



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:
Farkas Miklós

MATEMATIKA
V. kötet
TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

Összeállította:
Farkas Miklós - Fritz Józsefné



Műegyetemi Kiadó, 2004.

(Tizenegyedik utánnymás)

egyetemi jegyzet
otatási célra

Azonosító: **040800**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 11,6 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 117/04

AZ OLVASÓHOZ

Ez a jegyzet a Matematika.c. jegyzetsorozat V. kötete. A sorozat a következő kötetekből áll:

- I. kötet. A matematika alapjai
- II. kötet. Egyváltozós valós függvények
- III. kötet. Lineáris algebra
- IV. kötet. Végtelen sorok
- V. kötet. Többváltozós valós függvények
- VI. kötet. Differenciálgeometria és vektoranalízis
- VII. kötet. Komplex függvények
- VIII. kötet. Differenciálegyenletek

A sorozat a szigorlati Matematika anyagot tartalmazza. A jegyzet azokhoz a gépészmérnök hallgatókhoz szól, akik a Matematika c. tárgy előadásait és gyakorlatait látogatják. Ezért nem tartalmaz hosszadalmas magyarázatokat, bevezető és illusztratív példákat stb., hanem "csupán" a tulajdonképpeni anyagot lehetőség szerint teljességre és maximális tömörségre törekedve. (A levelező hallgatók számára külön útmutató csatlakozik a sorozathoz.) A sorozatot a Matematika Példatár kötetei egészítik ki, amelyekben az olvasó nagy számu kidolgozott és kidolgozatlan példát és feladatot talál.

A kötet fejezetekre, a fejezetek pontokra vannak osztva, de a pontok számozása a fejezetektől függetlenül, folyamatosan történt. Az egyes pontokon belül külön-külön számozzuk a definíciókat, tételeket (segéd tételeket, következményeket), példákat, formulákat, ill. ábrákat. A példák részben a nehéz fogalmakat, tételeket világítják meg, részben "ellenpéldák" és nagyrészt az elméleti anyag szerves részét képezik. A hivatkozások egy kötetben belül az idézett definíció, tétel stb. számának megadásával, más kötet esetében, ezen kívül a hivatkozott kötet számának megadásával történik (mindkét esetben a fejezet megadása nélkül). Tehát pl. az I. kötetben a "1. 13.2 Tétel" hivatkozás az I. Kötet 13. pont 2. tételét jelenti; a II. Kötetben ugyanerre a tételre úgy hivatkozunk: "I. I. Kötet, 13.2 Tétel". A bizonyítások végét pont és felkiáltójel jelzi: .!

Az Irodalomjegyzék elsősorban az anyag iránt mélyebben érdeklődő olvasónak ajánlott művek és nem az eredmények eredeti forrásainak címeit tartalmazza. Az irodalomjegyzékben felsorolt művekre szögletes zárójelbe tett számokkal hivatkozunk.

Bp. 1971 március

A szerkesztő

TARTALOMJEGYZÉK

Első fejezet. Határérték és folytonosság	7
¹ 1. A rendezett szám n-esek metrikus tere	7
2. Pontsorozatok. Torlódási pontok	16
3. Függvény határértéke	22
4. Folytonos függvények	29
Második fejezet. Differenciálszámítás	36
5. Parciális deriváltak. Totális differenciálhatóság	36
6. A differenciál. Hibaszámítás	42
7. Magasabbrendű parciális deriváltak	47
8. A láncszabály. Iránymenti deriváltak	53
9. A Taylor-polinom a Lagrange-féle maradéktaggal. Magasabbrendű differenciálok	62
10. Szélsőértékszámítás	67
11. Implicit megadásu függvényrendszerek. Inverz függvényrendszer	78
Harmadik fejezet. Többes integrálok	94
12. Paraméteres integrálok	94
13. A kettős és a hármas integrál	97
14. A kettős és hármas integrál szemléletes jelentése	104
15. Kettős és többes integrálok kiszámítása. Ismételt integrálok	109
16. Kettős és hármas integrálok transzformációl	117
Irodalomjegyzék	127
Tárgymutató	128

HATÁRÉRTÉK ÉS FOLYTONOSSÁG

1. A rendezett szám n-esek metrikus tere

Ebben a kötetben a rendezett (valós) szám n-esek R^n halmazán (vagy ennek egy részhalmazán) értelmezett valós szám értékű függvényekkel foglalkozunk. Az R^n halmaz elemeit pontoknak nevezzük és aláhúzott kis betűvel jelöljük, tehát $\underline{x} \in R^n$ azt jelenti, hogy $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ahol $x_k \in \mathbb{R}$,

$k = 1, 2, \dots, n$, az $\underline{x}$ pont k-adik koordinátája.

Az R^n halmaz elemei között értelmezzük a "távolság" fogalmát úgy, hogy az az $n = 1, 2$, ill. 3 . speciális esetben az egyenes, a közönséges sík, ill. tér pontjainak távolságát szolgáltatassa, amennyiben a síkon, ill. a térben Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert vezetünk be (1. III. Kötet, 4. pont) és a rendezett számpárokat, ill. számhármassokat a pontok koordinátáinak tekintjük.

1.1 Definíció. Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$; a

$$\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

számot az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ pont távolságának nevezzük.

(1.1)-gyel voltaképpen egy $\rho: R^n \times R^n \rightarrow R$ függvényt értelmeztünk, mely nyilvánvalóan a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

M 1. Nem-negativitás: $\rho(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$, $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$.

M 2. $\rho(\underline{x}, \underline{y})$ akkor és csak akkor zérus, ha $\underline{x} = \underline{y}$.

M 3. Szimmetria: $\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \rho(\underline{y}, \underline{x})$, $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$.

Érvényes továbbá az un.

M 4. Háromszög egyenlőtlenség: minden $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in R^n$ -re

$$\rho(\underline{x}, \underline{y}) + \rho(\underline{y}, \underline{z}) \geq \rho(\underline{x}, \underline{z}).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}
 [\rho(\underline{x}, \underline{z})]^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2 = \\
 &= \sum_{k=1}^n (x_k - y_k + y_k - z_k)^2 = \\
 &= \sum_{k=1}^n [(x_k - y_k)^2 + 2(x_k - y_k)(y_k - z_k) + (y_k - z_k)^2] = \\
 &= [\rho(\underline{x}, \underline{y})]^2 + [\rho(\underline{y}, \underline{z})]^2 + 2 \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)(y_k - z_k).
 \end{aligned}$$

A Cauchy-féle egyenlőtlenség (lásd III. Kötet, 16.2 Következmény) felhasználásával

$$\begin{aligned}
 [\rho(\underline{x}, \underline{z})]^2 &\leq [\rho(\underline{x}, \underline{y})]^2 + [\rho(\underline{y}, \underline{z})]^2 + \\
 &+ 2 \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n (y_k - z_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= [\rho(\underline{x}, \underline{y})]^2 + [\rho(\underline{y}, \underline{z})]^2 + 2 \rho(\underline{x}, \underline{y}) \rho(\underline{y}, \underline{z}) = \\
 &= [\rho(\underline{x}, \underline{y}) + \rho(\underline{y}, \underline{z})]^2.
 \end{aligned}$$

Azáltal, hogy R^n -ben az M1.-M4. követelményeknek eleget tevő távolságfogalmat értelmeztük az R^n halmazon, n -dimenziós metrikus térré változtattuk (a térben "metrikát vezettünk be"). A továbbiakban R^n e metrikus teret fogja jelenteni. Megjegyezzük, hogy R^n -ben a távolságfogalom a következőképpen is bevezethető lett volna. A III. Kötet, 16.8. és 16.11 Példája alapján R^n n -dimenziós euklideszi térnek is tekinthető. Ha e térben két elem távolságát különbségük normájával értelmezzük, éppen az (1.1) távolságfogalomhoz jutunk. Mi ezért nem követtük ezt az utat, mert egyrészt minimálisra kívántuk csökkenteni a III. Kötet Ötödik fejezetére való hivatkozást, másrészt meg akartuk mutatni, hogy távolság bevezetéséhez nem szükséges az elemek közötti skaláris szorzás értelmezése. Helyenként azonban kényelmi okokból használjuk az $|\underline{x}| = \rho(\underline{x}, \underline{0})$ jelölést.

Megjegyezzük továbbá, hogy több (1.1)-től különböző, de az M1.-M4. alapvető követelményeknek eleget tevő távolságdefiníció is lehetséges.

1.1 Példa. Ha R^n tetszőleges $\underline{x}$ és $\underline{y}$ elemének távolságát a

$$\rho^*(\underline{x}, \underline{y}) = \max_k |x_k - y_k|$$

kifejezéssel értelmezzük, ez is eleget tesz az M1.-M4. követelményeknek. Az, hogy M1, M2. és M3. teljesül, nyilvánvaló. M4-et a következőképpen igazoljuk. Legyen $\max_k |x_k - z_k| = |x_i - z_i|$, akkor

$$\begin{aligned}\rho^*(\underline{x}, \underline{z}) &= \max_k |x_k - z_k| = |x_i - z_i| = \\ &= |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \leq \\ &\leq \max_k |x_k - y_k| + \max_k |y_k - z_k| = \\ &= \rho^*(\underline{x}, \underline{y}) + \rho^*(\underline{y}, \underline{z}).\end{aligned}$$

Az R^n tér részhalmazait általában tartományoknak nevezzük. Az $\underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$ pontot az R^n tér origójának nevezzük. Azt mondjuk, hogy a $H \subset R^n$ tartomány korlátos, ha van $r > 0$ szám, melyre $\underline{h} \in H \Rightarrow \rho(\underline{h}, \underline{0}) < r$.

Mivel minden $k = 1, 2, \dots, n$ -re $|h_k| \leq \left(\sum_{i=1}^n h_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \rho(\underline{h}, \underline{0})$, ill. $\rho(\underline{h}, \underline{0}) = \left(\sum_{i=1}^n h_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n} \max_i |h_i|$, nyilvánvaló, hogy $H \subset R^n$ akkor és csak akkor kor-

látos, ha az összes pontjának összes koordinátájából álló számhalmaz korlátos.

Legyen $H \subset R^n$ korlátos tartomány. Ha H pontjainak egymástól vett távolságát képezzük, nyilván felülről korlátos számhalmazzt kapunk, más szóval a $\{\rho(\underline{x}, \underline{y}) : \underline{x}, \underline{y} \in H\}$ számhalmaz felülről korlátos. E számhalmaz legkisebb felső korlátját, a

$$d(H) = \sup_{\underline{x}, \underline{y} \in H} \rho(\underline{x}, \underline{y}) \quad (1.2)$$

$$\underline{x}, \underline{y} \in H$$

nem-negatív számot H átmérőjének nevezzük. (Az üres halmaz, ill. az egyetlen pontból álló tartomány átmérőjét zérusnak vesszük). Legyen H_1 és H_2

két tetszőleges tartomány R^n -ben. Ha képezzük H_1 összes pontjának H_2 összes pontjától mért távolságát, más szóval a $\{\rho(\underline{x}, \underline{y}) : \underline{x} \in H_1, \underline{y} \in H_2\}$ számhalmazzt, alulról korlátos számhalmazzt kapunk, hiszen 0 nyilván alsó korlát. E számhalmaz legnagyobb alsó korlátját a

$$\rho(H_1, H_2) = \inf_{\underline{x} \in H_1, \underline{y} \in H_2} \rho(\underline{x}, \underline{y}) \quad (1.3)$$

$$\underline{x} \in H_1, \underline{y} \in H_2$$

nem-negatív számot a H_1 és H_2 tartomány távolságának nevezzük.

Legyen $[\alpha, \beta]$ tetszőleges zárt intervallum ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$),
 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény (ezen a $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$,
 $t \in [\alpha, \beta]$ jelöléssel élve azt értjük, hogy $\varphi_k \in C^0[\alpha, \beta]$, $k = 1, 2, \dots, n$),
és $\varphi(\alpha) = \underline{a}$, $\varphi(\beta) = \underline{b}$. Az $\{ \underline{x} = \varphi(t) : t \in [\alpha, \beta] \} \subset \mathbb{R}^n$ halmazt az $\underline{a}$ és
 $\underline{b}$ pontokat összekötő folytonos utnak nevezzük. Röviden azt mondjuk, hogy
 $\varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontokat összekötő folytonos ut.

1.2 Definíció. A $H \subset \mathbb{R}^n$ tartományt összefüggőnek nevezzük, ha bármely két
pontja összeköthető H -ban haladó folytonos uttal, vagyis ha min-
den $\underline{a} \in H$ és $\underline{b} \in H$ -hoz van $\varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ folytonos ut,
melyre $\varphi(\alpha) = \underline{a}$, $\varphi(\beta) = \underline{b}$ és $\varphi(t) \in H$, $t \in [\alpha, \beta]$.

1.2 Példa. Legyen $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. "Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pon-
tokat összekötő egyenes egyenlete"

$$\underline{x} = (\underline{b} - \underline{a})t + \underline{a}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

vagyis

$$x_k = (b_k - a_k)t + a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ennek az egyenesnek az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontok közé eső "szakasza" az
 $\{ \underline{x} = \varphi(t) : t \in [0, 1] \}$ ponthalmaz, ahol

$$\varphi(t) = (\underline{b} - \underline{a})t + \underline{a} = ((b_1 - a_1)t + a_1, \dots, (b_n - a_n)t + a_n), \quad \varphi(t), \quad t \in [0, 1]$$

az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontokat összekötő folytonos utak egyike, hiszen

$$\varphi(0) = \underline{a}, \quad \varphi(1) = (\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a} = \underline{b}, \text{ és a } \varphi_k(t) = (b_k - a_k)t + a_k$$

függvény folytonos, $k = 1, 2, \dots, n$.

1.3 Definíció. A $H \subset \mathbb{R}^n$ tartományt konvexnek nevezzük, ha bármely két pont-
jával együtt az azokat összekötő egyenesszakaszt is tartalmazza,
vagyis, ha

$$\underline{a}, \underline{b} \in H \Rightarrow (\underline{b} - \underline{a})t + \underline{a} \in H, \quad t \in [0, 1].$$

A távolságfogalom lehetőséget nyújt arra, hogy az $\mathbb{R}^n$ térben "közele",
ill. "távol" pontokról, pontok környezetéről, pontsorozatok limeszéről stb.
beszéljünk. Ezek a fogalmak nélkülözhetetlenek a többváltozós függvények ana-
lizisében.

A (tömör) golyó szemléletes fogalmának általánosításaként értelmezzük
az "n-dimenziós golyót".

1.4 Definíció. Legyen $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ és $r > 0$ szám; $\mathbb{R}^n$ azon pontjainak halmazát,
melyek $\underline{a}$ -tól r -nél kisebb távolságra vannak, vagyis a

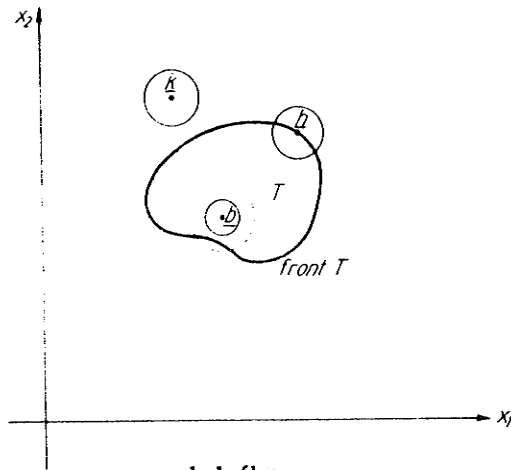
$$K_{\underline{a}, r} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\underline{x}, \underline{a}) < r \}$$

halmazt a középpontu r sugaru golyónak, illetőleg az a pont r sugaru környezetének nevezzük.

Ha az a pont környezete sugarának nincs jelentősége, akkor az a pont K_a környezetéről beszélünk (v. ö. I. Kötet, 12.2 Definíció). Az $n = 1$ esetben az $a \in \mathbb{R}$ pont $r > 0$ sugaru környezete az $(a-r, a+r)$ nyílt intervallum. Az $n = 2$ esetben az $a \in \mathbb{R}^2$ pont $r > 0$ sugaru környezete a sík azon pontjainak halmaza, melyek a -tól mért távolsága r -nél kisebb, vagyis $K_{a,r}$ az a középpontu r sugaru körlap (az a középpontu r sugaru körvonal nélkül).

1.5 Definíció. Legyen a $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány adott; a b , k , ill. h pontot D belső, külső, ill. határpontjának nevezzük, ha van K_b környezet, melyre $K_b \subset D$, van K_k környezet, melyre $K_k \cap D = \emptyset$, ill. minden K_h környezetre $K_h \cap D \neq \emptyset$ és $K_h \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq \emptyset$

1.6 Definíció. A $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány határpontjainak halmazát D határának nevezzük és front D -vel jelöljük (la frontière, francia).



1.1 ábra

Az előbbi két definícióval kapcsolatban lásd az 1.1 ábrát. Látható, hogy $\mathbb{R}^n$ pontjainak egy adott D tartományra vonatkoztatott felosztása belső, külső ill. határpontokra, teljes osztályozás. Nyilvánvaló, hogy ha b a D tartomány belső pontja, akkor $b \in D$, ill. ha k a D tartomány külső pontja, akkor $k \notin D$. Ha h a D tartomány határpontja, akkor az is lehet, hogy h eleme D -nek és az is, hogy nem. Különösen fontos szerepet játszanak azok a tartományok, melyeknek egyetlen határpont sem elemük, ill. azok, melyek összes határpontjukat tartalmazzák.

1.7 Definíció. Az $U \subset \mathbb{R}^n$ tartományt nyíltnak nevezzük, ha minden $\underline{x} \in U$ -hoz van $K_{\underline{x}}$ környezet, melyre $K_{\underline{x}} \subset U$, vagyis ha U minden pontja belső pont.

1.8 Definíció. A $V \subset \mathbb{R}^n$ tartományt zártnak nevezzük, ha összes határpontját tartalmazza, vagyis ha $\text{front } V \subset V$.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a nyílt, ill. a zárt tartományok speciális szélső esetek. Vannak, és ez az általános eset, "sem nem nyílt sem nem zárt" tartományok. Az egész tér, $\mathbb{R}^n$ és az üres halmaz nyílt is és zárt is. Valamely D tartomány határpontjainak halmaza megegyezik D komplementere, $\mathbb{R}^n \setminus D$, határpontjainak halmazával, vagyis $\text{front } D = \text{front } (\mathbb{R}^n \setminus D)$. Ezért nyilván igaz a következő

1.1 Tétel. Az $U \subset \mathbb{R}^n$ tartomány akkor és csak akkor nyílt (zárt), ha komplementere, $\mathbb{R}^n \setminus U$ zárt (nyílt).

1.9 Definíció. A $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány lezárásának nevezzük a $\bar{D} = D \cup \text{front } D$ tartományt.

Nyilvánvaló, hogy bármely D tartomány $\bar{D}$ lezárása zárt, ill. V akkor és csak akkor zárt tartomány, ha $V = \bar{V}$. Zárt tartomány nem szükségképpen korlátos.

1.3 Példa. Az $x_1 = 0$ egyenletű "hipersík" az $\mathbb{R}^n$ teret két féltérre osztja az $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \geq 0\}$ féltér zárt. U. i. e féltér határa az $x_1 = 0$ egyenletű sík és ennek pontjai hozzátartoznak a féltérhez.

1.4 Példa. Tetszőleges $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pont tetszőleges $K_{\underline{a}, r}$ környezete nyílt tartomány. Legyen u. i. $\underline{x} \in K_{\underline{a}, r}$ és $\rho(\underline{a}, \underline{x}) = r_1$. Mivel $r_1 < r$, ezért $r - r_1 > 0$. Képezzük $\underline{x}$ $(r - r_1)$ sugarú $K_{\underline{x}, r - r_1}$ környezetét. Ha $\underline{y} \in K_{\underline{x}, r - r_1}$, az M4.) háromszög egyenlőtlenség miatt $\rho(\underline{a}, \underline{y}) \leq \rho(\underline{a}, \underline{x}) + \rho(\underline{x}, \underline{y}) < r_1 + r - r_1 = r$, vagyis $\underline{y} \in K_{\underline{a}, r}$. Tehát $\underline{x}$ -nek van $K_{\underline{x}, r - r_1}$ környezete, melyre $K_{\underline{x}, r - r_1} \subset K_{\underline{a}, r}$.

A $K_{\underline{a}, r}$ golyó határa, $\text{front } K_{\underline{a}, r}$ az " $\underline{a}$ " középpontu r sugarú gömb, melynek egyenlete $\rho(\underline{a}, \underline{x}) = r$. A $K_{\underline{a}, r}$ golyó lezárását, $\bar{K}_{\underline{a}, r}$ -et zárt golyónak nevezzük. $K_{\underline{a}, r}$ konvex tartomány. Ugyanis, ha $\underline{b} \in K_{\underline{a}, r}$ és $\underline{c} \in K_{\underline{a}, r}$, akkor a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ pontokat összekötő $\underline{x} = (\underline{c} - \underline{b})t + \underline{b}$, $t \in [0, 1]$ szakasz minden pontja $K_{\underline{a}, r}$ -hez tartozik, mivel

$$\begin{aligned}
\rho^2((c-b)t + b, a) &= \sum_{k=1}^n (c_k t + b_k(1-t) - a_k)^2 = \\
&= \sum_{k=1}^n (c_k t + b_k(1-t) - a_k t - a_k(1-t))^2 = \\
&= \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 t^2 + \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2 (1-t)^2 + \\
&\quad + 2 \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)(b_k - a_k)t(1-t) \leq \\
&\leq t^2 \rho^2(c, a) + (1-t)^2 \rho^2(b, a) + 2t(1-t) \rho(c, a) \rho(b, a) = \\
&= (t \rho(c, a) + (1-t) \rho(b, a))^2 \leq \rho^2(c, a) < r^2, \quad t \in [0, 1],
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a Cauchy-féle egyenlőtlenséget (lásd III. kötet, 16,2 Következmény) és az általánosság megszorítása nélkül feltettük, hogy

$$\rho(b, a) \leq \rho(c, a) \text{.!}$$

1.5 Példa. Tetszőleges D tartomány határa, front D zárt tartomány. Legyen $\underline{h}$ a front D tartomány tetszőleges határpontja és $K_{\underline{h}, r}$ $\underline{h}$ -nak tetszőleges környezete. $K_{\underline{h}, r}$ -ben van pontja front D -nek. Legyen $\underline{f} \in K_{\underline{h}, r} \cap \text{front } D$ és $r_1 = \rho(\underline{h}, \underline{f}) < r$; képezzük $\underline{f}$ -nek $K_{\underline{f}, r-r_1}$ környezetét. Az előző példában követett okoskodás szerint $K_{\underline{f}, r-r_1} \subset K_{\underline{h}, r}$. $\underline{f}$ azonban D határpontja, így $K_{\underline{f}, r-r_1}$ -ben és ennek következtében $K_{\underline{h}, r}$ -ben is van D -hez tartozó és D -hez nem tartozó pont. Mivel $K_{\underline{h}, r}$ $\underline{h}$ -nak tetszőleges környezete volt, azt kaptuk, hogy $\underline{h}$ D -nek határpontja, vagyis $\underline{h} \in \text{front } D$!

1.2 Tétel. Tetszőlegesen sok nyílt halmaz egyesítése nyílt.

Bizonyítás. Legyen $U = \bigcup_{\mu \in M} U_\mu$ ahol M tetszőleges indexhalmaz és $U_\mu \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $\mu \in M$. Ha $\underline{x} \in U$, akkor van $\mu_0 \in M$, hogy $\underline{x} \in U_{\mu_0}$. Mivel U_{μ_0} nyílt, van $K_{\underline{x}, r}$ környezet, melyre $K_{\underline{x}, r} \subset U_{\mu_0} \subset U$. Tehát $\underline{x}$ belső pontja U -nak.!

1.3 Következmény. Tetszőlegesen sok zárt halmaz közös része zárt.

Bizonyítás. Legyen $V = \bigcap_{\mu \in M} V_\mu$, ahol M tetszőleges indexhalmaz és $V_\mu \subset \mathbb{R}^n$ zárt, $\mu \in M$. Az I. Kötet, (1.8) második de Morgan-féle azonosság felhasználásával (ott a felülvonás a komplementer képzést jelöli) V komplementere

$$\mathbb{R}^n \setminus V = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{\mu \in M} V_\mu = \bigcup_{\mu \in M} (\mathbb{R}^n \setminus V_\mu).$$

Mivel V_μ zárt, az 1.1 Tétel szerint $\mathbb{R}^n \setminus V_\mu$ nyílt és így az 1.2 Tétel szerint $\mathbb{R}^n \setminus V$ is nyílt. Az 1.1 Tétel újbóli felhasználásával adódik, hogy V zárt.!

1.4 Tétel. Véges számú nyílt halmaz közös része nyílt.

Bizonyítás. Legyen $U = \bigcap_{k=1}^m U_k$, ahol $U_k \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $k = 1, 2, \dots, m$. Ha $\underline{x} \in U$, akkor $\underline{x}$ minden U_k -nak is eleme és minden k -ra van $K_{\underline{x}, r_k}$ golyó, hogy $K_{\underline{x}, r_k} \subset U_k$, $k = 1, 2, \dots, m$. Legyen $r = \min r_k$; ekkor $K_{\underline{x}, r} \subset K_{\underline{x}, r_k} \subset U_k$, minden $k = 1, 2, \dots, m$ -re vagyis $K_{\underline{x}, r} \subset U$. Mivel U minden pontjának egy környezetét is tartalmazza, U nyílt.!

1.5 Következmény. Véges számú zárt halmaz egyesítése zárt.

Bizonyítás. Az 1.3 Következmény bizonyításához hasonló gondolatmenettel adódik.!

1.6 Példa. Legyen $a_k < b_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$; az (a_k, b_k) nyílt intervallumok direkt szorzatát, ill. az $[a_k, b_k]$ zárt intervallumok direkt szorzatát (lásd I. Kötet, 3.1 Definíció), $k = 1, 2, \dots, n$, n -dimenziós nyílt téglának, ill. zárt téglának nevezzük és $(\underline{a}; \underline{b})$ -vel, ill. $[\underline{a}; \underline{b}]$ -vel jelöljük. Más szóval

$$(\underline{a}; \underline{b}) = \{ (x_1, \dots, x_n) : a_k < x_k < b_k, k = 1, 2, \dots, n \},$$

illetve

$$[\underline{a}; \underline{b}] = \{ (x_1, \dots, x_n) : a_k \leq x_k \leq b_k, k = 1, 2, \dots, n \}.$$

Könnyen belátható, hogy az $(\underline{a}; \underline{b})$ nyílt téglát nyílt tartomány, az $[\underline{a}; \underline{b}]$ zárt téglát zárt tartomány és $(\underline{a}; \underline{b})$ lezárása $(\underline{a}; \underline{b}) = [\underline{a}; \underline{b}]$. Megmutatjuk, hogy az $(\underline{a}; \underline{b})$ téglát átmérője

$$d(\underline{a}; \underline{b}) = \left(\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

Legyen $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (a; b)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in (a; b)$. Mivel $a_k < x_k < b_k$, $a_k < y_k < b_k$, ezért $(y_k - x_k)^2 < (b_k - a_k)^2$, $k = 1, 2, \dots, n$. Így $\rho(\underline{x}, \underline{y}) < \left(\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, tehát az (1.5) jobb oldalán álló szám a téglapontjai egy-

mástól mért távolságainak felső korlátja. Megmutatjuk, hogy ez egyben a legkisebb felső korlát, vagyis hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz van a téglának olyan két pontja, melyek távolsága $\left(\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon$ -nél nagyobb. Tekintsük az $\underline{a}$ és $\underline{b}$

pontokat összekötő egyenes szakaszt (lásd 1.2 Példa), melynek egyenlete $\underline{x} = (\underline{b} - \underline{a})t + \underline{a}$, $t \in [0, 1]$. A $t = 0$ és $t = 1$ értékekhez tartozó pontok, $\underline{a}$ és $\underline{b}$ kivételével e szakasz minden pontja a téglához tartozik. Legyen $0 < \tau < \frac{1}{2}$

és $\underline{x} = (\underline{b} - \underline{a})\tau + \underline{a}$, $\underline{y} = (\underline{b} - \underline{a})(1 - \tau) + \underline{a}$; ekkor $\underline{x}, \underline{y} \in (a; b)$ és

$$\begin{aligned} \rho(\underline{x}, \underline{y}) &= \left(\sum_{k=1}^n [(b_k - a_k)\tau + a_k - ((b_k - a_k)(1 - \tau) + a_k)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n [2\tau(b_k - a_k) + a_k - b_k]^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2 (1 - 2\tau)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (1 - 2\tau) \left(\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 2\tau \left(\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} > \\ &> \left(\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon, \end{aligned}$$

ha

$$\tau < \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ugyanígy látható be, hogy az $[\underline{a}; \underline{b}]$ zárt téglapontjait is (1.5) szolgáltatja.

A $\underline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ pontot, ahol $c_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, az

$[a; b]$ téglapontjainak nevezzük. Az $x_1 = c_1$ hipersíkkal az $[a; b]$ téglát két egyenlő téglára vágjuk szét. Az $x_2 = c_2$ hipersíkkal a két téglát újabb két-két téglára vágjuk. Az eljárást tovább folytatva, az n -edik lépésben

az $x_n = c_n$ hipersikkal kettévágva az addig keletkezett téglákat, végülis az eredeti téglát 2^n számú egyenlő téglára bontható fel:

$$[a; c],$$

$$\{(x_1, \dots, x_n); a_1 \leq x_1 \leq c_1, \dots, a_{n-1} \leq x_{n-1} \leq c_{n-1}, c_n \leq x_n \leq b_n\}, \dots$$

$$\dots, [c; b].$$

Az így keletkezett 2^n számú téglát mindegyikének átmérője pl. $[a; c]$ átmérőjével egyenlő és

$$d[a; c] = \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{a+b}{2} - a_k \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \frac{(b-a_k)^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} d[a; b]. \quad (1.6)$$

Az itt elmondottak összhangban vannak a közönséges tér téglatestjeinek elemi tulajdonságaival.

2. Pontsorozatok. Torlódási pontok

Az R^n tér pontsorozatát a végtelen numerikus sorozatokhoz (lásd I. Kötet, Negyedik fejezet) hasonlóan, mint a természetes számok halmazának R^n -be való leképezéseit értelmezzük. Ilyen értelemben beszélünk az x_k , $k \in T$ végtelen pontsorozatról, melynek k -adik tagja $x_k \in R^n$. A végtelen pontsorozat korlátos, ha a tagjaiból álló tartomány korlátos.

2.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy az x_k , $k \in T$ pontsorozat konvergens, és határértéke az a pont,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a,$$

ha minden $K_{a, \varepsilon}$ környezethez van $N \in T$, melyre $k \geq N$ -ből $x_k \in K_{a, \varepsilon}$ következik, más szóval, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $N \in T$, melyre $k \geq N$ -ből $\rho(x_k, a) < \varepsilon$ következik.

Ha a pontsorozat nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük. Könnyen látható, hogy ha a pontsorozat konvergens, akkor korlátos. Az olvasóra bizzuk a következő egyszerű tétel bizonyítását:

2.1 Tétel. Legyen $\underline{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$, $k \in T$, és $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$; $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \underline{a}$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

2.2 Tétel. (Bolzano-Weierstrass-tétel, v.ö. I. Kötet, 16.2 Tétel). Korlátos pontsorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Legyen $\underline{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$, $k \in T$, korlátos pontsorozat. Ekkor az x_{k1} , $k \in T$, numerikus sorozat is korlátos, van tehát konvergens részsorozata: $x_{i_k 1}$, $k \in T$. Az $x_{i_k 2}$, $k \in T$ numerikus sorozat korlátos, ezért van konvergens részsorozata: $x_{i_{j_k} 2}$, $k \in T$. Az $x_{i_{j_k} 1}$, $k \in T$, sorozat azonban a konvergens $x_{i_k 1}$, $k \in T$ pontsorozat részsorozata, tehát maga is konvergens. Az $x_{i_{j_k} 1}$, $k \in T$ pontsorozat ezek szerint már olyan, hogy az első, ill. a második koordinátából alkotott két numerikus sorozat konvergens. Az eljárást tovább folytatva, a harmadik koordinátából alkotott korlátos sorozatból kiválasztva egy konvergens részsorozatot és így tovább, n lépés után olyan $\underline{x}_{m_k}$, $k \in T$, pontsorozatot kapunk, amelynek mindegyik koordináta-sorozata konvergens, mely tehát az előző tétel szerint maga is konvergens.!

2.3 Tétel. (Cauchy-féle kritérium). Az $\underline{x}_k$, $k \in T$ pontsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $N \in T$, hogy minden $k, h > N$ -re $\rho(\underline{x}_k, \underline{x}_h) < \varepsilon$.

Bizonyítás. A bizonyítás az I. Kötet. 16.3 Tétel bizonyításának gondolatmenetét követi (a megfelelő becslések a háromszög egyenlőtlenség alapján végezhető), így azt nem részletezzük.!

2.2 Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ végtelen (végtelen sok elemet tartalmazó) pont-halmaz; az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontot D torlódási pontjának nevezzük, ha minden $K_{\underline{a}}$ környezethez van végtelen számosságú $A \subset D$, melyre $A \subset K_{\underline{a}}$.

Torlódási pont minden környezetében tehát a halmaznak végtelen sok eleme van. Az előbbivel ekvivalens a következő definíció (az ekvivalencia az I. Kötet, 17.1 és 17.1' Definíciók ekvivalenciájával analóg módon látható be)!

2.2' Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ végtelen ponthalmaz; az $a \in \mathbb{R}^n$ pontot D torlódási pontjának nevezzük, ha minden K_a környezetre $K_a \cap (D \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, vagyis ha a minden környezetében van D-nek a -tól különböző pontja.

Természetesen általában abból, hogy a a D halmaz torlódási pontja, nem következik $a \in D$. Érvényes azonban a következő

2.4 Tétel. A V tartomány akkor és csak akkor zárt, ha összes torlódási pontját tartalmazza.

Bizonyítás. Tételizzük fel először, hogy V tartalmazza összes torlódási pontját. Be kell bizonyítanunk, hogy V összes határpontja V-nek eleme. Legyen h V-nek tetszőleges határpontja. Ha $h \in V$, akkor nincs mit bizonyítani. Ha feltételezzük, hogy $h \notin V$, akkor az 1.4 Definíció szerint h minden környezetében van V-nek (h -tól különböző) pontja, vagyis h V-nek torlódási pontja, tehát mint ilyen, $h \in V$, ami ellentmondás. Fordítva, tételizzük fel, hogy V zárt és legyen a V-nek tetszőleges torlódási pontja. Mivel ekkor a minden környezetében van V-nek (a -tól különböző) pontja, az 1.5 Definíció szerint a vagy belső pont, vagy határpont. Miután V zárt, ebből $a \in V$ következik. E tételtől könnyen kapható a

2.5 Következmény. Legyen V zárt tartomány és $x_k, k \in T$, konvergens pontsorozat, melyre $x_k \in V, k \in T$, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in V$.

2.6 Tétel. Korlátos végtelen ponthalmaznak van torlódási pontja.

Bizonyítás. Legyen D korlátos, végtelen sok pontot tartalmazó tartomány. Miután D-nek végtelen sok eleme van, D elemeiből alkotható olyan $x_k, k \in T$, pontsorozat, melynek minden tagja különböző: $x_k \neq x_h, k \neq h$ (létezik a természetes számok T halmazának D-be történő egy-egyértelmű leképezése, lásd I. Kötet, 2.1 és 4.2 Definíció, valamint a 13.1 Tételt követő megjegyzés). Mivel D korlátos és $x_k \in D, k \in T$, pontsorozat is korlátos. A 2.2 Tétel szerint tehát kiválasztható belőle konvergens részsorozat: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. a a D tartomány torlódási pontja, mivel minden K_a környezetre $x_k \in K_a$, ha k elég nagy, $x_k \neq x_h, k \neq h$, és így K_a a D tartomány végtelen sok pontját tartalmazza.!

A következőkben néhány korlátos, zárt tartományokra vonatkozó alapvető tételt bizonyítunk.

2.7 Tétel. Legyen V nem üres, korlátos és zárt, W pedig nem üres, zárt tartomány és $V \cap W = \emptyset$; ekkor van $\underline{v} \in V$ és $\underline{w} \in W$, hogy

$$\rho(V, W) = \rho(\underline{v}, \underline{w}) > 0,$$

az ilyen tartományok közötti távolság tehát pozitív.

Bizonyítás. (1.3) szerint $\rho(V, W) = \inf_{\substack{\underline{x} \in V, \underline{y} \in W}} \rho(\underline{x}, \underline{y})$, vagyis minden k pozitív egész számhoz van $\underline{x}_k \in V$ és $\underline{y}_k \in W$, hogy $\rho(V, W) \leq \rho(\underline{x}_k, \underline{y}_k) < \rho(V, W) + \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Így $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\underline{x}_k, \underline{y}_k) = \rho(V, W)$. Mivel V korlátos, az $\underline{x}_k$, $k = 1, 2, \dots$ pontsorozat is korlátos és ezért kiválasztható belőle $\underline{x}_{i_k}$, $k \in T$,

konvergens részsorozat (2.2 Tétel). Mivel minden $k \in T$ -re $\rho(\underline{x}_{i_k}, \underline{y}_{i_k}) < \rho(V, W) + \frac{1}{i_k} \leq \rho(V, W) + 1$, az $\underline{y}_{i_k}$, $k \in T$, pontsorozat is korlátos, van tehát konvergens részsorozata: $\underline{y}_{i_{m_k}}$, $k \in T$. Az $\underline{x}_{i_{m_k}}$, $k \in T$, pontsorozat az $\underline{x}_{i_k}$, $k \in T$ kon-

vergens pontsorozat részsorozata, tehát ez is konvergens. A 2.5 Következmény szerint $\underline{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_{i_{m_k}} \in V$ és $\underline{w} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{y}_{i_{m_k}} \in W$, továbbá

$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\underline{x}_{i_{m_k}}, \underline{y}_{i_{m_k}}) = \rho(V, W)$. A háromszög egyenlőtlenség miatt

$$\rho(\underline{v}, \underline{w}) \leq \rho(\underline{v}, \underline{x}_{i_{m_k}}) + \rho(\underline{x}_{i_{m_k}}, \underline{y}_{i_{m_k}}) + \rho(\underline{y}_{i_{m_k}}, \underline{w})$$

és

$$\rho(\underline{x}_{i_{m_k}}, \underline{y}_{i_{m_k}}) \leq \rho(\underline{v}, \underline{x}_{i_{m_k}}) + \rho(\underline{v}, \underline{w}) + \rho(\underline{y}_{i_{m_k}}, \underline{w}),$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \rho(\underline{x}_{i_{m_k}}, \underline{y}_{i_{m_k}}) - \rho(\underline{v}, \underline{x}_{i_{m_k}}) - \rho(\underline{w}, \underline{y}_{i_{m_k}}) &\leq \rho(\underline{v}, \underline{w}) \leq \\ &\leq \rho(\underline{x}_{i_{m_k}}, \underline{y}_{i_{m_k}}) + \rho(\underline{v}, \underline{x}_{i_{m_k}}) + \rho(\underline{w}, \underline{y}_{i_{m_k}}) \end{aligned}$$

következik. Mivel az utóbbi egyenlőtlenség lánc első és utolsó tagja $k \rightarrow \infty$ esetén $\rho(V, W)$ -hez tart, $\rho(\underline{v}, \underline{w}) = \rho(V, W)$, és miután $V \cap W = \emptyset$ miatt $\underline{v} \neq \underline{w}$, a távolság pozitív.!

Hasonlóan bizonyítható a következő

2.8 Tétel. Ha V nem üres, korlátos, zárt tartomány, akkor van $\underline{v}, \underline{w} \in V$, hogy V átmérője

$$d(V) = \rho(\underline{v}, \underline{w}).$$

2.9 Tétel. (Cantor-féle tulajdonság, v.ö. I. Kötet, 12.1 Tétel). Legyen V_k , $k \in T$, nem-üres, korlátos, zárt tartományok "egymásba skatulyázott" sorozata, vagyis $V_k \supset V_{k+1}$, $k \in T$; ekkor $\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Válasszuk ki tetszőlegesen a $\underline{v}_k \in V_k$, $k \in T$, pontokat. Mivel a $\underline{v}_k$, $k \in T$, pontsorozat korlátos, kiválasztható belőle konvergens részsorozat (2.2 Tétel): $\underline{v}_{m_k}$, $k \in T$, melyre $\underline{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{v}_{m_k}$. Legyen $m \in T$ tetszőlegesen adott; bizonyos k -től kezdve $m_k > m$ és így $\underline{v}_{m_k} \in V_{m_k} \subset V_m$. Mivel V_m zárt, a 2.5 Következmény szerint $\underline{v} \in V_m$. $\underline{v}$ tehát minden V_m tartománynak eleme, így $\underline{v} \in \bigcap_{k=1}^m V_k$!

2.10 Tétel. (Borel-féle lefedési tétel, v.ö. I. Kötet, 12,2 Tétel). Legyen $V \subset \mathbb{R}^n$ nem üres, korlátos, zárt tartomány és a $\{K^\mu : \mu \in M\}$ (nyílt) golyók halmaza (M tetszőleges indexhalmaz) fedje le V -t, vagyis legyen $V \subset \bigcup_{\mu \in M} K^\mu$; ekkor a $\{K^\mu : \mu \in M\}$ halmazból kiválasztható véges számú golyó, mely lefedti V -t.

Bizonyítás. A tételt reductio ad absurdummal bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy nem választható ki véges sok K^μ golyó úgy, hogy ezek egyesítése lefedje V -t. Mivel V korlátos, van B zárt tégl (lásd 1.6 Példa), hogy $V \subset B$. Jelöljük B átmérőjét $d = d(B)$ -vel. Bontsuk fel B -t az 1.6 Példában vázolt módon 2^n számú egyenlő, zárt téglára, vagyis legyen $B = \bigcup_{i=1}^{2^n} B_{ii}$, ahol B_{ii} zárt tégl és $d(B_{ii}) = \frac{1}{2} d$, $i = 1, 2, 3, \dots, 2^n$. Az I. Kötet (1.6) azonosság felhasználásával

$$V = V \cap B = V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{2^n} B_{ii} \right) = \bigcup_{i=1}^{2^n} (V \cap B_{ii}).$$

A $V \cap B_{1i}$ tartományok az 1.3 Következmény miatt zártak. A $V \cap B_{1i}$ tartományok között lehetnek üresek, ezektől tekintsünk el. A nem üres $V \cap B_{1i}$ tartományok között van olyan, amelyet nem fed le véges számú K^μ golyó, mert ha mind lefedhető lenne véges sok golyóval, akkor egyesítésük, V is lefedhető lenne a feltevessel ellentétben. Jelöljük $V \cap B_1$ -gyel ezt a nem üres, zárt tartományt. Nyilván

$$V \supset V \cap B_1 \quad \text{és} \quad d(V \cap B_1) \leq d(B_1) = \frac{1}{2} d.$$

A B_1 téglát bontsuk fel az 1.6 Példában vázolt módon 2^n számú egyenlő, zárt

téglára, vagyis legyen $B_1 = \bigcup_{i=1}^{2^n} B_{2i}$, ahol B_{2i} zárt téglá és $d(B_{2i}) = \frac{1}{2^n} d$, $i = 1, 2, \dots, 2^n$.

$$V \cap B_1 = V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{2^n} B_{2i} \right) = \bigcup_{i=1}^{2^n} (V \cap B_{2i}).$$

A $V \cap B_{2i}$ zárt tartományok között van olyan, amelyet nem fed le véges számú K^μ golyó, mert ha nem lenne, akkor $V \cap B_1$ -et is lefedné véges sok. Jelöljük $V \cap B_2$ -vel ezt a nem üres, zárt tartományt. Nyilván

$$V \supset V \cap B_1 \supset V \cap B_2 \quad \text{és} \quad d(V \cap B_2) \leq d(B_2) = \frac{1}{2^2} d.$$

Most a B_2 téglát bontsuk fel, és így tovább. Az eljárást vég nélkül folytatva nem üres, zárt tartományok egymásba skatulyázott

$$V \supset V \cap B_1 \supset V \cap B_2 \supset \dots \supset V \cap B_k \supset \dots$$

sorozatot nyerjük. $d(V \cap B_k) \leq \frac{d}{2^k}$ és a $V \cap B_k$ tartomány nem fedhető le véges számú K^μ golyóval, $k = 1, 2, 3, \dots$. A 2.9 Tétel szerint van

$$\underline{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (V \cap B_k) \subset V \subset \bigcup_{\mu \in M} K^\mu.$$

Ezek szerint van $\mu_0 \in M$, hogy a $K^{\mu_0} = K_{\underline{a}, r}$ golyónak $\underline{x}$ eleme: $\underline{x} \in K_{\underline{a}, r}$. Legyen $\rho(\underline{a}, \underline{x}) = r_1 < r$. Amint az 1.4 Példában láttuk, $K_{\underline{x}, r-r_1} \subset K_{\underline{a}, r}$.

Ha k elég nagy, akkor $d(V \cap B_k) \leq \frac{d}{2k} < r - r_1$ és mivel $\underline{x} \in V \cap B_k$, a $V \cap B_k$ tartomány minden pontjának $\underline{x}$ -től vett távolsága $(r - r_1)$ -nél kisebb. Tehát

$$V \cap B_k \subset K_{\underline{x}, r-r_1} \subset K_{\underline{a}, r} = K^{\mu_0},$$

vagyis a $V \cap B_k$ tartományt egyetlen K^{μ_0} golyó lefedi, ami ellentmond annak, hogy $V \cap B_k$ nem fedhető le véges számú K^{μ} golyóval.!

3. Függvény határértéke

Az f függvényt n változós ($n = 1, 2, \dots$) valós függvénynek nevezzük, ha D_f értelmezési tartománya a valós szám n -esek R^n terének részhalmaza, érték halmaza pedig R , vagyis ha:

$$f: D_f \rightarrow R, \quad \text{ahol} \quad D_f \subset R^n,$$

$$f(\underline{x}) \in R, \quad \text{ha} \quad \underline{x} \in D_f, \quad (\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

A gyakorlatban sűrűn fordulnak elő n változós függvények, amikor is valamely skalár mennyiséget n darab változó skaláris mennyiség egyértelműen határoz meg. Például adott tömegű gáz V térfogatát a p nyomás és a T hőmérséklet egyértelműen meghatározza:

$$V: D_V \rightarrow R, \quad \text{ahol} \quad D_V \subset R^2,$$

$$V(\underline{x}) \in R, \quad \text{ha} \quad \underline{x} \in D_V, \quad (\underline{x} = (p, T)).$$

kétváltozós függvény.

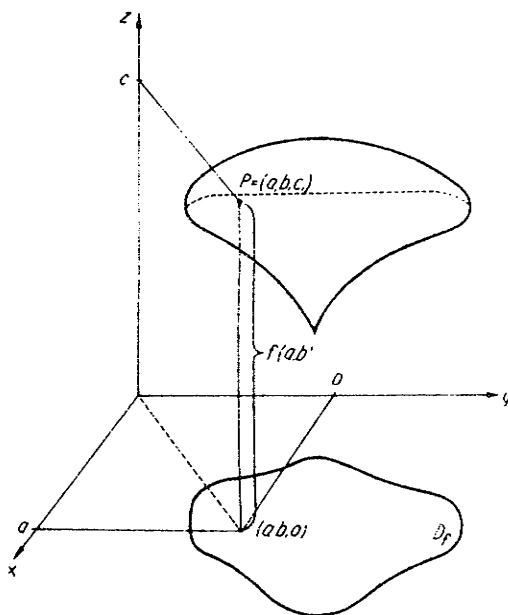
3.1 Példa. Az $f(\underline{x}) = x_3 (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{-\frac{1}{2}}$ formulával értelmezett háromváltozós függvény értelmezési tartománya azon $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ számhármassok halmaza, amelyekre

$$1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1,$$

vagyis $\rho(\underline{x}, \underline{0}) < 1$, tehát D_f az origó középpontú, egységnyi sugaru háromdimenziós golyó.

Az $f: D_f \rightarrow R$, ahol $D_f \subset R^3$, $f(x_1, x_2) \in R$ kétváltozós függvény lehetséges geometriai interpretációja a háromdimenziós tér bizonyos felületdarabja.

Vezessünk be a háromdimenziós térben egy (x, y, z) Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert. A $\underline{p} = (a, b, c)$ pont akkor és csak akkor legyen rajta a felületen, ha $(a, b) \in D_f$ és $c = f(a, b)$ (lásd 3.1 ábra). Az így definiált felület az f kétváltozós függvény grafikonja (lásd I. Kötet, 3.2 Definíció).



3.1 ábra

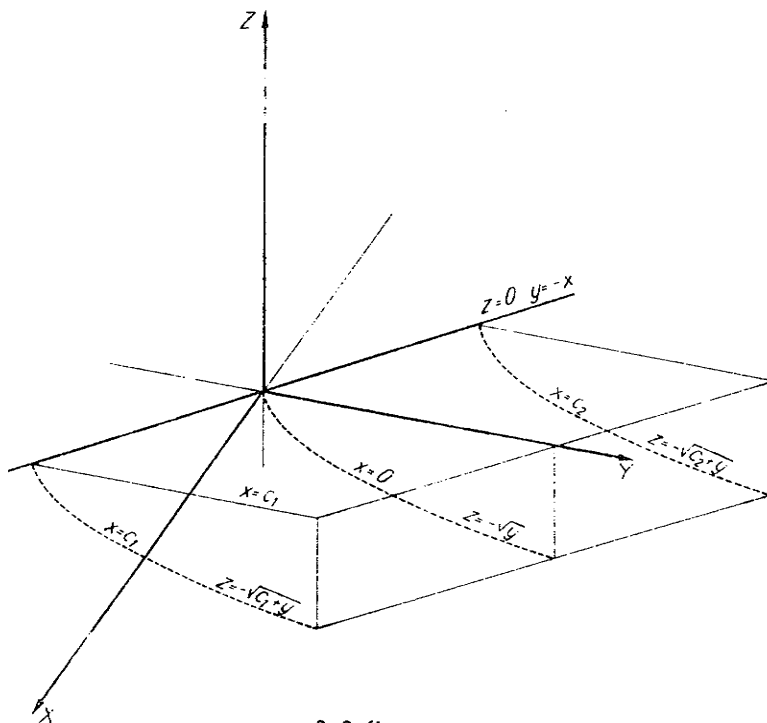
3.2 Példa. Az $f(x, y) = -\sqrt{x+y}$ formulával értelmezett kétváltozós függvény értelmezési tartománya az x, y síkban az $x+y \geq 0$ félsík. A grafikon pontjait a $\underline{p} = (x, y, -\sqrt{x+y})$ koordinátájú pontok alkotják, ahol $x+y \geq 0$. Megvizsgálva a felületnek az $x = c$, illetve $z = c$ (c állandó) síkokkal való metszetgörbéit, könnyen láthatjuk, hogy felületünk parabolikus félhenger, amelynek alkotói a $z = 0$, $y + x = 0$ egyenessel párhuzamosak és vezérgörbéje az $x = 0$, $z = -\sqrt{y}$ parabolaiv (lásd 3.2 ábra).

Az egyváltozós függvényekhez analóg módon definiálhatjuk két n változós valós függvény összegét, szorzatát, hányadosát (lásd II. Kötet 1.1, 1.2, 1.3 Definíciók).

Monoton növekedő n változós függvényekről nem beszélhetünk, mivel az n dimenziós tér ($n \geq 2$) pontjai nagyság szerint nem rendezhetők.

Minden változtatás nélkül átvihetők a II. Kötet 1.5, 1.8, 1.9 Definíciói n változós függvényekre is. Így például az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvényt akkor nevezzük felülről korláatosnak, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq K$, minden $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ -re. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvénynek az $\underline{a} \in D$ pontban lokális maximuma van, ha létezik olyan $K_{\underline{a}}$

környezet, hogy $f(\underline{a}) \geq f(\underline{x})$ minden $\underline{x} \in K_{\underline{a}} \cap D$ -re. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvénynek az $\underline{a} \in D$ pontban abszolút maximuma van, ha $f(\underline{a}) \geq f(\underline{x})$ minden $\underline{x} \in D$ -re.



3.2 ábra

3.1 Definíció. Legyen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $D \subset \mathbb{R}^n$, és az $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ pont a D tartomány torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy f határértéke az $\underline{a}$ pontban A ($A \in \mathbb{R}$, vagy $A = \infty$, vagy $A = -\infty$), szimbolikus jelöléssel:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = A,$$

ha A minden $K_A \subset \mathbb{R}$ környezetéhez (egydimenziós környezet) van $\underline{a}$ -nak olyan $K_{\underline{a}} \subset \mathbb{R}^n$ környezete (n dimenziós környezet), hogy minden

$$\underline{x} \in (K_{\underline{a}} \setminus \{\underline{a}\}) \cap D \text{-re } f(\underline{x}) \in K_A.$$

Más megfogalmazásban, az $A \in \mathbb{R}$ esetre szorítkozva:

3.1 Definíció. Legyen $\underline{a}$ a $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ határértéke az $\underline{a}$ pontban A ($A \in \mathbb{R}$), ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $\underline{x}$ -re

$$\underline{x} \in D \text{ és } 0 < \rho(\underline{a}, \underline{x}) < \delta \Rightarrow |f(\underline{x}) - A| < \varepsilon$$

A 3.1 Definícióval $A \in \mathbb{R}$ esetben ekvivalens a

3.2 Definíció. Legyen $\underline{a}$ a $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ -nek az $\underline{a}$ pontban létezik a határértéke, ha minden $\underline{x}_k$, $k \in T$ pontsorozatra, melyre $\underline{x}_k \in D$, $\underline{x}_k \neq \underline{a}$, ($k \in T$) és $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \underline{a}$, az $f(\underline{x}_k)$, $k \in T$ sorozat konvergens.

Nyilvánvaló, hogy ha f -nek $\underline{a}$ -ban a 3.2 Definíció értelmében létezik a határértéke, akkor minden $f(\underline{x}_k)$, $k \in T$ sorozatnak ugyanaz az A szám a határértéke (lásd II. Kötet 4.2 Definíció után következő megjegyzést).

Bebizonyítható, hogy a 3.1 és 3.2 Definíciók ekvivalensek egymással. Az igazoláshoz az egyváltozós függvények esetében alkalmazott gondolatmenet változtatás nélkül felhasználható (lásd II. Kötet 4.1 Tétel).

3.3 Példa. Létezik-e a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ határérték, ha $f(x,y) = xy^2(x^2+y^4)^{-1}$? Le-

gyen $\underline{x}_k$, $k \in T$ tetszőleges 0-hoz tartozó számsorozat ($\underline{x}_k \neq 0$). Bármely $m \in \mathbb{R}$ konstans esetén az $\underline{x}_k = (x_k, mx_k)$, $k \in T$ pontsorozat $\underline{0} = (0,0)$ ponthoz tart:

$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \underline{0}$, és $\underline{x}_k \neq \underline{0}$. A pontsorozat $\underline{x}_k$ pontjában a függvényérték:

$$f(\underline{x}_k) = x_k (mx_k)^2 (x_k^2 + (mx_k)^4)^{-1}.$$

Ennek határértéke $k \rightarrow \infty$ esetén:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} m^2 x_k^3 (x_k^2 + m^4 x_k^4)^{-1} &= \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} m^2 x_k^3 (1 + m^4 x_k^2)^{-1} = 0. \end{aligned}$$

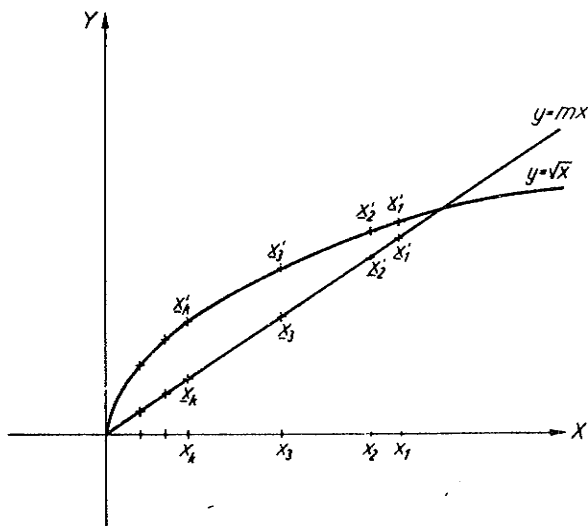
Tehát $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\underline{x}_k) = 0$.

Legyen most az $\underline{x}_k$, $k \in T$ zérussorozat olyan, hogy $x_k > 0$, és képezzük az $\underline{x}'_k = (x_k, \sqrt{x_k})$ pontsorozatot.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}'_k = 0, \text{ és}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f(\underline{x}'_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k (\sqrt{\underline{x}_k})^2 (\underline{x}_k^2 + \sqrt{\underline{x}_k}^4)^{-1} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k^2 (\underline{x}_k^2 + \underline{x}_k^2)^{-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Az f függvény az $\underline{x}_k$ ill. az $\underline{x}'_k$ pontsorozat mentén vett függvényértékeinek a sorozata más-más határértékhez tart. Így az $\underline{x}_k$ és $\underline{x}'_k$ pontsorozatok egyesítésével nyert pontsorozat mentén vett függvényértékek sorozata divergens, tehát a 3.2 Definíció értelmében a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy^2(x^2 + y^4)^{-1}$ határérték nem létezik (lásd 3.3 ábra).



3.3 ábra

3.4 Példa. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$$\alpha) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y + x^2 + y^2} \right), \text{ ahol a belső limeszty } \neq 0 \text{ rögzített értéké-}$$

nél kell kiszámítani;

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y + x^2 + y^2} \right), \text{ ahol a belső limeszt } x \neq 0 \text{ rögzített érté-}$$

kénél kell kiszámítani;

$$\gamma) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y + x^2 + y^2}.$$

Az α) és β) esetben egyváltozós függvények határértékeiről van szó.

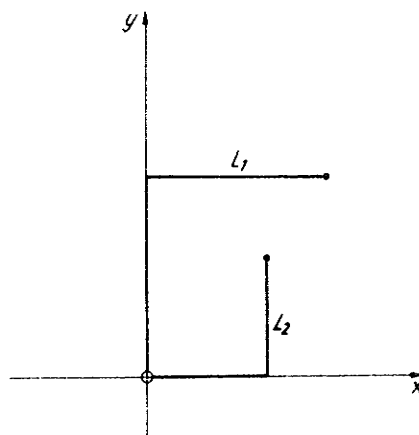
$$\alpha) \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y + x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 - y}{y^2 + y} = -1.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y + x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 + x} = 1.$$

γ) Vegyük észre, hogy az α) esetben kapott eredmény egyben az

$$f(x,y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y + x^2 + y^2} \text{ kétváltozós függvény } L_1 \text{ típusu töröttvonalra (lásd 3.4}$$

ábra) való leszűkítésének határértéke a $(0,0)$ pontban. Más szóval, ha az f függvény határértékét az L_1 görbe mentén vesszük, az -1 -nek adódik. A β) esetben kapott eredmény egyben L_2 típusu görbe mentén vett határérték



3.4 ábra

$(0,0)$ -ban; ez az érték 1-nek adódott. Mivel az f függvény $(0,0)$ tetszőleges környezetében mind 1-hez, mind pedig -1-hez közeli értékeket felvesz, a f határérték nem létezik.

3.1 Tétel. (Cauchy féle kritérium). Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvénynek a D halmaz a torlódási pontjában akkor és csak akkor létezik véges határértéke, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van K_a környezet, hogy

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

minden $x', x'' \in (K_a \setminus \{a\}) \cap D$ -re.

Bizonyítás. A II. Kötet 4.3 Tételének bizonyításakor alkalmazott gondolatmenet alapján történhet.

3.2 Tétel. Ha a $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ véges határértékek léteznek, akkor létezik

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) \text{ és } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) \text{ is,}$$

és

$$\lim_{x \rightarrow a} (|f(x)|) = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)|,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) (\lim_{x \rightarrow a} g(x)).$$

Bizonyítás. A 3.2 Definíció és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek (lásd I. Kötet 15.2, 15.3, 15.5 Tételek) közvetlen következménye.

3.3 Tétel. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$ véges határérték létezik, akkor létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} \text{ határérték is, és}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}.$$

Bizonyítás. A 3.2 Definíció szerint $\left| \frac{A}{2} \right| > 0$ -hoz létezik olyan $K_{\frac{A}{2}}$, hogy $|f(\underline{x}) - A| < \left| \frac{A}{2} \right|$ minden $\underline{x} \in (K_{\frac{A}{2}} \setminus \{a\}) \cap D_f$ -re, ahol D_f az f függvény értelmezési tartománya. Így

$$A - \left| \frac{A}{2} \right| < f(\underline{x}) < A + \left| \frac{A}{2} \right|,$$

vagyis $f(\underline{x}) \neq 0$, $\underline{x} \in (K_{\frac{A}{2}} \setminus \{a\}) \cap D_f$ -ben; az a pont nyilván $\frac{1}{f}$ értelmezési tartományának is torlódási pontja. Alkalmazva az I. Kötet 15.6 Tételét belátható, hogy az $\frac{1}{f}$ függvényre az a pontban a 3.2 Definíció valamennyi feltétele teljesül, és $\lim_{\underline{x} \rightarrow a} \frac{1}{f(\underline{x})} = \frac{1}{A}$.

3.3 Definíció. Legyen adva n számú m -változós függvény közös $D \subset \mathbb{R}^m$ értelmezési tartománnyal:

$$\varphi_i : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Tegyük fel, hogy az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ n -változós függvény $D_f \subset \mathbb{R}^n$ értelmezési tartománya tartalmazza a $(\varphi_1(\underline{x}), \varphi_2(\underline{x}), \dots, \varphi_n(\underline{x}))$ pontokat, minden $\underline{x} \in D$ esetén.

Ekkor értelmezhetjük az f függvényből, mint külső függvényből, és a φ_i ($i = 1, \dots, n$) függvényekből, mint belső függvényekből összetett:

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_m) &= \\ &= f(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)) \end{aligned}$$

m -változós függvényt, melynek értelmezési tartománya $D \subset \mathbb{R}^m$.

4. Folytonos függvények

4.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvény az $a \in \mathbb{R}^n$ helyen folytonos, ha

a) $a \in D$,

b) a a D értelmezési tartomány torlódási pontja és létezik a $\lim_{\underline{x} \rightarrow a} f(\underline{x})$ véges határérték,

c) $f(a) = \lim_{\underline{x} \rightarrow a} f(\underline{x})$.

A "folytonos n -változós függvény" valamint a " $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazon folytonos n -változós függvény" terminusokat az egyváltozós esethez hasonlóan használjuk (lásd II. Kötet 7.1 és 7.2 Definíció). A $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazon folytonos függvények osztályát C_H^0 -val jelöljük.

A II. Kötet 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 és 6.7 Tételei - amelyekben az "a hely" szerepét most az $\underline{a}$ pont játssza - érvényesek n -változós függvényekre is. Tehát a konstans függvény folytonos, folytonos függvények összege, szorzata, valamint a hányadosa is folytonos függvény, amennyiben a nevezőben levő függvény nem nulla. Ezeknek a tételeknek a bizonyítása is ugy történik, mint az egyváltozós esetben. Példaként megmutatjuk, hogy a II. Kötet 6.6 és 6.7 Tételei, valamint bizonyításuk, hogyan vihetők át többváltozós függvényekre.

4.1 Tétel. Legyen $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, folytonos a $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in D_f$ helyen, a $\varphi_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, n$ függvények olyanok, hogy a $(\varphi_1(\underline{x}), \varphi_2(\underline{x}), \dots, \varphi_n(\underline{x}))$ pontok minden $\underline{x} \in D$ esetén hozzátartoznak D_f -hez. Legyen továbbá $\underline{a} \in D$ olyan pont, hogy $(\varphi_1(\underline{a}), \dots, \varphi_n(\underline{a})) = \underline{b}$, és a φ_i , $i = 1, \dots, n$ függvények folytonosak az $\underline{a}$ pontban. Akkor a $g(\underline{x}) = f(\varphi_1(\underline{x}), \dots, \varphi_n(\underline{x}))$ összetett függvény is folytonos az $\underline{a}$ pontban.

Bizonyítás. a) A $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$ függvény az $\underline{a}$ pontban értelmezve van és

$$g(\underline{a}) = f(\varphi_1(\underline{a}), \dots, \varphi_n(\underline{a})) = f(\underline{b}).$$

b) Legyen K_c az $f(\underline{b}) = c$ szám tetszőleges környezete. f folytonossága miatt van olyan $K_{\underline{b}}$ környezet, hogy:

$$f(\underline{y}) \in K_c, \text{ minden } \underline{y} \in K_{\underline{b}} \cap D_f \text{-re.} \quad (4.1)$$

A $\varphi_i(\underline{a}) = b_i$ szám ($i = 1, \dots, n$) K_{b_i} környezetét vegyük fel úgy, hogy a K_{b_i} intervallumok direkt szorzatára (lásd 1.6 Példa és I. Kötet, 3.1 Definíció) eljessüljön $K_{b_1} \times \dots \times K_{b_n} \subset K_{\underline{b}}$. (Ha $K_{\underline{b}}$ sugara ρ , akkor K_{b_i} sugarát $\rho/\sqrt{n}$ -nél kisebbre választjuk).
 φ_i ($i = 1, \dots, n$) folytonosságából következik, hogy van olyan $K_{\underline{a}}^1$ környezet, hogy:

$$\varphi_i(\underline{x}) \in K_{b_i}, \text{ minden } \underline{x} \in K_{\underline{a}}^1 \cap D \text{-re, } i = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Válasszuk meg $K_{\underline{a}}$ -t úgy, hogy $K_{\underline{a}} \subset \bigcap_{i=1}^n K_{\underline{a}}^i$ legyen. (Ilyen $K_{\underline{a}}$ nyilván létezik, mivel $\bigcap_{i=1}^n K_{\underline{a}}^i$ nyílt halmaz, lásd 1.4 Tétel). (4.2)-ből kapjuk:

$$(\varphi_1(\underline{x}), \dots, \varphi_n(\underline{x})) \in (K_{b_1} \times \dots \times K_{b_n}) \cap D_f \subset K_{\underline{b}} \cap D_f \quad (4.3)$$

minden $\underline{x} \in K_{\underline{a}} \cap D$ -re.

(4.1) és (4.3) miatt:

$$g(\underline{x}) = f(\varphi_1(\underline{x}), \dots, \varphi_n(\underline{x})) \in K_c, \text{ minden } \underline{x} \in K_{\underline{a}} \cap D\text{-re.}$$

Tehát $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} g(\underline{x}) = c = f(\underline{b}) = g(\underline{a})$, és így a g függvény folytonos $\underline{a}$ -ban.!

4.2 Tétel. Ha $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ az $\underline{a}$ pontban folytonos, akkor van olyan $K_{\underline{a}} \subset \mathbb{R}^n$ környezet és $M \geq 0$ szám, hogy

$$|f(\underline{x})| \leq M, \text{ minden } \underline{x} \in K_{\underline{a}} \cap D\text{-re.}$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$; f folytonosságából következik, hogy van olyan $K_{\underline{a}}$ golyó, melyre

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{a})| < \varepsilon, \text{ ha csak } \underline{x} \in K_{\underline{a}} \cap D. \text{ Így}$$

$$||f(\underline{x})| - |f(\underline{a})|| \leq |f(\underline{x}) - f(\underline{a})| < \varepsilon \text{ -ből}$$

$$|f(\underline{a})| - \varepsilon \leq |f(\underline{x})| \leq |f(\underline{a})| + \varepsilon = M$$

következik, minden $\underline{x} \in K_{\underline{a}} \cap D$ -re.!

4.3 Tétel. Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvény az $\underline{a}$ pontban folytonos és $f(\underline{a}) \neq 0$, akkor van olyan $K_{\underline{a}}$ golyó, hogy

$$\operatorname{sg}(f(\underline{x})) = \operatorname{sg}(f(\underline{a})), \text{ minden } \underline{x} \in K_{\underline{a}} \cap D\text{-re.}$$

Bizonyítás. $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(\underline{a})| > 0$ -hoz válasszuk meg $K_{\underline{a}}$ -t úgy, hogy minden $\underline{x} \in K_{\underline{a}} \cap D$ -re teljesüljön $f(\underline{x}) \in K_{f(\underline{a}), \varepsilon}$ vagyis

$$f(\underline{x}) \in (f(\underline{a}) - \frac{1}{2}|f(\underline{a})|, f(\underline{a}) + \frac{1}{2}|f(\underline{a})|).$$

Mivel $\operatorname{sg} f(\underline{a}) = \operatorname{sg}(f(\underline{a}) - \frac{1}{2}|f(\underline{a})|) = \operatorname{sg}(f(\underline{a}) + \frac{1}{2}|f(\underline{a})|)$ azért $\operatorname{sg}(f(\underline{x})) = \operatorname{sg}(f(\underline{a})).$!

4.2 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvény a $H \subset D$ halmazon egyenletesen folytonos, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy:

$$x_1, x_2 \in H \text{ és } \varrho(x_1, x_2) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon ;$$

$\delta(\varepsilon)$ -t f H -ra vonatkozó folytonossági modulusának nevezzük

4.4 Tétel. Ha $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ a $H \subset D$ halmazon egyenletesen folytonos, akkor minden $a \in H$ pontban folytonos.

Bizonyítás. Ha a 4.2 Definícióban x_1 helyére a -t írunk, állításunk azonnal adódik.!

4.5 Tétel. Ha $f \in C_{D_f}^0$, akkor f egyenletesen folytonos D_f minden korlátos, zárt részhalmazán.

Bizonyítás. Legyen $H \subset D_f$ tetszőleges korlátos és zárt halmaz és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. A feltétel szerint f minden $\xi \in H$ -ban folytonos, tehát $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ -hoz (lásd 4.1 Definíció) van $2 \varrho(\xi) > 0$, hogy

$$|f(\xi) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ minden } x_1 \in K_{\xi, 2\varrho(\xi)} \cap H\text{-ra.}$$

Ezért minden $x_1, x_2 \in K_{\xi, 2\varrho(\xi)} \cap H$ -ra

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (4.4)$$

Mivel $H \subset \bigcup_{\xi \in H} K_{\xi, \varrho(\xi)}$, a Borel-féle lefedési tétel (2.10 Tétel) alapján kiválasztható véges számú

$$K_{\xi_1, \varrho(\xi_1)}, K_{\xi_2, \varrho(\xi_2)}, \dots, K_{\xi_m, \varrho(\xi_m)}$$

$\xi_k \in H$, $k = 1, \dots, m$, golyó, melyek egyesítése szintén lefedi H -t, vagyis:

$$H \subset \bigcup_{k=1}^m K_{\xi_k, \varrho(\xi_k)} \quad (4.5)$$

Vezessük be a $\delta = \min \{ \rho(\xi_1), \dots, \rho(\xi_m) \} > 0$ jelölést. Legyen $x_1, x_2 \in H$, $\rho(x_1, x_2) < \delta$; (4.5)-ből adódik, hogy van ξ_k , amelyre

$$x_1 \in K_{\xi_k}, \rho(\xi_k) \subset K_{\xi_k}, 2\rho(\xi_k)$$

$$x_2 \in K_{\xi_k}, (\rho(\xi_k) + \delta) \subset K_{\xi_k}, 2\rho(\xi_k)$$

Ezért (4.4)-ből következik, hogy

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Tehát f egyenletesen folytonos H -n és δ a folytonossági modulusa.

A folytonos függvényekre vonatkozó Weierstrass tételek (lásd II. Kötet, 7.5 és 7.6 Tétel) bizonyítása lényegében véve ugyanugy történhet, mint az egyváltozós esetben. Itt azt mutatjuk meg, hogy hogyan lehet a Borel tétel felhasználásával bizonyítani Weierstrass I. tételét.

4.6 Tétel. (Weierstrass tétele I.) Ha $f \in C_{D_f}^0$, akkor f korlátos a D_f halmazon

minden korlátos és zárt részhalmazon.

Bizonyítás. Legyen $H \subset D_f$ tetszőleges korlátos, zárt halmaz. A 4.2 Tétel szerint minden $\xi \in H$ -hoz van olyan $M_\xi > 0$ szám és K_ξ gölyd, hogy

$$|f(x)| \leq M_\xi \text{ minden } x \in K_\xi \cap D_f\text{-re.} \quad (4.6)$$

Mivel $H \subset \bigcup_{\xi \in H} K_\xi$, azért a 2.10 Tétel felhasználásával kapjuk, hogy van olyan $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_m$, hogy $H \subset \bigcup_{k=1}^m K_{\xi_k}$. Legyen $M = \max_{\xi_k} M_{\xi_k}$. Meg-

mutatjuk, hogy tetszőleges $x \in H$ -ra $|f(x)| \leq M$. Minden $x \in H$ -hoz van olyan ξ_i , hogy $x \in K_{\xi_i}$. A (4.6) formula alapján:

$$|f(x)| \leq M_{\xi_i} \leq M.$$

4.7 Tétel. (Weierstrass tétele II.) Ha $f \in C_{D_f}^0$, akkor minden $H \subset D_f$ korlátos

és zárt halmazon f felveszi a maximumát és a minimumát. Vagyis, ha $H \subset D_f$ korlátos és zárt, akkor van $\xi \in H$ és $\eta \in H$, hogy

$$f(\underline{\xi}) = \sup_{\underline{x} \in H} f(\underline{x})$$

$$f(\underline{\eta}) = \inf_{\underline{x} \in H} f(\underline{x}).$$

Bizonyítás. Legyen $S = \sup_{\underline{x} \in H} f(\underline{x})$. (A 4.6 Tétel biztosítja, hogy S létezik.) Ekkor van olyan $f(\underline{x}_k)$, $\underline{x}_k \in H$, $k \in T$ függvényértéksorozat, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\underline{x}_k) = S$.

$\underline{x}_k$, $k \in T$ korlátos pontsorozat, mivel $\underline{x}_k \in H$ és H korlátos. A 2.2 Tétel alapján kiválasztható belőle $\underline{x}_{i_k}$, $k \in T$ konvergens részsorozat. Nyilván

$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\underline{x}_{i_k}) = S$. A H halmaz zártága miatt a $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_{i_k} = \underline{\xi}$ pont is eleme H -nak (lásd 2.4 Tétel). f folytonosságából következik, hogy

$$f(\underline{\xi}) = \lim_{\substack{\underline{x}_{i_k} \rightarrow \underline{\xi} \\ k \rightarrow \infty}} f(\underline{x}_{i_k}) = S = \sup_{\underline{x} \in H} f(\underline{x}).$$

A tétel infimumra vonatkozó állítása hasonlóan adódik.

E bizonyításban Weierstrass I. tételét felhasználtuk, de a gondolatmenet kis módosítása egyúttal Weierstrass I. tételének bizonyítására is alkalmas.

4.8 Tétel. (Bolzano tétele) Ha $f \in C_D^0$, és D_f összefüggő tartomány, akkor f

értékkészlete intervallum, azaz $\underline{a}, \underline{b} \in D_f$ esetén minden $c \in [f(\underline{a}), f(\underline{b})]$ -hez van olyan $\underline{\xi} \in D_f$, hogy $f(\underline{\xi}) = c$.

Bizonyítás. Mivel D_f összefüggő, azért van $\underline{x}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ folytonos ut, amely az $\underline{a}$ pontot $\underline{b}$ -vel összeköti és D_f -ben halad.
Azaz

$$\underline{x}(t_1) = \underline{a}; \quad \underline{x}(t_2) = \underline{b};$$

$$\underline{x}(t) \in D_f, \quad \text{ha } t \in [t_1, t_2]. \quad (4.7)$$

Tekintsük a $g(t) = f(\underline{x}(t))$, $g: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$, egyváltozós függvényt, amely összetett függvénye az $f(\underline{x})$ és $\underline{x}_i(t)$ $i = 1, \dots, n$ folytonos függvényeknek.
A 4.1 Tétel alapján $g(t)$ folytonos $[t_1, t_2]$ -ben.

$$g(t_1) = f(\underline{x}(t_1)) = f(\underline{a})$$

$$g(t_2) = f(\underline{x}(t_2)) = f(\underline{b})$$

Az $f(\underline{a}) = f(\underline{b})$ esetben $\underline{\xi} = \underline{a}$ -val adódik a tétel állítása. $f(\underline{a}) \neq f(\underline{b})$ esetben a II. Kötet 7.3 Tételéből következik, hogy van $t_0 \in [t_1, t_2]$, hogy $g(t_0) = f(\underline{x}(t_0)) = c$, ahol (4.7) szerint $\underline{\xi} = \underline{x}(t_0) \in D_f$.!

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

5. Parciális deriváltak. Totális differenciálhatóság

Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ n -változós függvény $n-1$ változóját rögzítjük, akkor egyváltozós függvényhez jutunk és beszélhetünk ezen egyváltozós függvény deriválhatóságáról.

5.1 Definíció. Legyen $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, n -változós függvény D értelmezési tartományának torlódási pontja, és $\underline{a} \in D$. Jelölje $f_k: D_k \rightarrow \mathbb{R}$ azt az egyváltozós függvényt, amelynél

$$D_k = \{x \in \mathbb{R} : (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n) \in D\}$$

és $x \in D_k$ esetén

$$f_k(x) = f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

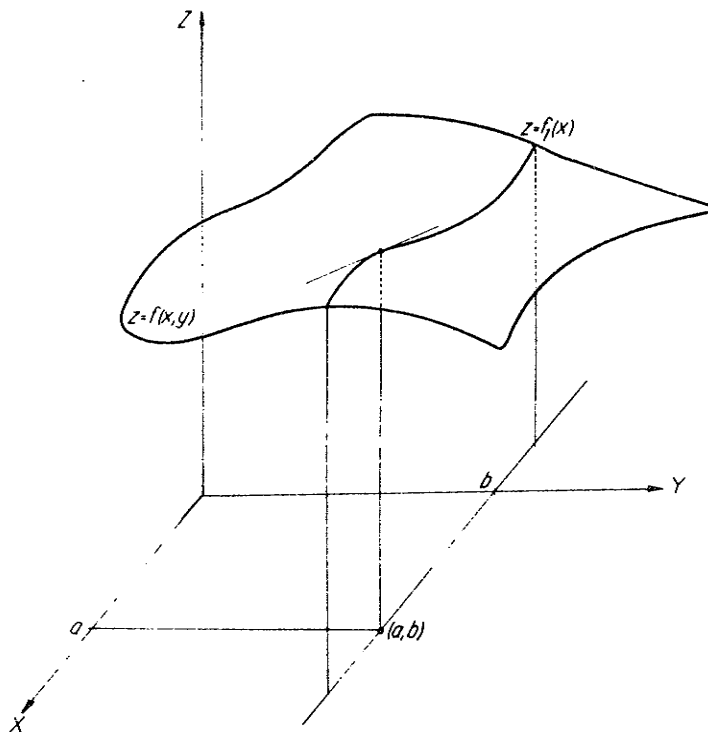
Azt mondjuk, hogy f az $\underline{a}$ pontban x_k ($\underline{a}$ k -adik változója) szerint differenciálható, ha létezik a

$$\begin{aligned} \left. \frac{df_k(x)}{dx} \right|_{x=a_k} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k+h, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)}{h} \end{aligned} \quad (5.1)$$

differenciálhányados, amelyet az f n -változós függvény $\underline{a}$ pontbeli x_k szerinti parciális deriváltjának nevezünk, és

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{\underline{x}=\underline{a}} = f'_{x_k}(\underline{a}) = f'_{x_k}(a_1, \dots, a_n) = \left. \frac{df_k}{dx} \right|_{x=a_k}$$

jelölünk, $k = 1, 2, \dots, n$.



5.1 ábra

5.1 Példa. Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ kétváltozós függvénynek az (a, b) pontban vett x (első változó) szerinti parciális deriváltja, azon görbe "a" pontbeli érintőjének iránytangensét jelent, amely görbét f grafikonjából az (a, b) ponton átmenő, x és z tengellyel párhuzamos sík metszi ki (ha e síkon az x és z tengelyekkel párhuzamos tengelyű koordinátarendszert vezetünk be, lásd 5.1 ábra).

A függvény parciális deriváltjainak létezéséből nem következik a függvény folytonossága (v. ö. II. Kötet 11.2 Tétel).

5.2 Példa. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, az alábbi formulával definiálva:

$$f(\underline{x}) = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f parciális deriváltjai az értelmezési tartomány minden (x, y) pontjában léteznek. Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor nyilván

$$f'_x(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Ha $(x, y) = (0, 0)$, akkor

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h}{0^2 + h^2} - 0}{h} = 0$$

Könnyen belátható, hogy f a $(0, 0)$ pontban nem folytonos. Ugyanis ha az $\underline{x}_k = (x_k, mx_k)$, $k \in T$, pontsorozatot úgy választjuk meg, hogy $x_k \neq 0$, $x_k \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$, és $m \in \mathbb{R}$ tetszőleges állandó, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \underline{0}$ és

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\underline{x}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{mx_k^2}{x_k^2 + m^2 x_k^2} = \frac{m}{m^2 + 1}.$$

Tehát m -et változtatva látható, hogy különböző zérushoz tartó $\underline{x}_k$, $k \in T$, pontsorozatok mentén a függvény határértéke más és más.

Ez a példa azt is mutatja, hogy ha egy kétváltozós (többváltozós) függvény minden egyes változójában a többi változó rögzítése mellett folytonos, akkor ebből nem következik, hogy a két- (több-) változós függvény is folytonos lenne. Vagyis, ha egy kétváltozós függvény grafikonjából valamennyi x , illetve y tengellyel párhuzamos, az x, y síkra merőleges vetítés folytonos függvény grafikonját metszi ki, akkor még előfordulhat, hogy a kétváltozós függvény helyenként nem folytonos.

A II. Kötet, 11.3 Definícióját az alábbi 5.2 Definícióval összehasonlítva látható, hogy az egyváltozós függvény deriválhatósága fogalmának analogonja többváltozós függvények esetében a "totális differenciálhatóság".

5.2 Definíció. Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvényt a D tartomány $\underline{a} \in D$ torlódási pontjában totálisan differenciálhatónak (totálisan deriválhatónak) nevezzük, ha f $\underline{a}$ pontbeli megváltozása (növekménye)

$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a})$, ahol $\underline{a} + \underline{h} \in D$, felírható a következő alakban:

$$\begin{aligned} f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) &= A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + \\ &+ \varepsilon_1(h_1, \dots, h_n) h_1 + \dots + \varepsilon_n(h_1, \dots, h_n) h_n = \\ &= \sum_{i=1}^n A_i h_i + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\underline{h}) h_i, \end{aligned} \quad (5.2)$$

ahol az A_i valós számok $\underline{h}$ -től függetlenek és

$$\varepsilon_i(\underline{h}) \rightarrow 0, \text{ ha } \underline{h} = (h_1, \dots, h_n) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Az 5.1 és 5.2 Definíció jelöléseit használjuk az 5.1 Tétel megfogalmazásánál és bizonyításánál.

5.1 Tétel. Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvény az $\underline{a}$ pontban totálisan deriválható, akkor létezik az $\underline{a}$ pontban az x_k szerinti parciális deriváltja ($k = 1, 2, \dots, n$) és

$$f'_{x_k}(\underline{a}) = A_k, \quad (k = 1, \dots, n).$$

Bizonyítás. Vegyük speciálisan f -nek a $\underline{h} = (0, \dots, 0, h_k, 0, \dots, 0)$ irányu megváltozását. A totális differenciálhatóság definíciója (5.2^k Definíció) és az 5.1 Definíció alapján

$$\begin{aligned} f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) &= f_k(\underline{a}_k + h_k) - f_k(\underline{a}_k) = \\ &= A_k h_k + \varepsilon_k(h_k) h_k, \end{aligned}$$

ahol $\varepsilon_k(h_k) \rightarrow 0$, ha $h_k \rightarrow 0$.

A II. Kötet, 11.3 Definícióból látható, hogy az f_k egyváltozós függvény a_k -ban differenciálható és

$$A_k = \left. \frac{df_k}{dx} \right|_{x=a_k} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{\underline{x}=\underline{a}}.$$

5.2 Következmény. Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, függvény az $\underline{a} \in D$ pontban totálisan differenciálható, akkor növekménye a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) - f(\underline{a}) &= \\ &= \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(\underline{a}) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(\underline{\Delta x}) \Delta x_k, \\ \text{ahol } \underline{x} \in D, \underline{\Delta x} &= (\Delta x_1, \dots, \Delta x_k, \dots, \Delta x_n) = \\ &= (x_1 - a_1, \dots, x_k - a_k, \dots, x_n - a_n) \\ \text{és } \varepsilon_k(\underline{\Delta x}) &\rightarrow 0, \text{ ha } \underline{\Delta x} \rightarrow \underline{0} \\ (k &= 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az 5.2 Definíció és az 5.1 Tétel közvetlen következménye. I
A II. Kötet, 11.2 Tétel n -változós függvényekre a következő formában fogalmazható meg:

5.3 Tétel. Ha $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, az $\underline{a} \in D$ pontban totálisan differenciálható, akkor folytonos $\underline{a}$ -ban.

Bizonyítás. Az (5.2) formulában elvégezve a $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$ határátmenetet, állításunk adódik. I

5.3 Példa. Az 5.2 Példában szereplő függvénynek a $\underline{0}$ pontban léteznek a parciális deriváltjai, ugyanakkor $\underline{0}$ -ban totálisan nem differenciálható. Ugyanis az ellenkező esetben, az 5.3 Tétel alapján folytonosnak kellene lennie $\underline{0}$ -ban. A folytonosság - mint láttuk a $\underline{0}$ pontban nem áll fenn.

Az 5.2 Tételből és az 5.3 Példából látható, hogy egy n -változós függvény totális differenciálhatóságának szükséges, de nem elégséges feltétele a parciális deriváltak létezése. Az 5.4 Tétel a totális differenciálhatóság egy elégséges feltételét adja. Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -változós függvény x_k szerinti parciális deriváltja a $H \subset D$ tartomány minden pontjában létezik, akkor az $f'_{x_k} : H \rightarrow \mathbb{R}$ n -változós függvényt, melynek értéke minden $\underline{x} \in H$ -ban $f'_{x_k}(\underline{x})$, az f függvény x_k szerinti parciális deriváltfüggvénynek nevezzük.

5.4 Tétel. Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, függvény az $\underline{a} \in D$ pontban totálisan differenciálható, ha van olyan $K_{\underline{a}} \subset D$, hogy minden $\underline{x} \in K_{\underline{a}}$ pontban létezik f összes parciális deriváltja és a parciális derivált függvények $\underline{a}$ -ban folytonosak.

Bizonyítás. Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\underline{h}^1 = (h_1, \dots, h_n) = \underline{h},$$

$$\underline{h}^k = (0, \dots, 0, h_k, \dots, h_n), \quad (k = 2, \dots, n),$$

$$\underline{h}^{n+1} = (0, \dots, 0) = \underline{0}.$$

Ezen jelölések segítségével f $\underline{a}$ pontbeli növekménye (legyen $\underline{a} + \underline{h} \in K_{\underline{a}}$) a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) &= f(\underline{a} + \underline{h}^1) - f(\underline{a} + \underline{h}^{n+1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n [f(\underline{a} + \underline{h}^k) - f(\underline{a} + \underline{h}^{k+1})] \end{aligned} \quad (5.3)$$

Az $[f(\underline{a} + \underline{h}^k) - f(\underline{a} + \underline{h}^{k+1})]$ különbség tulajdonképpen az

$$\bar{f}_k(x) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1} + h_{k+1}, \dots, a_n + h_n)$$

formulával értelmezett egyváltozós függvény a_k pontbeli megváltozása ($h_{k+1}, \dots, h_n$ rögzített $k = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} &f(\underline{a} + \underline{h}^k) - f(\underline{a} + \underline{h}^{k+1}) = \\ &= \bar{f}_k(a_k + h_k) - \bar{f}_k(a_k), \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.4)$$

A feltételből következik, hogy $\bar{f}_k$ differenciálható $[a_k, a_k + h_k]$ -ban (v. ö(5.1) formulával). Alkalmazhatjuk a Lagrange-féle közéértéktételt (II. Kötet, 15.4 Tétel):

$$\frac{\bar{f}_k(a_k + h_k) - \bar{f}_k(a_k)}{h_k} = \bar{f}'_k(\xi_k) \quad (k = 1, \dots, n),$$

ahol $\xi_k \in [a_k, a_k + h_k]$. Legyen $\xi_k = a_k + \vartheta_k h_k$,

ahol $0 \leq \vartheta_k < 1$. Így

$$\bar{f}_k(a_k + h_k) - \bar{f}_k(a_k) = \bar{f}'_k(a_k + \vartheta_k h_k) h_k, \quad (k=1, \dots, n).$$

(5.1) figyelembevételével

$$\begin{aligned} \bar{f}_k(a_k + h_k) - \bar{f}_k(a_k) &= \\ &= f'_{x_k}(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \vartheta_k h_k, a_{k+1} + h_{k+1}, \dots, a_n + h_n) h_k, \\ (k &= 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Mivel a feltételek szerint a parciális deriváltfüggvények $\underline{a}$ -ban folytonosak,

$$\begin{aligned} f'_{x_k}(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \vartheta_k h_k, a_{k+1} + h_{k+1}, \dots, a_n + h_n) &= \\ &= f'_{x_k}(a_1, \dots, a_n) + \varepsilon_k, \end{aligned} \quad (5.6)$$

ahol $h_{k+1} \rightarrow 0, h_{k+2} \rightarrow 0, \dots, h_n \rightarrow 0$ esetén $\varepsilon_k \rightarrow 0$.

(5.6)-ot behelyettesítjük (5.5)-be:

$$\bar{f}_k(a_k + h_k) - \bar{f}_k(a_k) = f'_{x_k}(\underline{a}) h_k + \varepsilon_k h_k, \quad (5.7)$$

ahol $\varepsilon_k \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ esetén ($k = 1, 2, \dots, n$).

(5.4)-et és (5.7)-et felhasználva (5.3)-ból kapjuk

$$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \sum_{k=1}^n [f'_{x_k}(\underline{a}) h_k + \varepsilon_k h_k], \quad \underline{a} + \underline{h} \in K_{\underline{a}},$$

ahol $\varepsilon_k \rightarrow 0, (k = 1, \dots, n), h \rightarrow 0$ esetén.

6. A differenciál. Hibaszámítás

Ha az $f: D \rightarrow R, D \subset R^n$, n -változós függvény totálisan differenciálható az $\underline{a} \in D$ pontban, akkor megváltozása, ha $\underline{a}$ -ból az értelmezési tartomány egy másik $\underline{x}$ pontjába megyünk

$$f(\underline{x}) - f(\underline{a}) = \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(\underline{a}) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n \xi_k(\underline{\Delta x}) \Delta x_k, \quad (6.1)$$

ahol $\underline{\Delta x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \underline{x} - \underline{a}$ és

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_k(\Delta x) = 0, k = 1, 2, \dots, n$. Vezessük be a $|\Delta x| = (\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ jelölést. (6.1) jobb oldalának második tagja $\Delta x \rightarrow 0$ esetén erősebben tart zérushoz, mint $|\Delta x|$, vagyis

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k(\Delta x) \Delta x_k = o(|\Delta x|)$$

(kisordó $|\Delta x|$, lásd a II. Kötet, 11.3 Definíciót követő megjegyzést), ugyanis

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^n \varepsilon_k(\Delta x) \Delta x_k}{|\Delta x|} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \varepsilon_k(\Delta x) \frac{\Delta x_k}{|\Delta x|} \right| \leq \sum_{k=1}^n |\varepsilon_k(\Delta x)| \rightarrow 0$$

ha $\Delta x \rightarrow 0$. Ezért a megváltozás főrészét (6.1) jobb oldalának első tagja szolgáltatja. Kis $|\Delta x_k|$ -ek esetén a második tag az első mellett elhanyagolható.

6.1 Definíció. Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$, függvény az $\underline{a} \in D$ pontban totálisan differenciálható, akkor a

$$df(\underline{a}; \Delta x) = \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(\underline{a}) \Delta x_k \quad (6.2)$$

formulával értelmezett függvényt (mely a Δx_k -knak lineáris függvénye) f $\underline{a}$ -beli differenciáljának nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a (6.2) homogén lineáris függvény minden $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$ -re értelmezve van, a differenciál azonban pontosabban a (6.2) függvénynek az $\underline{a} + \Delta x \in D$ -vel jellemzett tartományra vonatkozó le-
szűkítése. A differenciál rögzített $\underline{a}$ mellett Δx koordinátáinak n -változós függvénye. Ha azonban f az értelmezési tartomány egészén vagy annak egy egész (több pontból álló) részalmazán totálisan differenciálható, beszélhetünk a $df(\underline{x}, \Delta x)$ differenciál-függvényről, mint az $(x_1, \dots, x_n; \Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ változók $2n$ -változós függvényéről. A totális differenciálhatóság definiálásakor megmutattuk (5.1 Tétel), hogy a differenciál az egyetlen olyan lineáris függvény, amely (6.1) értelmében (első rendben) közelíti a függvény megváltozását.

Speciálisan az $f_k(x_1, \dots, x_n) \equiv x_k, k = 1, 2, \dots, n$, függvény mindenütt totálisan differenciálható,

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ik},$$

ahol δ_{ik} a Kronecker-szimbólum (lásd III. Kötet, 8.3 Definíció). Ezek szerint x_k differenciálja

$$dx_k = \sum_{i=1}^n \delta_{ik} \Delta x_i = \Delta x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.3)$$

(6.3) alapján indokolt tetszőleges totálisan differenciálható f függvény $\underline{x}$ pontbeli differenciáljára a szokásos

$$df(\underline{x}; \underline{dx}) = \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(\underline{x}) dx_k \quad (6.4)$$

jelölés használata.

6.1 Példa. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, kétváltozós függvény grafikonja a háromdimenziós térben a $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, egyenlettel jellemzett felületdarab (x, y, z) Descartes-féle derékszögű koordináták). Ha az f függvény az $(a, b) \in D$ pontban totálisan differenciálható, akkor megváltozása, ha (a, b) -ből az értelmezési tartomány egy "közeli" (x, y) pontjára térünk át közelítőleg differenciáljával helyettesíthető:

$$f(x, y) - f(a, b) \approx f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b),$$

vagyis

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b).$$

Az $f(a, b) + df(a, b; x-a, y-b)$ formulával értelmezett függvénynek (mint x és y függvényének) a grafikonja a

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b) \quad (6.5)$$

egyenletű sík. Az (a, b) pont egy elég kicsiny sugaru környezetében f grafikonja közelítőleg a (6.5) síkkal helyettesíthető. (6.5)-öt f grafikonja (a, b) pontbeli érintősíkjának nevezzük.

Az a tény, hogy totálisan differenciálható függvény megváltozása közelítőleg differenciáljával, a független változók megváltozásának homogén lineáris függvényével helyettesíthető, igen nagy jelentőségű a hibaszámításban, az ún. "öröklött hiba" becslésében.

Ha az $a \neq 0$ szám mérési eredmény, és tudjuk, hogy mérési módszerünk hibakorlátja $\delta > 0$, akkor a valódi érték (x) az $[a - \delta, a + \delta]$ intervallumba esik. A mérés pontosságára jellemző, hogy a mért és a valódi érték közti

maximális eltérés (δ) hány százaléka a mért értéknek ($\frac{\delta}{|a|} \cdot 100\%$). A $\frac{\delta}{|a|}$ hányadost, melyet az előbbi módon szokás százalékban is megadni, relatív hibának nevezzük. Ha valamely f függvény értékét szeretnénk megállapítani az $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ helyen, de x_i helyett az a_i ($i = 1, \dots, n$) mért értékeket valamint a mérések δ_i ($i = 1, \dots, n$) hibakorlátját ismerjük, akkor $f(x_1, \dots, x_n)$ helyett az $f(a_1, \dots, a_n)$ értéket határozhatjuk meg. Tehát a függvényérték is hibássá vált. Ilyenkor öröklött hibáról beszélünk. (Itt nem a függvény hibájáról van szó, feltételezzük, hogy függvényünk "pontos".) A számított értéknek a valóditól való eltérését f differenciáljával közelíthetjük, amennyiben f totálisan differenciálható az $\underline{a}$ pontban:

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)| \approx \left| \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{a}) (x_i - a_i) \right| \quad (6.5)$$

Mivel $|x_i - a_i| \leq \delta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, (6.5) jobb oldala becsülhető:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{a}) (x_i - a_i) \right| &\leq \sum_{i=1}^n |f'_{x_i}(\underline{a})| \cdot |x_i - a_i| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f'_{x_i}(\underline{a})| \delta_i = \delta f. \end{aligned} \quad (6.6)$$

A $\sum_{i=1}^n |f'_{x_i}(\underline{a})| \delta_i$ értéket δf -fel jelöljük, és f hibakorlátjának nevezzük.

f relatív hibája:

$$\frac{\delta f}{|f|} = \frac{\sum_{i=1}^n |f'_{x_i}(\underline{a})| \delta_i}{|f(\underline{a})|}.$$

Mivel a (6.5) egyenlőség csak közelítő, azért elvileg előfordulhat, hogy az $|f(\underline{x}) - f(\underline{a})|$ hiba nagyobb a δf hibakorlátnál. Azonban, ha az f'_{x_i} ($i = 1, \dots, n$)

parciális derivált függvények folytonosak az $A = [a_1 - \delta_1, \dots, a_n - \delta_n; a_1 + \delta_1, \dots, a_n + \delta_n]$ téglaltartományban, akkor a

$$\sum_{i=1}^n \max_{\underline{x} \in A} |f'_{x_i}(\underline{x})| \delta_i \quad (6.7)$$

szám biztosan felső korlátja a lehetséges hibának (a 9.1 Tételből könnyen belátható). (6.7) legtöbbszőr nehezen vagy egyáltalán nem határozható meg. Az f'_i ($i = 1, \dots, n$) függvények folytonossága biztosítja, hogy "elég kis" x_1

δ_i -k ($i = 1, \dots, n$) esetén δf (6.7)-től csak "kevéssel" tér el, és δf egyszerűen számítható.

6.2 Példa. (Szorzat hibája). $f(x, y) = x \cdot y$ értékét kell meghatároznunk, ha x -re a_1 , y -ra a_2 mérési eredmény áll rendelkezésünkre, δ_1 , illetve δ_2 hibakorlátal. $f(a_1, a_2) = a_1 \cdot a_2$ és a hibakorlátot (δf) (6.6) alapján határozhatjuk meg, mivel az $f(x, y) = x \cdot y$ függvény totálisan differenciálható minden $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ pontban. Ezért:

$$\delta f = |f'_x(\underline{a})| \delta_1 + |f'_y(\underline{a})| \delta_2 = |a_2| \delta_1 + |a_1| \delta_2.$$

f relatív hibája:

$$\frac{\delta f}{|f|} = \frac{|a_2| \delta_1 + |a_1| \delta_2}{|a_1 \cdot a_2|} = \frac{\delta_1}{|a_1|} + \frac{\delta_2}{|a_2|}$$

látható, hogy a szorzat relatív hibája megegyezik a tényezők relatív hibáinak összegével.

6.3 Példa. (Hányados hibája). Az (a_1, a_2) pontban ($a_2 \neq 0$), a változók $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ hibakorlátja esetén az $f(x, y) = \frac{x}{y}$ függvény hibakorlátja:

$$\begin{aligned} \delta f &= |f'_x(\underline{a})| \delta_1 + |f'_y(\underline{a})| \delta_2 = \\ &= \left| \frac{1}{a_2} \right| \delta_1 + \left| -\frac{a_1}{a_2^2} \right| \delta_2 = \\ &= \frac{|a_2| \delta_1 + |a_1| \delta_2}{|a_2|^2}, \end{aligned}$$

relatív hibája:

$$\frac{\delta f}{|f|} = \frac{|a_2| \delta_1 + |a_1| \delta_2}{\left| \frac{a_1}{a_2} \right|} = \frac{\delta_1}{|a_1|} + \frac{\delta_2}{|a_2|}.$$

Hányados relatív hibája a számláló és a nevező relatív hibáinak összege. Fontos az $a_2 \neq 0$ megkötés, különben az f függvény nem lenne totálisan differenciálható. A (6.7)-hez fűzött megjegyzés alapján beláthatjuk, hogy a fenti hibaszámítással akkor is baj lehet, ha az $A = [a_1 - \delta_1, a_2 - \delta_2; a_1 + \delta_1, a_2 + \delta_2]$ téglalap tartalmaz $(x, 0)$ alakú pontot. Ekkor az A téglalapon belül f'_x illetve f'_y nem korlátos.

7. Magasabbrendű parciális deriváltak

Ha egy n -változós függvénynek az $\underline{a}$ pont környezetében léteznek a parciális deriváltak, akkor ezek a parciális deriváltak szintén n -változós függvények, amelyek értelmezve vannak az $\underline{a}$ pont környezetében.

Ezek parciális derivált függvényeit, amennyiben léteznek, az eredeti függvény másodrendű parciális deriváltjainak nevezzük.

7.1 Definíció. Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ k -adrendű parciális derivált függvényei ($k = 1, 2, \dots$):

$$f_{x_{m_1} x_{m_2} \dots x_{m_k}}^{(k)} : K_{\underline{a}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad K_{\underline{a}} \subset D,$$

ahol $1 \leq m_i \leq n$ egész, $i=1, \dots, k$, és

$$\begin{aligned} f_{x_{m_1} x_{m_2} \dots x_{m_k}}^{(k)}(\underline{x}) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{m_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{m_{k-1}}} \left(\dots \frac{\partial}{\partial x_{m_2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{m_1}} f(\underline{x}) \right) \dots \right) \right), \end{aligned}$$

amennyiben a jobboldal létezik, minden $\underline{x} \in K_{\underline{a}}$ -ban. Használjuk a

$$\frac{\partial^{(k)} f}{\partial x_{m_k} \partial x_{m_{k-1}} \dots \partial x_{m_1}} = f_{x_{m_1} x_{m_2} \dots x_{m_k}}^{(k)}$$

jelölést is.

Megjegyezzük még, hogy az $f_{m_1 m_2 \dots m_k}^{(k)}$ deriváltat $m_1 = m_2 = \dots = m_k$ esetén k-adrendű tiszta parciális deriválnak, ha az m_i -k között különbözők is vannak, k-adrendű vegyes parciális deriválnak is szokás nevezni.

7.1 Példa. Legyen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = f(x, y, z) = z x^2 y^3$.
Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(\underline{x}) = 2 z x y^3; \quad f'_y(\underline{x}) = 3 z x^2 y^2, \quad f'_z(\underline{x}) = x^2 y^3.$$

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(\underline{x}) &= 2zy^3; \quad f''_{xy}(\underline{x}) = 6zxy^2; \quad f''_{xz}(\underline{x}) = 2xy^3; \\ f''_{yx}(\underline{x}) &= 6zxy^2; \quad f''_{yy}(\underline{x}) = 6zx^2y; \quad f''_{yz}(\underline{x}) = 3x^2y^2; \\ f''_{zx}(\underline{x}) &= 2xy^3; \quad f''_{zy}(\underline{x}) = 3x^2y^2; \quad f''_{zz}(\underline{x}) = 0. \end{aligned}$$

Harmadrendű parciális derivált huszonegyféle van. Számolással meggyőződhetünk róla, hogy közülük több megegyezik:

$$\begin{aligned} f^{(3)}_{xxx}(\underline{x}) &= 0; \quad f^{(3)}_{yyy}(\underline{x}) = 6zx^2; \quad f^{(3)}_{zzz}(\underline{x}) = 0; \\ f^{(3)}_{xxy}(\underline{x}) &= f^{(3)}_{xyx}(\underline{x}) = f^{(3)}_{yxx}(\underline{x}) = 6zy^2; \\ f^{(3)}_{xxz}(\underline{x}) &= f^{(3)}_{xzx}(\underline{x}) = f^{(3)}_{zxx}(\underline{x}) = 2y^3; \\ f^{(3)}_{yyx}(\underline{x}) &= f^{(3)}_{yxy}(\underline{x}) = f^{(3)}_{xyy}(\underline{x}) = 12xyz; \\ f^{(3)}_{yyz}(\underline{x}) &= f^{(3)}_{yzy}(\underline{x}) = f^{(3)}_{zyy}(\underline{x}) = 6x^2y; \\ f^{(3)}_{zzx}(\underline{x}) &= f^{(3)}_{zxz}(\underline{x}) = f^{(3)}_{xzz}(\underline{x}) = 0; \\ f^{(3)}_{zzy}(\underline{x}) &= f^{(3)}_{zyz}(\underline{x}) = f^{(3)}_{yzz}(\underline{x}) = 0; \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} f_{xyz}^{(3)}(\underline{x}) &= f_{xzy}^{(3)}(\underline{x}) = f_{yxz}^{(3)}(\underline{x}) = f_{yzx}^{(3)}(\underline{x}) = f_{zxy}^{(3)}(\underline{x}) = \\ &= f_{zyx}^{(3)}(\underline{x}) = 6xy^2. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Hasonlóan képezhetjük a negyed-, illetve magasabbrendű deriváltakat.

7.1 Tétel. Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvény valamennyi k -edik ($k=1, 2, \dots$) parciális deriváltja létezik $K_{\underline{a}} \subset D$ -ben és folytonos $\underline{a}$ -ban, akkor a j -edik ($j=1, \dots, k-1$) parciális deriváltak totálisan differenciálhatók $\underline{a}$ -ban.

Bizonyítás. A j -edik, $j \in \{1, \dots, k-1\}$ parciális derivált függvény első parciális deriváltjai folytonosak $\underline{a}$ -ban a feltétel szerint, ui.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_{x_{m_1} x_{m_2} \dots x_{m_j}}^{(j)} \right) = f_{x_{m_1} x_{m_2} \dots x_{m_j} x_i}^{(j+1)} \quad (i=1, \dots, n).$$

A jobboldal pedig folytonos, mivel $j+1 \leq k$. Így az 5.4 Tételből állításunk adódik. $\square$

7.2 Tétel. Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ függvény valamennyi másodrendű parciális deriváltja létezik $K_{\underline{a}} \subset D$ -ben, és folytonos $\underline{a} \in D$ -ben, akkor

$$f''_{xy}(\underline{a}) = f''_{yx}(\underline{a}).$$

Bizonyítás. Legyen $|k| > 0$ és $|\ell| > 0$ olyan kicsi, hogy a

$$Q = \{(x, y): x \in [a, a+k], y \in [b, b+\ell]\}$$

téglalapon létezzenek az f''_{xy} és az f''_{yx} függvények, azaz legyen $Q \subset K_{\underline{a}}$.

Bevezetjük a $g: [a, a+k] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x, b+\ell) - f(x, b)$ és a $h: [b, b+\ell] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(y) = f(a+k, y) - f(a, y)$ függvényeket. Könnyen látható, hogy

$$g(a+k) - g(a) = h(b+\ell) - h(b), \quad (7.3)$$

g és h differenciálható függvények, alkalmazhatjuk a Lagrange-féle középértéktételt (lásd II. Kötet 15.4 Tétel):

$$g(a+k) - g(a) = g'(a + \vartheta_1 k) k = [f'_x(a + \vartheta_1 k, b+\ell) - f'_x(a + \vartheta_1 k, b)] k, \quad (7.4)$$

ahol $0 < \vartheta_1 < 1$. (7.4) jobb oldalán a zárójelben álló kifejezés egy egyváltozós (y a változó) differenciálható függvény megváltozása, így ismét alkalmazhatjuk a Lagrange-féle középértéktételt

$$\begin{aligned} g(a+k) - g(a) &= [f'_x(a + \vartheta_1 k, b+l) - f'_x(a + \vartheta_1 k, b)] k = \\ &= f''_{xy}(a + \vartheta_1 k, b + \vartheta_2 l) k l, \end{aligned} \quad (7.5)$$

ahol $0 < \vartheta_1 < 1$, $0 < \vartheta_2 < 1$.

Hasonlóan kapjuk a h függvény megváltozására

$$\begin{aligned} h(b+l) - h(b) &= h'(b + \vartheta_3 l) l = \\ &= [f'_y(a+k, b + \vartheta_3 l) - f'_y(a, b + \vartheta_3 l)] l = \\ &= f''_{yx}(a + \vartheta_4 k, b + \vartheta_3 l) k l, \end{aligned} \quad (7.6)$$

ahol $0 < \vartheta_3 < 1$, $0 < \vartheta_4 < 1$.

Ha (7.6)-ot és (7.5)-t behelyettesítjük (7.3)-ba és kl -vel egyszerűsítünk, kapjuk, hogy

$$f''_{xy}(a + \vartheta_1 k, b + \vartheta_2 l) = f''_{yx}(a + \vartheta_4 k, b + \vartheta_3 l), \quad (7.7)$$

ahol $0 < \vartheta_1 < 1$, $0 < \vartheta_2 < 1$, $0 < \vartheta_3 < 1$, $0 < \vartheta_4 < 1$.

Mivel $(k, l) \rightarrow (0, 0)$ esetén

$$(a + \vartheta_1 k, b + \vartheta_2 l) \rightarrow (a, b) \text{ és}$$

$$(a + \vartheta_4 k, b + \vartheta_3 l) \rightarrow (a, b),$$

ezért (7.7)-ben a $(k, l) \rightarrow (0, 0)$ határátmenetet elvégezve, és f''_{xy} , illetve $f''_{yx}(a, b)$ pontbeli folytonosságát felhasználva az

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$$

egyenlőséghez jutunk. I

7.2 Példa. A 7.1 Példában szereplő f függvény vegyes parciális deriváltjainak az egyezése bebizonyítható a 7.2 Tétel segítségével.

Legyen z tetszőlegesen rögzített és

$$g(x, y) = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$g''_{xy}(x, y) \equiv f''_{xy}(x, y, z)$$

$$g''_{yx}(x, y) = f''_{yx}(x, y, z).$$

Mivel g második parciális deriválttal folytonosak $\mathbb{R}^2$ -ben, azért a 7.2 Tétel alapján

$$g''_{xy}(x, y) \equiv g''_{yx}(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tehát

$$f''_{xy}(x, y, z) = f''_{yx}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (7.8)$$

A harmadrendű deriváltaknál előforduló egyezéseket is beláthatjuk számolás nélkül. Például a (7.1) formulában szereplő azonosság abból következik, hogy a harmadrendű parciális deriváltak folytonosak, és tulajdonképpen az elsőrendű parciális deriváltfüggvények másodrendű parciális deriváltjai.

$$f'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (f'_x) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (f'_x) = f'''_{xyx}. \quad (7.9)$$

(7.8)-ből következik, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x} f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} f''_{yx},$$

vagyis

$$f'''_{xyx} = f'''_{yxx}. \quad (7.10)$$

(7.9)-ből és (7.10)-ből (7.1) adódik.

A 7.2 Példában csak azt használtuk fel, hogy a parciális deriváltak léteznek és folytonosak.

A 7.2 Tétel általánosítható n -változós függvényekre, azok k -ad rendű parciális deriváltjaira:

7.3 Tétel. Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvény valamennyi k -adrendű (k rögzített, $k=2,3,\dots$) parciális deriváltja létezik $K_{\underline{a}} \subset D$ -ben, és folytonos $\underline{a}$ -ban, akkor

$$f_{x_{m_1} x_{m_2} \dots x_{m_k}}^{(k)}(\underline{a}) = f_{x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}}^{(k)}(\underline{a}), \quad (7.11)$$

ahol $m_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i=1, 2, \dots, k$ és $j_1, j_2, \dots, j_k$ az $m_1, m_2, \dots, m_k$ számok egy tetszőleges más sorrendben vett felírása.

Fehát (7.11)-ben mindkét oldalon az egyes változók szerint ugyanannyiszor kell deriválni, a deriválás sorrendje azonban tetszőleges lehet.

Bizonyítás. Az $m_1, m_2, \dots, m_k$ számoknak $j_1, j_2, \dots, j_k$ egy "permutációja".

Ha az $m_1, m_2, \dots, m_k$ számok sorrendjét alkalmasan változtatjuk oly módon, hogy mindig csak szomszédosakat cserélünk fel, akkor véges sok lépésben tetszőleges sorrendhez, így a $j_1, j_2, \dots, j_k$ sorrendhez is eljuthatunk. (7.11) belátásához elég bizonyítanunk, hogy tetszőleges $i = 2, \dots, k$ esetén

$$\begin{aligned} & f_{x_{m_1} x_{m_2} \dots x_{m_{i-2}} x_{m_i} x_{m_{i-1}} x_{m_{i+1}} \dots x_{m_k}}^{(k)}(\underline{a}) = \\ & = f_{x_{m_1} x_{m_2} \dots x_{m_{i-2}} x_{m_{i-1}} x_{m_i} x_{m_{i+1}} \dots x_{m_k}}^{(k)}(\underline{a}). \end{aligned} \quad (7.12)$$

A feltételből következik, hogy f i -ed rendű parciális deriváltjai, $i \leq k$, folytonosak. Az $i \geq 2$ -ed rendű deriváltak az $(i-2)$ -edrendű deriváltfüggvények másodrendű parciális deriváltjai (f nulladrendű deriváltja önmaga).

Legyen $m_i \neq m_{i-1}$, például $m_{i-1} < m_i$, és

$$\begin{aligned} & g(x, y) = \\ & = f_{x_{m_1} x_{m_2} \dots x_{m_{i-2}}}^{(i-2)}(a_1, a_2, \dots, a_{m_{i-1}-1}, x, a_{m_{i-1}+1}, \dots, a_{m_i-1}, y, a_{m_i+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

g másodrendű parciális deriváltjai f i -edrendű parciális deriváltjai, tehát folytonosak az $(a_{m_{i-1}}, a_{m_i})$ pontban. Alkalmazható a 7.2 Tétel:

$$g''_{xy}(a_{m_{i-1}}, a_{m_i}) = g''_{yx}(a_{m_{i-1}}, a_{m_i}).$$

Tehát:

$$\begin{aligned}
 & f^{(i)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \\
 & x_{m_1}^{(1)} x_{m_2}^{(1)} \dots x_{m_{i-2}}^{(1)} x_{m_{i-1}}^{(1)} x_{m_i}^{(1)} \\
 & = f^{(i)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \\
 & x_{m_1}^{(1)} x_{m_2}^{(1)} \dots x_{m_{i-2}}^{(1)} x_{m_{i-1}}^{(1)} x_{m_i}^{(1)}
 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Az $m_i = m_{i-1}$ esetben a (7.13) egyenlőség nyilvánvaló. (7.13)-ból deriválással, (k-i) lépésben kapjuk (7.12)-t. I

a 7.3 Tétel indokolja, hogy a k-adik derivált jelölésére a

$$\frac{\partial^{(k)}}{\partial x_1^{\ell_1} \partial x_2^{\ell_2} \dots \partial x_n^{\ell_n}} f \quad (7.14)$$

formulát használhatjuk, ahol $0 \leq \ell_i \leq k$ egész ($i = 1, 2, \dots, n$) és $\sum_{i=1}^n \ell_i = k$.

(7.14) azt jelenti, hogy az f függvényt az i -edik változója (x_i) szerint ℓ_i -szer kell deriválni. Ha $\ell_i = 0$, akkor x_i szerinti deriválás nem szerepel. Azon n -változós függvények halmazát, melyek valamennyi k -adrendű parciális deriváltja a $H \subset \mathbb{R}^n$ tartományon folytonos, C_H^k -val jelöljük.

8. A láncszabály. Iránymenti deriváltak

8.1 Tétel. Tegyük fel, hogy a $\psi_i: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, n$ függvényekre és az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ függvényre teljesülnek a 3.3 Definíció feltételei, vagyis képezhető a

$$\begin{aligned}
 & g(x_1, \dots, x_m) = \\
 & = f(\psi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_m))
 \end{aligned}$$

összetett függvény továbbá a ψ_i függvények totálisan differenciálhatók $\underline{a} \in D$ -ben és f totálisan differenciálható a

$\psi_2(\underline{a}), \dots, \psi_n(\underline{a})$ pontban; akkor g totálisan $\underline{b} = (\psi_1(\underline{a}),$
differenciálható $\underline{a}$ -ban, és

$$\frac{\partial g(\underline{a})}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\underline{b})}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_i(\underline{a})}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (8.1)$$

A (8.1) formulát láncszabálynak nevezzük.

Bizonyítás. $\underline{a} + \underline{h} \in D$ esetén értelmezett az alábbi megváltozás:

$$\begin{aligned} g(\underline{a} + \underline{h}) - g(\underline{a}) &= \\ &= f(\varphi_1(\underline{a} + \underline{h}), \dots, \varphi_n(\underline{a} + \underline{h})) - f(\varphi_1(\underline{a}), \dots, \varphi_n(\underline{a})). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Mivel f totálisan differenciálható a $\varphi(\underline{a})$ helyen, azért (8.2)-ből kapjuk:

$$\begin{aligned} g(\underline{a} + \underline{h}) - g(\underline{a}) &= \sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{b})(\varphi_i(\underline{a} + \underline{h}) - \varphi_i(\underline{a})) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\varphi_i(\underline{a} + \underline{h}) - \varphi_i(\underline{a})), \end{aligned} \quad (8.3)$$

ahol $\varepsilon_i \rightarrow 0$, ha $\varphi_i(\underline{a} + \underline{h}) - \varphi_i(\underline{a}) \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, n$).

A φ_i ($i = 1, \dots, n$) függvények $\underline{a}$ pontbeli totális differenciálhatóságából következnek:

$$\begin{aligned} \varphi_i(\underline{a} + \underline{h}) - \varphi_i(\underline{a}) &= \\ &= \sum_{k=1}^m \varphi'_{i x_k}(\underline{a}) h_k + \sum_{k=1}^m \varepsilon_{ik}(\underline{h}) h_k \end{aligned} \quad (8.4)$$

ahol $\varepsilon_{ik}(\underline{h}) \rightarrow 0$, ha $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$; ($i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$).
(8.4)-et behelyettesítve (8.3)-ba:

$$\begin{aligned} g(\underline{a} + \underline{h}) - g(\underline{a}) &= \sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{b}) \left(\sum_{k=1}^m \varphi'_{i x_k}(\underline{a}) h_k \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{b}) \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_{ik}(\underline{h}) h_k \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left(\sum_{k=1}^m \varphi'_{i x_k}(\underline{a}) h_k \right) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_{ik}(\underline{h}) h_k \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{b}) \varphi'_{i_{x_k}}(\underline{a}) \right) h_k + \\
&+ \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{b}) \varepsilon_{ik}(\underline{h}) \right) h_k + \\
&+ \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varphi'_{i_{x_k}}(\underline{a}) \right) h_k + \\
&+ \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_{ik} \right) h_k = \\
&= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{b}) \varphi'_{i_{x_k}}(\underline{a}) \right) h_k + \\
&+ \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varphi'_{i_{x_k}}(\underline{a}) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_{ik} + \sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{b}) \varepsilon_{ik} \right) h_k = \\
&= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{b}) \varphi'_{i_{x_k}}(\underline{a}) \right) h_k + \sum_{k=1}^m \bar{\varepsilon}_k h_k, \tag{8.5}
\end{aligned}$$

ahol $\bar{\varepsilon}_k = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varphi'_{i_{x_k}}(\underline{a}) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_{ik} + \sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{b}) \varepsilon_{ik}$.

Megmutatjuk, hogy $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$ esetén $\bar{\varepsilon}_k \rightarrow 0$, ($k=1, \dots, m$). Tudjuk (8.4)-ből, hogy $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$ esetén

$$\varepsilon_{ik}(\underline{h}) \rightarrow 0, \quad (k=1, \dots, m). \tag{8.6}$$

φ_i folytonossága miatt $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$ esetén

$$\varphi_i(\underline{a} + \underline{h}) - \varphi_i(\underline{a}) \rightarrow 0, \quad (i=1, \dots, n). \tag{8.7}$$

(8.7)-ből és (8.3)-ból következik, hogy $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$ esetén:

$$\varepsilon_i \rightarrow 0, \quad (i=1, \dots, n). \tag{8.8}$$

(8.6) és (8.8)-ból $\bar{\varepsilon}_k \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ esetén ($k = 1, \dots, m$) következik, tehát g totálisan differenciálható $\underline{a}$ -ban, és (8.5)-ből (8.1) leolvasható.

8.1 Példa. (Összetett függvény differenciálja). (6.4)-ből és (8.1)-ből következik, hogy a 8.1 Tételben szereplő g összetett függvény $\underline{a}$ pontbeli differenciálja:

$$\begin{aligned} dg(\underline{a}; \underline{dx}) &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{b}) \varphi'_{i_{x_k}}(\underline{a}) dx_k \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{b}) \left(\sum_{k=1}^m \varphi'_{i_{x_k}}(\underline{a}) dx_k \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{b}) d\varphi_i(\underline{a}, \underline{dx}) = df(\underline{b}; \underline{d}\varphi), \end{aligned} \quad (8.9)$$

ahol $\underline{d}\varphi = (d\varphi_1, \dots, d\varphi_n)$.

8.2 Példa. Legyen $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$

$$g = \prod_{i=1}^n \varphi_i,$$

ahol

$$\varphi_i : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, n,$$

és φ_i totálisan differenciálható minden $\underline{x} \in D$ -ben ($i = 1, \dots, n$). g az

$$f(y_1, \dots, y_n) = y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n$$

n változós függvényből és φ_i ($i = 1, \dots, n$) m változós függvényekből összetett függvény. A 8.1 Tétel alapján g totálisan differenciálható minden $\underline{x} \in D$ pontban, mivel f nyilván totálisan differenciálható (ez azonnal adódik pl. az 5.4 Tételből). A g produktum függvény differenciálját (8.9)-ből kapjuk:

$$\begin{aligned} dg(\underline{x}; \underline{dx}) &= \sum_{i=1}^n f'_{y_i}(\underline{\varphi}(\underline{x})) d\varphi_i(\underline{x}, \underline{dx}) = \\ &= (d\varphi_1) \varphi_2 \varphi_3 \dots \varphi_n + \varphi_1 (d\varphi_2) \varphi_3 \dots \varphi_n + \dots + \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{n-1} (d\varphi_n). \end{aligned}$$

A 8.2 Példához hasonló módon látható be, hogy totálisan differenciálható függvények összege és hányadosa is totálisan differenciálható, amennyiben a nevezőben levő függvény abszolút értékének pozitív alsó korlátja van és fennállnak az alábbi összefüggések:

$$d(f_1 + f_2) = df_1 + df_2, \quad (8.10)$$

$$d\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{df_1 \cdot f_2 - f_1 df_2}{f_2^2}. \quad (8.11)$$

8.3 Példa. (Determináns differenciálása). Legyen a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) egy-, vagy többváltozós (totálisan) differenciálható függvény és képezzük a

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinánst. $\det \underline{A}$ i -edik sora szerinti kifejtéséből, a $\det \underline{A} = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik}$ (lásd III. Kötet 10.9 Tétel) formulából, ahol D_{ik} az a_{ik} elem előjeles aldeterminánisa, látható, hogy $\det \underline{A}$ az a_{ik} elemek totálisan differenciálható függvénye és

$$\frac{\partial \det \underline{A}}{\partial a_{ik}} = D_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

(8.9) felhasználásával

$$d(\det \underline{A}) = \sum_{i,k=1}^n D_{ik} da_{ik} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n D_{ik} da_{ik} \right).$$

Az utóbbi kifejezésben zárójelben egy olyan determináns i -edik sora szerinti kifejtése áll, mely $\det \underline{A}$ -ból úgy keletkezik, hogy az i -edik sorban minden a_{ik} elem helyére da_{ik} -t írunk ($k = 1, 2, \dots, n$). Ezek szerint

$$d(\det \underline{A}) = \begin{vmatrix} da_{11} & \dots & da_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ da_{21} & \dots & da_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ da_{n1} & \dots & da_{nn} \end{vmatrix}. \quad (8.12)$$

Innen speciálisan, ha a_{ik} -kegyváltozós függvények, következik, hogy

$$(\det \underline{A})' = \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}. \quad (8.13)$$

8.4 Példa. Bebizonyítjuk, hogy az

$$u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

háromváltozós függvény a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (8.14)$$

"differentiálegyenletnek", az ugynevezett térbeli Laplace-egyenletnek megoldása.

A bizonyítás behelyettesítéssel történik. u másodrendű deriváltjainak meghatározásához bevezetjük az

$$f(r) = \frac{1}{r}, \quad r(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

függvényeket, és az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazzuk (8.1) formula).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{x}{r} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{3y^2 - r^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{3z^2 - r^2}{r^5}.$$

Ebből:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{3x^2 - r^2 + 3y^2 - r^2 + 3z^2 - r^2}{r^5} = 0,$$

$(x, y, z) \neq (0, 0, 0).$

A részletszámításoknál elegendő volt $\frac{\partial u}{\partial x}$ és $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ kiszámítása, a

többi parciális deriváltat a változók szimmetriája miatt egyszerű betűcserével kaptuk.

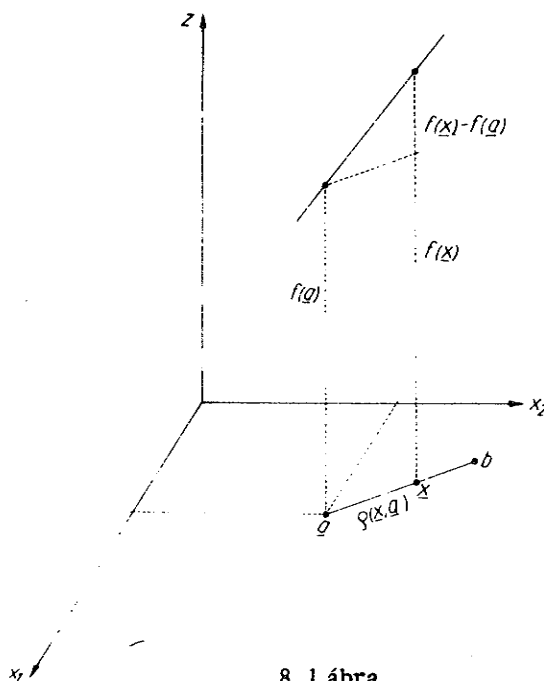
A következőkben az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvény változási sebességét vizsgáljuk az értelmezési tartomány valamely $\underline{a}$ pontjában, miközben $\underline{a}$ -ból valamely $\underline{b} \neq \underline{a}$ pont irányában mozgunk. Jelöljük s -sel az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontokat összekötő egyenes szakaszt, pontosabban legyen (v.ö. (1.4))

$$s = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = \underline{a} + (\underline{b} - \underline{a})t, t \in (0, 1) \}. \quad (8.15)$$

Az

$$\frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a})}{\varphi(\underline{x}, \underline{a})} \quad (8.16)$$

hányados az f függvény átlagos változási sebessége, ha $\underline{a}$ -ból az értelmezési tartomány egy $\underline{x}$ pontjába megyünk. E hányados függvénynek az s szakaszra vonatkozó leszűkítése megadja f átlagos változási sebességét az s által meghatározott irányban.



8.1 ábra

8.1 Definíció. Legyen adott az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvény, tegyük fel, hogy $a \in D$ és $\underline{a}$ a $D \cap S$ tartomány torlódási pontja a (8.16) hányados (8.5)-re való leszűkítésének határértékét, mikor $\underline{x} \rightarrow \underline{a}$, az f függvény a pontbeli s irányu iránymenti deriváltjának nevezzük és $\frac{\partial f}{\partial s}$ -sel jelöljük, vagyis

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{\substack{\underline{x} \rightarrow \underline{a} \\ \underline{x} \in s \cap K_{\underline{a}}}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a})}{\varphi(\underline{x}, \underline{a})} \quad (8.17)$$

8.2. Tétel. Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvényre $K_{\underline{a}} \subset D$ és f az $\underline{a}$ pontban totálisan differenciálható, akkor minden $\underline{a}$ -ból kiinduló (8.15) s irányban létezik az iránymenti derivált és

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{a}) v_i \left(\sum_{k=1}^n v_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (8.18)$$

ahol $\underline{v} = \underline{b} - \underline{a} = (v_1, \dots, v_n) = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$.

Bizonyítás. Ha $\underline{x} \in s$, akkor (8.15)-ből

$$\begin{aligned} \rho(\underline{x}, \underline{a}) &= \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n (v_i t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= t \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Másrészt a feltevésből következik, hogy

$$f(\underline{x}) - f(\underline{a}) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{a}) (x_i - a_i) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (x_i - a_i)$$

ahol $\varepsilon_i \rightarrow 0$, ha $\rho(\underline{x}, \underline{a}) \rightarrow 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ha $\underline{x} \in s \cap K_{\underline{a}}$, akkor

$$f(\underline{x}) - f(\underline{a}) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{a}) v_i t + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i t,$$

és

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\underline{x} \rightarrow \underline{a} \\ \underline{x} \in s \cap K_{\underline{a}}}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a})}{\rho(\underline{x}, \underline{a})} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{a}) v_i t + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i t}{t \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{a}) v_i.$$

8.5 Példa. Legyen speciálisan $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, vagyis $D \subset \mathbb{R}^2$ és tételezzük fel, hogy teljesülnek a 8.2 Tétel feltételei. Ekkor

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha. \quad (8.18)$$

ahol $\cos \alpha = v_1 (v_1^2 + v_2^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\sin \alpha = v_2 (v_1^2 + v_2^2)^{-\frac{1}{2}}$ a $\underline{v} = (v_1, v_2)$ vektor iránykoszinuszai (v. 8. III. Kötet, (3.6)).

8.6 Példa. Legyen speciálisan $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ háromváltozós függvény, vagyis $D \subset \mathbb{R}^3$ és tételezzük fel, hogy teljesülnek a 8.2 Tétel feltételei. Ekkor

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma, \quad (8.19)$$

ahol $\cos \alpha = v_1 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\cos \beta = v_2 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{-\frac{1}{2}}$,
 $\cos \gamma = v_3 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{-\frac{1}{2}}$ a $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$

vektor iránykoszinuszai (lásd III. Kötet, (3.6)).

9. A Taylor-polinom a Lagrange-féle maradéktaggal. Magasabbrendű differenciálok

9.1 Tétel. (Lagrange-féle középértéktétel). Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex tartomány és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ totálisan differenciálható D -ben; ekkor minden $\underline{a}$ -hoz és $\underline{h}$ -hoz, melyre $\underline{a}, \underline{a} + \underline{h} \in D$ van $0 < \vartheta < 1$ szám, hogy

$$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{a} + \vartheta \underline{h}) h_i; \quad (9.1)$$

más szóval az $\underline{a}, \underline{a} + \underline{h}$ pontok által meghatározott egyenes szakasz-nak van olyan $\underline{a} + \vartheta \underline{h}$ pontja, hogy

$$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = df(\underline{a}; \underline{h}), \quad (9.2)$$

ahol $0 < \vartheta < 1$.

Bizonyítás. Bevezetjük az $F(t) = f(\underline{a} + t \underline{h})$ $t \in [0, 1]$ egyváltozós függvényt. F differenciálható minden $t \in [0, 1]$ pontban, mivel a 8.1 Tétel feltételei teljesülnek ($\underline{a}_1 + t \underline{h}_1$ differenciálható és f totálisan differenciálható az $\underline{a} + t \underline{h}$ pontban, ugyanis D konvexitása miatt $t \in [0, 1]$ esetén $\underline{a} + t \underline{h} \in D$). Az F függvényre alkalmazható az egyváltozós Lagrange-tétel (II. Kötet, 15.4 Tétel), vagyis van $0 < \vartheta < 1$, hogy

$$\begin{aligned} f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) &= F(1) - F(0) = F'(\vartheta) \cdot 1 = \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{a} + \vartheta \underline{h}) \cdot \frac{d}{dt}(\underline{a}_1 + t \underline{h}_1) \Big|_{t=\vartheta} = \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{a} + \vartheta \underline{h}) h_{i1}. \end{aligned}$$

9.1 Példa. A Lagrange-tétel szemléletes jelentése kétváltozós függvény esetén a következő. Legyen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, totálisan differenciálható az $\underline{a} \in D$ pontban és $K \subset D$ -ben. F grafikonját f grafikonjából az $x = \underline{a}_1 + t \underline{h}_1$, $y = \underline{a}_2 + t \underline{h}_2$ egyenesen áthaladó, (x, y) síkra merőleges sík metszi ki. Az egyváltozós Lagrange-tétel szerint F grafikonjának van olyan érintő egyenese ($\underline{a} + \vartheta \underline{h}$ -ban), amely párhuzamos az $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, f(\underline{a}_1, \underline{a}_2))$ és $(\underline{a}_1 + \underline{h}_1, \underline{a}_2 + \underline{h}_2, f(\underline{a}_1 + \underline{h}_1, \underline{a}_2 + \underline{h}_2))$ pontokon áthaladó hurral.

9.2 Következmény. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, nyílt tartomány; ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény totálisan differenciálható D -ben és differenciálja azonosan zérus, $df(\underline{x}; \underline{dx}) \equiv 0$, akkor f állandó (v.ö. II. Kötet, 17.1 Tétel).

Bizonyítás. Az előző tétel értelmében minden $\underline{a}, \underline{b} \in D$ -hez van az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontok által meghatározott szakaszon olyan $\underline{c}$ pont, hogy $f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = df(\underline{c}; \underline{b} - \underline{a})$. Mivel D konvexitása miatt $\underline{c} \in D$, az utóbbi differenciál értéke zérus, vagyis $f(\underline{b}) = f(\underline{a})$.

Megjegyezzük: a 9.2 Következmény akkor is bebizonyítható, ha D -ről csak annyit teszünk fel, hogy összefüggő és nyílt. A gyakorlatban előforduló összefüggő, nyílt tartományok azonban általában előállíthatók véges számú konvex tartomány egyesítéseként és ekkor a 9.2 Következmény nyilván érvényes.

Ha $f \in C_D^2$, $D \subset \mathbb{R}^n$, akkor f elsőrendű parciális deriváltjai és ezzel együtt a

$$df(\underline{x}; \underline{h}) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{x}) h_i \quad (9.2)$$

differenciál (mint $\underline{x}$ függvénye) folytonosan differenciálható. Ebből következik, hogy df totálisan differenciálható. df differenciálját f második differenciáljának nevezzük és d^2f -fel jelöljük, vagyis

$$\begin{aligned} d^2f(\underline{x}; \underline{h}) &= d(df(\underline{x}; \underline{h})) = \\ &= \sum_{i,k=1}^n f''_{x_i x_k}(\underline{x}) h_i h_k. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Ezek szerint f második differenciálja a független változók $(h_1, h_2, \dots, h_n)$

megváltozásainak kvadratikusan formája. A (9.3) kifejezésben az $\left[f''_{x_i x_k}(\underline{x}) \right]$

együttható mátrix (v. ö. III. Kötet, (19.8)) a 7.3 Tétel miatt szimmetrikus.

9.2 Példa. Ha $f \in C_D^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$, akkor speciálisan $d^2f(x, y; dx, dy) =$

$$= f''_{xx}(x, y) dx^2 + 2 f''_{xy}(x, y) dx dy + f''_{yy}(x, y) dy^2 \quad (9.4)$$

Általában:

9.1 Definíció. Legyen $f \in C_D^k$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $k = 2, 3, \dots$; ekkor a

$$d^k f(\underline{x}; \underline{h}) = d(d^{k-1} f(\underline{x}; \underline{h}))$$

függvényt f k -adik differenciáljának nevezzük.

Függvény k -adik differenciálját rekurzív módon értelmeztük. Nyilvánvaló, hogy ha $f \in C_D^k$, akkor $d^{k-1} f(\underline{x}; \underline{h})$ folytonosan (és ennek következtében totálisan) differenciálható és

$$\begin{aligned} d^k f(\underline{x}; \underline{h}) &= d(d^{k-1} f(\underline{x}; \underline{h})) = \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f(\underline{x})}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Totálisan differenciálható függvény megváltozása, amint ezt a 6. pontban láttuk $o(|\Delta \underline{x}|)$ nagyságrendű tagoktól eltekintve differenciáljával közelíthető. Ha a függvény magasabbrendben folytonosan differenciálható, akkor megváltozása a magasabbrendű differenciálok segítségével pontosabban is közelíthető. Érvényes a

9.3 Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex tartomány és $f \in C_D^{k+1}$; ekkor minden $\underline{a} \in D$ és $(\underline{a} + \underline{h}) \in D$ ponthoz van $0 < \vartheta < 1$ szám, hogy

$$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m!} d^m f(\underline{a}; \underline{h}) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(\underline{a} + \vartheta \underline{h}; \underline{h}). \quad (9.6)$$

A (9.6) formulát n-változós Taylor-formulának, (9.6) jobb oldalának utolsó tagját Lagrange-féle maradéktagnak nevezzük (v. ö. II. Kötet, 18.3 Tétel).

Bizonyítás. Vezessük be az

$$F(t) = f(\underline{a} + t \underline{h}) \quad (9.7)$$

segédfüggvényt, mely D konvexitása miatt nyilván $(k+1)$ -szer folytonosan differenciálható a $0 \leq t \leq 1$ intervallumon. A láncszabályt alkalmazva

$$F'(t) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\underline{a} + t \underline{h}) h_i = df(\underline{a} + t \underline{h}; \underline{h}), \quad (9.8)$$

$$F''(t) = \sum_{i_1, i_2=1}^n f''_{x_{i_1} x_{i_2}}(\underline{a} + t \underline{h}) h_{i_1} h_{i_2} = d^2 f(\underline{a} + t \underline{h}; \underline{h}) \quad (9.9)$$

és így tovább

$$\begin{aligned} F^{(k+1)}(t) &= \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n f^{(k+1)}_{x_{i_1} \dots x_{i_{k+1}}}(\underline{a} + t \underline{h}) h_{i_1} \dots h_{i_{k+1}} = \\ &= d^{k+1} f(\underline{a} + t \underline{h}; \underline{h}) \end{aligned} \quad (9.10)$$

A II. Kötet, 18.3 Tételt az F függvényre alkalmazva a $0 \leq t \leq 1$ intervallumon van $0 < \vartheta < 1$, hogy

$$F(1) - F(0) = \sum_{m=1}^k \frac{F^{(m)}(0)}{m!} 1^m + \frac{F^{(k+1)}(\vartheta)}{(k+1)!} 1^{k+1}.$$

A (9.7)-(9.10) formulákat a $t = 1, 0$, illetve ϑ helyen véve és behelyettesítve az utóbbi kifejezésbe (9.6)-ot kapjuk!

Megjegyezzük, hogy a Lagrange-féle középértéktétel a most bizonyított tételnek $k = 0$ -val speciális esete. A (9.6)-ban szereplő Lagrange-tétel maradvéktag $O(|h|^k)$ nagyságrendű, vagyis $h \rightarrow 0$ esetén $|h|^k$ -nel osztva is zérushoz tart, ugyanis

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{|h|^k} - \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a + \vartheta h; h) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n \left| f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_{k+1}}}^{(k+1)}(a + \vartheta h) \right| \frac{|h_{i_1} \dots h_{i_{k+1}}|}{(h_1^2 + \dots + h_n^2)^{\frac{k}{2}}} \leq \\ & \leq C \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n \frac{|h_{i_1} \dots h_{i_{k+1}}|}{(h_1^2 + \dots + h_n^2)^{\frac{k}{2}}} = C \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n \frac{|h_{i_1} \dots h_{i_{k+1}}|}{\left[(h_1^2 + \dots + h_n^2)^k \right]^{\frac{1}{2}}} = \\ & = C \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n \frac{|h_{i_1} \dots h_{i_{k+1}}|}{\left[(h_1^2)^k + (h_1^2)^{k-1} (h_2^2) + \dots + (h_1^2) (h_2^2)^{k-1} + (h_2^2)^k + \dots + (h_{n-1}^2) (h_n^2)^{k-1} + (h_n^2)^k \right]^{\frac{1}{2}}} \leq \\ & \leq C \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n \frac{|h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_{k+1}}|}{(h_{i_1}^2 \dots h_{i_{k+1}}^2)^{\frac{1}{2}}} = \end{aligned}$$

$$= C \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n \frac{|h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_{k+1}}|}{|h_{i_2} \dots h_{i_{k+1}}|} = C \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n |h_{i_1}| \rightarrow 0,$$

ha $(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)$. (C az $\left| f_{x_{i_{k+1}}}^{(k+1)} \dots x_{i_1} \right|$ -ek közös felső

korlátja osztva $(k+1)!$ -sal. A $\sum$ -gal ellátott szumma-jel azt jelenti, hogy a szummázást csak a zérustól különböző tagokra terjesztjük ki.)

10. Szélsőértékszámítás

Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvény lokális szélsőérték fogalmából (lásd 3. pont) következik, hogy ha az $\underline{a} \in D$ pontban f -nek lokális szélsőértéke van, akkor az $f_k: D_k \rightarrow \mathbb{R}$, $D_k \subset \mathbb{R}$, ahol

$$f_k(x) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

$$(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n) \in D,$$

egyváltozós függvénynek is lokális szélsőértéke van az $a_k \in D_k$ pontban ($k = 1, \dots, n$). Az egyváltozós függvény lokális szélsőértékére vonatkozó szükséges feltételből (II. Kötet, 15.2 Tétel) következik a 10.1 Tétel.

10.1 Tétel. Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvénynek lokális szélsőértéke van az $\underline{a} \in D$ pontban, van $K_{\underline{a}}$ környezet, melyre $K_{\underline{a}} \subset D$, és $\underline{a}$ -ban léteznek az $f'_{x_k}(\underline{a})$ ($k = 1, \dots, n$) parciális deriváltak, akkor

$$f'_{x_k}(\underline{a}) = 0, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (10.1)$$

Bizonyítás. Mivel a feltevésekből következik, hogy $f_k(x)$ -nek a_k -ban szélsőértéke van és teljesülnek rá a II. Kötet 15.2 Tétel feltételei, ezért

$$\frac{d}{dx} f_k(x) \Big|_{x=a_k} = 0, \quad (k = 1, \dots, n)$$

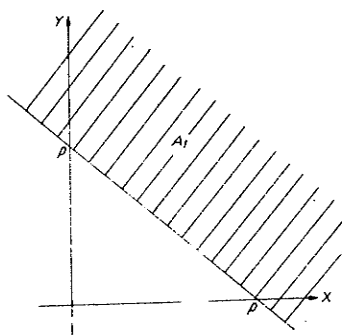
ahonnan az 5.1 Definíció értelmében (10.1) adódik. $\square$

10.1 Példa. Adott a $2p$ kerületű ($p > 0$) háromszögek közül határozzuk meg a maximális területű háromszög oldalait. Legyenek a háromszög oldalai x, y illetve $(2p - x - y)$. A háromszög egyenlőtlenségéből következik, hogy

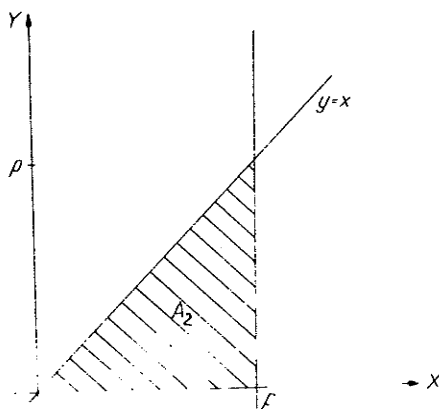
$$x + y \geq 2p - x - y ,$$

vagyis

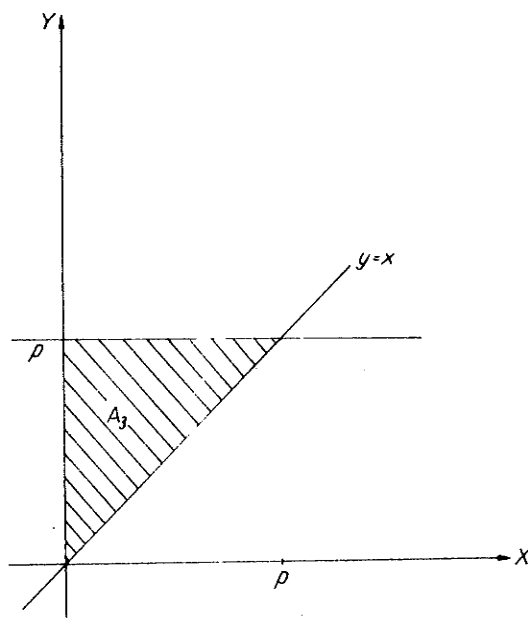
$$x + y \geq p \quad (10.2)$$



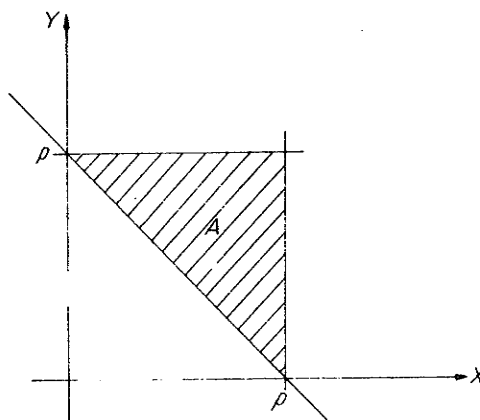
10.1 ábra



10.2 ábra



10.3 ábra



10.4 ábra

A (10.2) egyenlőtlenséget az x, y sík A_1 tartománya pontjainak koordinátái elé-
gítik ki. (Lásd 10.1 ábra). Érvényes az

$$|x - y| \leq 2p - x - y \quad (10.3)$$

egyenlőtlenség is. Ha $x \geq y \geq 0$, akkor

$$0 \leq x - y \leq 2p - x - y, \text{ vagyis}$$

$$0 \leq x \leq p,$$

amely a sík A_2 tartományát határozza meg (lásd 10.2 ábra). Ha $y \geq x \geq 0$, akkor

$$0 \leq y - x \leq 2p - x - y,$$

vagyis

$$0 \leq y \leq p,$$

amely a sík A_3 tartományát határozza meg (lásd 10.3 ábra). A (10.3) egyenlőtlenséget az $A_2 \cup A_3$, a (10.2) egyenlőtlenséget az A_1 tartomány pontjainak a koordinátái elégítik ki. A (10.2)-nek és (10.3)-nak is eleget tevő (x, y) pontok:

$$(x, y) \in A = A_1 \cap (A_2 \cup A_3).$$

Az A tartományt a 10.4 ábra mutatja. Az adott kerületű háromszög területét Heron képlete szerint az $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \sqrt{(p-x)(p-y)(x+y-p)p}$$

függvény adja. Az f függvény abszolút maximum helye feladatunk megoldása. Mivel $f \geq 0$, és A határán $f \equiv 0$, ezért ha f -nek van maximuma, akkor azt A belső pontjában veszi fel. f folytonos az A korlátos és zárt tartományon, ezért van olyan $\underline{a} = (a, b) \in A \setminus \text{front} A$ pont, amelyben f felveszi a maximumát (Weierstrass tétele, 4.7 Tétel). A 10.1 Tétel értelmében:

$$f'_x(\underline{a}) = 0 \text{ és } f'_y(\underline{a}) = 0; \text{ azaz:}$$

$$\left. \frac{p(p-y)(2p-2x-y)}{2f(x,y)} \right|_{(a,b)} = 0, \text{ és}$$

$$\left. \frac{p(p-x)(2p-2y-x)}{2f(x,y)} \right|_{(a,b)} = 0,$$

vagyis

$$p(p-b)(2p-2a-b) = 0, \text{ és } p(p-a)(2p-2b-a) = 0.$$

Mivel (a, b) belső pontja A -nak, azért:

$$2p - 2a - b = 0 \quad \text{és} \quad 2p - 2b - a = 0$$

lehetőséges csak, amiből $a = b = \frac{2p}{3}$. Ezek szerint adott kerületű háromszögek közül az egyenlőoldalú területe maximális.

10.2 Példa. Az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2 - x^2$ (grafikonja hiperbolikus paraboloid, lásd III. Kötet, 19.5 ábra) függvényre a $(0, 0)$ pontban teljesül a szélsőérték létezésére vonatkozó (10.1) szükséges feltétel, ugyanis

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = (-2x) \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,0)} = (2y) \Big|_{(0,0)} = 0.$$

A $(0, 0)$ -ban még sincs szélsőértéke a függvénynek. Az

$$f(x, 0) = -x^2 \leq 0$$

$$f(0, y) = y^2 \geq 0$$

egyenlőtlenségek segítségével beláthatjuk, hogy minden K_0 környezetben a függvény felvesz $f(0, 0) = 0$ -nál nagyobb és kisebb értékeket is, hiszen minden K_0 környezet tartalmaz $(x, 0)$ és $(0, y)$ alakú pontot is. Tehát $(0, 0)$ nem szélsőérték hely.

Amint ezt a 10.2 Példa mutatja, (10.1) nem elégséges feltétel szélsőérték létezéséhez. A 10.1 Példában azt, hogy valóban szélsőérték van ott, ahol (10.1) teljesül, a Weierstrass-tétel felhasználásával döntöttük el. Célszerű lenne szélsőérték létezésére olyan egyszerű elégséges feltételt megadni, mint amilyen az egyváltozós esetben a II. Kötet, 17.7 Tétel. A többváltozós esetben azonban a megfelelő elégséges feltétel bonyolultabb.

10.2 Tétel. Legyen az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ függvény D értelmezési tartományának $\underline{a} \in D$ belső pontja, vagyis létezzék $K_{\underline{a}}$ környezet, melyre $K_{\underline{a}} \subset D$, legyen továbbá $f \in C_{K_{\underline{a}}}^2$; ha $f'_{x_i}(\underline{a}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ és a $d^2 f(\underline{a}; \underline{h})$ másodfokú alak pozitív (negatív) definit, (lásd (9.3) és III. Kötet, 19.3 Definíció), akkor az f függvénynek $\underline{a}$ -ban lokális minimuma (maximuma) van.

Bizonyítás. A 9.3 Tételt a $k = 1$ esetben, alkalmazva minden $\underline{h}$ -ra, melyre $\underline{a} + \underline{h} \in K_{\underline{a}}$

$$f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = df(\underline{a}; \underline{h}) + \frac{1}{2} d^2 f(\underline{a} + \vartheta \underline{h}; \underline{h}),$$

ahol $0 < \vartheta < 1$. Mivel $f'_{x_i}(\underline{a}) = 0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ -ből $df(\underline{a}, \underline{h}) \equiv 0$ következik, ezért

$$f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = \frac{1}{2} d^2 f(\underline{a} + \vartheta \underline{h}; \underline{h}). \quad (10.4)$$

Be kell bizonyítanunk: van $K_{\underline{a}, \delta} \subset K_{\underline{a}}$ környezet, hogy minden $(\underline{a}+\underline{h}) \in (K_{\underline{a}, \delta} \setminus \{\underline{a}\})$ -ra $d^2 f(\underline{a} + \vartheta \underline{h}; \underline{h})$ pozitív (negatív). Ebből (10.4) alapján következik, hogy f -nek $\underline{a}$ -ban lokális minimuma (maximuma) van. A továbbiakban feltételezzük, hogy $(\underline{a}+\underline{h}) \in K_{\underline{a}}$, $\underline{h} = (h_1, \dots, h_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ és bevezetjük az $\underline{s} = \frac{h_1}{|\underline{h}|}, \dots, \frac{h_n}{|\underline{h}|}$ jelölést, ahol $|\underline{h}| = \varphi(\underline{h}, 0) = (h_1^2 + \dots + h_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Nyilvánvaló, hogy $\varphi(\underline{s}, 0) = 1$. Mivel $d^2 f(\underline{x}; \underline{h})$, melynek előjelét kell vizsgálnunk, $\underline{h}$ koordinátáinak kvadratikus formája, azért

$$\begin{aligned} d^2 f(\underline{x}; \underline{h}) &= |\underline{h}|^2 d^2 f(\underline{x}; \frac{\underline{h}}{|\underline{h}|}) = \\ &= |\underline{h}|^2 d^2 f(\underline{x}; \underline{s}), \end{aligned} \quad (10.5)$$

ahol $\underline{x} \in K_{\underline{a}}$ és $\varphi(\underline{s}, 0) = 1$. Jelöljük az origó középpontú egységsugarú gömböt S -sel, vagyis legyen

$$S = \{ \underline{s} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\underline{s}, 0) = 1 \}.$$

S korlátos és zárt tartomány (lásd 1.4 és 1.5 Példa). Ha belátjuk, hogy van $K_{\underline{a}, \delta}$, melyre $\underline{x} \in K_{\underline{a}, \delta}$, $\underline{s} \in S$ esetén $d^2 f(\underline{x}; \underline{s}) \gtrless 0$, akkor (10.5)-ből állításunk következik. A pozitívításra (vagyis a lokális minimum létezésére) vonatkozó állítást igazoljuk. A másik állítás analóg módon bebizonyítható. A feltevésekből következik, hogy $d^2 f(\underline{x}; \underline{s})$ minden $\underline{x} \in K_{\underline{a}}$, $\underline{s} \in \mathbb{R}^n$ -re folytonos és $d^2 f(\underline{a}; \underline{s})$ pozitív. A 4.3 Tételből ezért az adódik, hogy $\underline{a}$ -hoz és minden $\underline{g} \in S$ -hez van $K_{\underline{a}, \delta_{\underline{g}}}$ és $K_{\underline{g}, \delta_{\underline{g}}}$ környezet, hogy $\underline{x} \in K_{\underline{a}, \delta_{\underline{g}}}$, $\underline{s} \in K_{\underline{g}, \delta_{\underline{g}}} \cap S$ -re $d^2 f(\underline{x}; \underline{s}) > 0$. Mivel S korlátos és zárt, továbbá

$$S \subset \bigcup_{\underline{g} \in S} K_{\underline{g}, \delta_{\underline{g}}},$$

a Borel-féle lefedési tételből (2.10 Tétel) adódik, hogy van véges sok $\underline{\sigma}_i \in S$, $i = 1, 2, \dots, m$, melyekhez tartozó $K_{\underline{\sigma}_i, \delta_i}$ golyók lefedik S -et, vagyis

$$S \subset \bigcup_{i=1}^m K_{\underline{\sigma}_i, \delta_i}.$$

Legyen $\delta = \min_{1 \leq i \leq m} \delta_i$. Ha $\underline{x} \in K_{\underline{a}, \delta}$ és $\underline{s} \in S$, akkor van $k \in \{1, 2, \dots, m\}$,

hogy $\underline{s} \in K_{\underline{\sigma}_k, \delta_k}$ és mivel $K_{\underline{a}, \delta} \subset K_{\underline{\sigma}_k, \delta_k}$, ezért $\underline{x} \in K_{\underline{a}, \delta_k}$, ahonnan

$d^2 f(\underline{x}; \underline{s}) > 0$ következik.

Könnyű belátni azt, hogy ha az előbbi tétel egyéb feltételeinek teljesülése mellett a $d^2 f(\underline{a}; \underline{h})$ kvadratikus forma indefinit, akkor f -nek az $\underline{a}$ pontban nincs lokális szélsőértéke. Ha $d^2 f(\underline{a}; \underline{h})$ szemidefinit, akkor előfordulhat az is, hogy $\underline{a}$ -ban van szélsőérték és az is, hogy nincs.

A III. Kötet, 19.13 Tétel szükséges és elégséges feltételt ad másodfokú alak definitására. Mivel

$$d^2 f(\underline{a}; \underline{h}) = \sum_{i,k=1}^n f''_{x_i x_k}(\underline{a}) h_i h_k,$$

az idézett feltétel azt jelenti, hogy ha a 10.2 Tétel egyéb feltételeinek teljesülése mellett az $[f''_{x_i x_k}(\underline{a})]$ (szimmetrikus, lásd 7.3 Tétel és III. Kötet, 19.4

Tétel) mátrix összes sajátértéke pozitív (negatív), akkor f -nek $\underline{a}$ -ban lokális minimuma (maximuma) van. Speciálisan, kétváltozós függvény esetében ez utóbbi feltétel teljesülése könnyen ellenőrizhető. Érvényes ugyanis a

10.3 Tétel. Legyen az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ függvény D értelmezési tartományának $\underline{a} \in D$ belső pontja, vagyis létezzék $K_{\underline{a}}$ környezet, melyre $K_{\underline{a}} \subset D$, legyen továbbá $f \in C^2_{K_{\underline{a}}}$; ha $f'_x(\underline{a}) = f'_y(\underline{a}) = 0$ és

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(\underline{a}) & f''_{xy}(\underline{a}) \\ f''_{xy}(\underline{a}) & f''_{yy}(\underline{a}) \end{vmatrix} > 0, \quad (10.6)$$

akkor f -nek $\underline{a}$ -ban lokális szélsőértéke van, és pedig minimum, ill. maximum aszerint, amint $f''_{xx}(\underline{a}) > 0$, ill. $f''_{xx}(\underline{a}) < 0$.

Bizonyítás. A 9.2 Példában felírtuk kétváltozós függvény második differenciálját. Az $\underline{a} = (a, b)$ pontbeli második differenciál együtthatóiból alkotott szimmetrikus mátrix karakterisztikus egyenlete (lásd III. Kötet, 14.9 Tétel)

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(\underline{a}) - \lambda & f''_{xy}(\underline{a}) \\ f''_{xy}(\underline{a}) & f''_{yy}(\underline{a}) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

vagyis

$$\lambda^2 - (f''_{xx} + f''_{yy})\lambda + f''_{xx}f''_{yy} - f''_{xy}^2 = 0,$$

ahol az $\underline{a}$ argumentum kiírását helykimélés végett elhagytuk. A λ_1 és λ_2 sajátértékek kielégítik a Vietà-féle formulákat (lásd III. Kötet, 7.8 Tétel), vagyis

$$\lambda_1 + \lambda_2 = f''_{xx} + f''_{yy}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = f''_{xx}f''_{yy} - f''_{xy}^2$$

A második összefüggés jobb oldala éppen a (10.6)-ben szereplő determináns. Ezek szerint, ha (10.6) fennáll, akkor $\text{sg } \lambda_1 = \text{sg } \lambda_2 \neq 0$, vagyis a Tételt megelőző megjegyzés szerint $\underline{a}$ -ban szélsőérték van. (10.6)-ból az is következik, hogy $\text{sg } f''_{xx} = \text{sg } f''_{yy} \neq 0$. Mivel az első Vietà-formula felhasználásával $\text{sg } \lambda_1 = \text{sg } \lambda_2 = \text{sg}(\lambda_1 + \lambda_2) = \text{sg}(f''_{xx} + f''_{yy}) = \text{sg } f''_{xx}$, a sajátértékek aszerint pozitívak, ill. negatívak, amint $f''_{xx}(\underline{a})$ pozitív, ill. negatív!

10.3 Példa. (A legkisebb négyzetek módszere). A mérnöki gyakorlatban gyakran fellépő feladat a következő: tudjuk, vagy feltételezzük, hogy az x független és az y függő változók között (melyek pl. fizikai mennyiségek) közelítőleg lineáris függvénykapcsolat áll fenn. x és y összetartozó értékeire méréseket végzünk és meg kell határoznunk azt a lineáris függvényt, mely a mérési adatokkal összhangban, bizonyos értelemben a legpontosabban fejezi ki az x és y változók közötti függvénykapcsolatot. A feltételezett kapcsolat $y = ax + b$, ahol "a" és b egyelőre ismeretlen együtthatók és az $m \geq 2$ számú mérés eredménye az $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ rendezett számpárokból álló táblázat.

Feltételezzük, hogy az $x_1, \dots, x_m$ számok nem mind egyenlők. Azt az

$y = ax + b$ egyenletű egyenest tekintjük az x és y változók közötti függvénykapcsolat grafikonjának, melyre az

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^m (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (10.7)$$

kifejezés (vagyis az egyenesen lévő, x_i abszcisszákhöz tartozó pontok ordinátái és az y_i ordináták közötti eltérések négyzetének összege) minimális. Meg

kell határoznunk tehát azt az (a, b) pontot, melyben a (10.7) formulával értelmezett $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek (abszolút) minimuma van. (10.7)-nek csak ott lehet lokális minimuma, ahol

$$f'_a = -2 \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b) x_i = 0,$$

$$f'_b = -2 \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b) = 0.$$

Az egyenletrendszert rendezve az

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^m x_i^2 + b \sum_{i=1}^m x_i &= \sum_{i=1}^m x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^m x_i + b m &= \sum_{i=1}^m y_i \end{aligned} \quad (10.8)$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk. Megmutatjuk, hogy ennek az egyenletrendszernek a determinánsa nem zérus, pontosabban, hogy

$$m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 > 0. \quad (10.9)$$

Ha a Cauchy-féle egyenlőtlenséget (III. Kötet, 16.2 Következmény) az $(1, 1, \dots, 1)$ és $(x_1, \dots, x_m)$ rendezett szám m -esekre alkalmazzuk, kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^m 1^2 \right) \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^m 1 \cdot x_i \right)^2,$$

vagyis

$$m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 \geq 0. \quad (10.10)$$

Bebizonyítjuk, hogy itt egyenlőség nem állhat fenn; pontosabban abból, hogy itt egyenlőség áll fenn, következik: $x_1 = x_2 = \dots = x_m$, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy az x_i -k között vannak különbözők. A bizonyítást m -re vonatkozó matematikai indukcióval végezzük. Az $m = 2$ esetben

$$2(x_1^2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)^2$$

rendezés után az $(x_1 - x_2)^2 = 0$ feltételt adja, ahonnan $x_1 = x_2$ következik. Feltételezzük, hogy ha

$$m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 = 0,$$

akkor $x_1 = \dots = x_m$. Legyen

$$(m+1) \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i \right)^2 = 0,$$

és rendezzük ezt az egyenletet a következőképpen

$$m \sum_{i=1}^m x_i^2 + \sum_{i=1}^m x_i^2 + (m+1)x_{m+1}^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i + x_{m+1} \right)^2 = 0,$$

vagy tovább alakítva

$$\begin{aligned} m \sum_{i=1}^m x_i^2 + \sum_{i=1}^m x_i^2 + (m+1)x_{m+1}^2 - \\ - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 - 2x_{m+1} \sum_{i=1}^m x_i - x_{m+1}^2 = 0. \end{aligned}$$

Ezt még a következőképpen is írhatjuk

$$m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^m (x_i^2 + x_{m+1}^2 - 2x_{m+1} x_i) = 0,$$

vagy

$$\left[m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 \right] + \sum_{i=1}^m (x_i - x_{m+1})^2 = 0. \quad (10.11)$$

(10.10)-ből következik, hogy a szögletes zárójelben álló kifejezés nem-negatív, a bal oldal második tagja, mint négyzetek összege ugyancsak nem-negatív.

(10.11)-ből ezek szerint

$$m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 = 0$$

és

$$\sum_{i=1}^m (x_i - x_{m+1})^2 = 0$$

következik. Az indukciós föltevés miatt az első egyenletből $x_1 = x_2 = \dots = x_m$ adódik. A második egyenletből pedig $x_{m+1} = x_1 = \dots = x_m$ következik, amivel állításunkat és így a (10.9) egyenlőtlenséget bebizonyítottuk. A (10.8) egyenletrendszernek ezek szerint egy és csak egy megoldása van, és pedig

$$a = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \cdot \sum_{k=1}^m y_k}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2},$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot \sum_{k=1}^m y_k - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{k=1}^m x_k y_k}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2} \quad (10.12)$$

Mivel (10.9) miatt

$$\begin{vmatrix} f''_{aa} & f''_{ab} \\ f''_{ab} & f''_{bb} \end{vmatrix} = 4 \left[m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 \right] > 0 \quad (10.13)$$

és $f''_{aa} = 2 \sum_{i=1}^m x_i^2 > 0$, teljesülnek a 10.3 Tétel feltételei, így a (10.12)-gyel

adott (a, b) pontban (és csak itt) (10.7)-nek lokális minimuma van. (a, b)-ben az f függvénynek egyben abszolút minimuma van, ami abból következik, hogy (10.13) és $f''_{aa} > 0$ miatt f második differenciálja nemcsak a (10.12)-vel adott pont egy kis környezetében, hanem mindenütt pozitív definit (lásd (10.4) és a 10.3 Tételt megelőző megjegyzést).

11. Implicit megadású függvényrendszerek.

Inverz függvényrendszer

Mint ismeretes, igen sok egyszerű görbe egyenlete adható meg a síkban az

$$F(x, y) = 0 \quad (11.1)$$

implicit alakban (lásd II. Kötet, 8. pont). Igen fontos kérdés az, hogy vajon az így megadott görbe valamely egyváltozós valós függvény grafikonjának tekinthető-e. Más szóval azt a kérdést vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett definiál a (11.1) egyenlet egy implicit megadású függvényt (lásd II. Kötet, 8.1 Definíció).

11.1 Példa. Az origó középpontu egységsugarú kör egyenlete

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (11.2)$$

Ez az egyenlet nem definiál egyértelműen egy egyváltozós függvényt, hiszen minden $x \in (-1, 1)$ abszcisszához két olyan ordináta, $y = \pm (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, tartozik, mely x -szel együtt kielégíti az egyenletet. Ha azonban például a körön levő $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ pont egy alkalmas környezetét vizsgáljuk, mondhatjuk, hogy van egy és csak egy olyan egyváltozós f függvény, mely e pont $3^{-\frac{1}{2}}$ abszcisszájának egy környezetében értelmezve van, folytonos, a $3^{-\frac{1}{2}}$ helyen a $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ értéket veszi fel és melyre $(x, f(x))$ kielégíti (11.2)-t, vagyis

$$x^2 + f^2(x) - 1 = 0$$

Ez a függvény a következő: $f(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$x \in \left(3^{-\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}}, 3^{-\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}\right).$$

A szóban forgó probléma egy lényegesen általánosabb feladatnak, egyenletrendszerrel értelmezett többváltozós implicit függvényrendszer létezése és egyértelműsége ("egzisztenciája és unicitása") feltételei meghatározásának speciális esete. Ezzel az általános esettel foglalkozunk. Először néhány jelölést és elnevezést vezetünk be. Legyen adott az

$$F_i : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (11.3)$$

függvényrendszer, ahol az $(n+m)$ -változós F_i függvények értelmezési tartománya közös. Az $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_m)$ jelölések bevezetésével az F_i függvény $(\underline{x}, \underline{y}) \in D$ helyen felvett értéke $F_i(\underline{x}, \underline{y}) = F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$. A (11.3) függvényekből álló rendezett függvény m -est $\underline{F} = (F_1, \dots, F_m)$ -mel jelöljük. (11.3) nyilván a következő ekvivalens módon írható:

$$\underline{F} : D \rightarrow R^m, \quad D \subset R^n \times R^m. \quad (11.4)$$

Az $\underline{F}$ függvény $(\underline{x}, \underline{y}) \in D$ helyen felvett értéke

$$\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = (F_1(\underline{x}, \underline{y}), \dots, F_m(\underline{x}, \underline{y})) \in R^m.$$

Ha az F_i ($i = 1, 2, \dots, m$) függvények az $y_1, y_2, \dots, y_m$ változók szerint parciálisan differenciálhatók valamely $(\underline{x}, \underline{y}) \in D$ pontban, akkor képezhetjük az y_j -k ($j = 1, \dots, m$) szerinti első parciális deriváltakból alkotott $(m \times m)$ -es

$$\underline{F}'_{\underline{y}}(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{bmatrix} F'_{1y_1} & F'_{1y_2} & \dots & F'_{1y_m} \\ F'_{2y_1} & F'_{2y_2} & \dots & F'_{2y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F'_{my_1} & F'_{my_2} & \dots & F'_{my_m} \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

mátrixot, melyet a (11.3) függvényrendszer, vagy a (11.4) függvény $\underline{y}$ szerinti deriváltmátrixának nevezünk ((11.5)-ben minden F'_{iy_j} elemet az $(\underline{x}, \underline{y})$ helyen

kell venni). A (11.5) deriváltmátrix determinánsát (11.3) Jacobi-féle függvény-determinánsának nevezzük és a következőképpen jelöljük:

$$\frac{\partial (F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_m)} = \det \underline{F}'_{\underline{y}}(\underline{x}, \underline{y}). \quad (11.6)$$

Használni fogjuk még az $\underline{F}'_{\underline{x}_k} = (F'_{1x_k}, F'_{2x_k}, F'_{3x_k}, \dots, F'_{mx_k})$, $k=1, \dots, n$ jelölést és alkalmazni fogjuk a mátrixalgebra (lásd III. Kötet, Harmadik fejezet) műveleteit és jelöléseit. Az R^n , ill. az R^m tér elemeit minden külön megjegyzés nélkül oszlopvektorokként kezeljük, ha ez kényelmes.

A kérdés tehát a következő: milyen feltételek mellett fejezhető ki az

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

egyenletrendszerből az y_j "ismeretlenek", mint az $x_1, \dots, x_n$ változók (egyértékű) folytonos függvényei. Mielőtt az erre a kérdésre válaszoló tételt megfogalmaznánk, érdemes azzal a speciális esettel foglalkozni, amikor az F_i függvények az y_j változóiban lineárisak.

11.2 Példa. Legyen

$$F_i(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=1}^m p_{ij}(\underline{x}) y_j - q_i(\underline{x}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (11.7)$$

tegyük fel hogy a p_{ij} és a q_i függvények ($i, j = 1, 2, \dots, m$) folytonosak valamely $\underline{a} \in R^n$ pont egy környezetében és $\det \underline{P}(\underline{a}) = \det [p_{ij}(\underline{a})] \neq 0$, tegyük fel továbbá, hogy a

$$\sum_{j=1}^m p_{ij}(\underline{a}) y_j - q_i(\underline{a}) = 0$$

egyenletrendszernek a megoldása $\underline{y} = \underline{b} = (b_1, \dots, b_m)$, vagyis $F_i(\underline{a}, \underline{b}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Mivel a determináns a saját elemeinek nyilván folytonos függvénye és a $p_{ij}(\underline{x})$ függvények folytonosak, az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételből (4.1 Tétel) következik, hogy $\det \underline{P}(\underline{x})$ is folytonos, és így $\underline{a}$ -nak van olyan környezete, melyben $\det \underline{P}(\underline{x}) \neq 0$. Ekkor azonban e környezet minden egyes $\underline{x}$ helyén a

$$\sum_{j=1}^m p_{ij}(\underline{x}) y_j - q_i(\underline{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (11.8)$$

vagy ami ugyanaz a

$$\underline{P}(\underline{x}) \underline{y} = \underline{q}(\underline{x})$$

egyenletrendszernek van egy és csak egy megoldása (lásd III. Kötet, 13.4 Tétel):

$$\underline{y} = \underline{P}^{-1}(\underline{x}) \underline{q}(\underline{x}).$$

Miután az inverzmátrix nyilvánvalóan az eredeti mátrix elemeinek folytonos függvénye, a $\underline{\psi}(\underline{x}) = \underline{P}^{-1}(\underline{x}) \underline{q}(\underline{x})$ függvények folytonosak, $\underline{\psi}(\underline{a}) = \underline{b}$ és $\underline{P}(\underline{x}) \underline{\psi}(\underline{x}) - \underline{q}(\underline{x}) \equiv 0$. A (11.8) egyenletrendszer tehát éppen a $\underline{\psi}(\underline{x})$ függvényrendszert definiálja implicit módon. Megjegyezzük, hogy $\det \underline{P}(\underline{x})$ nem más, mint a (11.7) függvényrendszer Jacobi-féle determinánisa, hiszen

$$F'_{i y_j}(\underline{x}, \underline{y}) = p_{ij}(\underline{x}).$$

Azok a feltételek, melyek az előző példában szereplő speciális esetben biztosították az implicit függvényrendszer létezését és egyértelműségét, némi általánosítással, de lényegében változtatás nélkül elégségesek ugyanehhez az általános esetben is. Érvényes ugyanis az implicit függvényrendszer létezésére és egyértelműségére vonatkozó

11.1 Tétel. Legyen adott az

$$F_i(\underline{x}, \underline{y}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (11.9)$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$ egyenletrendszer és tételezzük fel, hogy

a) van $\underline{a} \in \mathbb{R}^n, \underline{b} \in \mathbb{R}^m$, melyre

$$F_i(\underline{a}, \underline{b}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

b) az $\underline{a}$, ill. $\underline{b}$ pontnak van $K_{\underline{a}, \alpha}$, ill. $K_{\underline{b}, \beta}$ környezete, hogy a

$$D = K_{\underline{a}, \alpha} \times K_{\underline{b}, \beta} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

(nyílt és konvex) tartományon

$$F_i \in C_D^0, \quad F'_{iy_j} \in C_D^0,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, m,$$

$$c) \left. \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} \right|_{(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{a}, \underline{b})} \neq 0$$

akkor minden elég kicsi $\varepsilon > 0$ -hoz, an $\delta > 0$, hogy van egy és csak egy $\varphi_j : K_{\underline{a}, \delta} \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, m$ függvényrendszer, melyre

$$A) \varphi(\underline{a}) = \underline{b},$$

$$B) \varphi(\underline{x}) \in K_{\underline{b}, \varepsilon}, \text{ ha } \underline{x} \in K_{\underline{a}, \delta}$$

$$C) \varphi_j \in C_{K_{\underline{a}, \delta}}^0, \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

$$D) F_i(\underline{x}, \varphi(\underline{x})) \equiv 0, \quad \underline{x} \in K_{\underline{a}, \delta};$$

ezt a $\varphi_j, (j=1, 2, \dots, m)$ függvényrendszert a (11.9) egyenletrendszer által meghatározott implicit függvényrendszernek nevezzük.

Bizonyítás. Mivel a $\frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)}$ Jacobi-determináns az $(\underline{a}, \underline{b})$ pontban nem zérus (c) feltétel), a determináns elemeinek folytonos függvénye és az elemek, az F'_{iy_j} parciális deriváltak folytonosak (b) feltétel), az $(\underline{a}, \underline{b}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ pontnak van olyan $K_{(\underline{a}, \underline{b}), r} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ környezete, melyben $\det [F'_{iy_j}(\underline{x}, \underline{y}^1)] \neq 0$

$$(\underline{x}, \underline{y}^1) \in K_{(\underline{a}, \underline{b}), r}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (11.10)$$

Legyen $0 < \alpha_1 < \alpha$ és $0 < \beta_1 < \beta$ olyan, hogy $K_{\underline{a}, \alpha_1} \times K_{\underline{b}, \beta_1} \subset K_{(\underline{a}, \underline{b}), r}$ teljesüljön. Ilyen α_1 és β_1 van, mivel a $K_{\underline{a}, \alpha_1} \times K_{\underline{b}, \beta_1}$ tartomány átmérője $2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^{\frac{1}{2}}$, e tartomány az $(\underline{a}, \underline{b})$ pontot tartalmazza és $2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^{\frac{1}{2}} < r$, ha α_1 és β_1 elég kicsi. (Elegendő már az is, ha $(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^{\frac{1}{2}} < r$, mivel $(\underline{a}, \underline{b})$ e tartomány "szimmetria középpontja").

Először megmutatjuk, hogy minden $\underline{x} \in K_{\underline{a}, \alpha_1}$ -hez legfeljebb egy olyan $\underline{y} \in K_{\underline{b}, \beta_1}$ van, melyre $F_i(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$, teljesül. Tegyük fel ui. hogy az előbbi $\underline{x}$ -hez van még egy $\tilde{\underline{y}} \in K_{\underline{b}, \beta_1}$, melyre $F_i(\underline{x}, \tilde{\underline{y}}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$. b)-ből következik, hogy rögzített $\underline{x}$ mellett $F_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$, az $y_1, \dots, y_m$ változók totálisan differenciálható függvénye és $K_{\underline{b}, \beta_1}$ -ben alkalmazható rá a Lagrange-féle középértéktétel (9.1 Tétel), vagyis van $\underline{y}^1 \in K_{\underline{b}, \beta_1}$, hogy

$$0 = F_i(\underline{x}, \tilde{\underline{y}}) - F_i(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=1}^m F'_{iy_j}(\underline{x}, \underline{y}^1) (\tilde{y}_j - y_j),$$

Mivel $(\underline{x}, \underline{y}^1) \in K_{\underline{a}, \alpha_1} \times K_{\underline{b}, \beta_1}$ és így

$$\det [F'_{iy_j}(\underline{x}, \underline{y}^1)] \neq 0,$$

azt látjuk, hogy az $(\tilde{y}_j - y_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, rendezett szám m -es egy olyan homogén lineáris egyenletrendszerrel elégíti ki, melynek determinánsa nem zérus. Miután azonban ilyen egyenletrendszernek a triviálisan kívül nincs más megoldása (lásd III. Kötet, 14.4 Következmény), $\tilde{y}_j - y_j = 0$, vagyis $\tilde{y}_j = y_j$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Legyen $0 < \varepsilon \leq \beta_1$ tetszőlegesen adott; bebizonyítjuk: van $0 < \delta < \alpha_1$, hogy minden $\underline{x} \in K_{\underline{a}}, \delta$ -hoz van $\underline{y} \in K_{\underline{b}, \varepsilon} \cap K_{\underline{b}, \beta_1}$, mely kielégíti (11.9)-et. Bevezetjük a

$$\phi(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^m F_i^2(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$$

segédfüggvényt. A ϕ függvény csak olyan pontban vesz fel zérus értéket, amelyben az összes F_i , $i = 1, \dots, m$ függvény zérus. Ezért $\phi(\underline{a}, \underline{y}) > 0$, ha $\underline{y} \in K_{\underline{b}, \beta_1}$ és $\underline{y} \neq \underline{b}$, miután az előző bekezdésben bizonyítottak szerint az $\underline{a}$ ponthoz legfeljebb egy olyan $\underline{y} \in K_{\underline{b}, \beta_1}$ tartozik, mely (11.9) megoldása, és a) szerint $\underline{b}$ ilyen. Legyen $0 < \beta_2 < \varepsilon$ és tekintsük R^m -ben a $\underline{b}$ középpontu β_2 sugaru G gömböt:

$$G = \{ \underline{y} \in R^m : \rho(\underline{y}, \underline{b}) = \beta_2 \} \subset K_{\underline{b}, \varepsilon} \cap K_{\underline{b}, \beta_1}.$$

$$\phi(\underline{a}, \underline{y}) > 0, \text{ ha } \underline{y} \in G, \text{ és mivel } \phi(\underline{a}, \underline{y}) \text{ a } G$$

korlátos és zárt tartományon felveszi minimumát (lásd 4.7 Tétel),

$$\inf_{\underline{y} \in G} \phi(\underline{a}, \underline{y}) = \mu > 0. \quad (11.10)$$

Miután $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ egyenletesen folytonos a $\bar{K}_{\underline{a}, \alpha_1} \times G \subset R^n \times R^m$ korlátos és zárt tartományon (lásd 4.5 Tétel), a $\frac{\mu}{2} > 0$ számhoz van $0 < \alpha_2 < \alpha_1$, hogy $|\phi(\underline{x}, \underline{y}) - \phi(\underline{a}, \underline{y})| < \frac{\mu}{2}$, ha $\rho(\underline{x}, \underline{a}) < \alpha_2$, $\underline{y} \in G$. Így (11.10)-ből következik, hogy

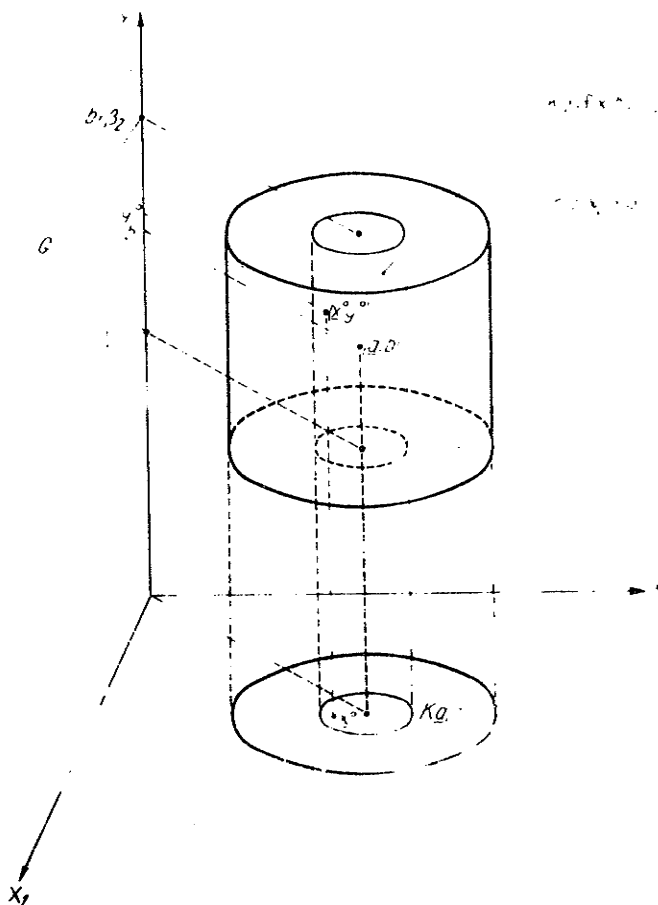
$$\phi(\underline{x}, \underline{y}) > \frac{\mu}{2} > 0, \text{ ha } (\underline{x}, \underline{y}) \in K_{\underline{a}, \alpha_2} \times G. \quad (11.11)$$

Másrészt $\phi(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ -ból és ϕ folytonosságából következik, hogy van $0 < \alpha_3 < \alpha_1$, melyre

$$\phi(\underline{x}, \underline{b}) < \frac{\mu}{2}, \text{ ha } \underline{x} \in K_{\underline{a}, \alpha_3}. \quad (11.12)$$

Legyen $\delta = \min(\alpha_2, \alpha_3)$ és $\underline{x}^0 \in K_{\underline{a}, \delta}$ tetszőlegesen rögzített pont. Ha e rögzített $\underline{x}^0$ mellett megvizsgáljuk a $\phi(\underline{x}^0, \underline{y})$ függvényt a $K_{\underline{b}, \beta_2}$ zárt golyón

(melynek határa G), a következőket állapíthatjuk meg: e függvény a golyó G határán (11.11) szerint $\frac{\mu}{2}$ -nél nagyobb értéket e golyó $\underline{b}$ középpontjában pedig



11.1 ábra

$\frac{\alpha}{2}$ -nél kisebb értéket vesz fel. Mivel a függvény $K_{\underline{b}, \beta_2}$ -n folytonos, Weierstrass tétele szerint felveszi minimumát, és az előbbiek szerint ezt G -n nem, tehát csak a nyílt $K_{\underline{b}, \beta_2}$ golyó valamely $\underline{y}^0$ pontjában teheti meg. Ezek szerint $\underline{x}^0 \in K_{\underline{a}, \delta}$ -hoz van $\underline{y}^0 \in K_{\underline{b}, \beta_2} \subset K_{\underline{b}, \varepsilon}$, hogy $\phi(\underline{x}^0, \underline{y}^0) = \inf_{\underline{y} \in K_{\underline{b}, \beta_2}} \phi(\underline{x}^0, \underline{y})$.

(Ez a gondolatmenet végigkövethető a 11.1 ábrán, mely az $R^2 \times R^1$ térben ábrázolja a helyzetet. A $K_{\underline{a}}$ környezetek nyílt körlapok, a $K_{\underline{b}}$ környezetek nyílt intervallumok, G két pontból áll stb.) Megmutatjuk, hogy $(\underline{x}^0, \underline{y}^0)$ a (11.9) egyenletrendszer megoldása. A 10.1 Tétel szerint ui.

$$0 = \phi'_{y_j}(\underline{x}^0, \underline{y}^0) = \sum_{i=1}^m 2F_i(\underline{x}^0, \underline{y}^0) F'_{iy_j}(\underline{x}^0, \underline{y}^0),$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

vagy 2-vel egyszerűsítve

$$\sum_{i=1}^m F_i(\underline{x}^0, \underline{y}^0) F'_{iy_j}(\underline{x}^0, \underline{y}^0) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Mivel $(\underline{x}^0, \underline{y}^0) \in K_{\underline{a}, \delta} \times K_{\underline{b}, \beta_2} \subset K_{\underline{a}, \alpha_1} \times K_{\underline{b}, \beta_1}$, ezért

$\det [F'_{iy_j}(\underline{x}^0, \underline{y}^0)] \neq 0$. Azt látjuk tehát, hogy $F_i(\underline{x}^0, \underline{y}^0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$

egy olyan homogén lineáris egyenletrendszernek megoldása, melynek determinánsa nem zérus. Így $F_i(\underline{x}^0, \underline{y}^0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Ha a $\psi: K_{\underline{a}, \delta} \rightarrow K_{\underline{b}, \varepsilon}$ függvényt úgy értelmezzük, hogy minden $\underline{x} \in K_{\underline{a}, \delta}$ -hoz azt az egyértelműen meghatározott $\psi(\underline{x}) \in K_{\underline{b}, \varepsilon}$ -t rendeli hozzá, melyre $F_i(\underline{x}, \psi(\underline{x})) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; a függvény eleget tesz az A), B) és D) követelményeknek és csak C) bizonyítása van hátra.

A $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$ jelöléssel élve be kell bizonyítanunk, hogy a $\psi_j: K_{\underline{a}, \delta} \rightarrow R$ függvények ($j = 1, 2, \dots, m$) folytonosak. Legyen az $\underline{x}' \in K_{\underline{a}, \delta}$ pont és az elég kicsi $\varepsilon' > 0$ szám tetszőlegesen adott, $\underline{y}' = \psi(\underline{x}') \in K_{\underline{b}, \varepsilon}$.

Ekkor az előbbi bizonyítás elvégezhető úgy, hogy az $(\underline{x}', \underline{y}')$ pont játssza az $(\underline{a}, \underline{b})$ pont szerepét. Vagyis van $\delta' > 0$ szám és $\psi': K_{\underline{x}', \delta'} \rightarrow K_{\underline{y}', \varepsilon'}$ függvény, melyre $\psi'(\underline{x}) \in K_{\underline{y}', \varepsilon'}$, $F_i(\underline{x}, \psi'(\underline{x})) = 0$, ($i = 1, 2, \dots, m$) teljesül,

ha $\underline{x} \in K_{\underline{x}}, \delta$. Ha δ' elég kicsi, akkor $K_{\underline{x}}, \delta' \subset K_{\underline{a}}, \delta$ és a (11.9) egyenletrendszer megoldásának egyértelműségéből következik, hogy $\varphi'(\underline{x}) = \varphi'(\underline{x})$, ha $\underline{x} \in K_{\underline{x}}, \delta' \subset K_{\underline{a}}, \delta$. Tehát minden elég kicsi $\varepsilon > 0$ -hoz van $\delta > 0$, úgy, hogy

$$\rho(\underline{x}, \underline{x}') < \delta' \Rightarrow |\varphi_j(\underline{x}) - \varphi_j(\underline{x}')| \leq \rho(\varphi(\underline{x}), \varphi(\underline{x}')) < \varepsilon,$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Az előző tételben elégséges feltételt adtunk a (11.9) egyenletrendszer által értelmezett implicit függvényrendszer létezésére, egyértelműségére és folytonosságára. Most e függvényrendszer folytonos differenciálhatóságára adunk elégséges feltételt (az előző tétel jelöléseit használjuk).

11.2 Tétel. Tételezzük fel, hogy a (11.9) egyenletrendszerben szereplő F_i függvényekre ($i = 1, 2, \dots, m$) fennállnak a 11.1 Tétel feltételei, vagyis létezik az egyértelműen meghatározott, folytonos φ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) implicit függvényrendszer; ha ezen kívül $F_i \in C_D^1$, $i = 1, 2, \dots, m$, akkor $\varphi_j \in C_{K_{\underline{a}}, \delta}^1$, $j = 1, 2, \dots, m$, és

$$\varphi'_{\underline{x}_k} = -\underline{A}^{-1} \underline{F}'_{\underline{x}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

ahol $\varphi'_{\underline{x}_k} = (\varphi'_{1x_k}, \dots, \varphi'_{mx_k})$, $\underline{F}'_{\underline{x}_k} = (F'_{1x_k}, \dots, F'_{mx_k})$ oszlopvektorok és $\underline{A} = [F'_{iy_j}(\underline{x}, \varphi(\underline{x}))]$ az F_i , ($i = 1, 2, \dots, m$),

függvényrendszer $\underline{y}$ szerinti deriváltmátrixa.

Bizonyítás. Legyen $\underline{x} \in K_{\underline{a}}, \delta$, $\underline{y} = \varphi(\underline{x})$, $\Delta \underline{x} = (0, 0, \dots, \Delta x_k, \dots, 0)$,

$\underline{y} + \Delta \underline{y} = (\varphi_1(\underline{x} + \Delta \underline{x}), \dots, \varphi_m(\underline{x} + \Delta \underline{x}))$, vagyis $\Delta y_j = \varphi_j(\underline{x} + \Delta \underline{x}) - \varphi_j(\underline{x})$. Mivel $F_i(\underline{x}, \underline{y}) = F_i(\underline{x} + \Delta \underline{x}, \underline{y} + \Delta \underline{y}) = 0$ és F_i totálisan differenciálható, azért

$$\begin{aligned} 0 &= F_i(\underline{x} + \Delta \underline{x}, \underline{y} + \Delta \underline{y}) - F_i(\underline{x}, \underline{y}) = \\ &= F'_{ix_k}(\underline{x}, \underline{y}) \Delta x_k + \sum_{j=1}^m F'_{iy_j}(\underline{x}, \underline{y}) \Delta y_j + \\ &+ \varepsilon_i \Delta x_k + \sum_{j=1}^m \eta_{ij} \Delta y_j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

ahol $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $\eta_{ij} \rightarrow 0$, ha $\Delta x_k \rightarrow 0$ (ha $\Delta x_k \rightarrow 0$, ami ugyanaz mint $\Delta x \rightarrow 0$, akkor $\Delta y_j \rightarrow 0$ a φ_j függvények folytonossága miatt, $j = 1, 2, \dots, m$). Δx_k -val végigosztva és rendezve

$$\sum_{j=1}^m (F'_{iy_j}(\underline{x}, \underline{y}) + \eta_{ij}) \frac{\Delta y_j}{\Delta x_k} = -F'_{ix_k} - \varepsilon_i, \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Az $\underline{A}\eta = [F'_{iy_j} + \eta_{ij}]$ m-edrendű mátrix, $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ (oszlopvektor)

jelöléseket bevezetve ez az egyenletrendszer mátrixalgebrai jelölésekkel a következő alakban írható

$$\underline{A}\eta \frac{\Delta \underline{y}}{\Delta x_k} = -\underline{F}'_{x_k} - \underline{\varepsilon}.$$

Mivel a $\det F'_{iy_j}(\underline{x}, \underline{y})$ Jacobi-determináns nem zérus, a determináns elemeinek folytonos függvénye és az η_{ij} -k tetszőlegesen kicsinyek, ha $|\Delta x_k|$ elég kicsi, ezért $\det \underline{A}\eta \neq 0$ és így

$$\frac{\varphi(\underline{x} + \Delta \underline{x}) - \varphi(\underline{x})}{\Delta x_k} = \frac{\Delta y}{\Delta x_k} = \underline{A}^{-1}(-\underline{F}'_{x_k} - \underline{\varepsilon}).$$

Mivel az inverzmátrix az eredeti mátrix elemeinek folytonos függvénye, és $\eta_{ij} \rightarrow 0$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$, ha $\Delta x_k \rightarrow 0$, ezért a jobboldalnak van határértéke, ha $\Delta x_k \rightarrow 0$. Ebből következik, hogy a baloldalnak is van határértéke és

$$\varphi'_{x_k}(\underline{x}) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_1, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - \varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k} \\ = -\underline{A}^{-1} \underline{F}'_{x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Mivel itt a jobboldal folytonos, ezért φ'_{x_k} vagyis φ'_{jx_k} , $j = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$ is folytonos!

Fontos és gyakran előforduló speciális eset az, amikor egyetlen egyenletből kell az egyik változót kifejezni a többi változó függvényeként. Az előbbi két tételt ebben a speciális esetben összevonva fogalmazzuk meg. A következő tétel természetesen nem szorul külön bizonyításra.

11.3 Tétel. Legyen adott az

$$F(\underline{x}, y) = 0, \quad (11.13)$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$ egyenlet és tételezzük fel, van $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, melyre $F(\underline{a}, b) = 0$, az $\underline{a}$, ill. a b pontnak van olyan $K_{\underline{a}, \alpha}$, ill. $K_{b, \beta}$ környezete, hogy a $D = K_{\underline{a}, \alpha} \times K_{b, \beta}$ tartományon $F \in C^1$ és $F'_y(\underline{a}, b) \neq 0$; ekkor minden elég kicsi $\varepsilon > 0$ -hoz van $\delta > 0$, hogy van egy és csak egy $\varphi: K_{\underline{a}, \delta} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre $\varphi(\underline{a}) = b$, $\varphi(\underline{x}) \in K_{b, \varepsilon}$ és $F(\underline{x}, \varphi(\underline{x})) \equiv 0$, ha $\underline{x} \in K_{\underline{a}, \delta}$, továbbá $\varphi \in C^1_{K_{\underline{a}, \delta}}$ és

$$\varphi'_{x_k}(\underline{x}) = - \frac{F'_{x_k}(\underline{x}, \varphi(\underline{x}))}{F'_y(\underline{x}, \varphi(\underline{x}))},$$

$$k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.14)$$

A 11.1 és 11.2 Tételek fontos következménye az inverz függvényrendszer létezésére vonatkozó

11.4 Tétel. Legyen adott az

$$f_i: K_{\underline{b}, \beta} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11.15)$$

függvényrendszer, ahol $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\beta > 0$ és $f(\underline{b}) = (f_1(\underline{b}), \dots, f_n(\underline{b})) = (a_1, \dots, a_n) = \underline{a} \in \mathbb{R}^n$; tegyük fel, hogy $f_i \in C^1_{K_{\underline{b}, \beta}}$, $i = 1, \dots, n$ és

$$\left| \frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (y_1, \dots, y_n)} \right|_{\underline{y}=\underline{b}} \neq 0;$$

akkor van $0 < \varepsilon < \beta$, hogy $\underline{f}: K_{\underline{b}, \varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $K_{\underline{b}, \varepsilon}$ környezetnek $\mathbb{R}^n$ -be való egy-egyértelmű leképezése; van $\delta > 0$, hogy $K_{\underline{a}, \delta} \subset \mathbb{R}^n$ az $\underline{f}$ leképezés értékkészletének részhalmaza, és van egy és csak egy

$$\varphi_j : K_{\underline{a}, \delta} \mapsto R, j = 1, 2, \dots, n \quad (11.16)$$

függvényrendszer, hogy $\varphi_j \in C_{K_{\underline{a}, \delta}}^1$,

$$\varphi_j(\underline{x}) \in K_{\underline{b}, \varepsilon} \quad \text{és}$$

$$f_i(\varphi_1(\underline{x}), \dots, \varphi_n(\underline{x})) \equiv x_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (11.17)$$

ha $\underline{x} \in K_{\underline{a}, \delta}$; a (11.15) és (11.16) függvényrendszerek Jacobi-féle determinánsaira fennáll

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \cdot \left[\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right]_{y = \varphi(\underline{x})} = 1, \quad (11.18)$$

ha $\underline{x} \in K_{\underline{a}, \delta}$. (11.16)-ot a (11.15) függvényrendszer inverz függvényrendszerének nevezzük.

Más szóval e tétel azt mondja, hogy a tett feltevések mellett az $f : K_{\underline{b}, \varepsilon} \mapsto R^n$ leképezésnek létezik az inverz leképezése, ezen inverz leképezést létesítő φ_j függvények $K_{\underline{a}, \delta}$ -ra való leszűkítései folytonosan differenciálhatók. (11.17) a következő alakban is írható: $f(\varphi(\underline{x})) \equiv \underline{x}$ (v.ö. I. Kötet 2.3 Definíció és (2.1)). Megjegyezzük még, hogy érdemes (11.18)-at a II. Kötet (12.3) formulájával összehasonlítani.

Bizonyítás. Állításunk azonnal adódik, ha az

$$x_i - f_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

egyenletrendszert tekintjük, ahol az egyenletek bal oldalán álló $F_i(\underline{x}, y) = x_i - f_i(y)$ függvényekre teljesülnek a 11.1 és 11.2 Tétel összes feltételei az $R^n \times K_{\underline{b}, \beta} \subset R^n \times R^n$ tartományon. Tehát minden elég kicsi $\varepsilon > 0$ -hoz van $\delta > 0$, hogy van egy és csak egy $\varphi : K_{\underline{a}, \delta} \mapsto K_{\underline{b}, \varepsilon} \subset K_{\underline{b}, \beta}$ leképezés, melyre

$$\varphi_j \in C_{K_{\underline{a}, \delta}}^1 \quad \text{és} \quad F_i(\underline{x}, \varphi(\underline{x})) = x_i - f_i(\varphi(\underline{x})) \equiv 0. \quad \text{A (11.18) azonosság igazolása}$$

végett differenciáljuk a (11.17) azonosságok mindkét oldalát a láncszabály alkalmazásával x_k szerint; kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^n f'_{iy_j}(\underline{\varphi}(\underline{x})) \varphi'_{jx_k}(\underline{x}) = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (11.19)$$

ahol δ_{ik} a Kronecker szimbólum. Az utóbbi azonosságrendszer mátrixalgebrai jelölésekkel az

$$[f'_{iy_j}] \cdot [\varphi'_{jx_k}] = \underline{E}$$

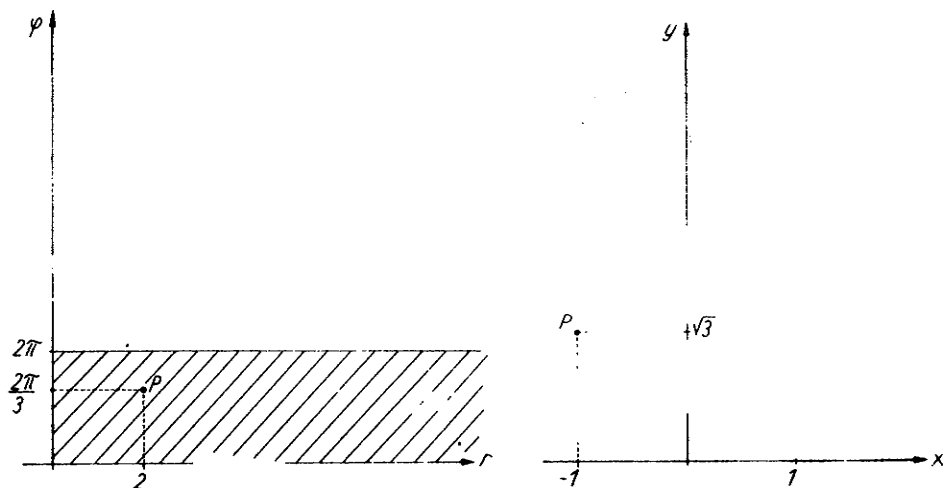
alakban írható, ahol a bal oldalon az első, ill. a második tényező az $\underline{f}$, ill. a $\underline{\varphi}$ függvény deriváltmátrixa és $\underline{E}$ az egységmátrix. A determinánsok szorzástételét alkalmazva (lásd III. Kötet, 10.13 Tétel) (11.18)-at nyerjük!

Nyilvánvaló, hogy a (11.16) függvényrendszerre is fennállnak $\underline{a}$ -ban, ill. $K_{\underline{a}, \delta}$ -ban mindazok a feltételek, melyek $\underline{b}$ -ben, ill. $K_{\underline{b}, \varepsilon}$ -ban a (11.15) függvényrendszerre fennálltak és (11.16) inverz függvényrendszere éppen (11.15)-nek $\underline{b}$ egy környezetére való leszűkítése.

11.2 Példa. A síkbeli polárkoordináták, ill. Descartes-féle derékszögű koordináták közötti összefüggést megadó (lásd II. Kötet, (20.7))

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (11.20)$$

egyenletek felfoghatók úgy, mint az (r, φ) -sík (ahol r -t és φ -t derékszögű Descartes-féle koordinátáknak tekintjük) $0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$ egyenlőtlenségekkel jellemzett tartományának az (x, y) -síkra való leképezése (lásd 11.2 ábra). A (11.20) függvények folytonosan differenciálhatók és a függvényrendszer Jacobi-determinánsa



11.2 ábra

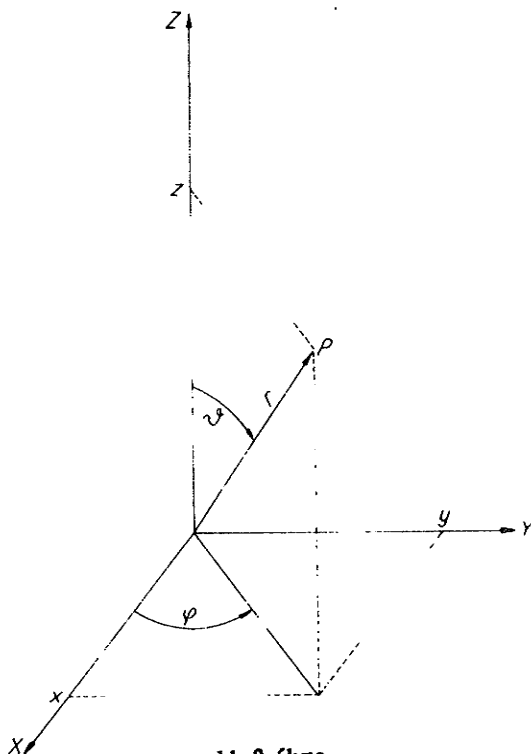
$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r. \quad (11.21)$$

E determináns értéke csak $r = 0$ -ban zérus. Az (r, φ) sík összes $r = 0$ koordinátájú pontjának képe az (x, y) sík origója. Az ábrán látható $P (r = 2, \varphi = \frac{2\pi}{3})$ pont képe a $P' (x = -1, y = \sqrt{3})$ pont. P környezetében (11.20) inverz függvényrendszere

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x} + \pi.$$

(11.20) a $0 < r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ tartomány egy-egyértelmű leképezése az origótól megfosztott (x, y) síkra.

11.3 Példa. A háromdimenziós térben gyakran célszerű gömbi (térbeli polár-) koordinátarendszer bevezetése, melyben a pontokat az origótól mért r távolsággal, rádiusz vektoruknak a z -tengely pozitív irányával bezárt ϑ szöggel és rádiusz vektoruk (x, y) -síkra vetett vetületének az x -tengely pozitív irányával bezárt φ szöggel adjuk meg (lásd 11.3 ábra). Az r, ϑ, φ gömbi, ill. az



11.3 ábra

x, y, z Descartes-féle derékszögű koordináták közti összefüggést egyszerű trigonometriai megfontolások alapján a következő egyenletek szolgáltatják:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$0 \leq r < \infty \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (11.22)$$

A (11.22) függvényrendszer Jacobi-determinánása

$$\begin{aligned} \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \vartheta, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= r^2 \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (11.23)$$

E determináns értéke csak $r = 0$, vagy $\vartheta = 0$, ill. π esetén, vagyis a z -tengely pontjaiban zérus. Egyébként a pontok r, ϑ, φ , ill. x, y, z koordinátái között egy-egyértelmű a megfeleltetés.

11.4 Példa. Gyakran célszerű a háromdimenziós térben hengerkoordinátarendszer bevezetése, melyben a pontokat rádiusz vektoruk (x, y) -síkra vetett vetületének r hosszával, e vetületnek az x -tengely-pozitív irányával bezárt φ szögével, ill. a pont (x, y) sík feletti előjeles magasságával (vagyis z -koordinátájával) adjuk meg (lásd 11.4 ábra). Az r, φ, z henger-, ill. az x, y, z Descartes-féle derékszögű koordináták közti összefüggést egyszerű trigonometriai megfontolások alapján a következő egyenletek szolgáltatják

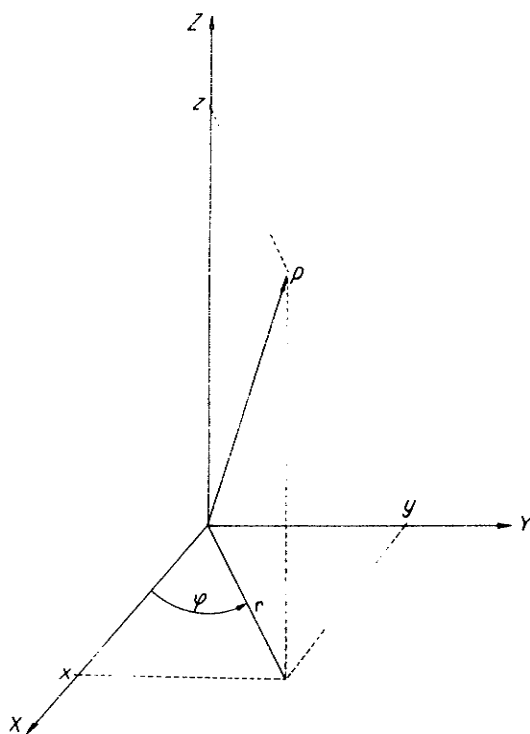
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty. \quad (11.24)$$

E függvényrendszer Jacobi-determinánása

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \quad (11.25)$$

mely csak $r = 0$ esetén, vagyis a z -tengely pontjaiban zérus. Egyébként a pontok r, φ, z , ill. x, y, z koordinátái között egy-egyértelmű a megfeleltetés.



11.4 ábra

TÖBBES INTEGRÁLOK

12. Paraméteres integrálok

Ebben a pontban a kétváltozós függvények integrálásának előkészítése-
képpen azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy, ha egy kétváltozós függvényt (a
"másik változó" rögzített értékei mellett) az "első változó" szerint integrálunk,
mit lehet mondani az integrálról, mint a "második változó" függvényéről.

12.1 Tétel. Legyen a

$$Q = \{ (x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d] \} \quad (12.1)$$

téglalap-tartományon adott az $f \in C_Q^0$ kétváltozós függvény és

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]; \quad (12.2)$$

akkor $\varphi \in C_{[c, d]}^0$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy rögzített $y \in [c, d]$ mellett f az x -nek folytonos
(egyváltozós) függvénye, tehát a (12.2)-ben szereplő integrál létezik. A 4.5
Tételből következik, hogy f egyenletesen folytonos Q -ban. Legyen $\delta(\varepsilon) > 0$
 f folytonossági modulusa a Q tartományon. Mivel

$$\varphi(y_1) - \varphi(y_2) = \int_a^b [f(x, y_1) - f(x, y_2)] dx,$$

azért tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \leq \int_a^b |f(x, y_1) - f(x, y_2)| dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon,$$

ha (x, y_1) és (x, y_2) távolsága kisebb mint $\delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$. Ez pedig $|y_1 - y_2| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$
esetén teljesül, tehát φ egyenletesen folytonos $[c, d]$ -ben!

12.2 Tétel. Legyen $f \in C_Q^0$ és $f'_y \in C_Q^0$, ahol Q a (12.1) téglalap; ekkor a (12.2)-
vel adott paraméteres integrálra

$$\varphi \in C^1_{[c,d]} \text{ és } \frac{d}{dy} \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) = \int_a^b f'_y(x,y) dx. \quad (12.3)$$

(Az y szerinti deriválás és az x szerinti integrálás sorrendje felcserélhető.)

Bizonyítás. A Lagrange-féle közéértéktétel (II. Kötet 15.4 Tétel) alkalmazásával $y \in [c,d]$ és $y+h \in [c,d]$ -re

$$\begin{aligned} \varphi(y+h) - \varphi(y) &= \int_a^b [f(x,y+h) - f(x,y)] dx = \\ &= \int_a^b h f'_y(x, y + \vartheta h) dx, \end{aligned}$$

ahol $0 \leq \vartheta \leq 1$. Ezek szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(y+h) - \varphi(y)}{h} - \int_a^b f'_y(x,y) dx \right| &\leq \\ &\leq \int_a^b \left| f'_y(x, y + \vartheta h) - f'_y(x,y) \right| dx \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon, \end{aligned}$$

ha $0 < |h| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$, ahol δ az f'_y egyenletesen folytonos függvény folytonossági modulusa a Q zárt tartományon. Tehát

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(y+h) - \varphi(y)}{h} = \int_a^b f'_y(x,y) dx, \quad y \in [c,d],$$

vagyis (12.3)-at igazoltuk. A 12.1 Tételt az f'_y folytonos függvényre alkalmazva, (12.3)-ból következik, hogy φ' folytonos.

12.3 Tétel. Legyen a kétváltozós $f \in C^1_Q$, ahol Q a (12.1) téglalap és

$$F(z,y) = \int_a^z f(x,y) dx, \quad (z,y) \in Q; \quad (12.4)$$

akkor $F \in C^1_Q$ és

$$F'_z(z, y) = f(z, y),$$

$$F'_y(z, y) = \int_a^z f'_y(x, y) dx. \quad (12.5)$$

Bizonyítás. A II. Kötet, 28.2 Tételből következik, hogy rögzített y mellett (12.5) első formulája érvényes. A 12.2 Tételből következik, hogy rögzített z mellett (12.5) második formulája is érvényes. Az, hogy $F'_z \in C_Q^0$, nyilvánvaló. Azt, hogy $F'_y \in C_Q^0$, a következőképpen látjuk be. Legyen $(z_0, y_0) \in Q$ és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott.

$$\begin{aligned} \left| F'_y(z, y) - F'_y(z_0, y_0) \right| &= \left| \int_a^z f'_y(x, y) dz - \int_a^{z_0} f'_y(x, y_0) dz \right| = \\ &= \left| \int_a^z f'_y(x, y) dx - \int_a^{z_0} f'_y(x, y) dx + \int_a^{z_0} f'_y(x, y) dx - \int_a^{z_0} f'_y(x, y_0) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^z f'_y(x, y) dx \right| + \left| \int_a^{z_0} f'_y(x, y) dx - \int_a^{z_0} f'_y(x, y_0) dx \right|. \end{aligned}$$

A 4.6 Tételből következik, hogy $|f'_y|$ korlátos Q -n; legyen $|f'_y(x, y)| \leq M$, ha $(x, y) \in Q$. A 12.1 Tételből következik, hogy $\int_a^{z_0} f'_y(x, y) dx$ folytonos az y_0 pontban. Ezek szerint

$$\left| F'_y(z, y) - F'_y(z_0, y_0) \right| \leq M |z - z_0| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ha $|z - z_0| < \frac{\varepsilon}{2M}$ és $|y - y_0|$ elég kicsi, vagyis ha $[(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{1}{2}}$ elég kicsi. Ez azonban F'_y folytonosságát jelenti.

12.4 Következmény. Legyen a kétváltozós $f \in C_Q^1$, ahol Q a (12.1) téglalap, az egyváltozós $g \in C_{[c, d]}^1$, $g(y) \in [a, b]$, ha $y \in [c, d]$, és $\psi(y) = \int_a^{g(y)} f(x, y) dx$; (12.6)

akkor $\psi \in C_{[c, d]}^1$ és

$$\psi'(y) = f(g(y), y) g'(y) + \int_a^{g(y)} f'_y(x, y) dx. \quad (12.7)$$

Bizonyítás. A (8.1) láncszabályt a (12.4) függvényre és a $(g(y), y)$ függvényekre alkalmazva

$$\phi'(y) = \frac{d}{dy} F(g(y), y) = F'_z(g(y), y) g'(y) + F'_y(g(y), y) \cdot 1.$$

A (12.5) formulák felhasználásával, innen (12.7) adódik. (12.7) jobb oldalának folytonossága a 4.1 Tétel következménye. |

13. A kettős és a hármas integrál

Ebben a pontban kétváltozós, korlátos függvények integrálhatóságát és integrálját, az un. "kettős integrált" értelmezzük mérhető területű siktartományokon. A tárgyalás analóg az egyváltozós függvények határozott integráljának tárgyalásával.

13.1 Definíció. Az $A \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, mérhető területű tartomány felosztásának nevezzük A részhalmazainak

$$P = \{ A_i \subset A : i = 1, \dots, m \}$$

halmazát, ha

- a) A_i , $i = 1, 2, \dots, m$ mérhető területű ;
- b) A_i -nek és A_j -nek $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, m$) esetén nincs közös belső pontja (legfeljebb a határpontjaik közösek) ;
- c) $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$.

Mivel az A_i elemeknek határpontjai közösek lehetnek, szükségünk lesz a következő tételre:

13.1 Tétel. Ha A (Jordan szerint) mérhető területű, korlátos tartomány, akkor $\text{front } A$ is mérhető halmaz és nulla mértékű, azaz

$$\text{mes}(\text{front } A) = 0.$$

Bizonyítás. A II. Kötet 24.1 Tételéből következik, hogy van külső, ill. belső sokszögeknek olyan K_m , illetve B_m , $m \in \mathbb{N}$ sorozata, hogy $K_m \supset A \supset B_m$, és $\lim_{m \rightarrow \infty} (\text{mes } K_m - \text{mes } B_m) = 0$.

Tekintsük a K_m külső sokszögeket zártaknak (vagyis számítsuk hozzájuk a határoló sokszög vonalat), a B_m belső sokszögeket pedig nyitaknak (a határoló

sokszögvonallal ne tartozzék hozzájuk). Ekkor könnyen belátható, hogy minden K_m , $m \in T$ tartalmazza A összes határpontját (azokat is, melyek nem tartoznak A -hoz) és B_m , $m \in T$ nem tartalmazza A egyetlen határpontját sem (azokat sem, melyek A -hoz tartoznak). Így

$$(K_m \setminus B_m) \supset \text{front } A, \text{ ezért :}$$

$$\overline{\text{mes}}(\text{front } A) \leq \text{mes}(K_m \setminus B_m) = \text{mes } K_m - \text{mes } B_m, m \in T,$$

$$\overline{\text{mes}}(\text{front } A) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (\text{mes } K_m - \text{mes } B_m) = 0,$$

ahonnan

$$\underline{\text{mes}}(\text{front } A) = \overline{\text{mes}}(\text{front } A) = \text{mes}(\text{front } A) = 0$$

következik.!

13.2 Definíció. Az A tartomány $P = \{A_i : i = 1, \dots, m\}$ felosztását $\delta > 0$ -nál finomabb felosztásnak nevezzük, ha valamennyi A_i -nek $d(A_i)$ átmérőjére

$$d(A_i) < \delta, i = 1, \dots, m$$

teljesül.

Az A tartomány $\delta > 0$ -nál finomabb felosztásához jutunk például, ha A -ra δ -nál kisebb átmérőjű négyzetrácsot borítunk, és P elemeinek az A -ba eső rácsszemeket, valamint a kinyúló rácsszemek A -val közös részeit vesszük. (Ez utóbbi elemek is mérhetőek, mivel A mérhető.)

13.3 Definíció. Legyen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény az $A \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, mérhető területű tartományon, az

$$S_P = \sum_{i=1}^m M_i \text{ mes } A_i, \text{ illetve}$$

$$s_P = \sum_{i=1}^m m_i \text{ mes } A_i$$

összegeket a $P = \{A_i : i = 1, \dots, m\}$ felosztáshoz tartozó felső, alsó összegnek nevezzük, ahol

$$M_i = \sup_{x \in A_i} f(x),$$

$$m_i = \inf_{x \in A_i} (x), i = 1, \dots, m.$$

A felső, illetve alsó összeg létezése f korlátosságából következik. Az integrálhatóságot ugyanugy definiáljuk, mint az egyváltozós esetben. A következőben f és A jelentése ugyanaz, mint az előző definícióban.

13.4 Definíció. Ha az A tartomány valamennyi P felosztásához tartozó felső összegek halmazának infimumára $H = \inf \{S_P\}$ -re és az alsó összegek halmaza supremumára $h = \sup \{s_P\}$ -re fennáll, hogy $h = H$, akkor az f függvényt az A tartományon Riemann szerint integrálhatónak és az

$$\iint_A f(x, y) dx dy = h = H$$

értéket f A tartományra vonatkozó kettős integráljának nevezzük.

H , illetve h létezése ugyanugy látható be, mint az egyváltozós függvényeknél. (Lásd II. Kötet 22.1-22.5 Segédtelet). Az "új osztópont hozzávétele" helyett kétváltozós függvények esetében értelemszerűen azt kell mondanunk, hogy valamelyik A_i helyett olyan mérhető B_1 és B_2 halmazokat tekintünk, melyekre

$A_i = B_1 \cup B_2$ és B_1 -nek és B_2 -nek legfeljebb a határpontjaik közösek.

A II. Kötet, 22.4 Segédtelet analagonjának belátásához a P_3 felosztás létezését is be kell bizonyítani. Ez egyszerű következménye annak, hogy mérhető tartományok közös része is mérhető. (Lásd II. Kötet 24.5 Tétel utáni megjegyzést.)

13.5 Definíció. Azt mondjuk, hogy a

$$S_P = \sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_i) \text{ mes } A_i$$

kifejezés, ahol $(\xi_i, \eta_i) \in A_i, i = 1, \dots, m$, az f függvénynek az A halmaz $P = \{A_i : i = 1, \dots, m\}$ felosztásához tartozó (egyik) integrál-közelítő összege.

A II. Kötet 22.6 Segédtelet analagonja is érvényes kétváltozós függvények esetében. Bizonyítása azonban több megfontolást kíván. (Lásd [4] II. Kötet 364-366). A 13.2 Tétel bizonyítása [4] II. Kötet 370. oldalán található meg, itt bizonyítás nélkül közöljük.

13.2 Tétel. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy minden $\delta(\varepsilon)$ -nál finomabb P felosztásra

$$0 \leq h - s_P < \varepsilon \text{ és } 0 \leq S_P - H < \varepsilon.$$

Bevezetve f -nek a P felosztáshoz tartozó $O_P = S_P - s_P$ oszcillációs összegét, a II. Kötet 22.7 - 22.12 Segéd tételek változtatás nélkül érvényben maradnak kétváltozós függvényekre is, és a tételek bizonyításai pontosan úgy történhetnek, mint az egyváltozós esetben. Például a II. Kötet 22.10 Segéd tétele megfelelője kétváltozós esetben:

13.3 Tétel. a) Ha az f függvény integrálható A -n, akkor valamennyi P_j , $j=1, 2, \dots$ minden határon túl finomodó felosztássorozatra:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} O_{P_j} = \iint_A f(x, y) dx dy$$

b) Ha található olyan P_j , $j = 1, 2, \dots$ minden határon túl finomodó felosztássorozat, amelyre $\lim_{j \rightarrow \infty} O_{P_j} = \ell$ létezik, akkor f integrálható és

$$\ell = \iint_A f(x, y) dx dy.$$

Bizonyítás. Az egyváltozós esethez hasonlóan. (Lásd II. Kötet 22.10 Tétel). I

A kettős integrál rendelkezik a II. Kötet 23. pontban felsorolt integrál-elemi tulajdonságokkal. A 13.4 - 13.9 Tételek bizonyítása az egyváltozós esethez hasonlóan történik.

13.4 Tétel. $\iint_A c dx dy = c \text{ mes } A$,
speciálisan:

$$\iint_A 1 dx dy = \text{mes } A.$$

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy tetszőleges $P = \{A_i, i = 1, \dots, m\}$ felosztás esetén $\sum_{i=1}^m \text{mes } A_i = \text{mes } A$. Ez a 13.1 Tétel és a II. Kötet 24.2 Tétel következménye. I

13.5 Tétel. A kettős integrál lineáris funkcionál. Ha $\iint_A f_j(x, y) dx dy$ létezik $j = 1, \dots, s$, akkor

$$\iint_A \left(\sum_{j=1}^s c_j f_j(x, y) \right) dx dy = \sum_{j=1}^s \left[c_j \iint_A f_j(x, y) dx dy \right],$$

(v.ö. II. Kötet. 23.6 Definíció).

Bizonyítás. Lásd II. Kötet 23.4 és 23.5 Tételének bizonyítását.!

13.6 Tétel. Ha $B \subset A$ mérhető tartomány és $\iint_A f(x,y) dx dy$ létezik, akkor

$$\text{létezik } \iint_B f(x,y) dx dy \text{ is.}$$

Bizonyítás. A B tartomány P' felosztását az A tartomány $P = \{A_i, i = 1, \dots, m\}$ felosztásából készítjük el:

$$P' = \{B \cap A_i, i = 1, \dots, m\},$$

és az oszcillációs összegeket összehasonlítjuk.!

13.7 Tétel. Ha $\iint_{B_1} f(x,y) dx dy$ és $\iint_{B_2} f(x,y) dx dy$ léteznek és B_1 -nek és B_2 -nek

nincs közös belső pontja, akkor:

$$\begin{aligned} \iint_{B_1 \cup B_2} f(x,y) dx dy &= \\ &= \iint_{B_1} f(x,y) dx dy + \iint_{B_2} f(x,y) dx dy. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Mivel B_1 tetszőleges felosztásának és B_2 tetszőleges felosztásának egyesítése $B_1 \cup B_2$ felosztását adja, azért a bizonyítás ugy történhet, mint az egyváltozós esetben. (Lásd II. Kötet 23.3 Tétel.)

13.8 Tétel. Ha f és g kettős integrálja létezik az A -n, és $f(x,y) \leq g(x,y)$, $(x,y) \in A$, akkor $\iint_A f(x,y) dx dy \leq \iint_A g(x,y) dx dy$.

Bizonyítás. Lásd II. Kötet 23.9 és 23.10 Tétel bizonyítását.!

13.9 Tétel. Ha az A mérhető tartományon f integrálható és $(x,y) \in A$ -ra $m \leq f(x,y) \leq M$, akkor

$$m \cdot \text{mes } A \leq \iint_A f(x,y) dx dy \leq M \cdot \text{mes } A.$$

Bizonyítás. 13.8 Tétel egyszerű következménye.!

13.6 Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ pozitív területű tartomány és a kétváltozós f függvény integrálható A -n; ekkor az

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{mes } A} \iint_A f(x,y) dx dy$$

számot az f függvény A tartományra vonatkozó integrálközepének nevezzük.

A II. Kötet, 26.1 Tétel analógiájára, a 13.9 Tételből következik, hogy

$$\inf_{(x,y) \in A} f(x,y) \leq \tilde{f} \leq \sup_{(x,y) \in A} f(x,y) . \quad (13.1)$$

(13.1)-ből, a Bolzano-tétel (4.8 Tétel) felhasználásával, a II. Kötet, 26.2 Tétel analógiájára azonnal adódik a

13.10 Tétel. Ha A összefüggő, mérhető tartomány és az $f \in C_A^0$ függvény A -n korlátos és integrálható, akkor van $(\xi, \eta) \in A$, hogy $f(\xi, \eta) = \tilde{f}$, vagyis

$$\iint_A f(x,y) dx dy = f(\xi, \eta) \text{mes } A. \quad (13.2)$$

13.11 Tétel. Ha f -nek létezik az A -n vett kettős integrálja, akkor $|f|$ kettős integrálja létezik az A -n és

$$\left| \iint_A f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_A |f(x,y)| dx dy .$$

Bizonyítás. Lásd II. Kötet 23.11 Tétel bizonyítása.!

Az egyváltozós esethez hasonlóan látható be, hogy ha f és g kettős integrálja létezik az A -n, akkor $f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ kettős integrálja is létezik, az utóbbi azzal a megkötéssel, hogy van olyan $k > 0$, hogy $k \leq |g(x,y)|$, minden $(x,y) \in A$ -ra.

13.12 Tétel. Legyenek f és g korlátos függvények az A korlátos és mérhető tartományon, legyen továbbá $B \subset A$, $\text{mes } B = 0$ és

$$f(x) = g(x) \quad x \in A \setminus B ,$$

(vagyis f és g egy nulla mértékű halmaz kivételével megegyeznek az A -n), akkor f és g közül vagy egyik sem integrálható, vagy mind a kettő integrálható és

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_A g(x,y) dx dy .$$

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy ha f integrálható, akkor g is integrálható és integráljaik megegyeznek. Azt bizonyítjuk be, hogy $f-g$ kettős integrálja létezik az A -n, és $\iint_A [f(x,y)-g(x,y)] dx dy = 0$. Ebből állításunk a 13.5 Tétel

alapján következik. $f-g$ azonosan nulla az $A \setminus B$ mérhető tartományon, ezért a 13.4 Tétel felhasználásával $\iint_{A \setminus B} [f(x,y)-g(x,y)] dx dy = 0$. $A \setminus B$ nulla mértékű halmazon $f-g$ korlátos és $\iint_B [f(x,y)-g(x,y)] dx dy = 0$ (minden integrál-

közelítő összeg nulla). $A = (A \setminus B) \cup B$ miatt alkalmazhatjuk a 13.7 Tételt:

$$\iint_A [f(x,y) - g(x,y)] \, dx dy = \iint_{A \setminus B} [f(x,y) - g(x,y)] \, dx dy + \\ + \iint_B [f(x,y) - g(x,y)] \, dx dy = 0.$$

13.12 Tétel minden változtatás nélkül igaz egyváltozós függvényekre is (v.ö. II. Kötet 23.8 Tétel). A kétváltozós területfogalomnak az egyváltozós esetben a hosszúság fogalom felel meg. Belátható, hogy ez szintén mérték a II. Kötet 24. pont végén szereplő axiómák értelmében. A halmazba beírt, illetve körülírt poligonoknak véges sok intervallum egyesítése felel meg, amely benne van a szóban forgó halmazban, illetve tartalmazza azt. Így a nulla (Jordan) mértékű halmaz egy dimenzióban azt jelenti, hogy ez a halmaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén lefedhető véges sok olyan intervallummal, amelyek összhosszúsága ε -nál kisebb.

13.13 Tétel. Ha $f \in C_A^0$, ahol A korlátos, mérhető és zárt tartomány, akkor létezik

$$\iint_A f(x,y) \, dx dy.$$

Bizonyítás. f egyenletesen folytonos A -n (lásd 4.5 Tétel), legyen $\delta(\varepsilon) > 0$ a folytonossági modulusa. Tetszőleges $\delta(\varepsilon)$ -nál finomabb $P = \{A_i : i = 1, \dots, m\}$ felosztásra, melynél A_i -k zártak:

$$H - h \leq S_P - s_P = \sum_{i=1}^m (\sup_{(x,y) \in A_i} f(x,y) - \inf_{(x,y) \in A_i} f(x,y)) \text{ mes } A_i.$$

Weierstrass II. tétele (4.7 Tétel) értelmében van $(x_i, y_i) \in A_i$, ill.

$$(\xi_i, \eta_i) \in A_i, \text{ melyekre } f(x_i, y_i) = \sup_{(x,y) \in A_i} f(x,y), \text{ ill. } f(\xi_i, \eta_i) = \inf_{(x,y) \in A_i} f(x,y).$$

Ezek szerint

$$H - h \leq \sum_{i=1}^m (f(x_i, y_i) - f(\xi_i, \eta_i)) \text{ mes } A_i \leq \\ \leq \sum_{i=1}^m \varepsilon \text{ mes } A_i = \varepsilon \sum_{i=1}^m \text{mes } A_i = \varepsilon \text{ mes } A,$$

minden $\varepsilon > 0$ -ra, tehát $H = h$.

A kettős integrálhoz hasonlóan tárgyalhatjuk a három-, ill. többváltozós függvények hármás, ill. többes integráljait. Azt kell csak megmondanunk, mely halmazokat nevezzük mérhetőeknek, és hogyan definiáljuk a mértékét. Például három dimenzió esetén az $A \subset R^3$ halmazt Jordan mérhetőnek nevezzük, ha a belső poliéderek térfogatainak suprénuma megegyezik a külső poliéderek térfogatainak infimumával, és ezt a közös értéket nevezzük az A halmaz térfogatának (három-dimenziós Jordan-mértékének). Belátható, hogy az így definiált térfogat valóban mérték, a II. Kötet 24. pontjának tételei ez esetben is érvényesek, ezért A térfogatát $mes_3 A$ -val jelöljük. Így a 13.1-13.5 Definíciók átvihetők három dimenzió esetére is, a 13.1-13.11 Tételek is érvényben maradnak. Azt mondjuk, hogy az f háromváltozós, korlátos függvény hármás integrálja létezik a $V \subset R^3$ korlátos és mérhető halmazon, ha

$$h = \sup_P \left\{ \sum_{i=1}^m m_i \text{mes}_3 A_i \right\} = \\ = \inf_P \left\{ \sum_{i=1}^m M_i \text{mes}_3 A_i \right\} = H,$$

ahol $P = \{A_i : i = 1, \dots, m\}$ a V halmaz tetszőleges felosztása, $m_i = \inf_{\underline{x} \in A_i} f(\underline{x})$, $M_i = \sup_{\underline{x} \in A_i} f(\underline{x})$, $i = 1, \dots, m$. A $h = H$ értéket nevezzük hármás integrálnak és

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \text{ -vel}$$

jelöljük. f P-hez tartozó téglányösszegeit

$$\sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \text{mes}_3 A_i \text{ -vel}$$

jelöljük.

14. A kettős és hármás integrál szemléletes jelentése

Mielőtt az kettős integrál geometriai jelentését tárgyalnánk, megmutatjuk, hogy egy A alap, $M > 0$ magasságú V egyenestest,

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in A, z \in [0, M]\},$$

térfogata (3 dimenziós Jordan mértéke): $\text{mes}_3 V = M \text{mes}_2 A$ ha $A \subset R^2$ korlátos és mérhető területű tartomány. Legyen $K_m \supset A \supset B_m$, $m \in T$ külső, ill.

belső poligonok olyan sorozata, hogy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes } K_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes } B_m = \text{mes } A.$$

(Lásd II. Kötet 24.1 Tétel). Mivel

$$V_m = \{(x, y, z) : (x, y) \in B_m, z \in [0, M]\}, m \in T$$

V -nek belső poliédere, és

$$W_m = \{(x, y, z) : (x, y) \in K_m, z \in [0, M]\}, m \in T$$

V -nek külső poliédere, azért

$$\text{mes}_3 W_m \geq \overline{\text{mes}}_3 V \geq \underline{\text{mes}}_3 V \geq \text{mes}_3 V_m, m \in T,$$

vagyis

$$M \text{mes } K_m \geq \overline{\text{mes}}_3 V \geq \underline{\text{mes}}_3 V \geq M \text{mes } B_m, m \in T,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M \text{mes } K_m \geq \overline{\text{mes}}_3 V \geq \underline{\text{mes}}_3 V \geq \lim_{m \rightarrow \infty} M \text{mes } B_m,$$

$$M \text{mes } A \geq \overline{\text{mes}}_3 V \geq \underline{\text{mes}}_3 V \geq M \text{mes } A.$$

Ebből $\overline{\text{mes}}_3 V = \underline{\text{mes}}_3 V = \text{mes}_3 V = M \text{mes } A$.

Legyen az $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ korlátos függvény Riemann szerint integrálható az A korlátos és mérhető területű halmazon, és $f(x, y) \geq 0$, ha $(x, y) \in A$. Az f kétváltozós függvény grafikonja alatti tartományon értjük a $V \subset \mathbb{R}^3$ "térrészt" (hengerszerű testet), ha

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in A, z \in [0, f(x, y)]\} \quad (14.1)$$

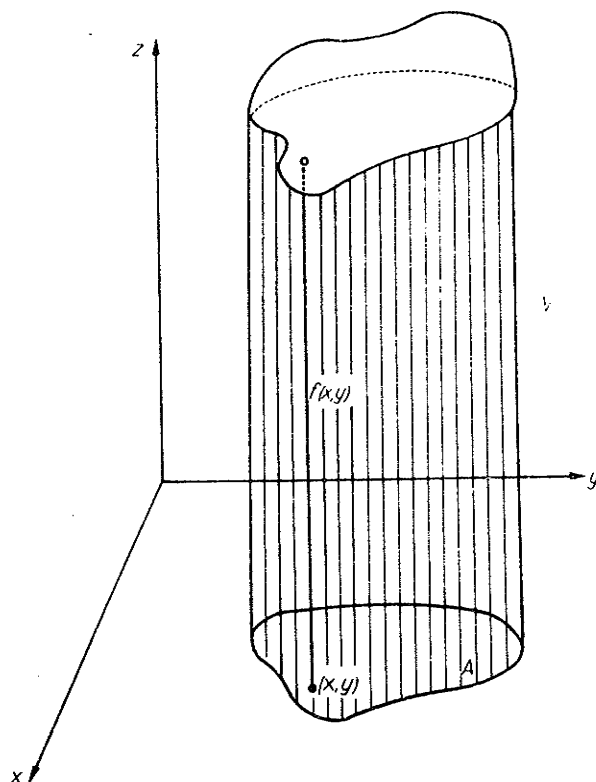
(Lásd 14.1 ábra). Az f függvény valamely $P = \{A_1 : 1, \dots, m\}$ felosztáshoz tartozó alsó összege a

$$V_1 = \{(x, y, z) : (x, y) \in A_1, z \in [0, m_1]\}, i = 1, \dots, m,$$

A_1 alapu, m_1 magasságu hengerek m_1 és A_1 térfogatainak összege, felső összege pedig a

$$W_1 = \{(x, y, z) : (x, y) \in A_1, z \in [0, M_1]\}$$

$$i = 1, \dots, m,$$



14.1 ábra

hengerek M_1 és A_1 térfogatainak összege $(m_1 = \inf_{A_1} f(x, y), M_1 = \sup_{A_1} f(x, y))$.
Mivel

$$\bigcup_{i=1}^m V_i \subset V \subset \bigcup_{i=1}^m W_i,$$

azért, amennyiben $\text{mes}_3 V$ létezik:

$$\text{mes}_3 \left(\bigcup_{i=1}^m V_i \right) \leq \text{mes}_3 V \leq \text{mes}_3 \left(\bigcup_{i=1}^m W_i \right)$$

$s_P \leq \text{mes}_3 V \leq S_P$, minden P felosztásra.

Tehát f integrálhatóságából

$$\text{mes}_3 V = \iint_A f(x, y) \, dx \, dy \quad (14.2)$$

következik. (Belátható, hogy az f -re tett feltevések mellett $\text{mes}_3 V$, mint 3-dimenziós Jordan mérték valóban létezik. Lásd [4] 37.3. 373. oldal két-csillagos megjegyzés.)

A 13. pont tételei háromváltozós függvényekre is igazak, a 13.4 Tétel szerint:

$$\iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \text{mes}_3 V. \quad (14.3)$$

Speciálisan, ha V véges sok hengerszerűtest egyesítése, akkor $\text{mes}_3 V$ meghatározását (14.2) felhasználásával kettős integrálok meghatározására vezettük vissza.

A mérhető térfogatu $V \subset \mathbb{R}^3$ test $m(V)$ tömegének és $\text{mes}_3 V$ térfogatának hányadosát, az $\frac{m(V)}{\text{mes}_3 V}$ értéket közepes sűrűségnek nevezzük. Legyen $\underline{x} \in V$,

$K_{\underline{x}, \rho_j} \subset V$, $j = 1, 2, \dots$ és $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho_j = 0$. A V test $\underline{x}$ pontbeli sűrűsége ($\mu(\underline{x})$)

a $K_{\underline{x}, \rho_j}$ golyók közepes sűrűségeinek a határértéke $j \rightarrow \infty$ esetén:

$$\mu(\underline{x}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m(K_{\underline{x}, \rho_j})}{\text{mes}_3 K_{\underline{x}, \rho_j}}. \quad (14.4)$$

Legyen $\mu: V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^3$ folytonos függvény. μ -nek a V halmaz $P = \{A_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ felosztásához tartozó

$\sigma_P = \sum_{i=1}^m \mu(\underline{x}_i) \text{mes}_3 A_i$, $\underline{x}_i = (x_i, y_i, z_i) \in A_i$ integrálközelítő összegében a $\mu(\underline{x}_i) \text{mes}_3 A_i$ érték egy $\text{mes}_3 A_i$ térfogatu és $\mu(\underline{x}_i)$ közepes sűrűségű homogén test tömegét jelenti, mely μ folytonossága miatt közelítőleg az A_i test $m(A_i)$ tömegével egyenlő, vagyis

$$\mu(\underline{x}_i) \cdot \text{mes}_3 A_i \approx m(A_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (14.5)$$

$$\sigma_P \approx \sum_{i=1}^m m(A_i) = m(V),$$

ha a P felosztás elég finom. Tehát a V térrész tömege:

$$m(V) = \iiint_V \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \quad (14.6)$$

$\sum_{i=1}^m x_i \mu(x_i, y_i, z_i) \text{ mes}_3 A_i$ - (14.5) figyelembevételével - az x_i pontokban összpontosított $m(A_i)$ tömegek ($i = 1, 2, \dots, m$) által alkotott tömegpont rendszer elsőrendű nyomatéka az y, z síkra. Ha a P felosztás elég finom, akkor

$$\sum_{i=1}^m x_i \mu(x_i, y_i, z_i) \text{ mes}_3 A_i \approx \iiint_V x \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

Ezért a V test y, z síkra vonatkozó elsőrendű nyomatékának a

$$\iiint_V x \mu(x, y, z) dx dy dz \quad (14.7)$$

kifejezést nevezzük. A V test tömegközéppontjának koordinátái (x_o, y_o, z_o)

$$\begin{aligned} x_o &= \frac{\iiint_V x \mu(x, y, z) dx dy dz}{m(V)}, \\ y_o &= \frac{\iiint_V y \mu(x, y, z) dx dy dz}{m(V)}, \\ z_o &= \frac{\iiint_V z \mu(x, y, z) dx dy dz}{m(V)}, \end{aligned} \quad (14.8)$$

ahol $m(V)$ a V térrész tömege (lásd (14.6)).

A V térrésznek az $e \in \mathbb{R}^3$ egyenesre vonatkozó másodrendű nyomatéka:

$$\iiint_V \varrho^2(x, y, z) \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad (14.9)$$

ahol $\mu(x)$ a V térrész sűrűségfüggvénye, $\varrho(x, y, z)$ pedig az (x, y, z) pontnak az e egyenestől való távolságát jelenti. Speciálisan a V térrésznek a z tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatéka:

$$\iiint_V (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dx dy dz. \quad (14.10)$$

15. Kettős és többes integrálok kiszámítása. Ismételt integrálok

15.1 Tétel. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ integrálható a

$$Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \subset D$$

téglalapon és létezzék a $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ egyváltozós függvény; akkor φ a $[c, d]$ intervallumon Riemann szerint integrálható, és

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Bizonyítás. φ -nek a $P([c, d]) = \{[y_{k-1}, y_k]; k = 1, \dots, m\}$ felosztáshoz tartozó téglányösszege legyen:

$$\begin{aligned} \sigma_P^\varphi &= \sum_{k=1}^m \varphi(\eta_k) (y_k - y_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^m \int_a^b f(x, \eta_k) dx (y_k - y_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \eta_k) dx \right) (y_k - y_{k-1}) \end{aligned}$$

ahol $P([a, b]) = \{[x_{i-1}, x_i]; i = 1, \dots, p\}$.

Mivel $M_1 = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x, \eta_k) \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]} f(x, y) = M_{ik}$ és

$m_1 = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x, \eta_k) \geq \inf_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]} f(x, y) = m_{ik}$, valamint

$$m_1 (x_i - x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \eta_k) dx \leq M_1 (x_i - x_{i-1}).$$

azért

$$m_{ik} (x_i - x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \eta_k) dx \leq M_{ik} (x_i - x_{i-1}).$$

Tehát

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^p m_{ik} (x_i - x_{i-1}) \right) (y_k - y_{k-1}) \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \eta_k) dx \right) (y_k - y_{k-1}) \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^p M_{ik} (x_i - x_{i-1}) \right) (y_k - y_{k-1}) , \end{aligned}$$

azaz

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^p m_{ik} (x_i - x_{i-1}) (y_k - y_{k-1}) \leq \sigma_P^\varphi \leq \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^p M_{ik} (x_i - x_{i-1}) (y_k - y_{k-1}) . \quad (15.1)$$

A (15.1) egyenlőtlenség lánc bal oldalán, illetve jobb oldalán az f függvénynek a

$$P(Q) = \{ A_{ik} : i = 1, \dots, p ; k = 1, \dots, m \} ,$$

$$A_{ik} = \{ (x, y) ; x_{i-1} \leq x \leq x_i , y_{k-1} \leq y \leq y_k \} \text{ felosztáshoz}$$

tartozó alsó, illetve felső összege szerepel:

$$s_P^f \leq \sigma_P^\varphi \leq S_P^f .$$

Mivel ha $P_j([a, b])$ és $P_j([c, d])$ tetszőleges minden határon túl finomodó felosztássorozat, akkor $P_j(Q)$ is minden határon túl finomodik, azért

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_P^f \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_P^\varphi \leq \lim_{j \rightarrow \infty} S_P^f . \quad (15.2)$$

f integrálhatósága miatt (15.2)-ben határozott egyenlőség áll fenn, tehát φ integrálható (II. Kötet 22.10 Tétel), és

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_c^d \varphi(y) dy .$$

15.2 Következmény. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ integrálható a

$$Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \subset D$$

téglalapon. Ha a $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ és a

$\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ függvény létezik, akkor

$$\begin{aligned} \iint_Q f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A 15.1 Tétel nyilvánvaló következménye.

15.2 Következmény. Ha $f \in C_Q^0$, ahol

$$Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

akkor

$$\begin{aligned} \iint_Q f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Bizonyítás. f folytonosságából következik, hogy f integrálható Q -n (lásd 13.13 Tétel), továbbá az, hogy $\int_c^d f(x, y) dy$, illetve $\int_a^b f(x, y) dx$ létezik $x \in [a, b]$, ill.

$y \in [c, d]$ esetén. Innen a 15.2 Következmény alapján állításunk adódik.

15.1 Definíció. Legyen $c \in C^0[a, b]$, $d \in C^0[a, b]$ és $c(x) \leq d(x)$, $x \in [a, b]$.

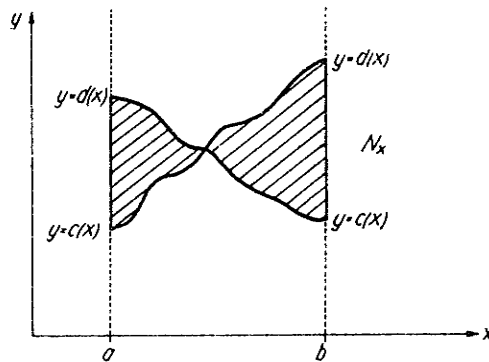
$$\text{Az } N_x = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\} \quad (15.3)$$

tartományt az x tengelyre normál tartománynak nevezzük.

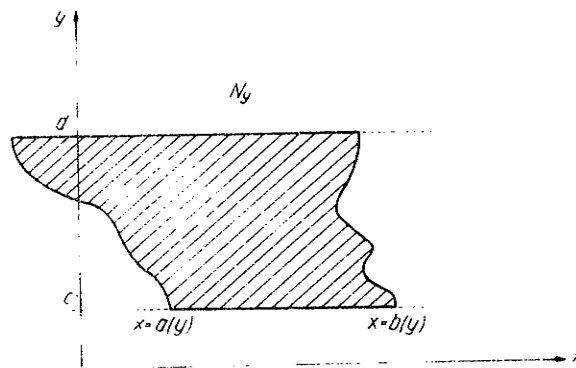
Legyen $a \in C^0[c, d]$, $b \in C^0[c, d]$ és $a(y) \leq b(y)$, $y \in [c, d]$.

$$\text{az } N_y = \{(x, y) : c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\} \quad (15.4)$$

tartományt az y tengelyre normál tartománynak nevezzük.
(Lásd 15.1 és 15.2 ábra.)



15.1 ábra



15.2 ábra

15.4 Tétel. Ha $f \in C_{N_x}^0$, ahol N_x a (15.3) normál tartomány, akkor

$$\iint_{N_x} f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy \right) dx.$$

Bizonyítás. Foglalkozunk az N_x tartományt egy $Q = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c_0 \leq y \leq d_0\}$ téglalapba, vagyis legyen $N_x \subset Q$. Tekintsük f -nek a Q -ra való kiterjesztését:

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{ha } (x,y) \in N_x \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in Q \setminus N_x \end{cases}$$

$\bar{f}$ integrálható Q -n, mivel f integrálható az N_x zárt tartományon (a 13.13 Tétel következménye, mivel N_x , mint a d és c folytonos függvények grafikonja alatti tartományok különbsége, mérhető területű, lásd II. Kötet 24.6 Tétel) és az azonosan nulla függvény integrálható a korlátos és mérhető területű $Q \setminus N_x$ halmazon (lásd 13.4 Tétel). Így a 13.7 Tétel alkalmazható:

$$\iint_Q \bar{f}(x, y) \, dx dy = \iint_{N_x} f(x, y) \, dx dy + \iint_{Q \setminus N_x} 0 \, dx dy,$$

vagyis

$$\iint_{N_x} f(x, y) \, dx dy = \iint_Q \bar{f}(x, y) \, dx dy. \quad (15.5)$$

Az $\bar{f}$ függvény rögzített x mellett, mint y -nak a függvénye legfeljebb két pont kivételével folytonos $[c_0, d_0]$ -ban, így $\psi(x) = \int_{c_0}^{d_0} \bar{f}(x, y) dy$ létezik. $\bar{f}$ -ra alkalmazható a 15.1 Tétel:

$$\begin{aligned} \iint_Q \bar{f}(x, y) \, dx dy &= \int_a^b \left(\int_{c_0}^{d_0} \bar{f}(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \left[\int_{c_0}^{c(x)} \bar{f}(x, y) dy + \int_{c(x)}^{d(x)} \bar{f}(x, y) dy + \int_{d(x)}^{d_0} \bar{f}(x, y) dy \right] dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned} \quad (15.6)$$

15.5 Tétel. Ha $f \in C_{N_y}^0$, ahol N_y a (15.4) normáltartomány, akkor

$$\iint_{N_y} f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Bizonyítás. A 15.4 Tétel bizonyításához hasonlóan történik.!

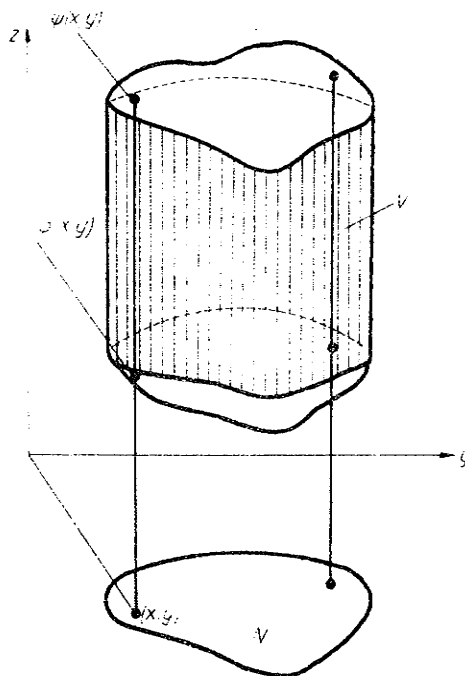
A 15.1-15.5 Tételek állításait hármas integrál esetén is megfogalmazhatjuk, a bizonyítások is hasonló módon történnek. A háromdimenziós tér normáltartományát a következőképpen definiáljuk:

15.2 Definíció. Legyen $\varphi \in C_{N'}^0$, $\psi \in C_{N''}^0$, ahol $N \subset \mathbb{R}^2$ normáltartomány (15.3) vagy (15.4) értelemben, és

$$\varphi(x, y) \leq \psi(x, y), (x, y) \in N. \text{ A}$$

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in N, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} \quad (15.7)$$

tartományt (háromdimenziós) az x, y síkra normál tartomány-nak nevezzük. (Lásd 15.3 ábra.)



15.3 ábra

Az x, y, z változók szerepének felcserélésével beszélhetünk az y, z , illetve a z, x síkra normál tartományról is.

15.6 Tétel. Ha $f \in C_V^0$, ahol $V \subset \mathbb{R}^3$ a (15.7)-ben definiált normáltartomány, akkor:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iint_N \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A 15.4 Tétel bizonyításával analóg módon történik.!

15.1 Példa. Legyen $Q = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, g \leq z \leq h\}$ háromdimenziós téglá, és $f \in C_Q^0$. A 15.6 Tétel szerint:

$$\begin{aligned} \iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy dz &= \\ &= \iint_N \left(\int_g^h f(x, y, z) dz \right) dx dy \end{aligned}$$

ahol $N = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. A 12.1 Tétel analógiájára belátható, hogy a $\varphi(x, y) = \int_g^h f(x, y, z) dz$ kétváltozós függvény folytonos $N \subset \mathbb{R}^2$ -ben, így

φ -re alkalmazható a 15.2 Következmény:

$$\begin{aligned} \iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy &= \iint_N \left(\int_g^h f(x, y, z) dz \right) dx dy = \iint_N \varphi(x, y) \, dx dy = \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \varphi(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_g^h f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx. \end{aligned} \quad (15.8)$$

15.2 Példa. Számítsuk ki a $V = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ térrész ("tömör

ellipszoid") térfogatát ($a, b, c > 0$). A V ellipszoid $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ténnyolcadba eső V_1 részének térfogatát határozzuk meg. Az ellipszoid szimmetriája miatt: $\text{mes}_3 V = 8 \text{mes}_3 V_1$. A V_1 térrész az $f(x, y) =$

$$c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2 \text{ függvény grafikonja alatti térrész, ahol } D \text{ az}$$

$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$ egyenlőtlenségrendszerrel jellemzett tartomány, vagyis

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq a, c \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right\}$$

az x tengelyre normál tartomány. (14.2) alapján:

$$\text{mes}_3 V_1 = \iint_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx dy.$$

Alkalmazva a 15.4 Tételt:

$$\text{mes}_3 V_1 = \int_0^a \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \int_0^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy \right) dx. \quad (15.9)$$

Helyettesítéssel és a II. Kötet, 29.1 Példa eredményének felhasználásával

$$\begin{aligned} & \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \int_0^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy = \\ &= c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{ay}{b \sqrt{a^2 - x^2}} \right)^2} dy = \\ &= \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2) \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \\ &= \frac{\pi bc (a^2 - x^2)}{4a^2}. \end{aligned} \quad (15.10)$$

(15.10)-et behelyettesítve (15.9)-be:

$$\begin{aligned} \text{mes}_3 V_1 &= \int_0^a \frac{\pi bc}{4a^2} (a^2 - x^2) dx = \\ &= \frac{\pi bc}{4a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{\pi}{6} a b c. \\ \text{mes}_3 V &= 8 \text{mes}_3 V_1 = \frac{4\pi}{3} a b c. \end{aligned}$$

16. Kettős és hármas integrálok transzformációi

Ebben a pontban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan lehet új változók bevezetésével ("helyettesítéssel") kettős és hármas integrálokat egyszerűbb alakra transzformálni (átalakítani). Az új változókban az integrálandó függvény, vagy az integrációs tartomány egyszerűbb lehet és így könnyebbé válhat a többszörös integrál kiszámítása.

Először azt a fontos speciális esetet vizsgáljuk, amelyben a kettős integrált polárkoordináták bevezetésével transzformáljuk.

Vezessük be az x, y síkon a szokásos módon (II. Kötet (20. 7)) az r, φ polár koordinátarendszert, legyen $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, $0 \leq a < b$ és tekintsük az $\alpha \leq \varphi < \beta$, $a < r \leq b$ egyenlőtlenségekkel jellemzett Q_p "körgyűrűcikk" tartományt. Q_p nyilván mérhető területű. A

$$Q_p = \{(x, y) : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, a < r \leq b, \alpha \leq \varphi < \beta\} \quad (16.1)$$

tartományt polárkoordinátákban téglalap tartománynak nevezzük (lásd 16.1 ábra). Ha ugyanis r -et és φ -t Descartes-féle derékszögű koordinátáknak tekintjük a sík egy másik példányán, az " r, φ síkon" (lásd 16.2 ábra), az r, φ síkbeli

$$Q'_p = \{(r, \varphi) : a < r \leq b, \alpha \leq \varphi < \beta\} \quad (16.2)$$

tartomány téglalap, és Q_p a Q'_p tartomány egy-egyértelmű képe az

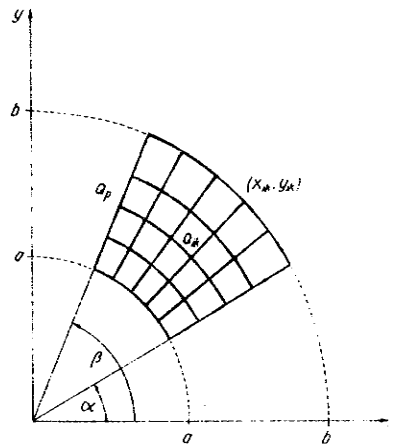
$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \quad (16.3)$$

függvényrendszer által létesített leképezésnél.

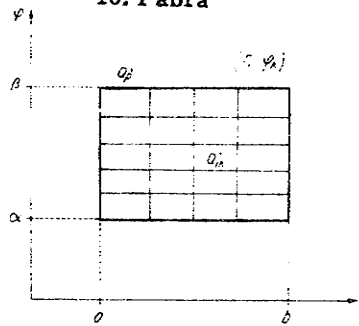
16.1 Tétel. Legyen $f \in C^0_{\bar{Q}_p}$, ahol $\bar{Q}_p$ a Q_p körgyűrűcikk lezártja; akkor

$$\iint_{Q_p} f(x, y) dx dy = \iint_{Q'_p} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (16.4)$$

Bizonyítás. Az összetett függvény, ill. a szorzat folytonosságára vonatkozó tételből (lásd 4.1 Tétel és az azt megelőző megjegyzés) következik, hogy az $r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ függvény folytonos $\bar{Q}_p$ -n és így integrálható. Osszuk fel az $[a, b]$, ill. az $[\alpha, \beta]$ intervallumot n , ill. m egyenlő részre. Ennek a felosztásnak megfelel a Q'_p tartomány felosztása kis téglalapokra, ill. a Q_p tartomány felosztása kis körgyűrűcikkekre (lásd 16.1 és 16.2 ábra). A Q_p tartomány ezen felosztása



16.1 ábra



16.2 ábra

$$P(Q_p) = \{ Q_{ik} : i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m \},$$

ahol

$$Q_{ik} = \left\{ (x, y) : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r \in (r_{i-1}, r_i], \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k) \right\},$$

$$r_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad \varphi_k = \alpha + k \frac{\beta - \alpha}{m}, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

A Q_{ik} körgyűrűcikk területe

$$\begin{aligned} \text{mes} Q_{ik} &= \frac{1}{2} r_i^2 (\varphi_k - \varphi_{k-1}) - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 (\varphi_k - \varphi_{k-1}) = \\ &= \frac{1}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) (\varphi_k - \varphi_{k-1}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (r_{i-1} + r_i) (r_i - r_{i-1}) (\varphi_k - \varphi_{k-1}) =$$

$$= r_i^* \frac{b-a}{n} \frac{\beta-\alpha}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

ahol $r_i^* = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}$, $\varphi_k^* = \frac{\varphi_{k-1} + \varphi_k}{2}$ és az $x_{ik} = r_i^* \cos \varphi_k^*$,
 $y_{ik} = r_i^* \sin \varphi_k^*$ jelölések bevezetésével az f függvénynek a $P(Q_p)$ felosztáshoz
 tartozó egyik integrálközelítő összege

$$S_p = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m f(x_{ik}, y_{ik}) \text{ mes } Q_{ik} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m f(r_i^* \cos \varphi_k^*, r_i^* \sin \varphi_k^*) r_i^* \frac{b-a}{n} \frac{\beta-\alpha}{m}. \quad (16.5)$$

A Q'_p tartomány megfelelő felosztása

$$P'(Q'_p) = \{Q'_{ik} : i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m\},$$

ahol

$$Q'_{ik} = \{(r, \varphi) : r \in (r_{i-1}, r_i], \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]\}.$$

A Q'_{ik} téglalap területe

$$\text{mes } Q'_{ik} = \frac{b-a}{n} \frac{\beta-\alpha}{m}.$$

Mivel $(r_i^*, \varphi_k^*) \in Q'_{ik}$, látható, hogy (16.5) nem más mint az
 $r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ függvénynek a $P'(Q'_p)$ felosztáshoz tartozó integrálköze-
 lítő összege. Ha $(n, m) \rightarrow (\infty, \infty)$, akkor nyilván a $P(Q_p)$ és a $P'(Q'_p)$ fel-
 osztás is minden határon túl finomodik, és (16.5) a (16.4) jobb oldalán álló
 kettős integrálhoz tart.!

Érvényes a kettős integrál általános transzformációjára vonatkozó követ-
 kező tétel. A bizonyítást lásd [4] II. 404. o.

16.2 Tétel. Legyen az

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (16.6)$$

függvényrendszerrel létesített leképezés az u, v sík T' nyílt tartományának az x, y sík T tartományára való egy-egyértelmű leképezése, az $x(u, v)$ és $y(u, v)$ függvények folytonosan differenciálhatók T' -ben és legyen a (16.6) függvényrendszer Jacobi-féle determinánsa $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$; ha $A' \subset T'$ zárt mérhető területű tartomány, akkor A' képe az $A \subset T$ tartomány is mérhető és ha f integrálható A -n, akkor

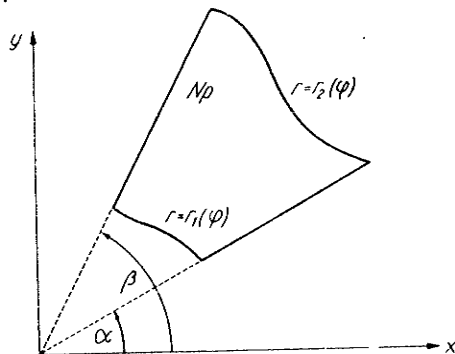
$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{A'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (16.7)$$

Látható, hogy a 16.1 Tétel a 16.2 Tétel speciális esete (felteve, ha (16.1)-ben $a > 0$), a (16.3) függvényrendszer Jacobi-determinánsának abszolút értéke, ugyanis r .

16.1 Példa. Legyen $r_1 \in C^0_{[\alpha, \beta]}$, $r_2 \in C^0_{[\alpha, \beta]}$ és $0 < r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ ahol $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$; az x, y sík

$$N_p = \{ (x, y) : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \\ r \in [r_1(\varphi), r_2(\varphi)], \varphi \in [\alpha, \beta] \}$$

tartományát polárkoordinátákban normál tartománynak nevezzük, u. i. N_p képe, N'_p az r, φ síkban a φ tengelyre normál tartomány (v. ö. 15.1 Definíció, lásd

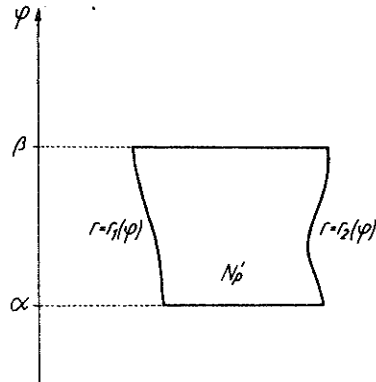


16.3 ábra

16.3 és 16.4 ábra). Mivel az $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ függvényrendszer Jacobi-féle determinánsának abszolút értéke r , a 16.2 Tétel speciális eseteként kimondhatjuk: ha az f kétváltozós függvény integrálható az N_p tartományon, akkor

$$\iint_{N_p} f(x,y) dx dy = \iint_{N'_p} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (16.8)$$

Bebizonyítható, hogy (16.8) akkor is érvényes, ha $r_1(\varphi) \equiv 0$.



16.4 ábra

16.2 Példa. Az

$$x = a_{11}u + a_{12}v + b_1, \quad y = a_{21}u + a_{22}v + b_2 \quad (16.9)$$

lineáris függvényrendszerrel létesített leképezésnél a Jacobi-determináns

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det [a_{ij}].$$

Ha $\det [a_{ij}] \neq 0$, akkor (16.9) az u, v síkban az x, y síkra való egy-egyértelmű leképezése, és tetszőleges egymásnak megfelelő x, y síkbeli A , ill. u, v síkbeli A' zárt, mérhető területű tartományokra és A -n integrálható f függvényre

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_{A'} f(a_{11}u + a_{12}v + b_1, a_{21}u + a_{22}v + b_2) \cdot |a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}| du dv. \quad (16.10)$$

A 16.2 Tétel megfelelője hármas integrálokra is érvényes (természetesen ezt sem bizonyítjuk):

16.3 Tétel. Legyen az

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \quad (16.11)$$

függvényrendszerrel létesített leképezés az (u, v, w) tér V' nyílt tartományának az (x, y, z) tér V tartományára való egy-egyértelmű leképezése, a (16.11) függvények folytonosan differenciálhatók V' -ben és a (16.11) függvényrendszer Jacobi-féle determinánsa

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \neq 0 ;$$

ha $A' \subset V'$ zárt mérhető térfogatu tartomány, akkor A' képe az $A \subset V$ tartomány is mérhető, és ha f integrálható A -n, akkor

$$\begin{aligned} \iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \iiint_{A'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot \left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw . \end{aligned} \quad (16.12)$$

16.3 Példa. Az

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \quad (16.13)$$

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

függvényrendszer Jacobi determinánsa (lásd (11.25)) :

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \varphi, z)} = r .$$

A 16.2 Tétel értelmében olyan A tartományokon alkalmazhatjuk a hármasintegrálban a (16.13) transzformációt, amelyek nem tartalmazzák az (r, φ, z) tér $r = 0$ egyenlettel jellemzett tartományának képét, azaz a z tengely pontjait. Belátható azonban, hogy a (16.13) transzformációval való integrálás képlete tetszőlegesen zárt, korlátos és mérhető tartomány esetén helyes:

$$\begin{aligned} \iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \iiint_{A'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r \, dr \, d\varphi \, dz . \end{aligned} \quad (16.14)$$

16.4 Példa. Az

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta \\ 0 &\leq r < \infty, \quad 0 \leq \vartheta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \quad (16.14)$$

függvényrendszer Jacobi-determinánsa (lásd (11.23)) :

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \vartheta, \varphi)} = r^2 \sin \vartheta \geq 0,$$

és csak a z tengely pontjainak megfelelő pontokban zérus. Ha az A tartománynak nincs közös pontja a z tengellyel, akkor a 16.2 Tétel alkalmazható:

$$\begin{aligned} &\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \\ &= \iiint_A f(r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \end{aligned} \quad (16.15)$$

Ez esetben is belátható, hogy (16.15) akkor is helyes, ha a zárt, mérhető területű A tartománynak van közös pontja a z tengellyel.

16.5 Példa. Mekkora v sebességgel érkezik a h magasságu lejtőről "surlódásmentesen" leguruló, homogén, egységnyi sűrűségű "a" sugaru golyó a lejtő aljára ($h > 0$, $a > 0$, a golyó tömege $m = \frac{4}{3} a^3 \pi$).

A helyzeti energia mozgási energiává alakul át:

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \Theta \frac{v^2}{a^2}, \\ v &= \sqrt{\frac{2 mgh}{m + \frac{\Theta}{a^2}}}, \end{aligned}$$

ahol Θ a golyónak az átmérőjére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka. A golyónak bármely átmérőjére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka ugyanakkora; a golyót az origóban helyezzük el, és a z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát számítjuk ki (lásd (14.10)):

$$\Theta = \iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz,$$

ahol

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$$

zárt tartomány.

(16.15) alkalmazásával:

$$\begin{aligned} \Theta &= \iiint_{V'} [(x \sin \vartheta \cos \varphi)^2 + (x \sin \vartheta \sin \varphi)^2] r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \\ &= \iiint_{V'} r^4 \sin^3 \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta, \end{aligned}$$

ahol

$$V' = \{(r, \vartheta, \varphi) : r \in [0, a], \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

tégla. Ezen a hármas integrált (15.8) felhasználásával számolhatjuk:

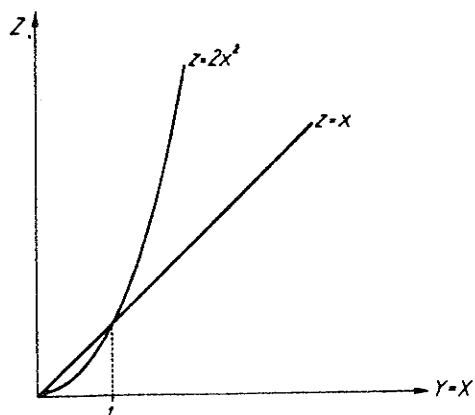
$$\begin{aligned} \Theta &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r^4 \sin^3 \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta = \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{5} a^5 \sin^3 \vartheta \, d\varphi \right) d\vartheta = \int_0^\pi \frac{2\pi}{5} a^5 \sin^3 \vartheta \, d\vartheta = \\ &= \int_0^\pi \frac{2\pi}{5} a^5 \sin \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) \, d\vartheta = \frac{2\pi}{5} a^5 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \\ &= \frac{2}{5} \left(\frac{4}{3} a^3 \pi \right) a^2 = \frac{2}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

16.6 Példa. Számítsuk ki az $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ tényolcad az $f(x, y) = x^2 + y^2$ és $g(x, y) = \sqrt{xy}$ függvények grafikonjai által határolt korlátos V részének térfogatát. V -nek az $y = x$ síkmetszetét a 16.5 ábra mutatja ($y = x, z = 2x^2$, illetve $y = x, z = \sqrt{x^2} = x$ görbék), ennek segítségével könnyen belátható, hogy a V tartományt "alulról" f grafikonja, "felülről" g grafikonja határolja. Mivel a két felület metszésvonalának vetülete az x, y síkon az

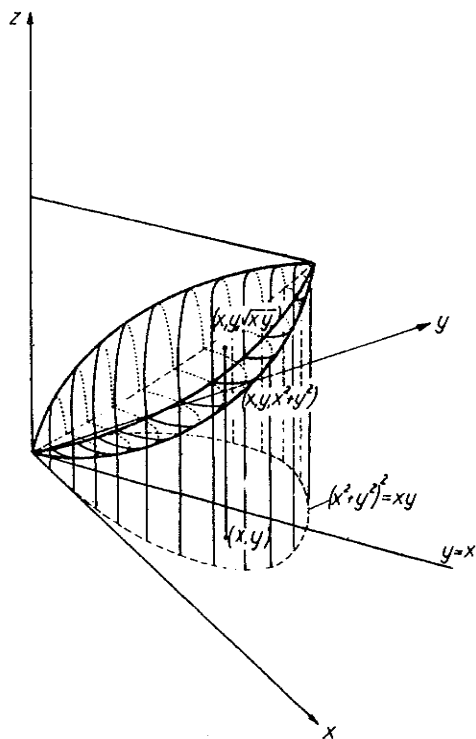
$$(x^2 + y^2)^2 = xy$$

implicit megadásu görbe $x \geq 0, y \geq 0$ negyedbe eső íve (lemnizskáta), ezért (lásd 16.6 ábra)

$$V = \{ (x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, (x^2 + y^2)^2 \leq xy, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{xy} \}.$$



16.5 ábra



16.6 ábra

$$\text{mes}_3 V = \iiint_V dx dy dz$$

A (16.13) transzformációt végezzük el. (16.14) alapján: $\text{mes}_3 V = \iiint_{V'} r dr d\varphi dz$, ahol

$$V' = \left\{ (r, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, r^4 \leq r \cos \varphi r \sin \varphi, r^2 \leq z \leq \sqrt{r \cos \varphi r \sin \varphi} \right\},$$

azaz

$$V' = \left\{ (r, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi}, r^2 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi} \right\}.$$

V' normál tartomány; a 15.6 Tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\text{mes}_3 V = \iint_N \left(r \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi} \int_{r^2}^{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi}} r dz \right) dr d\varphi = \iint_N r \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi} - r^2 \right) dr d\varphi,$$

ahol

$$N = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi} \right\}$$

Alkalmazva a 15.4 Tételt:

$$\begin{aligned} \text{mes}_3 V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi}} \left(r^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi} - r^3 \right) dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi} \right)^4 \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) d\varphi = \frac{1}{4 \cdot 12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \\ &= \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{192}. \end{aligned}$$

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Matematika Példatár (szerkesztette: Monostory I.) V. kötet, Tankönyvkiadó, 1972.
- [2] Gáspár Gy.: Műszaki matematika III. kötet, Tankönyvkiadó, 1969.
- [3] Szász P.: A differenciál- és integrálszámítás elemei I. II. kötet, Közoktatásügyi Kiadóvállalat, 1951.
- [4] Grebencsa, M.K. - Novoszelov, Sz.I.: Matematikai analízis I-II. kötet, Tankönyvkiadó, 1952.
- [5] Császár Á.: Bevezetés az általános topológiába, Akadémiai Kiadó, 1970.

TÁRGYMUTATÓ

Abszolút maximum, minimum	23
alsó összeg	98
belső függvény	29
belső pont	11
Bolzano-tétel	34
Bolzano-Weierstrass tétel	17
Borel-féle lefedési tétel	20
Cantor-féle tulajdonság	20
Cauchy-féle kritérium	17, 28
derivált mátrix	79
determináns differenciálása	57
differenciál	43
differenciál-függvény	43
differenciálhatóság	36
egyenes	10
egyenletesen folytonos függvény	32
érintősik	44
elsőrendű nyomaték	108
felosztás finomsága	98
felső összeg	98
felület	22, 23
folytonos függvény	29
folytonossági modulus	32
folytonos ut	10
függvény	22
korlátos	23
függvény határértéke	24, 25
függvény megváltozása	43
golyó	10
zárt —	12

gömb	12	
gömbi koordináták	91	
grafikon	23	
hármasszög egyenlőtlenség	104	
határérték	7	
határpont	24, 25	
henger koordináták	11	
hiba	92	
abszolút —	45	
öröklött —	45	
relatív —	45	
hibakorlát	44	
hibaszámítás	44	
implicit függvényrendszer	89	
integrálközelítő összeg	99	
integrálközép	101	
integráltranszformáció	117	
inverz függvényrendszer	89	
iránymenti derivált	60	
Jacobi-féle függvénydetermináns	79	
kettős integrál	99	
kétváltozós függvény grafikonja	23	
— — — alatti tartomány	105	
konvex tartomány	10	
korlátos pontsorozat	16	
korlátos tartomány	9	
közepes sűrűség	107	
külső függvény	29	
külső pont	11	
lányszabály	54	
Lagrange-féle középérték tétel	62	
Langrange-féle maradéktag	65	
Laplace-egyenlet	59	
legkisebb négyzetek módszere	74	
lokális szélsőérték	23, 67, 73	
magasabbrendű differenciál	64	
másodrendű nyomaték	108	
megváltozás főrésze	43	
metrikus tér	8	
n-dimenziós golyó	10	

n-dimenziós metrikus tér	8
n-dimenziós tégl	14
normáltartomány	111, 114, 120
n-változós valós függvény	22
nyílt tartomány	12
nyomaték	108
oszcillációs összeg	100
összefüggő tartomány	10
összetett függvény	29
— — differenciálja	56
paraméteres integrál	94
parciális derivált	36, 40
k-adrendű — —	47
másodrendű — — —	47
tiszt	48
vegyes — —	48
polárkoordinátákban normál tartomány	120
— téglalap tartomány	117
polárkoordinátarendszer	90
pontbeli sűrűség	107
ponthalmaz	17
pont környezete	11
pontsorozat	16
divergens —	17
konvergens —	16
produktum függvény differenciálja	56
rendezett szám n-esek	7
sűrűség	107
tartomány	9
— — átmérője	9
— — határa	11
— — felosztása	97
— — lezárása	12
tartományok távolsága	9
távolság	7
Taylor-formula	65
tégl	14
nyílt — — —	14
zárt — — —	14

torlódási pont	17, 18
totális differenciálhatóság	38
többses integrál	104
tömeg	107
tömegközéppont	108
zárt tartomány	12
Weierstrass-tétel I-II.	33

100

100