



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:
Farkas Miklós

MATEMATIKA
IV. kötet
VÉGTELEN SOROK

Írta:
Farkas Miklós - Hoffmann Tiborné



Műegyetemi Kiadó, 2004.

(Kilencedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040799**

**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának**
megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 9,1 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 091/04

AZ OLVASÓHOZ

Ez a jegyzet a Matematika c. jegyzetsorozat IV. kötete. A sorozat a következő kötetekből áll:

- I. kötet. A matematika alapjai
- II. kötet. Egyváltozós valós függvények
- III. kötet. Lineáris algebra
- IV. kötet. Végtelen sorok
- V. kötet. Többváltozós valós függvények
- VI. kötet. Differenciálgeometria és vektoranalízis
- VII. kötet. Komplex függvények
- VIII. kötet. Differenciálegyenletek

A sorozat a szigorlati Matematika anyagot tartalmazza. A jegyzet azokhoz a gépészmérnök-hallgatókhoz szól, akik a Matematika c. tárgy előadásait és gyakorlatait látogatják. Ezért nem tartalmaz hosszadalmas magyarázatokat, bevezető és illusztratív példákat stb., hanem "csupán" a tulajdonképpeni anyagot lehetőség szerint teljességre és maximális tömörségre törekedve. (A levelező hallgatók számára külön útmutató csatlakozik a sorozathoz.) A sorozatot a Matematika Példatár kötetei egészítik ki, amelyekben az olvasó nagy számu kidolgozott és kidolgozatlan példát és feladatot talál.

A kötet fejezetekre, a fejezetek pontokra vannak osztva, de a pontok számozása a fejezetektől függetlenül, folyamatosan történt. Az egyes pontokon belül külön-külön számozzuk a definíciókat, tételeket (segédtevételeket, következményeket), példákat, formulákat, illetve ábrákat. A példák részben a nehéz fogalmakat, tételeket világítják meg, részben "ellenpéldák" és nagyrészt az elméleti anyag szerves részét képezik. A hivatkozások egy kötetben belül az idézett definíció, tétel stb. számának megadásával, más kötet esetében, ezenkívül a hivatkozott kötet számának megadásával történik (mindkét esetben a fejezet megadása nélkül). Tehát pl. az I. Kötetben a "1. 13. 2 Tétel" hivatkozás az I. Kötet 13. pont 2. tételét jelenti; a II. Kötetben ugyanerre a tételre úgy hivatkozunk: "I. I. Kötet, 13. 2 Tétel". A bizonyítások végét pont és felkiáltójel jelzi: . !

Az Irodalomjegyzék elsősorban az anyag iránt mélyebben érdeklődő olvasónak ajánlott művek és nem az eredmények eredeti forrásainak címeit tartalmazza. Az Irodalomjegyzékben felsorolt művekre szögletes zárójelbe tett számokkal hivatkozunk.

Bp. 1971 március

A szerkesztő

TARTALOMJEGYZÉK

Első fejezet. Numerikus sorok	7
1. Végtelen sor konvergenciája	7
2. Pozitív tagu sorok	16
3. Abszolút, illetve feltételesen konvergens sorok	25
Második fejezet. Függvénysorok	34
4. Egyenletes és egyenlőtlen konvergencia	34
5. Függvénysor tagonkénti differenciálása és integrálása	41
Harmadik fejezet. Hatványsorok	45
6. Hatványsor konvergenciatartománya	45
7. Taylor sorok	49
8. Elemi függvények Maclaurin sorai	53
9. Elliptikus integrálok	58
Negyedik fejezet. Ortogonális sorok	64
10. Fourier sorok	64
11. Fourier-sor konvergenciája	71
12. A négyzetesen integrálható függvények euklideszi tere	81
13. Ortogonális függvényrendszerek	86
Irodalomjegyzék	97
Tárgymutató	98

NUMERIKUS SOROK

1. Végtelen sor konvergenciája

Sorokkal elsősorban azért foglalkozunk, mert módot nyújtanak függvényeknek egyszerűbb függvények segítségével való előállítására, közelítésére (approximációjára) és így megkönnyítik függvényekkel kapcsolatos bizonyos feladatok (pl. integrálás) megoldását. Ahhoz azonban, hogy függvényeket előállító ún. függvénysorokkal foglalkozhassunk, először számokból alkotott ún. numerikus sorokkal kell foglalkoznunk.

Ebben a pontban bevezetjük a végtelen sor fogalmát, értelmezzük konvergenciáját, a konvergencia bizonyos kritériumait, valamint a sorokkal végezhető egyes műveleteket tárgyaljuk.

Az I. Kötet Negyedik fejezetében megismertük a végtelen numerikus sorozat fogalmát és néhány tulajdonságát. E gondolatmenet továbbfejlesztése vezet el a végtelen numerikus sor fogalmához.

1.1 Definíció.

Legyen a_k , $k \in T$ (T a természetes számok halmaza) tetszőleges numerikus sorozat; akkor a belőle képezett

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad n \in T \text{ végtelen sorozatot az } a_k - K \text{ ből alkotott}$$

végtelen numerikus sornak nevezzük, és a következőképpen jelöljük:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k. \quad (1.1)$$

Az 1.1 Definíció szerint tehát

$$s_0 = \sum_{k=0}^0 a_k = a_0$$

$$s_1 = \sum_{k=0}^1 a_k = a_0 + a_1$$

$$\begin{aligned}
 s_2 &= \sum_{k=0}^2 a_k = a_0 + a_1 + a_2 \\
 &\vdots \\
 s_n &= \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

a_k -t az (1.1) sor k -adik tagjának s_n -et a sor n -edik részletösszegének nevezzük. (A sor a nulladik tagjával kezdődik). Az így definiált sor tulajdonságainak vizsgálatát célszerűen visszavezethetjük a részletösszegeiből alkotott sorozat tulajdonságainak vizsgálatára.

1.2 Definíció. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ végtelen sort konvergensnek nevezzük, ha részletösszegei sorozatának van véges s határértéke; ezt a határértéket a sor összegének nevezzük és azt írjuk, hogy

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Ha a végtelen sor nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük. A sort általában nem részletösszegei s_n , $n \in T$ sorozatával, hanem a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ szimbolummal, vagyis a sor a_k tagjaival adjuk meg. Ezért lehetőleg a tagok tulajdonságai alapján is tudnunk kell felismerni a konvergenciát.

1.1 Tétel. (Cauchy-féle kritérium.) A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezzék olyan $N \in T$, hogy bármely $n \geq N$ és bármely $m \geq 1$ -re

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon \text{ legyen.}$$

Bizonyítás. Az 1.2 Definíció szerint a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ végtelen sort akkor mondjuk konvergensnek, ha részletösszegeinek s_n , $n \in T$ végtelen sorozata konvergens. A sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle kritérium (I. Kötet 16,3 Tétel) szerint az s_n , $n \in T$ sorozat akkor és csak akkor konvergens

ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $N \in \mathbb{T}$, hogy minden $n \geq N$ -re és $m \geq 1$ -re

$$|s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon .!$$

1.2 Tétel. Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. Az állítás az előző tétel közvetlen következménye. Ha ui. a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens és az előző tételt az $m=1$ esetre alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ -ra $|a_{n+1}| < \varepsilon$, ha n elég nagy .!

1.1 Példa. Tekintsük a $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ végtelen geometriai sort ($q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$).

Ha $|q| \geq 1$, az 1.2 Tétel szerint a sor divergens, mivel a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül: $\lim_{k \rightarrow \infty} q^k \neq 0$ (I. I. Kötet, 15.3 Példa).

Ha $|q| < 1$, akkor a sor n -edik részletösszege

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} ,$$

és

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q} , \quad (1.3)$$

miel $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$ (I. I. Kötet 15.4 Példa).

Az 1.2 Tételben szereplő feltétel a konvergenciának csak szükséges, de nem elégséges feltétele. Ezt mutatja a következő

1.2 Példa. Tekintsük a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ végtelen harmonikus sort, vagyis a sor

k -adik tagja $a_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Nyilván $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, a sor mégis divergens. Vizsgáljuk ugyanis a részletösszegek s_n , $n = 1, 2, \dots$

sorozatának $s_4, s_8, \dots, s_{2^m}, \dots$ részsorozatát:

$$s_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \frac{1}{2^{m-1}+3} + \dots + \frac{1}{2^m}\right),$$

$$m=2, 3, \dots,$$

ahol a tagokat célszerűen csoportosítottuk. Ha minden csoportban minden tagot a csoport utolsó legkisebb tagjával helyettesítjük, az összeg értékét csökkentjük, vagyis

$$s_{2^m} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$+ (2^m - 2^{m-1}) \frac{1}{2^m} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{m-1} \frac{1}{2^m} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + m \frac{1}{2}.$$

Miután $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{2}\right) = \infty$, az I. Kötet 15.17 Tétel szerint $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2^m} = \infty$ is fennáll. s_n , $n = 1, 2, \dots$ -nek, tehát van divergens részsorozata, így a sorozat sem konvergens!

1.3 Tétel. Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens és összege A, valamint a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sor is konvergens és összege B, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ sor is konvergens és összege $A \pm B$.

Bizonyítás. Jelöljük az első, illetve a második sor n-edik részletösszeget s_n -nel, illetve r_n -nel, azaz $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ és $r_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

$s_n \pm r_n$, mint véges számú tagból álló összeg átrendezhető a következőképpen

$$s_n \pm r_n = \sum_{k=0}^n (a_k \pm b_k),$$

ami a $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ sor n -edik részletösszege. Míthogy $s_n, n \in T$ és $r_n, n \in T$ konvergens sorozatok, az I. Kötet, 15.3 Tétel szerint a belőlük képzett $s_n \pm r_n, n \in T$ is az, és ha $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A$, valamint $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = B$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \pm r_n) = A \pm B$. !

1.4 Tétel. Legyen a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens és összege A , vala-

mint $c \in \mathbb{R}$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} ca_k$ sor is konvergens és összege cA .

Bizonyítás. Legyen az eredeti sor n -edik részletösszege $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ és

a c -vel megszorozotté $S_n = \sum_{k=0}^n ca_k$, akkor

$$S_n = \sum_{k=0}^n ca_k = c \sum_{k=0}^n a_k = c s_n.$$

Tehát az I. kötet 15.4 Tételből következik a második sor konvergenciája és az, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = cA$. !

1.5 Tétel. Konvergens sorba tetszőleges számú zárójelet iktathatunk be anélkül, hogy a konvergencia ténye, vagy a sor összege megváltoznék.

Bizonyítás. E tétel az I. Kötet 15.7 Tétel egyszerű következménye. Az idézett tétel szerint ugyanis konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és minden részsorozat határértéke megegyezik a sorozat

határértékével. Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergens sorba tetszőleges számú zárójelet iktatunk, vagyis az egymás után következő tagokból véges számú

tagot csoportosítva ezeket egyetlen taggá vonjuk össze, olyan végtelen sort kapunk, amely részletösszegeinek sorozata az eredeti sor részletösszegei sorozatának részsorozata.!

Az 1.5 Tétel divergens sorra nem alkalmazható ugyanis zárójelek beiktatásával divergens sorból konvergens sort nyerhetünk.

1.3 Példa. Tekintsük az alábbi végtelen, nem konvergens sort:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots,$$

két-két tagját zárójelbe téve az így kapott sor összege nulla:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0,$$

vagy másképpen zárójellezve, a sor összege 1:

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1.$$

1.6 Tétel. Bármely $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ végtelen sor véges számú tagját elhagyhatjuk anélkül, hogy a sor konvergens, illetve divergens tulajdonsága megváltoznék.

Bizonyítás. Legyen a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ végtelen sor utolsó elhagyott tagja az N_0 -

adik. Ekkor az 1.1 Tétel szerint, ha a sor konvergens, minden $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $N \in \mathbb{N}$, ahol $N > N_0$, hogy minden $n \geq N$ -re és $m \geq 1$ -re

$$|s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Tehát a konvergens sor véges számú tagjának elhagyása után keletkező sor is konvergens marad. Ha az eredeti sor divergens volt, akkor az 1.1 Tétel szerint van olyan $\varepsilon > 0$, hogy nem található olyan $N > N_0$, melyre a fenti egyenlőtlenség teljesül, vagyis véges számú tag elhagyása után a divergens sor továbbra is divergens marad.!

Az előzőhöz hasonlóan bizonyítható be az alábbi tétel, melynek bizonyítását az olvasóra bizzuk.

1.7 Tétel. Bármely $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ végtelen sorhoz véges számú tagot hozzáadhatunk anélkül, hogy a sor konvergens, illetve divergens tulajdonsága megváltoznék.

Konvergens sor összegét természetesen véges számú tag elhagyása, illetve beiktatása általában megváltoztathatja.

1.3 Definíció. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergens sor első n tagjának ($n \in T$) elhagyásával nyert

$$h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad (1.4)$$

konvergens sor összegét az eredeti sor n -edik maradékösszegének nevezzük.

Az 1.6 Tételből következik, hogy az (1.4) jobb oldalán álló végtelen sor, az ugynevezett maradékösszeg-sor konvergens. (Beszélünk a maradékösszeg-sorról időnként akkor is, amikor az, illetve az eredeti sor divergens). E sor m -edik részletösszege

$$h_{nm} = s_{n+m} - s_n, \quad m = 1, 2, \dots,$$

ahol s_n , illetve s_{n+m} az eredeti sor n -edik, illetve $(n+m)$ -edik részletösszege.

Mivel rögzített n mellett $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, ezért

$$h_n = \lim_{m \rightarrow \infty} h_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - s_n, \quad (1.5)$$

vagyis

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s_n + h_n. \quad (1.6)$$

1.8 Tétel. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergens sor maradékösszegeinek h_n , $n \in T$ végtelen sorozata nullsorozat.

Bizonyítás. (1.5) alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k - s_n \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0.!$$

E pont befejezéséként egy elégséges konvergenciakritériumot mutatunk meg. További fontos elégséges kritériumokat a következő pontban ismertetünk.

1.9 Tétel. (Leibniz tétele). A $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$, $a_k > 0$, $k \in T$, úgynevezett váltakozó előjelű sor konvergens, ha $a_k \geq a_{k+1}$, $k \in T$ és $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Bizonyítás. Jelentse $h_{2n-1, 2m}$ a váltakozó előjelű sor $2n-1$ -edik maradékösszegsorának $2m$ -edik részletösszegét. Így

$$\begin{aligned} h_{2n-1, 2m} &= a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} - \dots + a_{2n+2m} = \\ &= a_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) - (a_{2n+3} - a_{2n+4}) - \\ &\quad - \dots - (a_{2n+2m+1} - a_{2n+2m}) \leq a_{2n}, \end{aligned}$$

mert a zárójelekben levő kifejezések a monotonitás miatt mind nem-negatívak. Hasonlóképpen jelentse a váltakozó előjelű sor $2n-1$ -edik maradékösszegsorának $2m+1$ -edik részletösszegét $h_{2n-1, 2m+1}$.

$$\text{Így } h_{2n-1, 2m+1} = h_{2n-1, 2m} - a_{2n+2m+1} < h_{2n-1, 2m} \leq a_{2n}.$$

Ez azt jelenti, hogy akár páros, akár páratlan p -re

$$h_{2n-1, p} \leq a_{2n} \leq a_{2n-1}.$$

Ugyanugy belátható, hogy

$$|h_{2n, p}| \leq a_{2n+1} \leq a_{2n}.$$

Tehát minden $p \in T$ és $q \in T$ -re fennáll, hogy $|h_{q, p}| \leq a_q$. Minthogy

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ebből következik, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan

$N \in T$, hogy minden $q \geq N$ -re $a_q < \varepsilon$, tehát ebben az esetben fennáll,

hogy $|h_{q, p}| < \varepsilon$, vagyis az 1.1 Tétel szerint a sor konvergens.!

Az 1.9 Tételben feltételeztük, hogy a váltakozó előjelű sor nulladik tagja pozitív, azonban a tétel nyilván akkor is igaz, ha a váltakozó előjelű sor negatív taggal kezdődik. Az 1.9 Tétel feltételeinek eleget tevő sorokat Leibniz-típusúaknak szokás nevezni.

1.4 Példa. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$
végtelen sor konvergens, mivel Leibniz-típusú, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ és

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

1.5 Példa. Az $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$

végtelen sor váltakozó előjelű és a tagok abszolút értékéből álló végtelen sorozat nullsorozat. Nem teljesül azonban az $a_n \geq a_{n+1}$ monotonitási feltétel, mert $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{n+1}$, $n = 4, 5, 6, \dots$. A sor nem is konvergens,

ui. $2n$ -edik részletösszege

$$s_{2n} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}),$$

és mivel $n \rightarrow \infty$ esetén az első zárójelben álló összeg ∞ -hez, a másodikban álló összeg 2-höz tart (l. 1.2 és 1.1 Példa), $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \infty$.

A monotonitás feltétele az 1.9 Tételben azonban nem szükséges; erre mutat a következő

1.6 Példa. Az $1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} + \dots$

végtelen sorban $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$, mégis e sor konvergens, ui.

$$s_{2n} = (1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}) - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}),$$

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{3^{n+1}}, \quad \text{és}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \\ &= \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Pozitív tagú sorok

2.1 Definíció. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor pozitív tagú sor; ha bármely $k \in T$ -re $a_k \geq 0$.

(Tágabb értelemben pozitív tagú sornak nevezhető az 1.6 Tétel szerint az a sor, mely minden $k \in T$ helyett véges számú tagtól eltekintve tesz eleget a 2.1 Definíciónak.) A továbbiakban a 2.1 Definíció szerint értelmezett pozitív tagú sorokat tárgyaljuk.

2.1 Tétel. Pozitív tagú sor részletösszegei monoton növekvő sorozatot alkotnak.

Bizonyítás. $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$.

2.2 Tétel. Pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

Bizonyítás. Nyilvánvaló az, hogy ha a sor konvergens, akkor a részletösszegek sorozata korlátos. Megfordítva – az I. Kötet 16.1 Tétel szerint – ha $s_n, n \in T$ monoton növekvő sorozat (ami a 2.1 Tétel szerint fennáll) és felülről korlátos, akkor az $s_n, n \in T$ sorozat konvergens!

2.3 Tétel. Ha $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ pozitív tagú konvergens sor és $c_k \geq 0$, $k \in T$ nem negatív tagú felülről korlátos sorozat, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k$ is konvergens.

Bizonyítás. Minthogy az eredeti sor konvergens, ezért az $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $n \in T$ részletösszegek korlátos sorozatot alkotnak. Legyen a c_k , $k \in T$ felülről korlátos sorozat felső korlátja K , vagyis $c_k \leq K$ minden $k \in T$ -re. Ekkor a származtatott pozitív tagú sor n -edik részletösszege

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k a_k \leq \sum_{k=0}^n K a_k = K \sum_{k=0}^n a_k = K S_n,$$

vagyis S_n , $n \in T$ felülről korlátos sorozat, tehát a 2.2 Tétel szerint a

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k$ sor konvergens.!

2.4 Tétel. Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ pozitív tagu sor divergens és $c_k > 0$, $k \in T$ pozitív tagu, pozitív alsó korláttal rendelkező alulról korlátos sorozat, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k$ is divergens.

Bizonyítás. Minthogy az eredeti sor divergens, ezért részletösszegeinek

$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ sorozata nem korlátos. Legyen a c_k , $k \in T$ sorozat alsó korlátja $K > 0$, tehát $c_k \geq K > 0$ minden $k \in T$ -re. Ekkor a származtatott sor n -edik részletösszege

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k a_k \geq \sum_{k=0}^n K a_k = K \sum_{k=0}^n a_k = K s_n,$$

vagyis az S_n , $n \in T$ sorozat nem korlátos felülről, tehát a 2.2 Tétel

szerint a származtatott $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k$ sor divergens.!

2.5 Tétel. (Majoráns kritérium). Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$, $a'_k > 0$, $k \in T$ pozitív tagu sor konvergens és (esetleg véges számú tag kivételével) fennáll, hogy $0 \leq a_k \leq a'_k$, $k \in T$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor is konvergens.

Bizonyítás. Az 1.6 Tétel szerint a sor konvergenciája nem változik, ha azt véges számú tagjának elhagyásával vizsgáljuk. Feltehetjük tehát, hogy minden $k \in T$ -re

$$0 \leq c_k = \frac{a_k}{a'_k} \leq 1,$$

vagyis c_k , $k \in T$ felülről korlátos, így a 2.3 Tétel szerint $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a'_k =$
 $= \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergens.!

E tétel tehát a következőket jelenti: ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ pozitív tagu sorhoz

található egy olyan másik pozitív tagu sor, $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$, melynek tagjai

– véges számú tag kivételével – az előbbi sor megfelelő tagjainál nagyobbak, (azokat majorálják) s ez utóbbi sorról tudjuk, hogy konvergens, akkor a vizsgált sor is az.

2.6 Tétel. (Minoráns kritérium) Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$, $a'_k \geq 0$, $k \in T$ sor divergens és (esetleg véges számú tag kivételével) fennáll, hogy

$$a_k \geq a'_k, \quad k \in T,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor is divergens.

Bizonyítás. Ha ugyanis a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens lenne, akkor az előbbi

2.5 Tétel-ből az adódna, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ is konvergens, ami ellentmondás.!

E tétel tehát a következőket jelenti: ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ pozitív tagu sorhoz ta-

lálható egy olyan másik pozitív tagu sor $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$, melynek tagjai – véges számú tag kivételével – az előbbi sor megfelelő tagjainál kisebbek (azokat minorálják) s ez utóbbi sorról tudjuk, hogy divergens, akkor a vizsgált sor is az.

2.7 Tétel.

Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$, $a'_k > 0$, $k \in T$ sor konvergens és (esetleg véges számú tag kivételével) a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k > 0$, $k \in T$ sor tagjaira fennáll, hogy

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{a'_{k+1}}{a'_k}, \quad k \in T,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ sor is konvergens.

Bizonyítás. Az 1.6 Tétel szerint a sor konvergenciája nem változik, ha azt véges számú tagjának kivételével vizsgáljuk. A feltétel szerint mint-hogy $a'_k > 0$, $k \in T$ és $a_k > 0$, $k \in T$, a felírt egyenlőtlenség a következőképpen írható:

$$\frac{a_{k+1}}{a'_{k+1}} \leq \frac{a_k}{a'_k}.$$

Igy tehát $c_k = \frac{a_k}{a'_k}$, $k \in T$ monoton csökkenő pozitív tagú sorozat, ebből

következik, hogy felülről korlátos. A 2.3 Tétel szerint a $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ konvergens sorral együtt konvergens a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a'_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor is.!

2.8 Tétel.

Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$, $a'_k > 0$, $k \in T$ sor divergens és (esetleg véges számú tag kivételével) a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k > 0$, $k \in T$ sor tagjaira fennáll, hogy

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{a'_{k+1}}{a'_k},$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor is divergens.

Bizonyítás. Az 1.6 Tétel szerint a sor divergenciája nem változik, ha azt véges számú tagjának kivételével vizsgáljuk. A feltétel szerint mint-hogy $a'_k > 0$, $k \in T$, és $a_k > 0$, $k \in T$, a felírt egyenlőtlenség a következőképpen írható:

$$\frac{a_{k+1}}{a'_{k+1}} \geq \frac{a_k}{a'_k}.$$

Igy tehát $c_k = \frac{a_k}{a'_k}$, $k \in T$ monoton növekvő pozitív tagú sorozat. Ebből

következik, hogy alulról korlátos. A 2.4 Tétel szerint a $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ diver-

gens sorral együtt divergens a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a'_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor is.!

2.9 Tétel. (Cauchy-féle gyökkritérium). A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor konvergens (illetve divergens), ha van $q \in \mathbb{R}$, melyre (esetleg véges számú tag kivételével) fennáll, hogy

$$\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.1)$$

(illetve $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$.)

Bizonyítás. (2.1) szerint $a_k \leq q^k < 1$. A $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ sor az 1.1 Példa

szerint konvergens, tehát a 2.5 Tétel alkalmazásával a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor is konvergens. A divergenciára kimondott feltétel teljesülése esetén $a_k \geq 1$,

$k \in T$. A $\sum_{k=0}^{\infty} 1$ sor ugyancsak az 1.1 Példa szerint divergens, tehát a

2.6 Tételből következik, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor divergens.!

2.10 Következmény. Ha $a_k \geq 0$, $k \in T$, létezik a $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ és

$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ pozitív tagu sor konvergens.

Bizonyítás. A feltételből következik, hogy van pozitív $q < 1$, melyre igaz, hogy bizonyos indextől kezdve $\sqrt[k]{a_k} \leq q$. (Bármely a $(\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}, 1)$ nyílt intervallumhoz tartozó szám választható q -nak).!

2.11 Tétel. (d' Alembert-féle hányadoskritérium). A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$,

$a_k > 0$, $k \in T$ sor konvergens (illetve divergens), ha van $q \in \mathbb{R}$, melyre (esetleg véges számú tag kivételével) fennáll, hogy

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1, \quad k \in T, \quad (2.2)$$

(illetve $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, $k \in T$).

Bizonyítás A $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, $0 < q < 1$ konvergens sor két egymást követő

tagjának hányadosa $\frac{q^{k+1}}{q^k} = q$. (2.2) szerint teljesül a 2.7 Tétel fel-

tétele, tehát a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens. A $\sum_{k=0}^{\infty} 1$ divergens sor két egy-

mást követő tagjának hányadosa 1, és így ha a divergenciára kimondott

feltétel teljesül, akkor a 2.8 Tétel szerint a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor divergens.!

2.12 Következmény. Ha $a_k > 0$, $k \in T$, létezik a $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$, és

$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ pozitív tagu sor konvergens.

Bizonyítás. A feltételből következik, hogy van pozitív $q < 1$, melyre bizonyos k indextől kezdve (2.2) teljesül. (Bármely a $(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}, 1)$ nyílt intervallumbeli szám választható q -nak).!

2.1 Példa. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sorra próbáljuk alkalmazni, a gyök- illetve hányadoskritériumot, azt látjuk, hogy

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1 \text{ illetve}$$

$$\frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} = \frac{n}{n+1} < 1$$

minden n -re. Azonban, mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1, \text{ illetve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

nincsen olyan 1-nél kisebb pozitív q szám, melyre (2.1), illetve (2.2) fennállna. Az 1.2 Példában láttuk, hogy ez a sor nem konvergens.

2.13 Tétel. (Integrálkritérium). Legyen adott a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ pozitív tagu sor és tételezzük fel, hogy található olyan $f: [x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amely pozitív, monoton csökkenő és $f(x_0 + k) = a_k$, $k \in \mathbb{T}$;

ha az $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx$ improprius integrál konvergens

(divergens), akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ végtelen sor is konvergens (divergens).

Bizonyítás. Mivel az f függvény monoton csökkenő,

$$a_k = f(x_0 + k) \geq f(x) \geq f(x_0 + k + 1) = a_{k+1}, \quad (2.3)$$

$$x \in [x_0 + k, x_0 + k + 1], \quad k \in \mathbb{T}.$$

f monotonitásából következik, hogy $[x_0, +\infty)$ minden véges részintervallumán integrálható (I. II. Kötet, 25.1 Tétel). Integráljuk a (2.3) egyenlőtlenséget az $[x_0+k, x_0+k+1]$ intervallumon; az integrál monoton tulajdonsága (II. Kötet, 23.10 Tétel) alapján,

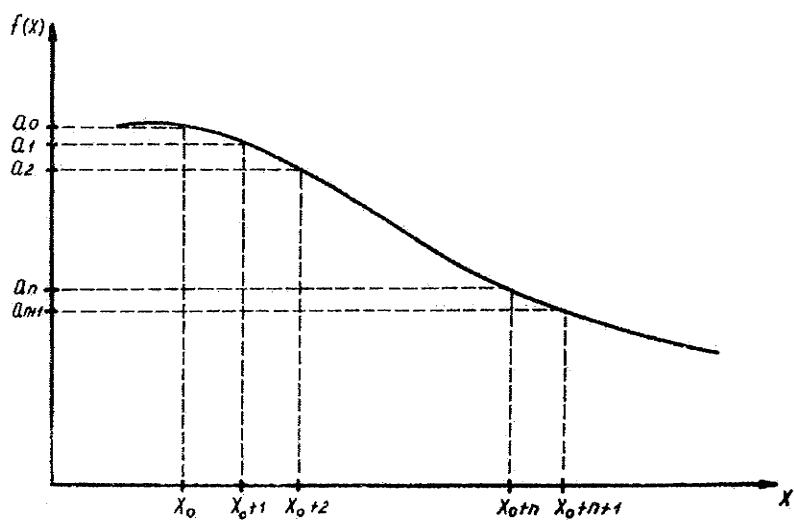
$$a_k \geq \int_{x_0+k}^{x_0+k+1} f(x) dx \geq a_{k+1}, \quad k \in T. \quad (2.4)$$

A (2.4) egyenlőtlenségeket $k = 0, 1, 2, \dots, n$ -re összeadva

$$s_n \geq \int_{x_0}^{x_0+n+1} f(x) dx \geq s_{n+1} - a_0, \quad n \in T, \quad (2.5)$$

ahol s_n a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor n -edik részletösszege (1. 2.1 ábra). Mivel az f függvény pozitív,

$$\int_{x_0}^{x_0+n+1} f(x) dx < \int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx, \quad n \in T, \quad (2.6)$$



2.1 ábra

ha ez utóbbi improprius integrál létezik. Ebben az esetben (2.5)-ből és (2.6)-ból következik, hogy a részletösszegek s_{n+1} , $n \in T$ sorozata korlátos, vagyis a sor konvergens (l. 2.2 Tétel). Ha az f függvény improprius integrálja divergens, vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{x_0 + n+1} f(x) dx = +\infty,$$

akkor (2.5) miatt még inkább $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, tehát a sor divergens.!

Megjegyezzük, hogy ha valamely végtelen sor konvergenciáját a majoráns kritériummal, vagy valamelyik ezen alapuló (gyök-, hányados-) kritériummal, illetve az integrálkritériummal sikerül igazolni, akkor a majoráló sor megfelelő maradékösszege, illetve az integrálkritériumban szereplő f függvénynek egy alkalmasan választott ponttól számított improprius integrálja majorálja a vizsgált sor megfelelő maradékösszegét. Így mód nyílik annak a hibának becslésére, melyet akkor követünk el, amikor a konvergens sor összegét a sor egy részletösszegével közelítjük.

2.2 Példa. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ sor, ahol "a" tetszőleges rögzített pozitív szám,

konvergens. Ugyanis ahányadoskritériumot (2.11 Tétel) alkalmazva az $(n+1)$ -edik és n -edik tag hányadosa kisebb, mint pl. $\frac{1}{2}$, ha $n > 2a - 1$:

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} < \frac{1}{2}.$$

2.3 Példa. Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ un. hiperharmonikus sort, ahol α

tetszőleges valós szám. Ha $\alpha \leq 0$, akkor a sor nyilván divergens, mivel a tagjaiból álló végtelen sorozat nem tart zérushoz (l. 1.2 Tétel).

Ha $0 < \alpha \leq 1$, akkor minden pozitív egész n -re $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$, vagyis a

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor a mi sorunknak minoránsa. Mivel az 1.2 Példa

szerint a harmonikus sor divergens, a 2.6 Tétel szerint a mi sorunk is divergens. Legyen most $\alpha > 1$. A konvergencia a hányadoskritériummal nem igazolható, ui. az $(n+1)$ -edik és az n -edik tag hányadosa minden n -re

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \cdot n^\alpha = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha < 1,$$

azonban, mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha = 1$, nincsen olyan 1-nél kisebb pozitív q szám, melyre (2.2) fennállna. A konvergencia ebben az esetben az integrálkritérium segítségével bizonyítható. Az $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \in [1, +\infty)$ függvény kielégíti az integrálkritériumban felsorolt feltételeket és

$$f(n) = \frac{1}{n^\alpha}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Az $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ improprius integrál konvergens ($\alpha > 1$, I. II. Kötet, 30.2

Példa), tehát a hiperharmonikus sor is konvergens. Összefoglalva: a hiperharmonikus sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\alpha > 1$.

Legyen $\alpha > 1$ és jelöljük a konvergens hiperharmonikus sor összegét, illetve n -edik részletösszegét s -sel, illetve s_n -nel. Az n -edik maradékösszeg nyilván a következőképpen becsülhető

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}},$$

így

$$0 < s - s_n < \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

3. Abszolút, illetve feltételesen konvergens sorok

3.1 Definíció. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ végtelen sort abszolút konvergensnek nevez-

zük, ha a $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ sor konvergens. E definíció sze-

rint tehát egy pozitív tagu konvergens sor egyuttal abszolút konvergens is.

3.1 Tétel.

Az abszolút konvergens sor egyuttal konvergens.

Bizonyítás. Az I. Kötet (11.6) formula szerint

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}|. \quad (3.1)$$

Az 1.1 Tétel szerint a $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ sor konvergenciájából következik, hogy adott $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{T}$, hogy minden $n \geq N$ és bármely $m \geq 1$ -re

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

A (3.1) és (3.2) egyenlőtlenségből következik, hogy ugyanakkor

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon. \quad (3.3)$$

tehát az 1.1 Tétel szerint a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor is konvergens.!

Ez a tétel teszi lehetővé azt, hogy az előző pontban közölt pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergenciakritériumot tetszőleges sor abszolút konvergenciájának és így egyuttal konvergenciájának bizonyítására felhasználhassuk.

3.2 Definíció. A konvergens, de nem abszolút konvergens sort feltételesen konvergensnek nevezzük.

3.3 Tétel. Ha az abszolút konvergens sor összege

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ és a tagok abszolútértékeiből képezett sor}$$

$$\text{összege } S = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|, \text{ akkor } |s| \leq S.$$

Bizonyítás. A részletösszegekre fennáll, hogy

$$|s_n| = |a_0 + a_1 + \dots + a_n| \leq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| = S_n.$$

De akkor nyilván

$$|s| = \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.!$$

3.3 Definíció. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor egy átrendezésének nevezzük a $\sum_{k=0}^{\infty} a_{i_k}$ végtelen sort, ahol $\{i_k : k \in \mathbb{T}\} = \mathbb{T}$ és $i_k \neq i_j$, ha $k \neq j$.

Más szóval az átrendezett sor az eredeti sor minden tagját egyszer és csak egyszer tartalmazza.

3.3 Tétel. Abszolút konvergens sor tetszőleges átrendezésével nyert sor is abszolút konvergens marad, és az átrendezett sor összege egyenlő az eredeti sor összegével.

Bizonyítás. Az abszolút konvergens sor tagjainak abszolútértékeiből alkotott sor részletösszegeinek S_n , $n \in \mathbb{N}$ végtelen sorozata monoton növekvő és a 2.2 Tétel szerint felülről korlátos. Nyilvánvaló, hogy e sorozat határértéke (az abszolútértékek sorának összege) egyben felső korlátja az átrendezett abszolútérték-sor részletösszegeinek is. A 2.2 Tétel szerint a részletösszegek sorozatának korlátossága miatt az átrendezett abszolútértéksor is konvergens, tehát az átrendezett sor is abszolút konvergens. Legyen az eredeti sor n -edik részletösszege s_n és az átrendezett sor n_1 -edik részletösszege s'_{n_1} . Válasszuk n_1 -et olyannak, hogy az átrendezett sor első n_1 tagja között az eredeti sor első n tagjának mindegyike szerepeljen (szükségképpen $n_1 \geq n$).

Ha az $s'_{n_1} - s_n$ különbséget képezzük, a fentiek szerint ebből az első n tag kiesik és így ezen különbség abszolútértéke kisebb vagy egyenlő, mint az eredeti abszolútérték-sor n -edik maradékösszege. Míthogy ez az abszolútérték-sor konvergens, az 1.8 Tétel szerint $s'_{n_1} - s_n$ nullsorozatot alkot. Ebből következik, hogy

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} s'_{n_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

A sor átrendezhetősége az abszolút konvergens sorok jellemző tulajdonsága. Ugyanis feltételesen konvergens sor átrendezése nem szükségképpen konvergens, illetve általában az átrendezett sor összege nem egyenlő az eredeti sor összegével. Éppen ezért nevezik e sorokat feltételesen konvergenseknek, mert konvergenciájuk a tagok meghatározott sorrendjén múlik. Feltételesen konvergens sor összege "annyira függ a tagok sorrendjétől", hogy érvényes a következő érdekes

3.4 Tétel. (Riemann tétele) Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor feltételesen konvergens és tetszőlegesen adott a $c \in \mathbb{R}$ szám, vagy $c = +\infty$, vagy $c = -\infty$, akkor a sor átrendezhető úgy, hogy összege c legyen.

Bizonyítás. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagot tartalmaz, mert ha bizonyos tagtól kezdve az összes tag előjele meg-
egyeznék, akkor e tagtól képezett maradékösszeg abszolút konvergens
lenne és így a véges sok tag hozzávételével nyert eredeti sor is abszolút
konvergens lenne, ellentétben a feltevessel. Feltételezhetjük, hogy a sor
tagjai között a zérus nem lép fel és jelöljük, a sor eredeti sorrendben vett
pozitív tagjait α_k , $k \in T$ -vel, negatív tagjait pedig $-\beta_k$, $k = 1, 2, \dots$ -

vel. A $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ és a $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ pozitív tagú sorok divergensek. Ha ui. pl.

$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ konvergens lenne, akkor mivel

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^p \alpha_k - \sum_{k=1}^q \beta_k,$$

vagyis

$$\sum_{k=0}^p \alpha_k = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=1}^q \beta_k,$$

és $n \rightarrow \infty$ esetén nyilván $q \rightarrow \infty$ és $p \rightarrow \infty$, ezért

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p \alpha_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k + \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^q \beta_k$$

is létezik és így a $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ sor is konvergens lenne. De ekkor a

$$\sum_{k=0}^n |a_k| = \sum_{k=0}^p \alpha_k + \sum_{k=1}^q \beta_k, \quad n \in T,$$

sorozat is konvergens, vagyis a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor abszolút konvergens lenne
ellentétben a feltevessel.

Legyen $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ tetszőlegesen adott. Ekkor van $p_1 \in T$, hogy

$$\sum_{k=0}^{p_1-1} \alpha_k \leq c < \sum_{k=0}^{p_1} \alpha_k,$$

van $q_1 \in T$, hogy

$$\sum_{k=0}^{p_1} \alpha_k - \sum_{k=1}^{q_1} \beta_k < c \leq \sum_{k=0}^{p_1} \alpha_k - \sum_{k=1}^{q_1-1} \beta_k,$$

van $p_2 \in T$, $p_2 > p_1$, hogy

$$\sum_{k=0}^{p_1} \alpha_k - \sum_{k=1}^{q_1} \beta_k + \sum_{k=p_1+1}^{p_2-1} \alpha_k \leq c < \sum_{k=0}^{p_1} \alpha_k - \sum_{k=1}^{q_1} \beta_k + \sum_{k=p_1+1}^{p_2} \alpha_k,$$

van $q_2 \in T$, $q_2 > q_1$, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p_1} \alpha_k - \sum_{k=1}^{q_1} \beta_k + \sum_{k=p_1+1}^{p_2} \alpha_k - \sum_{k=q_1+1}^{q_2} \beta_k &< c \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{p_1} \alpha_k - \sum_{k=1}^{q_1} \beta_k + \sum_{k=p_1+1}^{q_2-1} \alpha_k - \sum_{k=q_1+1}^{q_2-1} \beta_k, \end{aligned}$$

és így tovább. Megmutatjuk, hogy az eredeti sor

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \dots + \alpha_{p_1} - \beta_1 - \dots - \beta_{q_1} + \alpha_{p_1+1} + \dots + \alpha_{p_2} - \beta_{q_1+1} - \dots \\ - \beta_{q_2} + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

átrendezésének összege c . Az átrendezett sor részletösszegeinek

$$s_{p_1}, s_{p_1+q_1}, s_{p_2+q_1}, s_{p_2+q_2}, \dots \quad (3.3)$$

részsorozata egymásután következő tagjainak c -től való eltérése a konstrukció miatt rendre kisebb, mint

$$\alpha_{p_1}, \beta_{q_1}, \alpha_{p_2}, \beta_{q_2}, \dots$$

Ez azonban a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor tagjai abszolútértékének egy részsorozata, mely e sor konvergenciája miatt zérussorozat. Tehát a (3.3) sorozat c-hez tart. Azonban a (3.2) sor részletösszegei a (p_1+1) -edikről kezdve a (3.3) sorozat két egymásután következő tagja közé eső számok és így a (3.2) sor részletösszegeinek teljes sorozata c-hez tart, vagyis, a (3.2) sor összege c.

Ha $c = +\infty$, akkor mivel a $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ sor divergens, van $r_k \in T$, $r_k < r_{k+1}$, $k \in T$, indexsorozat, hogy minden $k \in T$ -re

$$\sum_{j=0}^{r_k} \alpha_j > k + \sum_{j=1}^k \beta_j,$$

vagyis

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{r_1} - \beta_1 + \alpha_{r_1+1} + \dots + \alpha_{r_2} - \beta_2 + \dots + \alpha_{r_{k-1}+1} + \dots \\ \dots + \alpha_{r_k} - \beta_k > k, k \in T.$$

Ebből az egyenlőtlenségből látható, hogy az ily módon átrendezett sor

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{r_1} - \beta_1 + \alpha_{r_1+1} + \dots + \alpha_{r_k} - \beta_k + \dots$$

divergens és összege $+\infty$.

Az előbbiekhöz hasonlóan bizonyítható az állítás akkor, ha c negatív, illetve $-\infty$!

Abszolút konvergens sor rendelkezik a véges összegek néhány elemi tulajdonságával; például tagjai felcserélhetők, vagy csoportosíthatók anélkül, hogy a konvergencia ténye, vagy a sor összege megváltoznék. Már az 1.3 Tételben láttuk, hogy két konvergens sor tagonként kivonható, illetve összeadható, s az eredményül kapott sor összege megegyezik a két sor összegeinek különbségével, illetőleg összegével. Más a helyzet a sorok szorzásánál. Ki fogjuk mutatni, hogy két abszolút sor "szorzata" is abszolút konvergens. (E tétel megfelelője két konvergens sorra már nem érvényes).

3.4 Definíció. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ és a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sorok tagjaiból képezett

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (3.4)$$

sor a két sor Cauchy-féle szorzatának nevezzük.

3.5 Tétel. Két abszolút konvergens sor Cauchy-szorzata zárójelek nélkül is abszolút konvergens és a szorzatsor összege megegyezik a két sor összegének szorzatával.

Bizonyítás. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ abszolút konvergens sor összes tagjának a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

abszolút konvergens sor összes tagjával képzett szorzataiból a következő végtelen mátrix alkotható:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \dots & a_0 b_n & \dots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n & \dots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n b_0 & a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{array} \quad (3.5)$$

A két sor szorzat-sorának természetes módon az a végtelen sor tekinthető, melynek n-edik részletösszege a két sor n-edik részletösszegének szorzata.

Legyen

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad n \in \mathbb{T},$$

és jelöljük az első sor összegét A-val, a másodikét B-vel. Az I. Kötet, 15.5 Tételből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n B_n = AB,$$

vagyis az

$$\begin{aligned}
 & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_n + \dots \\
 & \dots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \dots + a_n b_1 + a_n b_0) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

végteles sor, melynek n -edik részletösszege $A_n B_n$, konvergens és összege AB . A (3.6) sorban a zárójelek elhagyhatók. Ugyanis az

$$\begin{aligned}
 & a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0 + \dots + a_0 b_n + a_1 b_n + \dots + a_n b_n + \\
 & + a_n b_{n-1} + \dots + a_n b_1 + a_n b_0 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

végteles sor

$$\begin{aligned}
 & a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0 + \dots + a_0 b_n + a_1 b_n + \dots + a_n b_n + \\
 & + a_n b_{n-1} + \dots + a_n b_{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n,
 \end{aligned}$$

részletösszege például a (3.6) sor $A_n B_n$ részletösszegétől az

$$a_n (b_{n-k-1} + b_{n-k-2} + \dots + b_1 + b_0)$$

tagban tér el és ez az eltérés zérushoz tart, ha $n \rightarrow \infty$, mivel az 1.2 Tétel szerint $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és a zárójelben álló kifejezés, a konvergens

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sor részletösszege minden n -re és k -ra korlátos. A (3.7) sor

tehát konvergens és összege AB . Az előbbi gondolatmenetet a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \text{ konvergens sorokra alkalmazva adódik, hogy a (3.7)}$$

sor abszolút konvergens.

A (3.4) Cauchy-szorzat a (3.7) sor azon átrendezése, mely úgy keletkezik, hogy a (3.5) mátrix bal felső sarkából kiindulva az elemeken rendre "ész-szakkelet-délnyugat irányban" haladunk végig. Miután a 3.3 Tétel szerint a (3.7) sor minden átrendezése abszolút konvergens és összege megegyezik (3.7) összegével, a tett feltevések mellett a (3.4) Cauchy-szorzat (zárójelek nélkül is) abszolút konvergens és összege AB !

3.1 Példa. Képezzük az alábbi abszolút konvergens sorok (lásd 2.2 Példa) Cauchy-szorzatát és állapítsuk meg a szorzatsor összegét.

Legyen

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{és}$$

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!},$$

keresendő $S = A \cdot B$; alkalmazva a 3.5 Tételt, a szorzatsor n -edik tagja

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(n-k)! k!} = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \\ &= \frac{1}{n!} (1-1)^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Mivel $c_0 = 1$, $S = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = 1$.

3.2 Példa. Az $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$, $|q| < 1$ geometriai sor (lásd 1.1

Példa) abszolút konvergens. Önmagával képzett Cauchy-szorzatára

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)q^k, \quad |q| < 1.$$

FÜGGVÉNYSOROK

4. Egyenletes és egyenlőtlen konvergencia

Ha az $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, (egyváltozós valós) függvények D értelmezési tartománya közös, akkor beszélhetünk az f_n , $n \in T$, végtesen függvénytartományról ugyanabban az értelemben, ahogyan a végtelen numerikus sorozatot értelmeztük, azzal a különbséggel, hogy a tagok most nem számok, hanem az f_n függvények. Természetesen, ha az f_n függvényeket az értelmezési tartomány valamely $x \in D$ helyén tekintjük, az $f_n(x)$, $n \in T$, függvényértékek végtelen numerikus sorozatot alkotnak. A végtelen függvényssorozat konvergenciájának értelmezése éppen ennek figyelembevételével történik.

4.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in T$, függvényssorozat a $H \subset D$ halmazon konvergens, és határfüggvénye az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, jelben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f,$$

ha minden $x \in H$ -ra az $f_n(x)$, $n \in T$ numerikus végtelen sorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$,

Lehetséges az, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ a H halmazon, de a konvergencia a H halmaz különböző pontjaiban nem "egyformán gyors", nem "egyenletes". Ennek szemléltetésére alkalmas a következő

4.1 Példa. Vizsgáljuk az

$$f_n(x) = \frac{n x}{n x + 1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

függvényssorozat konvergenciáját a $[0, +\infty)$ közös értelmezési tartományon. A függvényssorozat $[0, +\infty)$ -en konvergens, ui.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n x}{n x + 1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \frac{1}{n}} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

A függvénysorozat tagjainak a határfüggvénytől való eltérése tetszőleges $x \in [0, +\infty)$ helyen bármely $\varepsilon > 0$ -nál kisebbé tehető. Számítsuk ki az ε -hoz tartozó küszöbindexet. Ha

$$1 - \frac{nx}{nx+1} < \varepsilon, \quad (4.1)$$

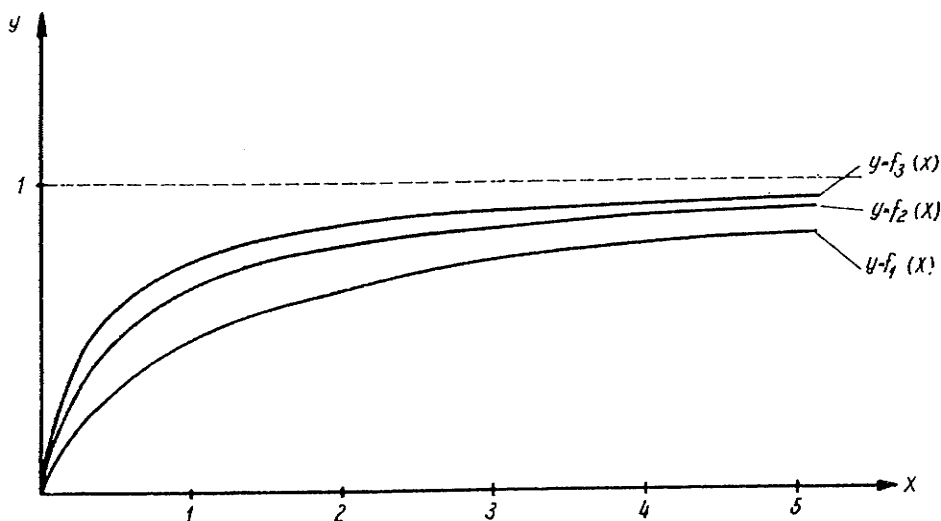
akkor

$$nx+1 - nx < \varepsilon nx + \varepsilon,$$

ahonnan

$$\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon x} < n. \quad (4.2)$$

(4.1) nyilván akkor és csak akkor áll fenn, ha (4.2) teljesül. A küszöbindex $N = \left\lceil \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon x} \right\rceil + 1$. Az N küszöbindex tehát nemcsak ε -tól, hanem x -től is függ. Bármilyen nagy n indexet választunk is, ehhez lehet olyan kis x -et találni, hogy (4.2) és ennek következtében (4.1) ne teljesüljön. Adott ε -hoz a $[0, \infty)$ intervallum minden x helyére egyszerre érvényes N küszöbindex nem található, vagyis a konvergencia az értelmezési tartományon nem egyenletes. (Lásd 4.1 ábra).



4.1 ábra

4.2 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ függvénysorozat a $H \subset D$ halmazon egyenletesen konvergál az f határ-függvényhez, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $(x$ -től független) N küszöbindex, hogy bármely $n \geq N$ -re

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

minden $x \in H$ -ra.

E definíció szemléltetésére alkalmas a

4.2 Példa. Tekintsük az

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

függvénysorozatot, azt állítjuk, hogy a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban egyenletesen konvergál zérushoz. Nyilvánvaló, hogy minden x -re

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+n^2 x^2} = 0.$$

Minden $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan küszöbindex, hogy ettől az indextől kezdve a függvénysorozat tagjainak a határ-függvénytől való eltérése ε -nál kisebb ($x \geq 0$ -ra szorítkozunk, mivel minden f_n függvény páratlan.) Ugyanis

$$0 \leq \frac{x}{1+n^2 x^2} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n x}{1+n^2 x^2}.$$

Felhasználva azt, hogy

$$(1 - nx)^2 \geq 0$$

$$1 - 2nx + n^2 x^2 \geq 0$$

$$1 + n^2 x^2 \geq 2nx,$$

kapjuk:

$$\frac{1}{2n} \cdot \frac{2n x}{1+n^2 x^2} \leq \frac{1}{2n}.$$

Ezek szerint, ha $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, vagyis $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, akkor $\left| \frac{x}{1+n^2 x^2} \right| < \varepsilon$,

minden $x \in \mathbb{R}$ -re. Tehát az adott ε -hoz x -től független N

küszöbindex határozható meg, és pedig

$$N = \left[\frac{1}{2 \varepsilon} \right] + 1.$$

Igy a vizsgált függvénysorozat a $(-\infty, \infty)$ intervallumon egyenletesen konvergens.

4.1 Tétel.

(Cauchy-féle kritérium). Az $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvénysorozat

a $H \subset D$ halmazon akkor és csak akkor egyenletesen konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan x -től független N küszöbindex, hogy bármely $n, m \geq N$ -re

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (4.3)$$

minden $x \in H$ -ra.

Bizonyítás. A (4.3) feltétel szükségessége ugyanugy adódik, mint az I. Kötet, 16.3 Tétel bizonyításában. Hasonlóan kapjuk, hogy ha a (4.3) feltétel teljesül, akkor minden $x \in H$ -ra létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, vagyis

az $f_n, n \in T$ függvénysorozat H -n az f függvényhez konvergál. Azt kell még belátnunk, hogy a konvergencia egyenletes. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott; $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ -hoz található $N \in T$, hogy minden $x \in H$ -ra és $m, n \geq N$ -re

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)$, ezért az előző egyenlőtlenségből kapjuk, hogy minden $x \in H$ -ra

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ha $n > N$.

Egyenletesen konvergens függvénysorozatokra az előzőek felhasználásával könnyen bizonyíthatóak az alábbiak (a bizonyítást az olvasóra bizzuk).

4.2 Tétel.

Ha $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, n \in T$, illetve

$$g_n : D \rightarrow \mathbb{R}, n \in T \text{ a}$$

$H \subset D$ halmazon egyenletesen konvergál az

$$f : H \rightarrow \mathbb{R}, \text{ illetve}$$

$$g : H \rightarrow \mathbb{R}, \text{ függvényhez,}$$

akkor

a) $f_n \pm g_n$, $n \in T$ is egyenletesen konvergál az $f \pm g$ függvényhez;

b) $f_n g_n$, $n \in T$ is egyenletesen konvergál az $f g$ függvényhez;

c) ha minden $x \in H$ -ra

$$|g_n(x)| \geq \alpha > 0, \quad n \in T, \text{ akkor}$$

$$\frac{f_n}{g_n}, \quad n \in T \text{ is egyenletesen konvergál az}$$

$$\frac{f}{g} \text{ függvényhez.}$$

4.3 Tétel.

Folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye is folytonos.

Bizonyítás. Legyen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in T$ egyenletesen konvergens függvény-sorozat a $H \subset D$ halmazon és $f_n \in C_H^0$, $n \in T$. Minden $n \in T$ -hez, $x \in H$ -hoz és $\varepsilon > 0$ -hoz van $K_{x, \delta}$ környezet, hogy minden $x' \in K_{x, \delta} \cap H$ -ra

$$|f_n(x') - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.4)$$

Az egyenletes konvergencia 4.2 Definíciója szerint $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ -hoz található olyan $N \in T$, hogy bármely $n \geq N$ -re fennáll az

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.5)$$

és az

$$|f_n(x') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.6)$$

egyenlőtlenség, ahol f a sorozat határfüggvénye.

(4.4), (4.5), és (4.6) felhasználásával

$$\begin{aligned} & |f(x') - f(x)| = \\ & = |f(x') - f_n(x') + f_n(x') - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \leq \\ & \leq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \\ & < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ha $x' \in K_{x, \sigma} \cap H$, vagyis $f \in C_H^0$!

Ha az $a_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n=0, 1, 2, \dots$, (egyváltozós valós) függvények D értelmezési tartománya közös, akkor beszélhetünk a belőlük alkotott

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (4.7)$$

függvénysorról ugyanabban az értelemben, ahogyan a végtelen numerikus sor értelmeztük (lásd 1.1 Definíció). A (4.7) sor tagjai az a_n függvények.

Ha az a_n függvényeket az értelmezési tartomány, valamely $x \in D$ helyén tekintjük, a függvényértékek

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$$

végtelen numerikus sorát kapjuk. A (4.7) sor részletösszegeit a numerikus sorok esetével analóg módon értelmezzük. A (4.7) sort a $H \subset D$ halmazon konvergensenek, illetve egyenletesen konvergensenek nevezzük, ha a részletösszegek függvénysorozata konvergens, illetve egyenletesen konvergens. A részletösszegek sorozatának határfüggvényét a (4.7) sor összegének nevezzük. Az 1.3 Definícióval analóg módon értelmezzük konvergens függvénysor maradékösszegeit.

A 4.1 Tételből azonnal következik az 1.1 Tétel analógiájára a

4.4 Tétel. A (4.7) függvénysor akkor és csak akkor egyenletesen konvergens a $H \subset D$ halmazon, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $N \in \mathbb{T}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ és $m \geq 1$ -re

$$|a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| < \varepsilon \quad \text{minden } x \in H\text{-ra.}$$

Megadjuk függvénysorok egyenletes konvergenciájának egy gyakran felhasználható, elégséges kritériumát.

4.5 Tétel. (Weierstrass-kritérium). Ha a (4.7) függvénysorra fennáll, hogy $|a_k(x)| \leq c_k$, $k \in \mathbb{T}$, $x \in H \subset D$ -re tovább-

bá a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ pozitív tagú numerikus sor konvergens,

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ sor abszolút és egyenletesen konvergens a H halmazon.

Bizonyítás. Minden $n \in T$ -re és $m = 1, 2, \dots$ esetén

$$\begin{aligned} & |a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| \leq \\ & \leq |a_{n+1}(x)| + |a_{n+2}(x)| + \dots + |a_{n+m}(x)| \leq \\ & \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}, \quad x \in H. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Az 1.1 Tétel szerint azonban a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ numerikus sor konvergenciája miatt adott $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan N , hogy minden $n \geq N$ -re és $m = 1, 2, \dots$ -re

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m} < \varepsilon \quad (4.9)$$

legyen. A (4.8) és (4.9) egyenlőtlenségekből a 4.4 Tétel alapján állítá-sunk következik.!

A Weierstrass-kritérium alkalmazása látható az alábbi példában.

4.3 Példa. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ függvénysor egyenletesen konvergens a

$[-h, h]$ zárt intervallumban, feltéve, hogy $0 < h < 1$. Ugyanis a kérdéses függvénysor majorizálható egy konvergens geometriai sorral:

$$\left| \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{h^n}{n} \leq h^n, \quad x \in [-h, h],$$

ahol a $\sum_{n=1}^{\infty} h^n$ geometriai sor $|h| < 1$ miatt konvergens.

4.6 Tétel. Folytonos függvények egyenletesen konvergens sorának összege is folytonos függvény.

Bizonyítás. Ha a sor tagjai folytonosak, akkor a részletösszegek is folytonosak, tehát a 4.3 Tétel alapján a részletösszegek sorozatának határ-függvénye, vagyis a sor összege folytonos.!

5. Függvénysor tagonkénti differenciálása és integrálása

5.1 Tétel. Legyen $f_n \in C^1_{(a,b)}$, $n \in T$ és az f_n , $n \in T$ függvénysorozat konvergens, az f'_n , $n \in T$ derivált függvénysorozat pedig egyenletesen konvergens az (a, b) intervallumon; akkor

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in C^1_{(a,b)}$$

és

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad x \in (a, b). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Vezessük be a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = g \quad (5.1)$$

jelölést. A Lagrange-féle középértéktétel (II. Kötet, 15.4 Tétel) felhasználásával minden $x \in (a, b)$, $x + \Delta x \in (a, b)$ -ra és $n \in T$ -re

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} - g(x) \right| &= \left| f'_n(\eta_n) - g(x) \right| = \\ &= \left| f'_n(\eta_n) - g(\eta_n) + g(\eta_n) - g(x) \right| \leq \\ &\leq \left| f'_n(\eta_n) - g(\eta_n) \right| + \left| g(\eta_n) - g(x) \right|, \end{aligned} \quad (5.2)$$

ahol $\eta_n \in (x, x + \Delta x)$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Mivel feltételünk szerint f'_n , $n \in T$ egyenletesen konvergál (a, b) -n a g függvényhez, a 4.2 Definíció szerint létezik olyan $N \in T$, hogy bármely $n \geq N$ -re és minden $\eta_n \in (a, b)$ -re fennáll az

$$\left| f'_n(\eta_n) - g(\eta_n) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.3)$$

egyenlőtlenség.

A 4.3 Tétel szerint a g függvény is folytonos (a, b) -n. Így tehát találhatunk az előbb adott $\varepsilon > 0$ -hoz olyan $\delta > 0$ -t, hogy

$$|g(\eta_n) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.4)$$

fennálljon akkor, ha $|\eta_n - x| < \delta$. Következésképp, ha Δx -et úgy választjuk, hogy $|\Delta x| < \delta$ legyen, akkor figyelembe véve az $\eta_n \in (x, x + \Delta x)$ -et, (5.2)-ből (5.3) és (5.4) felhasználásával

$$\left| \frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} - g(x) \right| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (5.5)$$

adódik, ha $|\Delta x| < \delta$ és $n \geq N$. (5.5)-ből a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - g(x) \right| \leq \varepsilon, \quad (5.6)$$

ha $|\Delta x| \leq \delta$. Ebből következik, hogy

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = g(x), \quad x \in (a, b) \quad .! \quad (5.7)$$

5.2 Tétel. Ha $a_k \in C^1_{(a, b)}$, $k \in T$ és a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ függvény-

sor konvergens, az ennek tagonkénti deriválásával képezett $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k(x)$ függvénysor pedig egyenletesen konvergens az (a, b) intervallumon, akkor az eredeti sor összegfüggvénye folytonosan differenciálható és a tagonkénti deriválással képezett sor összege megegyezik az eredeti függvénysor összegének differenciálhányadosával.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 5.1 Tételt a függvénysor részletösszegeinek sorozatára.!

Megjegyezzük, hogy az 5.1 és 5.2 Tételek ismételt alkalmazásával könnyen adódnak a határfüggvény, illetve az összegfüggvény magasabb rendben való deriválhatóságára és a magasabbrendű deriváltak kiszámítására vonatkozó megfelelő tételek.

5.3 Tétel.

Ha az $f_n \in C^0_{(a,b)}$, $n \in T$ függvénysorozat a véges (a,b) intervallumon egyenletesen konvergál az f függvényhez és $\alpha \in (a,b)$, akkor az

$$\int_{\alpha}^x f_n(t) dt, \quad n \in T$$

integrálfüggvénysorozat is egyenletesen konvergál az (a,b) intervallumon az

$$\int_{\alpha}^x f(t) dt \text{ függvényhez,}$$

vagyis

$$\int_{\alpha}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^x f_n(t) dt$$

egyenletesen.

Bizonyítás. A 4.3 Tétel szerint f_n , $n \in T$ egyenletes konvergenciája következtében f folytonos (a,b) -n. Bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $N \in T$, hogy bármely $n \geq N$ -re

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad t \in (a,b). \quad (5.8)$$

A II. Kötet 23.10 Tétel szerint (5.8) -ből következik, hogy minden $x \in (a,b)$ -re

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^x f_n(t) dt - \int_{\alpha}^x f(t) dt \right| &= \\ &= \left| \int_{\alpha}^x [f_n(t) - f(t)] dt \right| \leq \\ &\leq \int_{\alpha}^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{b-a} |x - \alpha| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (5.9)$$

ha $n \geq N$!

5.4 Tétel.

Ha $a_k \in C^0_{(a,b)}$, a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ függvénysor egyenletesen konvergál az $s(x)$ összegfüggvényhez a véges (a,b) intervallumon és $\alpha \in (a,b)$, akkor a tagonkénti integrálással nyert sor is egyenletesen konvergál (a,b) -n az

$$\int_{\alpha}^x s(t) dt \text{ függvényhez, tehát}$$

$$\int_{\alpha}^x s(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\alpha}^x a_k(t) dt, \quad x \in (a,b).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 5.3 Tételt az adott függvénysor részletösszegeiből álló sorozatra.!

Megjegyezzük, hogy az 5.3, illetve 5.4 Tétel akkor is érvényben marad, ha $f_n \in C^0_{(a,b)}$, illetve $a_k \in C^0_{(a,b)}$, helyett az f_n , illetve a_k függvényekről csak annyit teszünk fel, hogy korlátosak és integrálhatók (lásd [3] I. 670-673 o.).

5.1 Példa. Az 1.1 Példa szerint

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k, \quad x \in (-1,1), \quad (5.10)$$

azonban könnyen látható, hogy a konvergencia a $(-1,1)$ intervallumon nem egyenletes. Ha viszont $0 < h < 1$ tetszőlegesen adott, az (5.10) sor a $(-h,h)$ intervallumon már egyenletesen konvergens, mivel $x \in (-h,h)$ esetén $|-x|^k \leq h^k$, $k \in \mathbb{N}$, és a Weierstrass-kritérium (4.5 Tétel) a $\sum_{k=0}^{\infty} h^k$ majoráns numerikus sorral alkalmazható. Az 5.4 Tétel alapján

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(-x)^{k+1}}{k+1},$$

vagyis

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}, \quad x \in (-1,1), \quad (5.11)$$

és az (5.11) sor konvergenciája minden $0 < h < 1$ -re a $(-h,h)$ intervallumon egyenletes.

HATVÁNYSOROK

6. Hatványsor konvergenciatartománya

Különösen fontos függvénysorok azok, amelyeknek tagjai pozitív egész kitevős hatványfüggvények. Az egész kitevős hatványfüggvények értékei ugyanis egyszerű aritmetikai műveletekkel kiszámíthatók. Ha sikerül bonyolultabb függvényeket hatványfüggvények szerint haladó "hatványsorok" segítségével előállítani, akkor lehetőség nyílik a bonyolultabb függvények értékeinek aritmetikai úton való kiszámítására.

6.1 Definíció. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (6.1)$$

alakú függvénysort, ahol $c_k \in \mathbb{R}$ állandó, $k \in \mathbb{T}$, hatványsornak nevezzük. c_k a hatványsor k -edik (vagy k -adfokú) tagjának együtthatója.

Megjegyezzük, hogy a $c_k x^k$ függvényt akkor is a (6.1) hatványsor k -edik tagjának nevezzük, ha $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}, c_k$ együtthatók között nullák is vannak.

6.1 Segédétel. Ha a (6.1) hatványsor $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \neq 0$, helyen konvergens, akkor minden olyan x helyen abszolút konvergens, melyre $|x| < |\bar{x}|$.

Bizonyítás. Mivel a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \bar{x}^k$ sor konvergens, az 1.2 Tétel szerint

$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k \bar{x}^k = 0$, vagyis a $c_k \bar{x}^{-k}$, $k \in \mathbb{T}$ sorozat korlátos, van $M > 0$, hogy

$|c_k \bar{x}^{-k}| < M$, $k \in \mathbb{T}$. Legyen $|x| < |\bar{x}|$, akkor

$$|c_k x^k| = |c_k \bar{x}^{-k} \left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^k| \leq M \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^k. \quad (6.2)$$

Azonban $\left| \frac{x}{-x} \right| < 1$, tehát a

$$\sum_{k=0}^{\infty} M \cdot \left| \frac{x}{-x} \right|^k$$

geometriai sor konvergens és (6.2) miatt a $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$ sor majoráns sora.

A majoráns kritériumból (2.5 Tétel) következik az állítás.!

A 6.1 Segédtétel közvetlen következménye a

6.2 Segédtétel. Ha a (6.1) hatványsor az $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ helyen divergens, akkor minden olyan x helyen divergens, melyre

$$|x| > |\tilde{x}|.$$

Nyilvánvaló, hogy a (6.1) hatványsor mindig konvergens az $x = 0$ helyen és összege itt c_0 . Lehetséges, hogy a hatványsor máshol nem is konvergens.

6.1. Példa. Tekintsük a $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$ hatványsort. E sor $x \neq 0$ esetén di-

vergens, ugyanis bármilyen kicsi is $|x|$; ha k már elég nagy, $k|x| > 1$, és így $(kx)^k$ nem tart zérushoz $k \rightarrow \infty$ esetén. Nem teljesül tehát a konvergencia szükséges feltétele (1.2 Tétel).

6.3 Tétel. A (6.1) hatványsor konvergenciatartományára a következő három egymást kizáró, lehetséges eset egyike érvényes:

a) $x = 0$ -ban abszolút konvergens,
 $x \neq 0$ esetén divergens;

b) van $r > 0$ szám, hogy $|x| < r$ esetén abszolút konvergens, $|x| > r$ esetén divergens;

c) minden $x \in \mathbb{R}$ -re abszolút konvergens.

Bizonyítás. Ha azon számok halmaza, melyekre (6.1) konvergens, felülről korlátos, jelöljük a legkisebb felső korlátot r -rel. Ha e halmaz felülről nem korlátos, legyen $r = +\infty$. Ha $r = 0$ és $x \neq 0$, akkor van

$0 < \tilde{x} < |x|$, hogy $\tilde{x}$ -ban (6.1) divergens, de akkor a 6.2 Segédtétel szerint az x helyen is divergens, tehát az a) eset áll fenn. Ha $r > 0$ (esetleg $r = +\infty$) és $|x| < r$, akkor van $|x| < \tilde{x} < r$, hogy $\tilde{x}$ -ban (6.1) konvergens; de akkor a 6.1 Segédtétel szerint x -ben is abszolút konvergens. Ha $r > 0$ véges és $|x| > r$, akkor van $r < \tilde{x} < |x|$, hogy $\tilde{x}$ -ban (6.1) divergens; de akkor a 6.2 Segédtétel szerint x -ben is divergens.!

A 6.3 Tételben szereplő r számot (0 -t, illetve $+\infty$ -t) a (6.1) hatványsor konvergencia sugarának, a $(-r, r)$ (illetve a c) esetben a $(-\infty, +\infty)$ nyílt intervallumot a hatványsor konvergencia intervallumának nevezzük. Esetenként külön vizsgálatot igényel, hogy a hatványsor konvergencia-e a konvergencia intervallum végpontjaiban. Ilyen vizsgálatokkal e jegyzetben nem foglalkozunk.

Adott hatványsor konvergencia sugarának meghatározására vonatkozik a

6.4 Tétel. (Cauchy-Hadamard-tétel). A (6.1) hatványsor konvergencia sugara

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}, \quad (6.3)$$

ahol $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ az $\sqrt[n]{|c_n|}$, $n = 1, 2, \dots$ sorozat limes superiorja (lásd I. Kötet, 17.3 Definíció). A (6.3) formula úgy értendő, hogy ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}, \text{ akkor } r = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}.$$

Bizonyítás. Ha (6.3)-ban $r > 0$ és $|x| < r$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|x|}{r} < 1.$$

Legyen $\frac{|x|}{r} < q < 1$; az I. Kötet, 17.4 Tétel szerint véges számú kivételtől eltekintve $\sqrt[n]{|c_n x^n|} < q < 1$, vagyis a Cauchy-féle gyökkritérium (2.9 Tétel) szerint a (6.1) sor x -ben abszolút konvergens. Ha (6.3)-ban $r < +\infty$ és $|x| > r$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|x|}{r} > 1$$

($r = 0$ esetén $\frac{|x|}{r}$ -et $+\infty$ -nek tekintjük.) Legyen $1 < q < \frac{|x|}{r}$; az I. Kötet, 17.4 Tétel szerint végtelen sok n -re

$\sqrt[n]{|c_n x^n|} > q > 1$, vagyis $|c_n x^n| > q^n > 1$. Tehát $n \rightarrow \infty$ esetén a (6.1) sor tagjai nem tartanak zérushoz, így e sor ezen x helyen divergens.!

6.2 Példa. Legyen $\varrho > 0$ állandó. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\varrho} \right)^n$$

hatványsor konvergenciasugara az előző tétel alapján

$$r = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\varrho^n}} \right)^{-1} = \varrho$$

összhangban azzal, hogy ez geometriai sor, mely $\left| \frac{x}{\varrho} \right| < 1$, vagyis $|x| < \varrho$ esetén konvergens.

6.5 Tétel. Legyen a (6.1) hatványsor konvergencia sugara $r > 0$ és $0 < \varrho < r$ tetszőlegesen adott; (6.1) a $(-\varrho, \varrho)$ intervallumban egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. A (6.1) sor az $x = \varrho$ helyen abszolút konvergens. Mivel $|x| < \varrho$ -ből $|c_k x^k| \leq |c_k \varrho^k| = |c_k| \varrho^k$ következik, állításunk a Weierstrass-kritériumból (4.5 Tétel) adódik.!

6.6 Tétel. Hatványsor a konvergencia intervallum minden valódi belső részintervallumán tagonként integrálható.

Bizonyítás. Az állítás a 6.5 és 5.4 Tétel közvetlen következménye.!

6.7 Tétel. A (6.1) hatványsor összege a konvergencia intervallum minden belső pontjában végtelen sokszor differenciálható és az n -edik deriváltat ($n = 1, 2, \dots$) a hatványsor n -szeres tagonkénti deriválásával lehet kiszámítani.

Bizonyítás. Legyen a hatványsor konvergencia sugara $r > 0$. Képezzük a (6.1) sor formális tagonkénti deriválásával nyert

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k, \quad x \neq 0,$$

derivált hatványsort. A derivált sor konvergencia sugara is r , ugyanis

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{r}.$$

(Az, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$, könnyen belátható a Bernoulli-

l'Hospital szabály segítségével, II. Kötet, 16.3 Tétel). Legyen $x \in (-r, r)$, akkor van $0 < \varrho < r$, hogy $x \in (-\varrho, \varrho)$ is fennáll. A 6.5 Tétel szerint a derivált sor a $(-\varrho, \varrho)$ intervallumon egyenletesen konvergens, tehát

az egy szeri tagonkénti differenciálhatóságra vonatkozó állításunk az 5.2 Tételből azonnal következik. A magasabbrendben való tagonkénti differenciálhatóságra vonatkozó állítás matematikai indukcióval könnyen igazolható.!

A

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \quad (6.4)$$

1,2 (végtelen sor, ahol $a \in \mathbb{R}$ állandó, $(x-y)$ hatványai szerint haladó hatványsornak nevezzük. A $t = x - a$ új változó bevezetésével látható, hogy a (6.4) hatványsorra e pont összes állítása értelemszerűen érvényes azzal a különbséggel, hogy ha a (6.4) sor konvergencia sugara r , akkor konvergencia intervalluma az $(a-r, a+r)$ intervallum.

7. Taylor-sorok

Ebben a pontban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan lehet függvényeket konvergens hatványsorok segítségével előállítani. Láttuk azt, (II. Kötet, 18.2 Definíció és 18.1 Tétel), hogy ha az f függvény az " a " helyen n -szer differenciálható, akkor képezhető a függvény " a " helyhez tartozó n -edfoku Taylor polinomja és ez az egyetlen n -edfoku polinom, mely a -ban a függvényt legalább n -edrendben érinti, ez simula legjobban a függvényhez az n -edfoku polinomok közül a -ban. Ha a függvény az " a " pontban akárhányszor differenciálható, akkor minden $n \in \mathbb{T}$ -re beszélhetünk az a -beli Taylor-polinomról. E polinomok egy $(x-a)$ hatványai szerint haladó hatványsor részletösszegei. Várható, hogy éppen ez a hatványsor van a függvénnyel az " a " pontban, illetve annak egy környezetében a legszorosabb kapcsolatban.

7.1 Definíció.

Legyen az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $a \in D$ pontban végtelen sokszor differenciálható; az

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (7.1)$$

hatványsort f " a " ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük. Ha $a = 0$, a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (7.2)$$

Taylor-sort f Maclaurin-sorának nevezzük.

Természetesen abból, hogy egy függvény valamely " a " helyhez tartozó Taylor-sorát fel lehet írni, nem következik az, hogy e sor $x \neq a$ -ra is konvergens és előállítja a függvényt. (Az, hogy a (7.1) Taylor-sor az

$x = a$ helyen konvergens és összege $f(a)$, nyilvánvaló). Érvényes azonban a függvények hatványsorba fejtésének egyértelműségére vonatkozó, következő

7.1 Tétel.

Ha az f függvényt az " a " pont valamely K_a környezeté-

ben a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ hatványsor előállítja, vagyis e sor K_a -ban konvergens és

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k, \quad x \in K_a, \quad (7.3)$$

akkor e sor f -nek a -beli Taylor-sora, vagyis

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Bizonyítás. A feltételekből a 6.7 Tétel alapján következik, hogy f a K_a intervallumban akárhányszor differenciálható és a (7.3) jobb oldalán álló sor tagonként akárhányszor differenciálható. Ezek szerint

$$f^{(n)}(x) = n! c_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k k(k-1)\dots(k-n+1)(x-a)^{k-n}, \quad x \in K_a, \quad n \in \mathbb{N},$$

ahonnan

$$f^{(n)}(a) = n! c_n$$

következik.!

7.2 Definíció.

Azt mondjuk, hogy az f függvény az (a, b) nyílt intervallumban analitikus, ha van olyan konvergens hatványsor, mely f -et ebben az intervallumban előállítja, vagyis, ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k, \quad x \in (a, b).$$

Nyilvánvaló, hogy ha $f(a, b)$ -ben analitikus, akkor minden $x \in (a, b)$ helyen akárhányszor folytonosan differenciálható, vagyis $f \in C^{\infty}(a, b)$.

Példát lehet mutatni olyan függvényre, amely egy egész intervallumban végtelen sokszor differenciálható, Taylor-sora azonban nem konvergens. Az is lehetséges azonban, hogy valamely függvény Taylor sora egy intervallumban konvergens de a sor nem az adott függvényt, hanem egy másik függvényt állít elő. Erre az esetre vonatkozik a következő Cauchy-tól származó

7.1 Példa. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

E függvény nyilvánvalóan folytonos az $x = 0$ helyen is. Megmutatjuk, hogy a függvény az $x = 0$ helyen akárhányszor differenciálható és $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{T}$. A függvény minden $x \neq 0$ helyen nyilván differenciálható és az $u = -\frac{1}{x^2}$ jelöléssel

$$f'(x) = u' e^u$$

$$f''(x) = (u'^2 + u'') e^u, \text{ stb. } x \neq 0.$$

u deriváltjai $\frac{1}{x}$ egész kitevős hatványainak állandósorozói. Ezek szerint

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(-\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0, \quad n \in \mathbb{T},$$

ahol p_n polinom. A $t = \frac{1}{x}$ jelöléssel

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} p_n(t) e^{-t^2} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{p_n(t)}{e^{t^2}} = 0, \quad n \in \mathbb{T}, \quad (7.5)$$

mivel e^{t^2} erősebben tart végtelenhez, mint t bármilyen polinomja (lásd II. Kötet, 16.3 Példa). A II. Kötet, 15.5 Következmény alapján (7.5) -ből adódik, hogy $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{T}$. Ezek szerint a (7.5) függvény Maclaurin sora

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n,$$

ami minden x -re konvergens és összege minden x helyen zérus.

Amint ezt az előbbi példa is mutatja, rendelkezünk kell olyan használható, elégséges kritériummal, mely biztosítja, hogy valamely függvény Taylor-sora előállítsa a függvényt.

7.2 Tétel.

Ha az f függvény az " a " pont K_a környezetében akár-hányszor differenciálható, és a deriváltak K_a -ban "egyenletesen korlátosak", vagyis van $M > 0$ szám, hogy

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad x \in K_a, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7.6)$$

akkor az f függvény " a " ponthoz tartozó Taylor-sora K_a -ban előállítja a függvényt.

Bizonyítás. Legyen $x \in K_a$. A II. Kötet, 18.3 Tétel szerint f a -beli Taylor-sora n -edik részletösszegének, vagyis az n -edfoku Taylor-polinomnak f -től való eltérése az x helyen:

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

ahol $\xi \in (a, x) \subset K_a$. Innen

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

adódik. A 2.2 Példából az 1.2 Tétel felhasználásával látható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

vagyis

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

7.2 Példa. Legyen $p_n(x)$ tetszőleges n -edfoku polinom. Miután e polinom $(n+1)$ -edik, $(n+2)$ -edik, ... stb. deriválja mindenütt azonosan zérus, és e polinom, valamint első, második, ... n -edik deriváltja minden $a \in \mathbb{R}$ hely bármilyen nagy, de véges sugarú K_a környezetében korlátos függvény (ezen $n+1$ számú függvényhez a K_a intervallumon közös korlát található), $p_n(x)$ -re teljesülnek a 7.2 Tétel feltételei. Ezek szerint tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ -re

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{p_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Mivel $p_n^{(k)}(a) = 0$, $k = n+1, n+2, \dots$ (7.7) -ből látható, hogy $p_n(x)$ tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ helyhez tartozó Taylor-sora n -edfoku polinom, mely azonosan egyenlő $p_n(x)$ -szel, vagyis nem más, mint $p_n(x)$ -nek $(x-a)$ hatványai szerinti átrendezése. A 7.1 "unicitási" (egyértelműségi) Tételből az is következik, hogy ha a $p_n(x)$ polinomot tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ -re $(x-a)$ hatványai szerint átrendezzük, vagyis

$$p_n(x) \equiv \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k,$$

akkor $p_n^{(k)}(a) = k! c_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. A polinom deriváltjainak értékei így módon a polinom átrendezésével meghatározhatók.

8. Elemi függvények Maclaurin sorai

Ebben a pontban a legfontosabb elemi függvények hatványsor-előállításait adjuk meg. A teljesség kedvéért ide másoljuk az 5.1 Példa eredményét.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}, \quad x \in (-1, 1). \tag{8.1}$$

8.1 Példa.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{8.2}$$

Ugyanis $(e^x)_{x=0}^{(n)} = 1$, $n \in \mathbb{T}$, és tetszőlegesen nagy $\varphi > 0$ számot véve a $(-\varphi, \varphi)$ intervallumban alkalmazható a 7.2 Tétel, mivel

$$|(e^x)^{(n)}| = e^x < e^{\varphi}, \quad x \in (-\varphi, \varphi), \quad n \in \mathbb{T}.$$

8.2 Példa.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (8.3)$$

Ugyanis $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,
 $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$, miatt $(\sin x)_{x=0}^{(2k)} = 0$,
 $(\sin x)_{x=0}^{(2k+1)} = (-1)^k$, $k \in \mathbb{T}$, továbbá
 $|(\sin x)^{(n)}| \leq 1$, $n \in \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ily módon (8.3) a 7.2 Tételből következik.

8.3 Példa.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (8.4)$$

(8.4) bizonyítása az előző példában követett módon történik annak figyelembevételével, hogy $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$, $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^k \sin x$, $k \in \mathbb{T}$.

8.4 Példa.

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (8.5)$$

(8.5) egyszerűen adódik (8.2)-ből, ha figyelembe vesszük, hogy

$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$, és (8.2)-ben x helyébe $(-x)$ -et írva felhasználjuk az

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}, \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (8.6)$$

formulát.

8.5 Példa.

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (8.7)$$

A ch $x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$ azonosság felhasználásával adódik (8.2)-ből és (8.6)-ból.

8.6 Példa. (Binomiális sor). Mint ismeretes, (lásd I. Kötet, 8.1 Tétel; valamint 7.2 Példa) az $(1+x)^n$ függvény $n \in T$ esetén n -ed fokú polinom, mely megegyezik Maclaurin sorával:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ahol a binomiális együtthatók:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!},$$

$$\binom{n}{0} = 1, \quad n = 1, 2, \dots; \quad 1 \leq k \leq n.$$

Ha $\alpha \in R$, de $\alpha \notin T$, akkor az $(1+x)^\alpha$ függvény Maclaurin sora végtelen sok nullától különböző tagot tartalmaz, ugyanis

$$[(1+x)^\alpha]^{(k)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

vagyis

$$[(1+x)^\alpha]_{x=0}^{(k)} = \binom{\alpha}{k} k!, \quad \alpha \in R, \quad k \in T,$$

ahol definíció szerint

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!},$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \alpha \in R, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ezek szerint

$$(1+x)^\alpha \sim \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \alpha \in R. \quad (8.8)$$

Bebizonyítjuk, hogy az $(1+x)^\alpha$ függvényt a $(-1, 1)$ intervallumban Maclaurin sora, az (8.8) jobb oldalán álló ún. binomiális sor előállítja, vagyis, hogy

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (8.9)$$

Először megmutatjuk, hogy a (8.9) jobb oldalán álló binomiális sor konvergencia intervalluma $(-1, 1)$. Legyen $x \neq 0$ egyébként tetszőleges valós szám és képezzük a binomiális sor tagjainak abszolútértékeiből álló végtelesen sort. Ez utóbbi pozitív tagu sor két egymásután következő tagjának hányadosára:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \binom{\alpha}{k+1} x^{k+1} \right|}{\left| \binom{\alpha}{k} x^k \right|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)k!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(k+1)!} \right| |x| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha-k}{k+1} \right| |x| = |x|. \end{aligned}$$

Innen a d'Alambert-féle hányadoskritérium (pontosabban a 2.12 Következmény) alapján következik, hogy $|x| < 1$ esetén a binomiális sor abszolút konvergens, $|x| > 1$ esetén viszont nem abszolút konvergens. Mivel azonban minden hatványsor abszolút konvergens a konvergencia intervallumában (lásd 6.1 Segédteétel), az utóbbi eredményből adódik, hogy a binomiális sor divergens $|x| > 1$ esetén, vagyis konvergencia intervalluma valóban $(-1, 1)$. Most megmutatjuk, hogy a (8.9) jobb oldalán álló sor $(-1, 1)$ -ben valóban az $(1+x)^\alpha$ függvényt állítja elő. Jelöljük a konvergens hatványsor összegét $f(x)$ -szel, vagyis legyen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1).$$

Képezzük f deriváltját:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1},$$

vagy ami ugyanaz

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k+1} (k+1) x^k.$$

Az előző azonosságot x -szel megszorozva és az utóbbihoz adva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 (1+x) f'(x) &= \binom{\alpha}{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{k} k + \binom{\alpha}{k+1} (k+1) \right] x^k = \\
 &= \binom{\alpha}{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (k + \alpha - k) x^k = \\
 &= \alpha \binom{\alpha}{0} + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha f(x). \quad (8.10)
 \end{aligned}$$

Képezzük most a következő deriváltat:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}} \right]' &= \frac{f'(x)(1+x)^{\alpha} - f(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = \\
 &= \frac{(1+x)f'(x) - \alpha f(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} \equiv 0, \quad x \in (-1, 1)
 \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a (8.10) azonosságot. Ezek szerint az $\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}$ hányados állandó, és mivel e hányados értéke az $x = 0$ helyen 1, ezért

$$f(x) \equiv (1+x)^{\alpha}, \quad x \in (-1, 1).$$

8.7 Példa. Az előző példában kapott (8.9) formula alkalmazásaként felírunk néhány gyakrabban előforduló binomiális sorfejtést.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x)^k = \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)}x^n + \dots, \\
 x &\in (-1, 1). \quad (8.11)
 \end{aligned}$$

Hasonlóképpen adódik

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1). \quad (8.12)$$

Végül (8.11)-ben x helyébe x^2 -et téve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \dots \\ &\dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} x^{2n} + \dots, \\ &x \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (8.13)$$

(8.13) jobb oldala a

$$g(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots$$

hatványsor deriváltja, tehát

$$(\arcsin x - g(x))' = 0$$

az egész $(-1, 1)$ intervallumban.

Következésképpen $\arcsin x - g(x) = \text{állandó}$. Mivel az $x = 0$ helyen $\arcsin 0 - g(0) = 0$, ezért

$$\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \\ &x \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Hasonló módon nyerhetők a többi arcus, illetve area függvény Maclaurin-sor előállításai is.

9. Elliptikus integrálok

Függvények hatványsorba fejtése gyakran lehetővé teszi olyan függvények integrálását, melyek primitív függvénye nem, vagy csak nehezen állítható elő zárt alakban. Ha függvényünk analitikus egy olyan nyílt intervallumon, mely az $[a, b]$ zárt intervallumot belsejében tartalmazza, akkor a függvényt előállító hatványsor az $[a, b]$ intervallumon egyenletesen konvergens (lásd 6.5 Tétel). Így a 6.6 Tétel alapján a függvény $[a, b]$ -n vett integrálja egyenlő annak a végtelen numerikus sornak az összegével, melyet a függvény hatványsorából tagonkénti integrálással kapunk.

9.1 Példa. A $\frac{\sin x}{x}$ függvény korlátos és integrálható a $[0, 1]$ intervallumon, de primitív függvénye nem állítható elő zárt alakban. Azonban $\sin x$ analitikus a $(-\infty, +\infty)$ intervallumon és

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}, \quad x \neq 0. \end{aligned} \quad (9.1)$$

A jobb oldalon álló sor egyenletesen konvergens minden véges intervallumon. Ebből az is következik, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

függvény is analitikus $(-\infty, +\infty)$ -ben, mivel (9.1) jobb oldala $x = 0$ -ban is konvergens és összege itt 1. Így

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)! (2k+1)}. \end{aligned}$$

A következő két példában a hatványsorba fejtéssel történő integrálás alkalmazására két érdekes feladat megoldásaként fellépő két fontos integrált állítunk elő végtelen sor segítségével.

9.2 Példa. A felső végén rögzített l hosszúságú súlytalan és nyújthatatlan zsinórra függesztett, m tömegű, pontszerű test körív pályán végzett mozgásával a nehézségi erőterben, vagyis az ún. matematikai inga lengésével már az elemi mechanikában is foglalkoznak. A lengés elemi módszerekkel azonban csak közelítően írható le, és a közelítés csupán kis kitérések esetében használható. Most a lengést tetszőleges $\frac{\pi}{2}$ -nél

kisebb kitérések esetén vizsgáljuk és meghatározzuk a lengésidőt. Legyen az inga maximális kitérése $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, vagyis váljék az inga sebessége zérussá akkor, amikor a függőlegessel bezárt szöge α . Jelöljük $\mathcal{J}$ -val a függőleges iránnyal bezárt szöget a tetszőleges t időpillanatban (lásd 9.1 ábra), g-vel a nehézségi gyorsulást. Az energiamegmaradás törvénye alapján az inga helyzeti energiája a maximális kitérés helyzetében egyenlő a t időpontbeli helyzeti és mozgási energia összegével:

$$mg\ell(1 - \cos \alpha) = mg\ell(1 - \cos \mathcal{J}) + \frac{1}{2} m \left(\ell \frac{d\mathcal{J}}{dt} \right)^2.$$

Rendezés után az inga mozgását leíró

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \left(\frac{2g}{\ell} (\cos \mathcal{J} - \cos \alpha) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.2)$$

"differenciálegyenletre" jutunk. Haladjon át az inga a nyugalmi, vagyis a függőleges helyzeten a $t = 0$ időpillanatban, azaz legyen $\mathcal{J} = 0$, ha $t = 0$. (9.2) "a kitérésnek, mint az idő függvényének" deriváltjára vonatkozó összefüggés. "Az időre, mint a kitérés függvényére" vonatkozó megfelelő összefüggést az inverz függvény differenciálási szabálya alapján kapjuk:

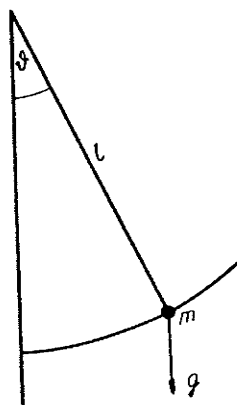
$$\frac{dt}{d\mathcal{J}} = \left(\frac{2g}{\ell} (\cos \mathcal{J} - \cos \alpha) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Innen a $t(0) = 0$ feltétel figyelembevételével, integrálással

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\mathcal{J}} \frac{d\eta}{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}.$$

Az inga T lengésidejének negyedrésze alatt kerül az inga a $\mathcal{J} = 0$ helyzetből $\mathcal{J} = \alpha$ helyzetbe, vagyis

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\mathcal{J}}{\sqrt{2(\cos \mathcal{J} - \cos \alpha)}}.$$



9.1 ábra

A $\cos \mathcal{J} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\mathcal{J}}{2}$ és az α -ra vonatkozó megfelelő trigonometrikus azonosság felhasználásával és 4-gyel szorozva kapjuk, hogy

$$T = 2 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\mathcal{J}}{(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\mathcal{J}}{2})^{\frac{1}{2}}}.$$

Vezessük be a

$$k = \sin \frac{\alpha}{2} \quad (9.3)$$

jelölést és végezzük el a $\sin \frac{\mathcal{J}}{2} = k \sin \varphi$ helyettesítést:

$$(\mathcal{J} = 2 \arcsin(k \sin \varphi), d\mathcal{J} = \frac{2k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi) :$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (9.4)$$

Az

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (9.5)$$

integrált elsőfajú teljes elliptikus integrálnak nevezzük.

A (9.5) integrált a hatványsorba fejtés módszerével állítjuk elő. Az

$x = k \sin \varphi$ jelöléssel az $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ függvényt binomiális sorba fejtjük, vagyis (9.5) integrandusát $k^2 \sin^2 \varphi$ hatványai szerint haladó sorba fejtjük. Mivel (9.3) miatt $|x| = k |\sin \varphi| \leq k < 1$, e sor a $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumon egyenletesen konvergens. Így

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n k^{2n} \sin^{2n} \varphi \right) d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (-1)^n k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \\
&= \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}\right)^2 k^{2n} + \dots \right], \quad (9.6)
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a II. Kötet (29.10) formulát. Ha az α kitérés kicsi, vagyis $k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ elhanyagolható és (9.6) -ban az első kivételével az összes tagot elhanyagoljuk, a lengésidőre (9.4)-ből az ismert

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

közelítő formula adódik.

9.3 Példa. Az $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a \geq b > 0$, egyenletű ellipszis L kerülete a II. Kötet 31.4 Példa szerint

$$L = 4a E(k), \quad (9.7)$$

ahol

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} dt, \quad 0 \leq k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1, \quad (9.8)$$

a másodfajú teljes elliptikus integrál. Az $x = k \sin t$ jelölést bevezetve az

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ függvény az $|x| = |k \sin t| \leq k < 1$ egyenlőtlenséggel jellemzett intervallumon egyenletesen konvergens binomiális sorba fejthető, vagyis (9.8) integrandusa a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumon $k^2 \sin^2 t$ hatványai szerint haladó egyenletesen konvergens sorba fejthető. Így

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (-1)^n k^{2n} \sin^{2n} t \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n (-1)^n k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt = \\
&= \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \dots - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right], \quad (9.9)
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a II. Kötet (29.10) formulát. Ha az ellipszis nagy- és kistengelye kevésbé tér el egymástól, vagyis k kicsi és e sorban az első kivételével az összes tagot elhanyagoljuk, (9.7)-ből és (9.9)-ből az $L \approx 2 a \pi$ közelítő formulát nyerjük, melynek jobb oldalán az "a" sugarú kör kerülete áll.

ORTOGONÁLIS SOROK

10. Fourier-sorok

Műszaki berendezések működésének leírásában rendkívül fontos szerepet játszanak a periódikus függvények. A legegyszerűbb 2π szerinti periódikus függvények a sinus- és a cosinusfüggvény. E függvények segítségével képezhető a végtelen sok függvényből álló

$$\cos kx, \sin kx, \quad k \in \mathbb{T}, \quad (10.1)$$

függvényrendszer. A (10.1) függvények mindegyike 2π szerint periódikus (ha 2π általában nem is legkisebb pozitív periódus). Nyilvánvaló, hogy bárhogyan választunk ki véges sokat a (10.1) függvények közül, ezek bármilyen lineáris kombinációja is 2π szerint periódikus függvény. Egy ilyen lineáris kom-

binációt, egy $\sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ alakú függvényt n-edfoku trigonomet-

rikus polinomnak neveztünk. Valamely a (10.1) függvények szerint haladó függvénysoort trigonometrikus sornak neveztünk. Ha egy trigonometrikus sor konvergens valamilyen számhalmazon, akkor nyilván az összegfüggvény is 2π szerint periódikus. Fontos kérdés az, hogy milyen 2π szerint periódikus, egyváltozós valós függvények fejthetők a (10.1) függvényrendszer függvényei szerint haladó trigonometrikus sorba, un. "Fourier-sorba" és hogyan lehet a sorfejtés együtthatóit meghatározni.

10.1 Tétel.

Legyen az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus és a $[-\pi, \pi]$ intervallumon korlátos és integrálható (ekkor nyilván minden véges intervallumon korlátos és integrálható), és tegyük fel, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (10.2)$$

ahol a jobb oldalon álló sor $[-\pi, \pi]$ -n egyenletesen konvergens, (ekkor nyilván $(-\infty, \infty)$ -en is egyenletesen konvergens), akkor

$$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nx \, dx, \quad n \in \mathbb{T}. \quad (10.3)$$

Bizonyítás. A bizonyításban felhasználjuk a következő integrálformulákat, melyek a II. Kötet, (3.9), (3.10), (3.11), illetve (3.7), (3.8) trigonometrikus azonosságok alapján könnyen igazolhatók:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0, \quad n, m \in \mathbb{T}; \quad (10.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0$$

$$n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{T}; \quad (10.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi. \quad (10.6)$$

Szorozzuk meg (10.2) mindkét oldalát $\cos nx$ -szel, illetve $\sin nx$ -szel és integráljuk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Az 5.4 Tétel alapján a jobb oldalon az integrálás tagonként végezhető. A (10.4)-(10.6) formulák felhasználásával kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \pi, \quad n \in \mathbb{T},$$

illetve

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = b_n \pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

ahonnan (10.3) következik.!

Látjuk tehát, hogy ha az függvényt előállító trigonometrikus sor egyenesen konvergens, akkor az abban fellépő együtthatókat (10.3) egyértelműen meghatározza. Könnyen belátható, mivel (10.3) integrandusa 2π szerint periodikus, hogy $[-\pi, \pi]$ helyett bármely 2π hosszúságú

intervallumon végezve az integrálást az együtthatókra ugyanaz az érték adódik. Nem kívánjuk azonban függvények trigonometrikus sorba fejtését arra a speciális esetre korlátozni, amikor e sor egyenletesen konvergens.

10.1 Definíció. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, a $[-\pi, \pi]$ intervallumon korlátos és integrálható függvény; az

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (10.7)$$

végtelen sort, ahol

$$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nx \, dx, \quad n \in \mathbb{T} \quad (10.8)$$

f Fourier-sorának, az a_n, b_n együtthatókat f Fourier-együtthatóinak nevezzük (függetlenül attól, hogy a (10.7) sor konvergens-e, vagy sem).

Ha f páratlan függvény, akkor $f(x) \cos nx$ is páratlan; ha f páros függvény, akkor $f(x) \sin nx$ páratlan. Mivel páratlan függvény origóra szimmetrikus intervallumon vett integrálja zérus, (10.8)-ból azonnal következik, hogy ha f páratlan (páros), akkor $a_n = 0$ ($b_n = 0$), $n \in \mathbb{T}$.

10.1 Példa. Az f függvényt a következőképpen értelmezzük:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ -1, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az f függvény páratlan (lásd 10.1 ábra), így Fourier-együtthatói közül $a_n = 0$, $n \in \mathbb{T}$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-\sin nx) \, dx + \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{4}{\pi n} & n = 2k-1, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Igy f Fourier-sora

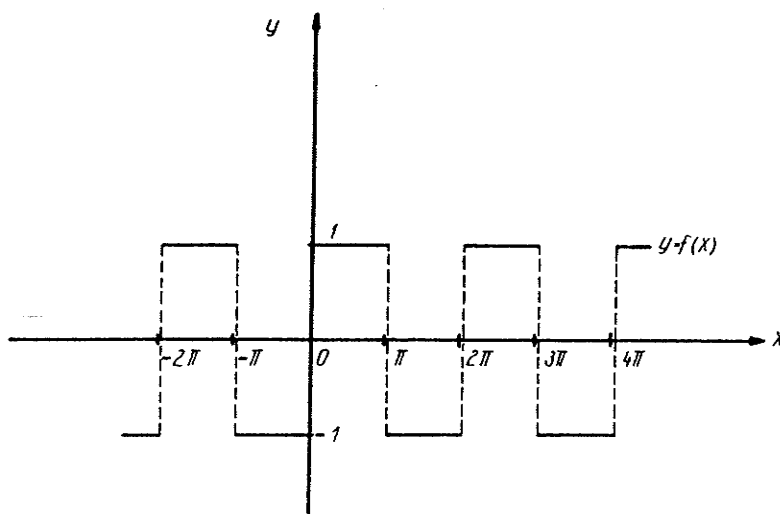
$$f \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1)x}{2k-1}.$$

10.2 Tétel.

Ha $f \in C_R^0$, 2π szerint periodikus továbbá $[-\pi, \pi]$ -ben f véges számu hely kivételével folytonosan differenciálható és f' korlátos, akkor f' Fourier-sora f Fourier-sorából formális tagonkénti deriválással adódik, vagyis

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} (kb_k \cos kx - ka_k \sin kx), \quad (10.9)$$

ahol a_k, b_k f Fourier-együtthatói.



10.1 ábra

Bizonyítás. A tett feltevések mellett nyilván felírható f' Fourier-sora:

$$f' \sim \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos kx + b'_k \sin kx).$$

Itt

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0,$$

$$a'_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[f(x) \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-k \sin kx) \, dx = k b_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

ahol parciális integrálást végeztünk. Hasonlóan adódik, hogy $b'_k = -ka_k$, $k = 1, 2, \dots$!

10.3 Tétel Ha $f \in C_R^1$, 2π szerint periodikus, továbbá $[-\pi, \pi]$ -ben f' véges számú hely kivételével folytonosan differenciálható és f' korlátos, akkor

$$f'' \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-k^2 a_k \cos kx - k^2 b_k \sin kx), \quad (10.10)$$

ahol a_k, b_k f Fourier-együtthatói, és f Fourier-sora egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. A (10.10) formula azonnal adódik, ha a 10.2 Tételt az f' függvényre alkalmazzuk. Jelöljük f'' Fourier-együtthatóit a_k'', b_k'' -vel, $k = 1, 2, \dots$, és legyen $M \geq |f''(x)|$. Akkor egyrészt (10.10)-ből $a_k'' = -k^2 a_k, b_k'' = -k^2 b_k$, másrészt az f'' -re alkalmazott (10.8)-ból

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} a_k'' \\ b_k'' \end{matrix} \right| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} kx \, dx \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| \, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} M 2\pi = 2M, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ezek szerint $|a_k| \leq \frac{2M}{k^2}, |b_k| \leq \frac{2M}{k^2}$, vagyis f Fourier-sorának a

$4M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergens numerikus sor a majoránsa. Így Weierstrass tételéből (4.5 Tétel) állításunk következik!

Azzal a kérdéssel, hogy milyen feltételek mellett állítja elő Fourier-sora a függvényt, a következő pontban foglalkozunk. E pont hátralevő részében olyan periódikus függvények Fourier-soráról lesz szó, melyek periódusa nem 2π .

Legyen p tetszőleges pozitív szám és $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $2p$ szerint periodikus korlátos és integrálható függvény. E függvényt $2p$ szerint periodikus trigonometrikus függvények szerint haladó sorba kívánjuk fejteni. A (10. 1)-nek megfelelő függvényrendszer most a

$$\cos \frac{k\pi}{p} x, \sin \frac{k\pi}{p} x, k \in \mathbb{T} \quad (10.11)$$

rendszer, melynek minden függvénye $2p$ szerint periodikus, hiszen például

$$\cos \frac{k\pi}{p} (x+2p) = \cos \left(\frac{k\pi}{p} x + k2\pi \right) = \cos \frac{k\pi}{p} x.$$

Az f függvény Fourier-sora tehát

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{p} x + b_k \sin \frac{k\pi}{p} x \right),$$

ahol az a_k, b_k Fourier-együtthatók előállítására a feladat. Az

$$x = \frac{p}{\pi} t \quad (10.12)$$

formulával új független változót vezetünk be. A $\varphi(t) = f\left(-\frac{p}{\pi} t\right)$ függvény már 2π szerint periodikus, korlátos és integrálható, mivel

$$\varphi(t+2\pi) = f\left(\frac{p}{\pi} (t+2\pi)\right) = f\left(\frac{p}{\pi} t + 2p\right) = f\left(-\frac{p}{\pi} t\right) = \varphi(t).$$

A $\varphi(t)$ függvény Fourier-sora legyen

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (10.13)$$

ahol

$$\left. \begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} kt \, dt, \quad k \in \mathbb{T}.$$

Végezzük el az utóbbi integrálban a (10. 12) helyettesítést ($dt = \frac{\pi}{p} dx$), kapjuk, hogy

$$\left. \begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-p}^p \varphi\left(\frac{\pi}{p}x\right) \frac{\cos k \frac{\pi}{p}x}{\sin k \frac{\pi}{p}x} dx =$$

$$= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \frac{\cos k \frac{\pi}{p}x}{\sin k \frac{\pi}{p}x} dx, \quad k \in \mathbb{T}.$$

A (10.13) formulából a (10.12) helyettesítéssel adódik, hogy

$$f(x) = \varphi\left(\frac{\pi}{p}x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{p}x + b_k \sin \frac{k\pi}{p}x\right).$$

Az előbbiek alapján ésszerű a következő

10.2 Definíció. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $2p$ szerint periodikus ($p > 0$), a $[-p, p]$ intervallumon korlátos és integrálható függvény; az

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{p}x + b_k \sin \frac{k\pi}{p}x\right) \quad (10.14)$$

végtelen sort, ahol

$$\left. \begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \frac{\cos k \frac{\pi}{p}x}{\sin k \frac{\pi}{p}x} dx, \quad k \in \mathbb{T}, \quad (10.15)$$

f Fourier-sorának, az a_k, b_k együtthatókat f Fourier-együtthatóinak nevezzük.

A $2p$ szerint periodikus függvény Fourier-sorának fogalmát a (10.12) egyszerű lineáris helyettesítéssel 2π szerint periodikus függvény (10.13) Fourier-sorára vezettük vissza. Így mindaz, amit 2π szerint periodikus függvények Fourier-soráról mondtunk, illetve mondani fogunk, értelemszerűen érvényestetszőlegesen $2p$ szerint periodikus függvények Fourier-sorára is.

Nem periodikus függvény Fourier-soráról is beszélhetünk véges intervallumon. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $[a, b]$ véges intervallum, korlátos és integrálható függvény. Tekintsük f -nek $\mathbb{R}$ -re való periodikus kiterjesztését, vagyis azt az $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre $F(x) = f(x)$, ha $x \in [a, b]$ és $F(x+b-a) = F(x)$ egyébként. $F(b-a)$ szerint periodikus függvény Fourier-sorát f Fourier-sorának nevezzük. Ha ez a Fourier-sor előállítja F -et, akkor az $[a, b]$ intervallumon f -et állítja elő. Megjegyezzük, hogy egyes esetekben célszerű a függvény periodikus kiterjesztését úgy megválasztani, hogy a kiterjesztett függvény páros, vagy páratlan legyen.

11. Fourier-sor konvergenciája

Ebben a pontban elégséges feltételt adunk arra, hogy a Fourier-sor "pontonként konvergáljon" ahhoz a függvényhez, melynek Fourier-sora. Ehhez azonban bizonyos előkészítésre van szükség.

11.1 Segéd-tétel. (Riemann-Lebesgue-lemma). Legyen az f függvény az $[a, b]$ intervallumban véges számú hely kivételével folytonos és szakadási helyein legyen elsőfajú szakadása. (lásd II. Kötet, 6.6 Definíció), akkor

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

Bizonyítás. Csak a

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0$$

határértékrelációt bizonyítjuk be, a másik ui. hasonlóan bizonyítható. Legyen α és β az f függvény két szomszédos szakadási helye, $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Az f függvény $[\alpha, \beta]$ -ra vonatkozó leszűkítése folytonos, illetve α -ban és β -ban történő megfelelő értelmezéssel folytonossá tehető. Ebből következik, hogy f egyenletesen folytonos $[\alpha, \beta]$ -ban. Bevezetjük az

$$I(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \lambda x \, dx \quad (11.1)$$

jelölést és bebizonyítjuk a $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = 0$ határértékrelációt. Ebből már állításunk következni fog, hiszen $[a, b]$ -véges sok $[\alpha, \beta]$ típusú intervallum egyesítése és az $[a, b]$ -n vett integrál ezen részintervallumokon vett integrálok összege.

Legyen $\lambda > 0$ olyan nagy, hogy $\frac{\pi}{\lambda} < \beta - \alpha$ és végezzük el (11.1) jobb oldalán az $x = t + \frac{\pi}{\lambda}$ helyettesítést:

$$I(\lambda) = \int_{\alpha - \frac{\pi}{\lambda}}^{\beta - \frac{\pi}{\lambda}} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \sin\left(\lambda t + \pi\right) dt = - \int_{\alpha - \frac{\pi}{\lambda}}^{\beta - \frac{\pi}{\lambda}} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \sin \lambda t \, dt,$$

illetve az integrációs változót újból x -szel jelölve:

$$I(\lambda) = - \int_{\alpha - \frac{\pi}{\lambda}}^{\beta - \frac{\pi}{\lambda}} f(x + \frac{\pi}{\lambda}) \sin \lambda x \, dx.$$

Az utóbbi egyenlőséget (11.1)-gyel összeadva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2 I(\lambda) &= - \int_{\alpha - \frac{\pi}{\lambda}}^{\beta - \frac{\pi}{\lambda}} f(x + \frac{\pi}{\lambda}) \sin \lambda x \, dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \lambda x \, dx = \\ &= - \int_{\alpha - \frac{\pi}{\lambda}}^{\alpha} f(x + \frac{\pi}{\lambda}) \sin \lambda x \, dx - \int_{\alpha}^{\beta - \frac{\pi}{\lambda}} f(x + \frac{\pi}{\lambda}) \sin \lambda x \, dx + \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\beta - \frac{\pi}{\lambda}} f(x) \sin \lambda x \, dx + \int_{\beta - \frac{\pi}{\lambda}}^{\beta} f(x) \sin \lambda x \, dx = \\ &= - \int_{\alpha - \frac{\pi}{\lambda}}^{\alpha} f(x + \frac{\pi}{\lambda}) \sin \lambda x \, dx + \int_{\beta - \frac{\pi}{\lambda}}^{\beta} f(x) \sin \lambda x \, dx + \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\beta - \frac{\pi}{\lambda}} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{\lambda})) \sin \lambda x \, dx. \end{aligned}$$

f nyilván korlátos függvény, legyen $M \geq |f(x)|$, $x \in [a, b]$. Ekkor az utóbbi előállításból

$$\begin{aligned} 2 |I(\lambda)| &\leq \int_{\alpha - \frac{\pi}{\lambda}}^{\alpha} \left| f(x + \frac{\pi}{\lambda}) \right| dx + \int_{\beta - \frac{\pi}{\lambda}}^{\beta} |f(x)| dx + \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\beta - \frac{\pi}{\lambda}} \left| f(x) - f(x + \frac{\pi}{\lambda}) \right| dx \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2M \frac{\pi}{\lambda} + \int_{\alpha}^{\beta - \frac{\pi}{\lambda}} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx,$$

vagyis

$$|I(\lambda)| \leq \frac{M\pi}{\lambda} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta - \frac{\pi}{\lambda}} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx. \quad (11.2)$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Mivel f egyenletesen folytonos $[\alpha, \beta]$ -ban, van $L_1 > 0$ szám, hogy minden $\lambda > L_1$ -re és $x \in [\alpha, \beta - \frac{\pi}{\lambda}]$ -ra

$$\left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}. \quad (11.3)$$

Legyen $L_2 > 0$ olyan, hogy fennálljon

$$\frac{M\pi}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ha } \lambda > L_2 \quad (11.4)$$

Ha $\lambda > \max(L_1, L_2)$, akkor (11.2), (11.3) és (11.4)-ből következik, hogy

$$|I(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \left(\beta - \frac{\pi}{\lambda} - \alpha \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = 0$!

11.2 Következmény. Legyen az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus, a $[-\pi, \pi]$ intervallumban véges számú hely kivételével folytonos és szakadási helyein legyen elsőfajú szakadása; ha f Fourier-együtthatóit a_n, b_n -nel jelöljük, $n \in \mathbb{Z}$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Bizonyítás. Azonnal adódik az előző tételből és (10.8)-ból!

Megjegyezzük, hogy a 11.1 Segédétel és ennek következtében a 11.2 Következmény akkor is igaz, ha f -ről a szakaszonként folytonosság helyett csak annyit teszünk fel, hogy korlátos és integrálható (lásd. [3] I. 308. o.).

11.3 Segédteétel.

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k s = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}}, \quad (11.5)$$

$$-\pi \leq s \leq \pi, \quad s \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Bizonyítás. A II. Kötet, (3.15) formula alapján

$$\sin(k + \frac{1}{2})s - \sin(k - \frac{1}{2})s = 2 \sin \frac{s}{2} \cos k s \quad (11.6)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

A (11.6) egyenleteket összeadva

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{s}{2} \sum_{k=1}^n \cos k s &= \sum_{k=1}^n (\sin(k + \frac{1}{2})s - \sin(k - \frac{1}{2})s) = \\ &= \sin(n + \frac{1}{2})s - \sin \frac{s}{2}, \end{aligned}$$

ahonnan $\sin \frac{s}{2}$ -vel való osztás után (11.5) adódik!

Ha a (11.5) egyenlőség mindkét oldalát a $[-\pi, \pi]$ intervallumon integráljuk és figyelembe vesszük, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k s \, ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

kapjuk a később felhasználásra kerülő

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}} \, ds = \pi \quad (11.7)$$

formulát. Figyelembe véve, hogy itt az integrandus páros függvény

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}} \, ds = \pi. \quad (11.8)$$

11.4 Segédteétel. (Dirichlet-féle formula). Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, a $[-\pi, \pi]$ intervallumban véges számú hely kivételével folytonos függvény, melynek szakadási helyein elsőfajú szakadás van, és Fourier-sora legyen

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

akkor a Fourier-sor n -edik részletösszege az

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ jelölést}$$

bevezetve, fennáll

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds, \quad (11.9)$$

illetve

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+s) + f(x-s)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds. \quad (11.10)$$

Bizonyítás. (10.8) alapján

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt + \right. \\ &\quad \left. + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt. \end{aligned}$$

Végezzük el az utóbbi integrálban az $s = t - x$ helyettesítést (x rögzített):

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k s \right] ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k s \right] ds, \end{aligned}$$

ahol figyelembe vettük, hogy az integrandus 2π szerint periodikus függvény. A 11.3 Segédétel felhasználásával (11.9) adódik. Bontsuk fel a (11.9) integrált egy $[-\pi, 0]$ -n és egy $[0, \pi]$ -n vett integrál összegére. A $[-\pi, 0]$ -n vett integrálban elvégezve az $s = -v$ helyettesítést, majd az integrációs változót újból s -sel jelölve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 f(x+s) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds &= - \int_{\pi}^0 f(x-v) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})v}{2 \sin \frac{v}{2}} dv = \\ &= \int_0^{\pi} f(x-s) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds. \end{aligned}$$

Ez utóbbi kifejezéshez a $[0, \pi]$ -n vett

$$\int_0^{\pi} f(x+s) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds$$

integrált hozzáadva (11.9)-ből (11.10)-et nyerjük!

Ez után az előkészítés után már be tudunk bizonyítani egy elégséges feltételt, mely biztosítja, hogy valamely függvény Fourier-sora pontonként konvergens legyen és előállítsa a függvényt.

11.5 Tétel.

Legyen az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus, a $[-\pi, \pi]$ intervallumban véges számú hely kivételével folytonos és szakadási helyein legyen első fajú szakadása; ekkor ha az $x \in \mathbb{R}$ helyen létezik f jobb és bal oldali határértéke, $f(x+0)$ és $f(x-0)$, továbbá léteznek a véges

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} \quad (11.11)$$

és

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x-h) - f(x-0)}{-h} \quad (11.12)$$

határértékek, akkor az x helyen f Fourier-sora konvergens és összege

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Ezek szerint, ha a tétel feltételei teljesülnek, akkor a Fourier-sor összege f folytonossági helyein a függvényértékkel, f szakadási helyein a bal és jobb oldali határérték számtani közepével egyenlő.

Bizonyítás. Legyen $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az a függvény, melynek értéke f folytonossági helyein f értékével, f szakadási helyen a bal és jobb oldali határértékek számtani közepével egyenlő, vagyis

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy f Fourier-sora az $\bar{f}$ függvényt állítja elő. Szorozzuk meg a (11.8) egyenlőség mindkét oldalát $\bar{f}(x)$ -szel; π -vel való osztás után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \frac{1}{\pi} \bar{f}(x) \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}} ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}} ds. \end{aligned}$$

Vonjuk ki az utóbbi azonosságot a (11.10) azonosságból:

$$S_n(x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{f(x+s) + f(x-s)}{2} - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}} ds.$$

$$- \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \Big] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}} ds = I_1 + I_2, \quad (11.13)$$

ahol

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} [f(x+s)-f(x+0)+f(x-s)-f(x-0)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}} ds,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} [f(x+s)-f(x+0)+f(x-s)-f(x-0)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}} ds,$$

$$0 < \delta < \pi.$$

Megmutatjuk, hogy a (11.13) különbség zérushoz tart, ha n tart végtelenhez. Ebből a célból megbecsüljük, az I_1 , majd az I_2 integrált (11.11)

és (11.12) miatt van $c > 0$ és $0 < \delta < \pi$, hogy

$$\left| \frac{f(x+s)-f(x+0)}{s} \right| < c, \quad \left| \frac{f(x-s)-f(x-0)}{s} \right| < c,$$

ha $0 < s < \delta$, vagyis

$$|f(x+s)-f(x+0)| < cs, \quad |f(x-s)-f(x-0)| < cs,$$

ha $0 < s < \delta$. Így

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} [|f(x+s)-f(x+0)| + |f(x-s)-f(x-0)|] \left| \frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}} \right| ds <$$

$$< \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} 2cs \left| \frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}} \right| ds =$$

$$= \frac{2c}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\frac{s}{2}}{\sin \frac{s}{2}} \left| \sin(n+\frac{1}{2})s \right| ds <$$

$$< \frac{2c}{\pi} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \delta = \frac{3c}{\pi} \delta, \quad (11.14)$$

ha δ elég kicsi, mivel $\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)s \right| \leq 1$, és

$$\lim_{s \rightarrow +0} \frac{\frac{s}{2}}{\sin \frac{s}{2}} = 1 \text{ miatt } \left| \frac{\frac{s}{2}}{\sin \frac{s}{2}} \right| < \frac{3}{2}, \text{ ha}$$

$0 < s < \delta$ és δ elég kicsi. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. A (11.14) becslésből adódik, hogy

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (11.15)$$

ha $0 < \frac{3c}{\pi} \delta < \frac{\varepsilon}{2}$, vagyis $0 < \delta < \frac{\pi}{6c} \varepsilon$.

Rögzítsük δ -t úgy, hogy teljesüljön az utóbbi egyenlőtlenség és vizsgáljuk az I_2 integrált. Az

$$\frac{f(x+s)-f(x+0)+f(x-s)-f(x-0)}{\sin \frac{s}{2}}$$

függvény a $\delta \leq s \leq \pi$ intervallumban (x rögzített) kielégíti a Riemann-Lebesgue-lemma (11.1 Segédteétel) feltételeit, tehát $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha n elég nagy.

Ez utóbbi eredményünket, (11.15)-öt, és (11.13)-at összevetve kapjuk, hogy

$$|S_n(x) - \bar{f}(x)| < \varepsilon,$$

ha n elég nagy. Mivel ε tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy a Fourier-sor részletösszegeinek $S_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ végtelen sorozatára

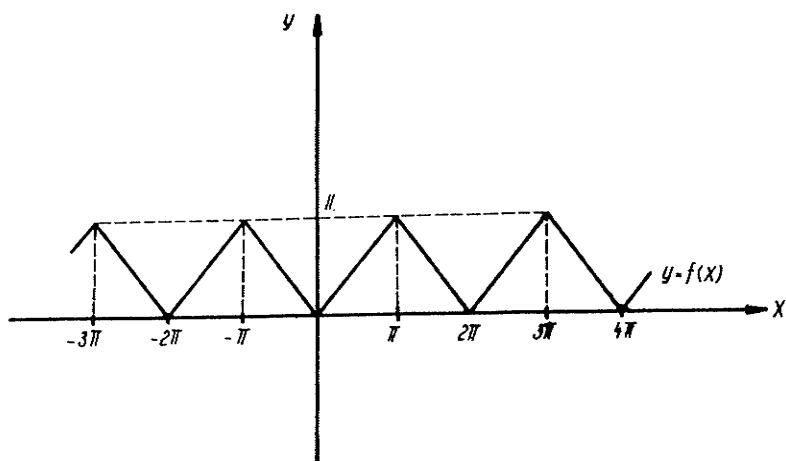
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \bar{f}(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad .!$$

11.1 Példa. A F függvényt a következőképpen értelmezzük:

$$F(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi; \quad f(x+2\pi) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Miután e függvényre teljesülnek a 10.2 Tétel feltételei, és derivált függvénye a 10.1 Példában szereplő f függvény, F Fourier-sora f Fourier-sorából tagonkénti integrálással határozható meg eltekintve az állandó tagtól, melyet külön kiszámítunk:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi.$$



11.1 ábra

Ezek szerint

$$F \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Miután F -re teljesülnek a 11.5 Tétel feltételei és $F \in C_R^0$, a sor konvergens és F -et állítja elő, vagyis

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Speciálisan az $x = \pi$ helyen

$$F(\pi) = \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

vagyis

$$-\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} . \quad (11.16)$$

Megjegyezzük, hogy a 11.5 Tétel feltételei jelentősen enyhíthetők, illetve más elégséges feltételekkel helyettesíthetők. Fejér Lipót egy alapvető jelentőségű eredményéből következik, az hogy ha a 2π szerint periódikus, korlátos és integrálható f függvény az x helyen folytonos és e függvény Fourier-sora ezen az x helyen konvergens, akkor a sor összege $f(x)$ -szel egyenlő (lásd [3] II. 120-123. o.). Folytonos függvény Fourier-sora tehát szükségképpen a függvényt állítja elő, feltéve, hogy konvergens. Mint ismeretes (lásd 7.1 Példa) a Taylor-sorokra ez nem igaz.

12. A négyzetesen integrálható függvények euklideszi tere

Az az eljárás, ahogyan a 10.1 Tételben az f függvényt előállító Fourier-sor (10.3) együtthatóit meghatároztuk, nagy hasonlóságot mutat ahhoz, ahogyan a közönséges vektoralgebrában valamely $\underline{v}$ vektor ortogonális bázisbeli koordinátáit meghatározzuk.

Legyen

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3 , \quad (12.1)$$

ahol $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ortogonális (nem szükségképpen ortonormált) bázis a közönséges háromdimenziós térben (lásd III. Kötet, 3.2 Definíció). Mivel

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k = 0, \quad i \neq k, \quad \underline{e}_k \cdot \underline{e}_k = |\underline{e}_k|^2 \neq 0$$

$$i, k = 1, 2, 3. \quad (12.2)$$

ezért

$$v_n = \frac{\underline{v} \cdot \underline{e}_n}{|\underline{e}_n|^2}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (12.3)$$

$\underline{v}$ -nek f , az $\underline{e}_k$ vektoroknak a $\cos kx, \sin kx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

függvények, (12.1)-nek a (10.2) "végtelen lineáris kombinációként" való előállítás, (12.2)-nek a (10.4)-(10.6) formulák, végül (12.3)-nak (10.3) felel meg. Ezen analógia alapján, ahhoz, hogy a Fourier-sorfejtés

műszaki szempontból is fontos általánosításait tárgyalni tudjuk, célszerűnek látszik adott intervallumon bizonyos tulajdonságokkal rendelkező függvények halmazában a lineáris, illetve az euklideszi tér strukturájának bevezetése (lásd III. Kötet, 16.5 és 16.9 Definíció).

12.1 Definíció. A $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az (a, b) véges vagy végtelen intervallumon négyzetesen integrálhatónak nevezzük, ha (a, b) minden véges belső részintervallumán korlátos, véges számú hely kivételével folytonos, a szakadási helyeken balról folytonos és létezik az

$$\int_a^b f^2(x) dx$$

Riemann-féle, vagy improprius integrál. Az (a, b) intervallumon négyzetesen integrálható függvények halmazát $L^2(a, b)$ -vel (vagy röviden L^2 -tel) jelöljük.

12.1 Tétel. Ha $f, g \in L^2$ összegét, valós számmal való szorzását a szokásos módon, skaláris szorzatát az

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad (12.4)$$

integrállal értelmezzük, L^2 euklideszi tér a valós számok teste fölött.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a véges (12.4) integrál létezik. A II. Kötet 23.6 Tételből következik, hogy f, g (a, b) minden véges, belső részintervallumán korlátos és integrálható. Mivel

$$|f(x) g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq \frac{1}{2} [f(x)^2 + g(x)^2], \quad x \in (a, b),$$

a II. Kötet 30.3 Tételből és a 30.5 Definíciót követő megjegyzésből következik, hogy a (12.4) jobb oldalán álló integrál létezik.

Nyilvánvaló, hogy ha $f \in L^2$, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ -re $c f \in L^2$. Ha

$f, g \in L^2$, akkor $(f+g)$ -re is igaz az, hogy (a, b) minden véges, belső részintervallumán korlátos, véges számú hely kivételével folytonos és a szakadási helyeken balról folytonos.

Továbbá mivel

$$(f(x) + g(x))^2 = f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x), \quad x \in (a, b),$$

és itt a jobb oldal (a, b) -n vett integrálja létezik, ezért $f, g \in L^2$ -ből $(f+g) \in L^2$ következik, tehát L^2 lineáris tér (a III. Kötet, 16.5 Definíció többi követelményei nyilván teljesülnek.). Teljesülnek továbbá a III. Kötet, 16.9 Definíció követelményei is, amint az a II. Kötet, 23.4, 23.5, 30.7, valamint 6.8 Tételéből azonnal látható. (Az utóbbi tételből adódik az, hogy az

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x) dx = 0 \quad (12.5)$$

egyenlőségből $f(x) \equiv 0$ következik).!

Az előző tételből következik, hogy az L^2 térre mindaz igaz, amit tetszőleges valós euklideszi térre a III. Kötet, 16. pontjában bizonyítottunk.

Az $f \in L^2$ függvény normája

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12.6)$$

(lásd III. Kötet 16.11 Definíció). Ha $f, g \in L^2$, akkor fennáll a Bunyakovszkij, illetve a Minkowski egyenlőtlenség (lásd III. Kötet, 16.1 Tétel és 16.4 Következmény):

$$\begin{aligned} |(f, g)| &= \left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \|f\| \cdot \|g\| = \\ &= \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_a^b g^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (12.7)$$

illetve

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \|f\| + \|g\| = \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b g^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Ha $f \neq 0$, $g \neq 0$, akkor f és g szögének cosinusa definíció szerint (vö. III. Kötet, (16.10))

$$\cos \varphi = \frac{(f, g)}{\|f\| \cdot \|g\|}. \quad (12.9)$$

Ha $f, g \in L^2_{(a, b)}$, akkor különbségük normáját, az

$$\|f - g\| = \left[\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12.10)$$

számot a két függvény távolságának, vagy átlagos eltérésének nevezzük. Az utóbbi elnevezést az indokolja, hogy ha az (a, b) intervallum véges, akkor f és g távolsága a két függvény eltérése négyzetének integrálközepéből (lásd II. Kötet, 26.2 Definíció) vont négyzetgyök $b-a$ -szorosa. $\sqrt{b-a}$ szorzó $L^2_{(a, b)}$ bármely két elemére ugyanaz, részben ezért marad el a (12.10) definiáló formulában (másrészt azért, hogy végtelen (a, b) intervallum esetében is lehessen távolságról beszélni). A függvények távolságának (12.10) értelmezésével L^2 a metrikus tér tulajdonságaival is rendelkezik (lásd V. Kötet, 1 pont).

12.2 Definíció. Legyen $f_n \in L^2$, $n \in T$, L^2 -be tartozó függvények végtelen sorozata és $f \in L^2$; azt mondjuk, hogy az f_n , $n \in T$ sorozat az L^2 térben f -hez konvergál (vagy átlagosan konvergál f -hez), jelben

$$f_n \xrightarrow{L^2} f, \quad n \rightarrow \infty,$$

ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Itt jegyezzük meg a következőket. A mi 12.1 Definíciónk szerint $L^2_{(a, b)}$ minden eleme (a, b) minden pontjában legalábbis balról folytonos. Erre a feltevésre azért volt szükség, hogy $\|f\| = 0$ -ből $f = 0$ következzen. Így az is igaz, hogy ha f és g távolsága zérus, akkor $f(x) = g(x)$ minden $x \in (a, b)$ -re.

Általában azonban $L^2_{(a,b)}$ elemeiről csak annyit tesznek fel, hogy (a,b) minden véges részintervallumában korlátosak és integrálhatók és létezik négyzetük (a,b) -n vett integrálja. Ebben az esetben $\|f\| = 0$ -ból nem következik, hogy f azonosan zérus. (Egyébként abból, hogy az f_n , $n \in T$, sorozat L^2 -ben f -hez konvergál, nem következik az, hogy e sorozat pontonként is konvergál f -hez). Érvényben marad azonban (12.7) és (12.8). Az 5.4 Tételt követő megjegyzésből következik (mindkét tárgyalásmódban), hogy ha f_n , $n \in T$ az (a,b) intervallumon egyenletesen konvergál f -hez, akkor átlagosan is f -hez konvergál.

Az alkalmazásokban fellépő esetek szükségessé teszik azt, hogy az L^2 tér fogalmát kissé általánosítsuk.

12.3 Definíció. Legyen adott a $\varphi \in C^0_{(a,b)}$, $\varphi(x) > 0$, $x \in (a,b)$ "súlyfüggvény"; azt mondjuk, hogy az $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a φ súlyfüggvény mellett négyzetesen integrálható, ha (a,b) minden véges, belső részintervallumán korlátos, véges számú hely kivételével folytonos, a szakadási helyeken balról folytonos és létezik az

$$\int_a^b \varphi(x) f^2(x) dx \quad (12.11)$$

Riemann-féle, vagy improprius integrál. Az (a,b) intervallumon a φ súlyfüggvény mellett négyzetesen integrálható függvények halmazát $L^{2,\varphi}_{(a,b)}$ -vel (vagy röviden $L^{2,\varphi}$ -val) jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy $f \in L^{2,\varphi}$ akkor és csak akkor, ha $\sqrt{\varphi} f \in L^2$. Ennek figyelembevételével értelmezzük $L^{2,\varphi}$ elemeinek skaláris szorzatát, illetve normáját. Az $f, g \in L^{2,\varphi}$ függvények φ súlyfüggvényre vonatkozó skaláris szorzata, illetve f -nek a φ súlyfüggvényre vonatkozó normája:

$$(f, g)_{\varphi} = (\sqrt{\varphi} f, \sqrt{\varphi} g) = \int_a^b \varphi(x) f(x) g(x) dx, \quad (12.12)$$

illetve

$$\|f\|_{\varrho} = \sqrt{(f, f)_{\varrho}} = \|\sqrt{\varrho} f\| = \left[\int_a^b \varrho(x) f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (12.13)$$

13. Ortogonális függvényrendszerek

A III. Kötet, 16.12 Definíciót megismételve:

13.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f, g \in L^2$ függvények ortogonálisak, ha skaláris szorzatuk zérus, vagyis

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

13.2 Definíció. A $\{\varphi_k \in L^2 : k \in T\}$ függvényhalmazt ortogonális függvényrendszernek nevezzük, ha

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x) dx = 0, \quad i \neq k, \quad (13.1)$$

$$\|\varphi_k\|^2 = \int_a^b \varphi_k^2(x) dx \neq 0, \quad k \in T. \quad (13.2)$$

Ha ezenkívül $\|\varphi_k\| = 1, k \in T$, akkor a függvényrendszert ortonormáltnak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $\varphi_k, k \in T$, ortogonális függvényrendszer "normálható", vagyis elemeit alkalmasan választott állandókkal szorozva, ortonormálttá alakítható. U1. a

$$\psi_k = \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|}, \quad k \in T,$$

már ortonormált függvényrendszer.

13.1 Példa. Amint ez a (10.4)-(10.6) egyenlőségekből látható, az

$$1, \cos kx, \sin kx, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (13.3)$$

függvényrendszer a $(-\pi, \pi)$ intervallumon (és bármely 2π hosszúságú intervallumon) ortogonális függvényrendszer. (10.6)-ból az is látható, hogy az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, (k=1, 2, \dots) \quad (13.4)$$

függvényrendszer ortonormált.

A 10.1 Tétel analógiájára azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy ha egy függvényt valamilyen ortogonális függvényrendszer elemei szerint haladó végtelen sorba fejtettünk, milyen módon határozhatók meg az együtthatók.

13.1 Tétel. Legyen (a, b) véges intervallum,

$f \in L^2_{(a,b)}$ és $\{\varphi_k : k \in T\}$ az (a, b) intervallumon ortogonális függvényrendszer; tegyük fel továbbá, hogy

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k, \quad (13.5)$$

ahol a jobboldalon álló sor (a, b) -n egyenletesen konvergens, ekkor

$$c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}, \quad k \in T. \quad (13.6)$$

Bizonyítás. Szorozzuk meg a (13.5) egyenlőség mindkét oldalát skalárisan φ_n -nel, vagyis szorozzuk meg φ_n -nel és integráljunk az (a, b) intervallumon. Az 5.4 Tételt követő megjegyzés szerint a jobboldalon az integrálás tagonként végezhető, vagyis

$$(f, \varphi_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\varphi_k, \varphi_n), \quad n \in T$$

(13.1) miatt a jobboldalon egy kivételével (ti. $k = n$) az összes tag zérus, így

$$(f, \varphi_n) = c_n \|\varphi_n\|^2, \quad n \in T,$$

ahonnan (13.2) miatt (13.6) adódik.!

A 10.1 Definíció közvetlen általánosítása a

13.3 Definíció. Legyen $f \in L^2_{(a,b)}$ és $\{\varphi_k : k \in T\}$ az (a,b) intervallumon ortogonális függvényrendszer; az

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k \quad (13.7)$$

végteles sor, ahol

$$c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}, \quad k \in T, \quad (13.8)$$

az f függvény $\{\varphi_k : k \in T\}$ rendszerre vonatkozó ortogonális sorának, a $c_k, k \in T$ együtthatókat a $\{\varphi_k : k \in T\}$ rendszerre vonatkozó általánosított Fourier-együtthatóknak nevezzük (függetlenül attól, hogy a (13.7) sor konvergencia-e vagy nem).

Az f függvény (13.8) általánosított Fourier-együtthatói egy fontos approximációs problémának a megoldásai. Vizsgáljuk ui. azt a kérdést, hogy

rögzített n mellett a $\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k$ típusú lineáris kombinációk közül,

melyik közelíti meg átlagosan f -et a legjobban, vagyis melyiknek lesz f -től való átlagos eltérése,

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\| \quad (13.9)$$

minimális.

13.2 Tétel. Rögzített $f \in L^2$ függvény, $\{\varphi_k : k \in T\}$ ortogonális rendszer és n természetes szám mellett a (13.9) átlagos eltérés akkor és csak akkor minimális, ha

$$a_k = c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

vagyis ha a f függvény $\{\varphi_k : k \in T\}$ rendszerre vonatkozó ortogonális sorának n -edik részletösszegét vesszük.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\|^2 &= \left(f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k, f - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i \right) = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^n a_k (f, \varphi_k) + \sum_{k,i=1}^n a_k a_i (\varphi_k, \varphi_i) = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^n a_k c_k \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=0}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \\ &= \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n (a_k - c_k)^2 \|\varphi_k\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2, \end{aligned} \quad (13.10)$$

ahol felhasználtuk a skaláris szorzás elemi tulajdonságait, (13.8)-at és (13.1)-et. Az utoljára kapott kifejezésben csak a középső nem-negatív tag függ az a_k együtthatóktól, (13.2) miatt ez a tag és vele együtt az egész kifejezés akkor és csak akkor minimális, ha

$$a_k - c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Az előbbi tételt periodikus függvények Fourier-soraira alkalmazva és a 10. pont végén levő megjegyzést figyelembe véve azonnal adódik a

13.3 Következmény. Legyen $a \in \mathbb{R}$, az $f: [a, a+2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény véges számu hely kivételével folytonos és szakadási helyein legyen elsőfajú szakadása; ekkor rögzített $n \in \mathbb{N}$ mellett az n -edfoku

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trigonometrikus polinom f -től való átlagos eltérése akkor és csak akkor minimális, ha itt

$$a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad \text{és} \quad b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad f$$

Fourier-együtthatói.

A (13.10) formulából $a_k = c_k$ helyettesítéssel adódik, hogy minden $n \in T$ -re

$$0 \leq \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2, \quad (13.11)$$

vagyis

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2, \quad n \in T.$$

Érvényes tehát a

13.4 Tétel. (Bessel-egyenlőtlenség). Legyen $f \in L^2$, $\{\varphi_k : k \in T\}$ ortogonális függvényrendszer és

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k$$

f ortogonális sora, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2. \quad (13.12)$$

Ha speciálisan $\{\varphi_k : k \in T\}$ ortonormált függvényrendszer, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (13.13)$$

Ezt az eredményt periodikus függvények Fourier-együtthatóira alkalmazva adódik a

13.5 Következmény. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, a $[-\pi, \pi]$ intervallumban véges számú hely kivételével folytonos és szakadási helyein legyen elsőfajú szakadása; ekkor az f függvény

$$\frac{a_0}{2}, \quad a_k \text{ és } b_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Fourier-együtthatóival képezett

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \text{ sor konvergens és}$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (13.14)$$

Megjegyezzük, hogy valójában már lényegesen gyengébb feltétel mellett az is bizonyítható, hogy (13.14)-ben az egyenlőség áll fenn.

Bizonyítás. (13.12)-t a (13.3) függvényrendszerre alkalmazva és a (10.6) egyenlőségeket felhasználva π -vel való osztás után azonnal adódik.!

13.6 Tétel. Az $f \in L^2$ függvényt a $\{\varphi_k : k \in T\}$ ortogonális függvényrendszerre vonatkozó

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k$$

ortogonális sora akkor és csak akkor állítja elő átlagosan, vagyis

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\| = 0$$

akkor és csak akkor, ha

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (13.15)$$

Bizonyítás. Azonnal adódik (13.11)-ből.!

Speciálisan, ha az előző Tételben a $\{\varphi_k : k \in T\}$ függvényrendszer ortonormált, akkor a (13.15) feltétel az

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \quad (13.16)$$

alakot veszi fel. Ez az összefüggés pontos analogonja annak, ahogyan véges dimenziós euklideszi térben, ortonormált bázisban valamely vektor koordinátáiból a vektor abszolút értékét kiszámítjuk (lásd III. Kötet, (3.11), illetve (17.12)). Az a kérdés, hogy rögzített ortonormált rendszernél a (13.15) feltétel minden $f \in L^2$ függvényre fennáll-e, vagyis hogy minden $f \in L^2$ függvény előállítható-e átlagosan egy rögzített ortonormált rendszerre vonatkozó ortogonális sorával mélyebb vizsgálatot igényel, melyre itt nem térünk ki (lásd [5]). Arra a kérdésre, hogy vajon minden

c_k , $k \in T$, numerikus sorozat, melyre $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$ konvergens, valamely

$f \in L^2$ függvény adott ortonormált rendszerre vonatkozó "koordináta-sorozatának" tekinthető-e, Riesz Frigyes egyik alapvető jelentőségű tétele ad választ. Ezek a problémák azonban a Riemann-integrálható függvények halmazán belül maradván nem intézhetők el megnyugtatóan. Szükségessé tesz egy új integrálfogalom, az ún. "Lebesgue-féle integrál" bevezetését.

Megvan az analógiája annak is, ahogyan véges dimenziós euklideszi térben, ortonormált bázisban két vektor skaláris szorzatát kiszámítjuk (lásd III. Kötet, (3.10) és (17.11))

13.7 Tétel. (Parseval-formula). Legyen $f, g \in L^2, \{\varphi_k : k \in T\}$ ortonormált függvényrendszer,

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k, g \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k \varphi_k,$$

és tételezzük fel, hogy

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k \right\| = \left\| g - \sum_{k=0}^{\infty} d_k \varphi_k \right\| = 0;$$

akkor

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k d_k. \quad (13.17)$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} (f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k, g - \sum_{i=0}^n d_i \varphi_i) &= (f, g) - \sum_{k=0}^n c_k (\varphi_k, g) - \\ &- \sum_{i=0}^n d_i (f, \varphi_i) + \sum_{i,k=0}^n c_k d_i (\varphi_k, \varphi_i) = (f, g) - \\ &- \sum_{k=0}^n c_k d_k - \sum_{k=0}^n c_i d_i + \sum_{k=0}^n c_i d_i = \\ &= (f, g) - \sum_{k=0}^n c_k d_k, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a $\{\varphi_k; k \in T\}$ függvényrendszer ortonormalitását, továbbá a (13.8) és a d_i -kre vonatkozó megfelelő formulát. A (12.7) Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned} 0 \leq |(f, g) - \sum_{k=0}^n c_k d_k| &= |(f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k, g - \sum_{i=0}^n d_i \varphi_i)| \leq \\ &\leq \|f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k\| \cdot \|g - \sum_{i=0}^n d_i \varphi_i\|. \end{aligned}$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor a feltevések értelmében az utóbbi egyenlőtlenség jobb oldala zérushoz tart, ahonnan (13.17) következik.!

Ortogonalis függvényrendszerekről az $L^{2,\rho}$ térben (lásd 12.3 Definíció) is beszélhetünk.

13.4 Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\{\varphi_k \in L^2 : k \in T\}$ függvényrendszer a ρ súlyfüggvény mellett ortogonalis, ha

$$(\varphi_i, \varphi_k)_\rho = \int_a^b \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0, \quad i \neq k, \quad (13.18)$$

$$\|\varphi_k\|^2 = \int_a^b \rho(x) \varphi_k^2(x) dx \neq 0, \quad k \in T. \quad (13.19)$$

Ha ezenkívül $\|\varphi_k\|_\rho = 1, \quad k \in T$, akkor a függvényrendszert a ρ súlyfüggvény mellett ortonormálnak nevezzük.

13.1 Példa. A

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in T \quad (13.20)$$

formulával értelmezett függvényt elsőfajú n-edfokú Csebisev-polinomnak nevezzük. A (13.20) formula csak a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezi a függvényt. Ha azonban $T_n(x)$ -ről sikerül bizonyítanunk, hogy polinom, akkor értelmezése természetes módon kiterjeszthető az egész R halmazra. Azt, hogy $T_n(x)$ pontosan n-edfokú polinom n-re vonatkozó matematikai indukcióval bizonyítjuk. Nyilván

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) = x. \quad (13.21)$$

Bebizonyítjuk, hogy fennáll a

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13.22)$$

rekurziós formula. Vezessük be az $x = \cos \vartheta$ jelölést.

A II. Kötet, (3.13) felhasználásával

$$\cos(n+1)\vartheta + \cos(n-1)\vartheta = 2 \cos \vartheta \cos n\vartheta.$$

Mivel $\vartheta = \arccos x$ és (13.20)-ból

$$T_n(\cos \vartheta) = \cos n\vartheta, \quad (13.23)$$

a fenti trigonometrikus azonosság a

$$T_{n+1}(\cos \vartheta) + T_{n-1}(\cos \vartheta) = 2 \cos \vartheta T_n(\cos \vartheta),$$

alakot veszi fel ahonnan $x = \cos \vartheta$ helyettesítéssel (13.22) következik, (13.21)-ből és (13.22)-ből már állításunk adódik; hiszen ha feltesszük, hogy $T_n(x)$ pontosan n -edfoku és $T_{n-1}(x)$ pontosan $(n-1)$ -edfoku polinom, akkor $T_{n+1}(x)$ pontosan $(n+1)$ -edfoku polinom. Bebizonyítjuk, hogy a (13.20) Csebisev-polinomok a $(-1, 1)$ intervallumon a

$\varrho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ súlyfüggvényre nézve ortogonális függvényrendszert alkotnak. Az $x = \cos \vartheta$ helyettesítéssel és (13.23) felhasználásával

$$\begin{aligned} (T_n, T_m)_{\varrho} &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(x) T_m(x) dx = \int_0^{\pi} \cos n \vartheta \cos m \vartheta \frac{\sin \vartheta d \vartheta}{\sin \vartheta} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n \vartheta \cos m \vartheta d \vartheta = 0, \quad n \neq m, \end{aligned}$$

ami a (13.3) függvényrendszer ortogonalitásából következik. Az előbbi helyettesítéses integrálással és a (10.6) egyenlőségek felhasználásával

$$\begin{aligned} \|T_n\|_{\varrho}^2 &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_n^2(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n \vartheta d \vartheta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n = 1, 2, \dots \\ \pi, & n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

13.5 Definíció: Legyen $f \in L^{2, \varrho}$ és $\{\varphi_k \in L^2 : k \in \mathbb{T}\}$ a ϱ súlyfüggvény mellett ortogonális függvényrendszer; az

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k$$

végtelen sort, ahol

$$c_k = \frac{(f, \varphi_k) \varphi_k}{\|\varphi_k\|^2}, \quad k \in T,$$

az f függvény $\{\varphi_k : k \in T\}$ rendszerre vonatkozó φ súlyfüggvény melletti ortogonális sorának nevezzük.

A 13.2, 13.4, 13.6 és 13.7 Tételek értelemszerűen átvihetők súlyfüggvény melletti ortogonális sorokra is.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Matematika Példatár (szerkesztette: Monostory I.) IV. Kötet, Tankönyvkiadó, 1972.
- [2] Gáspár Gy.: Műszaki Matematika II. Kötet, Tankönyvkiadó, 1968.
- [3] Szász P.: A differenciál- és integrálszámítás elemei I-II. Kötet, Közoktatásügyi Kiadóvállalat, 1951.
- [4] Farkas M.: Speciális függvények, Műszaki Könyvkiadó, 1964.
- [5] Szőkefalvi-Nagy B.: Valós függvények és függvénysorok, Tankönyvkiadó, 1954.
- [6] Kreider, D.L., Kuller, R.G., Ostberg, D.R., Perkins, F.W.:
An introduction to linear analysis, Addison Wesley, 1966, Redding, Mass.
- [7] Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. kiad.
Springer, 1947, Berlin.

TÁRGYMUTATÓ

abszolút konvergencia	26
abszolút konvergens sor	25
alulról korlátos sorozat	17
analitikus függvény	50
approximáció	7, 88
átlagos eltérés minimuma	88, 89
 Bessel egyenlőtlenség	 90
binomiális együtthatók	55
binomiális sor	55, 56
— — konvergenciája	56
binomiális sorfejtés	57, 61
Bunyakovszkij egyenlőtlenség	83, 93
 Cauchy-féle kritérium	 8, 37
— — gyökkritérium	20
— — szorzat	31, 32
Cauchy-Hadamard-tétel	47
Csebisev-polinom	94, 95
 d' Alembert-féle hányadoskritérium	 21, 56
derivált sor	48
Dirichlet-féle formula	75
divergens részsorozat	10
divergens sor	8, 9, 19
 egyenletesen folytonos függvény	 71, 73
egyenletes konvergencia	43, 37, 38
egyenletesen konvergens függvénysor	39
elliptikus integrál	61, 62
elsőfajú elliptikus integrál	61
elsőfajú szakadási hely	71
euklideszi tér	82, 83

Fejér-tétel	81
feltételes konvergencia	26
felülről korlátos sorozat	16, 18
Fourier-együtthatók	66, 68, 70, 88
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ általánosított	88
Fourier-sor	64, 66, 67, 70, 81
—— részletösszegei	75
függvény ortogonális sora	88, 90
függvények	7, 22
—— átlagos eltérése	84
—— szögének cosinusa	84
—— távolsága	84
függvényrendszer (ortogonális)	90
függvénysor	7, 39
egyenletesen konvergens	39
konvergens	39
—— maradékösszege	39
—— összege (határfüggvény)	39
—— részletösszegei	39
—— tagjai	39
függvénytörzs	34
geometriai-sor	9, 40, 46
gyökkritérium, Cauchy-féle	20, 22
hányadoskritérium (d' Alembert-féle)	21, 22
harmonikus sor	9
határfüggvény	35, 36, 38
hatványsor	45, 49
—— együtthatója	45
—— előállítása	53
—— konvergencia intervalluma	47, 49
—— sugara	47
—— tartománya	46
hatványsorba fejtés	59
hiperharmonikus sor	24
indexsorozat	30
integrálás	7, 43
integrálfüggvénytörzs	43
integrálkritérium	22, 24
intervallumban analitikus fv.	50
konvergencia	7, 8
abszolút	26
átlagos	84
egyenletes	34, 85

feltételes	26
intervallum	47
pontonkénti	71, 76, 85
sugár	47
szükséges feltétele	9, 8
tartomány	45
konvergens sor	8, 10, 11, 12
konvergens sorozat	11
koordináta-sorozat	92
korlátos sorozat	16, 17, 18
közelítés	7
küszöbindex	36, 35
Lebesgue-féle integrál	92
Leibniz-tétel	14
Leibniz - típusu sor	15
lineáris kombináció (végtelen)	81
lineáris tér	83
Maclaurin-sor	49, 51
majoráló sor	24, 46
majoráns kritérium	17, 46
maradékösszeg	13
----- sor	13
----- sorozat	13
másodfajú elliptikus integrál	62
metrikus tér	84
Minkowski-egyenlőtlenség	83
minoráló sor	24
minoráns kritérium	18
négyszetsen integrálható függvény	82
nullsorozat	13
numerikus sor	7
numerikus sorozat	7
ortogonális bázis	81
ortogonális függvényrendszer	86, 87, 92
súlyfüggvényre nézve	93, 95
ortogonális sor	88, 90
súlyfüggvény melletti	96
ortonormált bázis	81
ortonormált függvényrendszer	86, 87, 92
súlyfüggvényre nézve	94
Parseval - formula	92
polinom átrendezése	53
pozitív tagu sor	16, 18
	- 100 -

részintervallum	23	
részletösszeg	8	
részletösszegek sorozata	9, 16, 30, 42, 52	
reszsorozat	9, 10, 29	
_____ határértéke	11	
Riemann-féle inregrál	82	
Riemann-integrálhatóság	92	
Riemann-Lebesgue - lemma	71, 79	
Riemann-tétel	27	
Riesz Frigyes tétele	92	
skaláris szorzat	82, 85	
sor	7	
_____ átrendezése	26	
_____ geometriai	9	_____
_____ harmonikus	9	_____
_____ hiperharmonikus	24	_____
_____ konvergenciája	8	
_____ ortogonális	88	_____
_____ összege	8	
sorozat	7	
_____ divergens	10, 17	_____
_____ konvergens	11	_____
súlyfüggvény	85	
súlyfüggvényre vonatkozó norma	85	
súlyfüggvényre vonatkozó skaláris szorzat	85	
szorzatsor	31	
Taylor polinom	49	
Taylor-sor	49	
_____ egyértelműsége	50	
trigonometrikus függvények szerint		
haladó sor	69	
trigonometrikus polinom	64	
trigonometrikus sor	64	
unicitási tétel (Taylor sorra vonatkozó)	53, 50	
valós euklideszi tér	83	
váltakozó előjelű sor	14	
végtelen lineáris kombináció	81	
végtelen függvényssorozat	34	

_____	konvergenciája	34	
végtelen numerikus sor		7	
_____	divergenciája		8
_____	konvergenciája		8
_____	összege		8
végtelen numerikus sorozat			7
vektorok	81		
Weierstrass-kritérium	39, 44		