} \pm \underline{b} \cong [a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3]. \quad (2.8)$$

$$\lambda \underline{a} = \lambda (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}) = (\lambda a_1) \underline{i} + (\lambda a_2) \underline{j} + (\lambda a_3) \underline{k},$$

ahol felhasználtuk (1.6)-at és (1.6)-ot. Azt kaptuk, hogy

$$\lambda \underline{a} \cong [\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3]. \quad (3.9)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}) \cdot (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad (3.10)$$

ahol felhasználtuk a skaláris szorzás (2.2) és (2.1) tulajdonságait valamint (3.2)-t és (3.3)-at. Speciálisan

$$\underline{a}^2 = |\underline{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

vagyis

$$|\underline{a}| = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}. \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\underline{b} \times \underline{c} &= (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}) \times (c_1 \underline{i} + c_2 \underline{j} + c_3 \underline{k}) = \\ &= (b_2 c_3 - b_3 c_2) \underline{i} - (b_1 c_3 - b_3 c_1) \underline{j} + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \underline{k},\end{aligned} \quad (3.12)$$

ahol felhasználtuk a vektoriális szorzás (2.15) disztributív, (2.9) és (2.10) tulajdonságát, valamint (3.4)-et és (3.5)-öt. (3.12)-öt az ún. "determináns" írásmód teszi jobban áttekinthetővé és megjegyezhetővé:

$$\underline{b} \times \underline{c} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (3.13)$$

ahol a jobb oldalon szereplő "determinánst" a következőképpen értelmezzük

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

és itt

$$\begin{vmatrix} b_i & b_k \\ c_i & c_k \end{vmatrix} = b_i c_k - b_k c_i; \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

definiálja a szereplő szimbólumok, un. "másodrendű determinánsok" értékét.

Az $(\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c})$ vegyes szorzat kiszámításához írjuk azt az $(\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}) = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$ alakba. Így (3.14) és (3.10) felhasználásával

$$(\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix},$$

vagy

$$(\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (3.16)$$

ahol a jobb oldalon álló "harmadrendű determináns" értelmezése a következő:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad (3.17)$$

Megjegyezzük, hogy a 2.5 Tétel most a következőképpen is megfogalmazható: annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$, $[c_1, c_2, c_3]$ vektorok lineárisan összefüggők (komplanárisak) legyenek, a belőlük alkotott (3.17) determináns nullicitása; vagy másképpen: annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$, $[c_1, c_2, c_3]$ vektorok lineárisan függetlenek legyenek (ne legyenek komplanárisak), a belőlük alkotott (3.17) determináns értékének zérustól való különbözősége.

Megjegyezzük még, hogy ha e_1, e_2 nem párhuzamos vektorok, akkor bázisnak tekinthetők "az általuk meghatározott síkban". Segítségükkel az 1.3 Tétel alapján egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető az e_1, e_2 által meghatározott síkállással párhuzamos vektorok, ill. a rendezett számpárok halmaza között.

4. Koordináta-geometriai és mechanikai alkalmazások

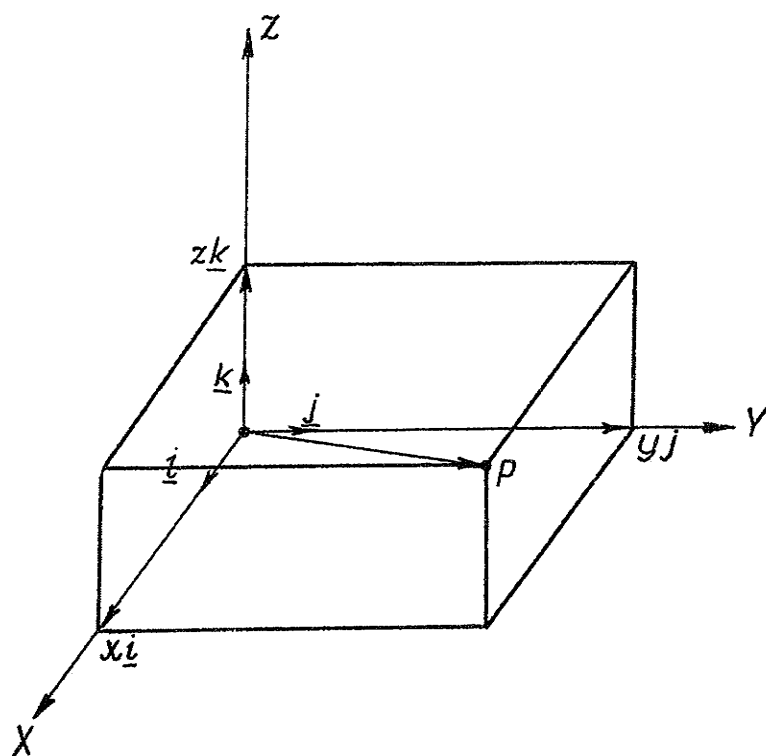
Ha lerögzítjük a tér egy O pontját és az i, j, k bázist, a vektorok halmaza és a pontok halmaza, ill. a rendezett számhármak halmaza és a pontok halmaza között egy-egyértelmű megfeleltetést tudunk létesíteni a következőképpen: a tér tetszőleges P pontjához hozzárendeljük az $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ vektort, ill. ha $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$, a P ponthoz az (x, y, z) rendezett számhármast. O -t origónak, az O ponton áthaladó $\underline{i}, \underline{j}$, ill. $\underline{k}$ irányu irányított egyenest x -, y -, ill. z -tengelynek, $\underline{r}$ -et a P pont helyvektorának, x -et, y -et és z -t P koordinátának nevezzük és azt mondjuk, hogy a térben Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert vezetünk be (4.1. ábra).

A ponthoz és helyvektorához közös rendezett számhármak tartozik, ami hasznos a feladatok megoldásakor. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a helyvektorok és a pontok azonosak lennének. Az elvi különbséget mutatja az az egyszerű tény is, hogy amíg a helyvektorok összegét és különbségét értelmezzük, addig pontokról nem beszélünk.

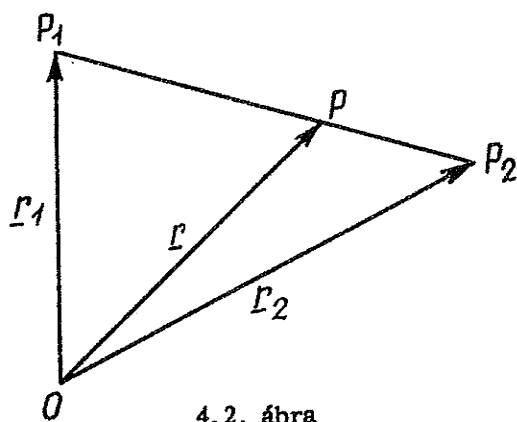
A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontok d távolsága a P_1P_2 szakasz hossza; ha $\underline{r}_1$ a P_1 pont és $\underline{r}_2$ a P_2 pont helyvektora, $d = |\underline{r}_2 - \underline{r}_1| = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|$.

(3.8) és (3.11) figyelembe vételével

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (4.1)$$



4.1. ábra



4.2. ábra

4.1 Példa. Adott a P_1 és P_2 pontok által meghatározott szakasz. Keressük azt a P pontot, melyre $\frac{P_1 P}{P_2 P} = \frac{m}{n}$, vagyis amely a $P_1 P_2$ szakaszt adott arányban osztja, m és n pozitív számok. $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$, és $\underline{r}$ jelölje rendre a P_1 , P_2 és P pontok helyvektorait (4.2. ábra).

Legyen

$$\overrightarrow{P_1 P} = \underline{a} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{P P_2} = \underline{b}.$$

Mivel

$$\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{a} \quad \text{és} \quad \underline{a} = (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)^0 |\underline{a}|,$$

továbbá

$$\frac{|\underline{a}|}{|\underline{a}|} + \frac{|\underline{b}|}{|\underline{a}|} = 1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m},$$

így

$$|\underline{a}| + |\underline{b}| = |\underline{r}_2 - \underline{r}_1|$$

miatt

$$|\underline{a}| = \frac{m}{m+n} |\underline{r}_2 - \underline{r}_1|,$$

tehát

$$\underline{a} = \frac{m}{m+n} (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \quad \text{és} \quad \underline{r} = \underline{r}_1 + \frac{m}{m+n} (\underline{r}_2 - \underline{r}_1),$$

amit átrendezve

$$\underline{r} = \frac{n \underline{r}_1 + m \underline{r}_2}{m+n} \quad (4.2)$$

adódik.

A továbbiakban egyenes és sík egyenleteivel foglalkozunk.

Az olyan összefüggést, amelyet az alakzat pontjainak helyvektorai kielégítenek és más pontok helyvektorai nem, az alakzat vektoregyenletének nevezzük. Ha a helyvektorokat koordinátáikkal adjuk meg, a vektoregyenletből az alakzat egyenletét vagy egyenletrendszerét kapjuk. Az alakzat egyenletében szereplő változó helyvektort, vagy koordinátákat a "futó pont" helyvektorának, vagy koordinátáinak nevezzük.

Valamely síkot egyértelműen meghatadunk egy pontjával, és egy a

síkra merőleges $\underline{0}$ -tól különböző vektorral. Az utóbbit a sík normálvektorának nevezzük.

4.1 Tétel. A P_0 ponton áthaladó $\underline{n}$ normálvektoru sík vektoregyenlete

$$\underline{n}(\underline{r} - \underline{r}_0) = 0, \quad (4.3)$$

ahol $\underline{r}_0$ a P_0 pont és $\underline{r}$ a futó pont helyvektora.

Bizonyítás. A (4.3) egyenletet azok és csak azok az $\underline{r}$ helyvektorok elégítik ki, melyek a sík pontjainak helyvektorai, mert egyrészt ha $\underline{r}$ a sík egy tetszőleges P pontjának helyvektora, akkor $\underline{r} - \underline{r}_0$ párhuzamos a síkkal, merőleges $\underline{n}$ -re, a 2.2 Tétel szerint tehát $(\underline{r} - \underline{r}_0) \underline{n} = 0$; másrészt abból, hogy $(\underline{r} - \underline{r}_0) \underline{n} = 0$ következik, hogy $(\underline{r} - \underline{r}_0) \perp \underline{n}$, $(\underline{r} - \underline{r}_0)$ párhuzamos a síkkal és mivel $\underline{r}_0$ a sík egy pontjának helyvektora, az $\underline{r} = \underline{r}_0 + (\underline{r} - \underline{r}_0)$ helyvektoru pont is a síkban van.!

A sík (4.3) vektoregyenletét $|\underline{n}|$ -kel osztva a sík egyenletének Hesse-féle normálalakját kapjuk:

$$(\underline{r} - \underline{r}_0) \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = 0. \quad (4.4)$$

Ez a képlet gyakorlatilag azért jelentős, mert a bal oldalán álló kifejezés megadja tetszőleges $\underline{r}$ helyvektoru P pontnak a síktól mért előjeles távolságát

$$(\underline{r} - \underline{r}_0) \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = \pm d \quad (4.5)$$

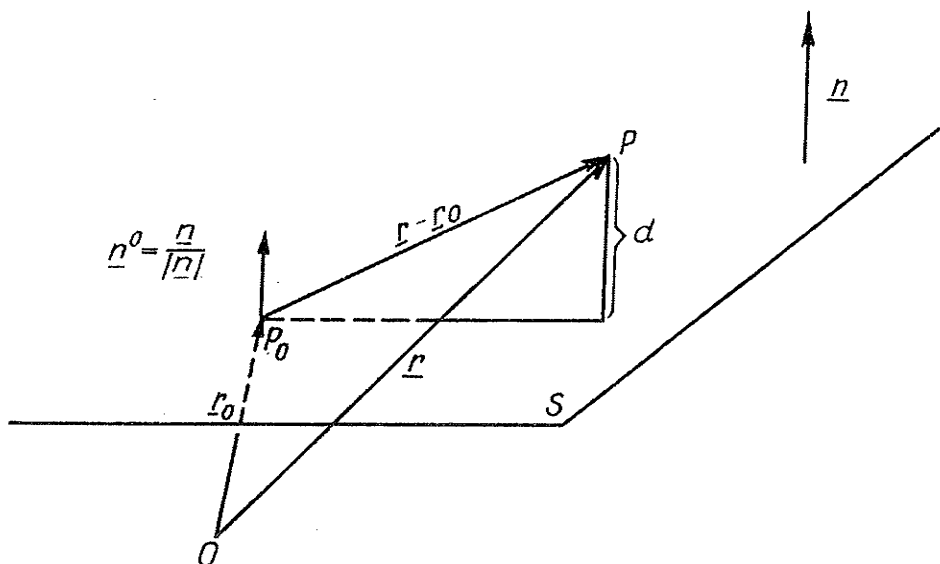
ahol d a P pont és a sík távolsága. $d = 0$, ha a P pont a síkon van; az előjel +, ill. - aszerint, amint P abban a féltérben van, melybe $\underline{n}$ mutat, ill. a másikon (l. 4.3. ábra).

4.2 Tétel. A sík egyenletének általános alakja

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (4.6)$$

ahol a, b, c, d valós számok, és a, b, c közül legalább az egyik nem zérus.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden sík egyenlete a (4.6) alakban írható. Legyen $\underline{r}_0 \equiv [x_0, y_0, z_0]$ a sík egy rögzített pontjának helyvektora. Az $\underline{r}$ helyvektoru futó pont koordinátáit $[x, y, z]$, az $\underline{n}$ normálvektor koordinátáit $[a, b, c]$ jelölje, akkor



4.3. ábra

$$\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$$

koordinátás alakja

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ami

$$ax + by + cz + d = 0,$$

ha

$$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Fordítva, (4.6) sík egyenlete, ha az a , b , c számok közül legalább az egyik nem zérus. U.i. ebben az esetben a

$$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

egyenletből x_0 , y_0 , z_0 meghatározható. Pl. ha $a \neq 0$, akkor

$$x_0 = \frac{-d - by_0 - cz_0}{a},$$

ahol y_0 és z_0 tetszőleges.

$\underline{n} \cong [a, b, c]$ és $\underline{r}_0 \cong [x_0, y_0, z_0]$ választással (4.6) átírható az

$$(\underline{r} - \underline{r}_0) \underline{n} = 0$$

alakba, ami sík egyenlete.!

4.3 Tétel. Legyen P_0 tetszőleges pont és $\underline{a} \nparallel \underline{b}$; ekkor a P_0 ponton áthaladó $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokkal párhuzamos sík egyenlete

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} \quad (4.7)$$

ahol $\underline{r}_0$ a P_0 pont és $\underline{r}$ a futó pont helyvektora, a λ és μ "paraméterek" egymástól függetlenül minden valós értéket felvehetnek; (4.7)-et a sík paraméteres vektoregyenletének nevezzük.

Bizonyítás. Az 1.3 Tétel egyszerű következménye.!

A (4.7) vektoregyenlet koordinátás alakja

$$x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1$$

$$y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2$$

$$z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3,$$

$$\text{ahol } \underline{r}_0 \cong [x_0, y_0, z_0], \quad \underline{a} \cong [a_1, a_2, a_3], \quad \underline{b} \cong [b_1, b_2, b_3].$$

Valamely egyenest egyértelműen megadhatunk egy pontjával és egy az egyenessel párhuzamos $\underline{0}$ -tól különböző vektorral. Az utóbbit az egyenes irányvektorának nevezzük.

4.4 Tétel. A P_0 ponton áthaladó $\underline{v}$ irányvektoru egyenes paraméteres vektoregyenlete

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t \underline{v}, \quad (4.8)$$

ahol $\underline{r}_0$ a P_0 pont, $\underline{r}$ a futó pont helyvektora, és a t paraméter tetszőleges valós értéket felvehet.

Bizonyítás. Mivel $\underline{r}_0$ az egyenes egy pontjának helyvektora, az $\underline{r} = \underline{r}_0 + (\underline{r} - \underline{r}_0)$ helyvektoru pont akkor és csak akkor van az egyenesen, ha

$(\underline{r} - \underline{r}_0) \parallel \underline{v}$. Az 1.2 Tétel szerint $\underline{r} - \underline{r}_0$ akkor és csak akkor párhuzamos $\underline{v} \neq 0$ -val, ha van t valós szám, melyre $\underline{r} - \underline{r}_0 = t \underline{v}$.

Az egyenes vektoregyenletének koordinátás alakja:

$$x = x_0 + t v_1$$

$$y = y_0 + t v_2$$

$$z = z_0 + t v_3,$$

ahol $\underline{r}_0 \cong [x_0, y_0, z_0]$, $\underline{v} \cong [v_1, v_2, v_3]$. Abban a speciális esetben, amikor $v_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3$, minden rögzített t -re mindhárom egyenletből kifejezhető a közös t érték, és azt kapjuk, hogy az egyenes futó pontjának x, y, z koordinátái kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}. \quad (4.9)$$

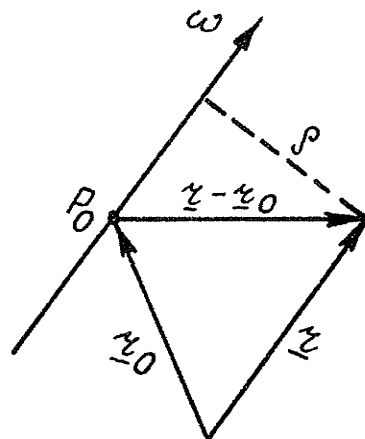
A vektoralgebra fontos mechanikai alkalmazásaival már találkoztunk a 2.1 és 2.2 Példákban. Most további két jelentős mechanikai alkalmazást ismertetünk.

4.2 Példa. Ha egy merev test valamely P_0 ponton áthaladó egyenes, mint tengely körül egyenletes forgó mozgást végez, ez a forgás jellemezhető az $\underline{\omega}$ szögsebesség vektorral. $\underline{\omega}$ -t a következőképpen értelmezzük: hossza, $|\underline{\omega}|$ a szögsebességgel, vagyis az egységnyi idő alatt megtett szögelfordulással egyenlő, állása a forgástengellyel párhuzamos, iránya pedig olyan, hogy abból az irányból nézve a merev test forgása pozitív (az óramutató járásával ellenkező). Ha P a merev test tetszőleges pontja és P_0 ill. P helyvektora $\underline{r}_0$, ill. $\underline{r}$, a P pont sebesség vektora

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{r}_0), \quad (4.10)$$

ui. P olyan körpályán mozog, melynek síkja a forgástengelyre merőleges, középpontja a forgástengelyen van és sugara $\varrho = |\underline{r} - \underline{r}_0| \sin \varphi$, ahol φ az $\underline{\omega}$ (a forgástengely iránya) és az $\underline{r} - \underline{r}_0$ vektor által bezárt szög; tehát $|\underline{v}| = |\underline{\omega}| \varrho = |\underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{r}_0)|$, $\underline{v}$ merőleges $\underline{\omega}$ -ra, és $\underline{r} - \underline{r}_0$ -ra és iránya (4.10)-nek megfelelő (l. 4.4. ábra).

4.3 Példa. Ha a tér P_k pontjaiban $m_k > 0$ tömegeket helyezünk el, $k = 1, 2, \dots, n$, térbeli tömegpontrendszerrel beszélünk. Azt mondjuk, hogy a térben a $\underline{g}$ "tömegerő" hat, ha a térben bárhol elhelyezett egységnyi tömegű pontszerű testre a $\underline{g}$ vektorral jellemzett erő hat. A tömegpontrendszer súlypontjának (tömegközéppontjának) nevezzük azt az S pontot, melyre a tömegpontrendszer forgatónyomatéka tetszőleges $\underline{g}$ tömegerő esetén zérus (l. 2.2 Példa és 2.3 Definíció). Legyen a P_k pont helyvektora $\underline{r}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, meghatározzuk a súlypont $\underline{s}$ helyvektorát. A súlypont definíciója szerint tetszőleges $\underline{g}$ vektor esetén



4.4. ábra.

$$\sum_{k=1}^n (\underline{r}_k - \underline{s}) \times (m_k \underline{g}) = \underline{0},$$

vagyis

$$\left(\sum_{k=1}^n m_k \underline{r}_k - \underline{s} \sum_{k=1}^n m_k \right) \times \underline{g} = \underline{0}.$$

A zárójelben álló vektor ezek szerint minden $\underline{g}$ vektorral párhuzamos, tehát

$$\sum_{k=1}^n m_k \underline{r}_k - \underline{s} \sum_{k=1}^n m_k = \underline{0},$$

ahonnan

$$\underline{s} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \underline{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \quad (4.11)$$

adódik.

KOMPLEX ALGEBRA

5. Komplex számok

A vektoralgebra műveletel, ha bázist és koordinátarendszert vezetünk be, a vektorok koordinátáiból alkotott rendezett számhármassok, ill. ha egy adott sikkal párhuzamos vektorokról, "síkvektorokról" van szó, rendezett számpárok közötti műveletekként foghatók fel. Ha a rendezett számpárokat úgy tekintjük, mint rögzített ortonormált bázisban adott síkvektorokat, mondhatjuk, hogy a vektoralgebrában értelmeztük rendezett számpárok összeadását, valós számmal való szorzását, skaláris és vektoriális szorzását. Bizonyos értelemben "hátrányos" az, hogy mind a skaláris, mind a vektoriális szorzás kivezet a síkvektorok köréből, a szorzás eredménye már nem síkvektor, nem számpár; más szóval a rendezett számpárok halmaza nem zárt e műveletekre nézve. Hátrány az is, hogy a vektoralgebrában vektorok, rendezett számpárok osztása nem értelmezhető. A "komplex szám" fogalmának bevezetése kiküszöböli ezeket a hátrányokat.

Tekintsük a valós számok R halmazának önmagával képzett direkt szorzatát (l. I. Kötet 3.1 Definíció), az $R^2 = \{ (x, y) : x \in R, y \in R \}$ halmazt. Tudjuk, hogy $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, ahol $(x_1, y_1) \in R^2, (x_2, y_2) \in R^2$, akkor és csak akkor, ha $x_1 = x_2$ és $y_1 = y_2$. Az R^2 halmaz elemei, a valós számokból álló rendezett számpárok között értelmezzük az összeadás, a valós számmal való szorzás és szorzás műveletét. Mindhárom művelet eredménye újból rendezett számpár. Legyen $(x_1, y_1) \in R^2, (x_2, y_2) \in R^2, \lambda \in R$;

Definíció szerint:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (5.1)$$

$$\lambda (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1), \quad (5.2)$$

és

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2). \quad (5.3)$$

5.1 Definíció. A valós számokból álló rendezett számpárok R^2 halmazát, ha abban a műveleteket (5.1), (5.2) és (5.3)-mal értelmeztük, a komplex számok halmazának nevezzük és Z -vel jelöljük; e halmaz elemeit komplex számoknak nevezzük.

A Z -halmazban (5.1) - (5.3)-mal értelmezett műveletek kielégítik a következő műveleti azonosságokat ($z = (x, y)$, $z_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, 2, 3$, Z tetszőleges elemel, λ, μ tetszőleges valós számok):

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad (5.4)$$

vagyis az összeadás kommutatív;

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad (5.5)$$

vagyis az összeadás asszociatív;

ha a $0 = (0, 0)$ komplex számot tetszőleges komplex számhoz hozzáadjuk, annak értéke nem változik:

$$z + (0, 0) = z; \quad (5.6)$$

ha a z komplex számhoz hozzáadjuk a $-z = (-x, -y)$ komplex számot, a 0 komplex számot kapjuk

$$z + (-z) = 0; \quad (5.7)$$

$$\lambda(\mu z) = (\lambda\mu)z; \quad (\lambda + \mu)z = \lambda z + \mu z;$$

$$\lambda(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2; \quad (5.8)$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, \quad (5.9)$$

vagyis a szorzás kommutatív;

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3, \quad (5.10)$$

vagyis a szorzás asszociatív;

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3, \quad (5.11)$$

vagyis a szorzás az összeadásra nézve disztributív;

ha az $(1, 0)$ komplex számmal szorzunk tetszőleges z komplex számot, annak értéke nem változik:

$$(1, 0) \cdot z = z \quad (5.12)$$

A felsorolt azonosságok bizonyítása az (5.1) - (5.3) definíció felhasználásával közvetlenül adódik.

Igazoljuk pl. az (5.11) azonosságot:

$$\begin{aligned} z_1 (z_2 + z_3) &= (x_1, y_1) (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1 (x_2 + x_3) - y_1 (y_2 + y_3), y_1 (x_2 + x_3) + x_1 (y_2 + y_3)) \\ &= ((x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 x_3 - y_1 y_3), (x_1 y_2 + y_1 x_2) + (x_1 y_3 + y_1 x_3)) \\ &= z_1 z_2 + z_1 z_3. \end{aligned}$$

A z_1 és z_2 komplex számok különbségét a következő képpen értelmezzük:

$$z_1 - z_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2). \quad (5.13)$$

Látható, hogy $z_1 - z_2$ a z_1 és a $-z_2$ komplex számok összege.

5.2 Definíció. A z_1 és z_2 komplex számok hányadosának nevezzük a

$$z = \frac{z_1}{z_2} \text{ komplex számot, ha } z_1 = z z_2.$$

5.1 Tétel.

Ha $z_2 \neq 0$ és z_1 tetszőleges komplex szám, akkor van egy és csak egy z komplex szám, melyre $z_1 = z z_2$, vagyis a $z = \frac{z_1}{z_2}$ hányados egyértelműen meghatározott komplex szám.

Bizonyítás. Először az egyértelműséget bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy van $z = (x, y)$ komplex szám, melyre $z_1 = z z_2$, vagyis (5.3) alapján

$$(x_1, y_1) = (x, y) (x_2, y_2) = (xx_2 - yy_2, xy_2 + yx_2) \quad (5.14)$$

Innen

$$xx_2 - yy_2 = x_1, \quad xy_2 + yx_2 = y_1 \quad (5.15)$$

következik. Szorozzuk meg az első egyenletet x_2 -vel, a másodikat y_2 -vel és adjuk össze az így kapott egyenleteket:

$$x(x_2^2 + y_2^2) = x_1x_2 + y_1y_2;$$

szorozzuk meg (5.15) első egyenletét $(-y_2)$ -vel, a másodikat x_2 -vel és adjuk össze az így kapott egyenleteket:

$$y(x_2^2 + y_2^2) = x_2y_1 - x_1y_2.$$

Mivel $z_2 \neq 0$, x_2 és y_2 közül legalább az egyik nem zérus, vagyis

$x_2^2 + y_2^2 > 0$. Tehát az utolsó két egyenletből

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (5.16)$$

következik, vagyis x és y egyértelműen meghatározottak. (5.16)-nak (5.14)-be való helyettesítésével közvetlenül beláthatjuk, hogy a $z = (x, y)$ komplex szám valóban z_1 és z_2 hányadosa.!

Az előző tételből látható, hogy 0-tól különböző komplex számmal az osztás művelete is egyértelműen elvégezhető. Ez indokolja azt, hogy ebben a tárgyalásban a rendezett számpárokat (komplex) számoknak nevezzük.

Tekintsük a Z halmaz azon elemeiből álló H részhalmazát, melyek második koordinátája zérus:

$$H = \{ (x, 0) : x \in \mathbb{R} \}.$$

A H halmaz nyilván tartalmazza a $(0, 0)$ és az $(1, 0)$ számot, zárt továbbá a komplex számok körében értelmezett négy alapműveletre nézve, u.i. tetszőleges $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$(x_1, 0) \pm (x_2, 0) = (x_1 \pm x_2, 0) \in H,$$

$$(x_1, 0) (x_2, 0) = (x_1x_2, 0) \in H,$$

$$\frac{(x_1, 0)}{(x_2, 0)} = \left(\frac{x_1}{x_2}, 0 \right) \in H, \quad x_2 \neq 0. \quad (5.17)$$

A H halmaz és a valós számok R halmaza között természetes módon egy-egyértelmű megfeleltetést létesítünk úgy, hogy minden $x \in R$ -hez $(x, 0) \in H$ -t rendeljük. Az (5.17) formulából látható, hogy ez a leképezés művelettartó, pl. x_1 -nek $(x_1, 0)$, x_2 -nek $(x_2, 0)$ és $x_1 x_2$ -nek $(x_1 x_2, 0) = (x_1, 0)(x_2, 0)$ felel meg. Látható továbbá, hogy a H halmaz $(x_1, 0)$ elemének tetszőleges (x, y) komplex számmal való szorzata ugyanaz, mint x_1 -nek (x, y) -nal való szorzata

$$(x_1, 0)(x, y) = (x_1 x, x_1 y) = x_1(x, y),$$

(a baloldalon az (5.3), a jobboldalon az (5.2) szorzási szabályt alkalmazva ugyanarra a középén álló eredményre jutunk). A fentiek alapján jogos a H halmaznak a valós számok R halmazával való azonosítása, az $x = (x, 0)$ jelölés használata, és mondhatjuk, hogy a komplex számok Z halmaza tartalmazza a valós számok $R = H$ halmazát, a komplex számfogalom a valós számfogalom bővítése.

Ha a síkon bevezetjük az x, y Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert (I. II. Kötet 1. pont), a komplex számok e sík pontjaiként ábrázolhatók, a $z = (x, y)$ komplex szám képe az x abszcisszáju, y ordinátájú pont. E síkot Gauss-féle számsíknak, komplex számsíknak, vagy röviden z -síknak nevezzük. Bizonyos összefüggésekben célszerű a komplex számokat a komplex számsík pontjainak helyvektoraival ábrázolni.

A számsíkon az $(1, 0)$ és a $(0, 1)$ "vektorok" lineáris kombinációjaként bármely "vektor" egyértelműen felírható, tetszőleges $z = (x, y)$ komplex szám egyértelműen írható a következő alakban:

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

$(1, 0)$ az 1 valós számmal azonos, $(0, 1)$ -et képzetes egységnek nevezzük és bevezetjük az

$$i = (0, 1) \quad (5.18)$$

jelölést, így

$$z = (x, y) = x + iy. \quad (5.19)$$

(5.19)-et a komplex szám algebrai (kanonikus) alakjának nevezzük.

Az (5.3) szorzási szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1. \quad (5.20)$$

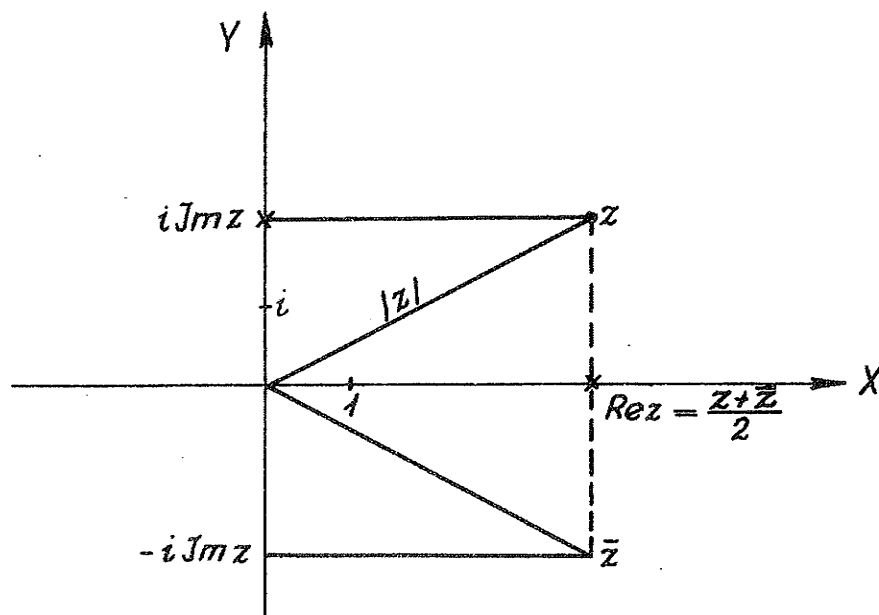
Megjegyzés. A tárgyalást meg lehet fordítani. Posztulálni lehet (5.20)-at, az (5.4)-(5.12) műveleti azonosságokat, az 5.1 Tételt (az (5.8) összefüggések elhagyhatók és apróbb fogalmazásbeli módosítások szükségesek) és a komplex számokat az (5.19) algebrai alakban lehet felírni. Ebben az esetben a tárgyalásunk sarkkövét képező (5.3) összefüggés levezethetővé válik, u.i.

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 = \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

A $(0, y) = iy$, $y \in \mathbb{R}$, alaku komplex számokat képzetes számoknak nevezzük. A komplex számsík x tengelyét, melyen az $(x, 0) = x$ valós számok helyezkednek el, valós tengelynek, y tengelyét, melyen a $(0, y) = iy$ képzetes számok helyezkednek el, képzetes tengelynek nevezzük. Az (5.19) komplex számot meghatározó x , ill. y valós számot a z szám valós (reális), ill. képzetes (imaginárius) részének nevezzük és a következőképpen jelöljük:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Ezekkel a jelölésekkel $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.



5.1. ábra

5.3 Definíció. A $z = x + iy$ komplex szám konjugáltjának nevezzük a $\bar{z} = x - iy$ számot.

A $\bar{z}$ -at ábrázoló pont a számsíkon a z pontot ábrázoló pontnak a valós tengelyre vonatkozó tükörképe (l. 5.1. ábra).

Mivel

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z \text{ és } \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z,$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z,$$

ahonnan a

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} (z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} (z - \bar{z}) \quad (5.21)$$

összefüggéseket kapjuk. (5.21)-ből az is látható, hogy egy komplex számnak és konjugáltjának összege, ill. különbsége valós, ill. képzetes szám.

Az 5.3 Definícióból azonnal adódik, ill. (5.3)-ban y_1 és y_2 helyébe $-y_1$ -et és $-y_2$ -t írva kapjuk, hogy

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad (5.22)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad (5.23)$$

ill.

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2. \quad (5.24)$$

Matematikai indukcióval bizonyítható, hogy az összeg, ill. szorzat konjugáltjának képzésére vonatkozó (5.23), ill. (5.24) szabályok tetszőleges véges számú tag, ill. tényező esetén is érvényesek.

5.4 Definíció. A $z = x + iy$ komplex szám abszolút értékének (modulusának) nevezzük a

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

nem-negatív számot.

Az 5.3 és 5.4 Definícióból azonnal következik, hogy $|\bar{z}| = |z|$ és

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad (5.25)$$

(5.25)-ből az is látható, hogy egy komplex számnak és konjugáltjának szorzata nem-negatív (valós) szám. Nyilvánvalóan érvényesek továbbá a

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z| \quad (5.26)$$

egyenlőtlenségek.

5.2 Tétel. Tetszőleges z_1 és z_2 komplex számra

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (5.27)$$

Bizonyítás. (5.23), (5.24), (5.25) és (5.22) felhasználásával:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 z_2}, \end{aligned}$$

ahonnan (5.21)-et figyelembe véve

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

adódik. Azonban (5.26) alapján

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) &\leq |\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})| \leq |z_1 \overline{z_2}| = \\ &= |z_1| |\overline{z_2}| = |z_1| |z_2|, \end{aligned}$$

vagyis

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1| |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

(5.27)-ből az I. Kötet (11.7) bizonyításához hasonlóan adódik, hogy

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \quad (5.28)$$

6. Komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakja

Algebrai alakban adott komplex számok összeadása és kivonása könnyen elvégezhető. A szorzás és osztás, továbbá a hatványozás és gyökvonás elvégzése bonyolultabb művelet. E műveletek lényegesen egyszerűsödnek, ha a komplex számok most bevezetésre kerülő alakját használjuk.

Vezessük be a komplex számsíkon a szokásos módon az r, φ polárkoordinátarendszert (I. II. Kötet 20. pont).

A $z = x + iy$ komplex szám valós, ill. képzetes része kifejezhető a következő módon:

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

vagy, ami ugyanaz

$$x = r \cos(\varphi + 2k\pi),$$

$$y = r \sin(\varphi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

A komplex szám tehát nem határozza meg egyértelműen az (r, φ) számpárt. Ha a $0 \leq \varphi < 2\pi$ megszorítást tesszük, akkor egy komplex számhoz csak egy (r, φ) számpár tartozik. Kivételt képez a zérus, amihez φ tetszőleges valós értéke hozzárendelhető.

A $z = x + iy$ komplex szám trigonometrikus alakja

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

vagy

$$z = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)), \quad (6.1)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

ahol r a z komplex szám modulusa;

φ -t vagy $(\varphi + 2k\pi)$ -t a z komplex szám arcusának (argumentumának) nevezzük, jelölése: $\varphi = \arg z$. A $\varphi + 2k\pi$ számok közül azt, amelyik 0 és 2π (0 -t beleértve, 2π -t viszont nem) közé esik, $\arg z$ főértékének nevezzük.

Az (r, φ) számpár egyértelműen meghatározza a z komplex számot.

Ha két komplex szám egyenlő, $z_1 = z_2$, akkor $|z_1| = |z_2|$ és

$$\operatorname{arc} z_1 = \operatorname{arc} z_2 + 2k\pi. \quad (6.2)$$

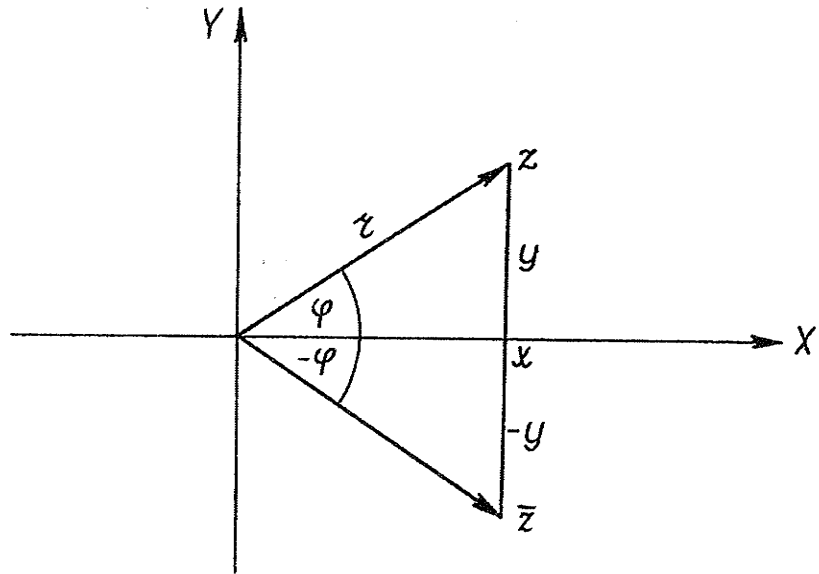
Ha $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, akkor

$$\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)),$$

vagyis

$$\operatorname{arc} \bar{z} = -\operatorname{arc} z.$$

(l. 6.1. ábra).



6.1. ábra

A trigonometrikus összefüggések (I. II. Kötet (3.2), (3.3)) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned} \quad (6.3)$$

tehát

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2| \quad (6.4)$$

és

$$\operatorname{arc}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{arc} z_1 + \operatorname{arc} z_2. \quad (6.5)$$

Ha $z_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]}{r_2^2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Tehát

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

és

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2. \quad (6.7)$$

A $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex szám négyzete $z^2 = z \cdot z$, (6.3) felhasználásával

$$z^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Matematikai indukcióval adódik az ún. de Moivre formula:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.8)$$

6.1 Definíció. Egy komplex szám n -edik gyökén (n pozitív egész szám) azt a komplex számot értjük, amelynek n -edik hatványa az adott szám.

6.1 Tétel. A $z \neq 0$ komplex számnak pontosan n számú különböző n -edik gyöke van.

Bizonyítás. Legyen a $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ n -edik gyöke $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, akkor

$$w^n = z.$$

$$(6.8)\text{-ből } \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$(6.2)\text{-ből } \rho^n = r \quad \text{és} \quad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, Innen $\varrho = \sqrt[n]{r} > 0$ egyértelműen meghatározott, de

$$\vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

látszólag végtelen sok értéket vesz fel.

Azt kaptuk tehát, hogy z összes n -edik gyöke

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right],$$

$$k = 0, \pm 1, \dots$$

Bebizonyítjuk, hogy n -edik gyökvonás esetén a különböző gyökök száma n .
Legyen $k = m$ tetszőleges egész, akkor

$$(\sqrt[n]{z})_m = \sqrt[n]{r} \left[\cos \frac{\varphi + 2m\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2m\pi}{n} \right].$$

Ha $k = m + n$, akkor

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{z})_{m+n} &= \sqrt[n]{r} \left[\cos \frac{\varphi + 2(n+m)\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2(n+m)\pi}{n} \right] \\ &= \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n} + 2\pi \right) \right] \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2m\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2m\pi}{n} \right) = (\sqrt[n]{z})_m. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy elegendő n számu egymást követő egész értékre ki-

számítani $\sqrt[n]{z}$ értékeit, pl. a $k = 0, 1, \dots, n-1$ választással,

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

(6.9)

z összes különböző n -edik gyökét (6.9) szolgáltatja. Az, hogy $z \neq 0$ esetén ezek a gyökök valóban különbözők, nyilvánvaló, mivel bármely kettő arcúsának különbsége abszolút értékben 2π -nél kisebb pozitív szám!

A $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex szám n -edik gyökei a komplex számsíkon szemléltethetők egy szabályos n -szög csúcsaihoz húzható helyvektorokkal. A szomszédos vektorok egymással bezárt szöge $\frac{2\pi}{n}$ és a vektorok végpontjai egy origó középpontu, $\sqrt[n]{r}$ sugaru körön fekszenek.

A $z = 1$ komplex szám n -edik gyökeit n -edik egységgyököknek nevezzük. Mivel $|z| = r = 1$ és $\arg 1 = 0$, az

$$e_{nk} = (\sqrt[n]{1})_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

jelöléssel $e_{n0} = 1$,

$e_{n1} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ és a (6.8) de Moivre formula alapján az n -edik egységgyökök: $1, e_{n1}, e_{n1}^2, e_{n1}^3, \dots, e_{n1}^{n-1}$.

6.1 Példa. A $2 \leq n$ -edik egységgyökök összege zérus. Uí. $e_{n1}^n = 1$, és $e_{n1} \neq 1$.

$$e_{n1}^n - 1 = 0 \quad \text{ugy is írható, hogy}$$

$$(e_{n1} - 1)(e_{n1}^{n-1} + e_{n1}^{n-2} + \dots + e_{n1} + 1) = 0.$$

Az utóbbi egyenlőséget $(e_{n1} - 1) \neq 0$ -val osztva azt kapjuk, hogy

$$e_{n1}^{n-1} + e_{n1}^{n-2} + \dots + e_{n1} + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} e_{nk} = 0.$$

A trigonometrikus alakban adott komplex számokon végzett műveleteket áttekintve azt látjuk, hogy két komplex szám szorzásánál, osztásánál, ill. egy komplex szám pozitív egész kitevőre való hatványozásánál az arcusok összeadódnak, kivonódnak, ill. a hatványkitevővel megszoródnak. Rokonság van tehát a komplex számokkal végzett műveletek és az azonos alapu hatványokkal végzett műveletek szabályai között. Az utóbbi esetben uí. szorzásnál, osztásnál, ill. hatványozásnál a kitevők összeadódnak, kivonódnak, ill. a hatványkitevővel szorzódnak. Ez az analógia indokoltá teszi, hogy a komplex számok felírásának olyan alakját keressük, melyben azonos alapu hatványok szerepelnek az arcusszal a kitevőben.

6.2 Definíció. (Euler-formula.) Az e szám képzetes kitevőjű hatványát a következőképpen értelmezzük

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi ,$$

ahol φ tetszőleges valós szám.

Eddig csak valós értékű x számra ismertük e^x értékét (I. II. Kötet, 10.1 Definíció). Most a kitevő képzetes szám. Megmutatjuk, hogy ez a definíció megőrizte az exponenciális függvény azon alapvető tulajdonságát, hogy

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2} ,$$

vagyis, hogy közös alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy a közös alapot leírjuk és a kitevőket összeadjuk. Érvényes az

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (6.10)$$

azonosság (φ_1 és φ_2 tetszőleges valós számok). U1. a trigonometrikus összegképletek alapján (I. II. Kötet (3.2), (3.3))

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} &= (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \\ &= e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} . \end{aligned}$$

A $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex szám az Euler-formula alapján a következő alakban írható

$$z = r e^{i\varphi} ,$$

ahol $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. (6.19)-et nevezzük a komplex szám exponenciális alakjának.

A szorzás, ill. az osztás a $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ exponenciális alakban adott komplex számokkal (6.5), (6.6), (6.10) és az Euler formula alkalmazásával a következő egyszerű módon történik:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (6.12)$$

ill. ha $z_2 \neq 0$, akkor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (6.13)$$

Ha $z = r e^{i\varphi}$, a (6.8) de Moivre-formula és az Euler formula alapján

$$z^n = r^n e^{in\varphi} \quad (n \text{ természetes szám}), \quad (6.14)$$

ill. (6.9) és az Euler-formula alapján

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \quad (n \text{ pozitív egész szám, } k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (6.15)$$

6.2 Példa. A $2 \leq n$ -edik egységgyökök szorzata $(-1)^{n-1}$ -nel egyenlő (v. ö. a 6.1 Példával, felhasználjuk a 6.1 Példa előtt bevezetett jelöléseket).
 Ui. az Euler formula alapján

$$e_{n1} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = e^{i \frac{2\pi}{n}},$$

és

$$\begin{aligned} 1 \cdot e_{n1} \cdot e_{n2} \cdot e_{n3} \cdots e_{n,n-1} &= e_{n1} \cdot e_{n1}^2 \cdot e_{n1}^3 \cdots e_{n1}^{n-1} = \\ &= e_{n1}^{1+2+3+\dots+(n-1)} = e_{n1}^{\frac{n^2-n}{2}} = \\ &= e^{i \frac{2\pi}{n} \frac{n^2-n}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = \\ &= (e^{i\pi})^{n-1} = (-1)^{n-1}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a véges számtani sor összegképletét és (6.14)-et.

7. Polinomok

A komplex számok bevezetését történelmileg a polinomok zérushelyeivel (magasabbfokú algebrai egyenletek megoldásaival) kapcsolatos vizsgálatok tették szükségessé. Ismeretes, hogy a valós számok körében a $z^2 + 1$ polinomnak nincs zérushelye, vagy ami ugyanaz, a $z^2 + 1 = 0$, vagy $z^2 = -1$ egyenletnek nincs megoldása. A 6.1 Tétel értelmében viszont a -1 számnak pontosan két különböző (komplex) négyzetgyöke van, éspedig $\sqrt{-1} = \pm i$, más szóval a $z^2 + 1$ polinomnak az i és a $-i$ komplex számok zérushelyei. A polinomok zérushelyével kapcsolatos vizsgálatok, ha azokat a komplex számok körében végezzük, lényegesen leegyszerűsödnek.

A

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (7.1)$$

kifejezést, ahol a_k , $k = 0, 1, \dots, n$ tetszőlegesen rögzített komplex szám, és a z változó bármilyen komplex értéket felvehet, legfeljebb n -edfokú polinomnak nevezzük, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ha $a_n \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy (7.1) pontosan n -edfokú polinom. Ha $a_n = 1$, akkor azt mondjuk, hogy (7.1) n -edfokú normálpolinom. Ha $p(z_0) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy z_0 a (7.1) polinom zérushelye (gyöke), vagy a $p(z) = 0$ egyenlet megoldása (gyöke).

Azt mondjuk, hogy a $p(z)$ polinom egyenlő (azonosan egyenlő) a $q(z)$ polinommal, $p(z) \equiv q(z)$, ha $p(z) = q(z)$ minden $z \in \mathbb{C}$ -re. Könnyen látható, hogy polinomok összege és szorzata is polinom, továbbá az, hogy egy pontosan (legfeljebb) n -edfokú és egy pontosan (legfeljebb) m -edfokú polinom szorzata pontosan (legfeljebb) $(m+n)$ -edfokú polinom. Ha (7.1)-ben

$a_n \neq 0$ és a_n -nel elosztjuk $p(z)$ -t, akkor az $\frac{1}{a_n} p(z)$ normálpolinomot kapjuk.

Nyilvánvaló, hogy z_0 akkor és csak akkor gyöke $p(z)$ -nek, ha $\frac{1}{a_n} p(z)$ -nek

gyöke. Polinomok gyökeinek vizsgálatánál elegendő tehát normálpolinomokra szorítkozni.

Alapvető jelentőségű a következő

7.1 Tétel. (Az algebra alaptétele.) Minden legalább elsőfokú polinomnak van gyöke.

A tétel bizonyítása komplex függvénytanai eszközöket is igényel, ezért azt itt nem közöljük (I. VII. Kötet).

7.2 Tétel. (Bezout tétele.) Az n -edfoku ($n \geq 1$) $p(z)$ polinomnak z_0 akkor és csak akkor gyöke, ha $p(z)$ felírható a

$$p(z) \equiv (z - z_0) q(z)$$

alakban, ahol $q(z)$ $(n-1)$ -edfoku polinom. Az itt szereplő $z - z_0$ első foku polinomot a z_0 gyökhöz tartozó gyöktényezőnek nevezzük.

Bizonyítás. A feltétel nyilvánvalóan elégséges, mivel ha teljesül, akkor

$$p(z_0) = (z_0 - z_0) q(z_0) = 0.$$

A feltétel szükséges is, ui. tegyük fel, hogy $p(z_0) = 0$, akkor (7.1) jelöléssel írhatjuk, hogy

$$p(z) \equiv p(z) - p(z_0) \equiv \sum_{k=0}^n a_k z^k - \sum_{k=0}^n a_k z_0^k \equiv \sum_{k=1}^n a_k (z^k - z_0^k). \quad (7.2)$$

Azonban $k = 1, 2, \dots, n$ -re

$$z^k - z_0^k \equiv (z - z_0) (z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + z^{k-3} z_0^2 + \dots + z_0^{k-1}),$$

így (7.2) jobb oldalán minden tagból kiemelhető a $(z - z_0)$ tényező, vagyis

$$p(z) \equiv (z - z_0) \sum_{k=1}^n a_k (z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \dots + z_0^{k-1}),$$

ahol a jobb oldalon a $(z - z_0)$ mellett álló tényező pontosan $(n-1)$ -edfoku polinom, mivel benne z legmagasabbfoku hatványának, z^{n-1} -nek együtthatója $a_n \neq 0$.

Az előző két tételnek egy sor egyszerű fontos következménye van.

7.3 Következmény. A (7.1) pontosan n -edfoku ($n \geq 1$) polinom ($a_n \neq 0$) felírható a következő "gyöktényezős alakban":

$$\begin{aligned} p(z) &\equiv a_n (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_n) \equiv \\ &\equiv a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Bizonyítás. Legyen z_1 a $p(z)$ polinom gyöke, akkor a 7.2 Tétel alapján $p(z) \equiv (z - z_1) q_1(z)$, ahol $q_1(z)$ pontosan $(n-1)$ -edfoku polinom, melyben z^{n-1} együtthatója a_n . Ha $n-1 > 0$, a 7.1 Tétel figyelembevételével alkalmazzuk a 7.2 Tételt $q_1(z)$ -re, kapjuk, hogy $p(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2) q_2(z)$, ahol $q_2(z)$ pontosan $(n-2)$ -edfoku polinom, melyben z^{n-2} együtthatója a_n . n számú lépés után a (7.3) gyöktényezős felbontást kapjuk.!

7.4 Következmény. A (7.1) pontosan n -edfoku ($n \geq 1$) polinomnak ($a_n \neq 0$) legfeljebb n számú különböző gyöke van.

Bizonyítás. Miután (7.3) jobb oldala akkor és csak akkor zérus, ha valamelyik tényezője zérus, z_0 akkor és csak akkor zérushely, ha valamelyik k -ra, ($k = 1, 2, \dots, n$), $z_0 = z_k$.!

7.5 Következmény. A $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ és $q(z) = b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0$ legfeljebb n -edfoku polinomok akkor és csak akkor azonosan egyenlők, ha

$$a_k = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (7.4)$$

Bizonyítás. A (7.4) feltétel nyilván elegendő, hiszen teljesülése esetén ugyanarról a polinomról van szó. Megmutatjuk, hogy (7.4) szükséges. Elegendő annyit feltenni, hogy van $n+1$ számú különböző hely $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$, $z_i \neq z_k$, $i \neq k$, ahol $p(z_k) = q(z_k)$, $k = 1, 2, \dots, n+1$. Ebből ugyanis következik, hogy a

$$p(z) - q(z) = (a_n - b_n) z^n + \dots + (a_1 - b_1) z + a_0 - b_0$$

legfeljebb n -edfoku polinomnak $n+1$ számú különböző gyöke van. A 7.4 Következmény szerint ez csak úgy lehetséges, hogy $p(z) - q(z)$ 0-adfoku polinom, vagyis

$$a_k = b_k, \quad k = 1, \dots, n \text{ és } p(z) - q(z) \equiv a_0 - b_0.$$

Mivel $0 = p(z_k) - q(z_k) = a_0 - b_0, \quad a_0 = b_0$.!

7.6 Következmény. A 7.3 Következményben szereplő gyöktényezős felbontás egyértelmű.

Bizonyítás. A bizonyítást n -re vonatkozó matematikai indukcióval végezzük. Az $n = 1$ esetben tegyük fel, hogy

$$a_1 z + a_0 \equiv a_1 (z - u) \equiv b_1 (z - v).$$

Nyilván $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, de akkor mivel a középen álló polinom a $z = u$ helyen zérus, a jobb oldalon álló polinom is zérus ezen a helyen, vagyis $u - v = 0$. $u = v$ -ből azonban $a_1 = b_1$ következik, ha az azonosságot $(z - u)$ -val osztjuk, $z \neq u$. Tételezzük fel, hogy minden pontosan $(n - 1)$ -edfoku polinom egyféleképpen bontható fel a (7.3)-nak megfelelő alakba és legyen

$$p(z) \equiv a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k) \equiv b_n \prod_{k=1}^n (z - \xi_k). \quad (7.5)$$

Nyilván $b_n \neq 0$. Helyettesítsünk a középső és jobb oldali polinomba $z = z_n$ -et, kapjuk, hogy

$$0 = b_n \prod_{k=1}^n (z_n - \xi_k).$$

Innen következik, hogy van $k = m$, melyre $z_n = \xi_m$. Osszuk el a (7.5) azonosságot $z - z_n = z - \xi_m$ -mel, az

$$a_n \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k) \equiv b_n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n (z - \xi_k)$$

azonosságot kapjuk. (E két polinom azonossága az előző Következmény bizonyításából látható, mivel értékük minden $z \neq z_n$ helyen megegyezik.) Mivel e polinomok már $(n - 1)$ -edfokúak, az indukciós feltevés miatt $a_n = b_n$ és a bal-, ill. jobb oldalon álló tényezők sorrendtől eltekintve megegyeznek.!

7.7 Következmény. A (7.1) pontosan n -edfoku ($n \geq 1$) polinom ($a_n \neq 0$) egyértelműen a következő gyöktényezős alakban írható

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_r)^{m_r} =$$

$$= a_n \prod_{k=1}^r (z - z_k)^{m_k}, \quad (7.6)$$

ahol $z_i \neq z_j$, $i \neq j$, m_k pozitív egész, $k = 1, \dots, r$ és

$\sum_{k=1}^r m_k = n$. $z_1, \dots, z_r$ a $p(z)$ polinom összes különböző gyöke, $1 \leq r \leq n$; m_k -t a z_k gyök multiplicitásának nevezzük. A pontosan n -edfoku ($n \geq 1$) polinom "multiplicitásokkal számolt gyökeinek száma" pontosan n .

Bizonyítás. Közvetlenül adódik a 7.3, 7.4 és 7.6 Következményekből.!

7.8 Tétel. (Gyökök és együtthatók közötti összefüggések, Vietà-féle formulák.) Tekintsük a (7.1) pontosan n -edfoku ($n \geq 1$) polinom (7.3) gyöktényezős felbontását; az a_k , $k = 0, 1, \dots, n$ együtthatók és a z_k , $k = 1, \dots, n$ gyökök között fennállnak a következő egyenlőségek

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = - \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$z_1 z_2 z_3 + \dots + z_{n-2} z_{n-1} z_n = - \frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Bizonyítás. (7.3) jobb oldalán a szorzás elvégzésével a 7.5 Következmény alapján adódik.!

7.9 Tétel. Ha a (7.1) polinom együtthatói valós számok, vagyis $\text{Im } a_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$, és z_0 a polinom gyöke, akkor z_0 konjugáltja, $\bar{z}_0$ is gyök; $\bar{z}_0$ multiplicitása egyenlő z_0 multiplicitásával.

Bizonyítás. (5.23) és (5.24) felhasználásával $p(z_0) = 0$ -ból

$$0 = \overline{p(z_0)} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z_0^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z_0^k} = \sum_{k=0}^n a_k \overline{z_0^k} = p(\overline{z_0}),$$

tehát $\overline{z_0}$ valóban gyök. A $p(z)$ polinom osztható a z_0 , ill. $\overline{z_0}$ gyökhöz tartozó gyöktényezők szorzatával, $(z - z_0)(z - \overline{z_0})$ -tal. Azonban (5.21)-ből és (5.25)-ből látható, hogy

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0 \overline{z_0} \quad (7.7)$$

valós együtthatós polinom, tehát a

$$q_2(z) = \frac{p(z)}{(z - z_0)(z - \overline{z_0})}$$

polinom is valós együtthatós. Ha z_0 a $q_2(z)$ polinomnak is gyöke, akkor $\overline{z_0}$ is gyöke e polinomnak, vagyis ha $p(z)$ -nek z_0 kétszeres gyöke, akkor $\overline{z_0}$ is az. Az előbbi eljárást folytatva a multiplicitások egyenlőségére vonatkozó állítást kapjuk eredményül.!

7.10 Következmény. Ha a (7.1) polinom pontosan n -edfoku ($n \geq 1$) és együtthatói valós számok, akkor egyértelműen felírható a következő alakban

$$p(z) \equiv a_n \prod_{k=1}^q (z - z_k)^{m_k} \cdot \prod_{h=1}^s (z^2 + b_h z + c_h)^{\ell_h}$$

ahol $z_i \neq z_j$, és $(b_i, c_i) \neq (b_j, c_j)$,

ha $i \neq j$; $a_n, z_k, (k = 1, \dots, q), b_h, c_h$,

$(h = 1, \dots, s)$ valós számok, a $z_k - k$ a $p(z)$ polinom összes különböző valós gyökei, a $z^2 + b_h z + c_h$ poli-

nomoknak nincs valós gyökük, $m_k - k$ és $\ell_h - k$ nem negatív egészek,

$$\sum_{k=1}^q m_k + 2 \sum_{h=1}^s \ell_h = n$$

és $q \leq n, \quad 2s \leq n.$

Bizonyítás. Közvetlenül adódik a 7.7 Következményből és a 7.9 Tételből, ha minden egyes konjugált komplex gyökpárnál figyelembe vesszük (7.7)-et. !

MÁTRIX ALGEBRA

8. Elemi műveletek mátrixokkal

8.1 Példa. Ha egy üzem m féle "nyersanyagot" használ fel és n féle terméket gyárt, a_{ik} -val jelölhetjük az i -edik fajta nyersanyagból a k -edik fajta termék egy egységének előállításához szükséges mennyiséget, $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$. Az

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

táblázat az üzem fajlagos nyersanyagfelhasználási táblázata. A táblázat i -edik sorában egymás mellett álló számok, $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ az i -edik fajta nyersanyag felhasználásáról nyújtanak felvilágosítást a különböző termékek egy egységének előállításakor. A táblázat k -edik oszlopában egymás alatt álló számok $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}$ a k -edik fajta termék egy egységének előállításához a különböző nyersanyagokból felhasznált mennyiségeket szolgáltatják.

Az előbbi példában szereplő táblázathoz hasonló elrendezések a gyakorlati élet és a matematika számos területén fellépnek. Célszerű ezek közelebbi vizsgálata, lehetségesnek mutatkozik közöttük műveletek értelmezése.

8.1 Definíció. Az m, n számú a_{ik} (valós, vagy komplex) szám

($i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$) téglalap alakú (8.1) elrendezését $(m \times n)$ típusú $((m \times n)$ -es) mátrixnak nevezzük és aláhuzott (általában nagy) betűvel jelöljük,

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

az a_{ik} számokat az $\underline{A}$ mátrix elemeinek nevezzük; használjuk még az $\underline{A} = [a_{ik}]$ rövidített jelölést is; azt mondjuk, hogy az $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ elemek a mátrix i -edik sorát ($i = 1, 2, \dots, m$), az $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}$ elemek pedig a mátrix k -adik oszlopát ($k = 1, 2, \dots, n$) alkotják.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az indexként használt betűktől függetlenül egy elem első indexe mindig az elem sorának, második indexe pedig oszlopának sorszámát jelöli.

8.2 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(m \times n)$ -es $\underline{A} = [a_{ik}]$ és a $(p \times q)$ -es

$\underline{B} = [b_{ik}]$ mátrixok egyenlők, $\underline{A} = \underline{B}$, ha azonos típusúak, vagyis $m = p$ és $n = q$ és egyező indexű elemek egyenlők, vagyis

$$a_{ik} = b_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

A következőkben fontos szerepe lesz néhány speciális mátrixnak, ill. mátrix-típusnak. Azt az $(m \times n)$ -es mátrixot, amelynek minden eleme zérus, zérusmátrixnak nevezzük és $\underline{0}$ -val jelöljük. Az $m \times 1$ típusú mátrixokat, vagyis azokat, melyeknek egyetlen oszlopuk van, oszlopvektoroknak (oszlop-mátrixoknak) nevezzük, aláhuzott kis betűvel jelöljük, és elemeik mellől az oszlop sorszámát jelző második indexet elhagyjuk:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Az $(1 \times n)$ típusu mátrixokat, vagyis azokat, melyeknek egyetlen soruk van, sorvektoroknak (sormátrixoknak) nevezzük, aláhuzott vesszős kisbetűvel jelöljük és elemeik mellől a sor sorszámát jelző első indexet elhagyjuk:

$$\underline{b}' = [b_1, b_2, \dots, b_n].$$

Az $(n \times n)$ típusu mátrixokat (vagyis azokat, melyek sorainak száma megegyezik oszlopainak számával) n-edrendű négyzetes (kvadratikus) mátrixoknak, vagy röviden n-edrendű mátrixoknak nevezzük. Azt mondjuk, hogy az n-edrendű $\underline{A} = [a_{ik}]$ mátrix $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemei e mátrix főátlóját (fődiagonalisát) alkotják. Az n-edrendű $\underline{D} = [d_{ik}]$ mátrixot diagonális mátrixnak (átlós mátrixnak) nevezzük, ha a főátlón kívüli elemei mind nullák, vagyis ha $d_{ik} = 0, i \neq k$. Azt az n-edrendű diagonális mátrixot, melynek minden főátlóban álló eleme 1-gyel egyenlő, n-edrendű egységmátrixnak nevezzük és $\underline{E}_n$ -nel, vagy $\underline{I}$ -vel jelöljük, tehát

$$\underline{E}_n = \begin{bmatrix} \overset{1}{1} & \overset{2}{0} & \overset{3}{0} & \dots & \overset{n}{0} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ \vdots \\ (n) \end{matrix} \quad (8.2)$$

8.3 Definíció. A δ_{ik} jelet, ahol $i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$, Kronecker szimbolumnak nevezzük és a következőképpen értelmezzük

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = k \\ 0, & \text{ha } i \neq k \end{cases}$$

A Kronecker szimbólum alkalmazásával az egységmátrix $\underline{E} = [\delta_{ik}]$.
Áttérünk a mátrixokon végezhető műveletek értelmezésére.

8.4 Definíció. Az $(m \times n)$ -es $\underline{A} = [a_{ik}]$ mátrix transzponált mátrixának nevezzük az $(n \times m)$ -es $\underline{A}' = [a'_{ki}]$ mátrixot, melyre

$$a'_{ki} = a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Más szóval az $\underline{A}$ mátrix transzponáltját úgy kapjuk, hogy oszlopait soraival felcseréljük. Ha $\underline{A}$ speciálisan négyzetes mátrix, akkor transzponáltját úgy kapjuk, hogy "elemeit a főátlóra tükrözzük" (a főátló elemei helyben maradnak). Az $(m \times 1)$ -es

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

oszlopvektor transzponáltja az $(1 \times m)$ -es $\underline{a}' = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ sorvektor.

Az $(1 \times n)$ -es $\underline{b}' = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ sorvektor transzponáltja az $(n \times 1)$ -es

$$(\underline{b}')' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

oszlopvektor.

Általában, a (8.4) Definícióban szereplő $\underline{A}$ mátrix $\underline{A}'$ transzponáltjának transzponáltja az $(m \times n)$ -es $(\underline{A}')' = [a''_{ik}]$ mátrix, melyre $a''_{ik} = a'_{ki} = a_{ik}$, vagyis érvényes az

$$(\underline{A}')' = \underline{A} \quad (8.3)$$

műveleti azonosság.

8.5 Definíció. Az $(m \times n)$ -es $\underline{A} = [a_{ik}]$ és az $(m \times n)$ -es $\underline{B} = [b_{ik}]$ mátrix összegének, ill. különbségének nevezzük és $\underline{A} + \underline{B}$ -vel jelöljük azt az $(m \times n)$ -es $\underline{C} = [c_{ik}]$ mátrixot, ahol

$$c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ k = 1, 2, \dots, n.$$

Ezek szerint csak egyenlő típusu mátrixok összeadását értelmeztük, éspedig úgy, hogy a megfelelő helyen álló elemeket összeadjuk.

8.6 Definíció. Az $(m \times n)$ -es $\underline{A} = [a_{ik}]$ mátrix ellentettjének nevezzük az $(m \times n)$ -es $-\underline{A} = [-a_{ik}]$ mátrixot.

8.7 Definíció. Az n -edrendű $\underline{A} = [a_{ik}]$ mátrixot szimmetrikusnak nevezzük, ha

$$\underline{A}' = \underline{A}.$$

Nyilvánvaló, hogy az n -edrendű $\underline{A}$ mátrix akkor és csak akkor szimmetrikus, ha a főátlóra tükrösen elhelyezkedő elemei egyenlők, vagyis ha $a_{ki} = a_{ik}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n$.

8.8 Definíció. Az n -edrendű $\underline{A} = [a_{ik}]$ mátrixot antiszimmetrikusnak nevezzük, ha

$$\underline{A}' = -\underline{A}.$$

Nyilvánvaló, hogy az n -edrendű $\underline{A}$ mátrix akkor és csak akkor antiszimmetrikus, ha $a_{ik} = -a_{ki}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n$. Speciálisan $a_{ii} = -a_{ii}$ -ből következik, hogy $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, vagyis antiszimmetrikus mátrix főátlójában minden elem zérus.

A mátrixok összeadása a következő műveleti azonosságoknak tesz eleget.

A 8.5 Definícióból azonnal következik, hogy

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}, \quad (8.4)$$

vagyis a mátrix összeadás kommutatív, mert a számok összeadása kommutatív művelet.

A 8.5 Definíció feltételeit kielégítő típusu $\underline{A}$, $\underline{B}$ és $\underline{C}$ mátrixokra teljesül, hogy

$$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}), \quad (8.5)$$

vagyis a mátrix összeadás asszociatív, mert a számok összeadása asszociatív művelet.

Az $(m \times n)$ -es $\underline{A}$ és az $(m \times n)$ -es zérusmátrix összege $\underline{A}$, vagyis

$$\underline{A} + \underline{0} = \underline{A}, \quad (8.6)$$

A 8.5 és 8.6 Definícióból következik, hogy egy mátrixnak és ellentettjének összege a zérusmátrix:

$$\underline{A} + (-\underline{A}) = \underline{0}. \quad (8.7)$$

8.9 Definíció. Az $(m \times n)$ -es $\underline{A} = [a_{ik}]$ -mátrix λ számmal képzett $\lambda \cdot \underline{A}$ szorzata az az $(m \times n)$ -es $\underline{B} = [b_{ik}]$ mátrix, melyre
 $b_{ik} = \lambda a_{ik}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$.

A 8.5, 8.9 Definíciók, valamint a valós és komplex számok kommutatív, asszociatív, ill. disztributív műveleti azonosságainak felhasználásával könnyen belátható, hogy teljesülnek a következő műveleti azonosságok:
Tetszőleges α és β számra

$$(\alpha + \beta) \underline{A} = \alpha \underline{A} + \beta \underline{A}, \quad (8.8)$$

vagyis a mátrixszal való szorzás a számok összeadására nézve disztributív művelet.

Tetszőleges α számra, ill. azonos típusu $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixokra

$$\alpha(\underline{A} + \underline{B}) = \alpha \underline{A} + \alpha \underline{B}, \quad (8.9)$$

vagyis a mátrixok számmal szorzása a mátrix összeadásra nézve disztributív művelet.

Tetszőleges α és β számra

$$\alpha(\beta \underline{A}) = (\alpha\beta) \underline{A}. \quad (8.10)$$

Nyilvánvaló, hogy bármely $\underline{A}$ mátrixra

$$1 \cdot \underline{A} = \underline{A}, \quad (8.11)$$

és

$$(-1) \cdot \underline{A} = -\underline{A}.$$

8.2 Példa. Tételezzük fel, hogy egy előkészítő üzemszám m-féle nyersanyag felhasználásával n-féle félkész terméket állít elő és legyen az (m×n)-es $\underline{A} = [a_{ik}]$ mátrix a fajlagos nyersanyag felhasználás mátrixa, vagyis a_{ik} : az i-edik fajta nyersanyagból felhasznált mennyiség a k-adik fajta félkész termék egy egységének előállításakor (l. 8.1 Példa). Az összeszerelő üzemszám az előkészítő által gyártott n-féle félkész termékből p-féle készterméket állít elő, és az (n×p) típusu $\underline{B} = [b_{kl}]$ mátrix szolgáltatja a szerelő üzemszám fajlagos félkész termék felhasználási mátrixát, vagyis b_{kl} : a k-adik fajta félkész termékből felhasznált mennyiség az l-edik fajta késztermék egy egységének előállításakor. Ha most feltesszük a kérdést, hogy az i-edik fajta nyersanyagból mennyire van szükség az l-edik fajta késztermék egy egységének előállításához, a válasz a következő. Az i-edik fajta nyersanyagból $a_{i1}, \dots, a_{in}$ mennyiség kell rendre, az 1., 2., ..., n. fajta félkész termék egy egységéhez; az 1., 2., ..., n. fajta félkész termékből viszont rendre $b_{1l}, b_{2l}, \dots, b_{nl}$ mennyiség kell az l-edik késztermék egy egységéhez; tehát az i-edik fajta nyersanyagból $c_{i1} = a_{i1} \cdot b_{1l} + a_{i2} \cdot b_{2l} + \dots + a_{in} \cdot b_{nl}$ mennyiség kell az l-edik késztermék egy egységéhez. Az (m×p) típusu $\underline{C} = [c_{il}]$ mátrix, ahol $c_{il} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl}$, a szerelő üzemszám fajlagos nyersanyag-felhasználási mátrixa.

E példát szem előtt tartva értelmezzük mátrixok szorzását a következőképpen:

8.10 Definíció. Az (m×n)-es $\underline{A} = [a_{ik}]$ és az (n×p)-es $\underline{B} = [b_{ik}]$ mátrix szorzatának nevezzük és $\underline{AB}$ -vel jelöljük azt az (m×p)-es $\underline{C} = [c_{ik}]$ mátrixot, ahol $c_{ik} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell k}$
 $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p.$

A 8.10 Definícióban a c_{ik} elemeket "sor-oszlop kombinálással" kapjuk.

A 8.10 Definícióból következik, hogy az n-edrendű kvadratikus mátrixok szorzata is n-edrendű kvadratikus mátrix. Az (m×n)-es $\underline{A} = [a_{ik}]$ mátrix és az (n×1)-es $\underline{x} = [x_k]$ oszlopvektor szorzata (m×1)-es $\underline{b} = [b_i]$ oszlopvektor, ahol $b_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, i = 1, 2, \dots, m$, vagyis

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Az $(1 \times n)$ -es $\underline{a}' = [a_i]$ sorvektor és az $(n \times 1)$ -es $\underline{b} = [b_i]$ oszlopvektor szorzata (1×1) -es $[c]$ mátrix, ahol $c = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, vagyis

$$\underline{a}' \cdot \underline{b} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n]. \quad (8.12)$$

Az 1×1 -es $[c]$, $c \in \mathbb{R}$, vagy $c \in \mathbb{Z}$ mátrixok halmaza a skalárok (valós, vagy komplex számok) halmazával azonosítható. Ezért $[c]$ helyett a következőkben c -t írunk. Az $(n \times 1)$ -es $\underline{a} = [a_i]$ oszlopvektor és az $(1 \times n)$ -es $\underline{b}' = [b_k]$ sorvektor szorzata, amelyet diadikus szorzatnak (röviden diádnak) nevezünk, az $(n \times n)$ -es $\underline{C} = [c_{ik}]$ mátrix, ahol $c_{ik} = a_i b_k$, vagyis

$$\underline{a} \cdot \underline{b}' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, b_2, \dots, b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Az $(m \times n)$ -es $\underline{A}$ mátrix és az $\underline{E}_n$ egységmátrix szorzata

$$\underline{A} \cdot \underline{E}_n = \underline{A}. \quad (8.14)$$

Az $\underline{E}_n$ mátrix és az $(n \times p)$ -s $\underline{A}$ mátrix szorzata

$$\underline{E}_n \underline{A} = \underline{A}. \quad (8.15)$$

Ha $\underline{A}$ $(m \times n)$ -es mátrix és $\underline{0}$ az $(n \times p)$ -s, ill. $(p \times m)$ -es zérusmátrix, akkor

$$\underline{A} \cdot \underline{0} = \underline{0} \underline{A} = \underline{0}. \quad (8.16)$$

Az $(m \times n)$ -es $\underline{A}$ és az $(n \times p)$ -s $\underline{B}$ mátrixok szorzása felcserélt sorrendben csak akkor végezhető el, vagyis $\underline{B} \cdot \underline{A}$ csak akkor képezhető, de általában

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}, \quad (8.17)$$

vagyis a szorzás nem kommutatív. Azt mondjuk, hogy az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixok felcserélhetők (egymással kommutálnak), ha $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$. Könnyen igazolható az, hogy például az n -edrendű diagonális mátrixok felcserélhetők.

8.3 Példa. Legyen $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ és $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Megmutatjuk, hogy $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$. Végezzük el a szorzást:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

tehát $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$.

8.4 Példa. Adjuk meg a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy a másodrendű $\underline{A}$ mátrix és $\underline{A}'$ transzponáltja felcserélhető legyen.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{A}' = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}' \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

$\underline{A} \cdot \underline{A}'$ akkor és csak akkor egyenlő $\underline{A}' \cdot \underline{A}$ -val, ha a megfelelő helyen álló elemeik megegyeznek, vagyis ha

$$a_{22}^2 + a_{12}^2 = a_{11}^2 + a_{21}^2$$

$$a_{22}^2 + a_{21}^2 = a_{22}^2 + a_{12}^2$$

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}.$$

Az első két egyenlet akkor és csak akkor igaz, ha $a_{12} = \pm a_{21}$. Ha $a_{12} = a_{21}$, vagyis ha az $\underline{A}$ mátrix szimmetrikus, akkor a harmadik egyenlet is teljesül. Ha $a_{12} = -a_{21} \neq 0$, akkor a harmadik egyenlet csak az $a_{11} = a_{22}$ esetben elégíthető ki. Tehát $\underline{A}$ és $\underline{A}'$ akkor és csak akkor cserélhető fel, ha $\underline{A}$ szimmetrikus mátrix, vagy ha az $\underline{A}$ mátrix főátlójában álló elemek egyenlők és a mellékátlóban álló elemek egymás ellentettjei.

A mátrixok szorzása a következő műveleti azonosságoknak tesz eleget.

Az $(m \times n)$ -es $\underline{A} = [a_{ik}]$, az $(n \times p)$ -s $\underline{B} = [b_{ik}]$ és a $(p \times q)$ -s $\underline{C} = [c_{ik}]$ mátrixokra

$$(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}), \quad (8.18)$$

vagyis a mátrixok szorzása asszociatív.

Bizonyítás. (8.18) jobb és bal oldalán $(m \times q)$ típusú mátrix van, mert $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{R} = [r_{ik}]$ $(m \times p)$ -s, ill. $\underline{B} \cdot \underline{C} = \underline{S} = [s_{ik}]$ $(n \times q)$ -es, tehát $\underline{R} \cdot \underline{C}$ $(m \times q)$ -s és $\underline{A} \cdot \underline{S}$ is $(m \times q)$ -s mátrix. $\underline{R} \cdot \underline{C}$, ill. $\underline{A} \cdot \underline{S}$ i -edik sorának k -adik eleme az $r_{ih} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell h}$, $h = 1, 2, \dots, p$ és $s_{\ell k} = \sum_{h=1}^p b_{\ell h} c_{hk}$, $\ell = 1, 2, \dots, n$. helyettesítés után a következőképpen írható fel:

$$\sum_{h=1}^p \left(\sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell h} \right) c_{hk}, \text{ ill. } \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \sum_{h=1}^p b_{\ell h} c_{hk}.$$

Az összegezés sorrendjének felcserélésével az utóbbi elem

$$\sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \sum_{h=1}^p b_{\ell h} c_{hk} = \sum_{h=1}^p c_{hk} \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell h},$$

vagyis egyenlő az előbbivel, tehát $(\underline{A} \cdot \underline{B})\underline{C}$ és $\underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C})$ i -edik sorának k -adik eleme megegyezik, $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, q$.

Az $(m \times n)$ -es $\underline{A} = [a_{i\ell}]$ és az $(n \times p)$ -s $\underline{B} = [b_{\ell h}]$, ill. $\underline{C} = [c_{hk}]$ mátrixokra

$$\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} \quad (8.19)$$

vagyis a mátrix szorzás disztributív művelet.

Bizonyítás. A 8.5 és a 8.10 Definíciók felhasználásával (8.19) azt jelenti,

hogy $\sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} (b_{\ell k} + c_{\ell k}) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell k} + \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} c_{\ell k}$, $i = 1, 2, \dots, m$;
 $k = 1, 2, \dots, p$, ami nyilvánvalóan igaz.

Az $(m \times n)$ -s $\underline{A} = [a_{i\ell}]$ és $\underline{B} = [b_{\ell k}]$, ill. az $(n \times p)$ -s, $\underline{C} = [c_{\ell k}]$ mátrixokra

$$(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{C} + \underline{B} \cdot \underline{C}, \quad (8.20)$$

vagyis a mátrix szorzás az összeadásra nézve disztributív művelet akkor is, ha jobbról szorozzuk az összeget.

Bizonyítás. A 8.5 és a 8.10 Definíciók felhasználásával (8.20) mindkét oldalán $(m \times p)$ -s mátrix van és ezen mátrixok i -edik sorának k -adik eleme megegyezik, mert

$$\sum_{\ell=1}^n (a_{i\ell} + b_{i\ell}) c_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} c_{\ell k} + \sum_{\ell=1}^n b_{i\ell} c_{\ell k}$$

$i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, p$.

Tetszőleges α számra és az $(m \times n)$ -es $\underline{A}$, ill. az $(n \times p)$ -s $\underline{B}$ mátrixokra

$$\alpha (\underline{A} \cdot \underline{B}) = (\alpha \cdot \underline{A}) \cdot \underline{B} = \underline{A} \cdot (\alpha \underline{B}) \quad (8.21)$$

Bizonyítás. A 8.9 és a 8.10 Definíciók felhasználásával (8.21) bal és jobb oldalán $(m \times p)$ -s mátrix van és e mátrixok i -edik során k -adik elemei egyenlők, mert

$$\alpha \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^n (\alpha a_{i\ell}) b_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} (\alpha b_{\ell k})$$

$i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, p.$

Legyenek $\underline{A} = [a_{ik}]$ és $\underline{B} = [b_{ik}]$ azonos típusú mátrixok, akkor

$$(\underline{A} + \underline{B})' = \underline{A}' + \underline{B}', \quad (8.22)$$

vagyis összeg transzponáltja egyenlő a transzponáltak összegével.

Bizonyítás. A 8.4 és a 8.5 Definíciók felhasználásával egyszerűen következik.

Az $(m \times n)$ -es $\underline{A} = [a_{ik}]$, ill. az $(n \times p)$ -s $\underline{B} = [b_{ik}]$ mátrixokra

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})' = \underline{B}' \cdot \underline{A}', \quad (8.23)$$

vagyis szorzat transzponáltja a felcserélt tényezők transzponáltjainak szorzata.

Bizonyítás. Az $(\underline{A} \cdot \underline{B})'$ mátrix típusa $(p \times m)$. A $(p \times n)$ -es $\underline{B}' = [b'_{i\ell}]$ és az $(n \times m)$ -es $\underline{A}' = [a'_{\ell k}]$ mátrixok szorzata szintén $(p \times m)$ típusú. Ezen mátrixok i -edik sorának k -adik eleme megegyezik, mert a 8.10 és a 8.4 Definíciók felhasználásával,

$$\sum_{\ell=1}^n a_{k\ell} b_{\ell i} = \sum_{\ell=1}^n b'_{i\ell} a'_{\ell k},$$

$i = 1, 2, \dots, p; \quad k = 1, 2, \dots, m.$

9. A rendezett szám n-esek lineáris tere

Ha a valós számok R (a komplex számok Z) halmazát n példányban vesszük (n pozitív egész szám) és képezzük ennek az n számú halmaznak R^n (Z^n) direkt szorzatát (l. I. Kötet, 3. pont) a rendezett szám n-esek halmazához jutunk. Az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rendezett szám n-es R^n -nek, ill. Z^n -ek eleme aszerint amint $x_k \in R$, ill. $x_k \in Z$, $k = 1, 2, \dots, n$. Jelöljük az n elemű oszlopvektorok, ill. sorvektorok halmazát Q^n -nel, ill. S^n -nel. Az R^n (vagy Z^n) és a Q^n , ill. az R^n (vagy Z^n) és az S^n halmazok között egy-egyértelmű megfeleltetést létesítünk, ha minden $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ($\in Z^n$)-nek megfeleltetjük az

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

oszlopvektort, ill. az $\underline{x}' = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ sorvektort. A Q^n halmaz, ill. az S^n halmaz elemein az előző pont alapján műveleteket végezhetünk. Ezek szerint "a rendezett szám n-esek oszlopvektoroknak, vagy sorvektoroknak tekinthetők" és ebben az alakjukban rajtuk a mátrix-algebra megfelelő műveletei elvégezhetők. Ebben a pontban a továbbiakban az n -elemű oszlopvektorok Q^n halmazával foglalkozunk, azonban mindaz, amiről szó lesz, változtatás nélkül igaz a sorvektorok S^n halmazában is, ill. az előbbieken alapján a rendezett szám n-esek R^n , ill. Z^n halmazára is vonatkoztatható.

A Q^n halmazban a 8.5 és 8.9 Definíciók alapján értelmezve van elemek összeadása és valós (vagy komplex) számmal való szorzása. A 8. pontban bebizonyítottuk, hogy ezek a műveletek bizonyos műveleti azonosságoknak eleget tesznek, most összefoglaljuk ezeket az azonosságokat:

Minden

$$\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in Q^n\text{-re} \quad \underline{x} + \underline{y} \in Q^n;$$

$$\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x} \quad (9.1)$$

$$(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}); \quad (9.2)$$

$$\underline{x} + \underline{0} = \underline{x} \quad (9.3)$$

ahol $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ a zérusvektor.

$$\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0}; \quad (9.4)$$

minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{Z}$)-re $\alpha \underline{x} \in \mathbb{Q}^n$,

$$\alpha (\underline{x} + \underline{y}) = \alpha \underline{x} + \alpha \underline{y}; \quad (9.5)$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \underline{x} = \alpha \cdot \underline{x} + \beta \cdot \underline{x}; \quad (9.6)$$

$$\alpha(\beta \cdot \underline{x}) = (\alpha\beta) \cdot \underline{x}; \quad (9.7)$$

$$1 \cdot \underline{x} = \underline{x}. \quad (9.8)$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a (9.1) - (9.8) műveleti azonosságok megegyeznek a közös tér vektorain értelmezett és az 1. pontban tárgyalt műveletek azonosságaiival.

Legyen $\underline{x}_k \in \mathbb{Q}^n$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ (ill. $\mathbb{Z}$), $k = 1, 2, \dots, m$;

a $\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_m \underline{x}_m \in \mathbb{Q}^n$ oszlopvektort az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m$ oszlopvektorok lineáris kombinációjának nevezzük. Az 1. pont végén levő megjegyzést figyelembe véve és általánosítva értelmezzük oszlopvektorok lineáris függőségét és függetlenségét.

9.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m \in \mathbb{Q}^n$ oszlopvektorok

lineárisan összefüggők, ha van $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

(ill. $\mathbb{Z}$), melyre $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_m| > 0$ és

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_m \underline{x}_m = \underline{0}.$$

Más szóval az $\underline{x}_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) oszlopvektorokat akkor mondjuk lineárisan összefüggőknek, ha van "nem-triviális zérussá váló lineáris kombinációjuk". "Nem-triviális" az olyan lineáris kombináció, melyben nem minden együttható zérus (legalább az egyik λ_k nem-zérus). A $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_m| > 0$ feltétel éppen a triviális esetet zárja ki.

9.2 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m \in Q^n$ oszlopvektorok lineárisan függetlenek, ha nem lineárisan összefüggők, vagyis ha csak a triviális lineáris kombinációjuk zérus; más szóval, ha a

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_m \underline{x}_m = \underline{0}$$

egyenlőségből szükségképpen következik

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_m = 0.$$

A 9.1 Definícióból nyilvánvalóan következik a

9.1 Tétel. Az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m \in Q^n$ oszlopvektorok akkor és csak akkor lineárisan összefüggők, ha legalább az egyik közülük kifejezhető mint a többi $m-1$ számú vektor lineáris kombinációja.

A vektorok lineáris összefüggésével és függetlenségével kapcsolatban néhány tételt bizonyítottunk. E tételekből kiderül, hogy a Q^n halmazban maximálisan hány vektor lehet lineárisan független és hogyan lehet kellő számú lineárisan független vektort felhasználni a Q^n halmaz összes vektorának megadására.

9.2 Tétel. Ha az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m \in Q^n$ oszlopvektorok közül az egyik a zérusvektor, akkor e vektorok lineárisan összefüggők.

Bizonyítás. Legyen pl. $\underline{x}_1 = \underline{0}$. Ekkor a $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_m = 0$ választással képzett nem-triviális lineáris kombináció $\lambda_1 \underline{0} + 0 \cdot \underline{x}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{x}_m = \underline{0}$!

9.3 Tétel. Ha az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m \in Q^n$ oszlopvektorok lineárisan összefüggők és $\underline{x}_{m+1}, \dots, \underline{x}_p \in Q^n$ tetszőleges oszlopvektorok, akkor az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m, \underline{x}_{m+1}, \dots, \underline{x}_p$ vektorok is lineárisan összefüggők.

Bizonyítás. A feltétel szerint vannak $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ számok, melyekre $\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_m \underline{x}_m = \underline{0}$ és $|\lambda_1| + \dots + |\lambda_m| > 0$. Ekkor azonban a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \dots = \lambda_p = 0$ együtthatókkal képzett nem-triviális lineáris kombináció

$$\lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \dots + \lambda_m \cdot \underline{x}_m + 0 \cdot \underline{x}_{m+1} + \dots + 0 \cdot \underline{x}_p = \underline{0}.$$

9.4 Következmény. Ha az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m \in Q^n$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor az $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m\}$ vektor-halmaz bármely nem-üres részhalmaza is lineárisan független vektorokból áll.

9.5 Tétel. Q^n -ben van n számú lineárisan független oszlopvektor.

Bizonyítás. Legyen

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (9.9)$$

vagy a Kronecker szimbólum alkalmazásával (8.3 Definíció) $\underline{e}_i = [\delta_{ik}]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Megmutatjuk, hogy a (9.9) oszlopvektorok lineárisan függetlenek. Tételezzük fel, hogy valamilyen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számokra

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i = \underline{0}.$$

A λ_i számokkal a 8.9 Definíció szerint beszorozva és az

összegezést a 8.5 Definíció szerint elvégezve ez azt jelenti, hogy

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{vagyis } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

9.6 Tétel. Tetszőleges $\underline{x} \in Q^n$ oszlopvektor egyértelműen felírható, mint a (9.9) vektorok lineáris kombinációja.

Bizonyítás. Legyen

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \text{ Mivel}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n \quad (9.10)$$

vagyis $\underline{x}$ valóban a (9.9) vektorok lineáris kombinációja. Megmutatjuk, hogy a (9.10) felbontás egyértelműen meg van határozva. Tegyük fel ui., hogy

$$\underline{x} = y_1 \underline{e}_1 + y_2 \underline{e}_2 + \dots + y_n \underline{e}_n$$

és vonjuk ki az utóbbi egyenlőséget (9.10)-ből:

$$(x_1 - y_1) \underline{e}_1 + (x_2 - y_2) \underline{e}_2 + \dots + (x_n - y_n) \underline{e}_n = 0.$$

A 9.5 Tétel szerint azonban az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, vagyis $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \dots = x_n - y_n = 0$, tehát $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$.!

9.3 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m \in Q^n$ oszlopvektorok a Q^n halmaz bázisát alkotják, ha lineárisan függetlenek és ha Q^n minden oszlopvektora előállítható, mint az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ vektorok lineáris kombinációja. (V. 8. 3.1 Definíció.)

9.7 Tétel. Ha $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m \in Q^n$ a Q^n halmaz bázisa, akkor Q^n bármely eleme csak egyféleképpen írható fel $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás. A bizonyítás szóról szóra megegyezik a 9.6 Tétel bizonyításának (9.10)-et követő részével, így azt az olvasóra bizzuk!

A 9.5 és 9.6 Tétel értelmében a (9.9) vektorok a Q^n halmaz bázisát alkotják. Megmutatjuk, hogy Q^n minden bázisa pontosan n számú oszlopvektorból áll, vagyis az előző Definícióban szükségképpen $m = n$.

9.8 Tétel. Legyenek $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_r \in Q^n$ lineárisan függetlenek; akkor $r \leq n$ és a (9.9) vektorok közül kiválasztható $n - r$ számú úgy, hogy $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_r, \underline{e}_{i_{r+1}}, \underline{e}_{i_{r+2}}, \dots, \underline{e}_{i_n}$ Q^n bázisát alkotják ($i_\ell \neq i_k, \ell \neq k$).

Bizonyítás. A bizonyítást úgy végezzük, hogy megmutatjuk: a (9.9) vektorok közül elhagyható egy és ez $\underline{b}_1$ -gyel pótolható úgy, hogy $\underline{b}_1$ és a (9.9)-ből megmaradt $n-1$ számú vektor Q^n bázisa; másodszor a megmaradt $n-1$ számú $\underline{e}_k$ vektorból elhagyható még egy és ez $\underline{b}_2$ -vel pótolható úgy, hogy $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ és a (9.9)-ből megmaradt $n-2$ számú vektor Q^n bázisa, és így tovább. Ebből az az állítás, hogy $r \leq n$, következik. Uí. tételezzük fel, hogy az előbbieket bizonyítását már elvégeztük és $r > n$; akkor az n -edik lépés után (9.9)-ből már minden vektort elhagytunk és $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ a Q^n tér bázisa. Q^n minden eleme, így $\underline{b}_{n+1}$ is ($n+1 \leq r$) felírható, mint a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ vektorok lineáris kombinációja:

$$\underline{b}_{n+1} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \dots + \lambda_n \underline{b}_n,$$

Ez azonban ellentmond annak, hogy $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n, \underline{b}_{n+1}$ lineárisan függetlenek (l. 9.1 Tétel).

Térjünk vissza az előző bekezdés elején mondottak bizonyítására. Miután $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ a Q^n halmaz bázisa, valamilyen $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n}$ számokkal

$$\underline{b}_1 = \lambda_{11} \underline{e}_1 + \lambda_{12} \underline{e}_2 + \dots + \lambda_{1n} \underline{e}_n. \quad (9.11)$$

A λ_{1k} ($k = 1, \dots, n$) számok közül legalább az egyik nem zérus, mert különben $\underline{b}_1 = \underline{0}$ lenne és ekkor a 9.2 Tétel értelmében $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_r$ nem

lehetne lineárisan független vektor-halmaz. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\lambda_{11} \neq 0$. Így (9.11)-ből

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{\lambda_{11}} \underline{b}_1 + \left(-\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}\right) \underline{e}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{11}}\right) \underline{e}_n$$

következik. Mivel Q^n bármely eleme felírható, mint $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ lineáris kombinációja és az előbbiek szerint $\underline{e}_1$ felírható, mint $\underline{b}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ lineáris kombinációja, következik, hogy Q^n bármely eleme felírható, mint $\underline{b}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ lineáris kombinációja. Azonban e vektorok lineárisan függetlenek, amit indirekt uton igazolunk. Tételezzük fel, hogy van $\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{1n}$, melyek nem mindegyike zérus és

$$\mu_{11} \underline{b}_1 + \mu_{12} \underline{e}_2 + \dots + \mu_{1n} \underline{e}_n = \underline{0} \quad (9.12)$$

Ha $\mu_{11} = 0$ lenne, akkor $\mu_{12}, \mu_{13}, \dots, \mu_{1n}$ között kellene zérustól különbözőnek lennie, vagyis a

$$\mu_{12} \underline{e}_2 + \mu_{13} \underline{e}_3 + \dots + \mu_{1n} \underline{e}_n$$

nem-triviális lineáris kombináció zérus, ellentétben azzal, hogy $\underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ lineárisan függetlenek. Tehát $\mu_{11} \neq 0$. Ekkor azonban (9.12)-ből

$$\underline{b}_1 = 0 \cdot \underline{e}_1 + \left(-\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}\right) \underline{e}_2 + \dots + \left(-\frac{\mu_{1n}}{\mu_{11}}\right) \underline{e}_n. \quad (9.13)$$

Mivel a 9.6 Tétel értelmében $\underline{b}_1$ -nek az $\underline{e}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként való előállítása egyértelműen meghatározott, (9.11) és (9.13) összehasonlítása azt mutatja, hogy $\lambda_{11} = 0$, ami ellentmondás. Igazoltuk tehát, hogy $\underline{b}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ a Q^n halmaz bázisa.

E bázisból kiindulva, valamilyen $\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2n}$ számokkal írhatjuk, hogy

$$\underline{b}_2 = \lambda_{21} \underline{b}_1 + \lambda_{22} \underline{e}_2 + \dots + \lambda_{2n} \underline{e}_n. \quad (9.14)$$

A λ_{2k} ($k = 1, \dots, n$) számok közül legalább az egyik nem zérus, mert különben $b_2 = 0$ lenne. Ha $\lambda_{22} = \lambda_{23} = \dots = \lambda_{2n} = 0$ lenne, akkor $b_2 - \lambda_{21} b_1 = 0$, $\lambda_{21} \neq 0$ miatt b_1 és b_2 lineárisan összefüggő lenne, ellentétben a feltevessel. Így a λ_{2k} ($k = 2, \dots, n$) számok között van zérustól különböző. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\lambda_{22} \neq 0$. Így (9.14)-ből

$$e_2 = \left(-\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}}\right) b_1 + \left(-\frac{1}{\lambda_{22}}\right) b_2 + \left(-\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{22}}\right) e_3 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{2n}}{\lambda_{22}}\right) e_n$$

következik. Mivel Q^n bármely eleme felírható, mint $b_1, e_2, \dots, e_n$ lineáris kombinációja és az előbbiek szerint e_2 felírható, mint $b_1, b_2, e_3, \dots, e_n$ lineáris kombinációja, Q^n bármely eleme felírható, mint $b_1, b_2, e_3, \dots, e_n$ lineáris kombinációja. Azonban e vektorok lineárisan függetlenek, amit indirekt uton igazolunk. Tételezzük fel, hogy van $\mu_{21}, \mu_{22}, \dots, \mu_{2n}$, melyek nem mindegyike zérus és

$$\mu_{21} b_1 + \mu_{22} b_2 + \mu_{23} e_3 + \dots + \mu_{2n} e_n = 0.$$

Ha $\mu_{22} = 0$ lenne, a többi μ_{2k} ($k \neq 2$) között lenne zérustól különböző; vagyis $b_1, e_3, \dots, e_n$ lineárisan összefüggő lenne, ami ellentmondás. Tehát $\mu_{22} \neq 0$ és

$$b_2 = \left(-\frac{\mu_{21}}{\mu_{22}}\right) b_1 + 0 \cdot e_2 + \left(-\frac{\mu_{23}}{\mu_{22}}\right) e_3 + \dots + \left(-\frac{\mu_{2n}}{\mu_{22}}\right) e_n.$$

Az utóbbi egyenlőséget (9.14)-gyel összehasonlítva $\lambda_{22} = 0$ adódik, ami ellentmondás.

És így tovább; az eljárást folytatva a b_k vektorok rendre egymás után behozhatók a (9.9) bázisba egy-egy e_k vektor elhagyása mellett. Vég-eredményben $b_1, b_2, \dots, b_r$ és a (9.9) vektorok közül megmaradt $n-r$ számú vektor Q^n bázisa.!

A 9.8 Tételnek fontos következményei vannak.

9.9 Következmény. Bárhogyan adunk meg $n+1$ számú oszlopvektort Q^n -ben, azok lineárisan összefüggők.

Bizonyítás. Közvetlenül adódik a 9.8 Tételből.!

9.10 Következmény. Ha $b_1, b_2, \dots, b_n \in Q^n$ lineárisan független vektorok, akkor Q^n bázisát alkotják.

Bizonyítás. Közvetlenül adódik a 9.8 Tételből, ha ott a b_k vektorok száma $r = n$!

9.11 Következmény. Q^n minden bázisa pontosan n számú oszlopvektorból áll.

Bizonyítás. A 9.8 Tételből látható, hogy Q^n bármely bázisa legfeljebb n számú vektorból áll. Csak azt kell belátni, hogy n -nél kevesebb vektor nem alkothat bázist. Tegyük fel, hogy $a_1, a_2, \dots, a_m$ Q^n bázisa és $m \leq n$.

Akkor a 9.8 Tétel bizonyítása megismételhető azzal a változtatással, hogy $e_1, \dots, e_n$ ill. $b_1, \dots, b_r$ szerepét $a_1, \dots, a_m$ ill. $e_1, \dots, e_n$ játssza. Azt kapjuk, hogy $n \leq m$, tehát $m = n$!

Az előbbiek alapján azt mondjuk, hogy az n elemű oszlopvektorok " n -dimenziós lineáris teret" alkotnak vagyis Q^n n -dimenziós lineáris tér (l. 16. pont). Q^n elemeit, az n -elemű oszlopvektorokat, n -dimenziós oszlopvektoroknak is nevezzük.

A következőkben, többek között a lineáris egyenletrendszerek tárgyalásában, fontos szerepük lesz a Q^n tér olyan részhalmazainak, melyek az oszlopvektorok összeadására és számmal való szorzására nézve "zártak". Az ilyen részhalmazokat fogjuk "altereknek" nevezni.

9.4 Definíció. A Q^n tér $H^m \subset Q^n$ részhalmazát m -dimenziós alternek nevezzük, ha minden $x, y \in H^m, \alpha \in R$ (vagy Z)-re

$(x + y) \in H^m$ és $\alpha \cdot x \in H^m$, továbbá ha H^m -ben van m számú lineárisan független oszlopvektor, de bárhogyan választjuk ki H^m m -nél nagyobb számú elemét, azok lineárisan összefüggők.

Nyilvánvalóan igazak a következők. A zérusvektor, 0 a Q^n tér minden alterének eleme. Alter dimenziója, m nem lehet nagyobb n -nél (l. 9.9 Következmény). Ha H^n a Q^n tér n -dimenziós altere, akkor $H^n = Q^n$ (l. 9.10 Következmény).

Az $a_1, a_2, \dots, a_m \in Q^n$ oszlopvektorok összes lineáris kombinációjából álló halmazt a Q^n tér $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorok által kifeszített részhalmazának nevezzük.

9.5 Definíció. Legyen H^m a Q^n tér m -dimenziós altere; azt mondjuk, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m \in H^m$ oszlopvektorok a H^m altér bázisát alkotják, ha lineárisan függetlenek.

9.12 Tétel. Ha $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ az m -dimenziós H^m altér bázisát alkotják, akkor minden $\underline{x} \in H^m$ oszlopvektor egyértelműen előállítható az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás. Az m -dimenziós altér definíciójából következik, hogy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m, \underline{x}$ lineáris összefüggők, vagyis van $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu$, hogy

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_m \underline{a}_m + \mu \underline{x} = \underline{0}$$

és $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_m| + |\mu| > 0$. Ha itt $\mu = 0$ lenne, a λ_k -k között kellene zérustól különböző számnak lenni, de akkor $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ lineárisan összefüggők lennének ellentétben a feltevéssel. Tehát $\mu \neq 0$ és

$$\underline{x} = \left(-\frac{\lambda_1}{\mu}\right) \underline{a}_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\mu}\right) \underline{a}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_m}{\mu}\right) \underline{a}_m. \quad (9.15)$$

Az, hogy a (9.15) előállítás egyértelműen meghatározott, ugyanugy bizonyítható, mint a 9.6 Tétel (9.10)-et követő része ($\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ szerepét most $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ játssza).!

9.13 Tétel. Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m \in Q^n$ lineárisan független oszlopvektorok; Q^n -nek $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ által kifeszített H^m részhalmaza Q^n m -dimenziós altere (melynek $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ bázisa).

Bizonyítás. Az, hogy az $\underline{a}_k$ -k összes lineáris kombinációjából álló

$$H^m = \left\{ \lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_m \underline{a}_m : (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in R^m \text{ (vagy } Z^m) \right\}$$

halmaz eltér, nyilvánvaló, mivel $\underline{a}_k$ -k két lineáris kombinációjának összege és $\underline{a}_k$ -k egy lineáris kombinációjának számszorosa ugyancsak $\underline{a}_k$ -k lineáris kombinációja. Be kell látni, hogy H^m m -dimenziós. H^m -ben van m számú lineárisan független vektor, ti. $\underline{a}_k \in H^m$, $k = 1, 2, \dots, m$. H^m definíciója szerint H^m minden eleme előállítható az $\underline{a}_k$ oszlopvektorok lineáris kombinációjaként. Könnyen látható az is, hogy ez az előállítás egyértelmű. Azt kell tehát belátni, hogy ha a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_r \in H^m$ vektorok

lineárisan függetlenek, akkor $r \leq m$. Ennek igazolása ugyanugy történik, mint a 9.8 Tételé ($e_1, \dots, e_n$ szerepét most $a_1, \dots, a_m$ játssza).

Innen azonnal adódik az egyszerű

9.14 Következmény. Az $a_1, a_2, \dots, a_p \in Q^n$ vektorok Q^n egy r dimenziós H^r alterét feszítik ki, ahol $r(\leq p)$ az $a_1, a_2, \dots, a_p$ oszlopvektorok között a lineárisan függetlenek maximális száma.

9.15 Következmény. Ha $a_1, a_2, \dots, a_p \in Q^n$ egy r -dimenziós H^r alteret feszítenek ki és a $c_1, c_2, \dots, c_q$ oszlopvektorok mind az a_k ($k = 1, 2, \dots, p$) vektorok lineáris kombinációi, akkor c_k -k ($k = 1, \dots, q$) között a lineárisan függetlenek maximális száma legfeljebb r .

9.1 Példa. Tekintsük Q^3 -ban az $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lineárisan független oszlopvektorokat. A 9.13 Tételből következik, hogy Q^3 -nak az e_1 és e_2 által kifeszített H^2 részhalmaza Q^3 -ak 2-dimenziós altere és

$$H^2 = \{ x e_1 + y e_2 : (x, y) \in R^2 \} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : (x, y) \in R^2 \right\}.$$

Ha az e_1 -et és e_2 -t a közös térbeli i, j, k bázisban az i és j vektoroknak megfelelő oszlopvektoroknak tekintjük, akkor H^2 vektorai az i és j vektorok által meghatározott síkállással párhuzamosak.

9.2 Példa. Igazoljuk, hogy Q^n -ben a

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1r} \\ \delta_{11} \\ \vdots \\ \delta_{1, n-r} \end{bmatrix}$$

($i = 1, \dots, n-r$; δ_{ik} a Kronecker szimbólum, c_{ik} tetszőleges számok),
vektorok lineárisan függetlenek. Az igazolás a 9.5 Tétel bizonyítási mód-
szerével történik. Bevezetjük a következő jelölést:

$$\varepsilon_{r+1} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{r+2} = \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots \quad \varepsilon_n = \begin{bmatrix} c_{n-r, 1} \\ c_{n-r, 2} \\ \vdots \\ c_{n-r, r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tegyük fel, hogy

$$\lambda_{r+1} \varepsilon_{r+1} + \lambda_{r+2} \varepsilon_{r+2} + \dots + \lambda_n \varepsilon_n = 0$$

A beszorzásokat és az összeadást elvégezve kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \lambda_{r+1} c_{11} + \lambda_{r+2} c_{21} + \dots + \lambda_n c_{n-r,1} \\ \lambda_{r+1} c_{12} + \lambda_{r+2} c_{22} + \dots + \lambda_n c_{n-r,2} \\ \vdots \\ \lambda_{r+1} c_{1r} + \lambda_{r+2} c_{2r} + \dots + \lambda_n c_{n-r,r} \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ahonnan $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_n = 0$ következik!

10. Determinánsok

Ha az n -dimenziós oszlopvektorok Q^n terében, vagy az n -dimenziós sorvektorok S^n terében megadunk n számú vektort, alapvetően fontos kérdés az, hogy ezek lineárisan függetlenek-e vagy sem. Az $\underline{a}_k \in Q^n$, $k = 1, 2, \dots, n$ oszlopvektorokból, ill. az $\underline{\alpha}_i' \in S^n$, $i = 1, 2, \dots, n$ sorvektorokból n -edrendű négyzetes mátrixot készíthetünk, melynek k -adik oszlopa, ill. i -edik sora az $\underline{a}_k$, ill. $\underline{\alpha}_i'$ vektor. Fordítva is, célszerű lesz a továbbiakban valamely mátrix oszlopait, ill. sorait oszlopvektoroknak, ill. sorvektoroknak tekinteni. E pontban végig a következő jelöléseket fogjuk használni. $\underline{A}$ az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

n -edrendű négyzetes mátrixot jelöli.

$$\underline{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{ik} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$

mátrix k -adik oszlopvektora, $\underline{\alpha}_i' = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}, \dots, a_{in}]$ e mátrix i -edik sorvektora. Időnként hasznos az $\underline{A}$ mátrix rövidített felírása, mint "oszlopvektorainak sorvektora", ill. "sorvektorainak oszlopvektora":

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k, \dots, \underline{a}_n], \quad \text{ill. } \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1' \\ \underline{\alpha}_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{\alpha}_i' \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{\alpha}_n' \end{bmatrix}.$$

Ebben a pontban a valós (komplex) elemű négyzetes mátrixok halmazán egy valós (komplex) értékű függvényt, a "determinánst", értelmezzünk, más szóval minden négyzetes mátrixhoz hozzárendelünk egy számot, a mátrix determinánsát, oly módon, hogy e függvény értéke, e szám, akkor és csak akkor zérus, ha a szóban forgó mátrix sorvektorai (oszlopvektorai) lineárisan összefüggők (v. 8. 2.5 Tétel és a (3.17)-et követő megjegyzés).

A továbbiakhoz szükségünk lesz a következő fogalomra és jelölésre.

10.1 Definíció. Az $\underline{A}$ n -edrendű mátrix a_{ik} eleméhez tartozó minormátrixának nevezzük és $\underline{A}_{ik}$ -val jelöljük azt az $(n-1)$ -edrendű mátrixot, melyet úgy kapunk $\underline{A}$ -ból, hogy annak i -edik sorát és k -adik oszlopát elhagyjuk, vagyis

$$\underline{A}_{ik} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

($i, k = 1, 2, \dots, n$).

Hasonlóan minormátrixnak nevezzük és $\underline{A}_{ikjl}$ -vel jelöljük azt az $(n-2)$ -edrendű mátrixot, amelyet úgy kapunk $\underline{A}$ -ból, hogy annak i -edik és j -edik sorát, valamint k -adik és l -edik oszlopát elhagyjuk; és így tovább.

A determináns fogalmát rekurzív módon definiáljuk.

10.2 Definíció. A másodrendű $\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

mátrix determinánsának (másodrendű determinánsnak) nevezzük és $\det \underline{A}$ -val ($|\underline{A}|$ -val), vagy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

vel jelöljük a következő számot:

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (10.2)$$

Tételezzük fel, hogy $(n-1)$ -edrendű mátrix determinánsát már értelmeztük; az n -edrendű $\underline{A}$ mátrix determinánsának (n -edrendű determinánsnak) nevezzük a következő számot:

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{1k} (-1)^{1+k} \det \underline{A}_{1k}, \quad (10.3)$$

ahol $\underline{A}_{1k}$ az a_{1k} elemhez ($k = 1, 2, \dots, n$) tartozó minor-mátrix (l. 10.1 Definíció).

Ily módon tetszőleges rendű mátrix determinánsát értelmeztük, ul. valamely harmadrendű determináns kiszámítása (10.3) alapján másodrendű determinánsok kiszámítására redukálódik, az utóbbiak értékét viszont (10.2)-vel értelmeztük (v. ö. (3.17)). A harmadrendű determinánsok értékének ismeretében a negyedrendűeket (10.3) értelmezi, és így tovább. Megjegyezzük, hogy az egyetlen elemből álló elsőrendű $[a_{11}]$ mátrix determinánsa $\det [a_{11}] = a_{11}$ (és elvileg már innen is kiindulhattunk volna). Alkalmanként hasznos az $\underline{A}$ mátrix determinánsára a következő jelölések egyikét használni:

$$\det \underline{A} = \det [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n], \quad \det \underline{A} = \det \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}, \quad \det \underline{A} = D.$$

Az $\underline{A}$ mátrix sorait (sorvektorait), ill. oszlopait (oszlopvektorait) egyben determinánsa sorainak, ill. oszlopainak is nevezzük.

10.3 Definíció. Az a_{ik} elem előjeles aldeterminánsának nevezzük és D_{ik} -val jelöljük a következő számot

$$D_{ik} = (-1)^{i+k} \det \underline{A}_{ik},$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n),$$

ahol $\underline{A}_{ik}$ az a_{ik} elemhez tartozó minormátrix.

Az utóbbi jelöléssel

$$D = \det \underline{A} = \sum_{k=1}^n a_{1k} D_{1k}. \quad (10.4)$$

(10.4)-et, vagy ami ugyanaz (10.3)-at a "determináns első sora szerinti kifejtésének" is nevezik.

10.1 Tétel. Ha a determináns i -edik sorvektorát megszorozzuk a λ skalár számmal, akkor értéke is megszorozódik λ -val.

Bizonyítás. A bizonyítás a determináns rendjére, n -re, vonatkozó matematikai indukcióval történik. Legyen $n = 2$, vagyis

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ha $i = 1$, akkor

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (\lambda a_{11}) a_{22} - (\lambda a_{12}) a_{21} = \lambda \det \underline{A},$$

ha $i = 2$, akkor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(\lambda a_{21}) - a_{12}(\lambda a_{21}) = \lambda \det \underline{A}.$$

Tegyük fel, hogy $(n-1)$ -edrendű determinánssra igaz az állítás. Legyen $\det \underline{A}$ n -edrendű. Ha $i = 1$, akkor

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{1i}) D_{1i} = \lambda \det \underline{A},$$

ha $2 \leq i \leq n$, akkor, mivel D_{1i} $(n-1)$ -edrendű determináns, az indukciós feltevés felhasználásával

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{1i} (\lambda D_{1i}) = \lambda \det \underline{A}.$$

10.2 Tétel.

Ha $\det \underline{A}$ i -edik sorvektora két sorvektor összege, vagyis $\underline{\alpha}'_i = \underline{\beta}'_i + \underline{\gamma}'_i$, akkor $\det \underline{A}$ olyan két determináns összegeként írható fel, amelyek közül az egyik i -edik sorvektora $\underline{\beta}'_i$, a másik i -edik sorvektora $\underline{\gamma}'_i$ és a többi sorvektoraiik rendre megegyeznek $\det \underline{A}$ megfelelő sorvektoraival.

Bizonyítás. (A determináns rendjére vonatkozó matematikai indukcióval.)
Legyen $n = 2$. Ha $i = 1$, akkor

$$\begin{vmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (b_{11} + c_{11})a_{22} - (b_{12} + c_{12})a_{21} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Ha $i = 2$, akkor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy $(n-1)$ -edrendű determinánsra igaz az állítás. Legyen $\det \underline{A}$ n -edrendű. Ha $i = 1$, akkor

$$\begin{vmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & \dots & b_{1n} + c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (b_{1k} + c_{1k}) D_{1k} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ha $2 \leq i \leq n$, akkor mivel D_{1i} $(n-1)$ -edrendű determináns, az indukciós feltevés felhasználásával

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n [a_{1k} (-1)^{1+k}] \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{i,k-1} & b_{i,k+1} & \dots & b_{in} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{1k} (-1)^{1+k} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{i,k-1} & c_{i,k+1} & \dots & c_{in} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot !$$

10.3 Tétel. Ha a determináns két szomszédos sora megegyezik, akkor értéke 0.

Bizonyítás. (A determináns rendjére vonatkozó matematikai indukcióval.) Legyen $n = 2$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0.$$

Tegyük fel, hogy $(n-1)$ -edrendű determinánsra igaz az állítás. Legyen $\underline{A}$ n -edrendű. Ha az azonos két sor nem az első kettő, akkor az indukciós feltevés felhasználásával az első sor szerinti kifejtésben minden $(n-1)$ -edrendű elsőjeles aldetermináns 0, tehát $\det \underline{A} = 0$. Ha az első és második sor egyenlő, akkor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{1k} (-1)^{1+k} \det \underline{A}_{1k}.$$

Mivel

$$\det \underline{A}_{1k} = \sum_{\ell=1}^{k-1} a_{1\ell} (-1)^{1+\ell} \det \underline{A}_{1k2\ell} + \sum_{\ell=k+1}^n a_{1\ell} (-1)^{1+\ell-1} \det \underline{A}_{1k2\ell},$$

tehát $\det \underline{A}$ a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} \det \underline{A} &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{k-1} a_{1k} (-1)^{1+k} a_{1\ell} (-1)^{1+\ell} \det \underline{A}_{1k2\ell} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=k+1}^n a_{1k} (-1)^{1+k} a_{1\ell} (-1)^{1+\ell-1} \det \underline{A}_{1k2\ell}. \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy $\det \underline{A}$ ezen kifejtésében minden taggal együtt megtalálható annak (-1) -szerese, tehát $\det \underline{A} = 0$. Legyen ui. $1 \leq p < q \leq n$. A $k = q$ és az $\ell = p$ értékekhez tartozó tag (az első szummában található, mivel ott minden tagban $\ell < k$)

$$a_{1q}(-1)^{1+q}a_{1p}(-1)^{1+p}\det A_{1q2p} = (-1)^{p+q}a_{1q}a_{1p}\det A_{1q2p},$$

A $k = p$ és az $l = q$ értékekhez tartozó tag (a második szummában található, mivel ott minden tagban $l > k$) pedig

$$a_{1p}(-1)^{1+p}a_{1q}(-1)^q\det A_{1p2q} = (-1)^{1+p+q}a_{1q}a_{1p}\det A_{1p2q},$$

ami az előbbi (-1) -szerese, mert

$$\underline{A}_{1p2q} = \underline{A}_{1p2q} \cdot !$$

10.4 Tétel. Az $\underline{E}_n$ egység-mátrix determinánsának értéke 1.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, n -re vonatkozó matematikai indukcióval. !

10.5 Tétel. Ha a determináns egy sorvektora a $\underline{0}'$ vektor, akkor értéke zérus.

Bizonyítás. A 10.1 Tétel szerint ha a determináns egy sorának elemei közös λ tényezőt tartalmaznak, akkor λ kiemelhető. A $\underline{0}'$ sorból emeljük ki $\lambda = 0$ -t. Alkalmazzuk a 10.1 Tételt $D = 0$. $D = 0$. !

10.6 Tétel. Ha a determináns két sorát felcseréljük, akkor értéke (-1) -gyel szorzódik.

Bizonyítás. Elegendő két szomszédos sor cseréjére igazolni az állítást, ui. a tetszőleges α_i' és α_j' sorvektorok ($i < j$) cseréje több egymásutáni szomszédos csere következménye: az i -edik sor a j -edik sor helyére kerül $j-i$ lépésben, a j -edik sor az i -edik sor helyére kerül $j-i-1$ lépésben. Ha tehát szomszédos sorok cseréjére már igazoltuk az állítást, akkor $j-i+j-i-1$ ilyen csere után a determináns értéke $(-1)^{j-1} \cdot (-1)^{j-i-1} = (-1)^{2(j-i)-1} = -1$ -gyel szorzódik. Cseréljük fel tehát az i -edik és az $(i+1)$ -edik sort. Ha az eredeti és a sorcsere után adódó determináns összege zérus, akkor állításunkat igazoltuk. Az összeadás elvégzése előtt két másik nullértékű determinánst is hozzáadunk az összeghez, éspedig a

$\det \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_{i+1} \\ \alpha'_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$
 és $\det \begin{pmatrix} 1+1 \\ \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_i \\ \alpha'_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$
 determinánsokat, melyek a

10.3 Tétel szerint nullák, mivel két-két szomszédos soruk megegyezik. Így

$$\det \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_i \\ \alpha'_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_{i+1} \\ \alpha'_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_i \\ \alpha'_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_{i+1} \\ \alpha'_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_i \\ \alpha'_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_i \\ \alpha'_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_n \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_i + \alpha'_{i+1} \\ \alpha'_{i+1} \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_i + \alpha'_{i+1} \\ \alpha'_i \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_i + \alpha'_{i+1} \\ \alpha'_i + \alpha'_{i+1} \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}.$$

A 10.2 Tétel felhasználásával végeztük el az első kettő és az utolsó kettő determináns összeadását, majd a kapott két determinánst ismét összeadtuk. Eredményül egy olyan determinánst kaptunk, amelynek két szomszédos sora megegyezik, tehát értéke 0.!

10.7 Tétel. Ha a determináns két sora megegyezik, akkor értéke zérus.

Bizonyítás. A determinánsnak legfeljebb az előjele változik meg, ha sorcserékkel a megegyező sorokat szomszédos helyzetbe hozzuk. Ezután a 10.3 Tételből következik, hogy értéke 0.!

10.8 Tétel. Ha a determináns egyik sorvektorának tetszőleges λ szám-szorosát hozzáadjuk valamelyik másik sorvektorához, akkor a determináns értéke nem változik.

Bizonyítás. Szorozzuk meg a $\det \underline{A}$ i -edik (α'_i) sorvektorát λ -val és adjuk hozzá a j -edik (α'_j) sorvektorhoz $(i \neq j)$. A keletkezett determináns a 10.2, 10.1 és a 10.7 Tétel felhasználásával $\det \underline{A}$ -val megegyezik, mert

$$\det \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_i \\ \vdots \\ \alpha'_j + \lambda \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_i \\ \vdots \\ \alpha'_j \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} + \det \lambda \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_i \\ \vdots \\ \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = \det \underline{A} \cdot 1$$

J

10.9 Tétel. A determináns tetszőleges i -edik sora szerint kifejthető, vagyis

$$\det \underline{A} = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Bizonyítás. $\det \underline{A}$ -ban az i -edik sor, $i \neq 1$, $i-1$ szomszédos cserével az első sor helyére hozható. Ez a determináns a 10.6 Tétel és (10.3) felhasználásával

$$(-1)^{i-1} \det \underline{A} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{1+k} \det \underline{A}_{ik}$$

Innen

$$\det \underline{A} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{-i+1} (-1)^{1+k} \det \underline{A}_{ik} =$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{k-i} \det \underline{A}_{ik} =$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{k+i} \det \underline{A}_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik},$$

mert

$$(-1)^{k-i} = (-1)^{k+i}.$$

10.10 Tétel. Ha a determináns egy sorát valamelyik másik sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal kombináljuk, akkor 0-t kapunk, vagyis

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} D_{ik} = 0, \quad i \neq j$$

Bizonyítás. $\det \underline{A} = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik}$. Kombináljuk a j-edik sor elemeit az

i-edikhez tartozó előjeles aldeterminánsokkal. Az eredmény $\sum_{k=1}^n a_{jk} D_{ik}$.

$$\begin{aligned} \det \underline{A} + \sum_{k=1}^n a_{jk} D_{ik} &= \sum_{k=1}^n (a_{ik} + a_{jk}) D_{ik} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \dots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det \underline{A} \end{aligned}$$

a 10.8 Tétel alapján, vagyis ha $i \neq j$ akkor

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} D_{ik} = 0.$$

10.11 Tétel. A determináns az első oszlopa szerint is kifejezhető, vagyis

$$\det \underline{A} = \sum_{i=1}^n a_{i1} D_{i1}.$$

E tétel bizonyítása után nyilvánvaló, hogy az eddig sorokra megismert tételek érvényesek oszlopokra is és így például a determináns bármely oszlopa szerint is kifejtethető (10.9 Tétel megfelelője):

$$\det \underline{A} = \sum_{i=1}^n a_{ik} D_{ik}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (10.5)$$

Bizonyítás. (A determináns rendjére, n -re vonatkozó matematikai indukcióval.) Ha $n = 2$, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $(n-1)$ -edrendű determinánsok kifejtethetők az első oszlopuk szerint. Legyen $\det \underline{A}$ n -edrendű. Első sora szerint kifejtve

$$\det \underline{A} = a_{11} \det \underline{A}_{11} + \sum_{k=2}^n a_{1k} (-1)^{1+k} \det \underline{A}_{1k}.$$

$\det \underline{A}_{1k}$ ($k = 2, 3, \dots, n$) $(n-1)$ -edrendű és az indukciós feltevés értelmében első oszlopa szerint kifejtethető, vagyis

$$\det \underline{A} = a_{11} \det \underline{A}_{11} + \sum_{k=2}^n a_{1k} (-1)^{1+k} \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1+1} a_{i1} \det \underline{A}_{1k i1}. \quad (10.6)$$

Ha $\det \underline{A}$ -t formálisan első oszlopa szerint kifejtjük és a kifejtésben szereplő al-determinánsokat első soruk szerint fejtjük ki, akkor ugyanez az érték adódik:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{i1} (-1)^{i+1} \det \underline{A}_{i1} &= \\ &= a_{11} \det \underline{A}_{11} + \sum_{i=2}^n a_{i1} (-1)^{i+1} \det \underline{A}_{i1} = \\ &= a_{11} \det \underline{A}_{11} + \sum_{i=2}^n a_{i1} (-1)^{i+1} \sum_{k=2}^n a_{1k} (-1)^k \det \underline{A}_{11 k}. \end{aligned}$$

Az összegzés felcserélése után, $\underline{A}_{11 k} = \underline{A}_{k11}$ miatt (10.6) jobb oldalát, tehát $\det \underline{A}$ -t kapjuk.!

A 10.11 Tételből következik, hogy

$$\det \underline{A} = \det \underline{A}', \quad (10.7)$$

amit mondhatunk úgy is, hogy ha a determináns sorait és oszlopait felcseréljük, akkor értéke nem változik.

Bevezetjük az

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{D} \\ \underline{C} & \underline{B} \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

jelölést, ha az $(M \times N)$ -es $\underline{U} = [u_{ik}]$ mátrix elemei az $(m \times n)$ -es $\underline{A} = [a_{ik}]$, az $(M-m) \times (N-n)$ -es $\underline{B} = [b_{j\ell}]$, a $(M-m) \times n$ -es $\underline{C} = [c_{jk}]$ és az $m \times (N-n)$ -es $\underline{D} = [d_{i\ell}]$ mátrixok elemeivel úgy írhatók fel, hogy

$$\begin{aligned} u_{ik} &= a_{ik} & i &= 1, 2, \dots, m; & k &= 1, 2, \dots, n, \\ u_{i, n+\ell} &= d_{i\ell} & i &= 1, 2, \dots, m; & \ell &= 1, 2, \dots, N-n, \\ u_{m+j, k} &= c_{jk} & j &= 1, 2, \dots, M-m; & k &= 1, 2, \dots, n, \\ u_{m+j, n+\ell} &= b_{j\ell} & j &= 1, 2, \dots, M-m; & \ell &= 1, 2, \dots, N-n. \end{aligned}$$

E jelöléssel az $\underline{U}$ mátrixot "blokkokra osztottuk".

10.12 Segédétel. Az n -edrendű $\underline{A} = [a_{ik}]$, a p -edrendű $\underline{B} = [b_{j\ell}]$, a $(p \times n)$ -es $\underline{C} = [c_{jk}]$ és az $(n \times p)$ -s zérusmátrixból, mint blokkokból álló $\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ \underline{C} & \underline{B} \end{bmatrix}$ mátrix

determinánsára teljesül a

$$\det \underline{U} = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. (Az $\underline{A}$ mátrix rendjére $(n-re)$ vonatkozó matematikai indukcióval.) Ha $n = 1$, akkor

$$\det \underline{U} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_p & b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pp} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \det \underline{B} = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B}.$$

Tegyük fel, hogy az $(n-1)$ -edrendű mátrixokra már bebizonyítottuk az állítást. Legyen $\underline{A}$ n -edrendű mátrix. Az első sor szerinti kifejtéssel

$$\det \underline{U} = \sum_{k=1}^n a_{1k} (-1)^{1+k} \det \underline{U}_{1k}.$$

$$\det \underline{U}_{1k} = \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & \dots & a_{3k-1} & a_{3k+1} & \dots & a_{3n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & \dots & c_{1k-1} & c_{1k+1} & \dots & c_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ c_{p1} & \dots & c_{pk-1} & c_{pk+1} & \dots & c_{pn} & b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{vmatrix} = \det \underline{A}_{1k} \cdot \det \underline{B},$$

mert $\underline{A}_{1k}$ $(n-1)$ -edrendű, tehát

$$\det \underline{U} = \sum_{k=1}^n a_{1k} (-1)^{1+k} \det \underline{A}_{1k} \cdot \det \underline{B} = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B}.$$

10.13 Tétel. Az n -edrendű $\underline{A} = [a_{ik}]$ mátrix és az n -edrendű $\underline{B} = [b_{ik}]$ mátrix szorzatának determinánsa egyenlő a két mátrix determinánsának szorzatával, vagyis $\det (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B}$.

Bizonyítás. Legyen $n = 2$ és

$$\det \underline{U} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

Egyrészt a 10.12 Segédételből $\det \underline{U} = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B}$. Másrészt $\det \underline{U}$ a_{11} -gyel szorzott harmadik és a_{12} -vel szorzott negyedik sorát adjuk hozzá az első sorhoz, majd a_{21} -gyel szorzott harmadik és a_{22} -vel szorzott negyedik sorát adjuk hozzá a második sorhoz. Így $\det \underline{U}$ értéke nem változott (l. 10.8 Tétel), és az első oszlopban csak egy elem különbözik zérustól, tehát a kifejtés egyszerűvé válik:

$$\begin{aligned} \det \underline{U} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)(-1) \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \det (\underline{A} \cdot \underline{B}). \end{aligned}$$

$n = 2$ -re tehát igazoltuk az állítást. A 2-nél magasabb rendű determinánsok szorzástételét hasonlóan bizonyítjuk. Az n -edrendű $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixokból képezzük az

$$\underline{U} = \begin{vmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ -\underline{E} & \underline{B} \end{vmatrix}$$

mátrixot, ahol

$\underline{0}$ az n -edrendű nullmátrix, $\underline{E}$ az n -edrendű egységmátrix és igazoljuk a $\det \underline{U} = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B}$, ill. a $\det \underline{U} = \det (\underline{A} \cdot \underline{B})$ egyenlőségeket.

A 10.12 Segédételből következik, hogy

$$\det \underline{U} = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B}.$$

$\det \underline{U}$ első oszlopa szerinti kifejtése előtt elvégezzük a következő azonos átalakításokat: az $(n+k)$ -edik sort megszorozzuk a_{ik} -val, $k = 1, 2, \dots, n$ és hozzáadjuk az i -edik sorhoz, $i = 1, 2, \dots, n$. Így

$$\det \underline{U} = \begin{vmatrix} \underline{0} & \underline{C} \\ -\underline{E} & \underline{B} \end{vmatrix}, \text{ ahol a } \underline{C} = [c_{ik}]$$

mátrix elemei: $c_{ik} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell k}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, n$,

vagyis $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$. $\det \underline{U}$ és aldeterminánsainak első oszlop szerinti kifejtésekor az n -edik lépés után azt kapjuk, hogy

$$\det \underline{U} = ((-1)^{n+2} (-1))^n \det \underline{C} = (-1)^{n(n+3)} \det \underline{C} = \det (\underline{A} \cdot \underline{B}).$$

10.1 Példa. Határozzuk meg a

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

n -edrendű Vandermonde-determináns értékét. Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemeket generáló elemeknek nevezzük. $V_n(x_1, \dots, x_n)$ értékének megváltoztatása nélkül elvégezhető az az átalakítás, hogy az utolsó előtti oszloppal kezdve minden oszlop x_1 -szorosát kivonjuk a következő oszlopból. Ekkor, ha ezután V_n első sora szerinti kifejtését alkalmazzuk és a 10.1 Tételt felhasználjuk

$$V_n(x_1 \dots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) V_{n-1}(x_2 \dots x_n).$$

Hasonló módon, vagyis $V_{n-1}(x_2 \dots x_n)$ minden oszlopának x_2 -vel való szorzása és az egyes oszlopoknak a következő oszlopból való kivonása után $V_{n-1}(x_2 \dots x_n) = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \dots (x_n - x_2) V_{n-2}(x_3 \dots x_n)$. Az eljárást folytatva

$$V_n(x_1 \dots x_n) = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k). \quad (10.9)$$

A Vandermonde determináns akkor és csak akkor zérus, ha két generáló eleme egyenlő.

10.2 Példa. Igazoljuk, hogy az (x_1, y_1) , (x_2, y_2) és az (x_3, y_3) csúcspontok által meghatározott háromszög területe:

$$T = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10.10)$$

A sík ezen pontjaiból felírhatjuk a háromszög $\underline{a} \cong [x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0]$ és $\underline{b} \cong [x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0]$ oldalvektorait. A vektoralgebrából ismert, hogy $T = \frac{1}{2} |\underline{a} \times \underline{b}|$ (l. a 2.3 Definíciót követő megjegyzést).
Egyszerűen adódik, hogy

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Az utóbbi determináns első sorát hozzáadva a második és harmadik sorhoz

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

és innen már (10.10) következik.!

10.3 Példa. Igazoljuk, hogy az (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) és az (x_4, y_4, z_4) csúcspontok által meghatározott tetraéder térfogata:

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10.11)$$

A tetraéder térfogata hatodrésze az ugyanazon élek által meghatározott paralelepipedon köbtartalmának. A fenti csúcspontok által meghatározott három élvektor $\underline{a} \cong [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$, $\underline{b} \cong [x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1]$ és $\underline{c} \cong [x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1]$. A 3.5 Tételt megelőző megjegyzés szerint a paralelepipedon előjeles térfogata

$$\pm 6V = (a \ b \ c) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & 0 \end{vmatrix}$$

(az egyenlőség látható, ha az utóbbi determinánst utolsó oszlopa szerint kifejtjük.) A determináns értéke nem változik, ha első sorát a 2., 3., és a 4. sorhoz hozzáadjuk, így az utóbbi egyenlőségből (10.11)-et kapjuk.

11. Az inverzmátrix

A mátrix-algebra elemi műveleteit a 8. pontban értelmeztük. Nem értelmeztük azonban mátrixszal való osztás műveletét. Ilyen művelet általában nem is értelmezhető, mégpedig ahhoz hasonló okokból amiért a községes tér vektoraival való osztást sem értelmeztük. (l. a megjegyzést a 2. pont végén.) Két mátrix szorzata a zérusmátrix lehet anélkül, hogy bármelyik tényező a zérusmátrix lenne, pl.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bizonyos négyzetes mátrixokkal való osztás, bizonyos négyzetes mátrixok reciproka, "inverze" azonban értelmezhető.

11.1 Definíció. Az A négyzetes mátrixot regulárisnak nevezzük, ha determinánsa nem zérus; a B négyzetes mátrixot szingulárisnak nevezzük, ha nem reguláris, vagyis ha $\det B = 0$.

Mint ismeretes az "a" valós vagy komplex szám reciprokanak nevezzük és $a^{-1} = \frac{1}{a}$ -val jelöljük azt a számot, melyre $a \cdot a^{-1} = 1$ és tudjuk azt, hogy minden zérustól különböző $a \neq 0$ számnak van egyértelműen meghatározott reciproka. Ennek analógiájaként értelmezzük négyzetes mátrix "inverzét".

11.2 Definíció. Az $\underline{A}$ n -edrendű négyzetes mátrix inverz mátrixának (reciprok mátrixának) nevezzük és $\underline{A}^{-1}$ -gyel jelöljük azt az n -edrendű négyzetes mátrixot, melyre

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E},$$

ahol $\underline{E}$ az n -edrendű egység mátrix.

Megmutatjuk, hogy nem minden zérus mátrixtól különböző mátrixnak van inverze, pontosabban, ha $\underline{A}$ szinguláris mátrix, akkor nincs inverz mátrix. Tételezzük fel ui. az állítással ellentétben, hogy az $\underline{A}$ szinguláris mátrixnak van inverz mátrixa $\underline{A}^{-1}$, melyre pl. $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$. Képezzük a bal- és a jobb oldal determinánsát. A 10.13 és a 10.4 Tétel felhasználásával kapjuk, hogy $\det \underline{A} \cdot \det \underline{A}^{-1} = 1$. Ahonnan, mivel $\underline{A}$ szinguláris, a $0 \cdot \det \underline{A}^{-1} = 1$, vagyis $0 = 1$ ellentmondás adódik. Ezzel szemben reguláris mátrixoknak van egyértelműen meghatározott inverzük, amit egy kis előkészítés után bizonyítani fogunk.

11.3 Definíció. Az $\underline{A}$ n -edrendű négyzetes mátrix asszociáltjának (adjungáltjának) nevezzük és $\underline{A}^{\text{K}} = [a_{ik}^{\text{K}}]$ -val jelöljük azt az n -edrendű mátrixot, melynek elemei

$$a_{ik}^{\text{K}} = D_{ki}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

ahol D_{ki} az $\underline{A}$ mátrix a_{ki} elemének előjeles al-determinánsa (l. 10.3 Definíció).

Nyilvánvaló, hogy minden négyzetes mátrixnak van egy és csak egy asszociáltja. Érvényes a

11.1 Segéd-tétel. Legyen $\underline{A}$ n -edrendű mátrix és $\underline{A}^{\text{K}}$ az asszociáltja; akkor

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{\text{K}} = \underline{A}^{\text{K}} \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} \det \underline{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det \underline{A} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det \underline{A} \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás. Vezessük be $\underline{A} \cdot \underline{A}^{\times}$, ill. $\underline{A}^{\times} \cdot \underline{A}$ elemeire az $\underline{A} \underline{A}^{\times} = [b_{ik}]$,
 ill. $\underline{A}^{\times} \cdot \underline{A} = [c_{ik}]$ jelöléseket. A mátrix-szorzás definíciója szerint

$$b_{ik} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} a_{\ell k}^{\times} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} D_{k\ell} = \delta_{ik} \det \underline{A},$$

illetve

$$c_{ik} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^{\times} a_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^n D_{\ell i} a_{\ell k} = \delta_{ik} \det \underline{A},$$

ahol felhasználtuk a 11.3 Definíciót, továbbá a 10.9 és 10.10 Tételt, ill. (10.5)-öt és a 10.10 Tétel oszlopokra vonatkozó megfelelőjét (δ_{ik} a Kronecker szimbólum).

11.2 Tétel. Ha $\underline{A}$ reguláris mátrix, akkor van egy és csak egy $\underline{A}^{-1}$ inverz mátrixa, éspedig

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} \underline{A}^{\times}. \quad (11.1)$$

Bizonyítás. Mivel $\underline{A}$ reguláris, $\det \underline{A} \neq 0$ és a (11.1) mátrix értelmezve van. A (11.1)-gyel értelmezett $\underline{A}^{-1}$ mátrix valóban $\underline{A}$ inverze, mivel a 11.1 Segéd-tétel szerint

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \frac{1}{\det \underline{A}} \underline{A}^{\times} &= \frac{1}{\det \underline{A}} \underline{A}^{\times} \cdot \underline{A} = \\ &= \frac{1}{\det \underline{A}} \begin{bmatrix} \det \underline{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det \underline{A} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det \underline{A} \end{bmatrix} = \underline{E} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Be kell még bizonyítanunk, hogy (11.1)-en kívül más inverz nincs. Tegyük fel ui., hogy valamilyen $\underline{X}$ négyzetes mátrixra

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{E}, \quad \text{ill.} \quad \underline{X} \underline{A} = \underline{E}$$

és szorozzuk meg az első egyenletet balról, a másodikat jobbról a (11.1)-gyel értelmezett $\underline{A}^{-1}$ mátrixszal;

kapjuk, hogy

$$\underline{A}^{-1} (\underline{A} \underline{X}) = \underline{A}^{-1} \underline{E}, \text{ ill. } (\underline{X} \underline{A}) \underline{A}^{-1} = \underline{E} \underline{A}^{-1}.$$

A mátrix szorzás asszociativitása és (8.14), ill. (8.15) miatt

$$(\underline{A}^{-1} \underline{A}) \underline{X} = \underline{A}^{-1}, \text{ ill. } \underline{X} (\underline{A} \underline{A}^{-1}) = \underline{A}^{-1}.$$

(11.2) és (8.14), ill. (8.15) újbóli felhasználásával mindkét egyenletből $\underline{X} = \underline{A}^{-1}$ adódik. |

Mátrix inverzére néhány egyszerű tételt bizonyítunk.

11.3 Tétel. Legyen $\underline{A}$ reguláris mátrix; akkor

$$\det \underline{A}^{-1} = (\det \underline{A})^{-1}.$$

Bizonyítás. Képezzük az $\underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{E}$ egyenlőség mindkét oldalának determinánsát. A 10.4 és 10.13 Tétel alapján

$$\det \underline{A} \cdot \det \underline{A}^{-1} = 1. |$$

11.4 Tétel. Legyen $\underline{A}$ reguláris mátrix, akkor inverze is reguláris mátrix és

$$(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}.$$

Bizonyítás. Az előző tétel és a 11.2 Definíció alapján nyilvánvaló. |

11.5 Tétel. Ha $\underline{A}$ reguláris mátrix, akkor transzponáltja, $\underline{A}'$ is az és

$$(\underline{A}')^{-1} = (\underline{A}^{-1})'. \quad (11.3)$$

Bizonyítás. Az állítás első fele (10.7)-ből következik. A (11.3) formula igazolása (8.23) felhasználásával történik:

$$\underline{A}' \cdot (\underline{A}^{-1})' = (\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A})' = \underline{E}' = \underline{E}. |$$

11.6 Tétel. Legyen $\underline{A}$ és $\underline{B}$ n -edrendű reguláris mátrix; akkor $\underline{A} \cdot \underline{B}$ is reguláris és

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}. \quad (11.4)$$

Bizonyítás. Az állítás első fele a 10.13 Tételből következik. A (11.4) formula igazolása a mátrix szorzás asszociativitása és az inverzmátrix definíciója alapján történik:

$$\begin{aligned}(\underline{AB}) \cdot (\underline{B}^{-1} \underline{A}^{-1}) &= \underline{A}(\underline{B} \cdot \underline{B}^{-1})\underline{A}^{-1} = \underline{A} \underline{E} \underline{A}^{-1} = \\ &= \underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}.!\end{aligned}$$

12. Mátrix rangja

Ebben a pontban azzal a fontos kérdéssel foglalkozunk, hogyan lehet megállapítani adott mátrix esetében a lineárisan független sorvektorok, ill. oszlopvektorok maximális számát, más szóval azt, hogy adott mátrix sorvektorai, ill. oszlopvektorai hány dimenziós alteret feszítenek ki. Eredményeinket többek között a lineáris egyenletrendszerek tárgyalásában használjuk fel.

Legyen adott az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (12.1)$$

$(m \times n)$ -es mátrix, melynek sorvektorait rendre $\underline{\alpha}'_1, \dots, \underline{\alpha}'_m$ -vel, oszlopvektorait $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ -nel jelöljük és használni fogjuk az

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n] = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}'_1 \\ \underline{\alpha}'_2 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}'_n \end{bmatrix}$$

jelöléseket is (v.ö. a 10. pont elején mondottakkal).

12.1 Definíció. Ha a (12.1) mátrix $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m$ sorvektorai az n -dimenziós sorvektorok S^n terének egy r -dimenziós H^r altérét feszítik ki, akkor azt mondjuk, hogy az A mátrix rangja r , jelben $r(A) = r$ (l. 9. pont eleje, 9.4 Definíció); H^r -et A sortérének nevezzük.

12.1' Definíció. Ha a (12.1) mátrix sorvektorai között a lineárisan függetlenek maximális száma r , akkor azt mondjuk, hogy az A mátrix rangja r , $r(A) = r$.

E két definíció egymással ekvivalens, amint ez a 9.14 Következményből (S^n -re alkalmazva) azonnal látható. A definícióból nyilvánvaló, hogy $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$; továbbá $r(A) = 0$ akkor és csak akkor, ha A a zérus-mátrix.

Megmutatjuk, hogy ha az A mátrixon bizonyos operációkat, ún. "elemi sorműveleteket" hajtunk végre (és ezzel belőle új mátrixokat kapunk), a rang nem változik.

12.1 Tétel. Az A mátrix rangja nem változik, ha

- két sorát felcseréljük, vagy
- egy sorát a tetszőleges $\lambda \neq 0$ számmal megszorozzuk, vagy
- egy sorvektor tetszőleges μ számszorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz.

Bizonyítás. Az, hogy az a), ill. a b) elemi sorművelet nem változtatja meg a mátrix sorvektorai által kifeszített altér dimenzióját, nyilvánvaló. Azt, hogy c) sem változtatja meg a rangot, a következőképpen igazoljuk. Adjuk hozzá az A mátrix i -edik sorának μ -szörűsét a j -edik sorhoz ($i \neq j$) és jelöljük az így kapott mátrixot B -vel, vagyis

$$B = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_i \\ \vdots \\ \alpha'_j + \mu \alpha'_i \\ \vdots \\ \alpha'_m \end{bmatrix}.$$

Mivel $\underline{B}$ sorvektorai $\underline{A}$ sorvektorainak lineáris kombinációi, az S^n -re alkalmazott 9.15 Következmény szerint közöttük legfeljebb $r(\underline{A})$ számú lineárisan független van, vagyis $r(\underline{B}) \leq r(\underline{A})$. Azonban, ha $\underline{B}$ i -edik sorvektorának $(-\mu)$ -szörösét a j -edikhez hozzáadjuk, visszkapjuk az $\underline{A}$ mátrixot, és az előbbieket alapján $\underline{A}$ és $\underline{B}$ szerepének felcserélésével $r(\underline{A}) \leq r(\underline{B})$, vagyis $r(\underline{B}) = r(\underline{A})$. !

12.2 Definíció. Ha az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ egyforma típusú mátrixok rangja megegyezik, $r(\underline{A}) = r(\underline{B})$, akkor azt mondjuk, hogy $\underline{A}$ és $\underline{B}$ ekvivalensek, jelben $\underline{A} \sim \underline{B}$.

Az előző tétel szerint az egymásból elemi sorműveletekkel keletkező mátrixok ekvivalensek.

Rátérünk annak a kapcsolatnak tárgyalására, amely $\underline{A}$ négyzetes minormátrixai determinánsának nullicitása és $\underline{A}$ lineárisan független sorvektorainak száma között fennáll (v. ö. a 10. pont elején mondottakkal). A 10.1 Definícióval analóg módon az $(m \times n)$ -es $\underline{A}$ mátrix minormátrixainak nevez-zük azokat a mátrixokat, amelyek $\underline{A}$ -ból annak bizonyos számú sora, ill. oszlopa elhagyásával keletkeznek.

12.2 Tétel. Ha az $\underline{A}$ mátrix rangja r , akkor $\underline{A}$ -nak van r -edrendű négyzetes reguláris minormátrixa és $\underline{A}$ minden $(r+1)$ -edrendű (és ennél magasabbrendű) minormátrixa szinguláris (l. 11.1 Definíció).

Bizonyítás. Tekintsük $\underline{A}$ egy tetszőleges $(r+1)$ -edrendű minormátrixát. Az ebben szereplő $r+1$ számú sorvektor lineárisan összefüggő, így egy-kük kifejezhető mint a többi lineáris kombinációja. E minormátrix determinánsának egyik sora tehát a többi sor lineáris kombinációja és így a 10.2 (és 10.1) Tétel segítségével olyan determinánsok összegeként írható fel, melyek két sora megegyezik. Ez utóbbiak azonban a 10.7 Tétel szerint zérussal egyenlők. Például, ha az

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r,r+1} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \dots & a_{r+1,r+1} \end{bmatrix} \quad \text{minormátrixot}$$

tekintjük, és mondjuk, $\alpha'_{r+1} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha'_i$, akkor

$$\det \underline{M} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r+1} \\ \hline a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r,r+1} \\ \sum_{i=1}^r \lambda_i a_{i1} & \sum_{i=1}^r \lambda_i a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^r \lambda_i a_{i,r+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^r \lambda_i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r+1} \\ \hline a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r,r+1} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,r+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Beláttuk tehát, hogy minden $(r+1)$ -edrendű és ennek következtében minden ennél magasabbrendű négyzetes minormátrix determinánsa zérus.

Most megmutatjuk, hogy van r -edrendű reguláris minormátrix. Tellezzük fel az állítással ellentétben, hogy a legmagasabbrendű reguláris minormátrix rendje s és $s < r$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_s, \dots, \alpha'_r$ lineárisan függetlenek és pl.

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ \hline a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tetszőleges $k = 1, 2, \dots, n$ -re fennáll

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} & a_{2k} \\ \hline a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} & a_{sk} \\ a_{s+1,1} & a_{s+1,2} & \dots & a_{s+1,s} & a_{s+1,k} \end{vmatrix} = 0,$$

ui. ha $1 \leq k \leq s$, akkor ez olyan determináns, melynek két oszlopa megegyezik (l. 10.7 Tétel és a 10.11 Tételt követő megjegyzést), ha $s < k \leq n$, akkor ez egy $(s+1)$ -edrendű minormátrix determinánsa. Fejtsük ki a determinánst az utolsó oszlop szerint; kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{s+1} a_{ik} \lambda_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (12.2)$$

ahol a λ_i együtthatók nem függenek k -tól és $\lambda_{s+1} = 1 \neq 0$. Ha figyelembe vesszük, hogy a_{ik} az α'_i sorvektor k -adik eleme, (12.2) így is írható

$$\sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i \alpha'_i = 0, \quad \lambda_{s+1} \neq 0,$$

vagyis az $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{s+1}$ sorvektorok és ennek következtében az $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r$ sorvektorok lineárisan összefüggők (l. az S^n -re alkalmazott 9.3 Tételt). Tehát az $s < r$ feltevés ellentmondásra vezetett. Nyilvánvalóan igaz a

12.3 Következmény. Ha az A mátrix legmagasabbrendű reguláris minormátrixának rendje r , akkor $r(A) = r$.

Ezek szerint mátrix rangja ekvivalens módon úgy is definiálható, mint legmagasabbrendű reguláris minormátrixnak rendje.

12.4 Segédteétel. $r(A) = r(A')$.

Bizonyítás. Ha az A mátrixot transzponáljuk, minden négyzetes minormátrixra transzponálódik és ennek során determinánsuk értéke (10.7) alapján nem változik. I

12.5 Tétel. Ha az A mátrix $a_1, a_2, \dots, a_n$ oszlopvektorai az m -dimenziós oszlopvektorok Q^m terének egy r -dimenziós G^r alterét feszítik ki (vagyis ha A oszlopvektorai között a lineárisan függetlenek maximális száma r), akkor $r(A) = r$.

Bizonyítás. A oszlopvektorai A' sorvektorai, így a 12.4 Segédteételből az állítás következik. I

A 12.5 Tételben szereplő G^A alteret A oszlopterének nevezzük. Ezek szerint a mátrix rangja ekvivalens módon úgy is definiálható, mint oszlopterének dimenziója. Más szóval minden mátrixban a lineárisan független sorvektorok maximális száma egyenlő a lineárisan független oszlopvektorok maximális számával. Fennáll a 12.1 Tétellel analóg

12.6 Tétel. Az A mátrix rangja nem változik, ha a következő "elemi oszlopműveleteket" hajtjuk végre:

- két oszlopát felcseréljük, vagy
- egy oszlopát a tetszőleges $\lambda \neq 0$ számmal megszorozzuk, vagy
- egy oszlopvektor tetszőleges μ számszorosát hozzáadjuk egy másik oszlopvektorhoz.

Bizonyítás. A 12.1 Tétel bizonyításával analóg. |

Ezek szerint az elemi oszlopműveletekkel egymásból keletkező mátrixok ekvivalensek. Elemi sor- és oszlopműveletek segítségével minden mátrixból olyan vele ekvivalens mátrix képezhető, melynek bármely sorában és bármely oszlopában legfeljebb egy zérustól különböző elem áll. Ha már ilyen felépítésű mátrixhoz jutottunk, akkor a rang egyszerűen a zérustól különböző elemek számával egyenlő. Éppen ez a rang meghatározásának egyik legegyszerűbb módszere.

12.1 Példa. Legyen
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & -7 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahol az egyes lépésekben a következő elemi sor-, ill. oszlopátveleteket hajtottuk végre:

- első lépés: a 3. oszlopot $\frac{1}{5}$ -del, a 4. oszlopot $\frac{1}{2}$ -del szoroztuk,
- második lépés: a 3. oszlop (-1) -szeresét az első, 1-szeresét a második, (-1) -szeresét a negyedik oszlophoz adtuk,
- harmadik lépés: az 1. oszlopot $\frac{1}{2}$ -del, a 2. oszlopot $(-\frac{1}{3})$ -dal, a 4. oszlopot $\frac{1}{2}$ -del szoroztuk,
- negyedik lépés: az 1. sor (-2) -szeresét a 3. sorhoz adtuk,
- ötödik lépés: az 1. oszlop (-1) -szeresét a második és negyedik oszlophoz adtuk,
- hatodik lépés: a 2. sor (-1) -szeresét a 3. sorhoz adtuk.

Az utolsó mátrix rangja nyilván 2, és mivel $\underline{A}$ -val ekvivalens, $r(\underline{A}) = 2$.

A 12.2-12.5 Tételekből az $m = n$ speciális esetben azonnal adódik a

12.7 Következmény. Az n -edrendű $\underline{A}$ mátrix sorvektorai, ill. oszlopvektorai akkor és csak akkor lineárisan függetlenek (akkor és csak akkor feszítik ki az n -dimenziós S^n , ill. Q^n teret), ha $\underline{A}$ reguláris, vagyis $\det \underline{A} \neq 0$.

Ez az eredmény összhangban a 10. pont elején mondottakkal, közvetlen általánosítása a 2.5 Tétel (3.17)-et követő átfogalmazásának.

12.8 Tétel. Legyen $\underline{A}$ és $\underline{B} = [b_{ik}]$ n -edrendű négyzetes mátrix; ha van

$$\underline{T} = [t_{ik}] \text{ } n\text{-edrendű reguláris mátrix, melyre } \underline{B} = \underline{T} \underline{A}, \text{ vagy } \underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{T}, \text{ akkor } \underline{A} \sim \underline{B}, \text{ vagyis } r(\underline{A}) = r(\underline{B}).$$

Bizonyítás. A $\underline{B} = \underline{T} \cdot \underline{A}$ esetre vonatkozó állítást bizonyítjuk, a másik eset hasonlóan tárgyalható. $\underline{B}$ sorvektorait $\underline{\beta}'_1, \dots, \underline{\beta}'_n$ -vel jelöljük. A mátrixszorzás szabálya szerint

$$b_{ik} = \sum_{\ell=1}^n t_{i\ell} a_{\ell k}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Legyen i tetszőlegesen rögzítve és k fusson be az $1, 2, \dots, n$ értékeit; akkor az előbbi egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$\underline{\beta}'_i = \sum_{\ell=1}^n t_{i\ell} \underline{\alpha}'_{\ell}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Az utóbbi egyenlőségek szerint a $\underline{\beta}'_i$ vektorok az $\underline{A}$ mátrix sorterének elemei, tehát köztük a lineárisan függetlenek maximális száma nem nagyobb $r(\underline{A})$ -nál (l. 9.15 Következménye S^n -re alkalmazva). Azt kaptuk, hogy $r(\underline{B}) \leq r(\underline{A})$. Azonban $\underline{T}$ reguláris, tehát létezik inverze és a $\underline{B} = \underline{T} \cdot \underline{A}$ egyenlőséget balról $\underline{T}^{-1}$ -gyel szorozva $\underline{A} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{B}$ -t kapjuk. Innen az előbbi gondolatmenetet alkalmazva $\underline{A}$ és $\underline{B}$ szerepcseréjével $r(\underline{A}) \leq r(\underline{B})$ adódik. Tehát $r(\underline{A}) = r(\underline{B})$. !

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

13. Lineáris egyenletrendszer megoldásának létezése és egyértelműsége

A gyakorlati és matematikai feladatok igen nagy része végső fokon lineáris egyenletrendszer megoldására vezet. Ebben a pontban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy milyen feltételek mellett van a lineáris egyenletrendszernek megoldása és milyen feltételek mellett van e megoldás egyértelműen meghatározva. Elöljáróban leszögezzük, hogy valamely lineáris egyenletrendszer megoldhatósága nem azon múlik, hogy több, vagy kevesebb egyenlet van-e, mint ismeretlen.

A lineáris egyenletrendszer általános alakja

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Itt a_{ik} , ill. b_i ($i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$) adott valós (vagy komplex) számok, az együtthatók, ill. konstans tagok, $x_1, \dots, x_n$ az ismeretlenek. Az egyenletrendszer megoldása az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rendezett szám n -es, ha (13.1)-be helyettesítve, minden egyenlet azonosságba megy át. Az $(m \times n)$ -es $\underline{A} = [a_{ik}]$ mátrixot együttható mátrixnak, a

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

oszlopvektort konstans vektornak, az

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

oszlopvektort ismeretlen vektornak nevezzük. Ezekkel a jelölésekkel a (13.1) egyenletrendszer a vele ekvivalens "mátrixos alakba" írható:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}. \quad (13.2)$$

(13.2)-nek az $\underline{x}$ oszlopvektor akkor és csak akkor megoldása, ha az elemeiből alkotott rendezett szám n -es (13.1) megoldása. Ha az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorait rendre $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ -nel jelöljük, akkor

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n]$$

és (13.2), vagyis (13.1) még a következő ekvivalens alakba írható:

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{b} \quad (13.3)$$

A továbbiakban a (13.1), (13.2) és (13.3) alakok közül mindig azt fogjuk használni, amelynek használata a legcélszerűbbnek látszik. Használatos még lineáris egyenletrendszer felírására az $\alpha_i' \underline{x} = b_i, i = 1, 2, \dots, n$, alak is, ahol α_i' az $\underline{A}$ mátrix i -edik sorvektora.

(13.3)-ból látható, hogy az egyenletrendszer megoldása azt jelenti: elő kell állítani a $\underline{b}$ oszlopvektort mint az $\underline{a}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) oszlopvektorok lineáris kombinációját. Jelöljük G^r -rel az $\underline{A}$ mátrix oszlopterét, vagyis az m -dimenziós oszlopvektorok Q^m terének az $\underline{a}_k$ vektorok által kifeszített alterét (l. 12.5. Tétel, 9.14. Következmény). Az egyenletrendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltételét fejezi ki a

13.1 Tétel. A (13.3) lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $\underline{b} \in G^r$.

Bizonyítás. A 9.14 Következmény alapján nyilvánvaló. I

Az előbbi tételnek egy átfogalmazását nyerjük, ha bevezetjük a következő jelölést: $\underline{C} = [\underline{A}, \underline{b}]$ (v.ö. (10.8.)) ; az $m \times (n+1)$ -es $\underline{C}$ mátrixot az egyenletrendszer kibővített mátrixának nevezzük.

13.2 Tétel. A (13.2) egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha

$$r(\underline{C}) = r(\underline{A}). \quad (13.4)$$

Bizonyítás. A $\underline{C}$ mátrix úgy keletkezett $\underline{A}$ -ból, hogy egy oszlopvektorral, $\underline{b}$ -vel $\underline{A}$ -t "kibővítettük", nyilvánvaló ezért, hogy $\underline{C}$ lineárisan független oszlopvektorainak száma nem lehet kisebb $\underline{A}$ lineárisan független oszlopvektorainak számánál, vagyis $r(\underline{A}) \leq r(\underline{C})$. Ha az egyenletrendszer megoldható, akkor $\underline{b} \in G^r$ és így $\underline{C}$ oszloptere megegyezik $\underline{A}$ oszlopterével, G^r -rel, tehát $r(\underline{C}) = r(\underline{A})$. Ha fordítva, $r(\underline{C}) = r(\underline{A})$, akkor ez azt jelenti, hogy $\underline{b}$ felvételével az oszlopvektorok közé az oszloptér dimenziója nem nőtt, vagyis $\underline{b} \in G^r$, tehát az egyenletrendszer megoldható.!

A következő pontban bemutatunk egy hatékony megoldási módszert, mely a megoldhatóság (13.4) feltétele teljesülésének vizsgálatával párhuzamosan szolgáltatja a megoldást (megoldásokat). Most áttérünk annak a kérdésnek vizsgálatára, mi a feltétele annak, hogy csak egyetlen megoldás legyen.

13.3 Tétel. Ha a (13.1) egyenletrendszerre

$$r(\underline{A}) = r(\underline{C}) = n, \quad (13.5)$$

akkor az egyenletrendszernek egy és csak egy megoldása van.

Megjegyezzük, hogy a (13.5) feltétel, vagyis az, hogy az együttható mátrix és a kibővített mátrix közös rangja egyenlő legyen az ismeretlenek számával, csak akkor teljesülhet, ha $m \geq n$, vagyis az egyenletek száma nem kisebb, mint az ismeretlenek száma. (u.i. $r(\underline{A}) \leq \min(m, n)$). A következő pontban látni fogjuk, hogy az $r(\underline{A}) = n$ feltétel szükséges is ahhoz, hogy legfeljebb egy megoldás legyen.

Bizonyítás. Az, hogy (13.5) teljesülése esetén van megoldás, az előző tételből következik. Az, hogy csak egy megoldás van, az egyenletrendszer (13.3) alakjából látható. U.i. (13.5) teljesülése esetén $\underline{A}$ oszlopvektorai n -dimenziós G^n alteret feszítenek ki, melynek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ bázisa. Ebben az esetben $\underline{b} \in G^n$ csak egyféleképpen írható fel $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ lineáris kombinációjaként (l. 9.12 Tétel).!

Ismertetünk még egy tételt azzal a speciális esettel kapcsolatban, amikor az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával.

13.4 Tétel. Ha a (13.1) egyenletrendszerben $m = n$ és $\underline{A}$ reguláris n -edrendű négyzetes mátrix, akkor (13.1)-nek egy és csak egy $\underline{x}$ megoldása van, éspedig

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b} \quad (13.6)$$

Bizonyítás. A feltételek teljesülése esetén a 12.7. Következmény alapján $r(\underline{A}) = n$. Mivel a kibővített mátrix $(n \times (n+1))$ -es típusu, $r(\underline{A}) \leq r(\underline{C}) \leq n$ amiből $r(\underline{C}) = n$ következik. Tehát a 13.3 Tételből adódik, hogy van egy és csak egy megoldás. Azt, hogy a keresett megoldás valóban (13.6), a (13.2) alakba való közvetlen behelyettesítéssel látjuk be:

$$\underline{A} \cdot (\underline{A}^{-1} \underline{b}) = (\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1}) \underline{b} = \underline{E} \underline{b} = \underline{b} !$$

Megjegyezzük, hogy ha (13.6)-ba az $\underline{A}^{-1}$ inverz mátrix (11.1) alakját behelyettesítjük és a (13.6) megoldás-oszlopvektor elemeit külön-külön kiírjuk, a régebbi tárgyalásokban gyakran szereplő ún. "Cramer-szabályt" nyerjük.

14. A Gauss-féle megoldási módszer A megoldáshalmaz szerkezete

Ismertetjük a (13.1) lineáris egyenletrendszer megoldásának Gauss-féle módszerét, mely az egyenletrendszer programvezérlésű számológépen történő megoldása esetén is jól használható.

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy $a_{11} \neq 0$. Ha a feltétel nem teljesülne, az egyenletek sorrendjének megváltoztatásával olyan egyenletet hozhatunk az első helyre, melyben x_1 együttthatója nem zérus. Ezután a 2., 3., ..., m. egyenletből levonjuk az 1. egyenlet

$$\frac{a_{21}}{a_{11}}, \frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, \frac{a_{m1}}{a_{11}} \text{-szerezését.}$$

Az

$$a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}$$

$$a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \quad (14.1)$$

$$a_{m2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)} x_n = b_m^{(1)}$$

egyenletrendszerre jutunk, mely (13.1)-gyel ekvivalens (két lineáris egyenletrendszer ekvivalens, ha az egyiknek $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ akkor és csak akkor megoldása, ha a másiknak is megoldása). A (14.1) egyenletrendszer $\underline{A}^{(1)}$ együttható, ill. $\underline{C}^{(1)}$ kibővített mátrixa az $\underline{A}$, ill. $\underline{C}$ mátrixból elemi sorműveletek útján keletkezett, tehát $\underline{A}^{(1)} \sim \underline{A}$ és $\underline{C}^{(1)} \sim \underline{C}$. $a_{11}^{(1)} = a_{11} \neq 0$ és

az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Ha e

feltétel nem teljesülne, az egyenletek sorrendjének megváltoztatásával, vagy az ismeretlenek átszámozásával olyan egyenletet hozhatunk a második helyre, melyben x_2 együtthatója nem zérus. Ez csak akkor nem lehetséges, ha $a_{ik}^{(1)} = 0$, $i = 2, \dots, m$, $k = 2, \dots, n$, mely esetben az eljárás befejeződött.

Ezután a 3., 4., ..., m. egyenletről levonjuk a 2. egyenlet

$$\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \dots, \frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \text{ -szeresét.}$$

Az

$$a_{11}^{(2)} x_1 + a_{12}^{(2)} x_2 + a_{13}^{(2)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(2)}$$

$$a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)}$$

$$a_{33}^{(2)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} x_n = b_3^{(2)}$$

$$a_{m3}^{(2)} x_3 + \dots + a_{mn}^{(2)} x_n = b_m^{(2)}$$

egyenletrendszerre jutunk, mely (14.1)-gyel és (13.1)-gyel ekvivalens, melynek $\underline{A}^{(2)}$ együttható, ill. $\underline{C}^{(2)}$ kibővített mátrixára $\underline{A}^{(2)} \sim \underline{A}$, ill.

$\underline{C}^{(2)} \sim \underline{C}$. $a_{11}^{(2)} = a_{11} \neq 0$, $a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} \neq 0$ és az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy $a_{33}^{(2)} \neq 0$. Véges, mondjuk, r számú lépés

után az eljárás befejeződik, vagy azért, mert $r = m$, vagy pedig azért, mert az $(r+1)$ -edik, ..., m-edik egyenletben már minden együttható zérus. Így módon a (13.1) egyenletrendszert a vele ekvivalens

$$a_{11}^{(r)}x_1 + a_{12}^{(r)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(r)}x_n = b_1^{(r)}$$

$$a_{22}^{(r)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(r)}x_n = b_2^{(r)}$$

$$a_{11}^{(r)}x_1 + \dots + a_{1n}^{(r)}x_n = b_1^{(r)}$$

(14.2)

$$a_{rr}^{(r)}x_r + \dots + a_{rn}^{(r)}x_n = b_r^{(r)}$$

$$0 = b_{r+1}^{(r)}$$

⋮

$$0 = b_m^{(r)}$$

egyenletrendszerre vezettük vissza (az $(r+1)$ -edik, ..., m -edik egyenlet nem lép fel, ha $r = m$), ahol $a_{ii}^{(r)} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$ és (14.2) $\underline{A}^{(r)}$ együttható ill. $\underline{C}^{(r)}$ kibővített mátrixára $\underline{A}^{(r)} \sim \underline{A}$, ill. $\underline{C}^{(r)} \sim \underline{C}$.
Mivel

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11}^{(r)} & a_{12}^{(r)} & \dots & a_{1r}^{(r)} \\ 0 & a_{22}^{(r)} & \dots & a_{2r}^{(r)} \\ \hline 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r)} \end{array} \right| = a_{11}^{(r)} a_{22}^{(r)} \dots a_{rr}^{(r)} \neq 0$$

(14.2)-ből látható, hogy $r(\underline{A}) = r(\underline{A}^{(r)}) = r$ és $r(\underline{C}) = r(\underline{C}^{(r)}) = r$, ill. $r+1$ aszerint, amint $b_{r+1}^{(r)} = b_{r+2}^{(r)} = \dots = b_m^{(r)} = 0$, ill. van $r+1 \leq j \leq m$, hogy

$b_j^{(r)} \neq 0$. Az utóbbi esetben a $0 = b_j^{(r)}$ egyenlet ellentmondás, és a rendszernek nincs megoldása, összhangban a 13.2 Tétellel. Az előbbi esetben van megoldás és ezt (ezeket) (14.2)-ből a következőképpen határozzuk meg: $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ -nek tetszőleges értéket adunk, ezeket az r -edik egyenletbe helyettesítve, az az x_r ismeretlen értékét egyértelműen meghatározza (x_r együtthatója nem zérus); ezen $x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ értékeket az $(r-1)$ -edik egyenletbe helyettesítve, az x_{r-1} értékét egyértelműen meghatározza stb. Az előbbieket lényegét a következő tételben foglalhatjuk össze:

14.1 Tétel. A (13.1) egyenletrendszer ekvivalens a (14.2) alakú egyenletrendszerrel, ahol $a_{ii}^{(r)} \neq 0, i = 1, 2, \dots, r$, és $r = r(A)$;

(13.1)-nek akkor és csak akkor van megoldása, ha $b_k^{(r)} = 0$, $k = r+1, \dots, m$; a megoldásban $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_r$ minden rögzített értékéhez (14.2)-ből rendre $x_r, x_{r-1}, \dots, x_1$ egyértelműen meghatározható.

14.2 Következmény. Ha (13.1)-ben $r(A) = r(C) < n$, akkor (13.1)-nek több (∞ sok) különböző megoldása van. (V.ö. 13.3 Tétel).

A továbbiakban érdemes külön tárgyalni a lineáris egyenletrendszereknek azt a speciális típusát, melyben a konstans vektor zérus. Az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{0} \quad (14.3)$$

egyenletrendszert, ahol $\underline{A} = (a_{ik})$ $(m \times n)$ -es mátrix és $\underline{x}$ n -dimenziós oszlopvektor (mint eddig), homogén lineáris egyenletrendszernek nevezzük. (13.2)-t, ha ott $\underline{b} \neq \underline{0}$, megkülönböztetésül inhomogén lineáris egyenletrendszernek nevezzük. Az eddig mondottak egyaránt érvényesek homogén és inhomogén egyenletrendszerekre.

A (14.3) homogén egyenletrendszer kibővített mátrixa az $[\underline{A}, \underline{0}]$ mátrix, ahol $\underline{0}$ az m -dimenziós zérus oszlopvektor. Mivel a zérusvektor minden altérnek, így $\underline{A}$ oszlopterének is eleme, $r([\underline{A}, \underline{0}]) = r(\underline{A})$, vagyis homogén lineáris egyenletrendszernek mindig van megoldása. Valóban nyilvánvaló, hogy $\underline{x} = \underline{0}$ (itt $\underline{0}$ az n -dimenziós zérus oszlopvektor) a (14.3) egyenletrendszernek megoldása, ezt a megoldást triviális megoldásnak nevezzük.

14.3 Tétel. A (14.3) homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha $r(\underline{A}) < n$.

tetszőlegesen választható, helyettesítsünk először

$$x_{r+1} = 1, x_{r+2} = \dots = x_n = 0 \text{ -t,}$$

másodszor

$$x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, x_{r+3} = \dots = x_n = 0 \text{ -t,}$$

és így tovább, végül $x_{r+1} = \dots = x_{n-1} = 0, x_n = 1$ -et; (14.3) megfelelő megoldásvektorairendre (14.4)-ből:

$$\underline{c}_{r+1} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}_{r+2} = \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{c}_n = \begin{bmatrix} c_{n-r,1} \\ c_{n-r,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n-r,r} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

E vektorok azonban a 9.2 Példa alapján lineárisan függetlenek. Megmutatjuk, hogy az M^{n-r} altér minden $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$ vektora, vagyis minden $\underline{x}$

megoldás előállítható, mint az $n-r$ számú $\underline{c}_{r+i} \in M^{n-r}, i = 1, 2, \dots, n-r,$

lineárisan független vektor lineáris kombinációja. Ha u.i. (14.4)-et úgy tekintjük mint amibe már behelyettesítettük az $\underline{x}$ megoldásvektort, rendezés után kapjuk, hogy

$$x_1 = x_{r+1} c_{11} + x_{r+2} c_{21} + \dots + x_n c_{n-r,1}$$

$$x_2 = x_{r+1} c_{12} + x_{r+2} c_{22} + \dots + x_n c_{n-r,2}$$

$$x_r = x_{r+1} c_{1r} + x_{r+2} c_{2r} + \dots + x_n c_{n-r,r}$$

amíg még kiegészítünk, az

$$x_{r+1} = x_{r+1} \cdot 1$$

$$x_{r+2} = x_{r+2} \cdot 1$$

$$x_n = x_n \cdot 1$$

azonosságokkal. Innen látható, hogy

$$\underline{x} = x_{r+1} \underline{c}_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_n \underline{c}_n \cdot 1$$

14.6 Következmény. Ha (14.3)-ban $r(\underline{A}) = r$ és ismert (14.3)-nak $(n-r)$ számú $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_{n-r}$ lineárisan független megoldása, akkor (14.3) minden $\underline{x}$ megoldása egyértelműen előállítható

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n-r} \lambda_k \underline{x}_k \quad (14.5)$$

alakban.

Bizonyítás. A 9.12 Tételből adódik, mivel $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n-r}$ az M^{n-r} altér bázisa.

14.1 Definíció. (14.5)-öt, ahol $\lambda_k, k = 1, \dots, n-r$ tetszőleges értéket felvehet, (15.3) általános megoldásának, a megoldások M^{n-r} alterének $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n-r}$ bázisát (14.3) alaprendszerének nevezzük.

Áttérünk a (13.2) inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazának tárgyalására. (14.3)-at a (13.2)-hez tartozó homogén egyenletrendszernek nevezzük (t.i. úgy keletkezik (13.1)-ből, hogy a jobb oldalon a $\underline{b}$ vektort $\underline{0}$ -val cseréljük fel).

14.7 Tétel. Ha $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ (13.2) megoldásai, akkor $\underline{x}_1 - \underline{x}_2$ (14.3) megoldása.

Bizonyítás. $\underline{A}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = \underline{A}\underline{x}_1 - \underline{A}\underline{x}_2 = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}$.

14.8 Tétel. Ha $\underline{x}_p$ (13.2) egy rögzített ("partikuláris") megoldása, $\underline{x}_H$ pedig (14.3) általános megoldása, akkor (13.2) összes megoldása (általános megoldása) az

$$\underline{x} = \underline{x}_p + \underline{x}_H$$

alakban állítható elő.

Bizonyítás. (13.2) tetszőleges $\underline{x}$ megoldására, az előző tétel alapján, $\underline{x} - \underline{x}_p$ (14.3) megoldása, tehát az utóbbi fellép $\underline{x}_H$ -ban.

Az előbbieket alkalmazásaként egy fontos fogalomkörrel, mátrix sajátértékeivel és sajátvektoraival foglalkozunk röviden.

14.2 Definíció. Legyen $\underline{A} = [a_{ik}]$ n-edrendű négyzetes mátrix; az n-dimenziós $\underline{s} = [s_k]$ oszlopvektort, ill. a λ számot $\underline{A}$ sajátvektorának, ill sajátértékének nevezzük, ha

$$\underline{A}\underline{s} = \lambda \underline{s} \text{ és } \underline{s} \neq \underline{0}. \quad (14.6)$$

14.9 Tétel. A λ szám az n-edrendű $\underline{A}$ mátrixnak akkor és csak akkor sajátértéke (akkor és csak akkor van $\underline{A}$ -nak " λ -hoz tartozó" sajátvektora), ha λ megoldása a

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0 \quad (14.7)$$

egyenletnek, ahol $\underline{E}$ az n-edrendű egységmátrix.

Bizonyítás. (14.6)-ból λ akkor és csak akkor sajátérték, ha van $\underline{s} \neq \underline{0}$, melyre $\underline{A}\underline{s} - \lambda \underline{s} = \underline{0}$, vagyis

$$(\underline{A} - \lambda \underline{E}) \underline{s} = \underline{0}. \quad (14.8)$$

(14.8) azonban $\underline{s}$ -re nézve homogén lineáris egyenletrendszer, melynek akkor és csak akkor van a triviálisától különböző megoldása, ha determinánsa zérus. (l. 14.4 Következmény), vagyis ha (14.7) fennáll.!

14.3 Definíció. A (14.7) bal oldalán álló $\det (\underline{A} - \lambda \underline{E})$ pontosan n -edfoku polinomot A karakterisztikus polinomjának, (14.7)-et A karakterisztikus egyenletének nevezzük.

Megjegyezzük, hogy miután valós együtthatós polinomnak is lehetnek komplex gyökei, valós elemű $\underline{A}$ mátrixnak lehetnek komplex sajátértékei és ennek következtében komplex elemű sajátvektorai. Az algebra alaptételéből (7.1 Tétel) következik, hogy legalábbis komplex sajátértékei és sajátvektorai minden négyzetes mátrixnak vannak. Arra a kérdésre, hogy valós elemű mátrixnak milyen esetben vannak valós sajátértékei, a 19. pontban visszatérünk.

15. A lineáris programozás alapfeladata

Az előbbiek alkalmazásaként ebben a pontban egy a mai ipari, gazdasági gyakorlatban rendkívül jelentős feladattal, a lineáris programozással foglalkozunk. A feladatnak erősen leegyszerűsített, speciális esetét tárgyaljuk, arra törekszünk azonban, hogy a tárgyalás jellemző legyen az általános esetre.

15.1 Példa. Tételezzük fel, hogy egy üzem m féle erőforrás (nyersanyag, munkaerő, energia stb.) felhasználásával n féle terméket gyárt és a_{ik} jelöli az i -edik fajta erőforrásból a k -adik fajta termék egy egységének előállításához szükséges mennyiséget, $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$; v.ö. 8.1. Példa. Az $\underline{A} = [a_{ik}]$ $(m \times n)$ -es mátrixot technikai mátrixnak nevezzük. Jelöljük $b_1, b_2, \dots, b_m$ -mel az 1., 2., ..., m -edik erőforrásból rendelkezésre álló mennyiséget, $c_1, c_2, \dots, c_n$ -nel az 1., 2., ..., n -edik termék egy egységének piaci árát és $x_1, x_2, \dots, x_n$ -nel az 1., 2., ..., n -edik termékből előállítandó (és egyelőre ismeretlen) mennyiséget. A feladat olyan gyártmány-struktúra kialakítása, amely mellett az üzem bruttó bevétele maximális. Ha az n féle termékből rendre $x_1, x_2, \dots, x_n$ egységnyi gyártottunk, az üzem bevétele

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n. \quad (15.1)$$

Közben az i -edik fajta erőforrásból

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$$

mennyiséget használtunk fel és ez nem lehet nagyobb b_i -nél, $i = 1, 2, \dots, m$. Továbbá nyilván $x_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. A feladat tehát a (15.1) függvény maximalizálása a

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

feltételek mellett.

Az előbbi példában ismertetett problémát némileg egyszerűsítve a következő feladat matematikai tárgyalásával foglalkozunk. Legyen adott a valós elemű $\underline{A} = [a_{ik}]$ ($m \times n$)-es mátrix, $\underline{c}' = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ sorvektor,

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

oszlopvektor és legyen

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

az ismeretlen oszlopvektor. Határozzuk meg a "célfüggvény": a

$$\underline{c}' \cdot \underline{x} \tag{15.2}$$

szorzat maximumát (optimumát) az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{x} \geq 0 \quad (15.3)$$

feltételek mellett, ahol $\underline{x} \geq 0$ annak rövidített jelölése, hogy az $\underline{x}$ vektor minden eleme nem-negatív, vagyis $x_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Néhány jelölést és elnevezést vezetünk be. Az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorait $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ -nel jelöljük, és feltételezzük, hogy $\underline{A}$ rangja $r(\underline{A}) = r$. $\underline{A}$

(15.3) feltételi egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásainak halmazát M -mel jelöljük, vagyis

$$M = \{ \underline{x} : \underline{A} \underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{x} \geq 0 \}.$$

Az $\underline{A}$ mátrix r számú lineárisan független $\underline{a}_{i_1}, \underline{a}_{i_2}, \dots, \underline{a}_{i_r}$ oszlopvektorából álló vektorrendszert alapvektorrendszernek, vagy röviden alapnak nevezzük, ha van $\underline{x} = [x_k] \in M$, melyre $x_j = 0$, ha $j \neq i_k$, $k = 1, 2, \dots, r$, vagyis melynek legfőljebb az $\underline{a}_{i_k}$ vektorokhoz tartozó elemei különböznek zérustól (nagyobbak mint zérus). (15.3) ilyen $\underline{x}$ megoldását az adott alaphoz tartozó alapmegoldásnak nevezzük. Az alapot degeneráltnak nevezzük, ha a hozzá tartozó alapmegoldás x_{i_k} elemei között is van zérus. Az alapot optimálisnak nevezzük, ha a hozzátartozó alapmegoldást, $\underline{y}$ -t (15.2)-be helyettesítve, (15.2) maximális értéket vesz fel, vagyis ha

$$\underline{c}' \cdot \underline{y} = \max \underline{c}' \cdot \underline{x}.$$

$$\underline{x} \in M$$

Megjegyezzük, hogy ha $\underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_r}$ alap, akkor pontosan egy alapmegoldás tartozik hozzá. U.i. az alap az $\underline{A}$ mátrix G^r oszlopterének bázisa, a feltevés szerint $\underline{b} \in G^r$ és a 9.12 Tétel szerint $\underline{B}$ egyértelműen állítható elő G^r adott bázisának lineáris kombinációjaként.

A továbbiakban eleve feltesszük, hogy (15.3)-nak van megoldása, vagyis hogy az M halmaz nem üres, u.i. ellenkező esetben nyilván az optimalizálási feladat sem oldható meg. (15.3) egy megoldásából kiindulva eljárást mutatunk be, mely bizonyos elégséges feltételek teljesülése esetén módon ad optimális alapmegoldás meghatározására. Először tehát (15.2)-t figyelmen kívül hagyva (15.3) megoldásaival foglalkozunk.

15.1 Tétel. Ha (15.3)-nak van megoldása, akkor van alapmegoldása is.

Bizonyítás. Legyen az $\underline{y} = [y_i]$ (15.3) megoldása és az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $\underline{y}$ első ℓ eleme pozitív, a többi $n-\ell$ pedig zérus, vagyis

$$\underline{a}_1 y_1 + \underline{a}_2 y_2 + \dots + \underline{a}_\ell y_\ell = \underline{b} \quad (15.4)$$

Ha az $\underline{a}_i$, $i = 1, 2, \dots, \ell$, vektorok lineárisan függetlenek, és ha $\ell = r$, akkor $\underline{y}$ alapmegoldás, ha pedig $\ell < r$, akkor $\underline{y}$ degenerált alapmegoldás, mert az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_\ell$ vektorokat tartalmazó bármely alap többi vektorához tartozó eleme zérus. Ha az $\underline{a}_i$, $i = 1, 2, \dots, \ell$, vektorok lineárisan összefüggők, akkor van $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ valós szám ℓ -es, melyre $|\lambda_1| + \dots + |\lambda_\ell| > 0$,

$$\underline{a}_1 \lambda_1 + \underline{a}_2 \lambda_2 + \dots + \underline{a}_\ell \lambda_\ell = \underline{0} \quad (15.5)$$

és a λ_i -k között van pozitív szám (ha nem lenne, akkor (15.5)-öt -1 -gyel végiszorozzuk). Legyen

$$\frac{y_j}{\lambda_j} = \min_{\lambda_i > 0} \frac{y_i}{\lambda_i}; \quad (15.6)$$

akkor a (15.5)-ből kifejezett

$$\underline{a}_j = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\ell} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \underline{a}_i$$

vektort (15.4)-be helyettesítve:

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 (y_1 - y_j \frac{\lambda_1}{\lambda_j}) + \dots + \underline{a}_{j-1} (y_{j-1} - y_j \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}) + \\ + \underline{a}_{j+1} (y_{j+1} - y_j \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}) + \dots + \underline{a}_\ell (y_\ell - y_j \frac{\lambda_\ell}{\lambda_j}) = \underline{b}, \end{aligned} \quad (15.7)$$

vagyis (15.6) miatt

$$\underline{u} = [u_i] = \begin{bmatrix} y_1 - y_j \frac{\lambda_1}{\lambda_j} \\ \vdots \\ y_{j-1} - y_j \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} \\ y_{j+1} - y_j \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \\ \vdots \\ y_\ell - y_j \frac{\lambda_\ell}{\lambda_j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(15.3) megoldása (minden eleme nem-negatív) és legfeljebb $(\ell-1)$ eleme pozitív. Ha az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{j-1}, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_\ell$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor van $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{j-1}, \mu_{j+1}, \dots, \mu_\ell$, melyek között van pozitív és melyekre

$$\underline{a}_1 \mu_1 + \underline{a}_2 \mu_2 + \dots + \underline{a}_{j-1} \mu_{j-1} + \underline{a}_{j+1} \mu_{j+1} + \dots + \underline{a}_\ell \mu_\ell = \underline{0}.$$

Az utóbbi egyenletből a (15.6)-nak megfelelő

$$\frac{u_h}{\mu_h} = \min_{\mu_i > 0} \frac{u_i}{\mu_i}$$

feltételnek eleget tevő h indexű vektort kifejezzük és (15.7)-be helyettesítjük. Ily módon (15.3) olyan megoldását kapjuk, melynek már legfeljebb $(\ell-2)$ eleme pozitív, a többi pedig zérus. Az eljárást, az $\underline{a}_i$ vektorok el-

távolítását addig folytatjuk, amíg a megmaradtak lineárisan függetlenek nem lesznek és így a bizonyítás elején mondottak szerint végül alapmegoldást (degenerált alapmegoldást) kapunk.!

A továbbiakban (15.3) alapmegoldásainak vizsgálatára szorítkozunk. Azt vizsgáljuk, hogyan lehet egy adott alap valamely vektorát az A mátrix egy másik oszlopvektorára "kicserélni" úgy, hogy újból alapot kapjunk és közben "a célfüggvény értéke növekedjék (ne csökkenjen)".

15.2 Tétel. Legyen (például) $a_1, a_2, \dots, a_r$ alapvektorrendszer, $x_1, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0$ a hozzátartozó alapmegoldás,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r = b, \quad (15.8)$$

és írjuk fel A összes oszlopvektorát ezen alapvektorok lineáris kombinációjaként:

$$a_h = a_1 \lambda_{1h} + a_2 \lambda_{2h} + \dots + a_r \lambda_{rh} \quad (15.9)$$

$$h = 1, 2, \dots, n;$$

ha valamely rögzített $k > r$ -re a λ_{ik} ($i = 1, \dots, r$) számok között van pozitív és

$$\lambda_{jk} = \min_{\lambda_{ik} > 0} \frac{x_i}{\lambda_{ik}}, \quad (15.10)$$

akkor

$$a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_k, a_{j+1}, \dots, a_r \quad (15.11)$$

is alap.

Bizonyítás. Az $a_1, \dots, a_{j-1}, a_k, a_{j+1}, \dots, a_r$ vektorok lineárisan függetlenek. Tegyük fel, u.i., hogy van $\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_k, \mu_{j+1}, \dots, \mu_r$, melyek nem mindegyike zérus, és melyre

$$\mu_1 a_1 + \dots + \mu_{j-1} a_{j-1} + \mu_k a_k + \mu_{j+1} a_{j+1} + \dots + \mu_r a_r = 0 \quad (15.12)$$

Ha itt $\mu_k = 0$ lenne, akkor az $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_r$ vektorok lineárisan összefüggők lennének, ellentétben a feltevessel (l. 9.3 Tétel). Ha $\mu_k \neq 0$,

akkor (15.12)-ből $\underline{a}_k$ kifejezhető, mint a többi vektor lineáris kombinációja. Miután azonban $\underline{a}_k$ egyértelműen írható fel mint az adott alap vektorainak lineáris kombinációja, a (15.12)-ből kapott kifejezésnek (15.9)-cel ($h = k$) való összehasonlítása szerint $\lambda_{jk} = 0$ ellentétben a (15.10) választással.

A (15.11) vektorok tehát lineárisan függetlenek.

Most megmutatjuk, hogy a (15.11) vektorok alapot alkotnak. Fejezzük ki $\underline{a}_j$ -t (15.9)-ből ($h = k$),

$$\underline{a}_j = \frac{1}{\lambda_{jk}} \underline{a}_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{jk}} \underline{a}_i, \quad (15.13)$$

és helyettesítsük ezt a kifejezést (15.8)-ba, kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \frac{a_i}{\lambda_{jk}} (x_i - x_j \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{jk}}) + \frac{x_j}{\lambda_{jk}} \underline{a}_k = \underline{b}. \quad (15.14)$$

A (15.14)-ből kiolvasható

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} x_1 - x_j \frac{\lambda_{1k}}{\lambda_{jk}} \\ \vdots \\ x_{j-1} - x_j \frac{\lambda_{j-1,k}}{\lambda_{jk}} \\ 0 \\ x_{j+1} - x_j \frac{\lambda_{j+1,k}}{\lambda_{jk}} \\ \vdots \\ x_r - x_j \frac{\lambda_{rk}}{\lambda_{jk}} \\ 0 \\ \vdots \\ x_j \\ \frac{x_j}{\lambda_{jk}} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

oszlopvektor azonban (15.3) megoldása (kielégíti a nem-negativitási feltételt is), $u_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, ha $\lambda_{ik} > 0$, akkor (15.10) miatt, ha pedig $\lambda_{ik} \leq 0$, akkor nyilvánvalóan ($x_j \geq 0$, $\lambda_{jk} > 0$). I

Megjegyezzük még, hogy (15.13)-nak (15.9)-be, ill. (15.8)-ba való helyettesítésével az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorai, ill. $\underline{b}$ a következőképpen fejezhető ki a (15.11) alap vektorainak lineáris kombinációjaként:

$$\underline{a}_h = \sum_{i=1}^r \underline{a}_i \lambda_{ih} + \frac{\lambda_{jh}}{\lambda_{jk}} \underline{a}_k -$$

(15.16)

$$- \lambda_{jh} \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{jk}} \underline{a}_i = \sum_{i=1}^r \underline{a}_i \left(\lambda_{ih} - \lambda_{jh} \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{jk}} \right) + \frac{\lambda_{jh}}{\lambda_{jk}} \underline{a}_k,$$

$h = 1, 2, \dots, n$,

illetve a $\underline{b} = \underline{a}_0$, $\lambda_{i0} = x_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, jelölések bevezetésével

$$\begin{aligned} \underline{b} = \underline{a}_0 &= \sum_{i=1}^r \underline{a}_i \lambda_{i0} + \frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{jk}} \underline{a}_k - \lambda_{j0} \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{jk}} \underline{a}_i = \\ &= \sum_{i=1}^r \underline{a}_i \left(\lambda_{i0} - \lambda_{j0} \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{jk}} \right) + \frac{\lambda_{j0}}{\lambda_{jk}} \underline{a}_k \end{aligned}$$

Az utóbbi formula (15.16)-tal ($h = 0$) analóg.

15.3 Tétel. Tegyük fel, hogy teljesülnek a 15.2 Tétel feltételei és az $\underline{a}_1, \dots, \dots, \underline{a}_r$ alapról, melyhez az $\underline{x}$ alapmegoldás tartozik, áttérünk a (15.11) alapra, melyhez tartozó alapmegoldás $\underline{u}$ (l. (15.14)); ha

$$d_k = \sum_{i=1}^r \lambda_{ik} c_i - c_k < 0, \quad (15.17)$$

akkor az alapvektor cserével a célfüggvény értéke nem csökken, vagyis

$$\underline{c}' \underline{u} \geq \underline{c}' \underline{x}. \quad (15.18)$$

Bizonyítás. Mivel $x_j - x_j \frac{\lambda_{jk}}{\lambda_{jk}} = 0$, ezért

$$\begin{aligned} \underline{c}' \underline{u} &= \sum_{i=1}^r c_i \left(x_i - x_j \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{jk}} \right) + c_k \frac{x_j}{\lambda_{jk}} = \\ &= \underline{c}' \underline{x} - \frac{x_j}{\lambda_{jk}} \left[\sum_{i=1}^r \lambda_{ik} c_i - c_k \right]. \end{aligned}$$

Innen $d_k < 0$, $x_j \geq 0$, $\lambda_{jk} > 0$ miatt (15.18) következik.!

Elvileg tehát megoldottuk azt a feladatot, hogy alapról alapra haladva ne csökkentsük a célfüggvény értékét. Most elégséges feltételt adunk arra, hogy egy alap optimális legyen.

15.4 Tétel. Legyen $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r$ alap, $\underline{v} = [v_i]$ a hozzátartozó alapmegoldás és

$$\underline{a}_k = \sum_{i=1}^r \lambda_{ik} \underline{a}_i, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad (15.19)$$

ha minden k -ra

$$d_k = \sum_{i=1}^r \lambda_{ik} c_i - c_k \geq 0, \quad (15.20)$$

akkor az alap optimális.

Nyilvánvaló, hogy $k \leq r$ esetén $d_k = 0$, u.i. ekkor $\lambda_{ik} = \delta_{ik}$ (a Kronecker szimbólum).

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy a célfüggvénynek (15.3) tetszőleges $\underline{y} = [y_i]$ megoldásához tartozó értéke nem nagyobb, mint a $\underline{v}$ alapmegoldáshoz tartozó érték. (15.19) felhasználásával, majd az összegezés sorrendjének felcserélésével és rendezéssel

$$\begin{aligned}
\underline{b} &= \sum_{k=1}^r \underline{y}_k \underline{a}_k = \sum_{k=1}^r \underline{y}_k \underline{a}_k + \sum_{k=r+1}^n \left(\underline{y}_k \sum_{i=1}^r \lambda_{ik} \underline{a}_i \right) = \\
&= \sum_{i=1}^r \underline{y}_i \underline{a}_i + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=r+1}^n \lambda_{ik} \underline{y}_k \right) \underline{a}_i = \\
&= \sum_{i=1}^r \left(\underline{y}_i + \sum_{k=r+1}^n \underline{y}_k \lambda_{ik} \right) \underline{a}_i.
\end{aligned}$$

Mivel $\underline{b}$ az alap vektorainak egyértelmű lineáris kombinációja, az utóbbi egyenlőséget a

$$\sum_{i=1}^r \underline{v}_i \underline{a}_i = \underline{b}$$

egyenlőséggel összehasonlítva kapjuk, hogy

$$\underline{v}_i = \underline{y}_i + \sum_{k=r+1}^n \underline{y}_k \lambda_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (15.21)$$

A célfüggvény $\underline{y}$ -hez tartozó értéke

$$\begin{aligned}
\underline{c}' \underline{v} &= \sum_{i=1}^r \underline{v}_i \underline{c}_i = \sum_{i=1}^r \left(\underline{y}_i + \sum_{k=r+1}^n \underline{y}_k \lambda_{ik} \right) \underline{c}_i = \\
&= \sum_{i=1}^r \underline{y}_i \underline{c}_i + \sum_{k=r+1}^n \underline{y}_k \underline{c}_k + \sum_{k=r+1}^n \left(\underline{y}_k \sum_{i=1}^r \lambda_{ik} \underline{c}_i \right) = \\
&= \underline{c}' \underline{y} + \sum_{k=r+1}^n \underline{y}_k \underline{d}_k \geq \underline{c}' \underline{y}.
\end{aligned}$$

mert $\underline{y}_k \geq 0$, $\underline{d}_k \geq 0$, $k = r+1, r+2, \dots, n$!

15.5 Tétel. Ha valamely az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r$ alapon kívüli $\underline{a}_k = \sum_{i=1}^r \lambda_{ik} \underline{a}_i$,
 $(k > r)$, vektorhoz negatív $\underline{d}_k = \sum_{i=1}^r \lambda_{ik} \underline{c}_i - \underline{c}_k$ szám tartozik

és $\lambda_{ik} \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$ akkor a célfüggvény felülről nem korlátos (15.3) megoldásainak M halmazán.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az M halmazon a célfüggvény tetszőlegesen nagy értéket is felvesz. Legyen $Q > 0$ szám és $\underline{x} = [x_i]$ az adott alaphoz tartozó alapmegoldás. Ha a $\sum_{i=1}^r a_i x_i = \underline{b}$ egyenletből levonjuk, majd az egyenlethez hozzáadjuk a

$$Q \underline{a}_k = Q \sum_{i=1}^r \lambda_{ik} \underline{a}_i$$

vektort, akkor

$$\sum_{i=1}^r (x_i - Q \lambda_{ik}) \underline{a}_i + Q \underline{a}_k = \underline{b}$$

és $\lambda_{ik} \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, valamint $Q > 0$ miatt az

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} x_1 - Q \lambda_{1k} \\ \vdots \\ x_r - Q \lambda_{rk} \\ 0 \\ \vdots \\ Q \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (k)$$

vektor (15.3) megoldása. A célfüggvény értéke

$$\underline{c}' \underline{u} = \underline{c}' \underline{x} - Q \left[\sum_{i=1}^r \lambda_{ik} c_i - c_k \right] = \underline{c}' \underline{x} - Q d_k > P,$$

ahol $P > 0$ tetszőlegesen nagy szám, ha Q -t a következőképpen választjuk:

$$Q > \frac{P - \underline{c}' \cdot \underline{x}}{-d_k} . \quad \square$$

Összefoglalva, az előbbi tételek alkalmazásával (15.3) egy adott megoldásából kiindulva először eljutunk egy alapmegoldáshoz, majd az alapmegoldáshoz tartozó alap vektorait A más megfelelő oszlopvektoraival kicserélve újabb és újabb alapokhoz, miközben az újabb és újabb alapmegoldásokhoz tartozó célfüggvény értékek monoton növekedő sorozatot alkotnak. Minden lépésnél ellenőrizhetjük, hogy a kapott eredmény már (15.2) maximumát szolgáltatja-e vagy sem. Ezt az eljárást bizonyos geometriai megfontolások alapján "szimplex módszernek" nevezik. Az eljárás finomítható és igazolni lehet, hogy elkerülhető ugyanannak az alapnak újbóli fellépése, vagyis az, hogy bizonyos alapokon körbe járjunk, az ún. "ciklizálás". Ha (15.2) egyáltalán korlátos az M halmazon, akkor igazolható, hogy maximumát egy alapmegoldáson felveszi és miután véges sok alap van, az optimális alaphoz véges sok lépésben eljutunk (l. [3]). Az eljárást egy példán mutatjuk be, melynek keretében a számítást megkönnyítő ún. "szimplex táblát" is ismertetjük.

15.2 Példa. Határozzuk meg az $x_2 + x_4$ célfüggvény maximumát a

$$3x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 16$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 11$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

feltételeket kielégítő megoldások halmazán. A

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 11 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer megoldásai közül $y' = (2, 1, 1, 1) \geq 0$.

Mivel a lineáris egyenletrendszernek van nem-negatív megoldása, ezért a 15.1 Tételből következik, hogy van alapmegoldása is. Írjuk fel a (15.5)-nek megfelelő

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \lambda_3 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_4 = 0$$

egyenletet, amelyet például $\underline{\lambda}' = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (2, 1, -1, 0)$ kielégít (15.6) alapján,

$$\min_{\lambda_1 > 0} \frac{y_1}{\lambda_1} = \min \left\{ \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right\} = \frac{y_1}{\lambda_1} = \frac{y_2}{\lambda_2}.$$

Például $j = 2$ -t választva az $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor eltávolítható. Az új megoldás

$$\underline{u}' = (2 - 1 \cdot \frac{2}{1}, 0, 1 - 1 \cdot \frac{-1}{1}, 0) = (0, 0, 2, 1). \text{ Mivel } \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lineárisan függetlenek, $\underline{u}$ alapmegoldás.

A számítást megkönnyítő szimplex táblázat a következő (a jelölések megfelelnek (15.9)-nek, a (15.16) utániaknak, ill. (15.17)-nek):

			c_1	c_2	c_3	c_4
		$\underline{a}_0$	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$
c_3	$\underline{a}_3$	λ_{30}	λ_{31}	λ_{32}	λ_{33}	λ_{34}
c_4	$\underline{a}_4$	λ_{40}	λ_{41}	λ_{42}	λ_{43}	λ_{44}
		d	d_1	d_2	d_3	d_4

vagyis az $\underline{a}_3, \underline{a}_4$ alaphoz tartozó táblázat

			0	1	0	1
		$\underline{b}$	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$
0	$\underline{a}_3$	2	$1/3$	$1/3$	1	0
1	$\underline{a}_4$	1	$1/3$	$-2/3$	0	1
		1	$1/3$	$-5/3$	0	0

Itt $d_2 < 0$ és $\lambda_{32} > 0$, ezért $(j = 3, k = 2)$ az $\underline{a}_3$ vektor $\underline{a}_2$ -vel kicserélhető és a (15.16) formulák ($h = 0$ is) felhasználásával az $\underline{a}_2, \underline{a}_4$ alaphoz tartozó táblázat:

			0	1	0	1
		b	a_1	a_2	a_3	a_4
1	a_2	6	1	1	3	0
1	a_4	5	1	0	2	1
		11	2	0	5	0

Itt $d_k \geq 0$ minden k -ra, tehát az $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és az $\underline{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorok optimális alapot alkotnak. Az optimális alapmegoldás $\underline{x}' = (0, 6, 0, 5)$,
 $\max (x_2 + x_4) = 11$.
M

LINEÁRIS OPERÁTOROK AZ EUKLIDESZI TÉRBEN

16. Az n -dimenziós lineáris, ill. euklideszi tér

Az I. Kötet 10. pontjában, ennek a kötetnek 1., 2., 5., 8., ill. 9. pontjában megismerkedtünk a valós számok, a közönséges tér vektorai, a komplex számok, a mátrixok, ill. az oszlop- (sor-) vektorok halmazának algebrájával. Ha megvizsgáljuk az ezeken a halmazokon értelmezett műveletek tulajdonságait, akkor egy sor közös vonást fedezünk fel. Bizonyos közös vonásokat kiemelve és a konkrét halmaztól elvonatkoztatva indokoltnak látszik és hasznos különféle "absztrakt algebrai strukturák" axiomatikus értelmezése és ezek általános tulajdonságainak vizsgálata. Az így nyert eredmények elősegítik az előbb felsorolt halmazok mélyebb megismerését és megkönnyítik később bevezetésre kerülő fontos, konkrét halmazok ismeretetését. Ebben a pontban röviden ismertetjük a "csoport", a "gyűrű", a "test", a "lineáris tér" és az "euklideszi tér" absztrakt fogalmát.

16.1 Definíció. A $G = \{a, b, \dots\}$ halmazt csoportnak nevezzük, ha elemei között értelmezve van, egy o -rel jelölt csoport-művelet, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik

- a) ha $a, b \in G$, akkor $a o b \in G$;
- b) minden $a, b, c \in G$ -re
 $(a o b) o c = a o (b o c)$ (asszociativitás)
- c) van $n \in G$, hogy minden $a \in G$ -re
 $n o a = a o n = a$; n -et neutrális elemnek nevezzük;
- d) Minden $a \in G$ -hez van $a^{-1} \in G$, melyre
 $a o a^{-1} = a^{-1} o a = n$;
 a^{-1} -et " a " inverz elemének (vagy ellentettjének) nevezzük.

16.2 Definíció. Ha G csoport és minden $a, b \in G$ -re $a o b = b o a$ (kommutativitás), akkor G -t kommutatív csoportnak (vagy Abel-csoportnak) nevezzük.

A csoportműveletet vagy összeadásnak, vagy szorzásnak szokás nevezni és ennek megfelelően o helyett $+$ -szal, ill. $\cdot$ -tal jelölni. E megállapodásnak megfelelően a csoportot "additív", ill. "multiplikatív" csoportnak

mondják. Összeadásnak rendszerint csak akkor nevezik a csoportműveletet, ha a csoport kommutatív. Ilyenkor a neutrális elemet 0-nak, az "a" elem ellentettjét -a-nak mondjuk.

16.1 Példa. Az egész számok a közöttük értelmezett összeadás műveletére nézve kommutatív csoportot alkotnak. A neutrális elem a zérus, a k egész szám ellentettje -k.

16.2. Példa. Az n-edrendű reguláris mátrixok a közöttük értelmezett szorzás műveletére nézve nem-kommutatív (l. 8.3 Példa) csoportot alkotnak, u. i. a 10.13 Tétel szerint két n-edrendű reguláris mátrix szorzata n-edrendű reguláris mátrix, (8.18) szerint a mátrix-szorzás asszociatív, a neutrális elem az egységmátrix, az $\underline{A}$ mátrix inverze $\underline{A}^{-1}$.

16.3 Definíció. A $H = \{a, b, \dots\}$ halmazt gyűrűnek nevezzük, ha elemei között két művelet, az "összeadás" és a "szorzás" van értelmezve, melyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

- a) az összeadásra nézve H kommutatív csoport; e csoport neutrális elemét a gyűrű nullelemének nevezzük és 0-val jelöljük;
- b) ha $a, b \in H$, akkor $a \cdot b \in H$;
- c) minden $a, b, c \in H$ -ra
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (a szorzás asszociatív);
- d) minden $a, b, c \in H$ -ra
 $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $c(a+b) = c \cdot a + c \cdot b$ (a szorzás disztributív az összeadásra nézve).

16.4 Definíció. Ha az F gyűrű nullától különböző elemei, vagyis az $F \setminus \{0\}$ halmaz a gyűrűben értelmezett szorzásra nézve kommutatív csoportot alkot, akkor F-et testnek nevezzük; az $F \setminus \{0\}$ "multiplikatív" csoport neutrális elemét az F test egységelemének nevezzük.

16.3 Példa. A valós számok a szokásos összeadás és szorzás műveletére nézve testet alkotnak.

16.4 Példa. A komplex számok az ott értelmezett összeadás és szorzás műveletére nézve testet alkotnak.

16.5 Példa. Az n-edrendű reguláris mátrixok a közöttük értelmezett összeadás és szorzás műveletére nézve nem alkotnak sem testet, sem gyűrűt, mivel nyilván két reguláris mátrix összege szinguláris mátrix is lehet.

16.6 Példa. Az n -edrendű négyzetes mátrixok a közöttük értelmezett összeadás és szorzás műveletére nézve gyűrűt alkotnak. A nullelem az n -edrendű nullmátrix.

16.5 Definíció. Legyen $F = \{a, b, \dots\}$ test és $L = \{\underline{x}, \underline{y}, \dots\}$ kommutatív, additív csoport; L -et az F test feletti lineáris térnek (vektortérnek) nevezzük, ha értelmezve van F tetszőleges elemének L tetszőleges elemével képzett "szorzata", mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- a) minden $a \in F$ és $\underline{x} \in L$ -re
 $a \cdot \underline{x} = \underline{x} \cdot a \in L$;
- b) ha e az F test egységeleme és $\underline{x} \in L$, akkor $e \cdot \underline{x} = \underline{x}$;
- c) minden $a, b \in F$ és $\underline{x}, \underline{y} \in L$ -re
 $a \cdot (b \cdot \underline{x}) = (ab) \cdot \underline{x}$,
- d) $(a+b) \cdot \underline{x} = a \cdot \underline{x} + b \cdot \underline{x}$ és
- e) $a \cdot (\underline{x} + \underline{y}) = a \cdot \underline{x} + a \cdot \underline{y}$.

A kötet végéig a továbbiakban az F test mindig vagy a valós számok R testét, vagy pedig a komplex számok Z testét jelenti. Az F test feletti L lineáris tér elemét vektoroknak nevezzük.

16.6 Definíció. Legyen L lineáris tér az F (R , vagy Z) test felett; azt mondjuk, hogy az $\underline{x}_k \in L$, $k = 1, 2, \dots, m$ vektorok lineárisan összefüggők, ha van $\lambda_k \in F$, $k = 1, 2, \dots, m$, melyre

$$\sum_{k=1}^m |\lambda_k| > 0 \text{ és } \sum_{k=1}^m \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0},$$

ahol $\underline{0}$ az L additív csoport neutrális eleme; a "zérusvektor" (v.ö. 9.1 Definíció).

16.7 Definíció. Legyen L lineáris tér az F test felett, azt mondjuk, hogy az $\underline{x}_k \in L$, $k = 1, 2, \dots, m$ vektorok lineárisan függetlenek, ha nem lineárisan összefüggők, vagyis ha csak a triviális lineáris kombinációjuk zérus; másszóval, ha a

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0}$$

egyenlőségből szükségképpen következik

$$\lambda_k = 0, k = 1, 2, \dots, m,$$

(v.ö. 9.2 Definíció).

A 16.5 Definícióban felsorolt tulajdonságokból egy sor elemi műveleti szabály következik. Pl. $0 \cdot \underline{x} = \underline{0}$ minden $\underline{x} \in L$ -re, u.i. b) és d) alapján $\underline{x} = e \cdot \underline{x} = (0+e) \cdot \underline{x} = 0 \cdot \underline{x} + \underline{x}$. Hasonlóan, minden $\lambda \in F$ -re $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$, u.i. ha $\lambda = 0$, ez az előbbi alapján igaz, ha pedig $\lambda \neq 0$, akkor minden $\underline{x}$ -re c) és e) alapján $\lambda \cdot \underline{0} + \underline{x} = \lambda \cdot \underline{0} + \lambda \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \underline{x} \right) = \lambda \left(\underline{0} + \frac{1}{\lambda} \cdot \underline{x} \right) = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \underline{x} \right) = \underline{x}$. Ezekből az elemi tulajdonságokból következik, hogy érvényesek a 9.1 - 9.3 Tétellel és a 9.4 Következménnyel analóg állítások, melyeket ezért külön nem foglalmazuk meg.

16.8 Definíció. Ha az L lineáris térben van n számú lineárisan függetlenvektor, de bármely $n+1$ számú vektor lineárisan összefüggő, akkor L -et n -dimenziós lineáris térnek nevezzük és L^n -nel jelöljük.

16.7 Példa. A komplex számok Z halmaza az elemein értelmezett összeadásra nézve kommutatív csoportot alkot. Ha Z -t így tekintjük, akkor (5.8)-ból látható, hogy Z lineáris tér a valós számok teste felett. Amint ez (5.19)-ből és az azelőtt mondottakból látható Z kétdimenziós lineáris tér.

16.8 Példa. Az n -elemű oszlopvektorok (az n -elemű sorvektorok, ill. a rendezett szám n -esek) n dimenziós lineáris teret alkotnak (l. 9.5 Tétel és 9.9 Következmény).

16.9 Példa. Legyenek $a < b$ valós számok és tekintsük az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos egyváltozós valós függvények $C_{[a, b]}^0$ halmazát. Miután két folytonos függvény összege és egy folytonos függvény valós számszorosa is folytonos függvény (l. II. Kötet 6.3 és 6.4 Tétel) és a műveletek nyilván kielégítik a 16.5 Definíció követelményeit, $C_{[a, b]}^0$ lineáris tér a valós számok R teste felett. Bebizonyítjuk, hogy a $C_{[a, b]}^0$ lineáris tér " ∞ dimenziós", vagyis hogy bármilyen nagy $n+1$ pozitív egész számot adunk is meg, $C_{[a, b]}^0$ -nek van $n+1$ számú lineárisan független eleme. Legyen $n+1$ tetszőlegesen adott és válasszunk egy $(n+1)$ -edrendű reguláris négyzetes mátrixot $\underline{Y} = [y_{ik}]$ -t, legyen továbbá $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_1 < \dots < x_n = b$. Az $f_k \in C_{[a, b]}^0$ -t válasszuk a következőképpen: f_k legyen az a folytonos függvény, melynek grafikonja az x, y sík (x_i, y_{ik}) pontjait összekötő törött vonal $i = 0, 1, 2, \dots, n$, vagyis $f_k(x_i) = y_{ik}$, $i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, n$.

Megmutatjuk, hogy $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ lineárisan függetlenek. Tételezzük fel, hogy

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k + \dots + \lambda_n f_n = 0,$$

ahol $0 \in C_{[a, b]}^0$ tér "zérusvektorát", vagyis az azonosan zérus függvényt jelöli. Ekkor az utóbbi egyenlőségnek fenn kell állni az $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ helyeken vett függvényértékekre is, vagyis

$$\sum_{k=0}^n y_{ik} \lambda_k = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Az utóbbi egyenletrendszer azonban λ_k -kra vonatkozó homogén lineáris egyenletrendszer, melynek együttható mátrixa, $\underline{Y}$ reguláris, tehát a 14.4 Következmény szerint $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$!

A lineáris tér elemei (vektorai) között "szorzási" művelet nincs értelmezve, vektorok "hosszáról" sem beszéltünk. Gazdagabb, több hasznos tulajdonsággal rendelkező térfogalomhoz, az "euklideszi tér" fogalmához jutunk, ha a lineáris tér vektorainak "skaláris szorzatát" értelmezzük. Miután a vektorok most az absztrakt L halmaz elemei és nem ábrázolhatók egyenes szakaszokkal, melyeknek hosszuk és egymással bezárt szögük van, a skaláris szorzat definíciója nem történhet a 2.1 Definícióval analóg módon. Ehelyett a közönséges tér (intuitív módon értelmezett) vektorai közötti skaláris szorzat legfontosabb műveleti azonosságait, a (2.1), (2.2), (2.3) és (2.5) egyenlőségeket alapul véve, ezeket axiómákkal "posztulálva" értelmezzük a skaláris szorzatot.

16.9 Definíció. Legyen E lineáris tér a valós számok R teste felett; azt mondjuk: E -ben skaláris szorzatot értelmeztünk, ha E minden $\underline{x}, \underline{y}$ rendezett vektorpárjához hozzárendeltünk egy $(\underline{x}, \underline{y})$ -nál jelölt valós számot, a két vektor skaláris szorzatát úgy, hogy minden $\underline{x}, \underline{y}, \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in E$ -re és $\lambda \in R$ -re fennálljon

$$a) (\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{y}, \underline{x}) \text{ (kommutativitás);}$$

$$b) (\lambda \underline{x}, \underline{y}) = \lambda (\underline{x}, \underline{y});$$

$$c) (\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \underline{y}) = (\underline{x}_1, \underline{y}) + (\underline{x}_2, \underline{y}) \text{ (disztributivitás)}$$

d) $(\underline{x}, \underline{x}) \geq 0$ és egyenlőség akkor és csak akkor álljon fenn, ha $\underline{x} = \underline{0}$; ha E -ben az a) - d) követelményeket kielégítő skaláris szorzatot értelmeztük, E -t valós euklideszi térnek nevezzük.

Megjegyzések. A skaláris szorzat előbbi bevezetése a következőképpen is megfogalmazható. Megadunk egy $s : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, mely az E lineáris tér önmagával képzett direkt szorzatát a valós számok $\mathbb{R}$ halmazába képezi le és az a) - d) tulajdonságokkal rendelkezik. Ha az E^n n -dimenziós lineáris térben értelmeztük a 16.9 Definíció szerint a skaláris szorzatot, E^n -et n -dimenziós valós euklideszi térnek nevezzük.

Bár a továbbiakban elsősorban csak a valós euklideszi teret szerepeltetjük, megadjuk a "komplex euklideszi tér" definícióját is.

16.10 Definíció. Legyen E lineáris tér a komplex számok $\mathbb{Z}$ teste felett; azt mondjuk: E -ben skaláris szorzatot értelmeztünk, ha E minden $\underline{x}, \underline{y}$ rendezett vektor párjához hozzárendeltünk egy $(\underline{x}, \underline{y})$ -nál jelölt komplex számot, a két vektor skaláris szorzatát úgy, hogy minden $\underline{x}, \underline{y}, \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in E$ -re és $\lambda \in \mathbb{Z}$ -re fennálljon

a) $(\underline{x}, \underline{y}) = \overline{(\underline{y}, \underline{x})}$, ahol a felülvonás a komplex szám konjugáltját jelöli;

b) $(\lambda \underline{x}, \underline{y}) = \lambda (\underline{x}, \underline{y})$ és $(\underline{x}, \lambda \underline{y}) = \bar{\lambda} (\underline{x}, \underline{y})$;

c) $(\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \underline{y}) = (\underline{x}_1, \underline{y}) + (\underline{x}_2, \underline{y})$ és $(\underline{y}, \underline{x}_1 + \underline{x}_2) = (\underline{y}, \underline{x}_1) + (\underline{y}, \underline{x}_2)$;

d) $(\underline{x}, \underline{x}) \geq 0$ és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\underline{x} = \underline{0}$; ha E -ben az a) - d) követelményeket kielégítő skaláris szorzatot értelmeztük, E -t komplex euklideszi térnek nevezzük.

16.11 Definíció. Legyen E valós (vagy komplex) euklideszi tér és $\underline{x} \in E$; az

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})}$$

nem-negatív számot az $\underline{x}$ vektor normájának (abszolút értékének) nevezzük.

16.10 Példa. Nyilvánvaló, hogy a közönséges tér vektorai háromdimenziós valós euklideszi teret alkotnak, ahol vektor normája a vektor hosszával egyenlő.

16.11 Példa. Legyen Q^n a valós elemű n -dimenziós oszlopvektorok n -dimenziós lineáris tere és értelmezzük Q^n tetszőleges két $\underline{x} = [x_i], \underline{y} = [y_i]$ vektorának skaláris szorzatát a következőképpen:

$$(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}' \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (16.1)$$

Nyilvánvaló, hogy ez az értelmezés kielégíti a 16.9 Definíció követelményeit, tehát ezáltal Q^n -et n -dimenziós valós euklideszi térré tettük. Az $\underline{x}$ vektor normája

$$\|\underline{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \quad (16.2)$$

Hasonlóan tehető euklideszi térré az n -dimenziós sorvektorok, ill. a rendezett szám n -esek lineáris tere.

16.12 Példa. Tekintsük az $[a, b]$ zárt intervallumon ($a < b$) folytonos függvények $C^0_{[a, b]}$ lineáris terét (l. 16.9 Példa) és értelmezzük a térben a skaláris szorzatot a következőképpen: tetszőleges $f, g \in C^0_{[a, b]}$ -re

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx. \quad (16.3)$$

A határozott integrál elemi tulajdonságaiból (l. II. Kötet 23. pont) azonnal következik, hogy a (16.3) értelmezés kielégíti a 16.9 Definíció követelményeit. Ezzel tehát $C^0_{[a, b]}$ -t valós euklideszi térré tettük, ahol az f "vektor" normája

$$\|f\| = \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^{1/2} \quad (16.4)$$

Az elemi vektoralgebra (2.6) egyenlőtlenségének analógja absztrakt valós euklideszi térben érvényes.

16.1 Tétel. (Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség.)

Legyen E valós euklideszi tér; ekkor minden $\underline{x}, \underline{y} \in E$ -re

$$|(\underline{x}, \underline{y})| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|. \quad (16.5)$$

Bizonyítás. Legyen λ tetszőleges valós szám és képezzük az

$$(\underline{x} - \lambda \underline{y}, \underline{x} - \lambda \underline{y})$$

skaláris szorzatot.

A 16.9 Definíció a) - d) felhasználásával

$$\begin{aligned} 0 \leq (\underline{x} - \lambda \underline{y}, \underline{x} - \lambda \underline{y}) &= \|\underline{x}\|^2 - \lambda(\underline{y}, \underline{x}) - \lambda(\underline{x}, \underline{y}) + \lambda^2 \|\underline{y}\|^2 = \\ &= \|\underline{y}\|^2 \lambda^2 - 2(\underline{x}, \underline{y})\lambda + \|\underline{x}\|^2. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Rögzített $\underline{x}$ és $\underline{y}$ mellett azt kaptuk, hogy λ (16.6) másodfoku polinomja nem-negatív. Ez csak úgy lehetséges, hogy e másodfoku polinomnak leg-följebb egy valós gyöke van, vagyis diszkriminánsa nem-pozitív:

$$4(\underline{x}, \underline{y})^2 - 4\|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2 \leq 0.$$

Innen $(\underline{x}, \underline{y})^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{y}\|^2$, ahonnan (16.5) következik.!

16.2 Következmény. (Cauchy-egyenlőtlenség.)

Legyen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ill. $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ tetszőleges valós számokból álló rendezett szám n-es, akkor

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{k=1}^n y_k^2. \quad (16.7)$$

Bizonyítás. Azonnal következik (16.1)-ből, (16.2)-ből és (16.5) négyzetre emelt alakjából, ha e rendezett szám n-eseket a 16.11 Példában tárgyalt Q^n euklideszi tér oszlopvektorainak tekintjük.!

16.3 Következmény. (Bunyakovszkij - egyenlőtlenség)

Legyen f , ill. g az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos függvény, akkor

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx. \quad (16.8)$$

Bizonyítás. Azonnal adódik (16.3)-ból és (16.4)-ből ha (16.5) négyzetre emelt alakját a 16.12 Példában tárgyalt $C_{[a,b]}^0$ euklideszi térre alkalmazzuk.!

16.4 Következmény. (Háromszög-egyenlőtlenség, Minkowski-egyenlőtlenség)

Legyen E valós euklideszi tér; minden $\underline{x}, \underline{y} \in E$ -re

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|. \quad (16.9)$$

Bizonyítás. A skaláris szorzat definíciójának tulajdonságait és (16.5)-öt felhasználva

$$\begin{aligned}\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 &= (\underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}) = \|\underline{x}\|^2 + 2(\underline{x}, \underline{y}) + \|\underline{y}\|^2 \leq \|\underline{x}\|^2 + \\ &+ 2|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| + \|\underline{y}\|^2 \leq \|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2 = (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2.\end{aligned}$$

A Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség lehetőséget ad arra, hogy a valós E euklideszi térben értelmezzük két nem zérus vektor "szögét".

Ha u.i. $\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{y} \neq \underline{0}$, akkor (16.5)-ből

$$-1 \leq \frac{(\underline{x}, \underline{y})}{\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|} \leq 1$$

következik, van tehát olyan φ szög, melynek cosinusa az egyenlőtlenség közepén álló kifejezés. A 2.1 Definíció analógiájára éppen ezt a $0 \leq \varphi \leq \pi$ szöveget nevezzük az $\underline{x} \in E$ és $\underline{y} \in E$ vektorok szögének. Más szóval az $\underline{x} \neq \underline{0}$ és $\underline{y} \neq \underline{0}$ vektorok szögének cosinusa, definíció szerint,

$$\cos \varphi = \frac{(\underline{x}, \underline{y})}{\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|}. \quad (16.10)$$

Ily módon a valós euklideszi térre általánosítható a vektorok merőlegességének fogalma (a 2.2 Tétel analógonja most definícióként jelentkezik).

16.12 Definíció. Legyen E valós euklideszi tér; azt mondjuk, hogy az $\underline{x} \in E$ és $\underline{y} \in E$ vektorok ortogonálisak, ha

$$(\underline{x}, \underline{y}) = 0.$$

Nyilvánvaló a definícióból, hogy a $\underline{0}$ zérusvektor minden vektorra ortogonális.

17. Bázis. Bázistranszformációk

Ebben a pontban a véges dimenziós euklideszi tér vektorainak bizonyos vektorok, az un. bázisvektorok lineáris kombinációjaként való előállítását vizsgáljuk. A definíciókat és a tételeket az E^n n-dimenziós valós euklideszi térben fogalmazzuk meg, bár az L^n lineáris térben is megadható, ill. érvényes a fogalmak, ill. tételek közül az, amely nem épít a skaláris

szorzat fogalmára és az ezen alapuló fogalmakra (amilyen pl. az ortogonalitás).

17.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy az E^n n -dimenziós valós euklideszi tér $\underline{e}_k \in E^n$, $k = 1, 2, \dots, n$ vektorait bázist alkotnak, ha lineárisan függetlenek (v.ö. 3.1 és 9.3 Definíció).

A 16.8 Definícióból következik, hogy E^n -ben van bázis.

17.1 Tétel. Legyen $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ az E^n tér bázisa; minden $\underline{x} \in E^n$ -hez van egy és csak egy $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rendezett szám n -es $(x_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n)$, melyre

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^n x_k \underline{e}_k. \quad (17.1)$$

(v.ö. 1.4 Tétel, 9.3 Definíció és 9.7 Tétel).

Bizonyítás. Először igazoljuk, hogy van (17.1) alakú felbontás, azután bizonyítjuk annak egyértelműségét. Mivel E^n -ben tetszőlegesen megadott $n+1$ számú vektor lineárisan összefüggő, van $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n+1$,

melyre $\sum_{k=1}^{n+1} |\lambda_k| > 0$ és

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \underline{e}_k + \lambda_{n+1} \underline{x} = \underline{0}.$$

Ha itt $\lambda_{n+1} = 0$ lenne, akkor $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ között kell hogy legyen zérustól különböző és így az $\underline{e}_k$ vektorok egy nem triviális lineáris kombinációja zérus lenne, ami ellentmond annak, hogy $\underline{e}_k$, $k = 1, \dots, n$ bázis. Tehát $\lambda_{n+1} \neq 0$ és így

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}} \right) \underline{e}_k.$$

Látjuk, hogy $\underline{x}$ előállítható az $\underline{e}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként. Most megmutatjuk, hogy ez az előállítás egyértelmű. Tételizzük fel, hogy (17.1) mellett fennáll

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^n y_k \underline{e}_k.$$

Vonjuk ki (17.1)-et az utóbbi egyenlőségből:

$$\underline{0} = \sum_{k=1}^n (y_k - x_k) \underline{e}_k.$$

Mivel az $\underline{e}_k$ vektorok lineárisan függetlenek, innen $y_k - x_k = 0$, vagyis $y_k = x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ következik.!

Az $\underline{x} \in E^n$ vektornak az $\underline{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ bázisvektorok szerinti (17.1) felbontásában szereplő $x_1, x_2, \dots, x_n$ együtthatókat az $\underline{x}$ vektor adott bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Az előző tétel szerint, ha a bázist lerögzítettük, egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető az E^n tér, ill. a rendezett szám n -esek R^n halmaza között, t. i. minden $\underline{x} \in E^n$ vektorhoz hozzárendeljük a koordinátáiból álló $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rendezett szám n -est. Nyilvánvaló, hogy E^n különböző vektoraihoz különböző rendezett szám n -esek tartoznak, továbbá az, hogy bárhogyan adunk meg egy

$(y_1, \dots, y_n)$ rendezett szám n -est, $\sum_{k=1}^n y_k \underline{e}_k$ az E^n tér vektora, melynek

koordinátái $y_1, \dots, y_n$. A $\underline{0} \in E^n$ -nek a $(0, 0, \dots, 0)$ rendezett szám n -es

felel meg. A rendezett szám n -eseket n -elemű oszlop-, vagy sorvektorokként is felírhatjuk és az előbbiekben R^n helyett beszélhetünk volna az n elemű oszlopvektorok Q^n , vagy az n elemű sorvektorok S^n teréről is. Ha az $\underline{x} \in E^n$ vektorhoz, egy lerögzített bázisban az $\underline{x} = [x_k] \in Q^n$ koordináta oszlopvektor tartozik, ezt a következőképpen jelöljük: $\underline{x} \cong \underline{x}$.

Rögzítsük le E^n -ben az $\underline{e}_k$, $k = 1, \dots, n$ bázist és legyenek $\underline{x} \cong \underline{x}$, $\underline{y} \cong \underline{y}$ tetszőleges E^n -beli vektorok, λ tetszőleges skálár. Nyilvánvaló, hogy az E^n -ben értelmezett műveletek a vektorokat a rögzített bázisban reprezentáló oszlopvektorokkal a következőképpen végezhetők el:

$$\underline{x} + \underline{y} \cong \underline{x} + \underline{y}, \text{ ill. } \lambda \underline{x} \cong \lambda \underline{x}. \quad (17.2)$$

Miután a lineáris összefüggőséget, ill. függetlenséget L^n -ben (E^n -ben), ill. Q^n -ben analóg módon értelmeztük (l. 16.6 és 9.1, ill. 16.7 és 9.2 Definíció), nyilvánvaló, hogy ha a rögzített bázisban $\underline{x}_k \cong \underline{x}_k$, $k = 1, \dots, m$, az $\underline{x}_k$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan összefüggők

(függetlenek), ha a megfelelő $\underline{x}_k$ oszlopvektorok lineárisan összefüggők (függetlenek).

Jelöljük az i -edik és k -adik bázisvektor skalárszorzatát g_{ik} -val, vagyis

$$g_{ik} = (\underline{e}_i, \underline{e}_k) = (\underline{e}_k, \underline{e}_i) = g_{ki}. \quad (17.3)$$

Az $\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i$ és az $\underline{y} = \sum_{k=1}^n y_k \underline{e}_k$ vektorok skaláris szorzata (16.9 Definíció b), c) felhasználásával)

$$\begin{aligned} (\underline{x}, \underline{y}) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i, \sum_{k=1}^n y_k \underline{e}_k \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i y_k (\underline{e}_i, \underline{e}_k) = \\ &= \sum_{i,k=1}^n g_{ik} x_i y_k. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Az $\underline{x}$ vektor normájának négyzete

$$\|\underline{x}\|^2 = (\underline{x}, \underline{x}) = \sum_{i,k=1}^n g_{ik} x_i x_k. \quad (17.5)$$

Ha bevezetjük a $\underline{G} = [g_{ik}]$ jelölést ($\underline{G}$ n -edrendű négyzetes mátrix, mely (17.3) miatt szimmetrikus, 1. 8.7 Definíció) (17.4), ill. (17.5) még így is írható:

$$(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}' \underline{G} \underline{y}, \quad (17.6)$$

illetve

$$\|\underline{x}\|^2 = \underline{x}' \underline{G} \underline{x}. \quad (17.7)$$

A skaláris szorzat és a norma kiszámítása különösen egyszerűvé válik akkor, ha a bázisvektorok egymásra ortogonális "egységvektorok" (normájuk 1).

17.2 Definíció. Az E^n tér $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ bázisát ortogonális bázisnak nevezzük, ha a bázisvektorok páronként ortogonálisak, vagyis

$$(\underline{e}_i, \underline{e}_k) = 0 \quad i \neq k;$$

ha ezenkívül a bázisvektorok egységvektorok, vagyis

$$(\underline{e}_i, \underline{e}_k) = \delta_{ik},$$

$$i, k = 1, 2, \dots, n \quad (17.8)$$

(δ_{ik} a Kronecker szimbólum), akkor a bázist ortonormált mátrixnak nevezzük (v.ö. 3.2 Definíció).

Meg fogjuk mutatni, hogy E^n -ben van ortonormált bázis. Ehhez azonban szükségünk lesz az "altér" fogalmára.

17.3 Definíció. Azt mondjuk, hogy az E^n tér $E^m \subset E^n$ részhalmaza E^n m-dimenziós altére ($0 \leq m \leq n$) ha E^m m-dimenziós euklideszi tér. (v.ö. 9.4 Definíció).

Részletesebb a 9.4 Definícióval analóg definíció is megadható lett volna, erre azonban most nincs szükség. U.i. az " E^m legyen m-dimenziós euklideszi tér" követelmény biztosítja, hogy E^m kielégíti a 16.5 és 16.8 Definíciók feltételeit (n helyett m-mel). A lényeges követelmény természetesen az, hogy E^m tetszőleges elemeivel együtt azok tetszőleges lineáris kombinációja is E^m eleme legyen, és E^m legyen m-dimenziós.

Az E^n tér alterével kapcsolatban nyilvánvalóan érvényesek, ill. analóg módon bizonyíthatók a 9.12 és 9.13 Tételekkel, valamint azok 9.14 és 9.15 Következményeivel analóg tételek, így többek között érvényes a

17.2 Tétel. Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m \in E^n$ lineárisan függetlenek; E^n -nek az " $\underline{a}_k$ vektorok által kifeszített részhalmaza" E^n m-dimenziós altére (melynek $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ bázisa).

A továbbiakban szükségünk lesz a következő segédtételekre.

17.3 Segéd-tétel. Legyen $\underline{e}_k, k = 1, \dots, n, E^n$ bázisa és $\underline{u} \in E^n$ ortogonális minden bázisvektorra, vagyis

$$(\underline{u}, \underline{e}_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

akkor

$$\underline{u} = \underline{0}$$

Bizonyítás. $\underline{u}$ felírható a következőképpen

$$\underline{u} = \sum_{k=1}^n u_k \underline{e}_k.$$

Szorozzuk meg skalárisan az utóbbi egyenlőség mindkét oldalát $\underline{u}$ -val, akkor a feltevés miatt

$$\|\underline{u}\|^2 = (\underline{u}, \underline{u}) = \sum_{k=1}^n u_k (\underline{e}_k, \underline{u}) = 0,$$

vagyis 16.9 Definíció d) alapján $\underline{u} = \underline{0}$.

17.4 Segédteétel. Legyen $\underline{u} \in E^n$ és $\underline{u} \neq \underline{0}$, akkor E^n $\underline{u}$ -ra ortogonális vektorainak E^{n-1} halmaza E^n $(n-1)$ -dimenziós altér.

Bizonyítás. Az könnyen látható, hogy E^{n-1} altér, u.i. ha $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in E^{n-1}$, akkor tetszőleges c_1, c_2 -re $(\underline{u}, c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2) = c_1 (\underline{u}, \underline{x}_1) + c_2 (\underline{u}, \underline{x}_2) = 0 + 0 = 0$, vagyis $(c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2) \in E^{n-1}$. Be kell bizonyítanunk azt, hogy E^{n-1} $(n-1)$ -dimenziós altér. Legyen $\underline{e}_k, k = 1, \dots, n$, E^n egy bázisa és E^{n-1} egy tetszőleges

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^n x_k \underline{e}_k$$

eleme adott. Mivel

$$\underline{x} \in E^{n-1},$$

$$0 = (\underline{u}, \underline{x}) = \sum_{k=1}^n x_k (\underline{u}, \underline{e}_k).$$

Az $(\underline{u}, \underline{e}_k)$ számok közül legalább az egyik nem zérus, ellenkező esetben u.i. az előző segédteétel alapján $\underline{u} = \underline{0}$ lenne, ellentétben a feltevéssel. Legyen pl. $(\underline{u}, \underline{e}_n) \neq 0$. Akkor az utolsó egyenletből x_n kifejezhető:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k, \quad \text{ahol} \quad \lambda_k = - \frac{(\underline{u}, \underline{e}_k)}{(\underline{u}, \underline{e}_n)}$$

$\underline{x}_n$ -nek ezt a kifejezését $\underline{x}$ előállításába helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\underline{x} &= \sum_{k=1}^{n-1} x_k \underline{e}_k + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k \right) \underline{e}_n = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} x_k (\underline{e}_k + \lambda_k \underline{e}_n).\end{aligned}\quad (17.9)$$

Vagyis ha $\underline{x} \in E^{n-1}$, akkor előállítható mint az $(\underline{e}_k + \lambda_k \underline{e}_n)$, $k = 1, 2, \dots, \dots, n-1$, vektorok lineáris kombinációja. Azonban ez fordítva is igaz: ha $\underline{x}$ e vektorok lineáris kombinációja, akkor ortogonális $\underline{u}$ -ra. Tegyük fel u.i., hogy (17.9) fennáll, akkor $(\underline{u}, \underline{x}) = 0$, mivel minden $k = 1, 2, \dots, n-1$ -re

$$\begin{aligned}(\underline{u}, \underline{e}_k + \lambda_k \underline{e}_n) &= (\underline{u}, \underline{e}_k) + \lambda_k (\underline{u}, \underline{e}_n) = \\ &= (\underline{u}, \underline{e}_k) - \frac{(\underline{u}, \underline{e}_k)}{(\underline{u}, \underline{e}_n)} (\underline{u}, \underline{e}_n) = 0.\end{aligned}$$

$\underline{x}$ tehát akkor és csak akkor eleme E^{n-1} -nek, ha az $(\underline{e}_k + \lambda_k \underline{e}_n)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, vektorok lineáris kombinációja, vagyis E^{n-1} éppen e vektorok által kifeszített altér. E vektorok azonban lineárisan függetlenek. Tegyük fel u.i., hogy

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k (\underline{e}_k + \lambda_k \underline{e}_n) = 0,$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \underline{e}_k + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \lambda_k \right) \underline{e}_n = 0,$$

ahonnan $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{n-1} = 0$ következik, mivel $\underline{e}_k$, $k = 1, \dots, n$, bázis.

17.5 Segédétel. Legyen $\underline{e}_k \in E^n$, $k = 1, 2, \dots, n$ ortonormált vektorrendszer, vagyis

$$(\underline{e}_i, \underline{e}_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n;$$

akkor

$$\underline{e}_k, \quad k = 1, \dots, n$$

az E^n tér bázisa.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy az $\underline{e}_k$ vektorok lineárisan függetlenek.

Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^n \lambda_k \underline{e}_k = 0$ és szorozzuk meg ezt egy egyenlőséget skalárisan $\underline{e}_i$ -vel, kapjuk, hogy

$$0 = (\underline{e}_i, \sum_{k=1}^n \lambda_k \underline{e}_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{ik} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

17.6 Tétel. E^n -ben van ortonormált bázis.

Bizonyítás. A bizonyítás a 17.4 Segédtelet n -szeres alkalmazásával történik. Legyen $\underline{e}_1 \in E^n$, $\|\underline{e}_1\| = 1$ és jelöljük E^{n-1} -gyel az $\underline{e}_1$ -re ortogonális vektorok alterét. Legyen $\underline{e}_2 \in E^{n-1}$, $\|\underline{e}_2\| = 1$ és jelöljük E^{n-2} -vel az E^{n-1} tér $\underline{e}_2$ -re ortogonális vektorainak alterét. E^{n-2} nyilván E^n -nek $(n-2)$ -dimenziós altere. Legyen $\underline{e}_3 \in E^{n-2}$ és $\|\underline{e}_3\| = 1$. Nyilván $(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = 0$, $(\underline{e}_2, \underline{e}_3) = 0$, és mivel $\underline{e}_3 \in E^{n-2} \subset E^{n-1}$, $(\underline{e}_3, \underline{e}_1) = 0$. Jelöljük E^{n-3} -mal az E^{n-2} tér $\underline{e}_3$ -ra ortogonális vektorainak alterét és így tovább n lépésben kiválasztottuk E^n -ből az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \dots, \underline{e}_n$ vektorokat, melyekre

$$(\underline{e}_i, \underline{e}_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

fennáll. Ezen n számú vektor tehát ortonormált vektorrendszert alkot, de akkor a 17.5 Segédtelet alapján $\underline{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ ortonormált bázis is.

Ortonormált bázisban egyszerű jelentésük van a vektorok koordinátáinak. Legyen $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az E^n tér ortonormált bázisa és $\underline{x} \in E^n$. Ha az $\underline{x} = \sum_{k=1}^n x_k \underline{e}_k$ egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk skalárisan $\underline{e}_i$ -vel, akkor (17.8) miatt

$$x_i = (\underline{x}, \underline{e}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17.10)$$

adódik (v.8. (3.6)). Ortonormált bázisban a skaláris szorzat, ill. a norma kiszámítására szolgáló (17.4), ill. (17.5) képlet is jelentősen egyszerűsödik. (17.8) és (17.3) miatt (17.4)-ben és (17.5)-ben $g_{ik} = \delta_{ik}$, tehát

$$(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \underline{x}' \cdot \underline{y} \quad (17.11)$$

és

$$\|\underline{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \underline{x}' \cdot \underline{x}. \quad (17.12)$$

(V.8. (3.10) és (3.11)).

Áttérünk annak a kérdésnek tárgyalására, mi történik az E^n tér vektorainak koordinátaival (a vektoroknak megfelelő koordináta oszlopvektorokkal), ha egy bázisról egy másik bázisra térünk át, más szóval bázistranszformációt hajtunk végre. Legyen $\underline{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, ill.

$\tilde{\underline{e}}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ az E^n tér két tetszőleges bázisa; az elsőt "régi", a másodikat "új" bázisnak fogjuk nevezni. A bázistranszformációt ismertnek tekintjük, ha az új bázis vektorai a régi bázis vektorainak lineáris kombinációiként adóttak. Legyen tehát a bázistranszformáció

$$\tilde{\underline{e}}_k = \sum_{i=1}^n t_{ik} \underline{e}_i, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (17.13)$$

Az n -edrendű $\underline{T} = [t_{ik}]$ mátrixot a bázistranszformáció mátrixának nevezzük. A $\underline{T}$ mátrix k -adik oszlopvektora a $\underline{t}_k =$

$$\begin{bmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \vdots \\ t_{nk} \end{bmatrix}$$

reprezentáló oszlopvektor, vagyis $\tilde{\underline{e}}_k \cong \underline{t}_k$. Miután az $\tilde{\underline{e}}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, vektorok lineárisan függetlenek, a $\underline{t}_k$ oszlopvektorok is lineárisan függetlenek, tehát a bázistranszformáció $\underline{T}$ mátrixa reguláris, $\det \underline{T} \neq 0$.

Legyen egy tetszőleges $\underline{x} \in E^n$ vektor adott és

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i, \text{ ill. } \underline{x} = \sum_{k=1}^n \tilde{x}_k \tilde{\underline{e}}_k \quad (17.14)$$

vagyis az $\underline{x}$ vektort a régi, ill. az új bázisban reprezentáló oszlopvektor $\underline{x} \cong \underline{x} = [\underline{x}_i]$, ill. $\underline{x} \cong \tilde{\underline{x}} = [\tilde{x}_k]$. Levezetjük az $\underline{x}$ és $\tilde{\underline{x}}$ oszlopvektorok közötti összefüggést. Ebből a célból helyettesítsük (17.13)-at (17.14) második formulájába; az összegezés sorrendjét felcserélve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\underline{x} &= \sum_{k=1}^n \tilde{x}_k \sum_{i=1}^n t_{ik} \underline{e}_i = \sum_{i,k=1}^n \tilde{x}_k t_{ik} \underline{e}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (t_{ik} \tilde{x}_k) \underline{e}_i.\end{aligned}$$

Miután $\underline{x}$ felbontása a régi bázisban egyértelmű, az utóbbi kifejezést (17.14) első formulájával összehasonlítva adódik, hogy

$$x_i = \sum_{k=1}^n t_{ik} \tilde{x}_k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

vagy mátrix jelölésre áttérve

$$\underline{x} = \underline{T} \cdot \tilde{\underline{x}}. \quad (17.15)$$

Mivel $\underline{T}$ reguláris, létezik inverz mátrixa. Szorozzuk meg (17.15) mindkét oldalát $\underline{T}^{-1}$ -gyel balról, kapjuk, hogy

$$\underline{T}^{-1} \cdot \underline{x} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{T} \cdot \tilde{\underline{x}} = \underline{E} \tilde{\underline{x}} = \tilde{\underline{x}}.$$

Ezek szerint $\underline{x}$ új koordináta oszlopvektora a régeből az

$$\tilde{\underline{x}} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{x} \quad (17.16)$$

formula segítségével nyerhető.

Fontosságánál fogva külön figyelmet érdemel az az eset, amikor a régi és az új bázis egyaránt ortonormált. Ortonormált bázisról ortonormált bázisra való áttérésnél ortogonális bázistranszformációról beszélünk. Legyen tehát $\underline{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, ill. $\tilde{\underline{e}}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ két tetszőleges ortonormált bázis és a bázistranszformáció

$$\tilde{e}_k = \sum_{i=1}^n m_{ik} e_i, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (17.17)$$

Az ortogonális bazistranszformáció $\underline{M} = [m_{ik}]$ mátrixának k -adik oszlopvektorát $\underline{m}_k$ -val jelöljük, $k = 1, 2, \dots, n$. A régi bázisban $\tilde{e}_k \cong \underline{m}_k$. Az $\tilde{e}_k$ vektorokra alkalmazott (17.8)-ból és (17.11)-ből következik, hogy

$$\underline{m}_k' \cdot \underline{m}_\ell = \delta_{k\ell}, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n \quad (17.18)$$

17.4 Definíció. Az n -edrendű $\underline{M}$ mátrixot ortogonális mátrixnak nevezzük, ha

$$\underline{M}' \underline{M} = \underline{E}, \quad (17.19)$$

ahol $\underline{E}$ az n -edrendű egységmátrix.

Ha az $\underline{M}$ mátrix oszlopvektorait rendre $\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_n$ -nel jelöljük, akkor transzponáltjának $\underline{M}'$ -nek sorvektorai rendre $\underline{m}_1', \dots, \underline{m}_n'$. Ebből látható, hogy a (17.19) definiáló tulajdonság ekvivalens (17.18)-cal. Az ortogonális mátrix ez utóbbi, definiáló tulajdonságát úgy is meg szokták fogalmazni, hogy "ortogonális mátrix oszlopvektorai egymásra páronként ortogonális egységvektorok".

Ortogonális mátrixok további fontos tulajdonságai a következők.

Ha az $\underline{M}$ mátrix ortogonális, akkor reguláris és

$$\det \underline{M} = \pm 1, \quad (17.20)$$

u.i. a 10.13 Tétel és (10.7) alapján (17.19)-ből

$$1 = \det \underline{E} = \det \underline{M}' \cdot \det \underline{M} = (\det \underline{M})^2$$

következik.

$\underline{M}$ akkor és csak akkor ortogonális, ha reguláris és transzponáltja egyenlő inverzével, vagyis

$$\underline{M}' = \underline{M}^{-1}. \quad (17.21)$$

Ez az állítás (17.19)-nek és az inverz mátrix definíciójának (l. 11.2 Definíció) közvetlen következménye.

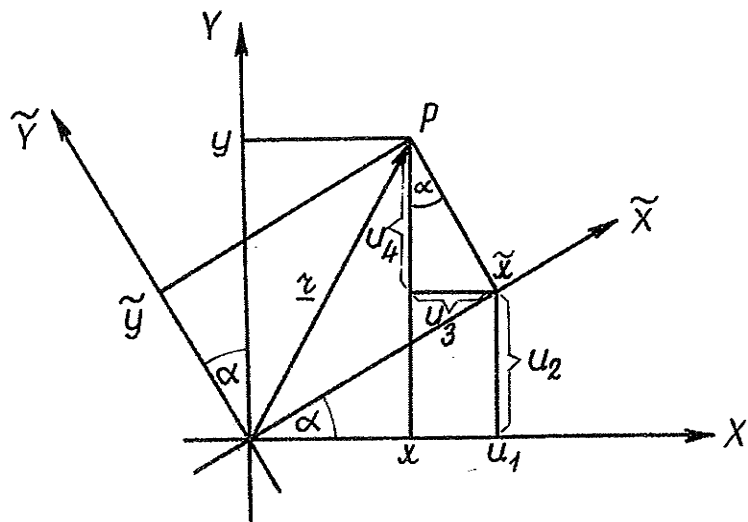
Ha $\underline{M}$ ortogonális, akkor transzponáltja $\underline{M}'$ is ortogonális, ugyanis (17.21) miatt.

$$(\underline{M}')' \cdot \underline{M}' = \underline{M} \cdot \underline{M}' = \underline{M} \cdot \underline{M}^{-1} = \underline{E}. \quad (17.22)$$

Miután $\underline{M}'$ oszlopvektorai megegyeznek $\underline{M}$ sorvektorokkal, ez utóbbi tényből következik, hogy "ortogonális mátrix sorvektorai is egymásra ortogonális egységvektorok".

Visszatérve az ortogonális bázistranszformációra, látjuk, hogy ennek mátrixa ortogonális mátrix. Ezek szerint (17.21) alapján ortogonális transzformációnál a koordináta oszlopvektorok (17.16) transzformációs szabálya a következőképpen egyszerűsödik

$$\underline{\tilde{x}} = \underline{M}' \underline{x} \quad (17.23)$$



17.1. ábra

17.1 Példa. Tekintsük a közönséges (kétdimenziós euklideszi) síkon az $\underline{i}, \underline{j}$ vektorok és az O pont által meghatározott derékszögű koordináta-rendszert és "forgassuk el" az O pont körül α szöggel (l. 17.1. ábra). Jelöljük $\underline{\tilde{i}}$ -vel, ill. $\underline{\tilde{j}}$ -vel az elforgatott $\underline{i}$, ill. $\underline{j}$ vektorokat. Trigonometrikus összefüggések felhasználásával $\underline{\tilde{i}}$ és $\underline{\tilde{j}}$ a régi bázisban a következőképpen írhatók fel:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{i}} &= \cos \alpha \underline{i} + \sin \alpha \underline{j} \\ \underline{\tilde{j}} &= -\sin \alpha \underline{i} + \cos \alpha \underline{j} \end{aligned} \quad (17.24)$$

$\underline{\tilde{i}}, \underline{\tilde{j}}$ a sík új bázisa, a bázistranszformáció ortogonális mátrixa (l. 17.13):

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

$\det \underline{M} = 1$.

(17.23) felhasználásával, a sík tetszőleges $\underline{r}$ helyvektorának a régi, illetve az új bázisban felírt koordináta oszlopvektorai között a következő összefüggés adódik:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (17.25)$$

Ezt az eredményt elemi trigonometriai megfontolásokkal is megkapjuk, ha az ábrán látható $u_1 = \tilde{x} \cos \alpha$, $u_2 = \tilde{x} \sin \alpha$, $u_3 = \tilde{y} \sin \alpha$ és $u_4 = \tilde{y} \cos \alpha$ értékek felhasználásával az

$$x = u_1 - u_3 = \tilde{x} \cos \alpha - \tilde{y} \sin \alpha$$

$$y = u_2 + u_4 = \tilde{x} \sin \alpha + \tilde{y} \cos \alpha$$

koordinátákat felírjuk és ebből az egyenletrendszerből $\tilde{x}$ -et és $\tilde{y}$ -t kifejezzük.

Ha az X, Y koordináta-rendszer O körüli forgatását pl. az X tengelyre való "tükrözés" is követi, és a sík új bázisvektorait $\hat{\underline{i}}$ és $\hat{\underline{j}}$ -vel jelöljük, akkor az $\hat{\underline{i}} = \underline{i}$ és az $\hat{\underline{j}} = -\underline{j}$ miatt,

$$\begin{aligned} \hat{\underline{i}} &= \cos \alpha \underline{i} + \sin \alpha \underline{j} \\ \hat{\underline{j}} &= \sin \alpha \underline{i} - \cos \alpha \underline{j}, \end{aligned} \quad (17.26)$$

A bázistranszformáció ortogonális, de mátrixának determinánsa -1 .

17.2 Példa. Legyen a közös sík valamely O pontja rögzítve és legyen $\underline{i}, \underline{j}$ ill. $\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}$ két tetszőleges ortonormált bázis. Igazoljuk, hogy az

$$\hat{\underline{i}} = m_{11} \underline{i} + m_{21} \underline{j}$$

$$\hat{\underline{j}} = m_{12} \underline{i} + m_{22} \underline{j}$$

ortogonális bázistranszformáció a bázisok és az O pont által meghatározott koordináta-rendszerek "egymásba forgatását" jelenti, ha

$$\det \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = 1$$

és a forgatást még követi az egyik "új" koordinátatengelyre való tükrözés, ha a determináns értéke -1 . (Vagyis minden másodrendű ortogonális mátrix által adott bázistranszformáció forgatást, vagy forgatást és tükrözést jelent).

Mivel az $\underline{M} = [m_{ik}]$ mátrix ortogonális, ezért

$$m_{11}^2 + m_{21}^2 = 1, \quad (17.27)$$

$$m_{12}^2 + m_{22}^2 = 1, \quad (17.28)$$

$$m_{11} m_{12} + m_{21} m_{22} = 0. \quad (17.29)$$

E formulákból következik, hogy az $\underline{M}$ mátrixnak egyik sorában, ill. oszlopában sem lehet csupa zérus, továbbá az is, hogy ha $\underline{M}$ elemei között van zérus, akkor egyik átlójának elemei zérussal, a másik átlójának elemei $+1$ -gyel vagy -1 -gyel egyenlők. Például ha $m_{21} = 0$, (17.27)-ből $m_{11} = \pm 1$, (17.29)-ből $m_{12} = 0$, (17.28)-ből $m_{22} = \pm 1$ adódik és így

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad \text{vagy } \underline{M} = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{bmatrix}$$

Ha itt $\det \underline{M} = 1$, akkor az elforgatás szöge 0 , vagy π ; ha viszont $\det \underline{M} = -1$, akkor az elforgatásokat tükrözés is követi. Hasonlóan látható be, hogy például az $m_{11} = 0$ esetben

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix},$$

vagy

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Legyen $\underline{M}$ összes eleme zérustól különböző. Nyilvánvaló, hogy $|m_{11}| < 1$, és hogy található olyan $\alpha \in (0, \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ szög, amelyre $m_{11} = \cos \alpha$. (17.27)-ből $m_{21} = \pm \sin \alpha$, (17.29)-ből pedig $m_{12} = \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot m_{22}$. Eredményeinket (17.28)-ba helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot m_{22}^2 + m_{22}^2 = 1$$

vagyis

$$m_{22} = \pm \cos \alpha,$$

és így

$$m_{12} = \mp \sin \alpha.$$

Ezek figyelembevételével $\underline{M}$ lehetséges alakjai

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \pm \sin \alpha \\ \mp \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \text{ ill. } \underline{M} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \pm \sin \alpha \\ \pm \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix},$$

és így a 17.1 Példából állításunk következik.!

17.3 Példa. Tekintsük a közös (háromdimenziós euklideszi) térben az adott 0 pont és az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ jobbrendszert alkotó, egymásra merőleges egységvektorok által meghatározott koordinátarendszert és "forgassuk el". Jelöljük $\tilde{\underline{i}}, \tilde{\underline{j}}, \tilde{\underline{k}}$ -mal az elforgatott bázisvektorokat. A bázistranszformáció ortonormált, és az új bázisvektorokat a régelekre vonatkozó iránykoszinuszainkkal felírhatjuk:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{i}} &= \cos \alpha_1 \underline{i} + \cos \beta_1 \underline{j} + \cos \gamma_1 \underline{k} \\ \tilde{\underline{j}} &= \cos \alpha_2 \underline{i} + \cos \beta_2 \underline{j} + \cos \gamma_2 \underline{k} \\ \tilde{\underline{k}} &= \cos \alpha_3 \underline{i} + \cos \beta_3 \underline{j} + \cos \gamma_3 \underline{k}. \end{aligned} \quad (17.30)$$

(17.13)-ből következik, hogy a transzformáció mátrixa

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (17.31)$$

$\det \underline{M} = 1$, mert $\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}$ forgatással keletkezett a jobb-rendszert alkotó ortonormált vektorhármassból. A tér tetszőleges $\underline{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$, régi bázisban adott helyvektorának új koordinátái $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ (17.23)-ból a következőképpen adódnak:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \cos \alpha_1 x_1 + \cos \beta_1 x_2 + \cos \gamma_1 x_3 \\ \tilde{x}_2 &= \cos \alpha_2 x_1 + \cos \beta_2 x_2 + \cos \gamma_2 x_3 \\ \tilde{x}_3 &= \cos \alpha_3 x_1 + \cos \beta_3 x_2 + \cos \gamma_3 x_3. \end{aligned} \quad (17.32)$$

Ha a fenti forgatás után pl. az $\tilde{i}, \tilde{j}$ vektorok által meghatározott síkra "tükrözést" is végzünk, akkor új bázisunk vektorai $\hat{i} = \tilde{i}, \hat{j} = \tilde{j}, \hat{k} = -\tilde{k}$, és így a bázistranszformáció mátrixa (17.28)-ból abban különbözik, hogy annak utolsó sora (-1) -gyel van megszorozva, $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ bal-rendszert alkot, tehát a bázistranszformáció mátrixának determinánsa -1 .

18. Lineáris operátorok. Sajátérték, sajátvektor

Ebben a pontban az euklideszi teret önmagába leképező függvények egy alapvetően fontos osztályával, a "lineáris operátorokkal" foglalkozunk. Ezek a függvények lényeges szerepet játszanak a vektoranalízisben (I. VI. Kötet), a mechanikai, áramlástan, potenciál-elméleti stb. alkalmazásokban, továbbá az elmélet általánosításaiban. A tárgyalásban a nagyobb szemléletesség kedvéért az n -dimenziós valós E^n euklideszi térre szorítkozunk, bár egyrészt bizonyos szempontból a komplex euklideszi térbeli tárgyalás egyszerűbb, másrészt a következő fogalmak és tételek jelentős része tetszőleges L lineáris térben kimondható.

18.1 Definíció. Legyen E^n n -dimenziós valós euklideszi tér; az E^n -et E^n -be leképező $\underline{A} : E^n \rightarrow E^n$ függvényt, mely által a tetszőleges $\underline{x} \in E^n$ -hez hozzárendelt $\underline{y} \in E^n$ vektort $\underline{y} = \underline{A} \underline{x}$ -szel jelöl-

jük, lineáris operátornak nevezzük, ha a következő tulajdonságokkal rendelkezik: minden $\underline{x}, \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in E^n$ -re és $\lambda \in R$ -re

$$a) \underline{A} (\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = \underline{A} \underline{x}_1 + \underline{A} \underline{x}_2,$$

$$b) \underline{A} (\lambda \underline{x}) = \lambda \underline{A} \underline{x}.$$

Megjegyezzük, hogy a lineáris operátor kifejezés mellett használatos még a homogén lineáris vektor-vektor függvény, ill. a (másodrendű) tenzor elnevezés is. A 18.1 Definíció a) és b) követelménye összevonható a következő alakban: minden $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in E^n$ és $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ -re

$$\underline{A} (\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2) = \lambda_1 \underline{A} \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{A} \underline{x}_2. \quad (18.1)$$

Két lineáris operátort akkor mondunk egyenlőnek, ha értékük minden $\underline{x} \in E^n$ helyen megegyezik. Azt a függvényt, mely minden $\underline{x} \in E^n$ -hez a zérusvektort rendeli, nulloperátornak nevezzük és $\underline{0}$ -val jelöljük, tehát

$$\underline{0} \underline{x} = \underline{0}. \quad (18.2)$$

Azt a függvényt, mely minden $\underline{x} \in E^n$ -hez önmagát rendeli, egységoperátornak (identitásoperátornak) nevezzük és $\underline{E}$ -vel jelöljük, tehát

$$\underline{E} \underline{x} = \underline{x}. \quad (18.3)$$

Nyilvánvaló, hogy $\underline{0}$ és $\underline{E}$ lineáris operátorok.

A lineáris operátorok között értelmezzük az összeadás, a valós számmal való szorzás és a szorzás műveletét. Legyen $\underline{A}$, ill. $\underline{B}$ tetszőleges lineáris operátor $\lambda \in R$ tetszőleges szám. $\underline{A}$ és $\underline{B}$ összegének nevezzük és $\underline{A} + \underline{B}$ -vel jelöljük azt a függvényt, mely minden $\underline{x} \in E^n$ -hez az

$$(\underline{A} + \underline{B}) \underline{x} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{x} \quad (18.4)$$

vektort rendeli. $\lambda \underline{A}$ -val jelöljük azt a függvényt, mely minden $\underline{x} \in E^n$ -hez a

$$(\lambda \underline{A}) \underline{x} = \lambda \underline{A} \underline{x} \quad (18.5)$$

vektort rendeli. $\underline{A}$ és $\underline{B}$ szorzatának nevezzük és $\underline{AB}$ -vel jelöljük azt a függvényt, mely minden $\underline{x} \in E^n$ -hez az

$$(\underline{AB}) \underline{x} = \underline{A} (\underline{B} \underline{x}) \quad (18.6)$$

vektort rendel (vagyis voltaképpen összetett függvényről van szó; vesszük $\underline{B}$ értékét az $\underline{x}$ helyen, majd $\underline{A}$ értékét a $\underline{B x}$ helyen). Nyilvánvaló, hogy $\underline{A} + \underline{B}$, $\lambda \underline{A}$, ill. $\underline{A B}$ lineáris operátor.

Könnyen belátható, hogy a lineáris operátorok a köztük értelmezett összeadás és szorzás műveletére nézve (nem-kommutatív) gyűrűt alkotnak, (l. 16.3 Definíció), ill. az összeadás és számmal való szorzás műveletére nézve lineáris teret alkotnak a valós számok teste felett (l. 16.5 Definíció).

18.2 Definíció. Az $\underline{A}$ lineáris operátort nem-elfajulónak nevezzük, ha E^n -et E^n -re képezi le, vagyis ha értékkészlete E^n .

18.1 Tétel. Ha $\underline{A}$ nem-elfajuló lineáris operátor, akkor E^n -nek E^n -re történő egy-egyértelmű leképezése (l. I. Kötet 2.2 Definíció).

Bizonyítás. Tételezzük fel az állítással ellentétben, hogy van $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in E^n$, $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$, melyre $\underline{Ax}_1 = \underline{Ax}_2$. Innen $\underline{A u} = \underline{0}$ következik, ahol $\underline{u} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2 \neq \underline{0}$. Válasszunk E^n -ben olyan bázist, melynek $\underline{u}$ bázisvektora, vagyis legyenek $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_{n-1}, \underline{u}$ lineárisan függetlenek. Ekkor minden $\underline{x} \in E^n$ -re

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \underline{x}_k \underline{e}_k + \lambda \underline{u}, \text{ és (18.1) alapján}$$

$$\begin{aligned} \underline{Ax} &= \underline{A} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \underline{x}_k \underline{e}_k + \lambda \underline{u} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \underline{x}_k \underline{A e}_k + \lambda \underline{A u} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \underline{x}_k \underline{A e}_k, \end{aligned}$$

vagyis $\underline{A}$ értékkészlete az $\underline{A e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ vektorok által kifeszített altér. Mivel ez az altér legfeljebb $(n-1)$ dimenziós, $\underline{A}$ értékkészlete nem lehet egyenlő E^n -nel, ami ellentmondás.

Ebből a tételből, valamint az I. Kötet, 2.3 Definícióból és (2.1)-ből azonnal adódik a

18.2 Következmény. Ha $\underline{A}$ nem-elfajuló lineáris operátor, akkor van $\underline{A}^{-1}$ inverze, mely nem-elfajuló lineáris operátor,
 $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$ és $\underline{A}^{-1} \underline{A} = \underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{E}$.

Áttérünk annak vizsgálatára, hogyan adható meg egy lineáris operátor, ha E^n -ben bázist vezettünk be. Legyen $\underline{A}$ lineáris operátor és $\underline{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ az E^n tér tetszőleges bázisa. Vezessük be az

$$\underline{a}_k = \underline{A} \underline{e}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (18.7)$$

jelöléseket és bontsuk fel az $\underline{a}_k$ vektorokat az $\underline{e}_i$, $k = 1, \dots, n$, bázisban:

$$\underline{a}_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \underline{e}_i. \quad (18.8)$$

Az $\underline{a}_k$ vektorok a_{ik} koordinátáiból alkotott $\underline{A} = [a_{ik}]$ n -edrendű négyzetes mátrixot az $\underline{A}$ operátor, adott bázisra vonatkozó koordináta mátrixának nevezzük és a közöttük levő kapcsolatot $\underline{A} \cong \underline{A}$ -val jelöljük.

Ha az $\underline{A}$ lineáris operátor koordináta mátrixa ismeretes, tetszőleges $\underline{x} \in E^n$ vektor koordináta oszlopvektorából könnyen megkapható az $\underline{y} = \underline{A} \underline{x}$ "képvektor" koordináta oszlopvektora. Legyen u. i. $\underline{A} \cong \underline{A}$, $\underline{x} \cong \underline{x} = [x_k]$, $\underline{y} \cong \underline{y} = [y_i]$. Mivel $\underline{x} = \sum_{k=1}^n x_k \underline{e}_k$, (18.1), (18.7) és (18.8) felhasználásával és az összegezés sorrendjének felcserélésével

$$\begin{aligned} \underline{y} = \underline{A} \underline{x} &= \underline{A} \sum_{k=1}^n x_k \underline{e}_k = \sum_{k=1}^n x_k \underline{a}_k = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \sum_{i=1}^n a_{ik} \underline{e}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right) \underline{e}_i. \end{aligned}$$

Ha az utóbbi kifejezést $\underline{y} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{e}_i$ -nel összehasonlítjuk, kapjuk, hogy $y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$, $i = 1, 2, \dots, n$, vagyis

$$\underline{y} = \underline{A} \underline{x}. \quad (18.9)$$

Ha a bázist lerögzítjük és tetszőlegesen megadunk egy $\underline{A}$ n -edrendű mátrixot, akkor (18.9) az E^n térnek önmagába való leképezését definiálja, t. i. minden $\underline{x} \in E^n$ vektorhoz azt az $\underline{y} \in E^n$ vektort rendeljük, amelynek koordináta oszlopvektora $\underline{x}$ koordináta oszlopvektorából (18.9) alkalmazásával

val adódik. Ez a leképezés nyilván lineáris operátor. Ily módon rögzített bázisban az $\underline{A} \cong \underline{A}$ hozzárendelés a lineáris operátorok halmazát egy-egy értelműen leképezi az n -edrendű négyzetes mátrixok halmazára. (18.8)-ből azonnal adódik, hogy tetszőleges bázisban a null-operátornak a zérus-mátrix, az egységoperátornak pedig az egységmátrix felel meg:

$$\underline{0} \cong \underline{0}, \quad \text{III.} \quad \underline{E} \cong \underline{E} \quad (18.10)$$

Könnyen látható az is, hogy a lineáris operátorok között értelmezett műveleteknek a koordináta mátrixaikon a mátrix algebra szabályai szerint végzett műveletek felelnek meg, vagyis ha $\underline{A} \cong \underline{A}, \underline{B} \cong \underline{B}, \lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\underline{A} + \underline{B} \cong \underline{A} + \underline{B}, \quad \lambda \underline{A} \cong \lambda \underline{A}, \quad \underline{A} \underline{B} \cong \underline{A} \underline{B}. \quad (18.11)$$

18.3 Tétel. Legyen $\underline{A}$ lineáris operátor és valamilyen tetszőleges rögzített bázisban $\underline{A} \cong \underline{A}$; $\underline{A}$ akkor és csak akkor nem-elfajuló, ha az $\underline{A}$ mátrix reguláris.

Bizonyítás. A 18.1 Tétel közvetlen következménye, ha figyelembe vesszük, hogy tetszőlegesen adott $\underline{y}$ -ra a (18.9) lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van $\underline{x}$ -ben egy és csak egy megoldása, ha $\underline{A}$ reguláris mátrix (l. 13.4 Tétel, 14.2 Következmény).!

Az előbbiekből már közvetlenül adódik, hogy ha $\underline{A}$ nem elfajuló lineáris operátor és valamilyen bázisban $\underline{A} \cong \underline{A}$, akkor

$$\underline{A}^{-1} \cong \underline{A}^{-1}. \quad (18.12)$$

Természetesen felvetődik a kérdés, hogyan transzformálódik lineáris operátor koordináta mátrixa bázistranszformációnál. Legyen adott az $\underline{e}_k, k = 1, 2, \dots, n$ és az $\tilde{\underline{e}}_k, k = 1, 2, \dots, n$ bázis, a bázistranszformáció $\underline{T} = [t_{jk}]$ mátrixa, l. (17.12) és az $\underline{A}$ lineáris operátor. Legyen $\underline{A} \cong \underline{A}$, ill. $\underline{A} \cong \underline{A}$ a régi, ill. az új bázisban,

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{y} = \underline{A} \underline{x} \quad \text{és} \quad \underline{x} \cong \underline{x}, \underline{y} \cong \underline{y}, \quad \text{III.} \quad \underline{x} \cong \underline{x}, \underline{y} \cong \underline{y}$$

a régi, ill. az új bázisban. (18.9) alapján

$$\underline{y} = \underline{A} \underline{x}, \quad \tilde{\underline{y}} = \tilde{\underline{A}} \tilde{\underline{x}}. \quad (18.13)$$

(17.15)-öt is az $\underline{y}$ -ra felírt megfelelő kifejezést (18.13) első egyenletébe helyettesítve,

$$\underline{T} \tilde{\underline{y}} = \underline{A} \underline{T} \tilde{\underline{x}},$$

vagy ezt az egyenlőséget $\underline{T}^{-1}$ -gyel balról megszorozva

$$\tilde{\underline{y}} = (\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}) \tilde{\underline{x}}.$$

Ha az utóbbi összefüggést (18.13) második egyenletéből kivonjuk, látjuk, hogy minden $\tilde{\underline{x}}$ -ra

$$\tilde{\underline{A}} \tilde{\underline{x}} - (\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}) \tilde{\underline{x}} = (\tilde{\underline{A}} - \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}) \tilde{\underline{x}} = \underline{0},$$

ami akkor és csak akkor igaz, ha

$$\tilde{\underline{A}} - \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} = \underline{0},$$

vagyis, ha

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}. \quad (18.14)$$

Az $\underline{A}$ lineáris operátor koordináta mátrixának transzformációs formulája tehát (18.14). Más szóval az $\underline{A}$ lineáris operátort különböző bázisokban reprezentáló mátrixok között a (18.14) összefüggés áll fenn, ahol $\underline{T}$ a bázistranszformáció mátrixa.

18.3 Definíció. Az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ n -edrendű négyzetes mátrixokat hasonlóknak nevezzük, jelben $\underline{A} \cong \underline{B}$, ha van olyan reguláris n -edrendű $\underline{T}$ mátrix, melyre

$$\underline{B} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}. \quad (18.15)$$

Az n -edrendű mátrixok között értelmezett "hasonlósági reláció" a következő egyszerű tulajdonságokkal rendelkezik (v.ö. I. Kötet 4. pont E1.), E2.), E3.) $\underline{A} \cong \underline{A}$ (reflexivitás), u.i. $\underline{A} = \underline{E}^{-1} \underline{A} \underline{E}$. Ha $\underline{A} \cong \underline{B}$, akkor $\underline{B} \cong \underline{A}$, (szimmetria), u.i. (18.15)-öt balról $\underline{T}$ -vel, jobbról $\underline{T}^{-1}$ -gyel szorozva $\underline{A} = \underline{T} \underline{B} \underline{T}^{-1} = (\underline{T}^{-1})^{-1} \underline{B} \underline{T}^{-1}$. Ha $\underline{A} \cong \underline{B}$ és $\underline{B} \cong \underline{C}$, akkor $\underline{A} \cong \underline{C}$ (transzitivitás), u.i. (18.15)-öt $\underline{C} = \underline{S}^{-1} \underline{B} \underline{S}$ -be ($\underline{S}$ alkalmas reguláris mátrix) helyettesítve $\underline{C} = \underline{S}^{-1} \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} \underline{S} = (\underline{TS})^{-1} \underline{A} (\underline{TS})$. A 12.8 Tételből következik, hogy hasonló mátrixok ekvivalensek, vagyis, ha $\underline{A} \cong \underline{B}$, akkor $r(\underline{A}) = r(\underline{B})$.

A 18.3 Definíció és (18.14) összesítésével mondhatjuk, hogy valamely lineáris operátort különböző bázisokban reprezentáló mátrixok hasonlóak.

Abban a fontos speciális esetben, amikor a bázistranszformáció ortogonális, és a transzformáció mátrixa az $\underline{M}$ ortogonális mátrix. (17.21) alapján a (18.14) formula a következőképpen módosul:

$$\tilde{A} = M^{-1} A M. \quad (18.16)$$

A továbbiakban szükségünk lesz még a következő fogalomra.

18.4 Definíció. Az E^n tér E^m alterét az A lineáris operátor invariáns alterének nevezzük, ha az A operátor E^m -re vonatkozó leszűkítésének (I. Kötet 2,4 Definíció) értékkészlete E^m részhalmaza, vagyis ha A az E^m alteret önmagába képezi le.

Nyilvánvaló, hogy maga E^n , ill. az egyedül a zérusvektorból álló $\{0\}$ altér minden lineáris operátornak invariáns altere. Különösen nagy szerepük van lineáris operátorok "egydimenziós altereinek", ezekkel foglalkozunk a pont hátralevő részében.

18.5 Definíció. A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot, ill. az $s \in E^n$, vektort az A lineáris operátor sajátértékének, ill. sajátvektorának nevezzük, ha

$$A s = \lambda s, \quad s \neq 0.$$

(V. ö. 14.2 Definíció).

Az E^n tér egy tetszőlegesen rögzített bázisában legyen $\underline{A} \cong A$ és $\underline{s} \cong s$. Ha az előbbi egyenletet átírjuk koordinátákra, (14.6)-ot kapjuk, vagyis $\underline{A} \underline{s} = \lambda \underline{s}$, ill. $\underline{s}$ akkor és csak akkor sajátértéke, ill. sajátvektora az $\underline{A}$ operátornak, ha λ , ill. $\underline{s}$ az $\underline{A}$ mátrix valós sajátértéke, ill. sajátvektora. Ebből és a 14.9 Tételből következik a

18.4 Tétel. Legyen egy tetszőlegesen rögzített bázisban $\underline{A} \cong A$; λ akkor és csak akkor sajátértéke $\underline{A}$ -nak, ha a

$$\det (\underline{A} - \lambda E) = 0 \quad (18.17)$$

n -edfokú karakterisztikus egyenletnek valós megoldása.

Az $\underline{A}$ mátrix (18.17) karakterisztikus egyenletének lehetnek komplex gyökei, melyekhez általában nem tartozik valós sajátvektor. Ezeket a komplex gyököket a rövidség kedvéért az $\underline{A}$ operátor "komplex sajátértékeinek" fogjuk nevezni.

Joggal merül fel a kérdés, hogy mivel az $\underline{A}$ operátort különböző bázisokban különböző mátrixok reprezentálják, a mátrixok sajátértékei között mi a kapcsolat, ill. $\underline{A}$ -nak összesen hány sajátértéke (komplex sajátértéke) lehet. Erre ad választ a következő

18.5 Tétel. Hasonló mátrixok sajátértékei (multiplicitásaikkal együtt) megegyeznek.

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai egyenlők, ebből és a 14.9 Tételből már következik az állítás. Legyen $\tilde{A} = T^{-1} A T$, ahol T reguláris mátrix,

$$\begin{aligned} \det(\tilde{A} - \lambda E) &= \det(T^{-1} A T - \lambda T^{-1} E T) = \\ &= \det(T^{-1} (A - \lambda E) T) = \\ &= \det T^{-1} \det(A - \lambda E) \det T = \\ &= \det(A - \lambda E), \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a 10.13 és a 11.3 Tételt.!

18.6 Következmény. Az A lineáris operátornak (az E^n valós euklideszi térben) legfeljebb n számú különböző sajátértéke van és multiplicitásokkal számolva összesen pontosan n számú sajátértéke és komplex sajátértéke van.

18.6 Definíció. Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ az n -edrendű A mátrix sajátértékei (melyek között egyenlők is lehetnek); az

$$SpA = \sum_{k=1}^n \lambda_k$$

számot az A mátrix nyomának (spurjának, német) nevezzük.

(5.21) első formulájából és a 7.9 Tételből azonnal adódik, hogy (valós elemű) mátrix nyoma valós szám. A 18.5 Tételből és a 18.6 Következményből kapjuk, hogy érvényes a

18.7 Következmény. Hasonló mátrixok nyoma egyenlő.

Érvényes továbbá a következő

18.8 Tétel. Az n -edrendű $A = [a_{ik}]$ mátrix nyoma egyenlő a főátlóban álló elemek összegével, vagyis

$$\text{Sp} \underline{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Bizonyítás. Az állítás azonnal adódik az első Vieta-féle formulából (7.8 Tétel), ha figyelembe vesszük, hogy

$$\begin{aligned} \det (\underline{A} - \lambda \underline{E}) &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii} + \\ &+ \dots + \det \underline{A}, \end{aligned} \quad (18.18)$$

18.9 Tétel. Legyen λ , ill. $\underline{s}$ az $\underline{A}$ lineáris operátor "egymáshoz tartozó" sajátértéke, ill. sajátvektora; akkor minden $\mu \in \mathbb{R}$ -re, $\mu \neq 0$, $\mu \underline{s}$ is sajátvektor és az $\underline{s}$ vektor által kifeszített $E^1 = \{ \mu \underline{s} : \mu \in \mathbb{R} \}$ egydimenziós altér $\underline{A}$ -nak invariáns altere.

Bizonyítás. $\underline{A}(\mu \underline{s}) = \mu \underline{A} \underline{s} = \mu \lambda \underline{s} = \lambda(\mu \underline{s}) \in E^1, \mu \in \mathbb{R}.$

18.10 Tétel. Legyen $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, az $\underline{A}$ lineáris operátor komplex sajátértéke, akkor van $\underline{u}, \underline{v} \in E^n$, hogy $\|\underline{u}\| + \|\underline{v}\| > 0$ és

$$\underline{A} \underline{u} = \alpha \underline{u} - \beta \underline{v}, \quad \underline{A} \underline{v} = \alpha \underline{v} + \beta \underline{u} \quad (18.19)$$

Bizonyítás. Vezessünk be a térben egy bázist és legyen $\underline{A} \cong \underline{A}$. Az $(\underline{A} - \lambda \underline{E}) \underline{s} = \underline{0}$ egyenletrendszer egy nem-triviális megoldása legyen $\underline{s} = \underline{u} + i \underline{v}$, ahol $\underline{u}$ és $\underline{v}$ valós elemű oszlopvektorok és vagy $\underline{u} \neq \underline{0}$, vagy $\underline{v} \neq \underline{0}$. Ezek szerint $(\underline{A} - (\alpha + i\beta) \underline{E})(\underline{u} + i \underline{v}) = \underline{0}$, ahonnan

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{u} + i \underline{A} \underline{v} &= (\alpha + i\beta)(\underline{u} + i \underline{v}) = \\ &= \alpha \underline{u} - \beta \underline{v} + i(\alpha \underline{v} + \beta \underline{u}) \end{aligned}$$

adódik. A valós, ill. a képzetes részeket egyenlővé téve

$$\underline{A} \underline{u} = \alpha \underline{u} - \beta \underline{v}, \quad \text{ill.} \quad \underline{A} \underline{v} = \alpha \underline{v} + \beta \underline{u} \quad (18.20)$$

következik. A (17.15) és a (18.14)-ből nyert $\underline{A} = \underline{T} \tilde{\underline{A}} \underline{T}^{-1}$ transzformációs formulákat alkalmazva látható, hogy (18.20) tetszőleges bázisban érvényes, ahonnan (18.19) következik.

18.11 Következmény. Az $\underline{A}$ lineáris operátor $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ komplex sajátértékéhez tartozik E^n -nek egy legfeljebb kétdimenziós invariáns altere.

Bizonyítás. Az előbbi tétel jelöléseivel az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által kifeszített legfeljebb kétdimenziós E^2 altér $\underline{A}$ invariáns altere, u.i. ha $\underline{x} \in E^2$, vagyis ha

$$\begin{aligned}\underline{x} &= \mu_1 \underline{u} + \mu_2 \underline{v}, \text{ akkor } \underline{A} \underline{x} = \underline{A} (\mu_1 \underline{u} + \mu_2 \underline{v}) = \\ &= \mu_1 \underline{A} \underline{u} + \mu_2 \underline{A} \underline{v} = \mu_1 (\alpha \underline{u} - \beta \underline{v}) + \mu_2 (\alpha \underline{v} + \beta \underline{u}) = \\ &= (\mu_1 \alpha + \mu_2 \beta) \underline{u} + (\mu_2 \alpha - \mu_1 \beta) \underline{v} \in E^2.\end{aligned}$$

19. Szimmetrikus operátorok Másodfokú alakok osztályozása

Ebben a pontban lineáris operátorok egy speciális típusának tulajdonságaival és eredményeink alkalmazásaként másodfokú alakokkal foglalkozunk. E^n továbbra is az n -dimenziós valós euklideszi teret jelöli.

19.1 Definíció. Az $\underline{A}$ lineáris operátor adjungáltjának nevezzük és $\underline{A}'$ -vel jelöljük ezt a lineáris operátort, amellyel minden $\underline{x}, \underline{y} \in E^n$ -re.

$$(\underline{A} \underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, \underline{A}' \underline{y}). \quad (19.1)$$

19.1 Tétel. Minden lineáris operátornak van egy és csak egy adjungált operátora.

Bizonyítás. Először az adjungált operátor egyértelműségét igazoljuk. Tegyük fel, hogy az $\underline{A}$ operátorra és valamilyen $\underline{A}'$ -re fennáll a (19.1) azonosság és legyen $\underline{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, ortonormált bázis. Minden $\underline{y} \in E^n$ -re

(17.10) alapján

$$\underline{A}' \underline{y} = \sum_{k=1}^n (\underline{A}' \underline{y}, \underline{e}_k) \underline{e}_k,$$

ami (19.1) felhasználásával az

$$\underline{\underline{A}}' \underline{\underline{y}} = \sum_{k=1}^n (\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{A}} \underline{\underline{e}}_k) \underline{\underline{e}}_k \quad (19.2)$$

kifejezésbe megy át. (19.2) jobb oldala $\underline{\underline{A}}$ ismeretében minden $\underline{\underline{y}} \in \mathbb{E}^n$ vektor "képvektorát" egyértelműen meghatározza, tehát ha az $\underline{\underline{A}}'$ adjungált létezik, az egyértelműen meghatározott. Ha fordítva, $\underline{\underline{A}}'$ -t éppen (19.2)-vel értelmezzük, akkor az a skaláris szorzat tulajdonságaiból következőleg lineáris operátor és minden

$$\underline{\underline{x}} = \sum_{k=1}^n x_k \underline{\underline{e}}_k, \quad \underline{\underline{y}} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{\underline{e}}_i$$

vektorra (17.11) felhasználásával

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{A}}' \underline{\underline{y}}) &= \sum_{k=1}^n x_k \left(\sum_{i=1}^n y_i \underline{\underline{e}}_i, \underline{\underline{A}} \underline{\underline{e}}_k \right) = \\ &= \sum_{i,k=1}^n x_k y_i (\underline{\underline{e}}_i, \underline{\underline{A}} \underline{\underline{e}}_k) = \\ &= \sum_{i=1}^n y_i (\underline{\underline{e}}_i, \sum_{k=1}^n x_k \underline{\underline{A}} \underline{\underline{e}}_k) = \\ &= \sum_{i=1}^n y_i (\underline{\underline{e}}_i, \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n y_i \underline{\underline{e}}_i, \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} \right) = (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}). \end{aligned}$$

19.2 Tétel. Ha az $\underline{\underline{e}}_k$, $k = 1, \dots, n$, ortonormált bázisban $\underline{\underline{A}} \cong \underline{\underline{A}}$, akkor adjungáltja $\underline{\underline{A}}' \cong \underline{\underline{A}}'$, ahol $\underline{\underline{A}}'$ az $\underline{\underline{A}}$ mátrix transzponáltja.

Bizonyítás. Legyen az adott ortonormált bázisban $\underline{\underline{A}}' \cong \underline{\underline{B}}$. (19.1)-et koordinátákra átírva kapjuk, hogy tetszőleges $\underline{\underline{x}} \cong \underline{\underline{x}}$, $\underline{\underline{y}} \cong \underline{\underline{y}}$ -ra

$$(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}})' \cdot \underline{\underline{y}} = \underline{\underline{x}}' \cdot \underline{\underline{B}} \underline{\underline{y}}$$

vagyis

$$\underline{x}' \underline{A}' \underline{y} = \underline{x}' \underline{B} \underline{y},$$

ahonnan az

$$\underline{x}' (\underline{A}' - \underline{B}) \underline{y} = 0$$

azonosság következik. Rögzített $\underline{y}$ -ra ez azt jelenti, hogy $(\underline{A}' - \underline{B}) \underline{y}$ minden $\underline{x}'$ vektorra ortogonális, tehát $(\underline{A}' - \underline{B}) \underline{y} = \underline{0}$. Mivel az utóbbi egyenlőség minden $\underline{y}$ -ra fennáll, $\underline{A}' - \underline{B}$ a zérusmátrix, tehát $\underline{B} = \underline{A}'$.

19.2 Definíció. Az $\underline{S}$ lineáris operátort szimmetrikusnak (önadjungáltnak) nevezzük, ha $\underline{S}' = \underline{S}$, vagyis ha minden $\underline{x}, \underline{y} \in E^n$ -re

$$(\underline{S} \underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, \underline{S} \underline{y}). \quad (19.3)$$

19.3 Tétel. Az $\underline{S}$ lineáris operátor akkor és csak akkor szimmetrikus, ha koordináta mátrixa tetszőleges ortonormált bázisban szimmetrikus mátrix (l. 8.7 Definíció).

Bizonyítás. A 19.2 Tételből azonnal következik, hogy ha $\underline{S}$ szimmetrikus, és ortonormált bázisban $\underline{S} \cong \underline{S}$, akkor $\underline{S} = \underline{S}'$. Fordítva, legyen valamely ortonormált bázisban $\underline{S} \cong \underline{S}$ és $\underline{S} = \underline{S}'$. Először megmutatjuk, hogy ekkor minden ortonormált bázisban $\underline{S}$ koordináta mátrixa szimmetrikus. Legyen u.i. $\underline{S}$ koordinátamátrixa egy tetszőleges másik ortonormált bázisban $\underline{\tilde{S}}$ és a bázistranszformáció ortogonális mátrixa $\underline{M}$, ekkor (18.16) alapján

$$\underline{\tilde{S}} = \underline{M}' \underline{S} \underline{M},$$

ahonnan mindkét oldal transzponáltját véve

$$\underline{\tilde{S}}' = (\underline{M}' \underline{S} \underline{M})' = \underline{M}' \underline{S}' (\underline{M}')' = \underline{M}' \underline{S} \underline{M} = \underline{\tilde{S}}$$

adódik. Most megmutatjuk, hogy teljesül a (19.3) azonosság. Az adott ortonormált bázisban (17.11) alapján dolgozva, ha $\underline{x} \cong \underline{x}$, $\underline{y} \cong \underline{y}$,

$$(\underline{S} \underline{x}, \underline{y}) = (\underline{S} \underline{x})' \underline{y} = \underline{x}' \underline{S}' \underline{y} = \underline{x}' \underline{S} \underline{y} = (\underline{x}, \underline{S} \underline{y}).$$

A következőkben szimmetrikus operátorok sajátértékeivel és sajátvektoraival foglalkozunk.

19.4 Tétel. Az $\underline{S}$ szimmetrikus operátornak multiplicitásokkal számolva pontosan n számú (valós) sajátértéke van (más szóval $\underline{S}$ -nek nincs komplex sajátértéke).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex sajátérték. Ekkor a 18.10 Tétel szerint van $\underline{u}, \underline{v} \in E^n$, hogy $\|\underline{u}\| + \|\underline{v}\| > 0$ és

$$\underline{S}\underline{u} = \alpha\underline{u} - \beta\underline{v}, \quad \underline{S}\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{u}.$$

Szorozzuk meg az első egyenlőséget skalárisan $\underline{v}$ -vel, a másodikat $\underline{u}$ -val:

$$(\underline{v}, \underline{S}\underline{u}) = \alpha(\underline{u}, \underline{v}) - \beta\|\underline{v}\|^2, \quad (\underline{u}, \underline{S}\underline{v}) = \alpha(\underline{u}, \underline{v}) + \beta\|\underline{u}\|^2.$$

Vonjuk ki e két egyenlőséget egymásból, (19.3) miatt a bal oldalon zérus adódik:

$$0 = (\underline{u}, \underline{S}\underline{v}) - (\underline{v}, \underline{S}\underline{u}) = \beta(\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2)$$

ahonnan $\beta = 0$ következik. Ezek szerint a (18.17)-nek megfelelő karakterisztikus egyenletnek nincs komplex gyöke, tehát összes gyöke valós.!

19.5 Következmény. Szimmetrikus operátornak van (valós) sajátvektora.

19.6 Tétel. Ha $\underline{S}$ szimmetrikus operátor, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ két sajátérték és $\underline{s}_1$, ill. $\underline{s}_2$ a λ_1 , ill. λ_2 sajátértékekhez tartozó sajátvektor, akkor $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ ortogonálisak (vagyis szimmetrikus operátor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak).

Bizonyítás. A feltételek szerint

$$\underline{S}\underline{s}_1 = \lambda_1 \underline{s}_1, \quad \underline{S}\underline{s}_2 = \lambda_2 \underline{s}_2.$$

Szorozzuk meg az első egyenlőséget skalárisan $\underline{s}_2$ -vel, a másodikat $\underline{s}_1$ -gyel:

$$(\underline{s}_2, \underline{S}\underline{s}_1) = \lambda_1 (\underline{s}_1, \underline{s}_2); \quad (\underline{s}_1, \underline{S}\underline{s}_2) = \lambda_2 (\underline{s}_1, \underline{s}_2).$$

E két egyenlőséget egymásból kivonva, a bal oldalon (19.3) figyelembevételével zérus adódik, így

$$(\lambda_2 - \lambda_1) (\underline{s}_1, \underline{s}_2) = 0.$$

Mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$, innen $(\underline{s}_1, \underline{s}_2) = 0$ következik.!

19.7 Következmény. Ha az $\underline{S}$ szimmetrikus operátornak n számú különböző sajátértéke van, vagyis ha λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ a sajátértékek és $\lambda_i \neq \lambda_k$, $i \neq k$, akkor van n számú, páronként egymásra ortogonális sajátvektora.

Ha figyelembe vesszük a 17.5 Segédtételt, és a 18.9 Tételt, akkor azt látjuk, hogy abban a speciális esetben, amikor mind az n sajátérték különböző, a szimmetrikus operátor sajátvektoraiból az E^n térben ortonormált bázis alkotható. Meg fogjuk mutatni, hogy ez az általános esetben is igaz.

19.8 Segédtétel. Legyen $\underline{S}$ szimmetrikus operátor, $\underline{s}$ egy sajátvektora és

$$E^{n-1} = \{ \underline{x} \in E^n : (\underline{x}, \underline{s}) = 0 \}$$

az $\underline{s}$ -re ortogonális vektorok $(n-1)$ -dimenziós altere (l. 17.4 Segédtétel); akkor E^{n-1} az $\underline{S}$ operátor invariáns altere (l. 18.4 Definíció).

Bizonyítás. Legyen $\underline{x} \in E^{n-1}$, vagyis $(\underline{x}, \underline{s}) = 0$ és $\underline{S}\underline{s} = \lambda \underline{s}$, akkor (19.3) figyelembevételével

$$(\underline{S}\underline{x}, \underline{s}) = (\underline{x}, \underline{S}\underline{s}) = (\underline{x}, \lambda \underline{s}) = \lambda (\underline{x}, \underline{s}) = 0,$$

tehát $\underline{S}\underline{x} \in E^{n-1}$.

Most már kimondhatjuk a következő alapvető fontosságú tételt.

19.9 Tétel. (Főtengely tétel) Legyen $\underline{S}$ szimmetrikus operátor E^n -ben, akkor van n számú páronként ortogonális egység-sajátvektora és az ezek által alkotott ortonormált bázisban az $\underline{S}$ operátor koordináta mátrixa diagonális mátrix.

Bizonyítás. A 19.5 Következmény szerint $\underline{S}$ -nek van sajátvektora. Legyen $\underline{e}_1$ egy sajátvektor és $\|\underline{e}_1\| = 1$. Az $\underline{e}_1$ -re ortogonális vektorok E^{n-1} halmaza a 19.8 Segédtétel szerint $\underline{S}$ invariáns altere. Tekintsük $\underline{S}$ leszűkítését az E^{n-1} altérre; $\underline{S}$ szimmetrikus operátor E^{n-1} -ben, tehát van sajátvektora: $\underline{e}_2 \in E^{n-1}$, $\|\underline{e}_2\| = 1$. Nyilván $(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = 0$. Tekintsük $\underline{S}$ leszűkítését az E^{n-1} altér $\underline{e}_2$ -re ortogonális vektorainak E^{n-2} alterére, mely $\underline{S}$ invariáns

(n-2)-dimenziós altere. $\underline{S}$ szimmetrikus operátor E^{n-2} -ben, tehát van sajátvektora: $\underline{e}_3 \in E^{n-2} \subset E^{n-1}$, $\|\underline{e}_3\| = 1$. Nyilván $(\underline{e}_2, \underline{e}_3) = (\underline{e}_1, \underline{e}_3) = 0$. És így tovább n számu lépés után az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ ortonormált sajátvektor rendszerre jutunk: $(\underline{e}_i, \underline{e}_k) = \delta_{ik}$ és $\underline{S} \underline{e}_k = \lambda_k \underline{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, ahol a λ_k -k $\underline{S}$ nem szükségképpen különböző sajátértékei. Ha ezt a sajátvektor-rendszert választjuk a bázisnak (l. 17.5 Segéd-tétel), akkor mivel (18.7) és (18.8) most $\underline{a}_k = \underline{S} \underline{e}_k = \lambda_k \underline{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, az $\underline{S}$ koordinátamátrix a következő:

$$\underline{S} \cong \underline{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (19.4)$$

Az előző tétellel kapcsolatban a következő fontos megjegyzésekre hívjuk fel az olvasó figyelmét. A főtengety tétel bizonyításában megkonstruált sajátvektorokból álló ortonormált bázis nincs egyértelműen meghatározva. Legalább sorrend csere a bázisban mindig tehető ($n \geq 2$), általában pedig több különböző ortonormált sajátvektor-rendszer választható. Ugyanakkor a (19.4) diagonális mátrix főátlójában csak a sajátértékek lépnek fel és minden sajátérték pontosan annyszor lép fel, amennyi a karakterisztikus egyenletben a multipllicitása (l. 18.4 Tétel). U.i. a 18.5 Tétel szerint ez a multipllicitás a bázistól független és a főtengety tétel bizonyításában megkonstruált bázisban a (18.17)-nek megfelelő karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} \det(\underline{S} - \lambda \underline{E}) &= \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \prod_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Különböző ortonormált sajátvektor rendszerekben természetesen a (19.4) főátlójában álló számok sorrendje más és más lehet.

Mivel minden diagonális mátrix szimmetrikus, az előbbiekből és a 19.3 Tételből azonnal adódik, mintegy a főtengety tétel megfordításaként a

19.10 Következmény. Ha az A lineáris operátornak valamilyen $\underline{e}_k$, $k =$

$= 1, 2, \dots, n$, ortonormált bázisban a D diagonális mátrix felel meg, vagyis $\underline{A} \cong \underline{D}$, ahol

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

akkor A szimmetrikus operátor, melynek az $\underline{e}_k$ vektorok sajátvektorai és a λ_k számok ($k = 1, \dots, n$) multiplicitással vett sajátértékei.

A főtengety tétel mátrixokra átfogalmazott alakja a

19.11 Következmény. Ha A szimmetrikus mátrix, akkor van M ortogonális mátrix, melyre

$$\underline{D} = \underline{M}' \underline{A} \underline{M} = \underline{M}^{-1} \underline{A} \underline{M} \quad (19.5)$$

diagonális mátrix (van A-hoz hasonló diagonális mátrix), M oszlopvektorai A sajátvektorai, a D mátrix főátlójában álló elemek pedig A sajátértékei.

Bizonyítás. Az A mátrix egy szimmetrikus A operátor koordinátamátrixának tekinthető valamilyen ortonormált bázisban. A főtengety tétel szerint van olyan ortonormált bázis, melyben A koordináta mátrixa, D diagonális. A megfelelő ortogonális bázistranszformációt (18.16) alapján végrehajtva (19.5) adódik. Szorozzuk meg a (19.5) egyenlőséget balról az M mátrixszal, kapjuk, hogy

$$\underline{M} \underline{D} = \underline{A} \underline{M}.$$

Ha $\underline{M} = (\underline{m}_1, \underline{m}_2, \dots, \underline{m}_n)$ és $\underline{D} = [\delta_{ik} \lambda_i]$, az utóbbi egyenlőség bal oldalán álló mátrix k -adik oszlopvektora $\lambda_k \underline{m}_k$, vagyis

$$\underline{A} \underline{m}_k = \lambda_k \underline{m}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (19.6)$$

A szimmetrikus operátorok fontos szerepet játszanak a rugalmaságban. Ha $\underline{S}$ szimmetrikus operátor,

$$\underline{S} \underline{e}_k = \lambda_k \underline{e}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (\underline{e}_i, \underline{e}_k) = \delta_{ik},$$

és az $\underline{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, ortonormált bázisban írjuk fel a tér tetszőleges $\underline{x}$ vektorát,

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^n x_k \underline{e}_k,$$

akkor

$$\begin{aligned} \underline{S} \underline{x} &= \underline{S} \sum_{k=1}^n x_k \underline{e}_k = \sum_{k=1}^n x_k \underline{S} \underline{e}_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \underline{e}_k. \end{aligned} \quad (19.7)$$

Ezek szerint $\underline{S}$ úgy hat a térben, hogy n számú egymásra ortogonális irányban, az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ sajátvektorok irányában, a vektorok összetevőit rendre $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ -szeresükre "nyújtja". A szimmetrikus operátor által létesített leképezést ezért "dilataciónak" szokták nevezni.

A főtengety tétel fontos szerepet játszik "másodfoku alakok" osztályozásában. A

$$Q(\underline{x}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k \quad (19.8)$$

kifejezést, ahol a_{ik} rögzített valós szám, x_i valós változó ($i, k = 1, 2, \dots, n$) másodfoku alaknak (kvadrátikus formának) nevezzük. Az n -edrendű $\underline{A} = [a_{ik}]$ mátrixot együttható mátrixnak nevezzük és mindig feltételezzük, hogy $\underline{A}$ szimmetrikus. Ha u.i. pl. a_{ik} nem lenne egyenlő a_{ki} -vel, akkor (19.8)-ban a következő jelölésmódosítást hajthatjuk végre

$$\begin{aligned}
a_{ik} x_i x_k + a_{ki} x_k x_i &= (a_{ik} + a_{ki}) x_i x_k = \\
&= \frac{a_{ik} + a_{ki}}{2} x_i x_k + \frac{a_{ik} + a_{ki}}{2} x_k x_i = \\
&= \tilde{a}_{ik} x_i x_k + \tilde{a}_{ki} x_k x_i,
\end{aligned}$$

ahol már $\tilde{a}_{ik} = \tilde{a}_{ki}$. A változókból alkotott $\underline{x} = \{x_i\}$ oszlopvektort bevezetve a (19.8) másodfoku alak a következőképpen írható

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}' \underline{A} \underline{x}, \quad (19.8')$$

ahol $\underline{A} = \underline{A}'$. A (19.8) másodfoku alakot úgy tekinthetjük, mint az $\mathbb{R}^n$ valós euklideszi tér $\underline{x}$ vektorának az $\underline{A} \underline{x}$ vektorral való skaláris szorzatát (valamilyen ortonormált bázisban kiszámítva), ahol $\underline{A}$ szimmetrikus operátor. Így módon a főténgely tételt másodfoku alakokra a következőképpen fogalmazhatjuk át.

19.12 Tétel. (Főtengely tétel) Van olyan ortogonális transzformáció, mely a (19.8) másodfoku alakot "tisztá négyzetes alakba" viszi át, pontosabban van $\underline{M}$ ortogonális mátrix, hogy a (17.23)

$$\tilde{\underline{x}} = \underline{M}' \underline{x} \quad (19.9)$$

transzformációt végrehajtva

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k \equiv \sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{x}_k^2, \quad (19.10)$$

és itt λ_k , ill. az $\underline{M}$ mátrix $\underline{m}_k$ oszlopvektora $\underline{A}$ összetartozó sajátértéke, ill. sajátvektora, $k = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. Azonnal adódik a 19.11 Következményből. Ha u.i. az ott szereplő $\underline{M}$ mátrixszal végrehajtjuk a (19.9) koordináta transzformációt, vagyis (19.8')-ben, $\underline{x} = \underline{M} \tilde{\underline{x}}$ -ot helyettesítünk, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\underline{x}' \underline{A} \underline{x} &= (\underline{M} \tilde{\underline{x}})' \underline{A} \underline{M} \tilde{\underline{x}} = \tilde{\underline{x}}' \underline{M}' \underline{A} \underline{M} \tilde{\underline{x}} = \\
&= \tilde{\underline{x}}' \underline{D} \tilde{\underline{x}} = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \sum_{k=1}^n \lambda_i \delta_{ik} \tilde{x}_k = \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{x}_k^2.
\end{aligned}$$

19.3 Definíció. A (19.8') másodfoku alakot pozitív definitnek, pozitív semi-definitnek ill. indefinitnek nevezzük, ha

$$\underline{x}' \underline{A} \underline{x} > 0, \text{ ha } \underline{x} \neq \underline{0},$$

$\underline{x}' \underline{A} \underline{x} \geq 0$, minden $\underline{x}$ -re, illetve $\underline{x}' \underline{A} \underline{x}$ pozitív és negatív értékeket is felvesz.

Analóg módon értelmezzük másodfoku alak negatív definitát, ill. negatív semidefinitását.

19.13 Tétel. A (19.8') másodfoku alak akkor és csak akkor pozitív definit, pozitív semidefinit, ill. indefinit, ha

$\underline{A}$ összes sajátértéke pozitív,

$\underline{A}$ összes sajátértéke nem-negatív, ill.

$\underline{A}$ -nak van pozitív és negatív sajátértéke.

Bizonyítás. Azonnal adódik a 19.12 Tételből és (19.10)-ből.

19.1 Példa. Egyen a közönséges síkon (a kétdimenziós euklideszi térben) az $\underline{i}, \underline{j}$ ortonormált bázissal meghatározott Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer origója az 0 pont. Azon (x, y) pontok mértani helyét, amelyek kielégítik az

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0 \quad (19.11)$$

egyenletet, másodrendű görbének nevezzük. Az $a_{21} = a_{12}$ jelöléssel (19.1) kvadratikus része

$$[x, y] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{x}' \cdot \underline{A} \cdot \underline{x},$$

mely a főtengety tétel alapján $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2$ alakba transzformálható. Legyenek λ_1, λ_2 az $\underline{A}$ mátrix sajátértékei,

$$\underline{m}_1 = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_2 = \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix}$$

a megfelelő ortonormált bázist alkotó sajátvektorok és

$$\underline{M} = [\underline{m}_1, \underline{m}_2]$$

(19.11) lineáris része a főtengety tételben fellépő

$$\underline{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \underline{M}' \underline{x} \quad (19.12)$$

ortogonális transzformációval (vagyis $\underline{\tilde{x}} = \underline{M} \underline{x}$ (19.11)-be való helyettesítésével) lineáris kifejezés marad:

$$\begin{aligned} b_1 (m_{11} \tilde{x} + m_{12} \tilde{y}) + b_2 (m_{21} \tilde{x} + m_{22} \tilde{y}) + c = \\ = \tilde{b}_1 \tilde{x} + \tilde{b}_2 \tilde{y} + c. \end{aligned}$$

A (17.1) és a (17.2) Példákból következik, hogy a (19.12) transzformáció elforgatást, vagy elforgatást és az $\underline{m}_1$ új bázisvektorral meghatározott koordináta-tengelyre való tükrözést jelent. Az 0 origóju és az $\underline{m}_1, \underline{m}_2$ ortonormált bázissal meghatározott $\tilde{X}, \tilde{Y}$ derékszögű koordináta-rendszerben a (19.11) egyenlet a

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \tilde{b}_1 \tilde{x} + \tilde{b}_2 \tilde{y} + c = 0 \quad (19.13)$$

egyenletbe megy át. Az összes lehetséges eset a következő:

a) $\underline{x}' \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}$ pozitív, vagy negatív definit, vagyis

$$\det \underline{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0.$$

Ekkor a

$$\xi = \tilde{x} + \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1}, \quad \eta = \tilde{y} + \frac{\tilde{b}_2}{2\lambda_2} \quad (19.14)$$

transzformációval (az "origó eltolása" az

$$\tilde{x} = -\frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1}, \quad \tilde{y} = -\frac{\tilde{b}_2}{2\lambda_2}$$

pontba), a

$$d = c - \lambda_1 \left(\frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left(\frac{\tilde{b}_2}{2\lambda_2} \right)^2,$$

$$a^2 = \left| \frac{d}{\lambda_1} \right|, \quad b^2 = \left| \frac{d}{\lambda_2} \right|$$

jelölésekkel (19.13) végleges alakja:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = \pm 1, \quad (19.15)$$

vagy, ha $d = 0$, akkor az

$$a^2 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{1}{\lambda_2}$$

jelöléssel

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 0 \quad (19.15')$$

b) $\underline{x}^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}$ indefinit, vagyis

$$\underline{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$$

($\underline{A}$ sajátértékei különböző előjelűek.) Forgatással, ~~transzformációval~~ és eltolással (19.13) végleges alakja:

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \text{ vagy } 0. \quad (19.16)$$

c) $\underline{x}' \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}$ pozitív vagy negatív semidefinit, vagyis

$$\underline{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0.$$

Ekkor legalább az egyik sajátérték különbözik zérustól. (Ha u. i. mindkét sajátérték zérus lenne, az $\underline{A} = 0$ érdektelen esetet kapnánk.) Legyen pl. λ_2 zérustól különböző, akkor (19.14)-hez hasonló lineáris transzformációval (19.13) a következő egyenletbe megy át:

$$\eta^2 = 2 p \xi + a^2, \text{ vagy } 0. \quad (19.17)$$

Ha $\lambda_1 \neq 0$, akkor először forgatással majd tükrözéssel báziscserét hajtunk végre és a keletkezett másodfoku egyenletet hozzuk a (19.17) alakok valamelyikére.

Miután több lehetséges eset nincs, a másodrendű görbék teljes osztályozását elvégezhetjük a (19.15) (19.16) és (19.17) transzformált egyenletek alapján (ξ, η helyébe x, y -t írunk):

$$a) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ellipszis}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{"képzetes ellipszis" (nincs alakzat)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{"pont ellipszis" (az origó)}$$

$$b) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{hiperbola}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

metező egyenespár

$$c) y^2 = 2px, p \neq 0$$

parabola

$$y^2 = a^2$$

párhuzamos egyenespár

$$y^2 = -a^2$$

"képzetes egyenespár" (üres alakzat)

$$y^2 = 0$$

egyenes

Ez a példa magyarázza a főtengely tétel elnevezést u.i. láttuk, hogy az ortogonális transzformációval bevezetett új bázis vektorai éppen a szóban forgó másodrendű görbe (ellipszis, hiperbola, parabola) főtengelyeivel (nagyfőtengely, kistengely, valósfőtengely, képzetes-főtengely, főtengely) párhuzamosak.

19.2 Példa. Legyen a közös térben (a háromdimenziós euklideszi térben) az i, j, k ortonormált bázissal adott koordináta-rendszer origója az 0 pont. Azon (x, y, z) pontok mértani helyét, amelyek kielégítik az

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0 \quad (19.18)$$

egyenletet, másodrendű felületeknek nevezzük. Az $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$ jelölésekkel (19.18) kvadratikus része:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{x}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}$$

Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ az $\underline{A}$ mátrix sajátértékéhez

$$\underline{m}_i = \begin{bmatrix} m_{1i} \\ m_{2i} \\ m_{3i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

a megfelelő ortonormált bázist alkotó sajátvektorok és

$$\underline{M} = [\underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3].$$

A főtengety tételben fellépő

$$\tilde{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \underline{M}' \underline{x}$$

ortogonális transzformációval, (vagyis $\underline{x} = \underline{M} \tilde{\underline{x}}$ (19.18)-ba való helyettesítésével) a (19.18) egyenlet a

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 + \tilde{a}_1 \tilde{x} + \tilde{a}_2 \tilde{y} + \tilde{a}_3 \tilde{z} + a_4 = 0 \quad (19.19)$$

egyenletbe megy át. Az összes lehetséges eset a következő (a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ triviális esettel nem foglalkozunk):

$$a) \quad \text{sg } \lambda_1 = \text{sg } \lambda_2 = \text{sg } \lambda_3 \neq 0.$$

Ekkor az origó (19.14)-hez hasonló "eltolásával" (19.19) végleges alakja

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = \pm 1, \text{ vagy } 0. \quad (19.20)$$

$$b) \quad -\text{sg } \lambda_1 = \text{sg } \lambda_2 = \text{sg } \lambda_3 \neq 0.$$

Az egyenlet végleges alakja

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = \pm 1, \text{ vagy } 0. \quad (19.21)$$

$$c) \quad \lambda_3 = 0, \text{ és}$$

$$c_1) \quad \text{sg } \lambda_1 = \text{sg } \lambda_2 \neq 0.$$

Az egyenlet végleges alakja:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 2\zeta, \pm 1, \text{ vagy } 0. \quad (19.22)$$

$$c_2) \quad -\text{sg } \lambda_1 = \text{sg } \lambda_2 \neq 0.$$

A végleges alak:

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 2\zeta, \quad 1, \text{ vagy } 0. \quad (19.23)$$

$$c_3) \quad \lambda_2 = 0, \text{ de } \lambda_1 \neq 0.$$

Ekkor az m_1, m_2, m_3 bázisban (19.19) alakja (az origó eltolása után)

$$\xi^2 + \tilde{a}_2 \tilde{y} + \tilde{a}_3 \tilde{z} + \tilde{a}_4 = 0 \quad (19.24)$$

Ha $|\tilde{a}_2| + |\tilde{a}_3| > 0$, az $\underline{m}_1$ vektor fixen tartásával végezzünk ortogonális bázistranszformációt az $\underline{m}_2, \underline{m}_3$ által meghatározott síkon. A következő transzformációs $\underline{N}$ mátrix oszlopai az új $\hat{\underline{m}}_2, \hat{\underline{m}}_3$ bázis vektorok állnak:

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{a}_2}{\sqrt{\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_3^2}} & -\frac{\tilde{a}_3}{\sqrt{\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_3^2}} \\ \frac{\tilde{a}_3}{\sqrt{\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_3^2}} & \frac{\tilde{a}_2}{\sqrt{\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_3^2}} \end{bmatrix}$$

Mivel $\underline{N}$ ortogonális, tehát $\underline{m}_1, \underline{\hat{m}}_2, \underline{\hat{m}}_3$ is ortonormált bázis és

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \frac{\tilde{a}_2}{\sqrt{\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_3^2}} \eta - \frac{\tilde{a}_3}{\sqrt{\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_3^2}} \xi \\ \tilde{z} &= \frac{\tilde{a}_3}{\sqrt{\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_3^2}} \eta + \frac{\tilde{a}_2}{\sqrt{\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_3^2}} \xi \end{aligned}$$

(19.24)-be helyettesítésével, az egyenlet az új bázisban

$$\xi^2 + \sqrt{\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_3^2} \eta + \tilde{a}_4 = 0$$

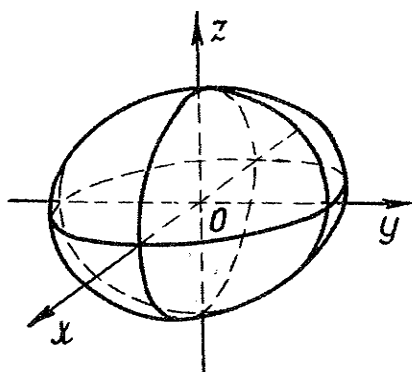
alakú lesz. Írhatjuk, tehát a végleges formát úgy, hogy:

$$\xi^2 = 2 p \eta, \quad \pm a^2, \quad \text{vagy } 0,$$

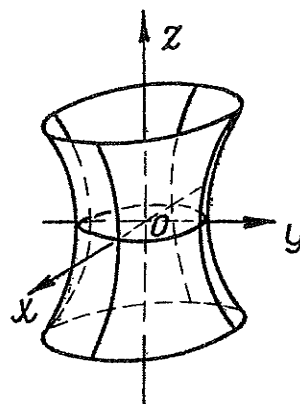
vagy forgatással és tükrözéssel

$$\eta^2 = 2 p \xi, \quad \pm a^2, \quad \text{vagy } 0 \quad (19.25)$$

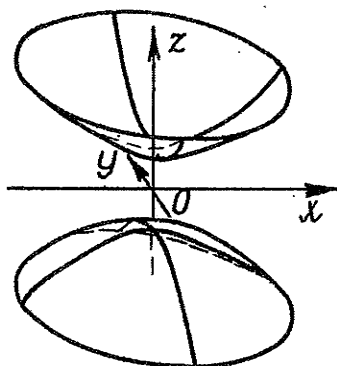
Miután több eset nincs, a másodrendű felületek osztályozását elvégezhetjük a (19.20), (19.21), (19.22), (19.23) és a (19.25). egyenletek alapján. (ξ, η, ζ helyébe x, y, z -t írunk.)



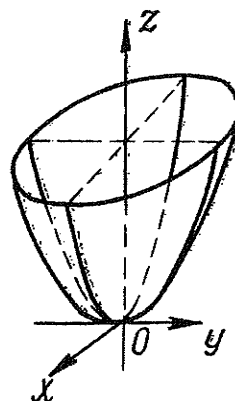
19.1. ábra



19.2. ábra



19.3. ábra



19.4. ábra

$$a) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ellipszoid (19.1. ábra),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

üres alakzat,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

origó,

$$b) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

egyköpenyű hiperboloid
(19.2. ábra),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

kétköpenyű hiperboloid
(19.3. ábra),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

$$c_1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

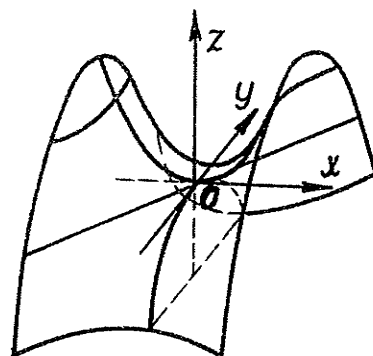
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

$$c_2) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$



19.5. ábra

elliptikus kup,

elliptikus paraboloid (19.4.
ábra),

elliptikus henger,

üres alakzat,

egyenes,

hiperbolikus paraboloid
(19.5. ábra),

hiperbolikus henger,

két metsző sík,

$c_3)$	$y^2 = 2px,$	parabolikus henger,
	$y^2 = a^2,$	két párhuzamos sík,
	$y^2 = -a^2,$	üres alakzat,
	$y^2 = 0,$	sík.

20. Lineáris operátorok felbontásai

Ebben a pontban lineáris operátorok további speciális típusait ismertetjük és tetszőleges lineáris operátornak ilyen típusú és szimmetrikus operátorok összegére, ill. szorzatára való felbontásával foglalkozunk.

20.1 Definíció. A $\underline{Z}$ lineáris operátort antiszimmetrikusnak (ferdén szimmetrikusnak) nevezzük, ha adjungáltja $\underline{Z}' = -\underline{Z}$, vagyis ha minden $\underline{x}, \underline{y} \in E^n$ -re

$$(\underline{Z} \underline{x}, \underline{y}) = -(\underline{x}, \underline{Z} \underline{y}). \quad (20.1)$$

(l. 19.1. Definíció, v. 8. 19.2 Definíció.)

20.1 Tétel. A $\underline{Z}$ lineáris operátor akkor és csak akkor antiszimmetrikus, ha tetszőleges ortonormált bázisban koordináta mátrixa antiszimmetrikus mátrix (l. 8.8 Definíció).

E tétel bizonyítása a 19.3 Tétel bizonyításával teljesen analóg, így azt az olvasóra bizzuk.

20.2 Tétel. A tetszőleges $\underline{A}$ lineáris operátor pontosan egyféleképpen bontható fel egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus operátor összegére, vagyis van egy és csak egy szimmetrikus $\underline{S}$, ill. antiszimmetrikus $\underline{Z}$ operátor, hogy

$$\underline{A} = \underline{S} + \underline{Z}. \quad (20.2)$$

Bizonyítás. Először a (20.2) felbontás egyértelműségét igazoljuk. Tegyük fel, hogy (20.2) fennáll,

$$\underline{S} = \underline{S}', \quad \underline{Z} = -\underline{Z}',$$

és képezzük (20.2) adjungáltját (könnyen látható közvetlenül a definícióból, hogy összeg adjungáltja az adjungáltak összege):

$$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{S}}' + \underline{\underline{Z}}' = \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{Z}} \quad (20.3)$$

Adjuk össze, ill. vonjuk ki egymásból (20.2)-t és (20.3)-at

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{S}} = 2 \underline{\underline{S}}$$

$$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{Z}} + \underline{\underline{Z}} = 2 \underline{\underline{Z}}$$

Tehát

$$\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}'), \quad \underline{\underline{Z}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}'), \quad (20.4)$$

vagyis $\underline{\underline{S}}$ és $\underline{\underline{Z}}$ egyértelműen meghatározottak. Egyszerű összeadással kapjuk, hogy a (20.4) által meghatározott operátorok összege valóban $\underline{\underline{A}}$.!

20.3 Következmény. A tetszőleges n -edrendű $\underline{\underline{A}}$ mátrix pontosan egyféle-képpen bontható fel egy szimmetrikus

$$\underline{\underline{S}} = [s_{ik}]$$

és egy antiszimmetrikus

$$\underline{\underline{Z}} = [z_{ik}]$$

mátrix összegére,

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{Z}}, \quad (20.5)$$

ahol

$$s_{ik} = \frac{1}{2} (a_{ik} + a_{ki}),$$

$$z_{ik} = \frac{1}{2} (a_{ik} - a_{ki}),$$

$$i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (20.6)$$

A lineáris operátorok fontos speciális fajtái azok, amelyek vektorok skaláris szorzatát nem változtatják meg, másszóval "tartják a tér metrikáját".

20.2 Definíció. Az $\underline{\underline{M}}$ lineáris operátort izometrikusnak ("mértéktartónak") nevezzük, ha minden $\underline{x}, \underline{y} \in E^n$ -re

$$(\underline{\underline{M}} \underline{x}, \underline{\underline{M}} \underline{y}) = (\underline{x}, \underline{y}). \quad (20.7)$$

A definícióból azonnal következik, hogy ha $\underline{\underline{M}}$ izometrikus operátor, akkor a vektorok normáját tartja, vagyis minden $\underline{x} \in E^n$ -re

$$\|\underline{\underline{M}} \underline{x}\| = \|\underline{x}\|. \quad (20.8)$$

Megjegyezzük, hogy az izometrikus operátorokat (20.8)-cal is értelmezhetők volna, u.i. bebizonyítható, hogy (20.8)-ból a definiáló (20.7) tulajdonság következik. (20.7)-ből és (20.8)-ból következik, hogy izometrikus operátor megőrzi a vektorok "szögét" is (l. (16.10)).

20.4 Tétel. Az $\underline{\underline{M}}$ operátor akkor és csak akkor izometrikus, ha

$$\underline{\underline{M}}' \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{E}}. \quad (20.9)$$

Bizonyítás. Legyen $\underline{\underline{M}}$ izometrikus operátor, akkor minden $\underline{x}, \underline{y} \in E^n$ -re

$$(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{\underline{M}} \underline{x}, \underline{\underline{M}} \underline{y}) = (\underline{x}, \underline{\underline{M}}' \underline{\underline{M}} \underline{y}),$$

vagyis rendezve

$$(\underline{x}, \underline{y} - \underline{\underline{M}}' \underline{\underline{M}} \underline{y}) = 0$$

Miután az utóbbi egyenlőség rögzített $\underline{y}$ mellett minden $\underline{x}$ -re fennáll, $\underline{y} - \underline{\underline{M}}' \underline{\underline{M}} \underline{y}$ zérusvektor. Így.

$$\underline{\underline{M}}' \underline{\underline{M}} \underline{y} = \underline{y}$$

minden $\underline{y} \in E^n$ -re, tehát $\underline{\underline{M}}' \underline{\underline{M}}$ valóban az $\underline{\underline{E}}$ egységoperátor. Fordítva, ha $\underline{\underline{M}}' \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{E}}$, akkor minden $\underline{x}, \underline{y} \in E^n$ -re

$$(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, \underline{\underline{E}} \underline{y}) = (\underline{x}, \underline{\underline{M}}' \underline{\underline{M}} \underline{y}) = (\underline{\underline{M}} \underline{x}, \underline{\underline{M}} \underline{y}).$$

20.5 Tétel. Az $\underline{\underline{M}}$ operátor akkor és csak akkor izometrikus, ha koordináta mátrixa tetszőleges ortonormált bázisban ortogonális mátrix.

Bizonyítás. Legyen a tetszőlegesen adott ortonormált bázisban $\underline{\underline{M}} \cong \underline{\underline{M}}$, akkor a 19.2 Tétel alapján $\underline{\underline{M}}' \cong \underline{\underline{M}}'$ és (20.9)-nek az $\underline{\underline{M}}' \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{E}}$ egyenlőség felel meg (l. 17.4 Definíció).!

Az ortogonális mátrixok (17.20) és (17.21) tulajdonságaiból, a 18.3 Tételből és (18.12)-ből adódik a

20.6 Következmény. Az $\underline{M}$ operátor akkor és csak akkor izometrikus, ha nem elfajuló és

$$\underline{M}' = \underline{M}^{-1}.$$

(17.22)-ből látható, hogy érvényes a

20.7 Következmény. Ha $\underline{M}$ izometrikus, akkor $\underline{M}'$ is izometrikus és ezért

$$\underline{M} \underline{M}' = \underline{E}. \quad (20.10)$$

E pont hátralevő részében azzal a kérdéssel foglalkozunk, elő lehet-e állítani valamely lineáris operátort izometrikus és szimmetrikus operátorok szorzataként. E kérdés nagy jelentőségére a 20.1 Példában világítunk rá. Néhány egyszerű új fogalmat kell bevezetnünk és néhány segédtételt bizonyítanunk.

20.8 Segédtétel. Két lineáris operátor szorzatának adjungáltja egyenlő az operátorok fordított sorrendben vett adjungáltjainak szorzatával, vagyis

$$(\underline{A} \underline{B})' = \underline{B}' \underline{A}'. \quad (20.11)$$

Bizonyítás. Az adjungált definíciója értelmében minden $\underline{x}, \underline{y} \in E^n$ -re

$$(\underline{A} \underline{B} \underline{x}, \underline{y}) = (\underline{B} \underline{x}, \underline{A}' \underline{y}) = (\underline{x}, \underline{B}' \underline{A}' \underline{y}),$$

ahonnan (20.11) következik. !

20.3 Definíció. Az $\underline{A}$ lineáris operátort pozitív definitnek nevezzük, ha szimmetrikus és minden $\underline{x} \in E^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$ -ra

$$(\underline{x}, \underline{A} \underline{x}) > 0.$$

A 19.3 Definícióból és (17.11)-ből azonnal adódik a

20.9 Segédtétel. Az $\underline{A}$ szimmetrikus operátor akkor és csak akkor pozitív definit, ha tetszőleges ortonormált bázisban az

$$\underline{x}' \underline{A} \underline{x} = (\underline{x}, \underline{A} \underline{x})$$

másodfokú alak pozitív definit, ahol

$$\underline{\underline{A}} \cong \underline{\underline{A}}.$$

Innen és a 19.13 Tételből következik a

20.10 Segédétel. Az $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus operátor akkor és csak akkor pozitív definit, ha összes sajátértéke pozitív.

20.11 Segédétel. Ha $\underline{\underline{A}}$ nem elfajuló lineáris operátor, akkor az $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}'$, ill. az $\underline{\underline{A}}' \underline{\underline{A}}$ szorzat pozitív definit operátor.

Bizonyítás. A bizonyítást $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}'$ -re végezzük el; $\underline{\underline{A}}' \underline{\underline{A}}$ -ra az állítás analóg módon adódik. A 20.8 Segédétel szerint

$$(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}')' = (\underline{\underline{A}}')' \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}',$$

tehát $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}'$ szimmetrikus. Minden $\underline{\underline{x}} \in E^n$, $\underline{\underline{x}} \neq \underline{\underline{0}}$ -ra

$$(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}' \underline{\underline{x}}) = (\underline{\underline{A}}' \underline{\underline{x}}, \underline{\underline{A}}' \underline{\underline{x}}) > 0,$$

u.i. abból, hogy $\underline{\underline{A}}$ nem elfajuló, következik, hogy $\underline{\underline{A}}'$ sem elfajuló és így, ha $\underline{\underline{x}} \neq \underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{A}}' \underline{\underline{x}} \neq \underline{\underline{0}}$!

20.12 Segédétel. Legyen $\underline{\underline{B}}$ pozitív definit operátor, akkor van egy és csak egy pozitív definit $\underline{\underline{S}}$ operátor melyre,

$$\underline{\underline{S}}^2 = \underline{\underline{B}},$$

ezt $\underline{\underline{B}}$ négyzetgyökének nevezzük:

$$\underline{\underline{S}} = \sqrt{\underline{\underline{B}}}.$$

Bizonyítás. Legyen $\underline{\underline{e}}_1, \underline{\underline{e}}_2, \dots, \underline{\underline{e}}_n$ $\underline{\underline{B}}$ sajátvektoraiból álló ortonormált bázis és $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{e}}_k = \lambda_k \underline{\underline{e}}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. A 20.10 Segédételből következik, hogy $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Defináljuk az $\underline{\underline{S}}$ operátort a következőképpen (megadjuk, mibe viszi át az $\underline{\underline{e}}_k$ bázisvektorokat):

$$\underline{\underline{S}} \underline{\underline{e}}_k = \sqrt{\lambda_k} \underline{\underline{e}}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Mivel $\sqrt{\lambda_k} > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, a 19.3 Tételből és a 20.10 Segédételből következik, hogy $\underline{\underline{S}}$ pozitív definit operátor. Azonban

$$\begin{aligned}\underline{\underline{S}}^2 \underline{\underline{e}}_k &= \underline{\underline{S}} (\underline{\underline{S}} \underline{\underline{e}}_k) = \underline{\underline{S}} (\sqrt{\lambda_k} \underline{\underline{e}}_k) = \\ &= \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_k} \underline{\underline{e}}_k = \lambda_k \underline{\underline{e}}_k = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{e}}_k,\end{aligned}$$

$$k = 1, 2, \dots, n,$$

tehát $\underline{\underline{S}}^2 = \underline{\underline{B}}$.

Megmutatjuk, hogy $\underline{\underline{S}}$ egyértelműen van meghatározva. Legyen ugyanis $\underline{\underline{U}}$ pozitív definit operátor, $\underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{a}}_1, \dots, \underline{\underline{a}}_n$ $\underline{\underline{U}}$ sajátvektoraiból álló ortonormált bázis és $\underline{\underline{U}} \underline{\underline{a}}_j = \mu_j \underline{\underline{a}}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Akkor $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{a}}_j = \underline{\underline{U}}^2 \underline{\underline{a}}_j = \underline{\underline{U}} (\underline{\underline{U}} \underline{\underline{a}}_j) = \underline{\underline{U}} (\mu_j \underline{\underline{a}}_j) = \mu_j^2 \underline{\underline{a}}_j$. Tehát $\underline{\underline{a}}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\underline{\underline{B}}$ -nek is sajátvektora, μ_j^2 pedig ehhez tartozó sajátértéke. Ha a sajátértékeket megfelelően számozzuk, $\mu_j^2 = \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Mivel $\underline{\underline{U}}$ pozitív definit, $\mu_j > 0$, így $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$. Legyen

$$\underline{\underline{e}}_k = \sum_{i=1}^n m_{ik} \underline{\underline{a}}_i, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Azonban $\underline{\underline{e}}_k$ ortogonális $\underline{\underline{B}}$ azon $\underline{\underline{a}}_i$ sajátvektoraira, melyek nem a λ_k sajátértékhez tartoznak (l. 19.6 Tétel), vagyis ha λ_k multiplicitása p ,

$\lambda_{i1} = \lambda_{i2} = \dots = \lambda_{ip} = \lambda_k$ és $\lambda_i \neq \lambda_k$ ha $i \neq i_1, i_2, \dots, i_p$, akkor $\underline{\underline{e}}_k$ előző kifejtésében azon $m_{ik} = (\underline{\underline{a}}_i, \underline{\underline{e}}_k)$ koordináták, melyekre $i \neq i_1, \dots, \dots, i_p$, zérussal egyenlők, tehát

$$\underline{\underline{e}}_k = m_{i_1 k} \underline{\underline{a}}_{i_1} + m_{i_2 k} \underline{\underline{a}}_{i_2} + \dots + m_{i_p k} \underline{\underline{a}}_{i_p}.$$

Mivel

$$\underline{\underline{U}} \underline{\underline{a}}_{i_h} = \sqrt{\lambda_{i_h}} \underline{\underline{a}}_{i_h} = \sqrt{\lambda_k} \underline{\underline{a}}_{i_h}, \quad h = 1, 2, \dots, p,$$

így

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{U}} \underline{e}_k &= \underline{\underline{U}} (m_{11} \underline{a}_{11} + \dots + m_{1p} \underline{a}_{1p}) = \\
&= m_{11} \sqrt{\lambda_k} \underline{a}_{11} + \dots + m_{1p} \sqrt{\lambda_k} \underline{a}_{1p} = \\
&= \sqrt{\lambda_k} \underline{e}_k.
\end{aligned}$$

Tehát $\underline{\underline{U}} \underline{e}_k = \underline{\underline{S}} \underline{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, vagyis $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{S}}$.

20.13 Tétel. Legyen $\underline{\underline{A}}$ nem elfajuló lineáris operátor, akkor van és csak egy $\underline{\underline{S}}$, ill. $\underline{\underline{S}}_1$ pozitív definit (szimmetrikus) és $\underline{\underline{M}}$, ill. $\underline{\underline{M}}_1$ izometrikus operátor, hogy

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{M}}, \quad (20.12)$$

ill.

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{M}}_1 \underline{\underline{S}}_1 \quad (20.13)$$

Bizonyítás. Először a (20.12) szorzat felbontás egyértelműségét igazoljuk. Ha (20.12) fennáll és $\underline{\underline{S}}$ pozitív definit, $\underline{\underline{M}}$ pedig izometrikus operátor, akkor

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{M}} (\underline{\underline{S}} \underline{\underline{M}})' = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{M}}' \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^2,$$

ahol felhasználtuk a (20.8) Segédételt, (20.10)-et és a 19.2 Definíciót. Innen tehát, mivel $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}'$ pozitív definit (20.11 Segédételt), $\underline{\underline{S}} = \sqrt{\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}'}$ egyértelműen meghatározott (20.12 Segédételt). Mivel $\underline{\underline{S}}$ pozitív definit, következik, hogy nem-elfajuló, így (20.12)-ből $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}}$ egyértelműen meghatározott. Fordítva, legyen $\underline{\underline{S}} = \sqrt{\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}'}$ és $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}}$ -val értelmezve, ezzel az $\underline{\underline{S}}$ -sel és $\underline{\underline{M}}$ -mel (20.12) fennáll és csak azt kell belátnunk, hogy $\underline{\underline{M}}$ izometrikus. Ez azonban könnyen látható, u.i.

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{M}} \underline{\underline{M}}' &= \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}})' = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}' \underline{\underline{S}}^{-1} = \\
&= \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{S}}^2 \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{E}}
\end{aligned}$$

(l. 20.7 Következmény és 20.4 Tétel). Miután a (20.12)-re vonatkozó állítást igazoltuk, (20.13) ugy bizonyítható, hogy (20.12)-t az $\underline{\underline{A}}'$ ugyancsak nem elfajuló operátorra alkalmazzuk. Van u.i. egy és csak egy $\underline{\underline{S}}_1$ pozitív definit és $\underline{\underline{M}}_1$ izometrikus operátor, hogy $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{M}}_1$, ahol $\underline{\underline{S}}_1 = \sqrt{\underline{\underline{A}}' \underline{\underline{A}}''} =$

$= \sqrt{\underline{A}' \underline{A}}$. Mivel $\underline{M}_0$ izometrikus, a 20.7 Következmény szerint $\underline{M}_1 = \underline{M}'_0$ is izometrikus és

$$\underline{A} = (\underline{A}')' = (\underline{S}_1 \underline{M}_0)' = \underline{M}'_0 \underline{S}'_1 = \underline{M}_1 \underline{S}_1.!$$

20.1 Példa. Legyen terünk a közönséges (kétdimenziós euklideszi) sík, ill. a közönséges (háromdimenziós euklideszi) tér. Izometrikus operátor a síkot, ill. a teret úgy képezi le önmagára, hogy a vektorok hosszát (normáját) és egymással bezárt szögét tartja. Ha a sík, ill. a tér egy 0 pontját lerögzítjük, az izometrikus operátor úgy hat az 0 pontból kiinduló helyvektorokkal jellemzett pontokra, hogy a leképezésnél a pontok közötti távolság nem változik, és az 0 pont helyben marad. Ezek szerint a sík, ill. a tér úgy képeződik le önmagára, mintha egy az 0 pontban rögzített merev test lenne, melyet az 0 pont körül elforgatunk (és melynek pontjait esetleg még az 0 pontra tükrözzük).

Ezért mondhatjuk, hogy a helyvektorok izometrikus leképezése a sík, ill. a tér "forgatása". A 20.13 Tétel jelentősége abban áll, hogy kimondja: a közönséges sík, ill. tér helyvektorainak bármely nem elfajuló lineáris leképezése egyetlen forgatás (és tükrözés) és egyetlen (nem elfajuló, pozitív nyújtási együtthatókkal végzett) dilatació egymásutáni végrehajtásából áll.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Matematika Példatár (szerkesztette: Monostory I.)
III. kötet, Tankönyvkiadó, 1971.
- [2] Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába.
Tankönyvkiadó, 1960.
- [3] Prékopa A.: Lineáris programozás I., Bolyai Társulat, 1968.
- [4] Gelfand, I. M.: Előadások a lineáris algebráról,
Akadémiai Kiadó, 1955.
- [5] Гантмахер, Ф.Р.: Теория Матриц, Гостехиздат, 1954,
Москва.

Tárgymutató

Abel csoport 141
abszolút érték 7, 43
adjungált 104, 173
alap 128
 degenerált ——— 128
 optimális ——— 128
alapmegoldás 128
alapvektorrendszer 128
Algebra alaptétele 53
altér 79, 153
 —— bázisa 80
arcus 45
argumentum 45
asszociatív 9, 38, 64
átlós mátrix 61

balrendszer 18
bázis 24, 75, 150
bázistranszformáció 157
 —— mátrixa 157
bázisvektorok 24
Bézout-tétele 53
Bunyakovszkij-egyenlőtlenség 148

Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség 147
Cauchy-egyenlőtlenség 148
célfüggvény 127
Cramer-szabály 118
csoport 141
 kommutatív ——— 141

definit másodfoku alak 182
de Moivre-formula 47
Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer 28
determináns 27, 84, 95
diád 66
diadikus szorzat 66
diagonális mátrix 61
dilatáció 180
dimenzió 144
disztributív 11, 16, 38

egységgyökök 47
egységmátrix 61

egységoperátor 165
 egységvektor 10
 együtttható mátrix 115
 elemi oszlopműveletek 112
 elemi sorműveletek 108
 elmozdulás 7
 előjeles aldetermináns 86
 eredő vektor 9
 euklideszi tér 145
 komplex ————— 146
 n-dimenziós valós ————— 146
 Euler formula 50
 felcserélési tétel 21
 forgatónyomaték 18
 főérték 45
 főtengely tétel 177, 181
 Gauss-féle módszer 118
 gyök 52
 gyökök és együttthatók közötti összefüggések 56
 gyöktényező 53
 gyöktényező alak 53
 gyűrű 142
 hasonló mátrixok 169
 háromszög-egyenlőtlenség 148
 helyvektor 28
 homogén lineáris vektor-vektor függvény 165
 identitásoperátor 165
 imaginárius rész 42
 indefinit másodfoku alak 182
 inverz elem 141
 inverzmátrix 104
 iránykoszinuszok 25
 irányvektor 33
 jobbrendszer 18
 karakterisztikus egyenlet 126, 170
 karakterisztikus polinom 126
 képzetes egység 41
 ——— szám 42
 ——— tengely 42
 kibővített mátrix 116

kifejtési tétel 22
 kommutatív 9, 16, 38, 63
 komplex szám 38, 142
 ——— abszolút értéke 43
 ——— algebrai alakja 41
 ——— arcusa 45
 ——— argumentuma 45
 ——— exponenciális alakja 50
 ——— imaginárius része 42
 ——— kanonikus alakja 41
 ——— konjugáltja 43
 ——— modulusa 43
 ——— n -edik gyöke 47
 ——— reális része 42
 ——— trigonometrikus alakja 45
 komplex számok halmaza 38
 ——— hányadosa 39
 ——— osztása 40
 komplex számsík 41
 komponensek 9
 koordináta oszlopvektor 51
 Kronecker szimbólum 61, 82
 kvadratikus forma 180
 kvadratikus mátrix 61
 lineáris egyenletrendszer 115
 ——— alaprendszere 124
 ——— általános megoldása 124
 ——— homogén 121
 ——— inhomogén 121
 ——— megoldása 115
 ——— triviális megoldása 121
 lineáris kombináció 12, 13, 72
 ——— nem triviális 72
 lineáris operátor 165
 ——— adjungáltja 173
 ——— antiszimmetrikus 192
 ——— ferdén szimmetrikus 192
 ——— invariáns altere 170
 ——— inverze 166
 ——— izometrikus 194
 ——— koordináta mátrixa 167

- nem elfajuló 166
- önadjungált 175
- pozitív definit 195
- sajátértéke 170
- sajátvektora 170
- szimmetrikus 175

lineáris tér 143

- n-dimenziós 144

lineárisan független 14, 28, 73, 143

- összefüggő 14, 28, 72, 143

másodfoku alak 180

másodrendű felület 182

másodrendű görbe 182

mátrix 60

- adjungáltja 104

- antiszimmetrikus 63

- asszociált 104

- determinánsa 86

- ekvivalens 109

- elemei 60

- ellentettje 63

- főátlója 61

- nyoma 171

- oszlopa 60

- oszloptere 112

- rangja 108

- reguláris 103

- sortere 108

- spurja 171

- szimmetrikus 63

- szinguláris 103

- transzponálja 62

- típusa 60

merőleges vektorok 8.

minormátrix 85, 109

multiplicitás 56.

n-edrendű mátrix 61

négyzetes mátrix 61

neutrális elem 141

norma 146

normálpolinom 52

normálvektor 31

nullooperátor 165

nullvektor 7, 72

- origó 28
- ortogonális 8, 18, 149, 152, 158, 159
 - bázis 152
 - bázistranszformáció 158
 - mátrix 159
- ortonormált bázis 24, 153
- oszlopmátrix 60
- oszlopvektor 60, 71
- összetevők 9
- paralelogramma szabály 9
- polinom 52
- pozitív definit másodfokú alak 182
- rang 108
- reális rész 42
- reciprok mátrix 104
- rendezett szám n -es ⁷¹
- rezultáns vektor 9
- sajátérték 125, 170
- sajátvektor 124, 170
- semidefinit másodfokú alak 182
- sík 31
 - egyenletének Hesse-féle normálalakja 31
 - paraméteres vektoregyenlete 33
 - vektoregyenlete 31
- skaláris szorzás 15, 145, 146
- sormátrix 61
- sor-oszlop kombinálás 65
- sorvektor 61, 71
- súlypont 3⁵
- szimplex táblázat 138
- szögsebesség vektor 34
- távolság 28
- tenzor 165
- test 142
- transzponált mátrix 62
- valós számok 142
 - tengely 42
- Vandermonde-determináns 100
- vegyesszorzat 21
- vektor 7, 143

- abszolút értéke 7
- állása 7
- ellentettje 9
- hossza 7
- iránya 7
- kezdőpontja 8
- koordinátái 24, 151
- négyzete 17
- végpontja 8
- vektoregyenlet 30
- vektoriális szorzat 19
- vektorok 7, 143
 - kollineáris 7
 - komplanáris 7, 28
 - osztása 24
 - párhuzamos 7, 20
 - szöge 8, 149
- vektor-tér 143
- Vietà-féle formulák 56
- zérushely 52
- zérusmátrix 60
- zérusvektor 72