



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:
Monostory Iván

**MATEMATIKA PÉLDATÁR I-II.
A MATEMATIKA ALAPJAI
EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK**



Műegyetemi Kiadó, 2008

(Tizenharmadik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040801**



A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 41,7 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 6801/08

Ez a példatár a Dr. Farkas Miklós egyetemi tanár szerkesztésében megjelent Matematika c. elméleti jegyzet anyagára épült. A feladatok jellegében, megszövegezésében, a jelölések használatában egyaránt kifejezésre jut ez a körülmény. A közölt több mint 1500 feladat jelentős részének sorszáma előtt * jelzés található, vagy a sorszám bekeretezve olvasható. Az előbbiek megoldásához utmutatást adtunk, az utóbbiakét részletesen kidolgoztuk, egy-egy alkalommal több megoldást is közöltünk. Ahol a megoldások közlése közben tételekre hivatkozunk, hasznos az elméleti jegyzet idevágó fejezetének áttanulmányozása.

A szerkesztő

Tartalomjegyzék

	Feladat sorszám	Feladat	Oldal Megoldás
BEVEZETÉS AZ ANALÍZISBE			
1. Halmazelmélet	1- 37	7	141
2. Matematikai logika	38- 64	11	152
3. Egyenlőtlenségek	65- 94	16	161
4. Végtelen numerikus sorozatok	95-183	18	170
5. Egyváltozós valós függvények ele- mi tulajdonságai	184-235	24	187
6. Racionális egész és törtfüggvények	236-279	28	201
7. Trigonometrikus függvények	280-326	32	210
8. Határérték, folytonosság	327-521	35	221
A határérték fogalma	327-362		
Határértékszámítás	363-470		
Folytonosság	471-521		
9. Implicit függvények	522-535	51	255
10. Inverz függvények	536-553	53	263
11. Arcus-függvények	554-611	55	266
12. Exponenciális és logaritmus függ- vények	612-683	61	278
13. Hiperbolikus és area-függvények	684-728	67	287
DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS			
14. Differenciálhányados és derivált, Formális deriválás	729-811	71	296
15. Geometriai és fizikai alkalmazások	812-838	76	310
16. Differenciál. Kis változások köze- lítő meghatározása	839-870	79	314
17. Középértéktételek, vagy - Bernoulli-L' Hospital szabály	871-924	82	318
18. Függvényvizsgálat	925-950	86	326
19. Szélsőérték-feladatok	951-962	88	344
20. Görbület, Simulókör	963-987	90	348
21. Görbék magasabbrendű érintkezése	988-995	92	352
22. Taylor-polinom	996-1026	93	355
23. Görbék paraméteres megadása	1027-1045	95	363
24. Polárkoordinátákban megadott gör- bék	1046-1064	100	369

	Feladat sorszám	Oldal Feladat Megoldás	
25. Paraméteresen megadott függvény deriváltja	1065-1086	103	374
26. Polárkoordinátákkal megadott függvény deriváltja	1087-1119	106	378
27. Egyenletek közelítő megoldása	1120-1140	109	387

INTEGRÁLSZÁMITÁS

28. Határozatlan integrálás	1141-1293	111	391
Alapintegrálok gyakorlása	1141-1157		
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx; \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx;$	1158-1165		
$\int [f(\varphi(x))\varphi'(x)] dx$ alaku integrálok	1166-1177		
Integrálás helyettesítéssel	1178-1195		
Integrálás parciálisan	1196-1213		
Racionális törtfüggvények integrálása	1214-1233		
Racionális törtfüggvények integráljára vezető helyettesítések	1234-1249		
Néhány irracionális típus integrálja	1250-1268		
Vegyes feladatok	1269-1293		
29. Határozott integrálok számítása	1294-1312	118	418
30. Az integrálszámítás alkalmazásai	1313-1428	120	421
Területszámítás	1313-1348		
Ivhossz-számítás	1349-1363		
Forgástestek térfogata	1364-1378		
Forgásfelületek felszíne	1379-1396		
Elsőrendű nyomaték, súlypont	1397-1417		
Másodrendű (tehetetlenségi) nyomaték	1418-1428		
31. Improprius integrálok	1429-1448	133	451
32. Numerikus integrálás	1449-1457	135	456
33. Néhány kvadraturával megoldható differenciálegyenlet-típus	1458-1506	137	458
Szétválasztható változójú differenciálegyenletek	1458-1479		
Homogén fokszámu differenciálegyenletek	1480-1485		
Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek	1486-1495		
Hányados másodrendű differenciálegyenletek	1496-1506		

Bevezetés az analízisbe

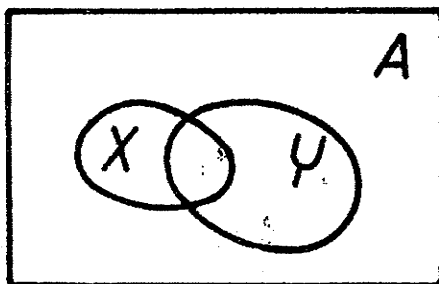
1. Halmazelmélet

- 1-2. Igazoljuk az alábbi (de Morgan-féle) azonosságokat. (X és Y valamely A alaphalmaz részhalmazai, $\bar{X}$ az X halmaznak A -ra vonatkozó kiegészítő halmaza.)

1. $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y}$

2. $\overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$

- 3-4. Legyenek A , X és Y a 3. ábrán adott síkbeli tartományok. Szemléltessük az alábbi halmazokat.



3. ábra

3. $\overline{X \cup Y}$ és $\bar{X} \cap \bar{Y}$

4. $\overline{X \cap Y}$ és $\bar{X} \cup \bar{Y}$

5. Igazoljuk, hogy
- a) ha $X \subset Y$ akkor $X \cup Y = Y$
 - b) ha $X \cup Y = Y$, akkor $X \subset Y$

6. Igazoljuk, hogy
- a) ha $X \subset Y$ akkor $X \cap Y = X$
 - b) ha $X \cap Y = X$ akkor $X \subset Y$

- 7-8. Igazoljuk, hogy

* 7. $X \cap (X \cup Y) = X$

* 8. $X \cup (X \cap Y) = X$

- * 9-15. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket

($X \setminus Y = X \cap \bar{Y}$ az X -nek az Y halmazra vonatkozó kiegészítő halmaza.)

9. $\overline{X \setminus Y} = \overline{X} \cup Y$
10. $X \setminus (X \cap Y) = X \setminus Y$
11. $(X \cup Y) \setminus Y = X \setminus Y$
12. $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$
13. $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$
14. $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$
15. $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$
16. $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$
17. $(X \setminus Y) \cup Y = X \cup Y$
18. Igazoljuk, hogy
 $(\overline{X} \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) = (X \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y})$
19. Legyenek A, X és Y az 1. ábra szerinti síkbeli tartományok. Szemléltessük az $(\overline{X} \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y})$ illetve az $(X \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y})$ halmazokat.
- * 20. Milyen feltétel teljesülése esetén lesz
 $(X \setminus Y) \cup Y = X$
21. a) Létesítsünk kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést az
 $X = \{x : x \text{ pozitív egész és } x \text{ osztója } 30\text{-nak}\}$ és az
 $Y = \{y : y \text{ pozitív egész és } y \text{ osztója } 42\text{-nek}\}$
halmazok elemei között.
b) hányféle módon oldhatjuk meg a feladatot?
- 22-26. Létesítsünk kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést az alábbi halmazok elemei között.
22. A pozitív egész számok halmaza és az egész számok halmaza.
23. A pozitív egész számok halmaza és a 7-tel osztható pozitív egész számok halmaza.
24. $X = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ és $Y = \{y : 0 \leq y \leq 2\}$
25. $X = \{x : 0 < x < 1\}$ és $Y = \{y : y > 1\}$
26. $X = \{x : 0 < x < 1\}$ és $Y = \{y : 0 \leq y \leq 1\}$
- 27-28. Legyen $H = \{h : h \text{ olyan nem elfajult háromszög, amelynek van egységnyi oldala, de nincs egységnyinél hosszabb oldala}\}$
Legyen h oldalainak hossza $x, y, 1$ ahol $0 < x \leq y \leq 1$

Tekintsük H következő részhalmazait:

$$H_1 = \{h : h \in H \text{ és } h \text{ derékszögű}\}$$

$$H_2 = \{h : h \in H \text{ és } h \text{ egyenlőszárú}\}$$

$$H_3 = \{h : h \in H \text{ és } h \text{ egyenlőoldalú}\}$$

27. Jelöljük f -vel azt a leképezést, amely a H halmaz minden egyes h eleméhez az (x, y) derékszögű koordinátarendszerrel ellátott síknak az (x, y) koordinátájú pontját rendeli. Mely halmazokra képezi le f a H, H_1, H_2 és H_3 halmazokat?

28. Jelöljük g -vel azt a leképezést, amely a H halmaz minden egyes h eleméhez az (u, v) derékszögű koordinátarendszerrel ellátott sík azon I. síknegyedbeli pontját rendeli, amelynek az

$$M\left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ ponttól vett távolsága } x, \text{ az } N\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

ponttól vett távolsága y .

Mely halmazokra képezi le a g a H, H_1, H_2 és H_3 halmazokat?

29. Lehet-e egy halmaz
- | | |
|---------------|--------------|
| a) kisebb | } számosságú |
| b) ugyanolyan | |
| c) nagyobb | |

mint amilyen számosságú valamelyik valódi részhalmaza?

30. Legyenek X és Y véges halmazok. Jelölje $m(X)$, $m(Y)$, $m(X \cup Y)$ illetve $m(X \cap Y)$ a megfelelő halmazok számosságát. Igazoljuk, hogy

$$m(X \cup Y) = m(X) + m(Y) - m(X \cap Y)$$

31. Egy gyár termékeiről az ellenőrzés során megállapították, hogy 20%-uk sem minőség, sem csomagolás szempontjából nem kifogástalan. 60%-nak kifogástalan a minősége, 50%-nak kifogástalan a csomagolása. Hány %-nak kifogástalan a minősége is és a csomagolása is?

32. Fejezzük ki az $X \cup Y \cup Z$ halmaz számosságát a 30-as feladathoz hasonlóan.

33. Egy műszaki egyetem hallgatói főként három sportot űznek: futballoznak, usznak és sakkoznak.

Az összesen 5000 hallgató közül

1500 egyáltalán nem sportol,

500 sportol ugyan, de az említett három sportág közül egyiket sem foglalkozik.

1400 sakkozik, 1900 uszik, 2300 futballozik,

800 sakkozik is, uszik is, 1000 sakkozik is, futballozik is, 1400 uszik is, futballozik is.

Hány olyan hallgató van, aki sakkozik is, uszik is, futballozik is?

34. Igazoljuk, hogy ha X és Y megszámlálható halmazok, akkor $X \times Y$ (direkt szorzat) is megszámlálható.
35. Mutassuk meg, hogy az egész együtthatós polinomok számossága megszámlálható.
36. Mutassuk meg, hogy 0 és 1 számokból előállítható összes lehetséges sorozatok C halmaza nem megszámlálható.
37. Jelöljük egy A_1, B_1, C_1 derékszögű háromszög egyik befogóját a -val, az átfogóját c -vel, az a befogó pontjainak halmazát A -val, a c átfogó pontjainak halmazát C -vel. Megegyezik-e a következő halmazok számossága
- a) A és C
 - b) $A \cup C$ és A
 - c) $A \cap C$ és C

2. Matematikai logika

38. Megengedik-e a Peano-axiómák, hogy
 a) csak a 10-zel osztható számokat
 b) csak a prímszámokat
 tekintsük "természetes" számoknak?
39. Két állítás, A és B között lehet olyan összefüggés, hogy az egyik és csak az egyik igaz közülük. Pl.: "Vagy elmegyek, vagy itt maradok." Fejezzük ki ezt állításműveleti jelekkel.
40. A hét mely napjain igaz és mely napjain hamis ez az állítás:
 "(1) Ha ma kedd van, akkor holnap szerda" - és ez: "(2) Ha ma kedd van, akkor holnap szombat"?
41. Az alábbi állítások közül:
 (1) "Az x szám osztható 2-vel",
 (2) "Az x szám osztható 5-tel",
 (3) "Az x szám osztható 10-zel",
 melyik melyiknek szükséges, és melyik melyiknek elegendő feltétele?
42. Legyen A és B két állítás. Tekintsük az alábbi összetett állításokat:
 (1) Ha A, akkor B. (5) Ha B, akkor A.
 (2) Ha $\neg A$, akkor B. (6) Ha $\neg B$, akkor A.
 (3) Ha A, akkor $\neg B$. (7) Ha B, akkor $\neg A$.
 (4) Ha $\neg A$, akkor $\neg B$. (8) Ha $\neg B$, akkor $\neg A$.
 Tegyük fel, hogy (1) igaz. A többiek közül melyek biztosan igazak (I), melyek biztosan hamisak (II), melyekről nem lehet eldönteni, hogy igazak-e vagy hamisak (III)?
43. Az $A \Rightarrow B$ és a $B \Rightarrow A$ állítást egymás megfordításainak nevezzük.
 Írjuk fel az alábbi matematikai tételek megfordítását, és döntsük el mindegyikről, igaz-e vagy nem:
44. "Ha egy természetes szám osztható a.b-vel, akkor osztható a-val is és b-vel is".
45. "Két háromszög egybevágó, ha megfelelő oldalai egyenlők egymással".
46. "Derékszögű háromszögben a befogók négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével".

46. "Az olyan x, y -ban másodfoku egyenletnek, amelyben mind x^2 , mind xy együttthatója 0, derékszögű koordinátarendszerben parabola a képe".

47. Be akarjuk bizonyítani, hogy két (nem negatív) számnak a mértani közepe legfeljebb akkora, mint a számtani közepe:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Helyes-e az alábbi bizonyítás:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, / ()^2$$

$$ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} / :4$$

$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2, / -4ab$$

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2,$$

$$0 \leq (a-b)^2;$$

ez nyilvánvalóan igaz (mert valós szám négyzete nem lehet negatív), tehát igaz eredeti állításunk is".

- * 48. Bizonyítsuk be a számtani sor összegképletének felhasználása nélkül, hogy

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

49. Vezessünk le képletet az első n természetes szám négyzetének összegére.

(A levezetéshez tudni kell arról, hogy ha egy sor n -edik tagjának képlete egy n -ben felírt polinom, akkor az első n tag összegének képlete egy - ugyancsak n -ben - 1-gyel magasabb fokú polinom.)

- * 50. Bizonyítsuk be, hogy

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2,$$

vagyis, hogy

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

51. Levezethető-e a véges mértani sor összegképlete matematikai indukcióval?

52. Bizonyítsa be, hogy ha n természetes szám, p pedig prímszám, akkor $n^p - n$ mindig osztható p -vel. (A számelmélet kis Fermat-tétele.)

53. Mutassa meg, hogy

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

- * 54. Fejezzük ki zárt alakban az

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

összeget.

55. Valaki azt javasolja, hogy verjenek a jelenlegiekén kívül háromforintos pénzdarabokat is. Javaslatát azzal az állítással támasztja alá, hogy pusztán 3 és 5 forintosokkal bármekkora pénzösszeg kifizethető visszaadás nélkül, ha egész számu forintból áll, és 7 Ft-nál több.

Igaz ez az állítás?

56. Mi az ellenkezője - tagadása - az alábbi két állításnak:
 (A) Van olyan kazán, amely minden tüzelőanyaggal működik.
 (B) Minden gyárban van olyan dolgozó, aki minden nap lóg.
 (C) Ez igaz is, szép is.

3. Egyenlőtlenségek

A valós számok rendezési axiómáiból következnek az alábbiak:

1. Ha $x > y$ és $t > u$, akkor $x + t > y + u$.
2. Ha $x > y$ és $t < u$, akkor $x - t > y - u$.
3. Ha $x > y$ és x és y egyenlő előjelűek, akkor

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y}.$$

4. Ha x és y pozitívak, $x > y$ és n pozitív egész, akkor $x^n > y^n$ és $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$.
5. Ha x, y, t, u pozitívak és $x > y, t > u$, akkor $xt > yu$.

Az $f(x) > g(x)$ egyenlőtlenségnek $x = x_0$ akkor megoldása, ha $f(x_0) > g(x_0)$. Itt $>$ helyett $\geq$ is állhat.

Valamely egyenlőtlenséget megoldani annyit jelent, mint előállítani a megoldások halmazát.

Két egyenlőtlenséget akkor nevezünk ekivalensnek, ha megoldáshalmazuk ugyanaz.

Az

$$f(x) > g(x) \quad \text{és} \quad h(x) > k(x) \quad (3)$$

egyenlőtlenségrendszert konjunktívnak, az

$$f(x) > g(x) \quad \text{vagy} \quad h(x) > k(x) \quad (4)$$

egyenlőtlenségrendszert diszjunktívnak nevezzük. Ha $f(x) > g(x)$ megoldásainak halmaza A , $h(x) > k(x)$ megoldásainak halmaza B , akkor a (3) egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza $A \cap B$, a (4)-é $A \cup B$.

A (3) egyenlőtlenségrendszert így is szoktuk írni

$$\left. \begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ h(x) > k(x) \end{array} \right\} \quad (3)$$

57-82.

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket, ill. egyenlőtlenség-rendszereket, és ábrázoljuk a megoldáshalmazokat a számegyenesen:

57. $1 - \frac{x-2}{6} \leq \frac{1-2x}{3}$

58. $\frac{2}{1-x} \geq 3$

59. a) $x-4 > 0$ és $x+3 > 0$, b) $x-4 > 0$ vagy $x+3 > 0$,
c) $x-4 > 0$ és $x+3 < 0$, d) $x-4 > 0$ vagy $x+3 < 0$,
e) $x-4 < 0$ és $x+3 > 0$.

60. $(x-1)(x+2) > 0$

61. $\frac{x-1}{x+2} < 0$.

62. $\frac{x-3}{x-1} < \frac{1}{2}$

* 63. $1 < \frac{3x+4}{5} < 2$

* 64. $\frac{2x-1}{2} < \frac{4x+1}{3} < \frac{x-1}{3}$

* 65. $\left. \begin{array}{l} 3+x > 4+2x \\ 5x-3 < 4x-1 \end{array} \right\}$

66. $|x| \leq 3$

67. $|x| > 2$

68. $|x-4| < 5$

69. $|x+3| > 1$

70. $\frac{3}{|x+1|} \leq 1$

* 71. $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 1$

* 72. $\left| \frac{x-3}{x+2} \right| \geq 4$

* 73. $x^2 - x - 2 > 0$

* 74. $x^2 - 10x + 2 \leq 2$

$$75. \quad a) (x-1)(x-2)(x+3)(x-4) > 0 \quad b) \frac{(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-4)} > 0$$

$$76. \quad \frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+4)} \leq 0$$

$$* 77. \quad a) \frac{\frac{x^2}{2} + x - 2}{x^2 + x - 6} > 0 \quad b) \frac{\frac{x^2}{2} + |x| - 2}{x^2 + |x| - 6} > 0$$

$$* 78. \quad x^3 > x$$

$$79. \quad \frac{1}{|x+4|} - 2x < 6$$

$$80. \quad |x^2 + 6x + 10| \geq 1$$

$$81. \quad |2x| + |2x - 6| \geq 8$$

$$* 82. \quad |5 - x| - |x - 1| + |x + 3| > 8.$$

*83-88. Ábrázoljuk a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi kétismeretlenes egyenlőtlenségeket, ill. egyenlőtlenségrendszereket kielégítő (x, y) értékpárok tartományát:

$$83. \quad x^2 + y^2 \geq 1$$

$$84. \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 < 4 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right\}$$

$$85. \quad \left. \begin{array}{l} x < y \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$86. \quad \left. \begin{array}{l} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{array} \right\}$$

$$87. \quad |x| + |y| \leq 1$$

$$88. \quad \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \leq x \\ y + 2x \leq 2 \end{array} \right\}$$

89-92. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeknek az adott feltételek mellett való fennállását.

$$89. \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{ha} \quad a \geq 0 \text{ és } b \geq 0$$

$$90. \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad \text{ha} \quad a > 0 \text{ és } b > 0$$

$$91. \quad (n!)^2 > n^n \quad \text{ha} \quad n > 2 \text{ egész szám}$$

92.

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > 1$$

ha $n > 1$ egész szám.

* 93.

Legyenek $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ olyan valós számok, amelyekre fennáll, hogy

$$a_1 a_2 > 0, \quad a_1 c_1 \geq b_1^2, \quad a_2 c_2 \geq b_2^2$$

Bizonyítandó, hogy ekkor

$$(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) \geq (b_1 + b_2)^2$$

94.

Oldjuk meg az

$$\left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \leq 2$$

egyenlőtlenséget.

4. Végtelen numerikus sorozatok

95.

Egy sorozat első öt tagja

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}.$$

Mennyivel egyenlő az n -edik tag?

96-108. Értelmezzünk a lehető legegyszerűbb módon olyan sorozatot, amelynek első tagjai az alább megadottak; majd pedig döntsük el az így értelmezett sorozatról, hogy korlátos-e (alulról, ill. felülről korlátos-e) és monoton-e (növekvő vagy fogyó, szigorú-e a monotonitás):

96. $1, 3/2, 5/3, 7/4, \dots$

97. $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$

98. $-1, 4, -9, 16, -25, 36, \dots$

99. $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$

100. $1, -3/2, 5/3, -7/4, \dots$

101. $0, 1, 0, 01, 0, 001, 0, 0001, \dots$

102. $-0, 1, 0, 01, -0, 001, 0, 0001, \dots$

103. $0, 9, 0, 99, 0, 999, 0, 9999, \dots$

104. $-0, 9, 0, 99, -0, 999, 0, 9999, \dots$

105. $\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{7}, \frac{8}{9}, \frac{12}{11}, \frac{12}{13}, \frac{16}{15}, \frac{16}{17}, \dots$

106. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots$

107. $1, 2/3, 1, 3/4, 1, 4/5, \dots$

108. $1, -2/3, 1, -3/4, 1, -4/5, \dots$

109-123. Döntsük el az alábbi sorozatokról, hogy melyikük konvergens, melyikük divergens, és a konvergenseknek mondjuk meg a határértékét is:

109.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

110.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$111. \quad a_n = n^3$$

$$112. \quad a_n = (-n)^3$$

$$113. \quad a_n = \frac{1}{2n+3}$$

$$114. \quad a_n = \frac{1}{3n^2 + 2n - 1}$$

$$115. \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$116. \quad a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$117. \quad a_n = \frac{n+1}{2n-3}$$

$$* \quad 118. \quad a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n^2 + 7n + 2}$$

$$* \quad 119. \quad a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n^3 - 7n^2 + 6n - 10}$$

$$120. \quad a_n = \frac{\sqrt{n}}{n-3}$$

$$* \quad 121. \quad a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$$

$$122. \quad a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$$

$$123. \quad a_n = \frac{\sum_{k=1}^n k}{n^2}$$

124. Egy sorozat n -edik tagja olyan tört, amelynek számlálója is, nevezője is n -ben felírt polinom. Mit tudunk mondani a sorozat konvergenciájáról és határértékéről?

125. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\{a_n, n \in T\}$ sorozat korlátos, és $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

126. Mit állíthatunk az $\left\{ \frac{a_n}{b_n}, n \in T \right\}$ sorozatról,

ha $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$, és a $\{b_n\}$ sorozat korlátos?

127. Igazoljuk, hogy ha az $\{a_n, n \in T, a_n \geq 0\}$ sorozat határértéke a nem negatív A szám, akkor a $\{\sqrt[n]{a_n}, n \in T\}$ sorozat határértéke $\sqrt[n]{A}$.

128-132. Döntsük el az alábbi sorozatokról, hogy melyek konvergens, melyek divergens, és számítsuk ki a határértéküket is azoknak, amelyeknek van:

$$128. \quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$

$$129. \quad a_n = \sqrt{2n-1} - \sqrt{n+3},$$

$$130. \quad a_n = \sqrt{n^2-2} - \sqrt{n^2-3},$$

$$131. \quad a_n = \sqrt{n^2-1} - \sqrt{12700n},$$

$$132. \quad a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}.$$

133. $\lim a_n = A$, $a_n \{b_n, n \in \mathbb{T}\}$ sorozat pedig divergens. Mit állíthatunk az

$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_n, b_n, \dots$ "egyesített" sorozatról?

* 134. $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$. Mit állíthatunk az

$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_n, b_n, \dots$ egyesített sorozatról?

135. Ha nem két, hanem több - tetszőleges számú - sorozatot egyesítünk oly módon, mint az előző két feladatban, milyen szabály vonatkozik az egyesített sorozat konvergenciájára és határértékére?

136. Döntsük el a 105-108. feladatokban szereplő sorozatokról, hogy konvergensek-e, és (ha van) mi a határértékük.

137. Konvergense-e az a sorozat, amelynek általános tagja

$$a_n = 1 + n^{(-1)^n}?$$

138. Hányadik tagtól kezdve közelítik meg a határértéküket ε -nál kisebb hibával a 105-107. feladatok sorozatait?

139-140. Határozzunk meg egy olyan N számot, amelyre

$$139. \quad \text{az } a_n = \frac{n^3 - 3n + 8}{n^3 + n^2 + n + 17}, \quad 140. \quad \text{az } a_n = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 17n - 30}$$

sorozat az N -ik tagjától kezdve, 0,0001-nél kisebb hibával megközelíti a határértékét.

* 141. Állapítsuk meg, hogy a 101.-104. feladatok sorozatai közül melyek konvergensek, és (ha van) mi a határértékük!

142-144. Hányadik tagjuktól kezdve közelítik meg a határértéküket ε -nál kisebb hibával az alábbi sorozatok:

$$142. \quad a_n = 1 - 10^{-n} \quad (\varepsilon = 0,001)$$

$$143. \quad a_n = 0,99^n \quad 144. \quad a_n = \sqrt[n]{2}$$

145. Hányadik tagjától kezdve haladja meg az
 $a_n = 1,001^n$ sorozat a) 10^{12} -t,
 b) K -t?
- 146-156. Bizonyítsuk be a jegyzet 15.7. - 15.17. tételeit.
- * 157. Érvényes-e a 15.3 és a 15.5 tétel akkor is, ha nem két, hanem több - akárhány - sorozat összegéről, ill. szorzatáról van szó?
- 158-160. Igazoljuk, hogy az alábbi sorozatok konvergensek, és számítsuk ki a határértéküket:
158. $a_n = \frac{10^n}{n!}$, 159. $a_n = \frac{n!}{n^n}$,
160. $a_n = \sqrt[n]{n}$.
- 161-162. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét:
161. $a_n = \sqrt[n]{2n}$, 162. $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 100}$.
163. Egy konvergens sorozat olyan tulajdonsága, hogy akárhány tagjának előjelét megváltoztatva is konvergens marad. Mit állíthatunk erről a sorozatról?
164. Mutassuk meg, hogy ha egy sorozat-
 a) ban véges számú tag értékét bárhogyan megváltoztatjuk,
 b) ba véges számú tagot beiktatunk,
 c) ből véges számú tagot elhagyunk,
 ez a sorozatnak sem a konvergenciáját, sem a határértékét nem befolyásolja.
- * 165. Az $a_n = \frac{2n + 50}{n}$ sorozatnak azok közül tagjai közül, amelyek nagyobbak 2,00001-nél, a sorrendben elsőt megszorozzuk 10-zel, a következőt 10^2 -nel, az az után következőt 10^3 -nal, és így tovább. Mi történik a sorozat határértékével, konvergenciájával?
166. Az $\{a_n, n \in \mathbb{T}\}$ sorozat konvergens, határértéke A . A $\{b_n, n \in \mathbb{T}\}$ sorozat ugyanazokat a tagokat tartalmazza, mint az $\{a_n\}$, csak más sorrendben. Állíthatunk-e valamit a $\{b_n\}$ sorozat konvergenciájáról és határértékéről?
- * 167. Legyen
 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

olyan csupa pozitív tagból álló konvergens sorozat, amelynek határértéke A. Mit állíthatunk

a) az $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_n + a_{n+1}, \dots$

b) az $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{n+1} - a_n, \dots$

c) az $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_n a_{n+1}, \dots$

d) az $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \dots$

sorozat konvergenciájáról és határértékéről?

168. Mondjunk példát olyan $\{a_n, n \in T\}$ konvergens számsorozatra, melyre az $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ sorozat

- a) 0-hoz tart,
- b) 0,77-hoz tart,
- c) divergens.

169. Mutassuk meg, hogy ha mind az $\{a_n, n \in T\}$, mind a $\left\{b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ sorozat konvergens, akkor

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right| \leq 1.$$

* 170. Legyen $\{a_n, n \in T\}$ is, $\{b_n, n \in T\}$ is divergens sorozat. Lehetséges-e, hogy

(1) $\{a_n + b_n\}$,

(2) $\{a_n - b_n\}$,

(3) $\{a_n b_n\}$,

(4) $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$,

(5) (1) is és (2) is,

(6) (3) is és (4) is konvergens?

171.

Van-e

- a) olyan korlátos sorozat, amelynek minden részsorozata divergens,
 b) olyan divergens sorozat, amelynek minden részsorozata korlátos?

172.

Mi a határértékük az alábbi sorozatoknak:

$$a) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3} \quad b) b_n = \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^{2^{n+2} + 3}$$

173-174.

Döntsük el az alábbi rekurzív módon megadott sorozatokról, konvergensek-e, és ha igen, számítsuk ki a határértéküket is:

173.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4 - a_n$$

174.

$$a) a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2$$

$$b) b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{2b_n}{n+1}$$

$$c) c_1 = \sqrt{2}, \quad c_{n+1} = \sqrt{2 + c_n}$$

175.

Hol a hiba az alábbi levezetésben:

$$\begin{aligned} \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1^n \end{aligned}$$

176.

Hogyan állíthatunk elő olyan számsorozatot, amelynek 1-től 100-ig minden természetes szám torlódási pontja?

177.

Állítsunk elő olyan sorozatot, amelynek minden természetes szám torlódási pontja!

178.

Állítsunk elő olyan sorozatot, amelynek minden egész szám torlódási pontja!

179.

Van-e olyan sorozat, amelynek minden valós szám - tehát a teljes számegyenes minden pontja - torlódási pontja?

180-183.

Bizonyítsuk be a 17.4. - 17.7. tételeket.

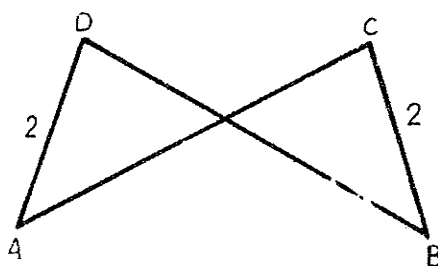
5. Egyváltozós valós függvények elemi tulajdonságai

184. Egy r alapsugaru, m magasságu egyenes körkup alakú edény úgy áll csucsával lefelé, hogy a tengelye függőleges. Beleöntünk y köbcentiméter vizet; ennek szintje a csucstól számítva h centiméter magasan van. Hogyan függ h y -től?

185. Az $y = x^2$ parabolán mozog az A pont; O az origó. Milyen pályát ír le az OA egyenesnek az a pontja, amelynek abszcisszája egyenlő az A pont ordinátájával?

186.

A 186. ábrán látható, négy rudból álló mechanizmus az A, B, C, D pontokban csuklós szerkezetű, és így (saját síkjában) szabadon mozoghat. Hogyan függ a DC távolság az AB távolságtól?



$$AC = BD = 4$$

186. ábra

187-189. Határozza meg azt az $f(x)$ függvényt, amelyre:

* 187. $f(x+1) = x^2 + 3x + 2$.

* 188. $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{x^2 + 1}$,

189. $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

* 190. Az $f(x)$ függvény derékszögű koordináta-rendszerbeli grafikonja adva van. Hogyan kapható meg ebből

a) az $f(x) - c$

b) a c , $f(x)$

c) az $f(x + c)$

d) az $f(cx)$

függvény grafikonja? (c itt mindentűt egy adott valós szám.)

(Az a) és a b) átalakítást a függvény, c)-t és d)-t a független változó lineáris transzformációjának nevezzük.

191-192. Az $f(x)$ függvény derékszögű koordináta-rendszerbeli grafikonja adva van. Hogyan kapható meg ebből

191. $|f(x)|$, 192. $\text{sg } f(x)$

grafikonja?

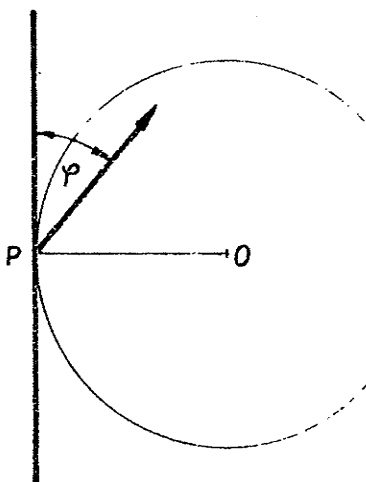
193-226. Vázzuk fel az alábbi függvények derékszögű koordináta-rendszerbeli grafikonját, állapítsuk meg értelmezési tartományukat és értékkészletüket:

- | | | | |
|--------|------------------------------|--------|------------------------------------|
| 193. | $ x $ | 194. | $\sqrt{x^2}$ |
| 195. | $ x + 3$ | 196. | $ x + 3 $ |
| * 197. | $ x - x$ | * 198. | $ x - 2 $ |
| 199. | $ x - 2 - 5 $ | 200. | $x \text{ sg } x$ |
| * 201. | $ \text{sg } x $ | 202. | $\text{sg}^2 x = (\text{sg } x)^2$ |
| * 203. | $\frac{1}{\text{sg } x}$ | * 204. | $\frac{ x }{x}$ |
| * 205. | $\frac{x}{ x }$ | 206. | $\frac{x^2}{ x }$ |
| * 207. | $\sqrt{\text{sg } x}$ | * 208. | $\frac{x}{\text{sg } x}$ |
| 209. | $3 x $ | 210. | $-2 x $ |
| 211. | $ -3x $ | 212. | $ 2x - 3 $ |
| 213. | $2 x - 3$ | * 214. | $\text{sg}(x - 2)$ |
| * 215. | $\frac{1}{1 - \text{sg } x}$ | 216. | $\frac{1}{1 - \text{sg}^2 x}$ |
| 217. | $\sqrt{\text{sg } x - 2}$ | * 218. | $x - [x]$ |
| 219. | $-[x]$ | 220. | $[-x]$ |
| 221. | $\left[\frac{1}{x}\right]$ | 222. | $\frac{1}{[x]}$ |
| 223. | $2 + \{x\}$ | 224. | $\{2 + x\}$ |
| 225. | $-\{x\}$ | 226. | $\{-x\}$ |

227. Vázoljuk fel az alábbi függvények grafikonját:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= |x+1| + |x-1|, & f_3(x) &= -|x+1| + |x-1|, \\ f_2(x) &= |x+1| - |x-1|, & f_4(x) &= -|x+1| - |x-1|. \end{aligned}$$

228. Teljesen sima kör alakú üveglap teljesen sima henger-
-üvegfallal van körülvéve (228. ábra). A kör területének P pontjában



228. ábra

van egy pontszerű golyó (a kiterjedését el-
hanyagoljuk). Ezt elindítjuk P pontbeli érin-
tővel φ szöget bezáró irányban. Feltesszük,
hogy a golyó surlódás nélkül mozog, és
ezért a henger alakú üvegfalról való akár-
hányszor visszaverődés után is folytatja moz-
gását.

Az, hogy a golyó visszaérkezik-e va-
lamikor a P pontba, és ha igen, hány visz-
szaverődés után, nyilván a φ szög nagysá-
gától függ. Milyen függvényt kapunk, ha
szögegységnek ezuttal - a szokástól eltérő-
leg - a 180° -os szöget tekintjük, és azokhoz
a φ szögekhez, amelyekre a golyó sohasem
érkezik vissza a P pontba, 0-t, azokhoz pe-
dig amelyekre visszaérkezik,

- 1-et,
- ha a golyónak a P pontba való első visz-
szaérkezése a k-adik visszaverődés so-
rán következik be,

$$\frac{1}{k} - t$$

rendelünk hozzá?

229. A 193.-228. feladatokban említett függvények közül melyek
(I) korlátosak (I/a) csak felülről, (I/b) csak alulról korlátosak,
(II) monoton növekedők,
(III) monoton fogyók,
(IV) párosak,
(V) páratlanok,
(VI) periodikusak?

A periodikus függvényeknek adjuk meg a periódusát is!

230. A 193.-228. függvények közül adjuk meg (I) a nem végig mo-
noton növekedőknek a monoton növekedési, (II) a nem végig mono-
ton csökkenőknek a monoton csökkenési intervallumait!

231. A 193.-228. feladatokban említett függvényeknek hol van lo-
kális és abszolút minimumuk és maximumuk, és mekkorák ezek?

232.

Milyen függvény

- a) két páros,
- b) két páratlan,
- c) egy páros és egy páratlan,
- d) egy páratlan és egy páros

függvény hányadosa?

233. Milyen függvény $f(x)^n$, ha $n \in \mathbb{T}$, és f

- a) páros,
- b) páratlan függvény?

234.

Meghatározható-e az a szám értéke úgy, hogy

- a) $\lfloor x \rfloor + a$.
- b) $\lfloor x \rfloor - a$

páratlan függvény legyen?

235. Soroljuk fel mindazokat a függvényeket, amelyek

- a) minden valós számra értelmezve vannak,
- b) egész értelmezési tartományukban monoton növekedők, és ugyanakkor monoton csökkenők is!

6. Racionális egész és törtfüggvények

236. Vázoljuk fel ugyanabban a koordináta-rendszerben

a) az x és x^3 ,

b) az x^2 és x^4

függvények grafikonját.

237. $m \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{T}$, $m + n$ páros, és $m > n$. Mi az $y = x^m$ és $y = x^n$ görbék kölcsönös helyzetének legjellemzőbb vonása?

238-252. Tegyük fel, hogy az x^2 , x^3 , $\frac{1}{x}$ függvények grafikonja adva van. Hogyan kaphatjuk meg az alábbi függvények grafikonját:

238. $-x^3$

239. $-\frac{1}{x}$

239. $2x^2 + 1$

241. $21 + \frac{3}{x}$

242. $\frac{4}{x+2}$

243. $\frac{1}{2x-3}$

244. $2x^3 - 3$

245. $4x - x^2 - 4$

246. $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

247. $2x^2 - 4x + 8$

248. $x - \frac{x^2}{4}$

249. $\frac{2x+3}{x-1}$

250. $\frac{3x+2}{2x-5}$

251. $ax^2 + bx + c$ (a, b, c , adott állandók $a \neq 0$)

252. $\frac{ax+b}{cx+d}$ (a, b, c, d adott állandók, $c \neq 0$).

253. Mutassuk meg, hogy az $y = \frac{1}{x}$ egyenlőszáru hiperbolát akár az x , akár az y tengely mentén k -szorosán ($k \neq 0$) megnyújtva ugyanazt a görbét kapjuk!

254-256. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját:

* 254. $x^{\operatorname{sg} x}$.

* 255. $x^{\lfloor \operatorname{sg} x \rfloor}$

* 256. $x^{[x]}$

257. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy polinom
a) páros
b) páratlan
függvény legyen?

258. Igaz-e, hogy a - két polinom hányadosaként felírt - racionális törtfüggvénynek ugyanott vannak a 0 helyei, ahol a számlálójának?

259. Igazoljuk, hogy az

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

n -edfoku polinomot ($a_n \neq 0$) az előbbi ún. Horner-féle elrendezésben oszthatjuk el az $x - x_0$ első foku polinommal:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
	0	$b_{n-1} x_0$	$b_{n-2} x_0$	$\dots$	$b_2 x_0$	$b_1 x_0$	$b_0 x_0$
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_1	b_0	c

ahol

$$b_{n-1} = a_n + 0,$$

$$b_{n-k} = a_{n-k+1} + b_{n-k+1} x_0, \quad \text{ha} \quad 2 \leq k \leq n,$$

$$c = a_0 + b_0 x_0$$

és

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{x - x_0} = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots$$

$$\dots + b_1 x + b_0 + \frac{c}{x - x_0}.$$

260. Mit állíthatunk arról a polinomról, amelyben
 a) az együtthatók összege 0,
 b) a páratlan fokszámu tagok együtthatóinak összege egyenlő a páros fokszámuak együtthatóinak összegével?
261. Mit állíthatunk annak a polinomnak a valós gyökeiről, amelyben
 a) az összes együtthatók pozitívak,
 b) az együtthatók rendre váltakozó előjelűek?
- * 262. Mutassuk meg, hogy az

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
 polinom összes gyökeinek szorzata

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$
- 263-269. Bontsuk fel irreducibilis (azaz a valós számok körében tovább már nem bontható) tényezőikre az alábbi polinomokat:
263. $x^3 - x^2 + 2$ * 264. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
265. $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ 266. $2x^3 - 3x^2 - x - 2$
267. $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ 268. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$
269. $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 2$
270. Van-e az $x^8 + x^4 + 1$ polinomnak racionális gyöke?
271. Van-e ugyanennek a polinomnak valós gyöke?
272. Határozzuk meg a b szám értékét úgy, hogy az $x^5 - bx^2 - bx + 1$ polinomnak -1 legalább kétszeres gyöke legyen!
- * 273. Legyen a tetszőleges valós szám. Az n kitevő ($n \in \mathbb{N}$) milyen értékeire osztható
 a) az $x^n - a^n$ polinom x - a-val,
 b) az $x^n + a^n$ polinom x + a-val?
- * 274. Igaz-e, hogy

$$f(x) = \frac{4x^5 + 4x^4 - 11x^3 - 4x^2 + 10x - 3}{4x^2 + 4x - 3}$$
 racionális egész függvény?

275.

Bizonyítsuk be, hogy ha az $f(x)$ polinom együtthatói mind egész, $f(0)$ és $f(1)$ pedig páratlan számok, akkor $f(x)$ -nek nem lehetnek egész gyökei.

276-278.

Határozzuk meg az alábbi értéktáblázatokhoz a $p(x)$ legalacsonyabb fokú interpolációs polinomot:

276.

x	1	2	3	4
y	2	1	4	3

277.

x	-1	0	1	2	3
y	6	5	0	3	2

278.

x	1	$9/4$	4	$25/4$
y	1	$3/2$	2	$5/2$

$p(2) = ?$

279.

Egy méressorozat az alábbi öt értékpárt adta:

t	100	200	300	400	500
s	30	27	25	24	21

Meg akarjuk közelíteni az $s = s(t)$ függvényt a legalacsonyabb fokú interpolációs polinommal. A számolás azonban a nagy számok miatt elég nehézkes.

Hogyan oldjuk meg a feladatot?

7. Trigonometrikus függvények

* 280. Határozzuk meg az alábbi függvényértékeket:

- | | |
|-----------------|--------------------------------------|
| a) $\sin(-2)$, | d) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}$, |
| b) $\sin(-1)$, | e) $\cos \sqrt{2}$ |
| c) $\cos 0,6$, | f) $\sin \frac{1}{\sqrt{2}}$. |

281-298. Vázoljuk fel az alábbi függvények grafikonját:

- | | |
|---|---|
| * 281. $2 \sin 3x - 1$ | * 282. $3 \operatorname{tg} 2x + 2$ |
| * 283. $\frac{1}{2} (\cos 4x - 1)$ | * 284. $-\frac{1}{2} \operatorname{cotg} (x - \frac{\pi}{2})$ |
| * 285. a) $\sin kx$, | b) $\cos \frac{x}{k}$ ($k \neq 0$) |
| * 286. a) $a \sin (bx + c)$, | b) $a \operatorname{tg} (bx + c)$ ($ab \neq 0$) |
| 287. $\frac{1}{\sin x}$ | * 288. $\sin \frac{1}{x}$ |
| * 289. $x \sin \frac{1}{x}$ | * 290. $x^2 \sin \frac{1}{x}$ |
| * 291. $\sin x $ | * 292. $ \sin x $ |
| * 293. $\operatorname{sg} \cos x$ | * 294. $\operatorname{sg} \operatorname{tg} x$ |
| * 295. $[\cos x]$ | * 296. $x [1 - \operatorname{sg} (\sin \pi x)]$ |
| * 297. $1 - \operatorname{sg} (\sin^2 \pi x)$ | |
| 298. $\operatorname{sg} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{sg} \sin x - \sin x $ | |

299. Állapítsuk meg a 281-298. függvények értelmezési tartományát és a 281-288; 291-298. függvények értékkészletét!

300. A 281-298. függvények közül melyek

- a) párosak,
 b) páratlanok,
 c) periodikusak? (Ez utóbbiaknak adjuk meg a legkisebb periódusát is!)

301-303. Vázoljuk fel az alábbi függvények grafikonját:

* 301. $\sin x \cos x / 1 - 2 \sin^2 x$

* 302. $(\sqrt{2} \cos x + 1)^2 (\sqrt{2} \cos x - 1)^2 - 4 \sin^2 x \cos^2 x$

* 303. $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$

* 304-308. Vázoljuk fel az alábbi függvények grafikonját:

304. $\cos x - \sin x$

305. $\sin x - \sqrt{3} \cos x$

306. $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x$

307. $-\frac{\sin x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6} \cos x}{3}$

308. $\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \frac{\pi}{4})$

309. Határozzuk meg az a állandó értékét úgy, hogy az $y_1 = 2 \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$ és $y_2 = a \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$ rezgések eredője $A \sin \omega t$ alakú legyen!

310-312. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket:

310. $\sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{256}$

311. $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

312. $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

313-315 Igazoljuk az alábbi azonosságokat:

313. $\frac{\sin y + \sin x \cos(x+y)}{\cos y - \sin x \sin(x+y)} = \operatorname{tg}(x+y)$

314. $\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha)$

315. $\frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$

316. Igazoljuk, hogy

$$\sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(x + \frac{4\pi}{3})$$

x -tol független állandó.

317-318. Bizonyítsuk be, hogy ha $x + y + z = \pi$, akkor

317. $\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$

318. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z.$

319. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket (a adott valós szám):

(1) $\sin x = \sin a,$

(2) $\cos x = \cos a,$

(3) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a.$

* 320. Határozzuk meg az a, b, c , állandókat úgy, hogy

(1) $a \sin (bx + c)$

(2) $a \operatorname{tg} (bx + c)$

a) páros,

b) páratlan

függvény legyen!

321-324. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

321. $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$

322. $\operatorname{tg} x = 2 \sin 2x$

323. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$

324. $\sin x \sin 2x \sin 3x = 1$

325. Oldjuk meg a

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x \geq 1 + \operatorname{tg} x$$

egyenlőtlenséget.

326. Igazoljuk, hogy az a sorozat, amelynek első tagja 1, és minden következő tagja egyenlő az előzőnek a sinusával, konvergens. Mennyi a határértéke?

8. Határérték, folytonosság

327-353. Állapítsuk meg az alábbi határértékekről (jobb oldali, bal oldali határértékekről), hogy léteznek-e, s ha igen, mennyivel egyenlők:

$$327. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \qquad 328. \quad \lim_{x \rightarrow +} \left| x - 10^{10} \right|$$

$$329. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |x| - x \qquad 330. \quad \lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sg} x|$$

$$331. \quad \begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sg} x, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sg} x, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sg} x \end{array}$$

$$332. \quad \begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{\operatorname{sg} x}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\operatorname{sg} x}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sg} x} \end{array}$$

$$333. \quad \begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \operatorname{sg} (|x| - 2), & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2-0} \operatorname{sg} (|x| - 2), \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2+0} \operatorname{sg} (x - 2), & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -2-0} \operatorname{sg} (x - 2) \end{array}$$

$$334. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left| |x| - 2 \right| - 5$$

$$335. \quad \begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 - \operatorname{sg} x}, & * \text{ [b)] } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 - \operatorname{sg} x}, \end{array}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \operatorname{sg} x}$$

$$336. \quad \begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 - \operatorname{sg}^2 x}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 - \operatorname{sg}^2 x}, \end{array}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \operatorname{sg}^2 x}$$

$$337. \quad \begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow n+0} [x], & \text{b) } \lim_{x \rightarrow n-0} [x], & \text{c) } \lim_{x \rightarrow n} [x] \end{array}$$

(n tetszőleges adott egész szám)

338. a) $\lim_{x \rightarrow n+0} \{x\}$, b) $\lim_{x \rightarrow n-0} \{x\}$, c) $\lim_{x \rightarrow n} \{x\}$
(n tetszőlegesen adott egész szám)
339. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x]$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{x\}$.
340. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-x]$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [-x]$
341. a) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x}$, b) $\lim_{x \rightarrow -0} \left[\frac{1}{x}\right]$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x}\right]$
342. a) $\lim_{x \rightarrow +0} \left[\frac{1}{x}\right]$, b) $\lim_{x \rightarrow -0} \left[\frac{1}{x}\right]$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x}\right]$
343. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x}\right]$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x}\right]$
344. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x}\right]$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x}\right]$
345. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n}$, c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1}$
($n \in \mathbb{N}$)
346. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{\text{sg } x}$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\text{sg } x}$, c) $\lim_{x \rightarrow -0} x^{\text{sg } x}$
d) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\text{sg } x}$, e) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\text{sg } x}$, f) $\lim_{x \rightarrow +0} (\text{sg } x)^{\text{sg } x}$
g) $\lim_{x \rightarrow -0} (\text{sg } x)^{\text{sg } x}$, h) $\lim_{x \rightarrow 0} (\text{sg } x)^{\text{sg } x}$
347. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{[x]}$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{[x]}$, c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{[x]}$
d) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{[x]}$, e) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{[x]}$, f) $\lim_{x \rightarrow 1-0} x^{[x]}$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2+0} x^{[x]},$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 2} x^{[x]},$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -0} x^{[x]}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +0} x^{[x]},$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} x^{[x]}$$

$$348. \quad a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x,$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x,$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x,$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x,$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} x,$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tg} x$$

$$349. \quad a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sin x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\cos x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +} \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$350. \quad a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +} \cos \frac{1}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{1}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{cotg} \frac{1}{x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{cotg} \frac{1}{x}$$

$$* \quad 351. \quad a) \lim_{x \rightarrow +0} \sin \frac{1}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -0} \sin \frac{1}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$* \quad 352. \quad \lim_{x \rightarrow a} 1 - \operatorname{sg}(\sin^2 \pi x), \text{ ahol a tetszőleges valós szám.}$$

$$353. \quad a) \lim_{x \rightarrow +0} S(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -0} S(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} S(x), \text{ ahol}$$

$$S(x) = \operatorname{sg} x \cdot \sin x \quad \operatorname{sg} \sin x \cdot \sin x$$

354 Határozzuk meg mindazokat a c valós számokat, amelyek-
re

$$\lim_{x \rightarrow c} [\cos x] = 1.$$

355. Legyen $Q(x)$ a Riemann-féle függvény (lásd 228. feladat).
Milyen c valós számokra létezik a

$$\lim_{x \rightarrow c} Q(x)$$

határérték, és ahol létezik, mennyivel egyenlő?

356-360. Ezekben a feladatokban c adott valós szám. Léteznek-e, és
ha igen, mennyivel egyenlők az alábbi határértékek:

$$356. \quad a) \lim_{x \rightarrow +0} (c - x)^{\operatorname{sg} x} \quad b) \lim_{x \rightarrow -0} (c - x)^{\operatorname{sg} x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (c - x)^{\operatorname{sg} x}$$

$$357. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sg}(x + c) \quad 358. \quad \lim_{x \rightarrow 0} c \operatorname{sg} x$$

$$359. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sg} \frac{c}{x}$$

$$360. \quad \lim_{x \rightarrow k} [x + c] \quad (k \text{ adott egész szám}),$$

$$361. \quad \lim_{x \rightarrow k} \{x + c\} \quad (k \text{ adott egész szám}).$$

362. Igaz-e, hogy ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban
nem korlátos, akkor van olyan $c \in [a, b]$ hely, amelyre

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty?$$

363-397. Számítsuk ki az alábbi határértékek közül azokat, amelyek
léteznek:

$$363. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ ha } \lim_{x \rightarrow a} |q(x)| = \infty, \text{ és van olyan } K_a \text{ és } N > 0, \text{ hogy } K_a\text{-ban } |p(x)| < N.$$

$$364. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{q(x)}{p(x)} \text{ az előbbi feltételekkel,}$$

365. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)}$, ha $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = 0$, és van olyan K_a és $N > 0$,
hogy K_a -ban $|q(x)| > N$.
- * 366. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{q(x)}{p(x)}$, ha $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = 0$ és van olyan K_a és $N > 0$,
hogy K_a -ban $q(x) > N$,
- * 367. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x}$
368. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x-1}$
369. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$ 370. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^2 - b^2}{x - b}$
- * 371. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^n - b^n}{x - b} \quad (n \in \mathbb{T})$
372. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^n - b^n}{x^k - b^k} \quad (n \in \mathbb{T}, k \in \mathbb{T}, b \in \mathbb{R} - \{0\})$
- * 373. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x - 2}$ * 374. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$
- * 375. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$ * 376. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^3-1} \right)$
- * 377. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x^3-1} \right)$
378. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{x-1} - \frac{b}{x^3-1} \right) \quad (a, b \in \mathbb{R}),$
379. $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^3 - 3x + 2} \right]$
380. $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{A}{x(x-2)^2} - \frac{B}{x^3 - 3x + 2} \right] \quad (A, B \in \mathbb{R}),$
381. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2 - 5x + 4} - \frac{x-4}{3(x^2 - 3x + 2)} \right)$

$$* \quad 382. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 5}$$

$$* \quad 383. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{3x - 1}$$

$$* \quad 384. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 1000}$$

$$* \quad 385. \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ ha } p(x) \text{ is, } q(x) \text{ is polinom, és } c \in \mathbb{R},$$

$$\boxed{386.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$387. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$388. \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x},$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$$

$$389. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$$

$$390. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$391. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}$$

$$392. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$* \quad 393. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$$

$$* \quad 394. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$$

$$* \quad 395. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$396. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$397. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

398. Érvényesek maradnak-e a 363-366. feladatok megoldásában kapott eredmények, ha x nem valamilyen véges a számhoz, hanem $+\infty$ -hez vagy $-\infty$ -hez tart?

399-435. Számítsuk ki az alábbi határértékek közül azokat, amelyek léteznek:

$$\boxed{399.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$400. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$401. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$402. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}]$$

$$403. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$404. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$405. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0)$$

$$406. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$407. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx} \quad (a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0)$$

$$408. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx} \quad (a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0)$$

$$409. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$410. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$411. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$412. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$413. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$$

$$414. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$415. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x + \sin x}$$

$$* 416. \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg}^3 x - \sin^3 x}$$

$$417. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$$

$$* 418. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\frac{\pi}{2} - x}$$

$$419. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}$$

$$420. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) + \sin(x-a)}{x}$$

$$421. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

422. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}$
423. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x}$
424. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$
- * 425. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x + \frac{\pi}{2}} - \cos \sqrt{x})$
426. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$
427. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \right)$
428. $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} \right|$
429. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
430. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$
431. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
432. $\lim_{x \rightarrow \infty} [\cos(x+1) - \cos x]$
433. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$
434. $\lim_{x \rightarrow \infty} [\cos(x + 2\pi) - \cos x]$
- * 435. $\lim_{x \rightarrow \infty} [\cos(x + \pi) - \cos x]$
436. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a 363-366. feladatok - törtre vonatkozó - szabályainak szorzatra vonatkozó megfelelőit!
- 437-442. Számítsuk ki az alábbi határértékek közül azokat, amelyek léteznek:
437. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x}$
438. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x}$
- * 439. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cos x$
440. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{1}{x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$

$$441. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \cos x}$$

$$442. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$$

443. Alkalmazható-e az előző feladat megoldásának gondolatmenete a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{tg} \sqrt{x+1} - \operatorname{tg} \sqrt{x})$$

határértékre is?

444. Van olyan K_a (K_∞ , $K_{-\infty}$) környezet, amelyben $f(x) > g(x)$. Az a $(+\infty, -\infty)$ helyen mind a két függvénynek van határértéke. Mit állíthatunk ezekről a határértékekről?

445. Az $y = ax^2 + bx + c$ másodfoku polinom gyökei x_1 , x_2 . A b , c együlthatók legyenek rögzítettek ($b \neq 0$). Hogyan változik x_1 és x_2 , ha $a \rightarrow 0$?

446-452. Az értelmezési tartomány mely (véges vagy végtelen) intervallumában közelítik meg az alábbi határértékekben szereplő függvények ξ -nél kisebb hibával a határértékeiket:

$$446. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$447. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2 - 4}$$

$$448. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$449. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$

$$450. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$451. \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$452. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2}$$

453-456. Az értelmezési tartomány mely (véges vagy végtelen) intervallumában lesznek N -nél nagyobbak ($-N$ -nél kisebbek) az alábbi végtelen határértékekben szereplő függvények:

$$453. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

$$454. \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x}$$

$$455. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-2} - 5)$$

$$456. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|\cos x|}$$

457.

Az $y = f(x)$ és $y = g(x)$ görbék egymás aszimptotáinak nevezzük, ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

vagy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

("aszimptota a $+\infty$ -ben", illetve "a $-\infty$ -ben"). Bizonyítsuk be, hogy az

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

egyenesek aszimptotái az

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hiperbolának.

458.

Legyen $p_k(x)$ k -adfoku, $q_n(x)$ n -adfoku polinom. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az $y = \frac{p_k(x)}{q_n(x)}$ görbének

- a) az x tengely,
- b) valamely, az x tengellyel párhuzamos egyenes,
- c) valamely egyik tengellyel sem párhuzamos egyenes,
- d) egy y -nal párhuzamos tengelyű parabola,
- e) valamely legalább harmadfoku polinom grafikonja aszimptotája legyen?

* 459.

Legyen c adott valós szám, $p_k(x)$ és $q_n(x)$ pedig polinomok. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az $x = c$ egyenes aszimptotája legyen az

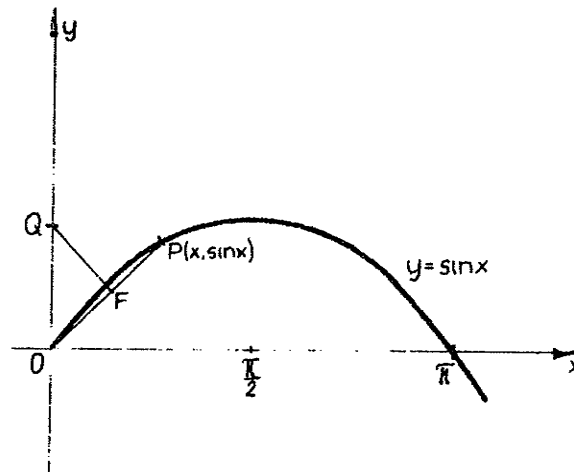
$$y = \frac{p_k(x)}{q_n(x)}$$

görbének?

460.

A rögzített A pontot akkor nevezzük a mozgó (változó helyzetű) P pont határhelyzetének, ha a PA távolság - valamely más változótól függően - 0 -hoz tart.

Legyen O az origó, P az $y = \sin x$ görbe tetszőleges pontja, Q pedig az OP szakasz merőleges felezőjének az y tengellyel való metszéspontja. Mi lesz a Q pont határhelyzete, ha P (a sinusgörbén mozogva) az origóba tart?



460. ábra

* 461.

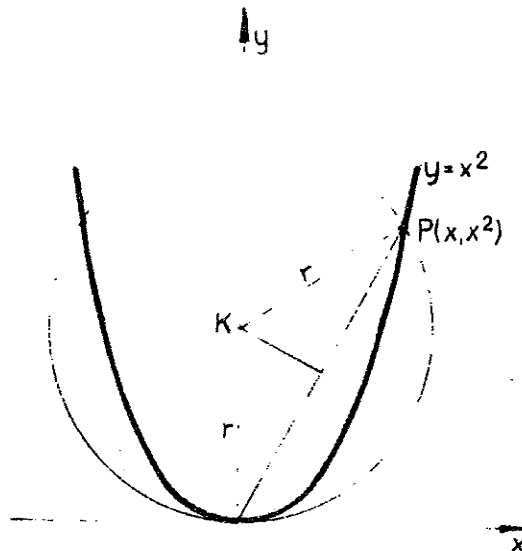
Helyettesítsük az előző feladatban a sinusgörbét az $y = x^3$ görbével. Lesz-e a Q pontnak határhelyzete?

462.

Kiterjeszthető-e a "határhelyzet" értelmezése körre is?

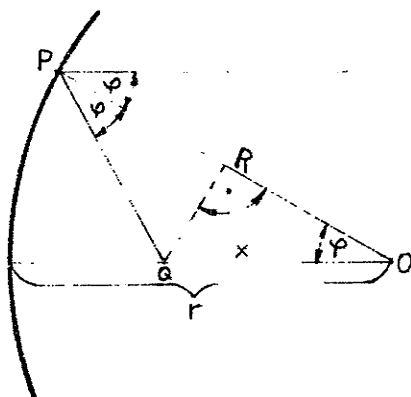
463.

Tekintsük azt a kört, amely az origóban érinti az x tengelyt, és áthalad az $y = x^2$ parabola x abszcisszájú pontján. Mi lesz e kör határhelyzete, ha $x \rightarrow 0$?



463. ábra

Adva van egy ellipszis. Tekintsük azt a kört, amely a nagytengely egyik végpontjában érinti, két másik pontban pedig metszi az ellipszist. Mi lesz e kör határhelyezete, ha a két metszéspont az érintési pont felé tart? (A 46. ábrán a P , Q_1 , Q_2 pontokon átmenő, K középpontú kör.)



Gömbtükrörnek a gömbstüveg alaku tükröt, főtengelyének pedig a gömbstüveg középpontjához vezető gömbsugarat nevezzük. A főtengellyel párhuzamosan haladó fénysugár homorú gömbtükrön való visszaverődés után a Q pontban metszi a főtengelyt. Mi lesz a Q pont határhelyzete, ha a beeső sugár minden határon túl közeledik a főtengelyhez?

465. ábra

466-469. Állapítsuk meg, konvergensek-e az alábbi sorozatok, s a konvergenseknek adjuk meg a határértékét is:

467. $a_n = \cos \left(2n\pi + \frac{1}{n} \right)$

* 469. $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\right)$

470.

Bizonyítsuk be, hogy a

$$\frac{\sin a}{\cos \frac{a}{2}}, \quad \frac{\sin a}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4}},$$

$$\frac{\sin a}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4} \cos \frac{a}{8}}, \dots, \frac{\sin a}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4} \cos \frac{a}{8} \dots \cos \frac{a}{2^n}}, \dots$$

sorozat a-hoz tart.

471-496.

Tekintsük át az alábbi függvények egész értelmezési tartományát - hozzátéve ehhez azokat a torlódási pontjait is, amelyek nem tartoznak bele -, és mondjuk meg, hol folytonosak a függvények. Ahol a függvény nem folytonos, azt is mondjuk meg, milyen szakadása van: megszüntethető (M), elsőfajú lényeges (I), vagy másodfajú (II) - és azt is, hogy jobbról vagy balról folytonos-e a függvény (J, ill. B).

- | | | | |
|--------|--|-----------|---|
| * 471. | $ 7x^3 - 8x^2 + x - 2 $ | 472. | $ \operatorname{sg} x $ |
| 473. | $\operatorname{sg}(x - 2)$ | 474. | $\frac{1}{1 - \operatorname{sg} x}$ |
| 475. | $[x]$ | 476. | $\{x\}$ |
| 477. | $[-x]$ | 478. | $\left[\frac{1}{x}\right]$ |
| 479. | $\frac{1}{[x]}$ | 480. | $x^{\operatorname{sg} x}$ |
| 481. | $(\operatorname{sg} x)^{\operatorname{sg} x}$ | 482. | $x^{[x]}$ |
| 483. | $\frac{p(x)}{q(x)}$, ahol $p(x)$ és $q(x)$ | polinomok | |
| 484. | $\frac{1}{\sin x}$ | 485. | a) $\operatorname{tg} x$ b) $\operatorname{cotg} x$ |
| 486. | a) $\frac{x}{\sin x}$ b) $\frac{x}{\operatorname{tg} x}$ | 487. | a) $\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$ b) $\frac{\sin \frac{x}{5}}{\sin \frac{x}{7}}$ |
| 488. | $\cos \frac{1}{x}$ | 489. | $x \sin \frac{1}{x}$ |
| 490. | a) $\operatorname{sg} \cos x$ b) $\operatorname{sg} \operatorname{tg} x$ | 491. | $x [1 - \operatorname{sg}(\sin \sqrt{x})]$ |
| 492. | $1 - \operatorname{sg}(\sin^2 \sqrt{x})$ | | |

493. $\operatorname{sg} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{sg} \sin x - |\sin x|$

494. Dirichlet-függvény

495. Riemann-függvény (l. 228/b. feladat)

$$496. \quad T(x) = \begin{cases} q, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{T}, q \in \mathbb{T}, p \text{ és } q \text{ relatív primek} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

497. Igaz-e, hogy ha az $f(x)$ függvénynek egy helyen szakadása van, akkor ugyanott $f(x)^2$ is szakadós?

498. Igaz-e, hogy páratlan folytonos függvény grafikonja mindig áthalad az origón?

499. Igaz-e az előző feladat állítása akkor is, ha a függvény csak a 0 helyen folytonos?

500. Bizonyítsuk be, hogy ha $p(x)$ polinomnak $x = a$ páratlan multiplicitású gyöke, akkor az a helynek van olyan K_a környezete, amelyben $p(x)$ az a hely egyik oldalán csak negatív, másik oldalán csak pozitív értékeket vesz fel, tehát amelyben bármely x_1, x_2 -re $\operatorname{sg} p(x_1) p(x_2) = \operatorname{sg} (x_1 - a) (x_2 - a)$.

* 501. Bizonyítsuk be, hogy ha a $p(x)$ polinomnak $x = a$ páros multiplicitású gyöke, akkor $p(x)$ -nek az a helyen szélsőértéke van.

502. Bizonyítsuk be, hogy két egymás utáni 0-hely között bármely polinomnak van lokális szélsőértéke.

503-506. Vázoljuk fel az alábbi polinomok grafikonjának jellemző alakját:

503. $x^4 - x^2 - 2x$

* 504. $x^4 - 5x^2 + 4x$

505. $x^5 + 3x^2 - 4$

506. $x^4 - 5x^2 + 9x^2 + 38x - 40$

* 507. Hogyan vihető át a) az 500. b) az 501. c) az 502. feladat állítása racionális törtfüggvényekre?

* 508. Bizonyítsuk be, hogy ha a $p(x), q(x)$ polinomoknak nincs közös gyöke, és $q(a) = 0$, tehát

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \infty$$

akkor

$$\operatorname{sg} \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{p(x)}{q(x)} = \operatorname{sg} \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{p(x)}{q(x)},$$

ha $x = a$ páros multiplicitású gyöke $q(x)$ -nek, és

$$\operatorname{sg} \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = - \operatorname{sg} \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)},$$

ha páratlan multiplicitású. (Páros, ill. páratlan rendű "pólus".)

509. Az $x = a$ helyet az $f(x)$ függvény n -edrendű pólusának nevezzük, ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot (x - a)^n = A$$

0-tól különböző véges szám.

Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ -nek az $x = a$ helyen páros rendű pólusa van, akkor

$$\operatorname{sg} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \operatorname{sg} \lim_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

ha pedig páratlan rendű, akkor

$$\operatorname{sg} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = - \operatorname{sg} \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

feltéve, hogy az $f(x) \cdot (x - a)^n$ függvény - ahol n a pólus rendszám - folytonos.

510-515. Vázzuk fel az alábbi racionális törtfüggvény-ek grafikonjait, jellemző alakját

510. $y = \frac{x^2 + 9}{x}$

* 511. $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

* 512. $y = \frac{6x}{x^3 + 1}$

513. $y = -\frac{(x-1)^2}{x^3}$

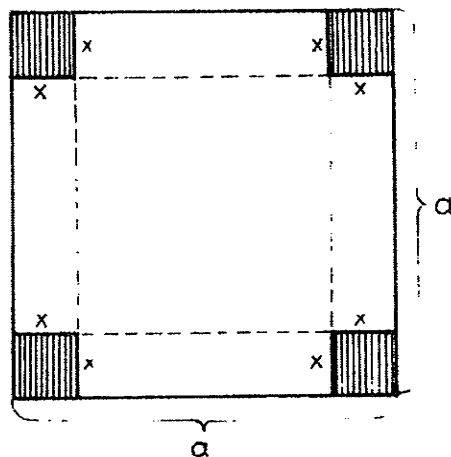
* 514. $y = \frac{x^4 - 1}{(x+1)^2}$

515. $y = \frac{x^4 + x}{x(x-1)^2}$

516. Bizonyítsuk be, hogy minden olyan $2k$ -adfokú (tehát páros fokszámú) polinomnak, amelyben a_{2k} és a_0 ellenkező előjelű, van legalább két valós gyöke.

517. Egy két végén behajlított hosszú vörösrézrud egyik vége olvadási jégbe (0°C), másik vége forrásban levő vízbe (100°C) merül. Biztosan található-e rajta olyan hely, amelyet ujjunkkal megérintve sem hideget, sem meleget nem érzünk? (A környezettel való hőcserélődést, valamint ujjunk szélességét elhanyagolhatónak tekintjük.)

518. Igaz-e a Bolzano-tétel olyan megfordítása, hogy ha egy f függvény egy $[a, b]$ zárt intervallumban mindenütt értelmezve van, és felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közti értéket, akkor folytonos?
519. Bizonyítsuk be a Bolzano-tétel alábbi megfordítását:
Ha egy f függvény egy $[a, b]$ zárt intervallumban mindenütt értelmezve van, monoton és felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közti értéket, akkor folytonos.
520. Adva van egy négyzet alakú lemez. Ebből egyenlő saroknégyzetek levágásával és a keletkezett téglalap-"fülek" felhajtásával négyzetes oszlop alakú edényt készítünk. A feladat: akkorára méretezni a levágandó sarkokat, hogy az edény térfogata a lehető legnagyobb legyen.
Biztos, hogy ennek a feladatnak van megoldása?
521. Bizonyítsuk be, hogy az olyan peridoikus függvény, amely mindenütt értelmezve van és amelynek a $+\infty$ -ben van határértéke, mindenütt folytonos.



520. ábra

9. Implicit függvények

522-527. Hozzuk explicit alakra az alábbi implicit alakban megadott függvényeket:

522. $x^4 - y^2 = 0$

523. $x^4 - 3x^2 y^2 + y^4 = 0$

524. $\frac{2|y|}{1-|y|} = 1$

525. $y^{\lg x} = x + 1$

* 526. $y^{\lg x} = x + 2$

* 527. $y^{\lg y} = x$

528-532. Ábrázoljuk az alábbi implicit alakban megadott függvények grafikonját:

528. a) $\sin(xy) = 1$,

b) $\sin^2(x - y) = 1$,

c) $\sin x \cdot \sin y = 1$

529. a) $\lg(xy) = 1$,

b) $\lg^2(x - y) = 1$,

c) $\lg x \cdot \lg y = 1$

* 530. a) $|x| + |y| = 1$,

b) $|x| - |y| = 1$,

c) $-|x| + |y| = 1$,

d) $-|x| \cdot |y| = 1$

531. $(x^2 - y)(x + y - 3)(x^2 + y^2 - 4) = 0$

532. a) $[xy] = 1$,

b) $\{xy\} = \frac{1}{2}$

* 533. Az $f(x, y) = 0$ implicit függvény görbéje adott. Hogyan kapható meg ebből

a) az $f(x - a, y - b) \approx 0$,

b) az $f(ax, by) = 0$,

c) az $f(ax + b, cy + d) = 0$

implicit függvény grafikonja?

* 534. Ábrázoljuk az alábbi implicit alakban megadott függvények grafikonját:

a) $|x - 3| + |y + 2| = 1$,

b) $|2x| + |3y| = 1$,

$$c) \left| \frac{x}{2} \right| + \left| \frac{y}{3} \right| = 1,$$

$$d) |2x - 3| + |3y + 2| = 1.$$

• 535.

Adva van egy e egyenes, tőle adott a távolságban egy A pont, valamint egy pozitív k szám. Mi a mértani helye az (e, A) síkban azoknak a pontoknak, amelyek A -tól k -szor akkora távolságra vannak, mint e -től?

10. Inverz függvények

536-548. Döntsük el az alábbi függvényekről, van-e inverzük, vagy valamilyen leszűkítésüknek van-e; ha igen, nevezzük meg ezt a leszűkítést, és írjuk fel az inverz függvényt:

536. x 537. $ax + b$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$)

538. $x^2 - 6x + 8$

539. $ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

* 540. $\frac{1}{x}$ 541. $\frac{x-2}{2x+3}$

542. $\frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

* 543. $\operatorname{sg} x$ 544. Δ

545. $\{x\}$ 546. $[x]$

* 547. $\begin{cases} x, & \text{ha } x \leq 0, \\ x+1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$

548. Riemann-függvény (l. 228/b feladat).

* 549. Ha a Riemann-függvényt leszűkítjük a racionális számok halmazára: $f(x) = \frac{1}{q}$, ha x racionális, $x = \frac{p}{q}$, p és q egész, legnagyobb közös osztójuk 1 - akkor már található olyan intervallum, amelyben van inverze?

* 550. Mi a feltétele annak, hogy az

a) az $ax + b$ b) az $\frac{ax+b}{cx+d}$

függvény saját magának inverze legyen?

* 551. Vázzuk fel az

$$\frac{1 - \sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{1+x}}$$

függvény grafikonját.

552. a) Hogyan állíthatunk elő olyan függvényt, amely képlettel nem adható meg, és saját magának inverze?
b) Hány ilyen van?
553. Igaz-e,
a) hogy páros függvénynek az inverze is páros,
b) hogy páratlan függvénynek az inverze is páratlan?

11. Arcus-függvények

554. Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

- a) $\arcsin 0,9$, b) $\arcsin \frac{2}{3}$, c) $\arcsin (-0,125)$,
 d) $\arctg 2$, e) $\operatorname{arccotg} \frac{2}{3}$.

555. Határozzuk meg az alábbi függvényértékeket:

- a) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$,
 b) $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$,
 c) $\arctg \sqrt{3}$,
 d) $\operatorname{arccotg} (-\sqrt{3})$.

556. Fejezzük ki x -et az alábbi egyenletekből:

- a) $1 + \cos \frac{4x + 3}{2}$, b) $\arcsin \frac{3 - 2x}{5} = \frac{5}{4}$,
 c) $\arccos \sqrt{3 - x} = \frac{a}{b}$, d) $\sin \frac{x - 1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

557-559. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét

557. a) $\arcsin (2x + 3)$, d) $\arccos (bx + c) + d$
 b) $\arccos (ax + b)$, e) $\arctg (ax + b)$
 c) $\arcsin x + b$, f) $\arctg x + b$

(Mindenütt feltesszük, hogy $a \neq 0$, a d) esetben pedig még azt is, hogy $b \neq 0$.)

558. a) $\arcsin x^2$, * c) $\arctg \frac{x}{x - 1}$
 b) $\arccos \frac{1}{x}$

559. * a) $\arcsin x + \arcsin (x - 1)$
 b) $\arcsin x + \arcsin \frac{1}{x}$
 c) $\arccos x + \arccos \sqrt{x^2 - 2}$

560-562. Döntsük el az alábbi függvényekről, van-e inverzük, vagy valamilyen leszűkítésüknek van-e; ha igen, nevezzük meg ezt a leszűkítést, és írjuk fel az inverz függvényt:

560. a) $\sin(ax + b)$ c) $\arctg(ax + b)$
b) $a \cos x + b$ d) $a \arccos x + b$

(Mindenütt feltesszük, hogy $a > 0$.)

561. a) $\sin \frac{1}{x}$ b) $\arcsin x^2$

562. a) $x + \operatorname{tg} x$ c) $\arccos x - x$
b) $x + \sin x$

563. Hozzuk explicit alakra az alábbi implicit függvények közül azokat, amelyeket lehet:

- a) $\sin(2x + 3y) = a$ d) $\arctg(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{4}$

- b) $\arccos(ax + by) = c$ e) $\sin x + \sin y = 1$

- c) $\cos \frac{y+1}{x} = 1$ f) $x + y = \sin(x + y)$

* g) $\cos(x + y) = \cos(x - y) = \frac{1}{2}$

- * 564. Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) ellipszis tetszőleges P pontját összeko-

juk a nagy tengely A, B végpontjaival. Hogyan függ a $\varphi = \angle APB$ a P pont x abszcisszájától?

565. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < x \leq 1$, akkor $\arctg x < x < \arcsin x$.

566. Bontsuk fel a zárójelet az alábbi kifejezésekben.

- a) $\arcsin(-x)$ c) $\arctg(-x)$
b) $\arccos(-x)$ d) $\operatorname{arccotg}(-x)$

567-573. Mi a legegyszerűbb alakjuk az alábbi kifejezéseknek.

567. a) $\cos \arcsin x$ 568. a) $\operatorname{tg} \operatorname{arccotg} x$
b) $\sin \arccos x$ b) $\operatorname{cotg} \operatorname{arctg} x$

569. a) $\operatorname{tg} \arcsin x$ c) $\operatorname{cotg} \arcsin x$
b) $\operatorname{tg} \arccos x$ d) $\operatorname{cotg} \arccos x$

570. a) $\sin \operatorname{arctg} x$ c) $\sin \operatorname{arccotg} x$
b) $\cos \operatorname{arctg} x$ d) $\cos \operatorname{arccotg} x$

571. a) $\arcsin \sin x$ c) $\operatorname{arctg} \operatorname{tg} x$
b) $\arccos \cos x$ d) $\operatorname{arccotg} \operatorname{cotg} x$

572. a) $\arcsin \cos x$ c) $\operatorname{arccotg} \operatorname{tg} x$
 b) $\arccos \sin x$ d) $\operatorname{arccotg} \operatorname{tg} x$
573. a) $\arcsin \operatorname{tg} x$ c) $\arcsin \operatorname{cotg} x$
 b) $\arccos \operatorname{tg} x$ d) $\arccos \operatorname{cotg} x$
574. Igaz-e, hogy

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{arc} \sin x}{\operatorname{arc} \cos x} ?$$

575. Hogyan fér össze az előbbi feladat megoldásával az, hogy

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0 = \frac{\operatorname{arc} \sin 0}{\operatorname{arc} \cos 0} ?$$

- * 576. I. Igazoljuk, hogy

a) $\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2}$, ha $0 \leq x \leq 1$.

b) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, ha $x > 0$.

II. Hogyan módosulnak ezek az azonosságok, ha x negatív?

- 577-578. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket:

577. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (3 - 2\sqrt{2}) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

578. $\operatorname{arc} \sin \frac{4}{5} - \operatorname{arc} \sin \frac{1}{13} + \operatorname{arc} \sin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

- * 579. Igazoljuk, hogy

a) $\sin \frac{\operatorname{arc} \cos x}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$

b) $\operatorname{tg} \frac{\operatorname{arc} \cos x}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

- 580-586. Vázoljuk fel az alábbi függvények grafikonját.

* 580. $\operatorname{arc} \cos \sqrt{1-x^2}$

* 581. $\operatorname{arc} \operatorname{cotg} \frac{1}{x}$

* 582. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+x}{1-x}$

* 583. $\operatorname{arc} \cos (2x^2 - 1)$

* 584. $\operatorname{arc} \cos \frac{1-x^2}{1+x^2}$

* 585. $\operatorname{arc} \sin \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

* 586. $\operatorname{arc} \cos \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

* 587. Igazak-e az alábbi képletek:

a) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy}$,

b) $\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin y = \operatorname{arc} \sin (x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2})$?

588. Fejezzük ki x -et az alábbi egyenletekből:

a) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \sin a + \operatorname{arc} \cos b$,

b) $\operatorname{arc} \cos x = \operatorname{arc} \cos a + \operatorname{arc} \operatorname{tg} b$,

c) $\operatorname{arc} \sin x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} a - \operatorname{arc} \cos b$.

589. Igaz-e, hogy az alábbi függvények közül bármelyik kettőnek a különbsége állandó?

$f_1(x) = 2 \operatorname{arc} \sin \sqrt{x}$,

$f_2(x) = -2 \operatorname{arc} \sin \sqrt{1-x}$,

$f_3(x) = \operatorname{arc} \sin (2x-1)$,

$f_4(x) = 2 \operatorname{arc} \cos \sqrt{1-x}$,

$f_5(x) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{1-x}}$,

$f_6(x) = -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1-x}{x}}$

$f_7(x) = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$,

$f_8(x) = -4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$.

590-594. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

* 590. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (x+2) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x+1) = \frac{\pi}{4}$

591. $\operatorname{arc} \sin \frac{1}{3\sqrt{x}} + \operatorname{arc} \sin \sqrt{1-x} = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{3}$

592. $2 \operatorname{arc} \sin x = \operatorname{arc} \cos 2x$

593. $2 \operatorname{arc} \cos x = \operatorname{arc} \cos x = \operatorname{arc} \sin (2x \sqrt{1-x^2})$

594. $\operatorname{arc} \cos x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$

595. Ismeretes, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) = 0$$

(426. feladat). A 0 helynek mely környezetében közelíti meg az

$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ függvény ezt a határértéket ε -nál kisebb hibával?

596. Ismeretes, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} = 1$$

(440/a feladat). A ∞ -nek mely környezetében közelíti meg az

$\frac{1}{\cos \frac{1}{x}}$ függvény ezt a határértéket ε -nál kisebb hibával?

597. Ismeretes, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} = +\infty$$

(440/b feladat). Mely x -ekre áll fenn, hogy $\frac{1}{\sin \frac{1}{x}} > M$?

598-611. Számítsuk ki az alábbi határértékek közül azokat, amelyek léteznek:

598. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x}$

599. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arc} \sin x}$

* 600. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin ax}{x} \quad (a \in \mathbb{R})$

601. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x}$

602. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin ax}{\operatorname{arc} \sin bx} \quad (a, b \in \mathbb{R}, \quad ab \neq 0)$

* 603. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\operatorname{arc} \sin x}$

604. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{arc} \sin x}{2x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$

605. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{arc} \sin (x+2)}{x^2 + 2x}$

606. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x}$

* 607. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 5x}$

608. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} ax}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} bx} \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$$609. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$610. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \arctg \frac{x}{x - 1}$$

$$611. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \arctg \frac{x^2}{(x - 1)^2}$$

12. Exponenciális és logaritmus-függvények

612-615. Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

612. a) $10^{\lg 7}$, b) $e^{\ln 2}$, c) $e^{-\ln 3}$, d) $e^{-5 \ln 6}$,
e) $3^{\log 5}$, f) $8^{\log 9}$

613. a) $\lg \sqrt{10}$, b) $\lg (100 \sqrt[3]{10})$, c) $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$

614. a) $\ln \frac{1}{2}$, b) $\ln 27,17$, c) $\ln \frac{1}{3\pi}$

* 615. a) $5^{\log 2}$, b) $8^{\log 5}$, c) $5^{\log 34,6}$, d) $\frac{1}{e^{\log \frac{1}{11,9}}}$

616. $a^n \log a^k$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

* 617. a) $4^{\log 8}$, b) $8^{\log 4}$, c) $16^{\log 32}$, d) $16^{\log \frac{1}{32}}$,
e) $\frac{1}{16} \log 32$, f) $\frac{1}{16} \log \frac{1}{32}$

618. Adva van $\lg 2 \approx 0,3010$ és $\lg 3 \approx 0,4771$. Milyen számok 10 alapú logaritmusát tudjuk ezek ismeretében táblázat (logar-léc) nélkül meghatározni?

619. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

a) x^x , b) x^{-x} , c) x^{x+1}

620-626. Határozzuk meg az alábbi $f(x)$ függvények értelmezési tartományát és értékkészletét:

* 620. $x^x \log a$ ($a > 0$)

621. $x^x \log x$

622. a) $\ln \sin x$, b) $\ln \cos x$, c) $\ln \operatorname{tg} x$

623. a) $|\ln x|$, b) $\ln |x|$

624. a) $\text{Arc sin } \ln x$, b) $\text{Arc cos } \ln x$

625. a) $\ln \text{Arc sin } x$, b) $\ln \text{Arc cos } x$

626. a) $\text{Arc sin } e^x$, b) $\text{Arc cos } e^x$

627. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek párosak, melyek páratlanok:

(1) $3^x + \frac{1}{3^x}$, (2) $3^x - \frac{1}{3^x}$, (3) $\frac{2^x - 1}{2^x + 1}$,

(4) $\ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, (5) $\ln(x^2 + 1)$, (6) $\ln(x^3 - x)$,

(7) e^{x^2+1} , (8) e^{x^3-x} , (9) $\ln \sin x$,

(10) $\ln \cos x$, (11) $\ln \text{Arc sin } x$, (12) $\ln \text{Arc cos } x$,

(13) $e^{\text{Arc sin } x}$, (14) $e^{\text{Arc cos } x}$.

628. Bizonyítsuk be, hogy ha az $y = \ln x$ görbét az x tengely mentén k -szorosára nyújtjuk, ugyanazt a görbét kapjuk, mint ha az y tengely mentén egy bizonyos a számmal önmagával párhuzamosan eltoljuk. Mennyivel egyenlő a ?

629-637. Adva van az $y = e^x$ és az $y = \ln x$ görbe. Hogyan kaphatjuk meg ezekből az alábbi görbéket:

629. $y = 2^x$

630. $y = (e^x)^3$

631. $y = \frac{3}{4} \cdot 5^x$

* 632. $y = \ln(ex)^2$

* 633. $y = {}^3\log x$

* 634. $y = {}^3\log \frac{x^4}{27}$

* 635. $y = {}^2\log \frac{1}{10x^5}$

636. $y = \ln \sqrt{x^2 - 1}$

* 637. $y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

638. Igazoljuk, hogy $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ és $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ ellentett számok.

639. Legyen

$$f(x) = 2^{x-1} + 2^{-x-1},$$

$$g(x) = 2^{x-1} - 2^{-x-1}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ebben az esetben

a) $g(2x) = 2 f(x) g(x),$

b) $f(x)^2 - g(x)^2 = 1,$

c) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2) + g(x_1) g(x_2).$

* 640. Bizonyítsuk be, hogy

$${}_a \log b \cdot {}_b \log a = 1.$$

* 641 Bizonyítsuk be, hogy

$${}_a^k \log b = \frac{{}_a \log b}{k}.$$

* 642. Bizonyítsuk be, hogy a logaritmus értéke nem változik, ha
(1) mind az alapot, mind a hatványt ugyanannyiadjik hatványra emeljük (bővítés),
(2) mind az alaphból, mind a hatványból ugyanannyiadjik gyököt vonunk (egyszerűsítés).

Vagyis:

$$(1) {}_a \log b = {}_a^n \log b^n, \quad (2) {}_a \log b = \sqrt[n]{a} \log \sqrt[n]{b}.$$

* 643. Hozzuk legegyszerűbb alakjukra az alábbi kifejezéseket:

a) ${}_{16} \log 81,$ b) $\sqrt[2]{2} \log \frac{1}{\sqrt{3}},$ c) $e^3 \log 27 - \ln \frac{1}{3}.$

644-647. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat:

* 644. $\frac{1}{a} \log b = - {}_a \log b$

645. $\frac{{}_a \log x}{ab \log x} = 1 + {}_a \log b$

$$* \quad 646. \quad \frac{a}{b} \log x = \frac{a \log x \cdot b \log x}{b \log x - a \log x}$$

$$647. \quad a_1 a_2 \dots a_n \log x = \frac{1}{\frac{1}{a_1 \log x} + \frac{1}{a_2 \log x} + \dots + \frac{1}{a_n \log x}}$$

648. Egyenértékű-e az alábbi két egyenlet ($P(x)$, $Q(x)$ és $R(x)$ itt tetszőleges függvények):

a) $P(x) = Q(x)$ és $\ln P(x) = \ln Q(x)$,

b) $\ln P(x) + \ln Q(x) = R(x)$ és $\ln P(x) Q(x) = R(x)$,

c) $\ln P(x)^n = Q(x)$ és $n \ln P(x) = Q(x)$ ($n \in \mathbb{T}$)

649-655. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

649. a) $\ln x = 3$, b) $\ln x = \pi$, c) $\ln x = e$, d) ${}^3\log x = 3,24$

650. $a^{b^x} = c$ ($a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$)

* 651. ${}^4\log(x+1) + {}^2\log(x+1) = 3$

* 652. ${}^3\log x + \sqrt{3}\log x + \frac{1}{3}\log x = 6$

* 653. $a^{\log x} \cdot b^{\log x} \cdot c^{\log x} = a^{\log x} \cdot b^{\log x} \cdot (1 + c^{\log x})$
 $(a, b, c \in (0, 1) \cup (1, +\infty))$,

* 654. $\cos^x \log \sin x + \sin^x \log \cos x = 2$

* 655. $x^{x+7} = x^{x^2+1}$

656. Hogyan oldhatók meg az

$$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$$

alakú egyenletek? ($f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ adott függvények)

657. Negatív a és tényleg milyen számok tartoznak bele az a^x függvény értelmezési tartományába?

658. Konvergensek-e az alábbi sorozatok

a) $e^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - 1)}$, $e^{\operatorname{tg}(3\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3})}$, $e^{\operatorname{tg}(5\frac{\pi}{2} - \frac{1}{5})}$, ...
 $\dots, e^{\operatorname{tg}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n+1}\right]}, \dots$

$$\begin{aligned} & \text{b) } e^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)}, \quad e^{\operatorname{tg}\left(3\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\right)}, \quad e^{\operatorname{tg}\left(5\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\right)}, \dots \\ & \dots, e^{\operatorname{tg}\left[\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2n+1}\right]}, \dots \end{aligned}$$

659-683. Számítsuk ki az alábbi határértékek közül azokat, amelyek léteznek:

$$659. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{a^x + 1}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{a^x + 1} \quad (a > 0).$$

$$660. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^{x^2}}$$

$$661. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

$$662. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

$$663. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\ln \sin x - \ln x)$$

$$664. \quad \lim_{x \rightarrow \pi} (\ln \sin 9x - \ln \sin 5x)$$

$$665. \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$666. \quad \lim_{x \rightarrow \pi} e^{\cotg x}$$

$$667. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$$

$$668. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

$$669. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1)$$

$$* \quad 670. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$671. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\boxed{672.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$673. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\boxed{674.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$* \quad 675. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x}}$$

$$\boxed{676.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x-5}$$

$$\boxed{677.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x}}$$

$$678. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 + \sin x}$$

$$\boxed{679.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 2}\right)^x$$

$$\boxed{680.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx)}{x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\boxed{681.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$$

$$* \quad 682. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0)$$

$$\boxed{683.} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

13. Hiperbolikus és area-függvények

684-686. Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

684. a) $\operatorname{sh} 2$, b) $\operatorname{ch} 3$, c) $\operatorname{th} 1$, d) $\operatorname{cth} 1$,
 e) $\operatorname{sh} \ln 2$, f) $\operatorname{ch} \ln 2$, g) $\operatorname{th} \ln 3$, h) $\operatorname{cth} e$,
 685. a) $\operatorname{ar sh} 2$, b) $\operatorname{ar ch} 1$, c) $\operatorname{ar sh} e^2$, d) $\operatorname{ar ch} \frac{1}{e}$,
 e) $\operatorname{ar sh} \frac{1}{e}$,
 686. a) $\operatorname{ar th} \frac{1}{2}$, b) $\operatorname{ar th} 2$, c) $\operatorname{ar cth} \frac{1}{2}$, d) $\operatorname{ar cth} 2$,
 e) $\operatorname{ar th} \frac{1}{e}$, f) $\operatorname{ar cth} \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}$.

687-692. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét (mindentűt $a, b, c \in \mathbb{R}$):

687. a) $\operatorname{sh} (2x + 3)$ b) $\operatorname{sh} (ax + b)$
 c) $\operatorname{ch} (ax + b)$ d) $\operatorname{th} 3x$
 e) $3 \operatorname{th} x$ f) $a \operatorname{th} (bx + c)$
 g) $a \operatorname{cth} (bx + c)$
 688. a) $\operatorname{ar sh} (ax + b)$ b) $\operatorname{ar ch} (ax + b)$
 c) $\operatorname{ar th} (ax + b)$ d) $\operatorname{ar cth} (ax + b)$
 689. a) $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$ b) $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ * c) $\frac{1}{\operatorname{th} x}$
 * d) $\frac{1}{\operatorname{cth} x}$
 690. a) $\operatorname{sh} \frac{1}{x}$, b) $\operatorname{ch} \frac{1}{x}$, c) $\operatorname{th} \frac{1}{x}$, d) $\operatorname{cth} \frac{1}{x}$
 691. a) $\frac{1}{\operatorname{ar sh} x}$, b) $\frac{1}{\operatorname{ar ch} x}$, c) $\frac{1}{\operatorname{ar th} x}$, d) $\frac{1}{\operatorname{ar cth} x}$.

692. a) $\operatorname{ar sh} \frac{1}{x}$, b) $\operatorname{ar ch} \frac{1}{x}$, c) $\operatorname{ar th} \frac{1}{x}$, d) $\operatorname{ar cth} \frac{1}{x}$.

693. Soroljuk fel a 687-692. feladatokban szereplő függvények közül (I) a párosakat, (II) a páratlanokat. Amelyek csak a benne szereplő betűk (a, b, c) bizonyos értékei mellett párosak vagy páratlanok, ott ezt is mondjuk meg.

694-699. Döntsük el az alábbi függvényekről, hogy van-e inverzük, vagy valamilyen leszűkítésüknek van-e; ha igen, nevezzük meg ezt a leszűkítést, és írjuk fel az inverz függvényt:

694. a) $2 \operatorname{sh} x + 3$, b) $\operatorname{sh} (2x + 3)$, c) $\operatorname{sh} \frac{1}{x}$

695. a) $2 \operatorname{ch} x - 3$, b) $\operatorname{ch} (2x - 3)$

* c) $\operatorname{ch} (3 - 2x)$, d) $\operatorname{ch} \frac{1}{x}$,

696. a) $\operatorname{sh} x^2$, b) $\operatorname{ch} x^2$, c) $\operatorname{sh}^2 x$, d) $\operatorname{ch}^2 x$

697. a) $\operatorname{ar sh} (2x + 3)$, b) $\operatorname{ar ch} (2x - 3)$, c) $\operatorname{ar ch} (3 - 2x)$

698. a) $\operatorname{th} 4x$, b) $\operatorname{cth} \frac{x}{3}$, c) $\operatorname{arth} (2x - 3)$, d) $\operatorname{ar cth} \frac{1}{x}$

* 699. a) $x + \operatorname{sh} x$, b) $2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{th} x$, c) $\operatorname{sh} x - \operatorname{th} x$

700-701. Hozzuk legegyszerűbb alakjukra az alábbi kifejezéseket:

700. a) $\operatorname{sh} \ln x$, b) $\operatorname{ch} \ln x$, c) $\operatorname{th} \ln x$, d) $\operatorname{cth} \ln x$

701. a) $e^{\operatorname{ar sh} x}$, b) $e^{\operatorname{ar ch} x}$, c) $e^{\operatorname{ar th} x}$, d) $e^{\operatorname{ar cth} x}$

702-703. Írjuk fel az alábbi trigonometrikus azonosságok hiperbolikus megfelelőit:

* 702. a) $\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

b) $\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

c) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

d) $\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

703. a) $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

b) $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

* 704. Fejezzük ki $\operatorname{th} 2x$ -et $\operatorname{th} x$ -szel.

* 705. Fejezzük ki a) $\operatorname{sh} x$ -et, b) $\operatorname{ch} x$ -et $\operatorname{th} x$ -szel.

706. Fejezzük ki a) $\operatorname{sh} x$ -et
b) $\operatorname{ch} x$ -et $\operatorname{th} \frac{x}{2}$ -lel.

707. Fejezzük ki
a) $\operatorname{sh} 3x$ -et $\operatorname{sh} x$ -szel
b) $\operatorname{ch} 4x$ -et $\operatorname{ch} x$ -szel.

* 708. Vázoljuk fel az alábbi függvények grafikonját:

a) $e^{x-1} - \frac{1}{e^{x+1}}$

b) $\frac{2^x - 1}{2^x + 1}$

c) $\operatorname{ch}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 4x$

709-714. Mi a legegyszerűbb alakjuk az alábbi kifejezéseknek:

709. a) $\operatorname{ch} \operatorname{arsh} x$
b) $\operatorname{sh} \operatorname{arch} x$

c) $\operatorname{th} \operatorname{arch} x$
d) $\operatorname{cth} \operatorname{arch} x$

710. a) $\operatorname{th} \operatorname{arsh} x$
b) $\operatorname{th} \operatorname{arch} x$

c) $\operatorname{cth} \operatorname{arsh} x$
d) $\operatorname{cth} \operatorname{arch} x$

711. a) $\operatorname{sh} \operatorname{arth} x$
b) $\operatorname{ch} \operatorname{arth} x$

c) $\operatorname{sh} \operatorname{arch} x$
d) $\operatorname{ch} \operatorname{arch} x$

712. a) $\operatorname{arsh} \operatorname{sh} x$
b) $\operatorname{arch} \operatorname{ch} x$

c) $\operatorname{arth} \operatorname{th} x$
d) $\operatorname{arch} \operatorname{cth} x$

713. a) $\operatorname{arsh} \operatorname{ch} x$
b) $\operatorname{arch} \operatorname{sh} x$

c) $\operatorname{arth} \operatorname{cth} x$
d) $\operatorname{arch} \operatorname{th} x$

714. a) $\operatorname{arsh} \operatorname{th} x$
b) $\operatorname{arch} \operatorname{th} x$

c) $\operatorname{arsh} \operatorname{cth} x$
d) $\operatorname{arch} \operatorname{cth} x$

(V. ö. az 567-573. feladattal.)

715. Írjuk fel az alábbi trigonometrikus - arcusos képletek hiperbolikus - areás megfelelőit:

$$a) \sin \frac{\arccos x}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

$$b) \operatorname{tg} \frac{\arccos x}{x} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

(L. 579. feladat.)

716-720. Vázoljuk fel az alábbi függvények grafikonját:

$$\boxed{716.} \quad a) \operatorname{ar sh} \sqrt{x^2 - 1}, \quad b) \operatorname{ar ch} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$717. \quad \operatorname{ar th} \frac{1}{x}$$

$$\boxed{718.} \quad a) \operatorname{ar sh} (2x \sqrt{x^2 + 1}) \quad b) \operatorname{ar ch} (2x^2 - 1)$$

$$\boxed{719.} \quad \operatorname{ar th} \frac{5x - 3}{5 - 3x}$$

$$* \quad 720. \quad a) \operatorname{ar sh} \frac{2x}{1-x^2}, \quad b) \operatorname{ar ch} \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

721-728. Oldjuk meg (x-re) az alábbi egyenleteket:

$$* \quad 721. \quad a) \operatorname{ar sh} x = \operatorname{ar sh} a + \operatorname{ar sh} b$$

$$b) \operatorname{ar ch} x = \operatorname{ar ch} a + \operatorname{ar ch} b$$

$$722. \quad a) \operatorname{ar sh} x = \operatorname{ar sh} a + \operatorname{ar ch} b$$

$$b) \operatorname{ar ch} x = \operatorname{ar sh} a + \operatorname{ar ch} b$$

$$\boxed{723.} \quad a) \operatorname{ar th} x = \operatorname{ar th} a + \operatorname{ar th} b$$

$$b) \operatorname{ar cth} x = \operatorname{ar cth} a + \operatorname{ar cth} b$$

$$c) \operatorname{ar th} x = \operatorname{ar th} a + \operatorname{ar th} b$$

$$724. \quad a) \operatorname{ar sh} x = \operatorname{ar th} a + \operatorname{ar ch} b$$

$$b) \operatorname{ar ch} x = \operatorname{ar cth} a + \operatorname{ar ch} b$$

$$\boxed{725.} \quad \operatorname{ar th} (x+2) - \operatorname{ar th} (x+1) = -\operatorname{ar cth} 5$$

$$\boxed{726.} \quad \operatorname{ar sh} x = \operatorname{ar ch} x$$

$$\boxed{727.} \quad \operatorname{ar sh} x = \operatorname{ar th} x$$

$$\boxed{728.} \quad \operatorname{ar sh} x = 2 \operatorname{ar ch} x.$$

Differenciálszámítás

14. Differenciáhányados és derivált. Formális deriválás

729-736. Határozzuk meg az alábbi függvények differenciáhányadosát a megadott x_0 helyen a differenciáhányados határértékeként.

729. $3x^2$ $x_0 = 5$

730. $2x^3$ $x_0 = \frac{1}{2}$

* 731. $\frac{1}{x}$ $x_0 = 2$

* 732. $\sqrt{x}$ $x_0 = 4$

733. $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ $x_0 = 3$

734. $\frac{x+1}{x-1}$ $x_0 = 0$

735. $2 \sin x$ $x_0 = \frac{\pi}{4}$

736. e^x $x_0 = -1$

737-740. Határozza meg az alábbi függvények differenciáhányadosát az értelmezési tartomány belsejében levő x_0 helyen a differenciáhányados határértékeként.

737. $2x - 3x^2$ 738. $\frac{2}{4x-3}$

739. $\sqrt{x^2 - 1}$ * 740. $\ln x$

741-743. Számítsa ki az alábbi függvényeknél a megadott x_0 helyen a $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ függvényérték megváltozást, valamint a megváltozás fő részét, ha $\Delta x = h = 0,1$. $\Delta f \approx df = ?$

* 741. $f(x) = 3x^2$ $x_0 = 5$

742. $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = 2$

$$743. \sqrt{x} \quad x_0 = 4$$

744. Differenciálható-e az $[x]$ függvény az $x = -1, -0,5, 0, 0,5$ és 1 helyeken? Ha nem differenciálható, létezik-e legalább a bal, vagy a jobb oldali differenciálhányadosa?

745-774. Deriválja az alábbi függvényeket:

$$745. 3x^5 - 7x^3 + 8 \quad 746. (x^3 + 1)^2$$

$$747. \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} \quad 748. \frac{4x + 3}{\sqrt{x + 5}}$$

$$749. 2 \sin x \cos x \quad 750. \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$751. (x^2 + 2) \sin \sqrt{x + 3}$$

$$752. \arcsin \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{1 - x}$$

$$753. \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \arcsin \operatorname{tg} 2x \quad 754. \operatorname{ctg}^2 x - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$755. \frac{e^x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{e^x} \quad 756. \frac{e^x - e^{-x}}{2} - (\sin^2 x) e^{x^2}$$

$$757. x^e + e^x + x^e e^x \quad 758. \ln^2 \operatorname{th} x + x \ln \operatorname{th}^4 x$$

$$759. \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \operatorname{sh}^3 x - 2 \operatorname{ch} x^3 + \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{th} x}$$

$$760. \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$761. 10^x + \lg x$$

$$762. \lg(x^3 e^{x^2}) + \lg \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1}}$$

$$763. \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad 764. \frac{\arcsin x}{\arccos x}$$

$$765. \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad 766. e^{4x} - 4^x$$

$$767. x^3 + 3 \sqrt{x} \quad 768. \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$$

$$769. e^{\ln \operatorname{ctg} x}$$

$$770. \ln x^5 - 7 \ln^5 x + \ln x \sqrt{x}$$

$$771. \ln \ln x + \sqrt[4]{\ln^3 \ln^6 \sqrt[5]{x}}$$

$$772. x^x$$

$$773. (\sin x)^{\cos x}$$

$$774. \frac{x^3 \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

775-777. Deriválja az alábbi azonosságok mindkét oldalát x szerint.

$$775. \sin(x + a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$$

$$776. 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$777. \operatorname{tg}(x + a) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} a}$$

778-787. Mutassa meg, hogy az alábbi függvények deriváltja

$$\frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} \text{ alakra hozható.}$$

$$778. 2 \operatorname{arc} \sin \sqrt{x}$$

$$779. -2 \operatorname{arc} \sin \sqrt{1-x}$$

$$780. \operatorname{arc} \sin(2x - 1)$$

$$781. 2 \operatorname{arc} \cos \sqrt{1-x}$$

$$782. 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$783. -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$784. 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{\frac{1}{1-x} - 1} \right)$$

$$785. -4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \right)$$

$$\operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$\operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$* 786. 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e$$

$$787. -4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e$$

788-793. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját!

Állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány mely pontjaiban differenciálhatók; ahol differenciálhatók, állítsuk elő a deriváltakat

$$788. x (\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} |x|)$$

$$* 789. x^2 (\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} |x-1|)$$

$$790. \frac{1}{2} (\sin x + |\sin x|)$$

$$791. (\operatorname{sgn} \sin x) \sin x$$

792. $[x]$

793. $[x] + \sqrt{[x] - x}$

794-798. Határozzuk meg az alábbi magasabbrendű deriváltakat:

794. $f(x) = \sin^2 x$ $f^{(V)}(x) = ?$

795. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ $f^{(4)}(x) = ?$

796. $f(x) = x a^x$ $f'''(x) = ?$

797. $f(x) = x e^x$ $f^{(n)}(x) = ?$

798. $f(x) = \ln(1 + x)$ $f^{(n)}(x) = ?$

799. Irjuk fel explicit alakban a

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n \{(x^2 - 1)^n\}}{dx^n}$$

polinomokat $n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetben.
(Legendre-polinom.)

800-803. Vizsgáljuk az alábbi függvényeket az $x = 0$ helyen folytonosság és deriválhatóság szempontjából! Mit mondhatunk az e helyhez tartozó magasabbrendű deriváltakról?

800. $f(x) = x^2(x + |x|)$ 801. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

802. $f(x) = \cos^2 \sqrt{x}$ 803. $f(x) = \sqrt{x^2(x+1)^2}$

804-808. Irjuk fel az alábbi egyenlettel definiált implicit függvény deriváltját.

804. $y^3 - 3xy + x^2 = 0$ 805. $\ln y + xy = 1$

806. $x^y = y^x$ 807. $y^n = \frac{x+y}{x-y}$

808. $y = 1 + x e^y$

809-811. Határozzuk meg az alábbi egyenlettel definiált implicit függvény második deriváltját.

809. $y = x + \arctg y$

810. $2 \ln (x + y) + \ln \frac{x}{y} = 0$

811. $x^2 - xy + y^2 = 3$

15. Geometriai és fizikai alkalmazások

812-814. Írjuk fel az alábbi függvények görbájének a megadott x_0 értékhez tartozó pontjában az érintőegyenes és a normális egyenletét.

812. x^3 $x_0 = 2$

813. $e^{\sqrt{x}}$ $x_0 = 2,25$

814. $\arcsin \sqrt{1 - x^2}$ $x_0 = \frac{1}{2}$

815-817. Írjuk fel a $P_0(x_0, y_0)$ pontbeli érintőegyenes egyenletét, ha a görbe egyenlete:

815. $y = \frac{1}{\ln^2(x - \frac{1}{x})}$ $x_0 = 2$

816. $y = x^{\ln x}$ $x_0 = e^2$

817. $y = \ln(\sin x^2)$ $x_0 = 0,8$

818-821. Írjuk fel a megadott pontbeli érintőegyenes egyenletét, ha a görbe egyenlete:

818. $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ $P_0(3, 3)$

819. $y = \sin(x + y)$ $P_0(\pi, 0)$

820. $x^2 + y^2 - \arctg \frac{y}{x} = 0$ $P_0(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

821. $x + \sqrt{y(2-y)} = \arccos(1-y) = 0$ $P_0(x_0, y_0)$

822-824. Határozzuk meg az alábbi egyenletű görbe azon pontjait, amelyekben a görbe érintője párhuzamos a megadott egyenletű egyenessel, majd írjuk fel e pontokban az érintőegyenes egyenletét.

822. $y = x^3 + 2$ $y = 3x - 1$

$$823. \quad y = \arctg \frac{1}{x-2} \qquad y = -\frac{1}{2}x + 5$$

$$824. \quad y = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{x^3} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{16}x + 1$$

825. Az $y = x^3 + 1$ egyenletű görbe mely pontjaiban lesz az érintő merőleges az $x + 12y - 5 = 0$ egyenletű egyenesre? Írjuk fel ezen pontokban az érintőegyenest.

826. Határozza meg a $2x^2 - 2xy + y^2 = 1$ egyenlettel megadott görbe azon pontjait, ahol érintője párhuzamos az y tengellyel!

827. Írjuk fel az $y = \ln x$ egyenletű görbe azon érintőegyenésének az egyenletét, amely áthalad az origón.

828. Számítsuk ki az $y = 3x^5$ egyenletű görbe tetszőleges P_0 pontjához húzható érintőjének az érintési ponttól az x tengellyel való A metszéspontjáig terjedő szakaszának a hosszát. Igazoljuk, hogy az AP szakasz vetületének a hossza úgy aránylik a P_0 pont abszcisszájához, mint $1 : 5$!

829. Igazoljuk, hogy az $y^2 = 4px$ egyenletű parabola tetszőleges $P_0(x_0, y_0)$ pontjához tartozó érintő egyenlete
- $$yy_0 = 2p(x + x_0)$$

830. Keressük meg az $y = 3 \sin^2 x + 2 \cos^4 x$ egyenletű görbe vízszintes érintőjű helyeit!

831. Hol lesz az $x^3 + xy^2 + 4y^2 - 4x^2 = 0$ egyenletű görbe érintője párhuzamos az y tengellyel?

- 832-835. Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott görbék metszési szögét.

$$832. \quad y^2 = 4x - x^2 \qquad x^2 + y^2 = 8$$

$$833. \quad 2x^2 + y^2 = 20 \qquad 4y^2 - x^2 = 8$$

$$834. \quad xy = 12 \qquad x^2 + y^2 = 25$$

$$835. \quad e^{-x} - e^x = y \qquad x = 0$$

836-838. Határozzuk meg az alábbiakban adott $s(t)$ ut-ido függvény által leírt pontmozgás sebességét és gyorsulását a megadott t_0 időpontban.

$$836. s(t) = \ln(t^2 + 1)$$

$$t_0 = 2$$

$$837. s(t) = 2t \sin t + 3 \cos t$$

$$t_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$838. s(t) = 3t^2 - 3t^2$$

$$t_0 = 0$$

16. Differenciál. Kis változások közelítő meghatározása

839-844. Irjuk fel az alábbi függvények differenciálját a megadott helyen:

$$839. \quad x^3 - \frac{1}{x^3} \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$840. \quad \sin 2x \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$841. \quad \operatorname{ar th} \frac{2}{3x^2} \quad x_0 = 1$$

$$842. \quad \operatorname{ar ch} \ln x^2 \quad x_0 = e$$

$$843. \quad \operatorname{arc sin} \frac{2}{\sqrt{3u}} \quad u_0 = 3$$

$$844. \quad \operatorname{arc tg} \left(1 - \frac{1}{t}\right) \quad t_0 = 3$$

845-848. Irjuk fel az alábbi függvények értékének Δf megváltozását (ha a független változó $x = x_0$ -ról $x = x_0 + h$ -ra változik)

$\Delta f = Ah + \tilde{E}(h)h$ alakban főrész és elenyésző rész összegeként és mutassuk meg hogy $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{E}(h) = 0$.

845. $f(x) = 3x^2 - 5$

846. $f(x) = x^3$

847. $f(x) = \frac{1}{x}$

* 848. $f(x) = \sqrt{x}$

849-853. Irjuk fel az f függvény differenciálját tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ helyen, ha g és h az $\mathbb{R}$ -en mindenütt differenciálható függvények és $h(x) > 0$

849. $f(x) = g^2(x) + h(x^2)$

850. $f(x) = g^2(x) h(x^2)$

851. $f(x) = g(x) e^{h(x)}$

852. $f(x) = g(x) \ln h(x)$

853. $f(x) = [h(x)]^{g(x)}$

854-861. Számítsuk ki az alábbi függvény közelítő értékét az x_1 helyen

854. x^3 $x_1 = 0,99$

855. $\sqrt[3]{x}$ $x_1 = 0,99$

856. $\sin x$ $x_1 = 31^\circ$

857. $\cos x$ $x_1 = 119^\circ$

858. $\lg x$ $x_1 = 10,1$

859. $\lg x$ $x_1 = 9,5$

860. $\ln x$ $x_1 = 1,1$

861. e^{-x} $x_1 = 0,02$

862. Egy kocka térfogata $V = 1000 \text{ dm}^3$.

a) mennyivel változik közelítően a térfogata, ha éleit 1 cm-rel megnöveljük

b) közelítően hány cm-rel kell az élek hosszát megnövelni, hogy a térfogata 10 dm^3 -rel növekedjék?

863. Egy 10 dkg tömegű test 2 cm/sec sebességgel halad. Mennyivel változik a mozgási energiája, ha sebességét 0,1 cm/sec-mal megnöveljük?

864. Egy 10 cm sugarú gömb sugarát 0,1 cm-rel csökkentjük. Mennyivel változik

a) a térfogata

b) a felszíne

865. A nehézségi gyorsulás g értékét 2 m hosszú matematikai inga 400 lengésének mért idejéből $400 T = 1135 \text{ sec}$ -ből akarjuk meghatározni. Hány % bizonytalanságot okoz g meghatározásában az, ha a lengések össz-idejét 0,5 sec-nyi pontossággal tudtuk lemérni?

866.

Egy kör alakban kifeszített zsinag $T = 706,5 \text{ dm}^2$ nagyságu területet zár be. Mennyivel kell növelni a zsinag hosszát, hogy az általa bezárt terület $1,5 \text{ dm}^2$ -rel növekedjék?

867.

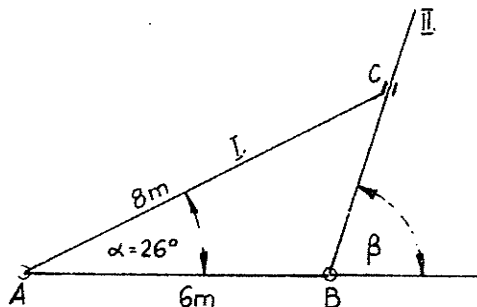
Gömb sugarát 1%-kal megnöveljük. Közelítőleg hány %-kal nő a térfogata?

* 868.

Mekkora a szabadon eső test számított utjának relatív hiábja %-ban, ha az esés idejének relatív mérési hibája 3%.

869.

Az ábrán látható csuklós mechanizmus I. karja az A pont körül, II. karja a B pont körül úgy foroghat, hogy közben az I. kar C végződése a II. karon csuszlik. Mennyit változik a β szög, ha α változása $0,2^\circ$?



869. ábra

* 870.

Egy l hosszúságu vezeték ellenállását Wheatstone hiddal az $x = \frac{lR}{100 - l}$ összefüggés alapján határozhatjuk meg. Hány %-os hibával számíthatjuk ki az eredményt, ha az $R = 43,6$ ohm adatot pontosnak tételezhetjük fel, az $l = 62,4$ cm hosszúság mérésénél pedig legfeljebb 0,3%-os hibát követhettünk el?

17. Középérték-tételek. Bernoulli-L' Hospital szabály

871-875. Igazoljuk, hogy az alábbi függvényekre alkalmazható a Rolle-féle középértéktétel a megadott intervallumban, és határozzuk meg azon ξ értéket (értékeket) amelyre (amelyekre) $f'(\xi) = 0$

871. $\sin x$ $0 \leq x \leq \pi$

* 872. $\sin x$ $0 \leq x \leq 2\pi$

873. $\sin^2 \frac{x}{2}$ $0 \leq x \leq 2\pi$

874. $\frac{x^2}{2} - x$ $0 \leq x \leq 2$

875. $x^3 - 12x$ $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$

876-879. Alkalmazható-e az alábbi függvényekre a Rolle-féle középértéktétel? Ha igen, adjunk meg olyan intervallumot, amelyen a tétel alkalmazható. Határozzuk meg mindazon ξ helyeket, ahol $f'(\xi) = 0$.

876. $f(x) = x^2 + 1$

877. $f(x) = x^3$

878. $f(x) = x^3 - x$

879. $f(x) = e^x$

880-885. Igazoljuk, hogy az alábbi függvényekre a megadott intervallumokban alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel és határozzuk meg azon ξ értéket, amelyre

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

880. $3x^2 + 4x - 3$ $1 \leq x \leq 3$

881. x^3 $0 \leq x \leq 6$

* 882. $\arcsin x$ $0 \leq x \leq 1$

$$883. \quad ax^2 + bx + c \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

$$884. \quad \ln x \quad 1 \leq x \leq 20$$

$$885. \quad e^x \quad x_0 \leq x \leq x_0 + 1$$

886-889. Alkalmazható-e az alábbi függvényekre a megadott intervallumban a Lagrange-féle középértéktétel? Ha igen, határozzuk meg a megfelelő ξ értéket.

$$* \quad 886. \quad \frac{1}{x} \quad -4 \leq x \leq -1$$

$$\boxed{887.} \quad \frac{1}{x} \quad -4 \leq x \leq 4$$

$$\boxed{888.} \quad \ln x \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$889. \quad \ln x \quad x_0 \leq x \leq 1 \quad (0 < x_0 < 1)$$

890-891. A Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségek fennállását:

$$\boxed{890.} \quad \sin x < x \quad \text{ha} \quad x > 0$$

$$\boxed{891.} \quad \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{ha} \quad -1 < x < 0 \quad \text{és} \quad \text{ha} \quad x > 0$$

892-894. Igazoljuk, hogy az alábbi függvényekre a megadott intervallumban alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel és határozzuk meg azon ξ értéket, amelyre

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$\boxed{892.} \quad f(x) = 3x + 2 \quad g(x) = x^2 + 1 \quad 1 \leq x \leq 4$$

$$893. \quad f(x) = \operatorname{sh} x \quad g(x) = \operatorname{ch} x \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$894. \quad f(x) = \sin x \quad g(x) = \cos x \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

895-922. A Bernoulli-L'Hospital szabály alkalmazásával számítsuk ki az alábbi határértékeket - amennyiben az a határérték létezik. Minden egyes esetben állapítsuk meg a határozatlan kifejezés típusát:

$$\left(\frac{0}{0}\right); \left(\frac{\infty}{\infty}\right); (\infty - \infty); (0 \cdot \infty); \left(\frac{0}{\infty}\right); (1^\infty)$$

$$\boxed{895.} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x^2 - x - 12}$$

$$897. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$* 899. \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) \operatorname{ctg} \pi x$$

$$* 901. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\boxed{903.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$905. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right)$$

$$907. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$$

$$909. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x - x}$$

$$911. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$912. \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x^a}{\ln \sin x}$$

$$\boxed{914.} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}$$

$$916. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$918. \quad \lim_{x \rightarrow +0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$896. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x} - 1}{x}$$

$$898. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n}$$

$$900. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \operatorname{ctg} x$$

$$902. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$$

$$904. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$906. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$908. \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$$

$$910. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\cos x - 1}$$

$$913. \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$915. \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$917. \quad \lim_{x \rightarrow +0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$919. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$920. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$921. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}{4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3}$$

$$922. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

923-924. Mutassuk meg, hogy az alábbi esetekben a Bernoulli-l' Hospital-szabály alkalmazása nem vezet célhoz a határérték kiszámításánál és számítsuk ki a keresett határértéket.

$$923. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}(x+a)}{\operatorname{ch}(x-a)}$$

$$924. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x}$$

18. Függvényvizsgálat

925. Az a állandó mely értékénél lesz az $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ függvénynek az $x_0 = \frac{\pi}{3}$ helyen szélsőértéke?

926. Válasszuk meg a k állandó értékét úgy, hogy az $f(x) = x + ke^{-kx}$ függvénynek az $x = 0$ helyen
 a) helyi maximuma }
 b) helyi minimuma } legyen.

927. Irjuk fel azt az $\alpha(r)$ függvényt, amely az r sugaru körben az egységnyi hosszúságu hurhoz tartozó α középponti szögnek és a kör sugarának összefüggését fejezi ki. Állapítsuk meg a függvény értelmezési és monotonitási tartományát. Megállapításainak mi a geometriai értelme?

928-929. Állapítsuk meg milyen intervallumokban monoton csökkenő ill. monoton növekvő az alábbi függvény:

928. $\ln \frac{x^2}{(1+x)^3}$

929. $\frac{2}{x} - \frac{3}{1+x}$

930-932. Mely intervallumokban lesz az alábbi egyenletű görbe alulról konvex, ill. alulról konkáv?

930. $y = \ln \frac{x^2}{(1+x)^3}$

931. $y = e^{-x^2}$

* 932. $y = |n| \sin x| \quad (x \neq k\pi)$

933-947. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken és vázoljuk a grafikonjukat.

933. $x^3 - x^2 - 2x$

934. $x^4 + x^3$

935. $(x-4)^2(x-3)^2$

936. $\frac{x^2+9}{x}$

937. $\frac{x^2}{(x-1)^2}$

938. $\frac{6x}{x^3+1}$

939. e^{-x^2}

940. $x^2 e^{-x}$

941. $x \ln |x|$

942.
$$\begin{cases} x \ln^2 |x| & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

943. $\frac{x}{\ln x}$

* 944. $\ln(x^2 - 1)$

945. $\ln |\sin x|$

946. $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$

947. $\frac{\cos 2x}{\cos x}$

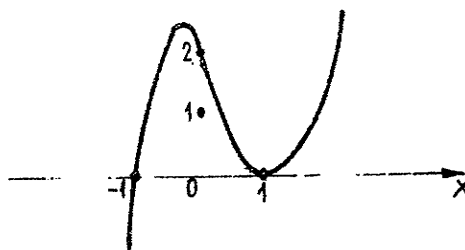
948-949. Vizsgáljuk és vázoljuk az alábbi egyenlettel adott görbéket

948. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

949. $x(y^2 + 1) = 1$

* 950. Írja fel az ábrán látható harmadfoku parabola egyenletét és határozza meg a $-1 \leq x \leq 1$ abszcisszájú pontjai közül annak a P_0 pontnak a koordinátáit, amelyiknek az ordinátája maximális.

↑y



950. ábra

19. Szélsőérték-feladatok

- 951.** Össza fel az a távolságot két részre úgy, hogy a részekkel, mint oldalakkal szerkesztett négyzetek területének összege minimális legyen.
952. Határozza meg az $y^2 = 8x$ egyenletű parabolának azt a pontját, amely a $(6; 0)$ koordinátájú ponttól a legkisebb távolságra van.
- * 953. Egy derékszögű háromszög egyik befogóján egy test $a = 40$ m távolságból $c_1 = 4$ m/sec sebességgel, egy másik test a másik befogón $b = 30$ m távolságból $c_2 = 2$ m/sec sebességgel halad a derékszögű csúcspont felé. Hány másodperc múlva lesznek egymáshoz legközelebb és akkor mekkora a távolságuk?
954. Határozza meg az R sugaru körbe írt téglalapok közül annak a téglalapnak az adatait, amelyiknek a területe maximális.
- 955.** Tételezze fel, hogy az x és y változók egymással egyenesen arányosak, vagyis kapcsolatuk $y = kx$ alakú, ahol k állandó. A mérési eredmények a következők: $x_1 = 3, 5; y_1 = 12, x_2 = 6; y_2 = 20; x_3 = 8, 5; y_3 = 27;$ és $x_4 = 11, y_4 = 35$. Határozza meg k értékét úgy, hogy a $H(k) = \sum_{i=1}^4 (y_i - kx_i)^2$ függvény értéke minimális legyen.
956. Legyen az r sugaru körbe írható trapéz nagyobbik, párhuzamos oldala a kör egyik átmérője. Legfeljebb mekkora lehet a trapéz területe?
- * 957. Az R sugaru körbe írt egyenlőszárú háromszög csúcánál levő szöget jelöljük 2α -val. Írja fel a háromszög területét, mint α függvényét. A háromszög területe α mely értékénél lesz a legnagyobb?
- 958.** R sugaru kör alaku asztal közepe felett milyen magasra kell elhelyeznünk a lámpát, hogy az asztal szélén maximális legyen a megvilágítás erőssége? (A megvilágítás erőssége egyenesen arányos a beesési szög koszinuszával, fordítva arányos a távolság négyzetével.)

959.

R sugaru körlemezből mekkora nyílásszögű körcikket kell kivágnunk, hogy maximális térfogatú tölcserő kapjunk?

* 960

Mekkora α° szög alatt kell ferdén elhajítanunk egy testet, hogy a pálya emelkedési magasságának és a hajítás távolságának az összege maximális legyen? (A közegellenállást nem vesszük figyelembe!)

961.

Legfeljebb mekkora lehet annak a gerendának a hossza, amelyet egy 4 m átmérőjű, kör-keresztmetszetű toronyba, egy a torony falán vágott 2 m magas ajtón át bevihetünk?

962.

Tudvalevően adott f fókusz-távolságú lencsétől t távolságra levő tárgy k képtávolsága

$$k = \frac{tf}{t - f}.$$

A szóban forgó lencsére megadható-e a tárgy és képtávolság összegének

- a) pontos alsó
- b) pontos felső

} korlátja és ha ilyen van, mekkora az?

20. Görbület, Simulókör

963-979.

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbének a megadott pontban a görbületi sugarát, és a görbületi kör középpontjának koordinátáit, majd írjuk fel a görbületi kör egyenletét.

963.	$y = x^2$	$P_0 (0, 0)$
964.	$y = x^2$	$P_0 (1, 1)$
965.	$y = 2 \sqrt{x}$	$P_0 (0, 0)$
966.	$y = \frac{1}{x}$	$P_0 (1, 1)$
967.	$y = \frac{1}{2x}$	$P_0 (1, 1)$
968.	$y = \sin x$	$P_0 (0, 0)$
969.	$y = \sin x$	$P_0 (\frac{\pi}{2}, 1)$
970.	$y = \sin x$	$P_0 (\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
971.	$y = \frac{1}{\sin x}$	$P_0 (\frac{\pi}{2}, 1)$
972.	$y = \arcsin x$	$P_0 (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6})$
973.	$y = \cos^2 x$	$P_0 (0, 1)$
974.	$y = \arcsin x$	$P_0 (1, \frac{\pi}{4})$
975.	$y = e^x$	$P_0 (0, 1)$
976.	$y = \ln x$	$P_0 (1, 0)$
977.	$y = \ln^2 x$	$P_0 (1, 0)$

978. $y = \operatorname{ch} x$ $P_0(0, 1)$

979. $y = \operatorname{sh}^2 x$ $P_0(0, 0)$

980-985. Határozzuk meg az alábbi egyenletű görbe azon pontjait, ahol a görbületnek szélsőértéke van, állapítsuk meg, hogy ez maximum vagy minimum, majd számítsuk ki ezen görbület számértékét:

980. $y = x^2 - 4x + 2$ 981. $y = ax^2 + bx + c \quad (a > 0)$

982. $y = \sin x$ 983. $y = e^x$

984. $y = \ln x$ 985. $y = \operatorname{sh} x$

986. Határozzuk meg, hogy hol van a

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (y > 0)$ egyenletű félellipszis görbületének szélsőértéke.

* 987. Határozzuk meg az $y = \ln \cos x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ egyenletű görbe azon pontjait, ahol a görbületi kör sugara $\frac{3}{2}$.

21. Görbék magasabbrendű érintkezése

988.

Határozzuk meg, hogy hányadrendben érinti az $y = \sin x$ egyenletű görbét $x_0 = 0$ -nál az $y = x - \frac{x^3}{6}$ egyenletű parabola.

989.

Hányadrendben érinti a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ egyenlettel adott görbe az $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0$ egyenletű kört a $P_0(1, 1)$ pontban?

990-995.

Írjuk fel azt a legalacsonyabb fokú polinomot, amelynek grafikonja az alábbi görbét a megadott helyen a megadott rendben érinti.

990.

$$y = \sin x$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{negyed rendben}$$

991.

$$y = \sqrt{1+x}$$

$$x_0 = 0 \quad \text{harmad rendben}$$

992.

$$y = \sin x - \cos x$$

$$x_0 = 0 \quad \text{negyed rendben}$$

993.

$$y = \frac{1}{x}$$

$$x_0 = 1 \quad \text{negyed rendben}$$

994.

$$y = \operatorname{ar th} x$$

$$x_0 = 0 \quad \text{ötöd rendben}$$

995.

$$y = \operatorname{sh} x$$

$$x_0 = a \quad 2n\text{-ed rendben} \quad (n > 2)$$

996-999

Állapítsuk meg, hogy az alábbi egyenletű görbék az origóban hányadrendben érintkeznek, majd írjuk fel azt a legalacsonyabb fokszámú polinomot, amelynek görbéje ugyanolyan rendben érinti a két adott görbét.

996.

$$y = e^x - 1$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

997.

$$y = \sin x$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

998.

$$y = \sin^2 x$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

999.

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

22. Taylor-polinom

1000-1001. Írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ -hoz tartozó megadott fokszámu Taylor polinomjait. Ábrázoljuk a függvénynek és közelítő polinomjainak a grafikonját.

1000.	$\cos x$	$T_2(x), \quad T_4(x)$
1001.	$\sin x$	$T_1(x), \quad T_3(x)$

1002-1006. Írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ -hoz tartozó megadott fokszámu Taylor-polinomját a hozzátartozó Lagrange-féle maradéktaggal:

1002.	e^x	$T_n(x)$
1003.	$\sin x$	$T_5(x)$
1004.	$\sin x$	$T_{2n-1}(x)$
1005.	$\cos x$	$T_{2n}(x)$
1006.	$\ln(1+x)$	$T_5(x)$

1007-1015. Számítsuk ki az alábbi függvények közelítő értékét a megadott x_1 helyen a megadott fokszámu Taylor-polinom segítségével és becsüljük meg a közelítés hibáját:

1007.	x^5	$x_1 = 0,99$	$T_1(x)$
1008.	$\sqrt[3]{x}$	$x_1 = 10$	$T_1(x)$
1009.	$\sqrt[3]{x}$	$x_1 = 10$	$T_3(x)$
1010.	$\cos x$	$x_1 = 28^\circ$	$T_1(x)$
1011.	$\cos x$	$x_1 = 28^\circ$	$T_2(x)$
* 1012.	$\ln x$	$x_1 = 1,3$	$T_3(x)$

1013.	$\ln x$	$x_1 = 1,3$	$T_4(x)$
* 1014.	e^x	$x_1 = -\frac{1}{4}$	$T_3(x)$
* 1015.	$\operatorname{tg} x$	$x_1 = 0,75$	$T_2(x)$

1016-1020.

Írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli megadott fokszámu Taylor-polinomját és állapítsuk meg, hogy a megadott intervallumban mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt!

1016.	$\sqrt[3]{1+x}$	$0 \leq x \leq 0,25$	$T_2(x)$
1017.	$\sin x$	$-0,5 \leq x \leq 0,5$	$T_4(x)$
1018.	$\cos x$	$-0,5 \leq x \leq 0,5$	$T_5(x)$
1019.	$\operatorname{sh} x$	$-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$	$T_4(x)$
1020.	$\ln(1+x)$	$-0,1 \leq x \leq 0,1$	$T_n(x)$

1021.

Számítsuk ki e értékét $3 \cdot 10^{-6}$ -nál kisebb hibával.

1022-1026.

Számítsuk ki 10^{-3} -nál kisebb hibával az alábbi függvények közelítő értékét a megadott helyen a megfelelő Taylor polinom segítségével.

1022.	$\sqrt[3]{x}$	$x_1 = 70$
1023.	$\sqrt[5]{x}$	$x_1 = 250$
1024.	$\sqrt[10]{x}$	$x_1 = 1027$
1025.	$\ln x$	$x_1 = 1,1$
1026.	$\operatorname{ch} x$	$x_1 = 1$

23. Görbék paraméteres megadása

1027. Irjuk fel a $P_0(2, 0)$ ponton áthaladó $\alpha_0 = 30^\circ$ -os irány-
szögű egyenes paraméteres egyenletrendszerét, paraméterként
a P_0 ponttól való t "előjeles" távolságot használva (pl. $t > 0$ ha
 $y > 0$ és $t < 0$ ha $y < 0$).
1028. Irjuk fel a $P_0(2, 0)$ ponton áthaladó $\alpha_0 = 30^\circ$ -os irányszö-
gű egyenes paraméteres egyenletrendszerét, paraméterként
a futó pontot az origóval összekötő szakasz φ irányszögét hasz-
nálva.
1029. Irjuk fel a $C(u_0, v_0)$ középpontu r_0 sugaru kör paraméte-
res egyenletrendszerét, paraméterként a futó pontot a kör kö-
zéppontjával összekötő szakasz t irányszögét használva.
- 1030-1034. Küszöböljük ki a t paramétert az alábbi egyenletrendsze-
rekből és állapítsuk meg, hogy milyen görbét (vagy annak milyen
részalmazát) határoznak meg.
1030. $x = t^2 - 1$ 1031. $x = 1 - \frac{1}{t}$
 $y = t^2 + 1$ $y = 1 + \frac{1}{t-1}$
1032. $x = \frac{t}{1+t^2}$ 1033. $x = 1 + \cos t + \sin t$
 $y = \frac{t^2}{1+t^2}$ $y = 2 + \cos t - \sin t$
1034. $x = \arctg t$
 $y = \ln(t^2 + 1)$
1035. Egy ferdehajításnál a vízszintes elmozdulás $x = 3t$, a füg-
gőleges elmozdulás

$$y = 10t - \frac{1}{2}gt^2$$

- a) mi a t paraméter fizikai jelentése?
 b) Írjuk fel a pályagörbe egyenletét $y = f(x)$ alakban.

1036.

Tekintsünk egy, az $A(-1, 0)$ ponton áthaladó egyenest. Bocsássunk erre merőlegest a $B(1, 0)$ pontból, s jelöljük a két egyenes metszéspontját P -vel. Milyen görbét ír le a P pont, ha az A ponton áthaladó egyenes irányszöge $-\frac{\pi}{2}$ -től $+\frac{\pi}{2}$ -ig változik?

Írjuk fel a P pont által leírt görbe paraméteres egyenlet-rendszerét, paraméterként az A ponton áthaladó egyenes "m" iránytangensét használva.

1037.

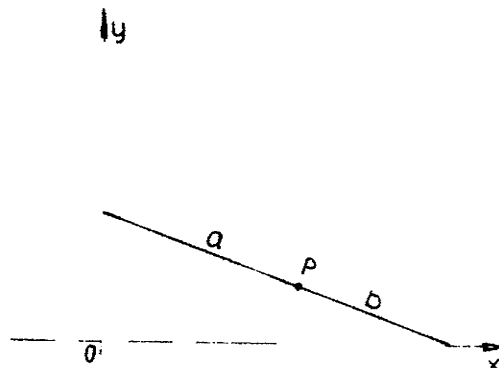
Két egyenes közül az egyik az $A(-1, 0)$ pont körül, a másik a $B(1, 0)$ pont körül forog, egyenlő szögsebességgel, az első egyenes az óramutató járásával ellenkező, a második egyenes az óramutató járásával megegyező irányban. Milyen görbét ír le a két egyenes metszéspontja, ha kiinduláskor az első egyenes egybeesik az x tengellyel, a második egyenes pedig merőleges az x tengelyre?

1038.

Az e egyenes önmagával párhuzamosan mozog v sebességgel az x tengely pozitív irányában, az f egyenes pedig az origó körül forog ω szögsebességgel az óramutató járásával ellentétesen. Milyen görbén mozog a két egyenes metszéspontja, ha kiinduláskor az e egyenes egybeesik az y tengellyel, az f egyenes pedig egybeesik az x tengellyel?

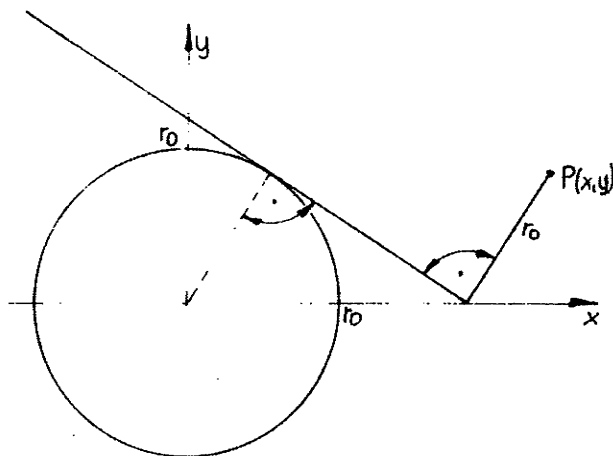
1039.

A koordinátatengelyeken csuszlik egy $a + b$ hosszúságú merőleges. Határozzuk meg az ábrán látható P pont által leírt görbét.



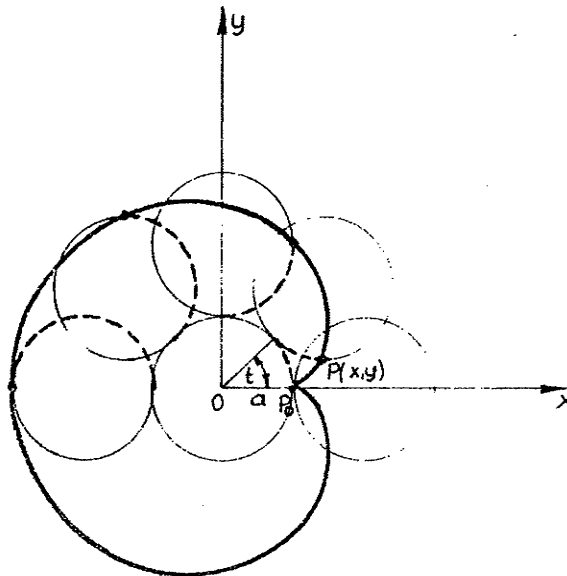
1039. ábra

1040. Egy derékszög csúcsa úgy csuszlik az x tengely pozitív felén, hogy közben e derékszög egyik szára az origó-középpontú r_0 sugaru kört érinti. Határozzuk meg a szög másik szárán a csúcstól r_0 távolságban levő P pont által leírt görbét.



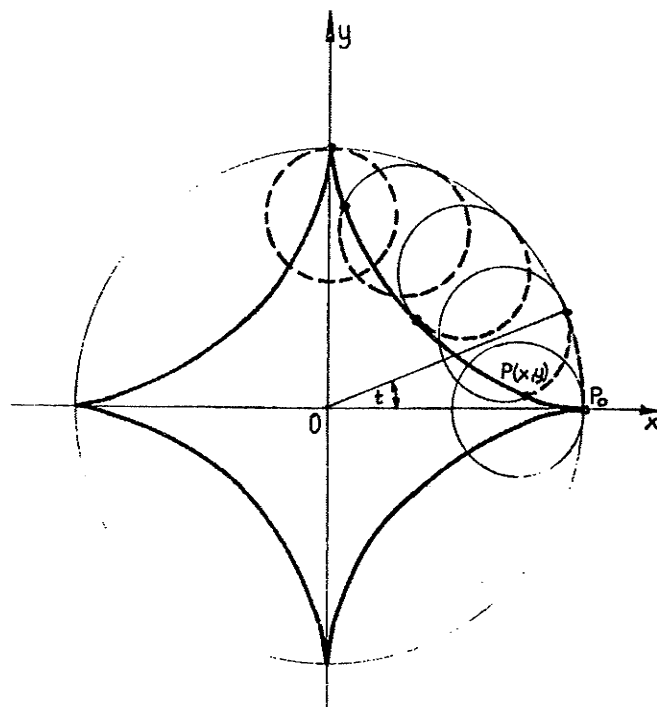
1040. ábra

1041. Határozzuk meg a közösleges ciklois $\frac{a}{2}$ magasságu pontjainak abszcisszáit (lásd Jegyzet 20.4 példa).
1042. Az x tengely mentén csuszásmentesen gördül egy r_0 sugaru kör. Határozzuk meg a gördülő körhöz rögzített, a kör középpontjától a $< r_0$ távolságban levő P pont által leírt görbe paraméteres egyenletrendszerét, paraméter-ként a P pontot a kör középpontjával összekötő szakasznak a függőlegessel bezárt t szögét választva, ha $t = 0$ -nál a P pont koordinátái $P(0; r_0 - a)$. (Nyújtott ciklois.)
- * 1043. Egy rögzített a sugaru körön csuszásmentesen gördül egy másik, ugyancsak a sugaru kör. A gördülő kör területének egy tetszőleges P pontja un. kardioid-ot ír le. Legyen a rögzített kör középpontja az origó; válasszuk paraméternek az origót az érintési ponttal összekötő sugár t irányszögét és írjuk fel annak a kardioid-nak a paraméteres egyenletrendszerét, amelyet a gördülő kör azon pontja ír le, amelynek koordinátái $t = 0$ -nál $P(a; 0)$.

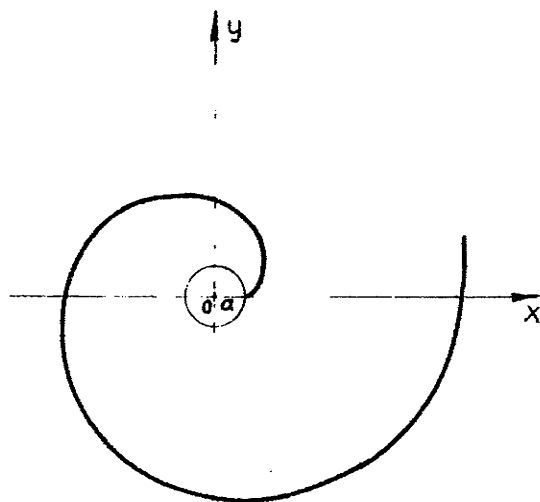


1043. ábra

- * 1044. Egy rögzített a sugaru körön csuszásmentesen gördül egy $r = \frac{a}{4}$ sugaru kör, úgy, hogy a rögzített kört belülről érinti. A gördülő kör egy tetszőleges pontja asztrois-t ír le. Legyen a rögzített kör középpontja az origó; válasszuk paraméternek az origót az érintési ponttal összekötő sugár t irányszögét és írjuk fel annak az astroisnak a paraméteres egyenletrendszerét, amelyet a gördülő kör azon pontja ír le, amelynek koordinátái $t = 0$ -nál: $P(a, 0)$.
- * 1045. Egy rögzített (körkeresztmetszetű) korongra csavart fonalat úgy gombolyítunk le, hogy a legombolyított rész mindig érintőirányu marad. Ekkor a szál szabad végpontja egy un. körevolvens-t ír le. Legyen a rögzített kör középpontja az origó; válasszuk paraméterként az origót az érintési ponttal összekötő sugár t irányszögét és írjuk fel annak a körevolvensnek a paraméteres egyenletrendszerét, amelynél a szál szabad végpontja $t = 0$ -nál a $P_0(a, 0)$ pontban van.



1044. ábra



1045. ábra

24. Polárkoordinátákban megadott görbék

1046-1119. Megjegyzés: Az alábbiakban a polárkoordinátarendszert és a derékszögű koordináta-rendszert mindig a szokásos módon helyezzük egymásra (tehát úgy, hogy az origó egybeesik a pólussal, a polártengely egybeesik a pozitív x tengellyel, továbbá x, y és r egységei azonosak).

1046. a) a P_1 pont derékszögű koordinátái: $x_1 = 1$; $y_1 = 2$ adjuk meg P_1 polárkoordinátáit.
b) a P_2 pont polárkoordinátái: $r_2 = 1$; $\varphi_2 = 2$ adjuk meg P_2 derékszögű koordinátáit.

1047-1051. Irjuk fel az alábbi egyenesek polárkoordinátás egyenletét:

1047. $x = a$ 1048. $y = b$

1049. $\alpha = 30^\circ$ -os irányszögű, az $x_0 = 1$; $y_0 = 2$ koordinátájú ponton áthaladó egyenes.

1050. az (x_0, y_0) ponton áthaladó, polártengelyre merőleges egyenes.

1051. a pólustól 3 egység távolságra levő, a polártengellyel 60° -os szöget bezáró egyenesek.

1052. Irjuk fel annak a körnek a polárkoordinátás egyenletét, amelynek középpontja $C(r_0, \frac{\pi}{2})$ (polárkoordináták) és sugara r_0 .

1053. Irjuk fel annak a körnek a polárkoordinátás egyenletét, amelynek középpontja $C(r_0, \varphi_0)$ és sugara ρ .

1054-1056. Adjuk meg az alábbi görbék egyenletét derékszögű koordináta-rendszerben és állapítsuk meg, hogy milyen görbéről van szó.

1054. $r = \frac{5}{\cos \varphi}$ 1055. $r = 3 \cos \varphi$

1056. $r = \frac{1}{\sqrt{\cos 2 \varphi}}$

* 1057. Határozzuk meg a $P_1(r_1, \varphi_1)$ és $P_2(r_2, \varphi_2)$ pontok távolságát.

1058-1060. Egy polárkoordinátarendszerben vegyünk fel egy az $r_0 = d$, $\varphi_0 = \pi$ koordinátájú ponton áthaladó, a polártengelyre merőleges v (vezér-) egyenest. Írjuk fel az alábbi feltételnek eleget tevő P pontok mértani helyének

- a) polárkoordinátás
b) derékszögű koordinátás

} egyenletét

és állapítsuk meg, hogy milyen görbéről van szó.

1058. a P pont ugyanolyan távol van a pólustól, mint a vezéregyenestől

1059. a P pont kétszer olyan távol van a vezéregyenestől, mint a pólustól

1060. a P pont kétszer olyan távol van a pólustól, mint a vezéregyenestől

1061. Vizsgáljuk azon pontok mértani helyét, amelyeknek két megadott ponttól való távolságainak szorzata állandó és egyenlő a két megadott pont féltávolságának négyzetével

- a) vázoljuk a görbét
b) írjuk fel a polárkoordinátás egyenletét
c) írjuk fel a derékszögű koordinátás egyenletét

1062. Egy félegyenesen mozog egy pont, a kezdőponttól távolodva állandó v sebességgel, ugyanakkor a félegyenes forog az origó körül pozitív irányban ω állandó szögsebességgel. A $t = 0$ időpontban a pont a félegyenes kezdőpontjában van, a félegyenes pedig az x tengely pozitív felét fedi. Mi lesz a mozgó pont pályagörbéje a síkon?

1063. Milyen geometriai transzformációval kaphatjuk meg az $r = f(\varphi)$ görbéből az $r = 3f(\varphi - 2)$ görbét?

* 1064. Igazoljuk, hogy az

$$r = k \left(\cos \frac{\varphi}{n} \right)^n$$

$n = -1$	esetén	egyenes
$n = 1$	esetén	kör
$n = -2$	esetén	parabola
$n = -\frac{1}{2}$	esetén	hiperbola
$n = \frac{1}{2}$	esetén	lemniskáta
egyenlete.		

25. Paraméteresen megadott függvény deriváltja

1065-1071. Határozzuk meg az alábbi deriváltakat

$$1065. \quad \left. \begin{aligned} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - \cos t \end{aligned} \right\} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$1066. \quad \left. \begin{aligned} x(t) &= \ln t \\ y(t) &= t - \sin t \end{aligned} \right\} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$1067. \quad \left. \begin{aligned} x(\varphi) &= e^{\varphi} \cos \varphi \\ y(\varphi) &= e^{\varphi} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$1068. \quad \left. \begin{aligned} x(t) &= \cos^3 t \\ y(t) &= \sin^3 t \end{aligned} \right\} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$1069. \quad \left. \begin{aligned} x(t) &= e^{2t} \cos t \\ y(t) &= e^{2t} \sin t \end{aligned} \right\} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$1070. \quad \left. \begin{aligned} u(\varphi) &= \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \\ v(\varphi) &= \cos \varphi + \varphi \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad \frac{d^2 v}{du^2} = ? \quad \frac{d^2 v}{du^2} = ?$$

$$1071. \quad \left. \begin{aligned} u(t) &= a \operatorname{ch} t \\ v(t) &= b \operatorname{sh} t \end{aligned} \right\} \quad \frac{d^2 u}{dv^2} = ? \quad \frac{d^2 v}{du^2} = ?$$

1072-1074. Írjuk fel az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe érintőjének és normálisának az egyenletét a megadott helyen:

$$\begin{aligned} 1072. \quad x(t) &= \sin t - t \cos t \\ y(t) &= \cos t + t \sin t \end{aligned} \quad t_0 = 1$$

$$\begin{aligned} 1073. \quad x &= a \operatorname{ch} t \\ y &= b \operatorname{sh} t \end{aligned} \quad \begin{aligned} a &> 0 \\ b &> 0 \end{aligned} \quad t_0 = \ln 2$$

$$1074. \quad \begin{aligned} x &= \sin^2 \varphi \\ y &= \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

1075. Igazoljuk, hogy az

$$x = \frac{12t}{1+t^3} \quad y = \frac{12t^2}{1+t^3}$$

paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbének a t_0 és $\frac{1}{t_0}$ paraméteres értékekhez tartozó pontjaiban az érintőmeredekségek egymás reciprokai. Mi az összefüggés a két érintőnek az x tengely pozitív irányával bezárt szöge között?

* 1076-1078. Számítsuk ki az alábbi paraméteres alakban megadott görbének a görbületét a megadott pontban.

$$1076. \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{t} \\ y = 1 + \frac{1}{t-1} \end{cases} \quad P_0(-1; -1)$$

$$1077. \quad \begin{aligned} x &= \sin u \\ y &= \ln \sin u \end{aligned} \quad P_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\ln 2}{2}\right)$$

$$1078. \quad \begin{aligned} x &= 3 \cos \varphi - \cos 3 \varphi \\ y &= 3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi \end{aligned} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

1079-1083. Határozzuk meg az alábbi - paraméteres alakban megadott - görbe tetszőleges pontjában a görbületi kör sugarát. Milyen görbéről van szó?

$$1079. \quad \begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= b \sin \varphi \end{aligned} \quad \begin{aligned} a &> 0 \\ b &> 0 \end{aligned}$$

$$1080. \quad \begin{aligned} x &= 1 + \cos t + \sin t \\ y &= 2 + \cos t - \sin t \end{aligned} \quad \begin{aligned} 1081. \quad x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}$$

$$1082. \quad \begin{aligned} x &= 2 \cos \varphi - \cos 2 \varphi \\ y &= 2 \sin \varphi - \sin 2 \varphi \end{aligned} \quad \begin{aligned} 1083. \quad x &= a \cos \varphi + a \varphi \sin \varphi \quad (a > 0) \\ y &= a \sin \varphi - a \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

1084-1086.

Vizsgáljuk az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel adott görbét a t_0 paraméterű pont környezetében (érintő meredeksége, konvexitás, görbület).

1084.

$$x = t^3 + 2t^2 + 3$$

$$y = t^3 + 3t + 5$$

$$t_0 = -2$$

* 1085.

$$x = \frac{3t}{1+t^3}$$

$$y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

$$t_0 = 0$$

1086.

$$x = a \sin^3 t$$

$$y = a \cos^3 t$$

$$t_0 = \frac{\pi}{3}$$

26. Polárkoordinátákkal megadott függvény deriváltja

1087-1091. Számítsuk ki az alábbi polárkoordinátás egyenlettel megadott görbe érintője és az érintési ponthoz tartozó radiuszvektor által bezárt szöget:

$$1087. \quad r = \frac{2\pi}{\varphi} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$1088. \quad r^2 + \varphi^2 = 1 \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$1089. \quad r = \sin^2 \varphi \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$1090. \quad \varphi - \arctg r^2 = 0 \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$1091. \quad r^2 = 1 - r^2 \operatorname{sh}^2 \varphi \quad \varphi_0 = 0$$

1092-1096. Írjuk fel az alábbi - polárkoordinátás egyenlettel adott - görbék adott pontbeli érintőegyenésének egyenletét. Milyen görbéről van szó?

$$1092. \quad r = 3\varphi \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$1093. \quad r = e^{3\varphi} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$1094. \quad r = \frac{1}{\varphi} \quad \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

$$1095. \quad r = 2\sqrt{\cos 2\varphi} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$1096. \quad r = 2\sqrt{\cos 2\varphi} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

* 1097-1100. Keressük meg az alábbi - polárkoordinátásan adott - görbék vízszintes és függőleges érintőjü helyeit:

$$1097. \quad r = e^{\varphi} \quad 1098. \quad r = e^{3\varphi}$$

$$1099. \quad r = \frac{1}{\varphi} \quad * 1100. \quad r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$$

* 1101-1103. Mutassuk meg, hogy az alábbi görbék derékszöghen metszik egymást

$$\begin{array}{lll}
 1101. & r = 2 \sin \varphi & \text{és} & r = 2 \cos \varphi \\
 1102. & r = \sqrt{\cos 2\varphi} & \text{és} & r = \sqrt{\sin 2\varphi} \\
 1103. & r = \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} & \text{és} & r = \frac{3}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}
 \end{array}$$

* 1104-1105. Határozzuk meg az alábbi egyenlettel adott görbék metszési szögét.

$$\begin{array}{lll}
 1104. & r = \sin 2\varphi & \text{és} & r = \cos \varphi \\
 1105. & r = \sin \varphi & \text{és} & r = \sin 2\varphi
 \end{array}$$

1106-1107. Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott görbéknek
 a) a pólustól
 b) a polártengelytől legtovábbi pontjait

$$\begin{array}{ll}
 1106. & r = \sin 2\varphi \\
 1107. & r = \sqrt{\sin 2\varphi}
 \end{array}$$

1108-1113. Határozzuk meg az alábbi - polárkoordinátákban megadott - görbéknek a görbületét a megadott helyen:

$$\begin{array}{ll}
 1108. & r = \sin^2 \varphi \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \\
 1109. & r = 3 \sqrt{\cos 2\varphi} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \\
 1110. & r = \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \\
 1111. & r = 2 + \frac{1}{\cos \varphi} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{3} \\
 1112. & r = e^{\frac{\varphi}{3}} \quad r_0 = 2 \\
 1113. & r = 3 \sin 2\varphi \quad r_0 = 2
 \end{array}$$

1114-1117. Határozza meg az alábbi - polárkoordináták közti - összefüggéssel adott görbék tetszőleges pontjában a görbületi sugár hosszát. Milyen görbéről van szó?

1114. $r = a \varphi$ ahol $a > 0$

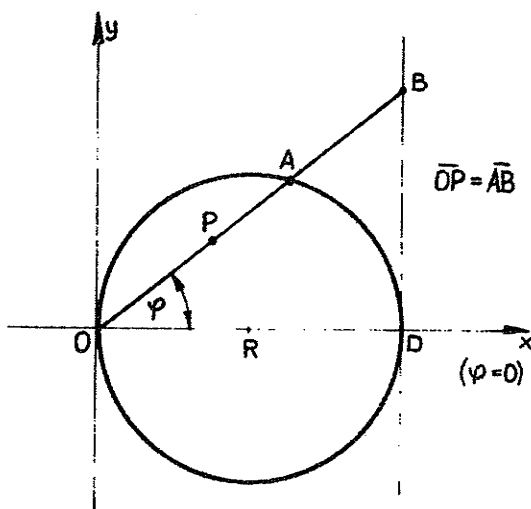
1115. $r = e^{3\varphi}$

1116. $r = \frac{1}{\varphi}$

1117. $r = \sqrt{2 \cos 2\varphi}$

1118. Igazolja, hogy a logaritmikus spirális tetszőleges pontjához tartozó rádiuszvektor hosszának és a görbületi kör sugarának az aránya állandó.

1119. Az OD átmérőjű, R sugaru kört és ennek D pontjához tartozó érintőjét az origón átmenő, φ irányú egyenes az A illetve B pontban metszi. Legyen g az a görbe, amelynek P futópontját az $r = OP = OB - OA$ és φ koordináták határozzák meg. Írja fel g polárkoordinátás egyenletét. Számítsa ki a görbe tetszőleges pontjához tartozó görbületi kör sugarát.



1119. ábra

27. Egyenletek közelítő megoldása

1120-1131. Logarléc pontossággal határozzuk meg az alábbi egyenletek gyökeit:

1120. $3x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$ (hur módszer, érintő módszer)

* 1121. $\sin x = \ln x$ (hur módszer)

* 1122. $e^x = -x$ (érintő módszer)

1123. $10x = 10 + \sin x$ (érintő módszer és iteráció)

1124. $x^3 - x - 1 = 0$ 1125. $x^3 + 3x^2 - 4x = 1$

1126. $x^3 - 5x + 1 = 0$ 1127. $x^3 - 9x^2 + 20x - 11 = 0$

1128. $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ 1129. $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$

1130. $x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 1 = 0$ 1131. $x^4 - x^3 = 1$

1132. Határozzuk meg érintő módszerrel a
 $2 \sin x - x = 0$ egyenlet pozitív gyökét.

1133-1136. Oldjuk meg iterációval az alábbi egyenleteket:

1133. $2x = \cos x$ 1134. $x = e^{-x}$

* 1135. $x + \ln x = 0$ 1136. $x + e^x = 0$

1137-38. Határozzuk meg iterációval az alábbi két egyenlet legkisebb pozitív gyökét:

* 1137. $x + \operatorname{tg} x = 0$ 1138. $x = \operatorname{tg} x$

1139. Egy fekvő, 1500 liter befogadóképességű hengeres kazánban 900 liter víz van. Milyen magasan áll a víztükör?

1140. Egy 100 cm sugarú tömör gömb fajsúlya $0,75 \frac{\text{pond}}{\text{cm}^3}$. Milyen magasan emelkedik ki a vízből?

Integrálszámítás

28. Határozatlan integrálás

Alapintegrálok gyakorlása

Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényét:

$$1141. \quad f(x) = 3x^5$$

$$* 1142. \quad f(x) = \frac{x^2 - 7x + 8}{x^2}$$

$$1143. \quad f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$1144. \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x} \sqrt[5]{x}$$

$$* 1145. \quad f(x) = \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}$$

$$1146. \quad f(x) = \frac{x^6}{x^2 + 1}$$

$$1147. \quad f(x) = \frac{-2}{5x^2 + 5}$$

$$1148. \quad f(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{1149.} \quad f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$1150. \quad f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

$$1151. \quad f(x) = 3 \operatorname{sh} x - 5 \operatorname{ch} x$$

$$1152. \quad f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\boxed{1153.} \quad f(x) = \operatorname{th}^2 x$$

$$1154. \quad f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$1155. \quad f(x) = e^{3x} \operatorname{ch} 5x$$

$$* 1156. \quad f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$1157. \quad f(x) = e^x \operatorname{sh} x$$

$\int [f(x)]^n f'(x) dx$ alakú integrálok

1158. $f(x) = \sin^3 x \cos x$

1159. $f(x) = \frac{\ln^5 x}{x}$

1160. $f(x) = \frac{2x - 5}{\sqrt[3]{(x^2 - 5x + 13)^7}}$

1161. $f(x) = \frac{7x^2}{\sqrt{5 - 4x^3}}$

1162. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2) \operatorname{Arc} \sin x}}$

1163. $f(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{ar} \operatorname{sh} x}{1 + x^2}}$

1164. $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt[3]{\operatorname{sh} x}}$

1165. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ alakú integrálok

1166. $f(x) = \operatorname{tg} x$

1167. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

1168. $f(x) = \frac{1}{(1 + x^2) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x}$

1169. $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 27}$

1170. $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5}$

1171. $f(x) = \frac{e^x (\operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x)}{\operatorname{ch} 3x}$

$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$ alakú integrálok.

1172. $f(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$

1173. $f(x) = x \sin^2 x$

1174. $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

1175. $f(x) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

1176. $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$

1177. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$

Integrálás helyettesítéssel. Lineáris kifejezések helyettesítése

$$\boxed{1178.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 10x + 29}$$

$$\boxed{1179.} \quad f(x) = \frac{1}{2x^2 - 12x + 23}$$

$$1180. \quad f(x) = \frac{1}{3x^2 + 12x + 16}$$

$$1181. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 40}}$$

$$\boxed{1182.} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 12x + 30}}$$

$$1183. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 + 2x - x^2}}$$

$$1184. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x}}$$

$$\boxed{1185.} \quad f(x) = \sin 3x \sin 8x$$

$$\ast \quad 1186. \quad f(x) = \cos 5x \cos 7x$$

$$\ast \quad 1187. \quad f(x) = \sin 2x \cos 5x$$

$$\boxed{1188.} \quad f(x) = \cos^2 x$$

$$\ast \quad 1189. \quad f(x) = \sin^2 (1 - 2x)$$

$$\ast \quad 1190. \quad f(x) = \sin^4 x$$

Egyéb helyettesítések. Lásd még: racionális törtfüggvények integráljára vezető helyettesítések és néhány irracionális típus integrálja.

$$\ast \quad 1191. \quad f(x) = \sin^2 x \cos^5 x$$

$$1192. \quad f(x) = \frac{\cos^5 x}{\sin x}$$

$$\ast \quad 1193. \quad f(x) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$\ast \quad 1194. \quad f(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$$

$$\ast \quad 1195. \quad f(x) = \frac{1}{\sin^3 x}$$

Integrálás parciálisan.

$$\boxed{1196.} \quad f(x) = \ln x$$

$$1197. \quad f(x) = \ln (x^2 + 1)$$

$$\ast \quad 1198. \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$1199. \quad f(x) = x^2 \ln^3 x$$

$$\boxed{1200.} \quad f(x) = (5 - x) \ln(3x + 5)$$

$$1201. \quad f(x) = (3x - 5) e^{2x + 3}$$

$$1202. \quad f(x) = (x^2 - 3x + 5) e^x$$

$$\ast \quad 1203. \quad f(x) = x^5 e^{x^2}$$

- * 1204. $f(x) = \frac{x e^x}{(x+1)^2}$ 1205. $f(x) = \cos x \operatorname{sh} x$
1206. $f(x) = (x^2 + x + 1) \sin x$ * 1207. $f(x) = (x \sin x)^2$
1208. $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ 1209. $f(x) = \sin^n x \geq (n \geq 2 \text{ egész})$
1210. $f(x) = \operatorname{Arc} \sin x$ 1211. $f(x) = x \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$
1212. $f(x) = \operatorname{ar} \operatorname{ch} x$ * 1213. $f(x) = e^{3x} \cos 5x$

Racionális törtfüggvények integrálása

1214. $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ 1215. $f(x) = \frac{x+5}{x^2 - x + 5}$
1216. $f(x) = \frac{11-x}{6x^2 + x - 2}$ 1217. $f(x) = \frac{7x-14}{x^2 - x - 12}$
1218. $f(x) = \frac{5}{x^2 - 8x + 7}$ 1219. $f(x) = \frac{3x-5}{x^2 + 2x + 1}$
1220. $f(x) = \frac{5x^2 + 19x + 15}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$ 1221. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2 (x^2 + 1)}$
1222. $f(x) = \frac{3}{x^3 + 1}$ 1223. $f(x) = \frac{3x^2 - 30x + 51}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$
1224. $f(x) = \frac{2x^3 - 20x^2 + 70x - 76}{(x-1)(x-3)^3}$ 1225. $f(x) = \frac{7x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1}$
1226. $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x + 5}$ 1227. $f(x) = \frac{1}{x^3 - 7x^2 + 10x}$
1228. $f(x) = \frac{2x-3}{(5x-7)^2}$ 1229. $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 12x + 100}$
1230. $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{(x-2)(x-1)(x+1)}$ 1231. $f(x) = \frac{x^2}{2x-3}$
1232. $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 2x + 17}$ 1233. $f(x) = \frac{x}{(x-1)^3}$

Racionális törtfüggvények integráljára vezető helyettesítések.

$$\boxed{1234.} \quad f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$$

$$1235. \quad f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$$

$$1236. \quad f(x) = \frac{e^{3x}}{e^x - 1}$$

$$\neq 1237. \quad f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$$

$$1238. \quad f(x) = \frac{e^x}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$\boxed{1239.} \quad f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$\neq 1240. \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$1241. \quad f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$$

$$\boxed{1242.} \quad f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}$$

$$1243. \quad f(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$$

$$1244. \quad f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x + \sin x}$$

$$\boxed{1245.} \quad f(x) = \operatorname{tg}^3 x$$

$$1246. \quad f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}$$

$$1247. \quad f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\boxed{1248.} \quad f(x) = \frac{1}{\sin^4 x}$$

$$\boxed{1249.} \quad f(x) = \frac{1}{\cos^3 x}$$

Néhány irracionális típus integrálja

$$\boxed{1250.} \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{1251.} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4}$$

$$\boxed{1252.} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$$

$$\boxed{1253.} \quad f(x) = \sqrt{1 + 2x - x^2}$$

$$\boxed{1254.} \quad f(x) = \sqrt{2x^2 + 8x + 5}$$

$$1255. \quad f(x) = \sqrt{5x^2 - 7}$$

$$1256. \quad f(x) = \sqrt{3 - 2x^2}$$

$$\boxed{1257.} \quad f(x) = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

$$\boxed{1258.} \quad f(x) = \sqrt{\frac{x}{x - 1}}$$

$$\boxed{1259.} \quad f(x) = \frac{1}{x \sqrt{x + 4}}$$

$$1260. \quad f(x) = \frac{5x - 3}{\sqrt{2x + 7}}$$

$$1262. \quad f(x) = (x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x - 1}$$

$$1264. \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}}$$

$$1266. \quad f(x) = \frac{1}{x \sqrt{36 - x^2}}$$

$$1268. \quad f(x) = x^3 \sqrt{1 + x^2}$$

$$1261. \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x + 1}}$$

$$1263. \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x + 5}}$$

$$1265. \quad f(x) = \frac{1}{x - 1} \sqrt{\frac{x}{x - 1}}$$

$$* 1267. \quad f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$$

Vegyes feladatok

$$1269. \quad f(x) = (x - 3) \operatorname{tg}(x^2 - 6x + 7)$$

$$* 1270. \quad f(x) = \frac{\ln |\ln x|}{x}$$

$$* 1271. \quad f(x) = \frac{x \operatorname{Arc} \sin x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$1272. \quad f(x) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(3 - 2x)$$

$$* 1273. \quad f(x) = \sin \sqrt{x}$$

$$1274. \quad f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$$

$$1275. \quad f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

$$* 1276. \quad f(x) = \sin^5 x$$

$$* 1277. \quad f(x) = x^3 \operatorname{ch}(x^2 + 1)$$

$$1278. \quad f(x) = x^2 \operatorname{Arc} \sin x$$

$$* 1279. \quad f(x) = \sin(2x - 1) \operatorname{ch}(3x + 2)$$

$$1280. \quad f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$$

$$1281. \quad f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$$

$$* 1282. \quad f(x) = \frac{2x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$1283. \quad f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$1284. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - 4x - x^2}}$$

$$1285. \quad f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$$

$$* 1286. \quad f(x) = \sin^3 x \cos^{10} x$$

$$1287. \quad f(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2$$

$$1288. \quad f(x) = \frac{x^2}{x^4 - 1}$$

$$1290. \quad f(x) = \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$1292. \quad f(x) = \frac{3x - 5}{2x^2 - 12x + 23}$$

$$1289. \quad f(x) = \frac{3x + 6}{x^2 + 2x + 17}$$

$$1291. \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$1293. \quad f(x) = \frac{1}{\sin^2(3x - 2)}$$

29. Határozott integrálok számítása

Határozott integrálok számítása parciálisan

Számítsuk ki az alábbi függvények határozott integrálját a megadott intervallumban:

- | | | |
|-------|---------------------------------------|----------------------|
| 1294. | $f(x) = x^2 \ln x;$ | $[1; e]$ |
| 1295. | $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x};$ | $[-2; 5]$ |
| 1296. | $f(x) = \ln^2 x;$ | $[1; 3]$ |
| 1297. | $f(x) = x \cos x;$ | $[0; \frac{\pi}{4}]$ |
| 1298. | $f(x) = x^2 \sin x;$ | $[0; \pi]$ |
| 1299. | $f(x) = e^{2x} \cos 3x;$ | $[0; \frac{\pi}{2}]$ |
| 1300. | $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x};$ | $[0; \frac{\pi}{4}]$ |
| 1301. | $f(x) = \ln(1 + x);$ | $[0; 1]$ |
| 1302. | $f(x) = (2x - 3)e^{2 - \frac{x}{2}};$ | $[1; 2]$ |

Határozott integrálok számítása helyettesítéssel

- | | | |
|-------|--|------------------------|
| 1303. | $f(x) = \ln(5x - 2);$ | $[1; 4]$ |
| 1304. | $f(x) = x^2 \sqrt[3]{1 + x^3};$ | $[1; 3]$ |
| 1305. | $f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x};$ | $[\sqrt{3}; \sqrt{8}]$ |
| 1306. | $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}};$ | $[0; 4]$ |
| 1307. | $f(x) = \sin^3 x;$ | $[0; \frac{\pi}{4}]$ |

1308. $f(x) = \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}}$ $[0,6; 0,8]$
1309. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; $[0; a] \quad (a > 0)$
1310. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ $[0; 2]$
1311. $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$ $[0; \frac{\pi}{2}]$
1312. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ $[1; \sqrt{10}]$

30. Az integrálszámítás alkalmazásai

Területszámítás.

1313. Számítsuk ki $\int_0^2 (2x + 3) dx$ -et a $[0, 2]$ intervallum n egyenlő részre való felosztása mellett
 a) az alsó összegek határértékeként
 * b) azon téglányösszegek határértékeként, amelyekre

$$\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$

- * 1314. Legyen $f(x) = x^2 + 1$. Határozzuk meg a függvény $[2, 3]$ intervallumhoz tartozó grafikonja alatti A tartomány területét, a $[2, 3]$ intervallum n egyenlő részre való felosztása esetén, a felső összegek határértékeként.

1315. Legyen $f(x) = \frac{1}{x}$, és legyen az $[1, 2]$ intervallum

$$P_n = \{l_1, \dots, l_k, \dots, l_n\}, \quad y_k = [x_{k-1}, x_k] \text{ felosztása } x_k = 2^{\frac{k}{n}},$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n$ -nel definiált. Számítsuk ki $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ -et az alsó összegek határértékeként.

- 1316-1317. Osszuk fel a megadott intervallumokat n egyenlő részre, majd határozzuk meg

- * 1316. $\int_a^b e^x dx$ -et az alsó összegek

1317. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ -et a felső összegek határértékeként.

- 1318-1324. A Newton-Leibniz formula alkalmazásával határozzuk meg az alábbi függvénygörbék alatti területeket a megadott intervallumon és ábrázoljuk is a szóban forgó siktartományokat:

1318. $y = \sqrt{x}; [0, 1]$ 1319. $y = x^3 - 3; [3, 4]$
 * 1320. $y = \cos \frac{x}{2}; [0, \pi]$ 1321. $y = \frac{1}{2x+4}; [0, 3]$
 * 1322. $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}; [0, \frac{1}{3}]$ 1323. $y = \frac{1}{1+x^2}; [0, 1]$

1324. $y = \sin x$ a) $[\pi, 2\pi]$
 b) $[0, 2\pi]$

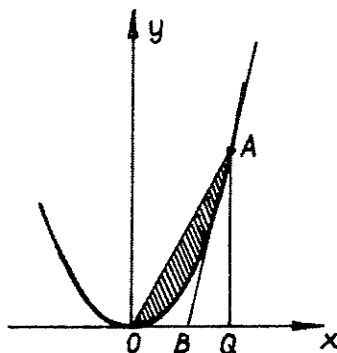
Megjegyzés: A görbe alatti terület pozitív mérőszámu, ha a terület az x tengely felett van, vagyis ha $f(x) \geq 0$; negatív, ha alatta van: $f(x) \leq 0$.

Ha a görbe az adott szakaszon metszi az x tengelyt (esetleg többször is), akkor az integrál az x tengely feletti és alatti részterületek előjeles területi mérőszámainak algebrai összegét szolgáltatja. Ha tehát a szóban forgó síkrész geometria területét kívánjuk meghatározni, akkor az x tengely alatti (feletti) részterületek előjeles mérőszámainak abszolút értékét kell összegeznünk.

$$\text{mes } T_{\text{gem.}} = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right|$$

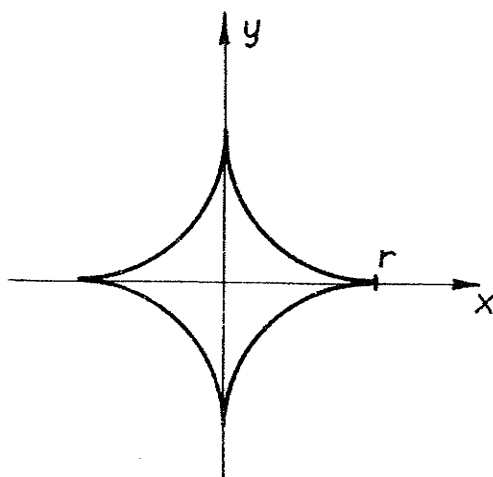
1325. Logarléc pontossággal határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $y = e^{-2x}$ görbe alatti terület x -től 1-ig terjedő szakasza 5,4-del legyen egyenlő!
1326. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $y = \frac{1}{x}$ görbe alatti terület $[a, b]$ és $[c, x]$ szakaszhoz tartozó két része egyenlő legyen! ($0 < a < b \leq c < x$)
- * 1327. Határozzuk meg az $y = x^2$ parabola és az $y = x + 2$ egyenes közötti területet. (Készítsünk vázlatot!)
- 1328-1333. Készítsünk vázlatot, majd határozzuk meg az alábbi görbék által határolt siktartomány geometria területét:
1328. $y = 4 - x^2$ és $y = 0$ 1329. $y = \frac{1}{x}$ és $y = 2,5 - x$
1330. $y = \sin x$ és $y = \frac{2}{\pi} x$ 1331. $\frac{1}{x^2} + y^2 = 1$ és $x + y = 1$

1332. $y = x^2 + 2x$ és $y = 4 - x^2$
- * 1333. $y = x^4$ és $y = 3x^2 - 2$
- * 1334. Határozzuk meg azt a területet, amelyet az y tengely, az $y = \sqrt{x}$ görbe, valamint ennek $x_0 = 4$ abszcisszájú pontjához tartozó érintője határol.
1335. Határozzuk meg az $y = x(1 - x)$ parabola, továbbá az $x_0 = 0$ és $x_1 = 2$ abszcisszájú pontjaiban húzott érintők által határolt területet.
1336. Igazoljuk, hogy a bevonalkázott parabola-szelet területe $\frac{2}{3}$ része a hur, az x tengely és az érintő által határolt OAB háromszög területének!



1336. ábra

- * 1337. Számítsuk ki az $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ paraméteresen megadott r sugaru kör területét!
1338. Mekkora az $x = \frac{a}{\cos t}$; $y = b \sin t$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbe $[0, \frac{\pi}{4}]$ intervallumhoz tartozó íve alatti terület?
- * 1339. Határozzuk meg az $x = r \cos^3 t$; $y = r \sin^3 t$ egyenletrendszerrel meghatározott asztroid területét!



1339. ábra

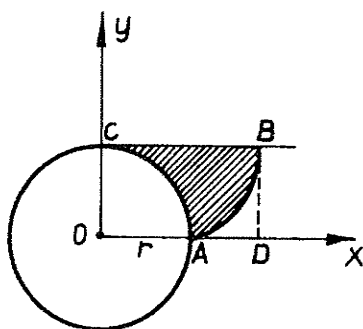
1340.

Kiszámítandó egy teljes ciklois ív alatti terület!

*

1341.

Határozzuk meg az ábrán bevonalkázott ABC idom területét! $\widehat{AB}$ az r sugarú körhöz tartozó evolvens íve, $\widehat{AC}$ egy negyedkörív, $\overline{CB}$ pedig egy x tengellyel párhuzamos egyenes szakasz.



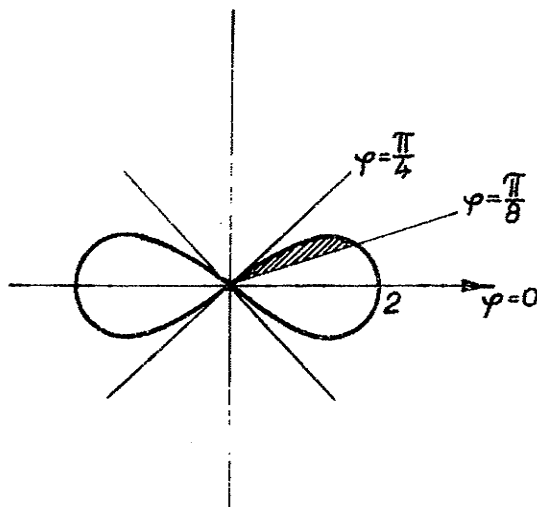
1341. ábra

1342.

Mekkora az $r = 2a \cos \varphi$ görbe, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ íve alatti terület?

[A görbe paraméteres egyenletrendszere: $x(\varphi) = (2a \cos \varphi) \cos \varphi$
 $y(\varphi) = (2a \cos \varphi) \sin \varphi$]

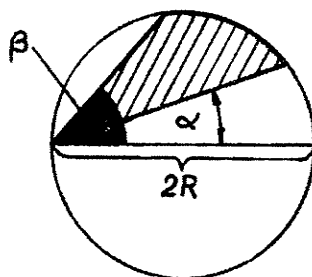
1343. Számítsuk ki az $r = e^{\frac{\varphi}{2}}$ logaritmikus spirális $0 \leq \varphi \leq \pi$ ival által meghatározott szektortartomány területét!
1344. Számítsuk ki az $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkáta $\frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ival által meghatározott szektortartomány területét!



1344. ábra

1345.

Határozzuk meg az ábrán bevonalkázott szektor területét!



1345. ábra

1346. Határozzuk meg az $r \leq 4$ körlap $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkátán kívül eső részének területét.

- * 1347. Határozzuk meg az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkáta határolta siktartomány $r = 2$ körön kívül eső részének területét.
(Készítsünk vázlatot, s ennek alapján becsüljük meg az eredményt!)
1348. Határozzuk meg φ_0 értékét úgy, hogy az $r = 2\varphi$ archimédesi spirális $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ íve által meghatározott szektortartomány területe 20 területegység legyen.

Ivhossz-számítás

- 1349-1353. Számítsuk ki az alábbi görbék megadott intervallumhoz tartozó ívének a hosszát:

1349. $y = x^{\frac{3}{2}}$; $[0, 4]$ 1350. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$; $[0, a]$

1351. $y = \ln(1 - x^2)$; $[0, \frac{1}{2}]$ 1352. $y = \frac{x^2}{2}$; $[0, 1]$

1353. $y = \ln x$; $[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$

1354. Logarléc pontossággal határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $y = \operatorname{ch} x$ görbe 0-tól x -ig terjedő ívének hossza 15 egység legyen!

- * 1355. Határozzuk meg az $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ egyenlettel megadott görbe (asztroid) teljes ivhosszát!

- 1356-1358. Határozzuk meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbék ivhosszát:

1356.
$$\begin{aligned} x &= e^t \sin t \\ y &= e^t \cos t \end{aligned} \quad ; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

1357.
$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{8} \sin 2t \end{aligned} \quad ; \quad [0, 2\pi]$$

* 1358.
$$\begin{aligned} x &= \cos 2t \\ y &= \sin t \end{aligned} \quad ; \quad [0, \frac{\pi}{2}]$$

* 1359. Számítsuk ki a ciklois egy teljes ívének hosszát!

1360-1363. Határozzuk meg az alábbi polárkoordinátás egyenletekkel megadott görbék ívhosszát:

$$1360. \quad r = a(\varphi^2 - 1); \quad -1 \leq \varphi \leq 1$$

$$* 1361. \quad r = 2a(1 + \cos \varphi); \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$1362. \quad r = c \varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$* 1363. \quad r = \frac{1}{\varphi}; \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$$

Forgástestek térfogata

1364-1366. Számítsuk ki az alábbi egyenletekkel megadott görbevek alatti tartományok x tengely körüli megforgatásával keletkező forgástestek térfogatát:

$$1364. \quad y = \frac{1}{x}; \quad 1 \leq x \leq 3 \quad 1365. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad 1 \leq x \leq 4$$

$$1366. \quad y = x e^x \quad 0 \leq x \leq 1$$

1367-1369. Forgassuk meg az alábbi görbeveket az y tengely körül és határozzuk meg a megfelelő forgástestek térfogatát:

$$\boxed{1367.} \quad y = \frac{1}{1+x^2} \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1$$

(A számítás elvégzése előtt készítsünk vázlatot és ennek alapján becsüljük meg a várható eredményt!)

$$* 1368. \quad y = \ln x \quad 0,5 \leq y \leq 1,5 \quad 1369. \quad y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \quad 2 \leq y \leq 4$$

1370. Egy hordó dongájának az egyenlete:

$$y = 1 + \cos \frac{x}{2}, \quad \text{ahol } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Számítsuk ki a hordó köbtartalmát!

* 1371. Határozzuk meg egy teljes ciklois ív alatti tartomány x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogatát.

* 1372. Forgassuk meg a cikloisnak $0 \leq t \leq \pi$ ívét az y tengely körül és határozzuk meg a megfelelő forgástest térfogatát.

1373-1375. Határozzuk meg az alábbi görbeivék alatti tartományok x tengely körüli megforgatásával keletkező forgástestek térfogatát.

1373. $x = t$ $y = \sin t$; $[0, \pi]$

1374. $x = t - th t$; $y = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$; $0 = t = t_0$

1375. $x = 2a \cos^2 \varphi$; $y = a \sin 2\varphi$; $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

1376. Az $y = x^{\frac{3}{2}}$ görbe (Neil-féle parabola) $y \geq 0$ ágának $0 \leq x \leq a$ ívét megforgatjuk mindkét tengely körül. Milyen a érték mellett lesz a megfelelő két forgástest térfogata egyenlő?

* 1377. Messük el az $x^2 + y^2 = 2$; $y \geq 0$ félkört az $y = x^2$ parabolával. Számítsuk ki az ábrán bevonalkázott siktartomány x tengely körüli megforgatásával nyert test térfogatát.

* 1378. Az $y = x^2$ görbe y tengely körüli megforgatásával keletkező "tartályban" 2 egység magasságig folyadékot töltöttünk. Mennyivel emelkedik a szabad folyadékfelszín, ha téfrogategy-sényi folyadékot töltünk még hozzá?

Forgásfelületek felszíne

- * 1379. Határozzuk meg az $y = \sqrt{x}$ görbe x tengely körüli megforgatásával előálló forgásfelület $1 \leq x \leq 4$ szakaszához tartozó részének felszínét.
1380. Ábrázoljuk az $y = \sqrt{1-x}$ görbét! Forgassuk meg a görbe y tengely által levágott korlátos ívét az x tengely körül, és határozzuk meg a keletkező forgásfelület felszínét!
1381. Határozzuk meg a értékét úgy, hogy az $y = \sqrt{x}$ görbe x tengely körüli megforgatása által keletkezett forgásfelület a-tól 6-ig terjedő szelete felszínének mértéke 50 területegység legyen. ($a < 6$)
1382. Határozzuk meg a értékét úgy, hogy az $y = \sqrt{a+x}$ görbe y tengely által levágott szakaszának x tengely körüli megforgatása által keletkező forgásfelület felszíne 20 területegység legyen. ($a > 0$)
- 1383-1396. Forgassuk meg az alábbi görbék megadott intervallumhoz tartozó részét a megadott tengely körül, és számítsuk ki a keletkező forgásfelület felszínét:
1383. $y = x^3$ $0 \leq x \leq 1$; x tengely körül
1384. $y = x^2$ $0 \leq x \leq 1$, y tengely körül
- * 1385. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $0 \leq x \leq a$; $y \geq 0$;
 x tengely körül
1386. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; x tengely körül
1387. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; y tengely körül
1388. $x = t \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = 3 + t \frac{\sqrt{2}}{2}$; $0 \leq t \leq \sqrt{2}$; x tengely körül
(Ellenőrizzük az eredményt elemi úton!)
1389. $x = 5 + 5 \cos t$; $y = 10 + 5 \sin t$ $0 \leq t \leq 2$ x tengely körül
majd y tengely körül

- * 1390. $x = 2 \cos t - \cos 2t$; $0 \leq t \leq \pi$ x tengely körül
 $y = 2 \sin t - \sin 2t$
- * 1391. $x = r(t - \sin t)$ (ciklois) x tengely körül
 $y = r(1 - \cos t)$
- 1392.** Az előbbi cikloist szimmetriatengelye körül.
- * 1393. $r = e^\varphi$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ polártengely körül
1394. $r = R(1 + \cos \varphi)$ $0 \leq \varphi \leq \pi$ polártengely körül
- * 1395. $r = 2 \sin \varphi$ (teljes görbét) polártengely körül
 (Rajzoljuk meg a görbét, s ellenőrizzük az eredményt a Guldin-szabállyal!)
1396. $r^2 = 4 \cos 2\varphi$ lemniszkátát polártengely körül

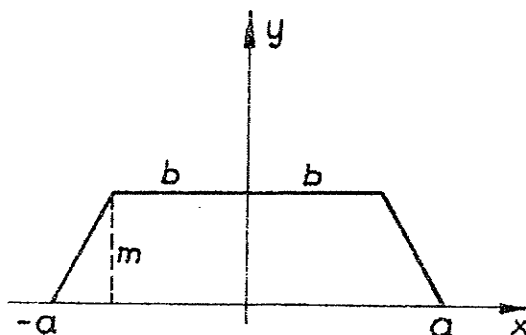
Elsőrendű nyomaték, súlypont

- 1397.** Határozzuk meg az $y = \sin x$; $0 \leq x \leq \pi$ görbe alatti siktartomány súlypontjának koordinátáit!
- 1398-1404. Feleljen meg a homogén, egységnyi sűrűségű, vékony lemeznek az x, y síkon az alábbi görbék által határolt siktartomány, amelynek súlypontját kell meghatározni:
 (A számítás előtt végezzünk mindig becslést!)
1398. $y = x^3$; $x = 0$, $y = 1$
1399. $y = \frac{1}{x}$; $x = 1$, $x = 4$
1400. $y = \operatorname{ch} x$; $y = 3$
- * 1401. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $y \geq 0$; $y = 0$
1402. $x^2 + y^2 - 5y = 0$, $y < 2,5$; $y \leq 0$; $x = 2$
- 1403.** $x = r(t - \sin t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$; $y = 0$
 $y = r(1 - \cos t)$

$$1404. \quad \begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned} \quad ; \quad 0 \leq t \leq \pi; \quad y = 0$$

1405. Határozzuk meg egy derékszögű háromszög alakú, homogén, egységnyi sűrűségű lemez súlypontját.

1406. Határozzuk meg az alábbi egyenlőszáru trapéz alakú, homogén, egységnyi sűrűségű lemez súlypontját:



1406. ábra

1407-1411. Határozzuk meg az alábbi görbeivék súlypontját: (a tömegeloszlás homogén; egységnyi hosszúságu ívdarab tömege egységnyi legyen.)

$$1407. \quad y = + \sqrt{1 - x^2} \quad (\text{félkörív})$$

$$1408. \quad y = \operatorname{ch} x \quad -1 \leq x \leq 1$$

1409. Egy teljes ciklois ív

$$* \quad 1410. \quad \begin{aligned} x &= \cos s \\ y &= \sin s \end{aligned} \quad ; \quad 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$$

* 1411. Számítsuk ki az $r = 2e^\varphi$ logaritmikus spirális $0 \leq \varphi \leq \pi$ ívdarabjának az y tengelyre vonatkozó elsőrendű nyomatékát.

1412-1414. Határozzuk meg az alábbi görbék alatti tartományok x tengely körüli megforgatásával származtatható homogén, egységnyi sűrűségű forgástestek súlypontját:

$$1412. \quad y = \frac{r}{h} x; \quad 0 \leq x \leq h$$

$$1413. \quad y = +\sqrt{1-x^2}; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{negyedkörív})$$

$$1414. \quad \begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned}; \quad 0 \leq t \leq \pi \quad (\text{fél ciklois iv})$$

1415-1417. Határozzuk meg az alábbi görbék x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelületek súlypontját: (a felületek egy területegységének tömege legyen egy tömegegység, s a tömegeloszlás legyen egyenletes)

$$* \quad 1415. \quad y = x; \quad 1 \leq x \leq 3 \quad (\text{csonkakúp-palást})$$

$$1416. \quad y = +\sqrt{1-x^2}; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\boxed{1417.} \quad r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}; \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

Másodrendű nyomaték

1418-1419. Feleljen meg a homogén egységnyi sűrűségű vékony lemeznek az x , y síkon az alábbi görbék által határolt siktartomány, amelynek másodrendű (tehetetlenségi vagy inercia) nyomatékát kell meghatározni, a megadott tengelyre vonatkozóan:

$$\boxed{1418.} \quad y^2 = 2x; \quad x = 8 \quad I_x = ?$$

$$* \quad 1419. \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad I_y = ?$$

1420-1422. Számítandó annak a homogén egységnyi sűrűségű vékony lemeznek a megadott tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka, amelynek alakja:

$$* \quad 1420. \quad (\text{a és b oldalú}) \text{ téglalap}; \quad \text{az a oldalára}$$

$$1421. \quad (\text{a és b befogóju}) \text{ derékszögű háromszög}; \quad \text{az a befogójára}$$

$$1422. \quad (\text{a alapu és m magasságu}) \text{ egyenlőszáru háromszög}; \quad \text{az alapjára}$$

1423-1424. Határozzuk meg egy l hosszúságú, vékony, homogén rud tehetetlenségi nyomatékát egy, a rud végpontján áthaladó

$$1423. \quad \text{a rudra merőleges tengelyre vonatkozóan}$$

$$\boxed{1424.} \quad \text{a ruddal } \alpha \text{ szöget bezáró tengelyre vonatkozóan.}$$

- * 1425. Határozzuk meg egy homogén egységnyi sűrűségű, R sugaru, h magasságú hengernek tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.
1426. Határozzuk meg egy homogén egységnyi sűrűségű, R sugaru, h magasságú kupnak tengelyére vonatkozó másodrendű nyomatékát.
1427. Határozzuk meg egy homogén egységnyi sűrűségű, R sugaru gömb átmérőjére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.
1428. Egy tartály egyik oldallapja függőleges síkban fekvő trapéz. Számítandó e lapra ható nyomóerő, ha a vízszint magassága ismert: H .

31. Improprius integrálok

1429. Határozzuk meg az $y = e^{-x}$ görbe alatti területet a $[0, +\infty)$ intervallumon.

1430-1431. Határozzuk meg az alábbi görbevek alatti tartományok x tengely körüli megforgatásával keletkező forgástestek térfogatát.

1430. $y = \frac{1}{x} \quad [1, +\infty)$

1431. $y = xe^x \quad (-\infty; 0]$

1432-1436. Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét, amennyiben konvergensek:

1432. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2x-1)^2} dx$

1433. $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

1434. $\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}} dx$

*** 1435.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+3x^2} dx$

1436. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

1437. Konvergense-e: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$?

1438-1442. Konvergensek-e az alábbi improprius integrálok, s ha igen, határozzuk meg az értéküket:

1438. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

*** 1439.** $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

1440. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}} dx$

1441. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$1442. \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\boxed{1443.} \quad \text{Igazoljuk, hogy az } \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \text{ integrál konvergens.}$$

1444-1447. Döntsük el az alábbi improprius integrálok létezését:

$$1444. \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$\approx 1445. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} dx$$

$$* \quad 1446. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$\approx 1447. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$$

$$\boxed{1448.} \quad \text{Mutassuk meg, hogy az } \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} \text{ integrál divergens,}$$

viszont létezik a Cauchy-féle főérték.

Numerikus integrálás

- 1449-1450. Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét téglalap-, trapéz-, ill. Simpson-szabállyal, végül adjuk meg az integrál pontos értékét.
(Mindhárom módszer alkalmazásakor 10 egyenlő részre osszuk fel a megadott intervallumot, a szükséges függvényértékeket pedig logarléc-pontossággal számoljuk.)

$$\boxed{1449.} \quad \int_1^2 x^2 dx \qquad \approx 1450. \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

- * 1451. Számítsuk ki $\ln 6 = \int_1^6 \frac{dx}{x}$ közelítő értékét Simpson-szabállyal, $\xi = 5 \cdot 10^{-2}$ pontossággal.

1452. Számítsuk ki közelítőleg az $y = x^3$ görbe ívhosszát a $0 \leq x \leq 1$ intervallumon Simpson-szabállyal! (Legyen $h = \frac{1}{8}$.)

- * 1453. Határozzuk meg közelítőleg egy sinus-hullám ívhosszát. (Legyen $h = \frac{\pi}{8}$; elég egy negyed-hullámot számítani.)

1454. Egy 20 méter széles folyó keresztmetszetét kell közelítőleg meghatározni. Mélységét 2 méterenként mérték:

Parttól mért távolság (m)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Mélység (m)	0,2	0,5	0,9	1,1	1,3	1,7	2,1	1,5	1,1	0,6	0,2

1455. Számítsuk ki Simpson-szabállyal

$$\int_0^1 \sqrt{1+x+x^2+x^3} dx \text{ közelítő értékét!}$$

$$[\text{Legyen } h = \frac{1}{4}]$$

1456. Határozzuk meg közelítőleg az $y = \sqrt{1+x^3}$ görbe alatti terület mérőszámát a 0 és 2 határok között Simpson-szabállyal. (Legyen $h = \frac{1}{2}$.)
- * 1457. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ellipszis kerületét közelítőleg, Simpson-szabállyal. (Az egyenletet írjuk paraméteres alakba; az ívhossz negyedrészt számítsuk úgy, hogy a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumot négy egyenlő részre osztjuk, s az eredményt szorozzuk négygyel.)

33. Néhány kvadraturával megoldható differenciálegyenlet-típus

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

1458-1464. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

1458. $y' = -\frac{x}{y}$

* 1459. $xy' = y^2 - y$

1460. $(1+x^2)^2 y'^2 - (1-y^2) = 0$

* 1461. $y' \sin x = y \ln y$

1462. $(1+y^2)x dx + (1+x^2) dy = 0$

1463. $xy + y' \sqrt{1-x^2} = 0$

* 1464. $y'^2 + 4y^2 - 1 = 0$

1465-1468. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek megadott kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldását:

1465. $xy' + 2y = 0, \quad x_0 = 3; \quad y_0 = -1$

1466. $dy + 2xy dx = 0, \quad x_0 = 1; \quad y_0 = 2$

1467. $e^{x-y} y' = \operatorname{sh} 2x, \quad y(0) = 0$

* 1468. $x^2 y' - \cos 2y = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{\pi}{4}$

1469. A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádium-mennyiséggel.

A kiindulási anyag mennyiségének hány százaléka bomlik fel 100 év alatt, ha a rádium felezési ideje 1600 év?

1470. Irjuk fel azoknak az első negyedben fekvő görbéknek az egyenletét, amelyek bármely pontjában húzott érintőinek a koordinátatengelyek közötti szakaszát az érintési pont felezi.

1471. Irjuk fel azoknak a görbéknek az egyenletét, amelyek bármely pontjában húzott érintőinek a koordinátatengelyek közötti szakaszát az érintési pont 1 : 2 arányban osztja.

1472. Irjuk fel azoknak a görbéknek az egyenletét, amelyeknél az érintési pont tengelyeken levő vetületeit összekötő egyenes párhuzamos az érintővel.

- * 1473. Határozzuk meg azoknak a görbéknek az egyenletét, amelyek szubtangense állandó nagyságu.
1474. Irjuk fel azon első síknegyedben fekvő, monoton emelkedő görbék egyenletét, amelyeknél a szubtangens az érintési pont abszcisszájának n -szerese. Ábrázoljuk a megoldásgörbéket $n = 1$, $n = 2$, $n = -1$ esetben.
- * 1475. Mi az egyenlete annak a görbének, amelyiknél a görbe alatti terület a és x között; arányos a megfelelő pontok közötti görbeív hosszával?
- 1476-1477. Irjuk fel azon görbék polárkoordinátás egyenletét, amelyeknél az alábbi módon lehet érintőt szerkeszteni:
1476. Az érintési pont radiusz-vektorára a pólusban merőlegest állítunk, arra egy adott távolságot felmérünk, s ennek végpontját az érintési ponttal összekötjük.
1477. Az érintési ponthoz tartozó radiusz-vektorra a pólusban merőlegest állítunk, arra egy adott távolságot felmérünk, annak a végpontját az érintési ponttal összekötjük, s erre az érintési pontban megint merőlegest állítunk.
1478. Irjuk fel azon görbék egyenletét, amelyek a koordináta-rendszer kezdőpontjából kiinduló sugarakat állandó szögben metszik.
- * 1479. Milyen meridinán-görbével készítsük azt a forgásfelület alaku homorú tükröt, amely a tengelyével párhuzamosan beeső sugarakat egy ponton keresztül veri vissza?

Homogén fokszámú differenciálegyenletek

1480-1483. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

1480. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

1481. $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$

1482. $(y \sin \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y}) y' + y \cos \frac{x}{y} = 0$

1483. $x e^{\frac{y}{x}} + y - xy' = 0$

* 1484.

Mely görbékre áll fenn az

$$\overline{OM} = \overline{PM} \text{ egyenlőség?}$$

(O az origót, P az érintési pontot, M pedig az érintőnek az y tengellyel való metszéspontját jelenti.)

1485.

Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyeknél bármely ponthoz tartozó szubnormális ugyanakkora, mint amekkora darabot a szóban forgó ponthoz tartozó érintő az y tengelyből ki-metsz.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

1486-1491.

Oldjuk meg a következő lineáris differenciálegyenleteket:

1486. $y' + y \cdot x - x = 0$

1487. $y' - \frac{y}{x} = x^2$

1488. $y' + y = \sin 2x$

1489. $y' + 2xy = x e^{-x^2}$

* 1490. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$

1491. $y' \sin x + \cos x = 1 + y$

1492-1494.

Ábrázoljuk az alábbi lineáris differenciálegyenletek adott kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldás-görbéit:

* 1492. $y' + 2y - 5 = 0 \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 2, 5$

1493. $y' \cos x + y \sin x = 1 \quad y(0) = 1$

1494. $y' + \frac{y}{x} + e^x = 0 \quad y(1) = 0$

1495.

Kapcsoljunk sorba egy ohmos ellenállást és egy önindukciós tekercset egy váltakozó feszültséggel táplált áramkörbe. Határozzuk meg az áramerősségei az idő függvényében!

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

1496.

A mechanika tanítása szerint a két végén felfüggesztett, és csak saját súlyával megterhelt kötélt vagy lánc, olyan görbealakot vesz fel, amely görbének az alábbi differenciálegyenletet kell ki-elégítenie:

$$k y'' = \sqrt{1 + y'^2}$$

Határozzuk meg a görbe egyenletét!

1497-1498. Határozzuk meg a következő differenciálegyenletek általános megoldását:

1497. $y'' \sin x \cos x - y' = 0$ * 1498. $x \ln x y'' = y' + x \ln^2 x$

1499. Oldjuk meg az $y'' = \frac{x^2}{2} + 2x$ differenciálegyenletet. Határozzuk meg azt a partikuláris megoldást, amelynek függvénygörbéje
a) átmegy a $P_1(0, 1)$ és $P_2(2, 0)$ ponton
b) átmegy a $P(1, 3)$ ponton, és az ezen a ponton átmenő, x tengellyel párhuzamos egyenest 45° -os szög alatt metszi.

* 1500. Határozzuk meg az $y'' x + y' = 0$ differenciálegyenlet azon partikuláris megoldását, amelynek függvénygörbéje az $y = 2x - 1$ egyenest az $x = 2$ abszcisszájú pontban érinti.

1501. Keressük meg mindazokat a görbéket, amelyeknél bármely pontban a görbületi sugár egyenlő hosszúságú az illető ponthoz tartozó normálisnak a görbepont és az x tengely közötti szakaszával!

1502-1504. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

1502. $y y'' + y'^2 = 0$ 1503. $2 y y' - y'' = 0$

1504. $y(y-1)y'' + y'^2 = 0$

1505. Ábrázoljuk az $y''(y-1) = 2y'^2$ differenciálegyenlet azon partikuláris megoldás görbáját, amely átmegy $P_1(1, 2)$ és $P_2(-1, 0)$ pontokon.

1506. Ábrázoljuk az $y y'' + y'^2 = 1$ differenciálegyenlet azon megoldás-görbáját, amely az $y = 1$ egyenest az $x = 0$ abszcisszájú pontban érinti.

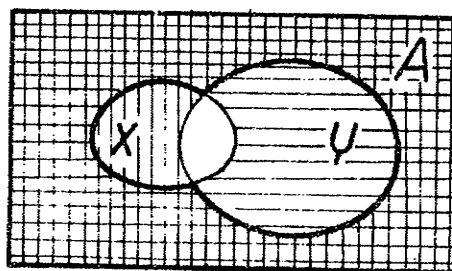
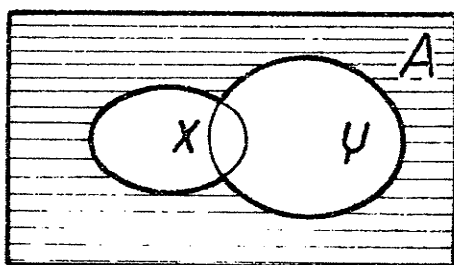
Megoldások

1. Azt kell megmutatnunk, hogy

- a) abból, hogy $x \in \overline{X \cup Y}$ következik, hogy $x \in \overline{X} \cap \overline{Y}$ és
 b) abból, hogy $x \in \overline{X} \cap \overline{Y}$ következik, hogy $x \in \overline{X \cup Y}$

Bizonyítás: a) ha $x \in \overline{X \cup Y}$ akkor $x \notin X \cup Y$,
 tehát x nem eleme sem X -nek, sem Y -nak, vagyis,
 valóban $x \in \overline{X}$ és $x \in \overline{Y}$ és így $x \in \overline{X} \cap \overline{Y}$.
 b) ha $x \in \overline{X} \cap \overline{Y}$ akkor $x \in \overline{X}$ és $x \in \overline{Y}$ tehát $x \notin X$
 és $x \notin Y$ amiből következik, hogy $x \notin X \cup Y$ vagyis $x \in \overline{X \cup Y}$.

3.



$$\overline{X \cup Y} \equiv$$

$$\overline{X} \equiv \overline{Y} \equiv \overline{X \cap Y} \equiv$$

3. ábra

5. a) Mivel abból, hogy $x \in Y$ mindig következik, hogy $x \in X \cup Y$, csak azt kell megmutatni, hogy $X \subset Y$ esetén abból, hogy $x \in X \cup Y$ következik, hogy $x \in Y$. (Ez pedig nyilván igaz, mert ha $x \in X \cup Y$ akkor vagy $x \in Y$ vagy $x \in X$, de mivel $X \subset Y$ tehát $x \in X$ esetén is következik, hogy $x \in Y$.)
 b) azt kell megmutatni, hogy $x \in X$ -ből következik $x \in Y$. (Ha $x \in X$ akkor $x \in X \cup Y$ és mivel $X \cup Y = Y$ tehát $x \in Y$.)

* 7. Következik a 6. feladatból.

* 8. Következik az 5. feladatból.

- ± 9-18. feladatok megoldása történhet vagy közvetlenül a halmazok egyenlőségének a definíciója alapján, vagy felhasználva a halmazalgebra "műveleti azonosságait" (Jegyzet 1.1 - 1.8)

A közvetlenül a definíción alapuló bizonyítás azonban összetettebb feladatok esetében általában meglehetősen hosszadalmas (pl. a 18-as feladatnál.)

9. 1. bizonyítás: halmazok egyenlőségének a definíciója alapján.

- a) ha $x \in \overline{X \cap Y}$ akkor $x \notin X \cap Y$ de mivel $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$ azért $x \notin X \cap \overline{Y}$ tehát vagy $x \notin X$ vagy $x \notin \overline{Y}$, azaz $x \in \overline{X}$ vagy $x \in Y$ ami éppen azt jelenti, hogy $x \in \overline{X} \cup Y$
 b) ha $x \in \overline{X} \cup Y$ akkor $x \in \overline{X}$ vagy $x \in Y$ tehát $x \notin X$ vagy $x \notin \overline{Y}$ ennél fogva $x \notin X \cap \overline{Y}$, de $X \cap \overline{Y} = X \setminus Y$ miatt ez éppen azt jelenti, hogy $x \notin X \setminus Y$ vagyis $x \in \overline{X \setminus Y}$

2. bizonyítás: A "műveleti azonosságok" felhasználásával:

$$\overline{X \setminus Y} = \overline{X \cap \overline{Y}} = \overline{X} \cup Y$$

10. 1. bizonyítás: (közvetlenül a definíció alapján)

- a) ha $x \in X \setminus (X \cap Y)$ akkor $x \in X$ és $x \notin X \cap Y$, tehát $x \in X$ és $x \notin Y$ vagyis $x \in X \setminus Y$
 b) ha $x \in X \setminus Y$, akkor $x \in X$ és $x \notin Y$ tehát $x \in X$ és $x \notin X \cap Y$ vagyis $x \in X \setminus (X \cap Y)$

2. bizonyítás: (formális "számolással")

$$X \setminus (X \cap Y) = X \cap \overline{(X \cap Y)} = X \cap (\overline{X} \cup \overline{Y}) = (X \cap \overline{X}) \cup (X \cap \overline{Y}) = \emptyset \cup (X \cap \overline{Y}) = X \cap \overline{Y} = X \setminus Y$$

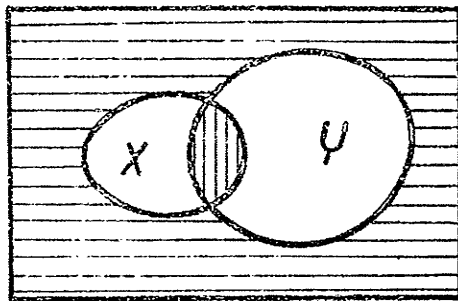
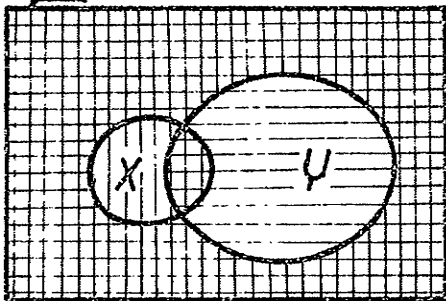
11. $(X \cup Y) \setminus Y = (X \cup Y) \cap \overline{Y} = (X \cap \overline{Y}) \cup (Y \cap \overline{Y}) = (X \cap \overline{Y}) \cup \emptyset = X \cap \overline{Y} = X \setminus Y$

12. $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \cap \overline{Y}) \cap \overline{Z} = X \cap (\overline{Y} \cap \overline{Z}) = X \cap \overline{(Y \cup Z)} = X \setminus (Y \cup Z)$

13. $X \setminus (Y \setminus Z) = X \cap \overline{(Y \setminus Z)} = X \cap \overline{(Y \cap \overline{Z})} = X \cap (\overline{Y} \cup Z) = (X \cap \overline{Y}) \cup (X \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$

18. $(\overline{X} \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) = [\overline{X} \cap (X \cup \overline{Y})] \cup [Y \cap (X \cup \overline{Y})] = [(\overline{X} \cap X) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y})] \cup [(Y \cap X) \cup (Y \cap \overline{Y})] = \emptyset \cup (\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup (Y \cap X) \cup \emptyset = (X \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y})$

19.



$$\begin{aligned}\bar{X}UY &\equiv \\ XU\bar{Y} &\equiv \\ (\bar{X}UY) \cap (XU\bar{Y}) &\equiv\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X \cap Y &\equiv \\ \bar{X} \cap \bar{Y} &\equiv \\ (X \cap Y) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y}) &\equiv\end{aligned}$$

19. ábra

- * 20. Akkor, és csakis akkor, ha $Y \subset X$
(a 17-es és az 5-ös feladat alapján)

21. a) $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
 $Y = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$

Mindkét halmaz 8 elemet tartalmaz, tehát a feladat megoldható. Egy lehetséges kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés pl. az, hogy mindkét halmaz elemeit monoton növekvő sorrendben írjuk fel és az azonos sorszámúakat feleltetjük meg egymásnak.

b) Mivel X bármely eleméhez hozzárendelhetjük Y bármely elemét $8! = 40\,320$ féle megoldása lehet a feladatnak.

22. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 $Y = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Egy lehetséges megoldása a feladatnak pl. a következő kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés:

X	Y
1	←→ 0
2	←→ 1
3	←→ -1
4	←→ 2
5	←→ -2
6	←→ 3
7	←→ -3
.....	

23. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 $Y = \{7, 14, 21, 28, 35, \dots\}$

Kölcsönösen egyértelmű pl. az a megfeleltetés, amely minden $n \in X$ -hez $7n \in Y$ -t rendel.

24. Kölcsönösen egyértelmű pl. az a megfeleltetés, amely minden $x \in X$ -hez az $y = 2x$ ($\in Y$)-t rendel.

25. Rendeljük hozzá pl. minden $x \in X$ -hez Y -nak $y = \frac{1}{x}$ elemét.

26. Rendeljük hozzá például

$$\frac{1}{2} \in X\text{-hez} \quad 0 \in Y\text{-t}$$

$$\frac{1}{3} \in X\text{-hez} \quad 1 \in Y\text{-t}$$

$$\frac{1}{4} \in X\text{-hez} \quad \frac{1}{2} \in Y\text{-t}$$

$$\frac{1}{5} \in X\text{-hez} \quad \frac{1}{3} \in Y\text{-t}$$

.....

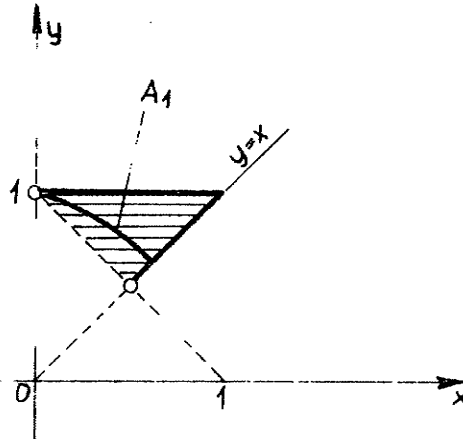
$$\frac{1}{n} \in X\text{-hez} \quad \frac{1}{n-2} \in Y\text{-t}$$

.....

és X azon elemeihez, amelyek nem egyenlők $\frac{1}{n}$ -nel ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$), rendeljük hozzá $y = x \in Y$ -t. Így X minden eleméhez hozzárendeltünk

pontosan egy Y -beli elemet és Y minden elemét pontosan egy X -beli elemhez rendeltük hozzá, tehát a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű.

27. $f: H \rightarrow A$ ahol $A = \{(x, y): [(y \leq 1) \text{ és } (y \geq x) \text{ és } (y > 1 - x)]\}$
 [az első 2 egyenlőtlenség a H -beli háromszögek oldalainak jelöléséből következik, a harmadik (az ún. "háromszögegyenlőtlenség") pedig azt fejezi ki, hogy a két rövidebb oldal hosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hossza. Az A halmaz tehát egy olyan Δ , amelyet az $y = 1$, $y = x$ és $y = 1 - x$ egyenesek határolnak, az $y = 1$ és az $y = x$ egyenesen fekvő oldalai hozzátartoznak A -hoz, a háromszög $y = 1 - x$ egyenesek fekvő oldala pedig $\bar{A}$ -hoz tartozik (a $(0, 1)$ és $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ csúcspontok is $\bar{A}$ -nak elemei].



27. ábra

Jelöljük f_1 -gyel f -nek H_1 -re való leszűkítését. Ekkor $f_1: H_1 \rightarrow A_1$ ahol $A_1 = \{(x, y): [(x, y) \in H \text{ és } x^2 + y^2 = 1]\}$ Tehát A_1 az $x^2 + y^2 = 1$ körvonalnak az A -ba eső íve. Jelöljük f_2 -vel f -nek H_2 -re való leszűkítését. Ekkor $f_2: H_2 \rightarrow A_2$ ahol $A_2 = \{(x, y): [(x, y) \in H \text{ és } (vagy } x = y \text{ vagy } y = 1)]\}$ tehát A_2 az A háromszögnek az $y = x$ és $y = 1$ egyenesen fekvő 2 oldala, természetesen a $(0, 1)$ és $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ csúcspontok nélkül.

Jelöljük f_3 -mal f -nek H_3 -ra való leszűkítését. Ekkor $f_3: H_3 \rightarrow A_3$
 ahol $A_3 = \{(x, y): [(x, y): H \text{ és } x = y = 1] - \{(1, 1)\}\}$
 tehát A_3 egyetlen eleme az (x, y) sík $(1, 1)$ koordinátájú pontja.

28.

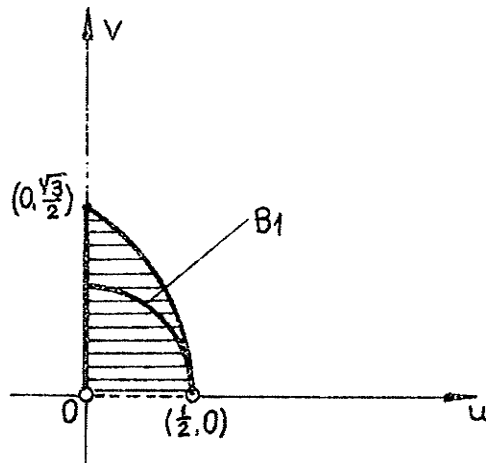
Mivel a leképezés az (u, v) sík első negyedére történik, tehát $u \geq 0$ és $v \geq 0$

$v = 0$ esetén azonban $x + y = 1$ adódnék, vagyis elfajuló háromszög képét kapnánk, tehát $v > 0$. Továbbá, mivel

$$y = \sqrt{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + v^2} \quad \text{tehát az } y \leq 1 \text{ feltételből}$$

$$\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \leq 1. \quad \text{Igy } g: H \rightarrow B \text{ ahol}$$

$$B = \left\{ (u, v): \left[u \geq 0 \text{ és } v > 0 \text{ és } \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \leq 1 \right] \right\}$$



28. ábra

Jelöljük továbbá g -nek H_1 -re való leszűkítését g_1 -gyel. Ekkor az $x^2 + y^2 = 1$ feltételből $u^2 + v^2 = \frac{1}{4}$.

tehát

$$g_1: H_1 \rightarrow B_1 \text{ ahol}$$

$$B_1 = \left\{ (u, v): (u, v) \in B \text{ és } u^2 + v^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

tehát B_1 az $u^2 + v^2 = \frac{1}{4}$ körívnek és B -nek a közös része.

Jelöljük g_2 -vel a g -nek a H_2 -re való leszűkítését.

Mivel H_2 elemei egyenlőszáru háromszögek, tehát vagy

$x = y$, amiből $u = 0$ vagy $y = 1$, amiből $(u + \frac{1}{2})^2 + v^2 = 1$ következik.

Ez azt jelenti, hogy $g_2: H_2 \rightarrow B_2$, ahol

$$B_2 = \left\{ (u, v) : (u, v) \in B \text{ és } (vagy } u = 0 \text{ vagy } (u + \frac{1}{2})^2 + v^2 = 1) \right\}$$

Legyen végül g_3 a g -nek H_3 -ra való leszűkítése. Ekkor $g_3: H_3 \rightarrow B_3$

$$\text{ahol } B_3 = \left\{ (u, v) : [(u, v) \in B \text{ és } u = 0 \text{ és } (u + \frac{1}{2})^2 + v^2 = 1] \right\} = \\ = \left\{ (0, \frac{\sqrt{3}}{2}) \right\}$$

29. a) nem
b) igen
c) igen

30. Véges halmaz számossága elemei számát jelenti. Tehát ha A és B diszjunkt véges halmazok, akkor $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Ha X és Y két tetszőleges véges halmaz, akkor $X \cup Y$ előállítható az alábbi diszjunkt halmazok egyesítéseként:

$$X \cup Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \cup (X \cap Y)$$

tehát

$$(*) \quad m(X \cup Y) = m(X \setminus Y) + m(Y \setminus X) + m(X \cap Y)$$

Másrészt

$$X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y) \text{ ahol } X \setminus Y \text{ és } X \cap Y \text{ diszjunktak,}$$

tehát

$$m(X) = m(X \setminus Y) + m(X \cap Y)$$

vagyis

$$m(X \setminus Y) = m(X) - m(X \cap Y)$$

Hasonlóan

$$m(Y \setminus X) = m(Y) - m(X \cap Y)$$

Behelyettesítve ezeket a fenti (*) egyenletünkbe adódik a bizonyítandó állítás

31.

Legyen az A alaphalmaz a gyár összes termékeinek halmaza és $m(A) = s$

Legyen továbbá $X = \{ \text{a gyár azon termékeinek halmaza, amelyeknek a minősége kifogástalan} \}$

$Y = \{ \text{a gyár azon termékeinek a halmaza, amelyeknek a csomagolása kifogástalan} \}$

Akkor

$$m(X) = 0,6 s, \quad m(Y) = 0,5 s$$

és

$$m(\bar{X} \cap \bar{Y}) = 0,2 s$$

Ez utóbbi alapján

$$m(\bar{X} \cap \bar{Y}) = m(\overline{X \cup Y}) = 0,2 s$$

tehát

$$m(X \cup Y) = 0,8 s$$

A 30-as feladat alapján lehet

$$\begin{aligned} m(X \cap Y) &= m(X) + m(Y) - m(X \cup Y) = 0,6s + 0,5s - \\ &- 0,8s = 0,3s \end{aligned}$$

vagyis a gyár által termelt áruk 30%-ának kifogástalan a minősége is, meg a csomagolása is.

A feladat természetesen megoldható közvetlen okoskodással is, pl. így:

Sem a minősége, sem a csomagolása nem megfelelő 20%-nak, tehát vagy a minősége, vagy a csomagolása kifogástalan 80%-nak.

A minősége kifogástalan 60%-nak.

A két utóbbi állítás alapján 20% olyan áru, amelynek a minősége nem kifogástalan, csak a csomagolása.

A termelt áruk 50%-ának kifogástalan a csomagolása és ezek közül a fentiek szerint 20% olyan, amelynek a minősége nem kifogástalan, ennél fogva 30%-nak kifogástalan a minősége is és a csomagolása is.

32.

$$\begin{aligned} m(X \cup Y \cup Z) &= m[(X \cup Y) \cup Z] = m(X \cup Y) + m(Z) - \\ &- m[(X \cup Y) \cap Z] = m(X) + m(Y) - m(X \cap Y) + m(Z) - \\ &- m[(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)] = m(X) + m(Y) + m(Z) - m(X \cap Y) - \\ &- [m(X \cap Z) + m(Y \cap Z) - m(X \cap Z \cap Y \cap Z)] = m(X) + m(Y) + \\ &+ m(Z) - m(X \cap Y) - m(X \cap Z) - m(Y \cap Z) + m(X \cap Y \cap Z) \end{aligned}$$

Tehát

$$m(X \cup Y \cup Z) = m(X) + m(Y) + m(Z) - [m(X \cap Y) + m(X \cap Z) + m(Y \cap Z)] + m(X \cap Y \cap Z)$$

33.

1. megoldás a 32-es feladat alapján.

Legyen az A alaphalmaz a példában szereplő műszaki egyetem összes hallgatóinak a halmaza.

Továbbá

$$\begin{aligned} S &= \{x : x \in A \text{ és } x \text{ sakkozik}\} \\ F &= \{x : x \in A \text{ és } x \text{ futballozik}\} \\ U &= \{x : x \in A \text{ és } x \text{ uszik}\} \end{aligned}$$

Ekkor

$$m(F \cup S \cup U) = 3000$$

$$m(S) = 1400$$

$$m(F) = 2300$$

$$m(U) = 1900$$

$$m(S \cap U) = 800$$

$$m(S \cap F) = 1000$$

$$m(U \cap F) = 1400$$

Tehát a 32-es feladat alapján

$$\begin{aligned} m(F \cap S \cap U) &= m(F \cup S \cup U) - [m(F) + m(S) + m(U)] + \\ &+ m(F \cap S) + m(F \cap U) + m(S \cap U) = \\ &= 3000 - (2300 + 1400 + 1900) + 1000 + 1400 + 800 = 600 \end{aligned}$$

A feladat természetesen megoldható halmazelméleti ismeretek nélkül is: a "logikai rejtvények" egyik gyakori típusához tartozik.

Okoskodhatunk pl. így:

Vagy uszik, vagy futballozik, vagy sakkozik: 3000 hallgató

Ezek közül: uszik 1900, tehát nem uszik 1100

sakkozik	1400	} következőképpen: sakkozik és nem uszik 600
sakkozik és uszik is	800	

tehát

nem uszik	1100	} ennél fogva: nem uszik és nem sakkozik 500
nem uszik és sakkozik	600	

Ez az 500 hallgató tehát futballozik, de nem uszik és nem sakkozik.

A továbbiakban vizsgáljuk azokat a hallgatókat, akik futballoznak:

Összesen vannak: 2300

Közülük: se nem uszik, se nem sakkozik: 500, azaz vagy uszik vagy sakkozik 1800

Vagyis:

uszik vagy sakkozik: 1800 }
uszik: 1400 } tehát sakkozik, de nem uszik 400

Továbbá:

sakkozik: 1000 }
sakkozik, de nem uszik: 400 } vagyis sakkozik és uszik is 600

Mivel azokat a hallgatókat vizsgáltuk, akik futballoznak, tehát futballozik, sakkozik és uszik: 600 hallgató.

34.

Mivel X megszámlálható, tehát kölcsönösen egyértelműen leképezhető a természetes számok $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ halmazára. Jelöljük az $n \in T$ -hez rendelt X -beli elemet x_n -nel, ekkor X elemeit rendezhetjük:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

és hasonlóan Y elemeire

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

Definíció szerint

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ és } y \in Y\}$$

vagy a fentiekben bevezetett jelöléssel:

$$X \times Y = \{(x_i, y_j) : i, j \in T\}$$

$X \times Y$ elemei sorozatba rendezhetők pl. a következőképpen:

$$(x_0, y_0), (x_0, y_1), (x_1, y_0), (x_0, y_2), (x_1, y_1)$$

$$(x_2, y_0), (x_0, y_3), (x_1, y_2) \dots$$

tehát az (x_i, y_j) rendezett pár megelőzi az (x_k, y_ℓ) -et akkor és csakis akkor, ha $i + j < k + \ell$ vagy $(i + j = k + \ell \text{ és } i < k)$

Ezen "sorozatba rendezés" segítségével $X \times Y$ egy-egyértelműen leképezhető a T -re, úgy, hogy

$0 \in T$ -nek megfeleltetjük (x_0, y_0) -t

$1 \in T$ -nek megfeleltetjük (x_0, y_1) -et

$2 \in T$ -nek megfeleltetjük (x_1, y_0) -t

$3 \in T$ -nek megfeleltetjük (x_0, y_2) -t

.....

$n \in T$ -nek megfeleltetjük: a sorozatban az $(n+1)$ -edik helyen álló (x_1, y_j) rendezett párt.

35.

Tudjuk, hogy a racionális számok halmaza megszámlálható.

a) Megmutatjuk, hogy az egész együtthatós polinomok egyértelműen leképezhetők a racionális számok halmazának egy valódi részhalmazára, így számosságuk legfeljebb megszámlálható.

Bizonyítás: Rendeljük a $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ polinom-

hoz az $N = p_1^{a_0} \cdot p_2^{a_1} \cdot p_3^{a_2} \cdot \dots \cdot p_{n+1}^{a_n}$ egész számot, ahol

$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_{n+1}$ pedig az $(n+1)$ -edik

primszám: (Különböző polinomokhoz így különböző egész számokat rendeltünk.)

b) Megmutatjuk, hogy a racionális számok egyértelműen leképezhetők az egész együtthatós polinomok halmazának egy valódi részhalmazára, tehát az egész együtthatós polinomok halmaza legalább megszámlálható.

Bizonyítás: Rendeljük az $r = \frac{p}{q}$ racionális számhoz (ahol p és q relatív primszámok) a $P_1(x) = p + qx$ első fokú polinomot. Így különböző racionális számokhoz különböző polinomokat rendeltünk.

36.

Ha C megszámlálható lenne, akkor elemei sorozatba rendezhetők lennének:

$$y_0 = c_{01}, c_{02}, c_{03}, \dots, c_{0n}, \dots$$

$$y_1 = c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots, c_{1n}, \dots$$

$$y_2 = c_{21}, c_{22}, c_{23}, \dots, c_{2n}, \dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_m = c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \dots, c_{mn}, \dots$$

$$\dots\dots\dots$$

Ugy, hogy C minden eleme pontosan egyszer fordulna elő az $y_0, y_1, y_2, \dots, y_m, \dots$ felsorolásban.

(Itt a c_{ik} -k adott számok, értékük 0 vagy 1)

Megmutatjuk, hogy ez nincs így: tetszőleges $y_0, y_1, y_2, \dots, y_m, \dots$ sorozatba rendezés esetén létezik C -nek (legalább) egy y^* eleme,

amely nem szerepel a fenti előállításban. Tekintsük ugyanis pl. azt a 0 és 1 elemekből álló y^* sorozatot, amelynek

$$\begin{array}{ll} \text{első eleme} & \begin{cases} 0 & \text{ha } y_0 \text{ első eleme } 1 \\ 1 & \text{ha } y_0 \text{ első eleme } 0 \end{cases} \\ \text{második eleme} & \begin{cases} 0 & \text{ha } y_1 \text{ második eleme } 1 \\ 1 & \text{ha } y_1 \text{ második eleme } 0 \end{cases} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \text{k-adik eleme} & \begin{cases} 0 & \text{ha } y_{k-1} \text{-nek a k-adik eleme } 1 \\ 1 & \text{ha } y_{k-1} \text{-nek a k-adik eleme } 0 \end{cases} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

akkor $y^* \in C$ és $y^* \neq y_i$ $i = 0, 1, 2, 3, \dots$
(mert az i . helyen álló elemek biztosan különbözők)

37. a) Megegyező: mindkettő kontinuum számosságú
b) megegyező: mindkettő kontinuum számosságú
c) különböző: $A \cap C$ számossága 1, C halmaz pedig kontinuum számosságú.

38. Igen. Az a) esetben $r(10k) = 10k + 10$, a b) esetben pedig $r(p)$ a következő primszámot jelenti. Mind az a), mind a b) esetben teljesül mind a három Peano-axióma.

Ugyanígy belátható, hogy bármely rendezett megszámlálható halmaz kielégíti a Peano-axiómákat.

39. $A \equiv \neg B$.

40. (1) Minden nap, (2) kedd kivételével minden nap.

41. (1)-nek (3), (2)-nek (3) elegendő,
(3)-nak (1) is, (2) is, szükséges feltétele.

42. (2) (III), (3) (II), (4) (III), (5) (III),
(6) (II), (7) (II), (8) (I).

43. "Ha egy természetes szám osztható a-val is és b-vel is, akkor osztható a.b-vel is" - nem igaz.

44. "Ha két háromszög egybevágó, akkor megfelelő oldalaik egyenlők egymással" - igaz.

45. "Az olyan háromszög, amelyben két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, derékszögű (és a harmadik oldal az átfogója)" - igaz.

46. "Az olyan x, y -ban másodfoku egyenletben, amelynek derékszögű koordináta-rendszerbeli képe parabola, mind x^2 , mind xy együtthatója 0" - nem igaz.

47. Nem helyes, hiányos! Így ugyanis azt mutattuk meg, hogy a levezetésnek mindegyik sorából következik az alatta levő (mindegyik sor implikálja az alatta levőt). Lánckövetkeztetéssel tehát azt bizonyítottuk be, hogy "ha $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, akkor $0 \leq (a-b)^2$ ". Ez azonban nem mond semmit: az, hogy $0 \leq (a-b)^2$, ugyanis nyilvánvaló. Valójában a fordított állítást kellene bebizonyítanunk: "ha $0 \leq (a-b)^2$, akkor $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ".

Ez akkor volna lánckövetkeztetéssel igazolva, ha megmutatnánk, hogy a fenti levezetésben mindegyik sor következik az alatta levőből is (mindegyiket implikálja az alatta levő). Ez nem is ütközik semmi nehézségbe - sőt, ugyyszólván magától értetődik mindenütt.

A levezetés tehát kifogástalanná válik, ha sorait éppen fordított sorrendben írjuk egymás után; ezzel jelezzük a helyes, szükséges irányu implikációkat.

De megteszi az is - sőt, talán még világosabb -, ha meghagyjuk az eredeti sorrendet (a számítást így könnyű elvégezni), és felfelé mutató nyilakkal jelezzük az implikációk helyes irányát:

$$\begin{array}{c}
 \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \\
 \Uparrow \\
 ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}, \quad / \sqrt{} \\
 \Uparrow \\
 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2, \quad / :4 \\
 \Uparrow \\
 0 \leq a^2 - 2ab + b^2, \quad / + 4ab \\
 \Uparrow \\
 0 \leq (a-b)^2
 \end{array}$$

A bizonyítás elvégezhető például matematikai indukcióval.

49.

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Az $S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ összeget kell ugyanis zárt alakban kifejeznünk. Mivel ennek az összegnek az n -edik tagja $a_n = n^2$, és ez n -ben másodfokú polinom, azért ha a feladathoz mellélt utmutatás igaz, akkor

$$S_n = an^3 + bn^2 + cn + d, \quad (1)$$

ahol a, b, c, d egyelőre ismeretlen számok.

Irjunk az (1) képletben n helyébe rendre 0, 1, 2, 3-at. Mivel

$$S_0 = 0,$$

$$S_1 = 1^2 = 1,$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\text{és } S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14,$$

azért a, b, c, d -re ezt az egyenletrendszert kapjuk:

$$0 = d,$$

$$1 = a + b + c + d,$$

$$5 = 8a + 4b + 2c + d,$$

$$14 = 27a + 9b + 3c + d.$$

Ennek megoldása:

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{6}, \quad d = 0.$$

Ha tehát a feladathoz irt utmutatás igaz, akkor a keresett képlet csak ez lehet:

$$S_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

vagyis

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Próbáljuk meg igazolni ezt matematikai indukcióval.

$n = 0$ -ra a képlet nyilván igaz. Most még meg kell mutatnunk, hogy ha igaz n -re, akkor igaz $n+1$ -re is, tehát hogy ha

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

akkor

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{(n+1) [(n+1)+1] [2(n+1)+1]}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

S ez csakugyan fennáll, mert

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1) [n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

50. Matematikai indukcióval. (A jobb oldali összegre alkalmazzuk az 50. feladat képletét.)

51. Igen (az n tagszám bármely természetes szám, és csak természetes szám lehet).

A levezetést az olvasóra bizzuk.

52. A tétel bebizonyítható n -re végzett matematikai indukcióval. Ha $n = 1$, a tétel nyilván igaz:

$$1^p - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{minden számmal osztható,}$$

tehát p -vel is.

Meg kell még mutatnunk, hogy ha n^p -n osztható p -vel, akkor $(n+1)^p - (n+1)$ is.

Fejtsük ki $(n+1)^p$ -t a binomiális tétellel:

$$(n+1)^p - (n+1) = n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \binom{p}{2} n^{p-2} + \dots$$

$$\dots + \binom{p}{p-2} n^2 + \binom{p}{p-1} n + \binom{p}{p} - n - 1 =$$

$$= n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \binom{p}{2} n^{p-2} + \dots$$

$$\dots + \binom{p}{p-3} n^3 + \binom{p}{p-2} n^2 + \binom{p}{p-1} n - n.$$

Itt a két aláhuzott tag összege, $n^p - n$, kiindulásunk szerint osztható p -vel; de a többi tag is minő, mert mindegyikben szerepel egy

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

alakú binomiális együttható, amelyben $k < p$. Erről az együtthatóról tudjuk, hogy egész szám; ekkor azonban oszthatónak kell lennie a p prímszámmal, hiszen ez a nevezőben - amelynek minden tényezője kisebb p -nél - nem fordulhat elő.

53. Matematikai indukcióval.

54.
$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

Mivel ugyanis

$$S_1 = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

és így tovább, már ennyiből is megsejthetjük, hogy

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

Ez a képlet pedig könnyen igazolható matematikai indukcióval.

55. Igaz. Matematikai indukcióval könnyen bebizonyítható.

A legkisebb szóhajtható pénzmennyiség 8 Ft; ez kifizethető egy 5 és egy 3 forintossal.

Ha továbbá n forint kifizethető pusztán 5 és 3 forintosokkal, akkor kifizethető $n+1$ forint is, mégpedig

ha az n forint csupa 3 forinosból állt, akkor oly módon, hogy 3 db 3 forintos helyett 2 db 5 forintost veszünk (legalább 3 db 3 forintosnak lennie kellett, mert másként csak 6 forintunk volna, ami nem több 7 Ft-nál),

ha az n forint ötforintost is tartalmazott, akkor oly módon, hogy egy ötforintost 2 db 3 forintossal helyettesítünk.

56. Nyilván

$1A \equiv$ Nincs olyan kazán, amely minden tüzelőanyaggal működik,

$1B \equiv$ Nincs minden gyárban olyan dolgozó, aki minden nap lóg.

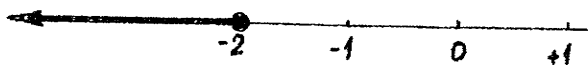
Ez azonban nem a legegyszerűbb, sőt elég bonyolult formája a két állításnak. Alkalmazzuk tehát a 9.1. Tételt. A-ban a $\exists$ egzisztenciális, B-ben a $\forall$ univerzális kvantor szerepel; ennél fogva $1A \equiv$ Minden kazán olyan, hogy nem működik minden tüzelőanyaggal $\equiv$ Egyetlen kazán sem működik bármilyen tüzelőanyaggal,
 $1B \equiv$ Van olyan gyár, amelyben nincs olyan dolgozó, aki minden nap lóg(na).

$1C \equiv$ Ez vagy nem igaz. vagy nem szép.

57.
$$1 - \frac{x-2}{6} \leq \frac{1-2x}{3}$$

Mindkét oldalt 6-tal szorozva

$$6 - x + 2 \leq 2 - 4x, \quad 3x \leq -6, \quad x \leq -2$$

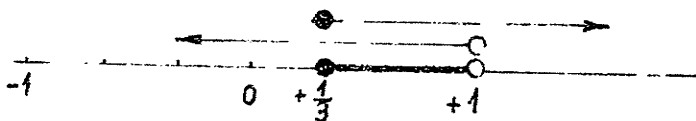


57. ábra

58.
$$\frac{2}{1-x} \geq 3$$

A baloldálnak pozitívnak kell lennie, tehát $x < 1$. Mindkét oldalt $(1-x)$ -szel szorozva az egyenlőtlenség iránya nem fordul meg, mert $1-x > 0$, tehát $2 \geq 3 - 3x$ és innen $x \geq \frac{1}{3}$.

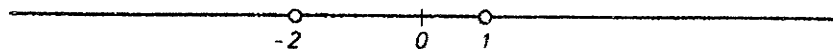
x értékeire egyidejűleg két feltételnek kell teljesülniük, tehát a megoldás az $x < 1$ és $x \geq \frac{1}{3}$ valós számhalmazok közös része



58. ábra

59. a) $x > 4$, b) $x > -3$, c) nincs megoldása (a megoldáshalmaz üres), d) $x > 4$ vagy $x < -3$. e) $-3 < x$ és $x < 4$, avagy rövidebben: $-3 < x < 4$.

60. $(x-1)(x+2) > 0$.



60. ábra

Ez az egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy a bal oldalnak pozitívnak kell lennie. Ennélfogva nyilván ekvivalens az alábbi (két konjunktív rendszerből diszjunktív módon összetett) egyenlőtlenségrendszerrel:

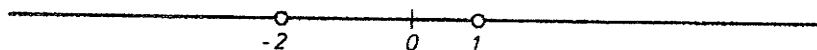
$$\left. \begin{array}{l} x - 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{array} \right\} \text{ vagy } \left\{ \begin{array}{l} x - 1 < 0 \\ x + 2 < 0 \end{array} \right.$$

Ezt így is írhatjuk:

$$\left. \begin{array}{l} x > 1 \\ x > -2 \end{array} \right\} \text{ vagy } \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ x < -2 \end{array} \right.$$

a megoldás tehát

$$x > 1 \text{ vagy } x < -2.$$



61. ábra

61. $\frac{x - 1}{x + 2} < 0.$

I. megoldás: Ez az egyenlőtlenség nyilván azt fejezi ki, hogy a bal oldalnak negatívnak, a számlálónak és a nevezőnek tehát ellenkező előjelűnek kell lennie. Mivel azonban a számláló mindig (x bármely értékére) kisebb a nevezőnél (3-mal), azért csak úgy lehetnek ellenkező előjelűek, hogy a számláló negatív és a nevező pozitív:

$$x - 1 < 0 \quad \text{és} \quad x + 2 > 0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$x < 1 \quad \text{és} \quad x > -2,$$

vagyis

$$-2 < x < 1.$$

II. megoldás: Egyenlőtlenségünk nyilván ekvivalens az

$$(x - 1)(x + 2) < 0$$

egyenlőtlenséggel; így a 60. feladat megoldásából azonnal látható, hogy a mi feladatunk megoldása

$$-2 < x < 1.$$

62.
$$\frac{x-3}{x-1} < \frac{1}{2}$$

Az egyenlőtlenséget 0-ra redukálva

$$\frac{x-3}{x-1} - \frac{1}{2} < 0.$$

közös nevezőre hozva (a bal oldalon)

$$\frac{2x-7}{2(x-1)} < 0,$$

vagyis

$$\frac{x-3,5}{x-1} < 0.$$

Innen (az előző feladat mintáján)

$$1 < x < 3,5.$$

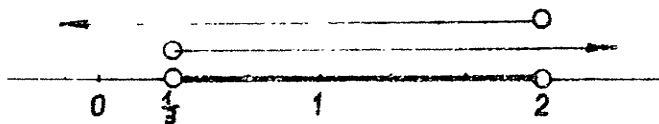
63.
$$1 < \frac{3x+4}{5} < 2$$

A tört eltávolítása után a következő két egyenlőtlenségből álló rendszerhez jutunk:

$$\left. \begin{array}{l} 3x+4 > 5, \\ 3x+4 < 10 \end{array} \right\} \text{ azaz } \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{1}{3}, \\ x < 2. \end{array} \right.$$

Eszerint

$$\frac{1}{3} < x < 2.$$



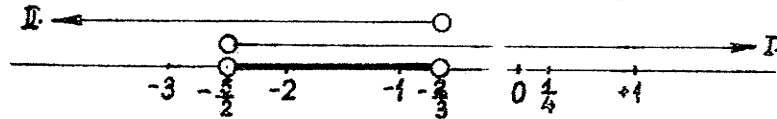
63. ábra

64.
$$\frac{2x-1}{2} < \frac{4x+1}{3} < \frac{x-1}{3}$$

$$\frac{2x-1}{2} < \frac{4x+1}{3} \quad \text{megoldása:} \quad x > -\frac{5}{2} \quad \text{I.}$$

$$\frac{4x+1}{3} < \frac{x-1}{3} \quad \text{megoldása:} \quad x < -\frac{2}{3} \quad \text{II.}$$

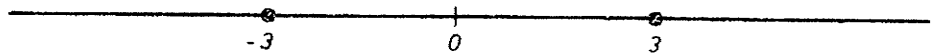
Az egyenlőtlenségrendszert tehát a $-\frac{5}{2} < x < -\frac{2}{3}$ értékek elégítik ki.



64. ábra

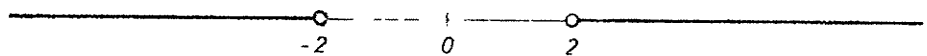
65. $x < -1$

66. $-3 \leq x \leq 3$



66. ábra

67. $x < -2$ vagy $x > 2$



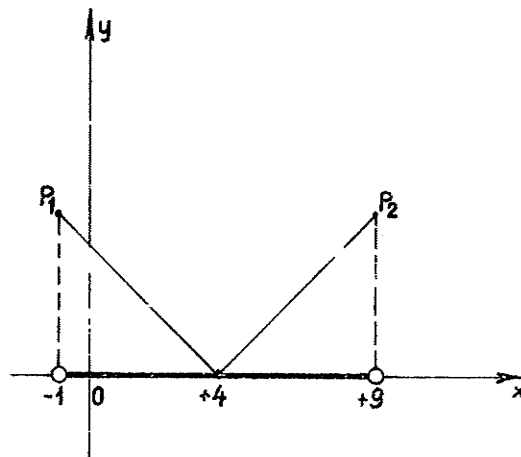
67. ábra

68. I. megoldás:

$$-5 < x - 4 < 5,$$

"mindhárom oldalhoz" 4-et hozzáadva tehát

$$-1 < x < 9.$$



68. ábra

II. megoldás: Ábrázoljuk az $f(x) = |x - 4|$ függvényt; ennek grafikonjáról, az $y = |x - 4|$ görbéről leolvasható, mikor lesz $y < 5$ (68. ábra).

$$69. \quad x + 3 < -1 \quad \text{vagy} \quad x + 3 > 1; \text{ innen} \\ x < -4 \quad \text{vagy} \quad x > -2.$$

$$70. \quad \frac{3}{x+1} \geq 1; \text{ mindkét oldalt } |x+1| \text{ pozitív számmal szorozva az} \\ \text{egyenlőtlenség iránya nem fordul meg, tehát } 3 \geq |x+1| \text{ vagy} \\ |x+1| \leq 3. \\ \text{Megoldás: } -4 \leq x \leq 2$$

71. I. megoldás: A

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$$

konjunktív egyenlőtlenségrendszert kell megoldanunk. A 62. feladat megoldásában látott módszerrel megoldjuk a

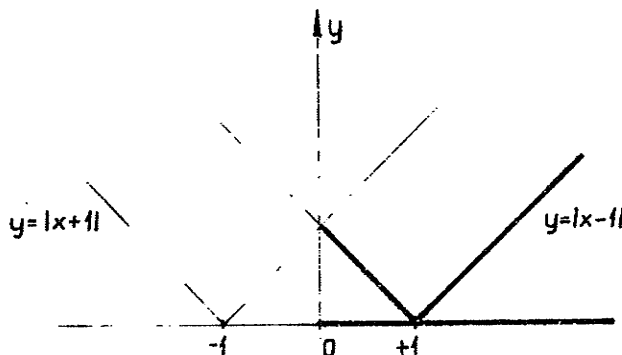
$$-1 < \frac{x-1}{x+1}, \quad \frac{x-1}{x+1} < 1$$

egyenlőtlenségek mindegyikét, és vesszük a két megoldáshalmaz közös részét.

Megoldás: $x > 0$.

II. megoldás: Az egyenlőtlenség

$$|x-1| < |x+1|$$



71. ábra

alakban is írható (az eredeti egyenlőtlenséget értelmetlennel tevő $x = -1$ ennek úgysem megoldása). Ábrázoljuk tehát az $y = |x - 1|$, $y = |x + 1|$ görbéket, és megnézzük, hogy az utóbbi mikor van az előbbi "fölött".

III. megoldás: A számegyenesnek azokról a pontjairól van szó, amelyek az 1-hez közelebb vannak, mint a -1-hez; ezek a pozitív számok.

72. Az

$$\frac{x - 3}{x + 2} \leq -4 \quad \text{vagy} \quad \frac{x - 3}{x + 2} \geq 4$$

diszjunktív egyenlőtlenségrendszer kell megoldanunk.

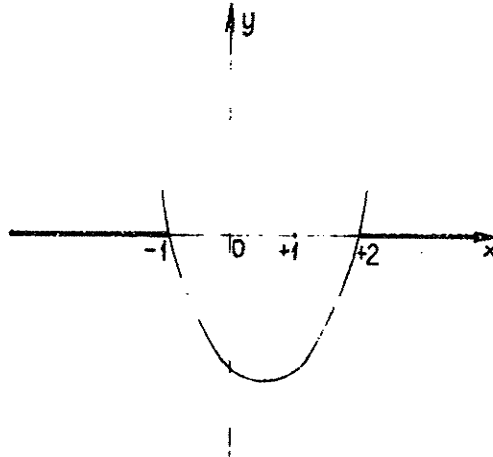
Megoldás: $-\frac{11}{3} \leq x \leq -1$, de $x \neq -2$; pontosabban:

$$-\frac{11}{3} < x < -2 \quad \text{vagy} \quad -2 < x \leq -1.$$

73. A bal oldalt tényezőkre bontva az $(x + 1)(x - 2) > 0$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk (l. 60. feladat).

Megoldás: $x < -1$ vagy $x > 2$.

Egyébként az $y = x^2 - x - 2$ görbe ábrázolásával is leolvasható a megoldás. Az értelmezési tartománynak azt a részét keressük, ahol y pozitív.



73. ábra

74. Az egyenlőtlenséget zérusra redukálva, egyszerűsítve és a bal oldalt tényezőkre bontva: $x(4x - 5) \leq 0$.

Megoldás: $0 \leq x \leq \frac{5}{4}$.

75. a) A bal oldalnak pozitívnak kell lennie, s ez háromféleképpen lehetséges: úgy, hogy a négy tényező körül 4, 2 vagy 0 pozitív (a többi pedig negatív). Figyelemmel kell azonban lennünk arra, hogy a tényezők (x értékétől függetlenül is) növekvő sorrendbe állíthatók:

$$(x - 4)(x - 2)(x - 1)(x + 3) > 0,$$

s így ha pozitívak és negatívak is vannak köztük, akkor negatívak csak a kisebbek, a pozitívak csak a nagyobbak lehetnek. Egyenlőtlenségünk tehát az alábbi egyenlőtlenségrendszerrel ekvivalens:

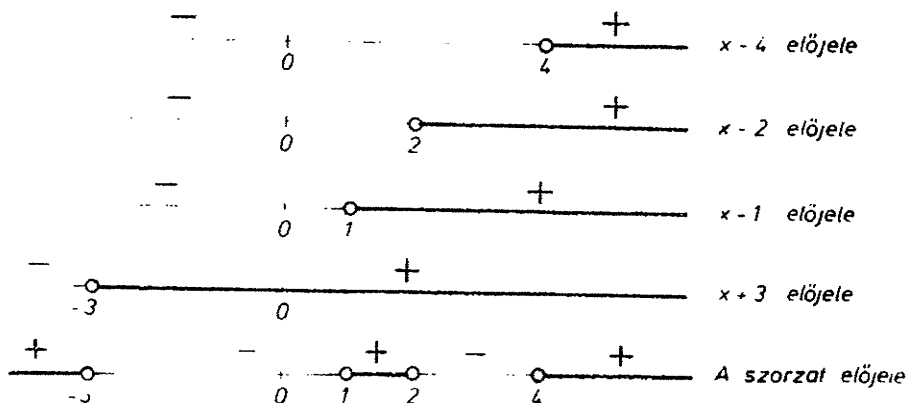
$$\left. \begin{array}{l} x - 4 < 0 \\ x - 2 < 0 \\ x - 1 < 0 \\ x + 3 < 0 \end{array} \right\} \text{ vagy } \left\{ \begin{array}{l} x - 4 < 0 \\ x - 2 < 0 \\ x - 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{array} \right\} \text{ vagy } \left\{ \begin{array}{l} x - 4 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{array} \right\},$$

azaz

$$\left. \begin{array}{l} x < 4 \\ x < 2 \\ x < 1 \\ x < -3 \end{array} \right\} \text{ vagy } \left\{ \begin{array}{l} x < 4 \\ x < 2 \\ x > 1 \\ x > -3 \end{array} \right\} \text{ vagy } \left\{ \begin{array}{l} x > 4 \\ x > 2 \\ x > 1 \\ x > -3 \end{array} \right\},$$

tehát

$$x < -3 \text{ vagy } 1 < x < 2 \text{ vagy } x > 4.$$



75. ábra

- Ugyanez a gondolatmenet grafikus ábrázolásában sokkal áttekinthetőbb (l. az ábrát).

b) Ez az egyenlőség ekvivalens az a)-val, mert $\frac{1}{(x+3)(x-4)}$ előjele mindig megegyezik $(x+3)(x-4)$ előjével (ha ez utóbbi szorzat nem 0.)

76. Egyenlőtlenségünk ekvivalens az

$$(x-3)(x-2)(x+1)(x+4) \leq 0 \text{ és } (x-3)(x+4) \neq 0$$

egyenlőtlenségrendszerrel. Az első egyenlőtlenség bal oldala akkor negatív, ha a 4 tényező közül 1 vagy 3 negatív, a többi pozitív. Figyelembe véve, hogy a két középső tényező lehet 0 is, az utolsó kettő nem, eredeti egyenlőtlenségünk az

$$\left. \begin{array}{l} x-3 < 0 \\ x-2 \leq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x+4 > 0 \end{array} \right\} \text{ vagy } \left\{ \begin{array}{l} x-3 < 0 \\ x-2 \leq 0 \\ x+1 \leq 0 \\ x+4 > 0 \end{array} \right.$$

rendszerrel ekvivalens. Ebből

$$\left. \begin{array}{l} x < 3 \\ x \leq 2 \\ x \geq -1 \\ x > -4 \end{array} \right\} \text{ vagy } \left\{ \begin{array}{l} x < 3 \\ x \leq 2 \\ x \leq -1 \\ x > -4 \end{array} \right.$$

$$\text{tehát } 2 \leq x < 3 \text{ vagy } -4 < x \leq -1.$$

A grafikus szemléltetés itt is ugyanugy célszerű, mint az előző feladatban.

77. a) A számlálót és a nevezőt tényezőkre bontva egyenlőtlenségünk az

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)(x-2)} > 0$$

alakba írható. Megoldás:

$$x < -3 \text{ vagy } -2 < x < 1 \text{ vagy } x > 2.$$

b) Mivel $x^2 = |x|^2$, egyenlőtlenségünk az

$$\frac{|x|^2 + |x| - 2}{|x|^2 + |x| - 6} > 0$$

alakban írható. Ez ugyanaz, mint az a) feladat, csak x helyett

$|x|$ az ismeretlen benne. Megoldásai tehát $|x|$ -re az a) feladat megoldásai közül azok, amelyek nem negatívak:

$$0 \leq |x| < 1 \quad \text{vagy} \quad |x| > 2,$$

azaz

$$-1 < x < 1 \quad \text{vagy} \quad x < -2 \quad \text{vagy} \quad x > 2.$$

78. Egyenlőtlenségünk az

$$x^3 - x > 0,$$

azaz

$$(x - 1)x(x + 1) > 0$$

alakban írható. Ez akkor teljesül, ha a bal oldal tényezői mind pozitívak, vagy ha a legnagyobbik pozitív és a másik kettő negatív:

$$\begin{array}{ll} x - 1 > 0 & x - 1 < 0 \\ x > 0 & \text{vagy} \quad x < 0 \\ x + 1 > 0 & x + 1 > 0. \end{array}$$

$$\text{Megoldás: } -1 < x < 0 \quad \text{vagy} \quad x > 1.$$

(A 75. feladat megoldásában alkalmazott grafikus szemléltetés itt is használható.)

$$79. \quad \frac{1}{|x+4|} - 2x < 6, \quad (6+2x)|x+4| > 1$$

$$x+4 > 0 \quad \text{azaz} \quad x > -4 \quad \text{esetben} \quad (6+2x)(x+4) > 1$$

$$x+4 < 0 \quad \text{azaz} \quad x < -4 \quad \text{esetben} \quad (6+2x)(-x-4) > 1$$

egyenlőtlenség megoldását kell keresni. Az egyenlőtlenségek zérusra redukált alakja:

$$2x^2 + 14x + 23 > 0 \quad \text{ill.} \quad 2x^2 + 14x + 25 < 0.$$

A teljes megoldást az $x > -4$ feltételt és az első egyenlőtlenséget kielégítő $x > \frac{-7+\sqrt{3}}{2}$ értékek adják. Más megoldás nincs, mert a második egyenlőtlenség nem állhat fenn.

80. A bal oldalon az abszolút értékkel elhagyható, mert a benne levő másodfoku polinom diszkriminánsa negatív, valós gyökei ezért nincsenek, így a polinom vagy minden x -re pozitív, vagy minden x -re negatív, és itt - mivel x^2 együttthatója pozitív - az első eset áll fenn:

$$x^2 + 6x + 10 \geq 1,$$

vagyis

$$x^2 + 6x + 9 \geq 0,$$

$$(x + 3)^2 \geq 0.$$

Ez minden valós x -re teljesül, tehát az eredeti egyenlőtlenség is.

81. 2-vel egyszerűsítve

$$|x| + |x - 3| \geq 4.$$

Az első abszolút értékben levő kifejezés $x = 0$ -nál, a másodikban levő $x = 3$ -nál vált előjelet. A legcélszerűbb tehát, ha a megoldást három esetre taglaljuk:

$$\text{I. } x \leq 0, \quad \text{II. } 0 \leq x \leq 3, \quad \text{III. } x \geq 3.$$

Egyenlőtlenségünk így az alábbi - most már abszolútérték-jelek nélkül felírt - egyenlőtlenségrendszerrel ekvivalens:

$$\begin{array}{ccc} \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} \\ x \leq 0 & 0 \leq x \leq 3 & x \geq 3 \\ -x - x + 3 \geq 4 & x - x + 3 \geq 4 & x + x - 3 \geq 4 \end{array} \quad \text{vagy}$$

azaz

$$\begin{array}{ccc} x \leq 0 & 0 \leq x \leq 3 & x \geq 3 \\ x \leq -\frac{1}{2} & 3 \geq 4 & x \geq 3,5 \end{array} \quad \text{vagy}$$

$$\text{(I)} \quad \text{(II)} \quad \text{(III)}$$

(II) semmiképp sem teljesülhet a $3 \geq 4$ követelmény miatt.

Megoldás:

$$x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad x \geq 3,5.$$

82. $|5 - x|$ helyett célszerűbb a vele egyenlő $|x - 5|$ -et írni

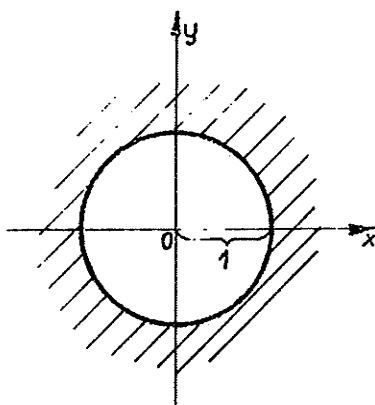
$$|x - 5| - |x - 1| + |x + 3| > 8.$$

A megoldást négy esetre bontjuk: I. $x \leq -3$ II. $-3 \leq x \leq 1$,
III. $1 \leq x \leq 5$, IV. $x \geq 5$.

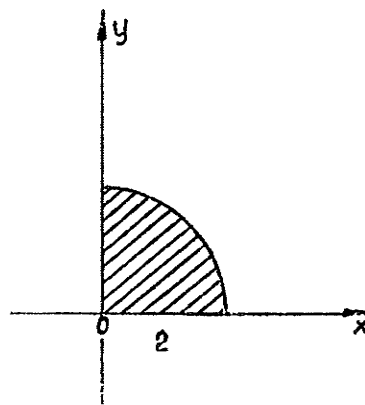
Megoldás:

$$x < -7 \quad \text{vagy} \quad x > 9.$$

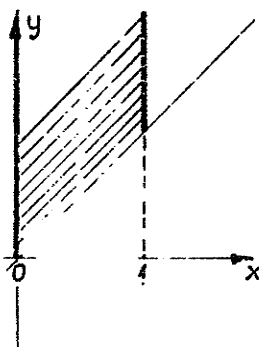
- 83-88. Az analitikus geometria módszereivel ábrázolni kell a szóban forgó tartományok határvonalait. Ahol az egyenlőség is meg van engedve, ott a határvonal is a tartományhoz tartozik.



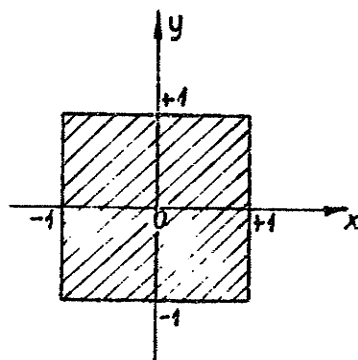
83. ábra



84. ábra



85. ábra



86. ábra

89. L. a 49 feladatot és megoldását. Ebből az is következik, hogy egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha

$$a = b,$$

90. Az előző feladat megoldása szerint

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}},$$

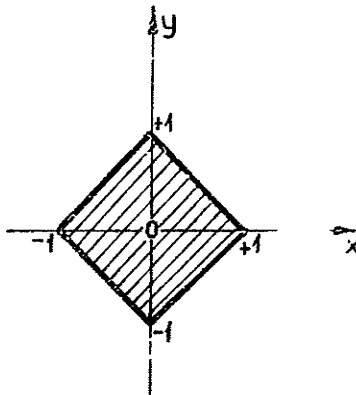
vagyis

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} \geq 1,$$

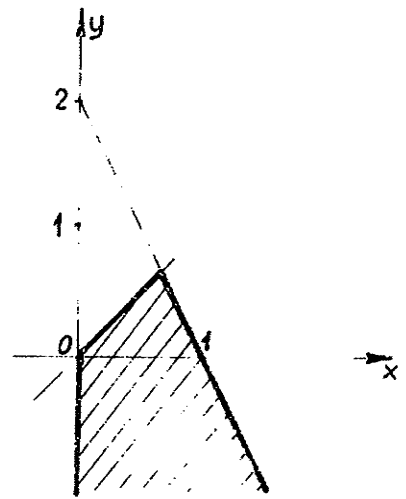
és így

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Egyenlőség nyilván itt is akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b$.



87. ábra



88. ábra

91. $(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot [2 \cdot (n-1)] \dots [(n-1) \cdot 2] \cdot (n \cdot 1)$, a közbeeső tényezők $(k+1)(n-k)$ alakúak, $k = 1, 2, \dots, (n-2)$; $(k+1)(n-k) = k(n-k) + (n-k)$; $n-k > 1$, mert $n > 2$ és így $(k+1)(n-k) > k + (n-k) = n$. Ha tehát minden közbeeső tényező helyett n -et írunk, akkor $(n!)^2 > n^n$ egyenlőtlenséghez jutunk.

92. Az első tag után következő $(n^2 - n)$ számú tag mindegyikét a legkisebbel $\frac{1}{n}$ -tel helyettesítjük, és így ha $n > 1$,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2 - n} > \frac{1}{n} + (n^2 - n) \cdot \frac{1}{n^2} = 1, \text{ ezzel állításunkat igazoltuk.}$$

93. A feltételekből következik, hogy a_1, a_2, c_1, c_2 számok egyenlő előjelűek; ugyancsak a feltételekből látható, hogy
- $$(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) = a_1c_1 + a_2c_2 + a_1c_2 + a_2c_1 \geq b_1^2 + b_2^2 + a_1c_2 + a_2c_1$$
- A két utolsó tag nem lehet negatív és így a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség, továbbá a feltételek miatt $a_1c_2 + a_2c_1 \geq 2\sqrt{a_1c_2 \cdot a_2c_1} \geq 2b_1b_2$ ezt figyelembe véve a bebizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk.

94. Egyenlőtlenségünket így is írhatjuk:

$$\frac{|x+1|}{|x-1|} + \frac{|x-1|}{|x+1|} \geq 2.$$

A 90. feladat már bebizonyított egyenlőtlenségéből azonban - $a = |x+1|$, $b = |x-1|$ helyettesítéssel - tudjuk, hogy minden x -re

$$\frac{|x+1|}{|x-1|} + \frac{|x-1|}{|x+1|} = 2,$$

és egyenlőség itt csak akkor áll fenn, ha

$$|x+1| = |x-1|,$$

vagyis ha

$$x = 0.$$

Igy ez az egyetlen megoldás.

95. Ez a feladat határozatlan; az n -edik tag akármennyivel egyenlő lehet. Egyáltalán nem szükségszerű ugyanis, hogy a sorozat n -edik tagja képlettel - vagy akár csak szabállyal is - kifejezhető legyen. Így $a_n = \frac{1}{n}$ csak egy a végtelen sok lehetséges megoldás közül (igaz, hogy a legegyszerűbb).

96. $a_n = \frac{2n-1}{n}$; korlátos, szigorúan növekedő.
97. $a_n = n^2$; alulról korlátos, szigorúan növekedő.

98. $a_n = (-1)^n \cdot n^2$; nem korlátos, nem monoton.
99. $a_n = -\frac{1}{n}$; korlátos, szigoruan növekedő.
100. $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n-1}{n}$; korlátos, nem monoton.
101. $a_n = 10^{-n}$; korlátos, szigoruan fogyó.
102. $a_n = (-10)^{-n}$; korlátos, nem monoton.
103. $a_n = 1 - 10^{-n}$; korlátos, szigoruan növekedő.
104. $a_n = (-1)^n (1 - 10^{-n})$; korlátos, nem monoton.
105. $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2n+1}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 1 - \frac{1}{2n+1}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$
106. $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{2}{n+1}, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$

Avagy:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2k+1}, & \text{ha } n = 2k-1. \\ \frac{2}{2k-1}, & \text{ha } n = 2k \end{cases}$$

Avagy:

$$a_{2k-1} = \frac{1}{2k+1}, \quad a_{2k} = \frac{2}{2k-1}.$$

Korlátos, nem monoton.

107. $a_{2k-1} = 1, \quad a_{2k} = \frac{k+1}{k+2} = 1 - \frac{1}{k+2}.$
108. $a_{2k-1} = 1, \quad a_{2k} = -\frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2} - 1.$

Korlátos, nem monoton.

109. Konvergens, $\lim a_n = 0$. Bármely pozitív ξ -ra ugyanis

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \xi,$$

azaz

$$\frac{1}{n} < \xi,$$

ha

$$n > \frac{1}{\xi}.$$

110. Konvergens, $\lim a_n = 0$.

111. Divergens, $\lim a_n = \infty$.

112. Divergens, $\lim |a_n| = \infty$

113. Konvergens, $\lim a_n = 0$. Bármely pozitív ξ -ra ugyanis

$$\left| \frac{1}{2n+3} - 0 \right| < \xi,$$

azaz

$$\frac{1}{2n+3} < \xi,$$

ha

$$2n+3 > \frac{1}{\xi},$$

vagyis ha

$$n > \frac{\frac{1}{\xi} \cdot 3}{2}.$$

114. Konvergens, $\lim a_n = 0$. Bármely pozitív ξ -ra ugyanis

$$\left| \frac{1}{3n^2 + 2n - 1} - 0 \right| < \xi,$$

azaz

$$\frac{1}{3n^2 + 2n - 1} < \xi,$$

ha

$$3n^2 + 2n - 1 > \frac{1}{\xi},$$

még inkább, ha

$$3n^2 > \frac{1}{\xi},$$

vagyis ha

$$n > \frac{1}{\sqrt{3} \xi}.$$

115. Konvergens, $\lim a_n = 0$.

116. Konvergens, $\lim a_n = 1$.

I. bizonyítás. Bármely pozitív ξ -ra

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \xi,$$

azaz

$$\left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| < \xi,$$

$$\left| -\frac{1}{n+1} \right| < \xi,$$

$$\frac{1}{n+1} < \xi,$$

ha

$$n+1 > \frac{1}{\xi},$$

vagyis

$$n > \frac{1}{\xi} - 1.$$

II. bizonyítás. Osszuk el a számlálót is, a nevezőt is n -nel: ekkor

$$a_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Itt a számláló olyan sorozat, melynek minden tagja 1, ennek nyilván a határértéke is 1; a nevező határértéke a 15.3. tétel szerint $1 + 0 = 1$;

így a 15.6. tétel alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1} = 1$.

117. Konvergens, $\lim a_n = \frac{1}{2}$.

118. Konvergens, $\lim a_n = 1$. (Osszuk el a számlálót is, a nevezőt is n^2 -tel.)

119. Konvergens, $\lim a_n = 0$. (Osszuk el a számlálót is, a nevezőt is n -nel.)

120. Konvergens, $\lim a_n = 0$.

121. Konvergens, $\lim a_n = 0$ ($a_n = \frac{1}{6\sqrt{n}}$).

122. Divergens, $\lim a_n = \infty$.

123. Konvergens, $\lim a_n = \frac{1}{2}$.

124. Legyen a számláló k -ad-, a nevező ℓ -edfokú, ugylgy

$$a_n = \frac{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_1 n + c_0}{d_\ell n^\ell + d_{\ell-1} n^{\ell-1} + \dots + d_1 n + d_0}.$$

Ekkor

$$\lim a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } k < \ell \\ \frac{c_k}{d_\ell} = \frac{c_k}{d_k}, & \text{ha } k = \ell, \\ \pm \infty, & \text{ha } k > \ell. \end{cases}$$

(A legutóbbi esetben a ∞ előjele megegyezik $\frac{c_k}{d_\ell}$ előjével.)

Ennek megfelelően a sorozat konvergens, ha $k \leq \ell$, divergens, ha $k > \ell$.

125. Azt kell megmutatnunk, hogy bármely pozitív ξ -re

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 0 \right| < \xi,$$

vagyis

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \xi \quad (*)$$

A feladat szerint azonban van olyan K pozitív szám, hogy bármely n -re

$$|a_n| < K, \quad (1)$$

másfelől ha n elég nagy, akkor $|b_n|$ bármilyen előre megadott számnál nagyobb lesz, tehát

$$|b_n| > \frac{K}{\xi},$$

vagyis

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{\xi}{K}. \quad (2)$$

Az (1) és a (2) egyenlőtlenséget összeszorozva valóban

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| = |a_n| \cdot \frac{1}{|b_n|} < K \cdot \frac{\xi}{K} = \xi. \quad (*)$$

126. Abszolút értékben ∞ -hez tart.

127. A feladat szerint elég nagy n -re $|a_n - A|$ tetszőlegesen kicsinyre válik. Azt kell igazolnunk, hogy bármely előre megadott pozitív esetén elég nagy n -re

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| < \xi.$$

I. eset. Legyen $A > 0$. Válasszuk n -et oly nagyra, hogy

$$|a_n - A| < \xi \sqrt{A}$$

teljesüljön. Ekkor

$$\left| \sqrt{a_n} - \sqrt{A} \right| = \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} \leq \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \frac{\varepsilon \sqrt{A}}{\sqrt{A}} < \varepsilon.$$

II. eset. Ha $A = 0$, legyen n oly nagy, hogy

$$a_n < \xi^2$$

teljesüljön; ekkor

$$\left| \sqrt{a_n} - \sqrt{A} \right| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\xi^2} = \xi.$$

128. Konvergens, $\lim a_n = 0$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ (l. a 125. feladatot.)} \end{aligned}$$

129. Divergens, $\lim a_n = \infty$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\sqrt{2n-1} - \sqrt{n+3})(\sqrt{2n-1} + \sqrt{n+3})}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{n+3}} = \\ &= \frac{2n-1 - (n+3)}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{n+3}} = \frac{n-4}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{n+3}} = \\ &= \frac{\sqrt{n} - \frac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2 - \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}} \rightarrow \infty \text{ (l. 126 és a 127. feladatot.)} \end{aligned}$$

130. Konvergens, $\lim a_n = 0$

131. Divergens $\lim a_n = \infty$.

132. Konvergens, $\lim a_n = 1$. Mivel a számlálót ajánlatos lesz megszorozni $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ -nel, a nevezőt pedig $\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$ -gyel, érdemes előzőleg kiszámítani, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1+1}{1+1} = 1.$$

(Itt a 15.3. és a 15.6., valamint a 127. feladatban bebizonyított tételt használtuk fel.)

Ennek alapján

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}}_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{n - (n-1)} = 1. \end{aligned}$$

133. Divergens lesz. Az egyesített sorozatnak ugyanis $\left\{b_n\right\}$ részsorozata, és így a 15.7. tétel alapján az egyesített sorozat nem lehet konvergens.

134. Konvergens lesz, ha $A = B$, divergens, ha $A \neq B$. (Bizonyítás a határérték és a konvergencia értelmezése alapján.)

135. Az egyesített sorozat konvergens lesz, ha az eredeti sorozatok is mind azok voltak, és mindnek ugyanannyi volt a határértéke; minden más esetben divergens.

136. (105) Konvergens, $\lim a_n = 1$. Minthogy ugyanis $\frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$, azért mind a két részsorozat 1-hez tart (l. a 134. feladatot).

(106) Konvergens, $\lim a_n = 0$, mert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$ (l. a 134. feladatot).

(107) Konvergens, mert $a_{2k+1} = 1 \rightarrow 1$, és $a_{2k} = 1 - \frac{1}{k+2} \rightarrow 1 - 0 = 1$ (l. a 134. feladatot).

(108) Divergens, mert $a_{2k+1} \rightarrow 1$, $a_{2k} \rightarrow -1$ (l. a 134. feladatot).

137. Divergens, mert

$$\begin{array}{ll} \text{páros } n\text{-re} & a_n = 1 + n \rightarrow \infty \\ \text{páratlan } n\text{-re} & a_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1 \end{array}$$

(l. a 134. feladatot).

138. (105) $N = \left[\frac{1}{2\xi} + \frac{1}{2} \right]$, ahol a szögletes zárójel azt a legnagyobb egész számot jelöli, amely nem haladja meg a benne foglalt számértéket.

Mivel ugyanis a határértéktől való eltérés mind a két részsorozatnál $\frac{1}{2n+1}$, azért az

$$\frac{1}{2n+1} < \xi$$

egyenlőtlenséget kell megoldani.

$$(106) \quad N = \left[\frac{2}{\xi} \right].$$

Mivel ugyanis bármely páratlan sorszámú tagnak a határértéktől való eltérése kisebb, mint az előző páros sorszámúé, elegendő követelményt a páros sorszámú tagokra kielégíteni:

$$\left| \frac{2}{n+1} - 0 \right| < \xi.$$

(107)

$$N = \left[\frac{1}{\xi} - 1 \right] \quad (\text{az előzőhöz hasonlóan}).$$

139. $N = 20\,001$, vagy ennél nagyobb szám jó.
A határérték ugyanis 1, tehát az

$$\left| \frac{n^3 - 3n + 8}{n^3 + n^2 + n + 17} - 1 \right| < \frac{1}{10\,000},$$

illetve

$$\frac{n^2 + 4n + 9}{n^3 + n^2 + n + 17} < \frac{1}{10\,000}$$

harmadfoku egyenlőtlenséget kell megoldani. Ennek pontos megoldása igen körülményes, ezért a baloldalon növeljük a számlálót

$$(n^2 + n^2 \geq n^2 + 4n + 9, \quad \text{ha } n \geq 6), \quad \text{és csökkentjük a nevezőt}$$

($n^3 < n^3 + n^2 + n + 17$), s az ily módon kapott erősebb egyenlőtlenségi követelményt elégítjük ki:

$$\frac{2n^2}{n^3} < \frac{1}{10\,000},$$

$$\frac{2}{n} < \frac{1}{10\,000},$$

$$n > 20\,000.$$

140. $N = 10\,001$, vagy ennél nagyobb szám.

141. (101) konvergens, $\lim a_n = 0$, mert $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ (jegyzet 15.4. példa).
 (102) konvergens, $\lim a_n = 0$.
 (103) konvergens, $\lim a_n = 1$.
 (104) divergens.

142. $N = [1 - \lg \xi]$; ha $\varepsilon = 0,001$, akkor $N = 4$.
 Mivel ugyanis $\lim a_n = 1$, azért a megoldandó egyenlőtlenség
 $|1 - 10^{-n} - 1| < \xi$;

innen

$$10^{-n} < \xi,$$

$$10^n > \frac{1}{\xi} / \lg$$

és

$$n > \lg \frac{1}{\xi} = -\lg \xi.$$

143.
$$N = \left[\frac{\lg \xi}{\lg 0,99} + 1 \right].$$

Minthogy ugyanis $\lim a_n = 0$, azért a megoldandó egyenlőtlenség

$$0,99^n < \xi; / \lg$$

innen

$$n \lg 0,99 < \lg \xi / : \lg 0,99 < 0$$

és

$$n > \frac{\lg \xi}{\lg 0,99}.$$

144.
$$N = \left[1 + \frac{\lg 2}{\lg(1 + \xi)} \right].$$

145. a)
$$\left[\frac{12}{\lg 1,001} + 1 \right],$$
 b)
$$\left[\frac{\lg K}{\lg 1,001} + 1 \right].$$

157. Igen. A tetszőleges számú tagra, illetve tényezőre való általánosítás matematikai indukcióval végezhető el.

158. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, mert

$$a_n = \frac{10^{10}}{10!} \cdot \underbrace{\frac{10}{11} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{10}{n-1}}_{< 1} \cdot \frac{10}{n};$$

ha tehát n olyan nagy, hogy egyrészt a kapoccsal jelzett szorzat kisebb, mint $\frac{10!}{10^{10}}$, másrészt $\frac{10}{n} < \xi$, akkor $a_n < \xi$.

159. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, mert

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{4}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \right) < \frac{1}{n}.$$

160. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Ezt a legkönnyebben úgy bizonyíthatjuk be, ha előbb az

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n}$$

határértéket számítjuk ki.

$$\text{Nyilván } \sqrt[n]{2n} > 1; \text{ legyen tehát}$$

$$\sqrt[n]{2n} = 1 + h_n,$$

ahol $h_n > 0$. Mind a két oldalt n -edik hatványra emelve

$$\sqrt[n]{2n} = (1 + h_n)^n,$$

s mivel a Bernoulli egyenlőtlenség szerint ($h > 0 > -1$)

$$(1 + h_n)^n > 1 + nh_n,$$

azért

$$\sqrt[n]{2n} > 1 + nh_n,$$

ugyhogy

$$h_n < \frac{\sqrt{n} - 1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}.$$

Eszerint

$$0 < h_n < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$$

s mivel a

$$0, 0, 0, \dots, 0, \dots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{1}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}, \dots$$

sorozatok egyaránt 0-hoz tartanak (ez utóbbi a 15.3 tétel alapján), azért a 15.8 tétel szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0,$$

ugyhogy

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + h_n) = 1 + 0 = 1.$$

Ebből következőleg pedig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 = A^2 = 1^2 = 1$$

(15.5 tétel.)

161. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1:$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ (a jegyzet}$$

15.5. példája és az előző feladat alapján).

162. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Mivel ugyanis egyrészt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 = 1^2 = 1$$

(160. feladat), eszerint tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 1 \cdot 1 = 1 \quad (15.5. \text{ példa}),$$

másrészt

$$\sqrt[n]{n^2} < \sqrt[n]{n^2 + 100} < \sqrt[n]{2n^2},$$

azért a 15.8. tétel alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 100} = 1.$$

163. Határértéke 0.

164. Mind a határérték, mind a konvergencia csupán olyan követelménytől függ, amelynek csak elég nagy sorszámú tagokra kell teljesülnie. A véges számú (beiktatott, kihagyott vagy megváltoztatott) tag között van egy utolsó. Ez után az új sorozat tagjai már rendre azonosak a régiekkel, és így kielégítenek minden olyan követelményt, amelyet a régi sorozat kielégített.

165. Mind a konvergencia, mind a határérték változatlan marad, mert a sorozatnak csak véges számú tagja nagyobb 2,00001-nél (l. a 164. feladatot).

166. A $\{b_n\}$ sorozat is konvergens, és a határértéke is ugyanugy A .

Bármilyen pozitív ξ szám van ugyanis adva, az $\{a_n\}$ sorozat tagjai véges számú kivételtől eltekintve ξ -nél kisebb hibával megközelítik A -t. Tekintsük ezt a véges számú kivételes tagot. Ezek között a $\{b_n\}$ sorozatban (mivel ez is ugyanazokból a tagokból áll, mint

a_n csak a sorrend más) van egy utolsó. Ez után már $\{b_n\}$ -ben is csak olyan tagok vannak, amelyek ξ -nél kisebb hibával megközelítik A -t, és így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A.$$

167. a) konvergens, határértéke $2A$ (15.3. tétel),
 b) konvergens, határértéke 0 (15.3. tétel),
 c) konvergens, határértéke A^2 (15.5. tétel),
 d) konvergens és határértéke 1 , ha $A \neq 0$ (15.6. tétel); ha azonban $A = 0$, akkor ennek a sorozatnak a konvergenciájáról nem állíthatunk semmit (l. a következő két feladatot).

168. Például

a) $a_n = \frac{1}{n!},$

b) $a_n = 0,77^n,$

c) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{1}{2n}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$

169. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ (167. feladat).

Ha pedig $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és $\left| \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right| > 1$ volna, akkor a $\{b_n\}$ sorozat tagjainak abszolút értékben valahonnan kezdve állandóan 1-nél nagyobbak kellene lennie, úgyhogy ugyaninnen kezdve az $\{a_n\}$ sorozat tagjainak abszolút értékben állandóan növekednie kellene; ez viszont összeférhetetlen azzal, hogy $a_n \rightarrow 0$.

170. (5) nem, a többi igen. Ha (1) is és (2) is konvergens volna, ebből a 15.3 és a 15.5 tétel alapján le lehetne vezetni, hogy $\{a_n\}$ is, $\{b_n\}$ is konvergens). (6)-ra példa: $a_n = b_n = (-1)^n$.

171. a) Nincs (Bolzano-Weierstrass-tétel).
b) Van (pl. két különböző határértékű konvergens sorozat egyesítése).

172. a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3,$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 =$$

$$= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^3 = e^2 \cdot 1^3 = e^2.$$

b) $\left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^{2^{n+2} + 3} = \left[\left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^{2^n - 1}\right]^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^7$

(mert $4(2^n - 1) + 7 = 4 \cdot 2^n - 4 + 7 = 2^2 \cdot 2^n + 3$);

így

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^{2^{n+2} + 3} &= \lim_{2^n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^{2^n - 1} \right]^4 \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^7 \\ &= \left[\lim_{2^n - 1 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^{2^n - 1} \right]^4 \cdot \lim_{2^n - 1 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^7 \\ &= e^4 \cdot 1^7 = e^4. \end{aligned}$$

173. A rekurzív képlet szerint ha a sorozat valamely tagja 1 akkor a következő 3, ha viszont valamelyik tagja 3 akkor a következő 1. Így a sorozat

$$1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, \dots$$

és így tovább. Tehát divergens.

174. a) Megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan növekedő és felülről korlátos - mindkettőt matematikai indukcióval.

I. A sorozatnak nyilván minden tagja pozitív. Látható, hogy

$$a_2 = \frac{1}{4} + a_1^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 > \frac{1}{4} = a_1, \text{ az első tagra tehát nagyobb tag következik, akkor az } n + 1\text{-edikre is, tehát hogy}$$

$$a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$$

Valóban

$$a_{n+2} = \frac{1}{4} + a_{n+1}^2 > \frac{1}{4} + a_n^2 = a_{n+1},$$

mert feltettük, hogy $a_{n+1} > a_n$.

Így a sorozat szigorúan növekedő.

II. $a_1 < \frac{1}{2}$. Megmutatjuk, hogy ha az n -edik tag kisebb $\frac{1}{2}$ -nél, akkor az $n + 1$ -edik is.

Valóban

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2 \leq \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

mert feltettük, hogy $a_n < \frac{1}{2}$

Igy a sorozatnak $\frac{1}{2}$ felső korlátja.

Mivel eszerint a sorozat szigorúan növekedő és felülről korlátos, azért konvergens, vagy egy A határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

A-t kiszámíthatjuk a rekurzív formula segítségével. Ennek két oldalán ugyanis két egyenlő sorozat áll, és mindkettő konvergens (mivel a_n is az). Ezért egyenlő a határértékük is.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + a_n^2 \right).$$

vagyis

$$A = \frac{1}{4} + A^2$$

$$A^2 - A + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\left(A - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

tehát

$$A = \frac{1}{2}.$$

a sorozat $\frac{1}{2}$ -hez tart.

b) Matematikai indukcióval könnyen bebizonyítható (de azonnal át is látható), hogy a sorozatnak minden tagja pozitív. Ezért $n \geq 2$ -re

$$a_{n+1} = \frac{2}{n+1} \cdot a_n \leq \frac{2}{3} a_n = a_n.$$

a sorozat tehát szigorúan csökkenő. Emellett alulról korlátos, ha ugyanis minden tagja pozitív, akkor 0 alsó korlátja.

Igy a sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, ennél fogva konvergens. Határértékét,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$$

-t az előző módon számíthatjuk ki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n}{n+1}.$$

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1}.$$

$$B = B \cdot 0,$$

tehát

$$B = 0.$$

c) Ezt a feladatot az a)-hoz hasonlóan oldhatjuk meg. Először matematikai indukcióval bebizonyítjuk, hogy a sorozat szigorúan növekedő és felülről korlátos.

$$I. c_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = c_1. \text{ Megmutatjuk, hogy}$$

$$c_{n+1} > c_n \Rightarrow c_{n+2} > c_{n+1}.$$

Valóban,

$$c_{n+2} = \sqrt{2 + c_{n+1}} > \sqrt{2 + c_n} = c_{n+1}.$$

$$\text{mert } c_{n+1} > c_n$$

II. $c_1 = \sqrt{2} < 2$. Megmutatjuk, hogy ha c_n kisebb 2-nél, akkor c_{n+1} is:

$$c_n < 2 \Rightarrow c_{n+1} < 2.$$

Valóban,

$$c_{n+2} = \sqrt{2 + c_{n+1}} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\text{mert } c_{n+1} < 2$$

Eszerint a sorozat monoton növekedő és felülről korlátos, van tehát egy $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C$ határértéke. Ezt az eddigi ehhez hasonló módon számíthatjuk ki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + c_n}$$

$$C = \sqrt{2 + C},$$

$$C^2 = 2 + C,$$

$$C^2 - C - 2 = 0,$$

$$\text{ahonnan } C_1 = 2, \quad C_2 = -1.$$

Eszerint vagy $C = 2$, vagy $C = -1$. Ez utóbbi azonban nem lehetséges, mert az olyan sorozatnak, amely 2-vel kezdődik és szigorúan növekszik, nem lehet 2-nél kisebb határértéke. (Vagy: csupa pozitív tagból álló sorozat nem tarthat negatív határértékhez.) Eszerint

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2.$$

175. Ott, hogy hibásan alkalmazza a 15.5. tételt, illetve ennek a 157. feladatban említett általánosítását. Ez ugyanis úgy szól, hogy tetszőleges számú sorozat szorzatának határértéke egyenlő a tényezők határértékének szorzatával. Nyilvánvaló azonban, hogy ez csakis előre megadott sorozatokra érvényes: a matematikai indukcióval való bizonyítás csakis ekkor megy. Ebből következik, hogy a tényező-sorozatok száma is előre megadott, rögzített szám kell hogy legyen.

Itt pedig n tényező-szorzatról van szó: a tényezők száma függ n -től, tehát változik, amint $n \rightarrow \infty$.

Szorzat határértéke csakis akkor egyenlő a tényezők határértékének szorzatával, ha a tényezők száma rögzített, állandó.

Ugyanez áll összeg határértékére is a tagok számát illetően.

(Mutatja a hibát a levezetésben az is, hogy az utolsó előtti lépésben - a tényezők számaként - még mindig szerepel n , az $n \rightarrow \infty$ határátmeneti utasítás azonban már hiányzik.)

176. Bármely adott A valós számhoz könnyen előállítható olyan szám-sorozat, amelynek határértéke A ; ilyen pl. az $a_n = A + \frac{1}{n}$ sorozat.

Vesszünk tehát száz olyan konvergens sorozatot, amelyek közül az elsőnek a határértéke 1, a másodiké 2, és így tovább; ezek egyesítése rendelkezik a kívánt sajátsággal.

177. Legyen az

$$a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{04}, \dots a_{0n}, \dots \quad (0)$$

sorozat határértéke 0, az

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots a_{1n}, \dots \quad (1)$$

sorozaté 1, az

$$a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots a_{2n}, \dots \quad (2)$$

sorozaté 2, az

$$a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \dots a_{3n}, \dots \quad (3)$$

sorozaté 3, és így tovább, minden határon túl. Ha tehát ennek a végtelen sok sorozatnak minden egyes elemét egyesíteni tudjuk egyetlen sorozatba, ez rendelkezni fog a kívánt sajátsággal.

Legyen ennek az egyesített sorozatnak az első tagja

$$a_{01}$$

(ez az egyetlen, amelyben a két index összege 1); következő két tagja az a kettő, amelyben a két index összege 2:

$$a_{02}, a_{11}$$

(az első index növekvő sorrendjében);

következő tagjai azok - ugyancsak az első index növekvő sorrendjében - amelyekben a két index összege 3:

$$a_{03}, a_{12}, a_{21};$$

következő tagjai azok (az első index növekvő sorrendjében), amelyekben a két index összege 4:

$$a_{04}, a_{13}, a_{22}, a_{31};$$

és így tovább. A kívánt sorozat tehát:

$$a_{01}; a_{02}, a_{11}; a_{03}, a_{12}, a_{21}; a_{04}, a_{13}, a_{22}, a_{31}; \\ \dots; a_{0n}, a_{1(n-1)}, a_{2(n-2)}, a_{3(n-3)}, \dots a_{(n-2)2}, a_{(n-1)1}; \dots$$

178. Ha az előző feladat megoldása során kapott (0), (1), (2), (3), ... sorozatok mindegyikében minden második elem elé negatív előjelet írunk, akkor az n -hez tartó (n) sorozatból olyan $(n)'$ sorozat lesz, amelynek n is, $-n$ is torlódási pontja. Az így kapott $(1)'$, $(2)'$, $(3)'$, ..., $(n)'$, ... sorozatokat az előbbi módon egyesítve az

$$a_{01}; -a_{02}, a_{11}; a_{03}, -a_{12}, a_{21}; a_{04}, -a_{13}, a_{22}, -a_{31}, \dots$$

sorozatot kapjuk (azok a tagok, amelyekben a második index páratlan, pozitívak, azok, amelyekben páros, negatívak). Ennek a sorozatnak minden egész szám torlódási pontja.

179. Van.

Bármely A valós számhoz található ugyanis olyan csupa racionális tagból álló sorozat, amelynek határértéke A . (Ilyen pl. A alsó vagy felső közelítő törtjeinek sorozata.) Ha tehát fel tudunk írni olyan sorozatot, amelynek kivétel nélkül minden racionális szám tagja, akkor ez megfelel a feltételnek.

Rendezzük sorozatba első lépésként csupán a pozitív racionális számokat. Minden pozitív racionális szám felírható $\frac{k}{n}$ alakban úgy, hogy k is, n is pozitív egész szám. Az ilyen $\frac{k}{n}$ törtek halmazát rendezhetjük úgy, hogy

- (1) két tört közül az, amelyikben $k + n$ kisebb, megelőzi a másikat,
- (2) ha pedig $k + n$ értéke két különböző törtben megegyezik, akkor az előző meg a másikat, amelyiknek a számlálója kisebb.

Nem nehéz belátni, hogy az összes $\frac{k}{n}$ törtek halmaza így ebbe a sorozatba rendeződik:

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}, \frac{2}{1}; \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}; \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}; \dots$$

$$\dots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-2}, \dots, \frac{n-2}{3}, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}, \dots$$

Ennek torlódási pontja minden nem negatív valós szám. (Strukturája láthatólag azonos a 177. feladat megoldásával.) Ez a sorozat azonban nem is csupán egyszer, hanem végtelen sokszor tartalmaz

minden racionális számot ($\frac{p}{q}$ -t például $\frac{p}{q}, \frac{2p}{2q}, \frac{3p}{3q}, \dots, \frac{mp}{mq}, \dots$

alakban). Elegendő volna az is, ha csak egyszer tartalmazná mindegyiket - például irreducibilis alakjukban amikor a számláló és a nevező relatív primszámok, legnagyobb közös osztójuk 1. Ha tehát mondjuk azok elé a tagok elé, amelyekben a számláló is, a nevező is páros, negatív előjelet írunk, akkor a sorozat már minden pozitív és negatív racionális számot is tartalmazni fog, úgyhogy kielégíti a feladat követelményét: torlódási pontja lesz minden valós szám.

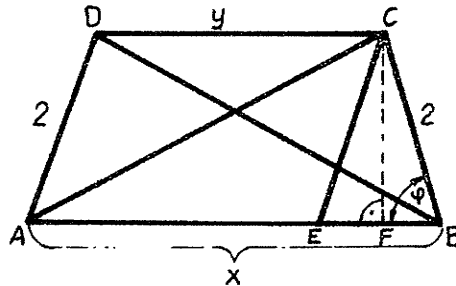
Egyváltozós függvények elemi tulajdonságai

184. $h = \sqrt[3]{\frac{3 \text{ m}^2 v}{r^2 \pi}}.$

185. A pályát az egyenletével adhatjuk meg - vagyis azzal az $y = y(x)$ függvénnyel, amelynek derékszögű koordináta-rendszerbeli grafikonja a pálya. Ez $y = x^{3/2}$.

186. Legyen $AB = x$, $DC = y$; ekkor $y = \frac{12}{x}$.

Vegyük ugyanis fel az AB szakaszon azt az E pontot, amelyre az $AECD$ négyszög paralelogramma. Ekkor az $ABC \triangle$ -ből a koszinusz-tétel szerint



186. ábra

$$\cos \varphi = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{x^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot x \cdot 2} = \frac{x^2 - 12}{4x},$$

így $BE = x - y$ -ra a BEC egyenlőszáru, ill. a BCF derékszögű háromszögből

$$x - y = BE = 2 BF = 2 \cdot 2 \cos \varphi = 4 \cos \varphi = \frac{x^2 - 12}{x},$$

ugyhogy

$$x - y = \frac{x^2 - 12}{x},$$

és innen

$$y = x - \frac{x^2 - 12}{x} = \frac{12}{x}.$$

187. $f(x) = x^2 - 5x + 6.$

(Alkalmazzuk az $x + 1 = X$, $x = X - 1$ helyettesítést.)

188. $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$ ($\frac{1}{x} = X$, $x = \frac{1}{X}$ helyettesítéssel).

189. $f(x) = x^2 - 2$ (értelmezési tartománya az $\mathbb{R} \setminus (-2, 2)$ halmaz).

Mínt hogy ugyanis $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, azért

$$f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^2 - 2,$$

az $x + \frac{1}{x} = X$ jelöléssel pedig

$$f(X) = X^2 - 2.$$

Mivel a $X = x + \frac{1}{x}$ függvény értékkészlete a 2-nél nem kisebb abszolút értékű valós számokból áll, ugyanez az $f(X)$ függvény értelmezési tartománya is.

190. a) Az eredeti görbét c egységgel eltoljuk az y tengely mentén.
 b) Az eredeti görbét az y tengely mentén c -szeresére nyújtuk (vagyis mindegyik pont ordinátáját megszorozzuk c -vel).
 c) Az eredeti görbét $-c$ egységgel eltoljuk az x tengely mentén.
 d) Az eredeti görbét az x tengely mentén c -szeresen zsugorítjuk (vagyis mindegyik pont abszcisszáját elosztjuk c -vel).

Példaképpen bebizonyítjuk c)-t.

Legyen az $y = f(x)$ görbe tetszőleges pontja $P(x_0, y_0)$. Ha ezt $-c$ egységgel eltoljuk az x tengely mentén, a $P'(x_0 - c, y_0)$ pontot kapjuk. Azt kell megmutatnunk, hogy a P' pont rajta van az $y = f(x + c)$ görbén. Mivel $P_0(x_0, y_0)$ rajta van az $y = f(x)$ görbén, azért "koordinátái kielégítik a görbe egyenletét":

$$y_0 = f(x_0).$$

De

$$x_0 = (x_0 - c) + c,$$

tehát

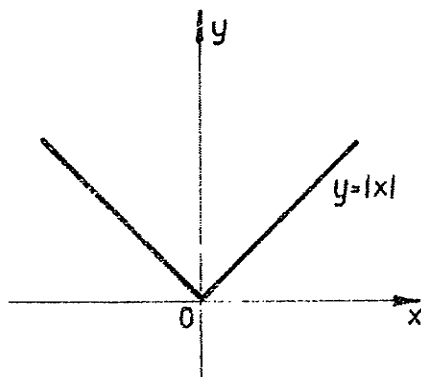
$$y_0 = f((x_0 - c) + c),$$

ez pedig éppen azt jelenti, hogy a $P(x_0 - c, y_0)$ pont rajta van az $y = f(x + c)$ görbén.

191. A görbének azokat a részeit, amelyek az x tengely "alá" esnek, tükrözzük az x tengelyre.

192. Ahol az $y = f(x)$ görbe az x tengely "fölött" van, ott az $y = 1$ egyenest, az x tengely "alatt" van, ott az $y = -1$ egyenest, az x tengelyen van, ott az $y = 0$ egyenest rajzoljuk ki.

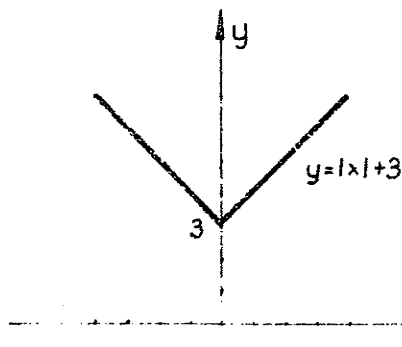
193. L. 193. ábra; $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [0, \infty)$.



193. ábra

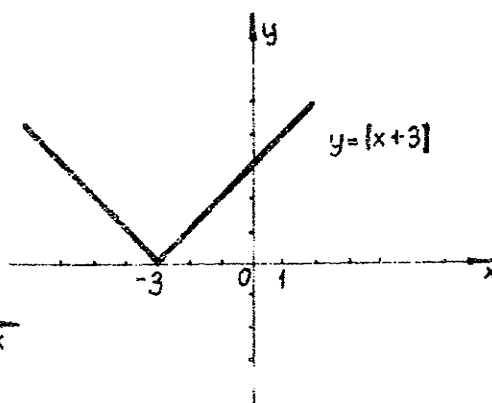
194. $\sqrt{x^2} = |x|$ - lásd tehát az előző feladat megoldását.

195. Lásd a 195. ábrát; $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [3, \infty)$.



195. ábra

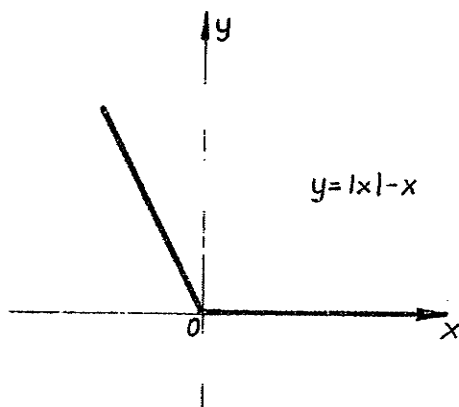
196. Lásd az ábrát; $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [0, +\infty)$.



196. ábra

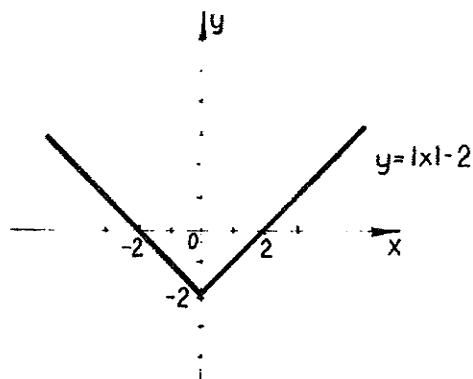
$$197. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ -2x, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

(197. ábra). $x \in \mathbb{R}$,
 $f(x) \in [0, +\infty)$.

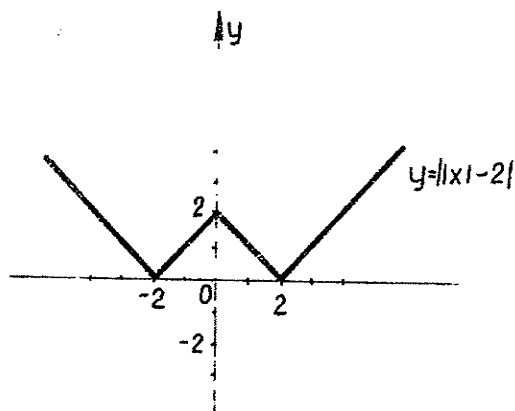


197. ábra

198. Először az $y = |x| - 2$ görbét ábrázoljuk (198/a ábra), majd alkalmazzuk a 191. feladat megoldását (198/b ábra). $x \in \mathbb{R}$,
 $f(x) \in [0, +\infty)$.

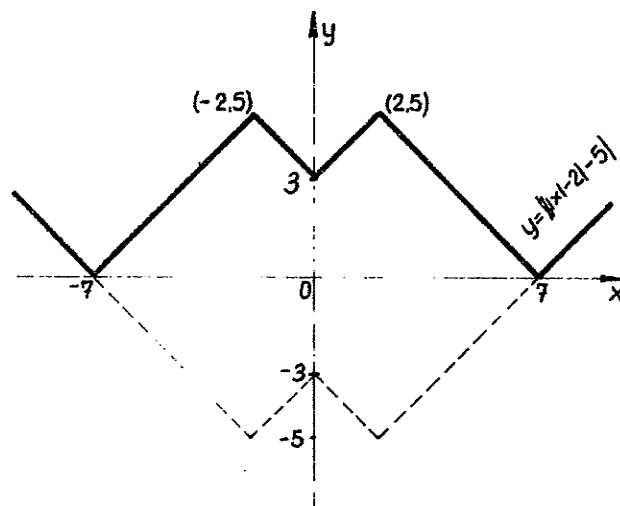


198/a ábra



198/b ábra

199. Lásd az ábrát; $x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0, +\infty)$.

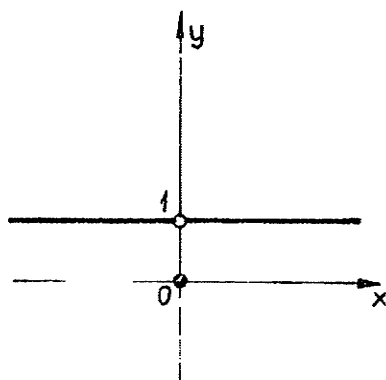


199. ábra

200. $x \operatorname{sg} x = |x|$ (193. feladat).

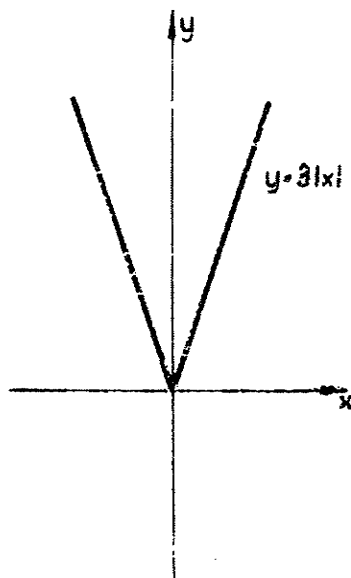
201. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ (l. az ábrát).

$x \in \mathbb{R}, f(x) \in \{0, 1\}$.

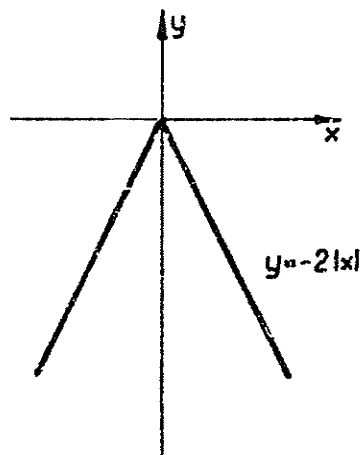


201. ábra

202. $\operatorname{sg}^2 x = |\operatorname{sg} x|$; 1. tehát az előző feladatot.
203. $\frac{1}{\operatorname{sg} x} = \operatorname{sg} x$, ha $x \neq 0$; a 0 helyen nincs értelmezve.
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) \in \{1\}$.
204. $\frac{|x|}{x} = \frac{1}{\operatorname{sg} x}$ (lásd az előző feladatot).
205. $\frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \frac{1}{\operatorname{sg} x}$ (l. az előző két feladatot).
206. $\frac{x^2}{|x|} = |x|$, ha $x \neq 0$ (193. feladat). $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) \in (0, \infty)$
207. $\sqrt{\operatorname{sg} x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$ negatív x -ekre nincs értelmezve.
 $x \in [0, +\infty)$, $f(x) \in \{0, 1\}$.
208. $\frac{x}{\operatorname{sg} x} = |x|$, ha $x \neq 0$; az $x = 0$ helyen nincs értelmezve.
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) \in (0, \infty)$.
209. Ábra: $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [0, +\infty)$. 210. Ábra: $x \in \mathbb{R}$,
 $f(x) \in (-\infty, 0]$.



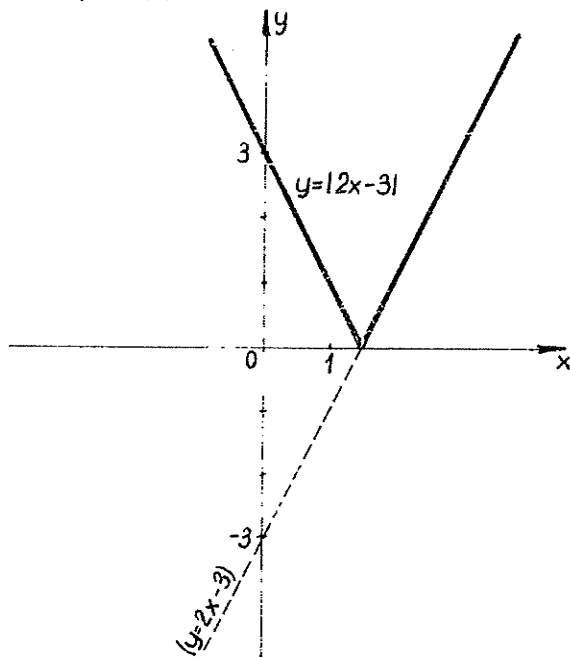
209. ábra



210. ábra

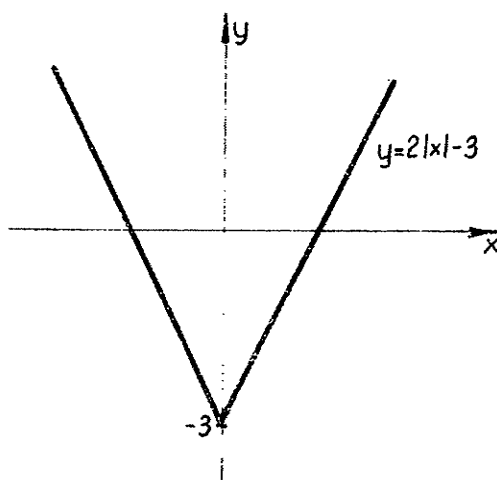
211. $|-3x| = |3x| = 3|x|$; l. tehát a 209. feladatot.

212. Ábra; $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [0, \infty)$.



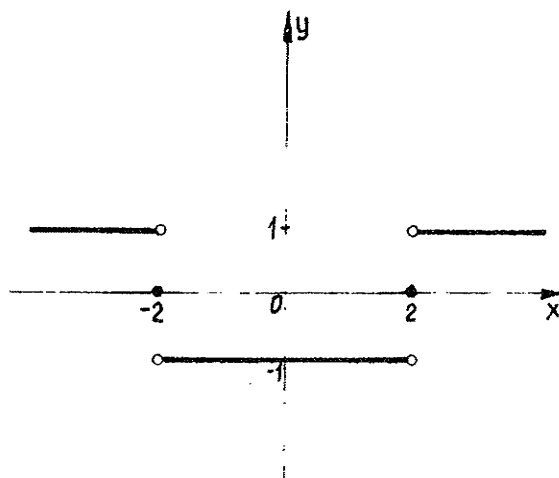
212. ábra

213. Az $y = |x|$ görbét először kétszeresére nyújtjuk y irányában ($y = 2|x|$), majd -3 egységgel eltoljuk, ugyancsak y mentén.



213. ábra

214. Lásd az ábrát (a 198/a ábra alapján készíthető el). $x \in \mathbb{R}$,
 $f(x) \in \{-1, 0, 1\}$.



214. ábra

215. $y = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } x < 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$

$x > 0$ -ra nincs értelmezve. $x \in (-\infty, 0]$, $f(x) \in \{1, 2\}$.

216. Ha $x \neq 0$, akkor $\text{sg}^2 x = 1$, és így a nevező 0-vá válik: a függvény nincs értelmezve. Ha $x = 0$, akkor

$$\frac{1}{1 - \text{sg}^2 x} = 1. \text{ A függvény grafikonja tehát egyetlen pontból, a } P(0, 1) \text{ pontból áll.}$$

$$x \in \{0\}, f(x) \in \{1\},$$

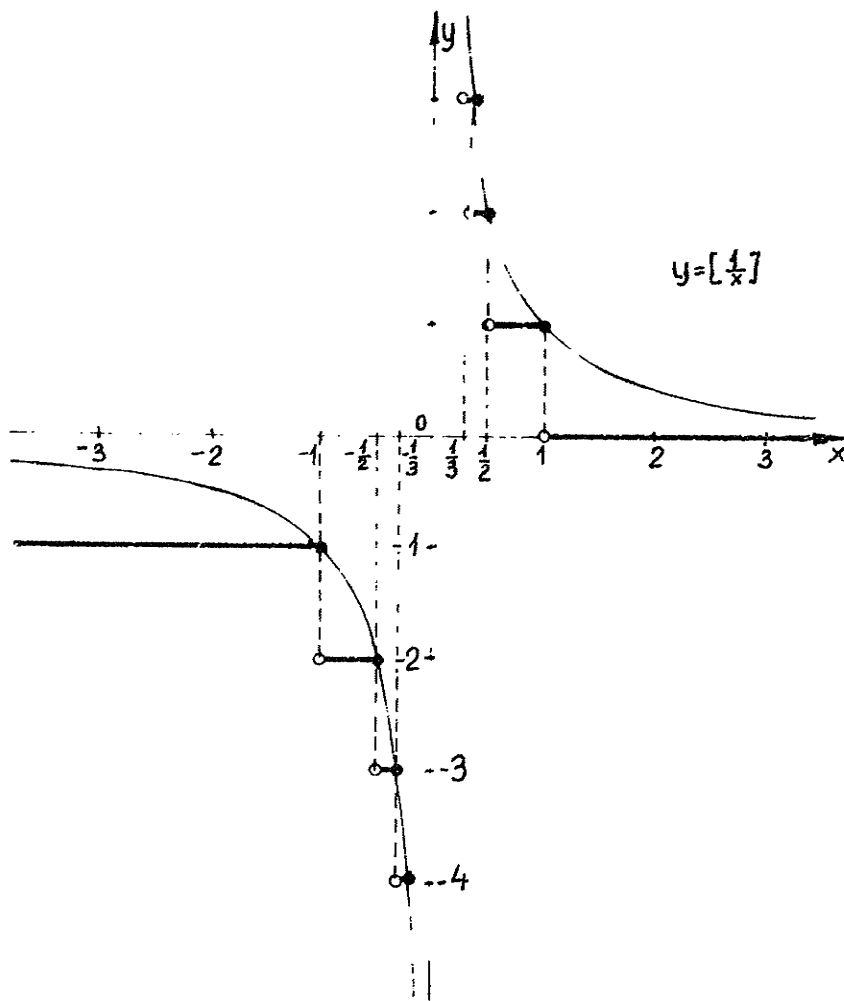
217. Bármennyi is x , $\text{sg } x < 2$, tehát $\text{sg } x - 2 < 0$; ezért a függvény sehol sincs értelmezve. Értelmezési tartománya és értékkészlete egyaránt az üres halmaz. Grafikonja nincs (pontosabban: a grafikon is az üres halmaz).

218. $x - [x] = \{x\} - 1$, a jegyzet 1.6. példáját.

219. $[x]$ grafikonját tükrözzük az x tengelyre.

220. $[x]$ grafikonját tükrözzük az y tengelyre.

221. A grafikon az $\frac{1}{x}$ függvény grafikonja alapján készíthető el (ábra).
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) \in E$ (ahol E az egész számok halmaza).



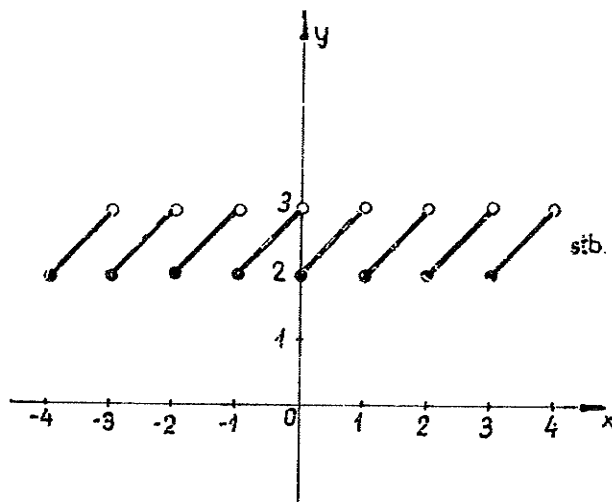
221. ábra

$$222. \quad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}, & \text{ha } -3 \leq x < -2, \\ -\frac{1}{2}, & \text{ha } -2 \leq x < -1, \\ -1, & \text{ha } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{ha } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{3}, & \text{ha } 2 \leq x < 3, \\ \frac{1}{4}, & \text{ha } 3 \leq x < 4, \end{cases}$$

és így tovább.

A $[0, 1)$ féltig zárt intervallumban a függvény nincs értelmezve,
 $x \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$, $f(x) \in \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ahol $\mathbb{N}$ az egész
számok halmaza.

223. L. az ábrát; $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [2, 3)$.



223. ábra

224. $\{2+x\} = \{x\}$.

225. $\{x\}$ grafikonját tükrözzük az x tengelyre.

226. $\{x\}$ grafikonját tükrözzük az y tengelyre.

227. $f_3 = f_2$, $f_4 = f_1$. tehát elég f_1 -et és f_2 -t vázolni. (Egyébként f_1 -ben a külső abszolútérték-jel felesleges.)

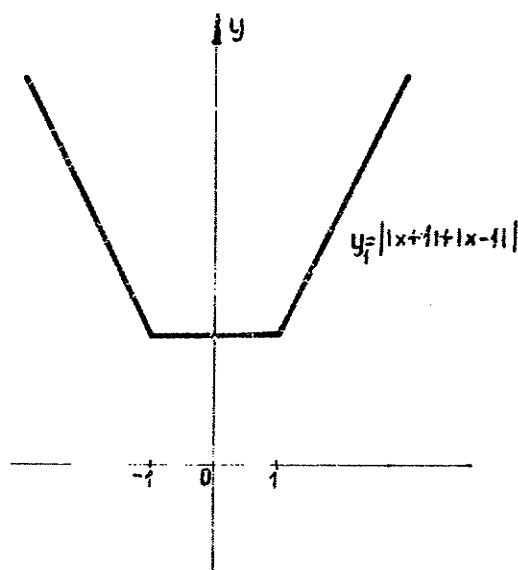
Az ilyen feladatoknál két módszer is szöbakertülhet:

1. a $\frac{1}{2}|x+1|$, $\frac{1}{2}|x-1|$ grafikonok szuperpozíciója és azután az x tengely alatti részek áttükrözése,
2. az x tengely részekre szabdalása oly módon, hogy egy-egy részintervallumban az abszolútérték-jel használata (vagy legalább többszörös használata) nélkül is meg lehessen adni a függvény értékét.

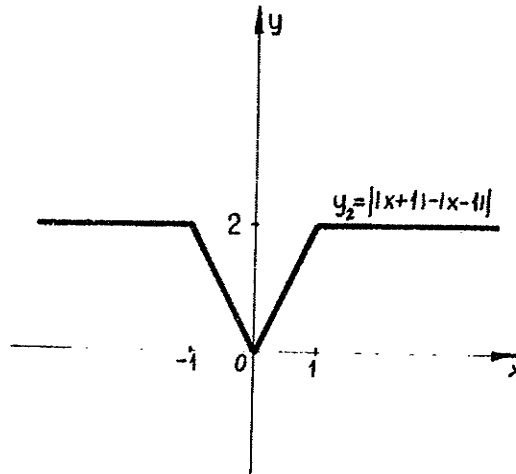
Ez utóbbi módszert alkalmazva

$$f_1 = \begin{cases} -2x, & \text{ha } x \leq -1 \\ 2, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & \text{ha } x \geq 1; \end{cases} \quad f_2 = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \leq -1, \\ 2|x|, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1, \\ 2, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

(Lásd az ábrákat.)



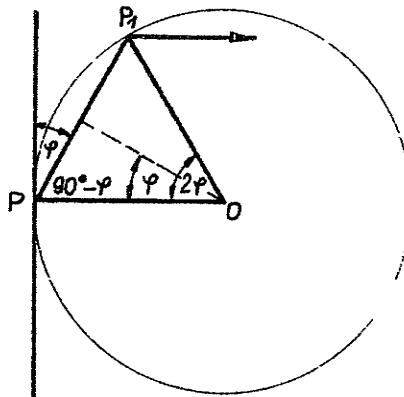
227/1. ábra



227/2. ábra

228. a) a Dirichlet-függvényt, b) az alábbi $f(\varphi)$ Riemann-féle függvényt:

$$f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{ha } \varphi = \frac{n}{k} \text{ racionális szám, } n, k \in \mathbb{T} \text{ és } n \text{ és } k \text{ rela-} \\ & \text{tív prímszámok} \\ & \text{(az } \frac{n}{k} \text{ tört nem egyszerűsíthető),} \\ 0, & \text{ha } \varphi \text{ irracionális szám} \\ & (0 < \varphi < 1) \end{cases}$$



228/a ábra

Ha ugyanis a golyó először a kör P_1 pontjában verődik vissza, akkor a kör PP_1 húrjához 2φ középponti szög tartozik (228/a ábra). A golyó akkor fog - a k -edik visszaverődés során - visszajutni a P pontba, ha

van olyan k természetes szám, amelyre $k \cdot 2^\varphi$ egész számú többszöröse 360° -nak, vagyis ha van két olyan természetes szám, k és n , hogy

$$k \cdot 2 = n \cdot 360^\circ,$$

$$\frac{\varphi}{180^\circ} = \frac{n}{k},$$

azaz - mivel most 180° a szögegység -

$$\varphi = \frac{n}{k}.$$

Az első visszaérkezéshez nyilván a legkisebb ilyen k és n szám tartozik; ezeknek pedig más közös osztójuk, mint 1, nem lehet.

229. (I): 201, 202, 203, 204, 205, 207, 214, 215, 216, 218, 222, 223, 224, 225, 226, 227/2, 3, 228/a, b.

(I/a): 210.

(I/b): 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 206, 208, 209, 211, 212, 213, 227/1, 4.

(II): 203, 204, 205, 207, 215.

(III): 197, 219, 220.

(A 216. függvényre - mivel egyetlen pontban van csak értelmezve - a monotonitás fogalma nem értelmezhető.)

(IV): 193, 194, 195, 198, 199, 200, 201, 202, 206, 208, 209, 210, 211, 213, 214, 216, 227 (mind), 228 (mind a kettő).

(V): 203, 204, 205.

(VI): 218, 223, 224, 225, 226 1 (és bármilyen egész szám) szerint; 228 a, b bármely racionális szám szerint.

230. (I): 193, 194., 195. $[0, +\infty)$, 196. $[-3, +\infty)$, 198. $[-2, 0]$ és $[2, +\infty)$, 199. $[-7, -2]$, $[0, 2]$ és $[7, +\infty)$, 200., 201., 202. $(-\infty, 0)$ és $[0, +\infty)$, 206. $[0, +\infty)$, 208. $(0, +\infty)$, 209. $[0, +\infty)$, 210. $(-\infty, 0]$, 211. $[0, +\infty)$, 212. $[3/2, +\infty)$, 213. $[0, +\infty)$, 214. $(2, +\infty)$, 215. $(-\infty, 0]$, 218. $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{E}$, 219. $(n, n+1]$, $n \in \mathbb{E}$, 220. $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{E}$, 221. $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{T}$, és $(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}]$, $n \in \mathbb{T}$, 222. $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, 223., 224. $[n, n+1)$, ha n egész, 227/1,4 $[-1, +\infty)$, 227/2,3 $(-\infty, -1]$ és $[0, +\infty)$.

- (II): 193. 194., 195. $(-\infty, 0]$, 196. $(-\infty, -3]$, 198. $(-\infty, -2]$ és $[0, 2]$, 199. $(-\infty, -7]$, $[-2, 0]$ és $[2, 7]$, 200. $(-\infty, 0]$, 201. $(-\infty, 0]$, $(0, +\infty)$, 202. $(-\infty, 0]$ és $(0, +\infty)$, 203., 204. és 205. $(-\infty, 0]$ és $(0, +\infty)$, 206. $(-\infty, 0]$, 207. $(0, +\infty)$, 208. $(-\infty, 0]$, 209. $(-\infty, 0]$, 210. $[0, +\infty)$, 211. $(-\infty, 0]$, 212. $(-\infty, 3/2]$, 213. $(-\infty, 0]$, 214. $(-\infty, -2]$, 215. $(-\infty, 0]$, 221. $(-\infty, 0]$, $(0, +\infty)$, $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{T}$, és $(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}]$, $n \in \mathbb{T}$, 222. $(-\infty, 0]$ és $[1, \infty)$, $n \in \mathbb{T}$, 225. $(n, n+1)$, ha n egész, 226. $(n, n+1]$, ha n egész, 227/1. $4(-\infty, 1]$, 227/2, 3 $(-\infty, 0]$ és $[1, +\infty)$.

Megjegyzés: a 228. függvények közül egyik sem monoton semmilyen intervallumban sem.

231. (A zárójelbe tett számok közül az első a szélsőérték helyét, a második magát a szélsőértéket adja meg. Az aláhúzottak abszolút szélsőértékek is, a többiek csak lokálisak.)

Minimumok: 193., 194. $(0, 0)$, 195. $(0, 3)$, 196. $(-3, 0)$, 197. $(a, 0)$, ha $a \geq 0$, 198. $(-2, 0)$, $(2, 0)$, 199. $(-7, 0)$, $(0, 3)$, $(7, 0)$, 200. $(0, 0)$, 201., 202. $(0, 0)$, 203., 204., 205. $(a, -1)$, ha $a < 0$, 207. $(0, 0)$, $(a, 1)$, ha $a > 0$, 209., 211. $(0, 0)$, 212. $(3/2, 0)$, 213. $(0, -3)$, 214. $(a, -1)$, ha $-2 < a < 2$, 215. $(a, \frac{1}{2})$, ha $a < 0$, 216. $(0, 1)$, $(n, 0)$, ha n egész, 219. $(a, -n)$, ha n egész és $n \leq a < n+1$, 220. $(a, -n)$, ha n egész és $n-1 < a < n$, 221. (a, n) , ha n egész, és $\frac{1}{n+1} < a < \frac{1}{n}$, 222. $(a, \frac{1}{n})$, ha n egész, $n \neq 0$ és 223. $(n, 2)$, ha n egész, 224. $(n, 0)$, ha n egész, 227/1. 4 $(a, 1)$, ha $-1 \leq a \leq 1$, 227/2, 3, $(0, 0)$, valamint $(a, 1)$, ha $a < -1$, vagy $a > 1$, 228a) és b) $(a, 0)$, ha a irracionális.

Maximumok: 197. $(a, 0)$, ha $a > 0$, 198. $(0, 2)$, 199. $(-2, 5)$ és $(2, 5)$, 201., 202. $(a, 1)$, ha $a \neq 0$, 203., 204., 205. $(a, 1)$, ha $a > 0$, 207. $(a, 1)$, ha $a > 0$, 210. $(0, 0)$, 214. $(a, 1)$, ha $a < -2$ vagy $a > 2$, 215. $(0, 1)$, $(a, \frac{1}{2})$, ha $a < 0$, 216. $(0, 1)$, 219. $(a, -n)$ ha n egész, és $n \leq a < n+1$, $n-1 < a \leq n$, 220. $(a, -n)$, ha n egész és $n-1 < a \leq n$, 221. (a, n) , ha n egész, és $\frac{1}{n+1} < a \leq \frac{1}{n}$, 222. $(a, \frac{1}{n})$, ha n egész, $n \neq 0$ és $n < a < n+1$, 225. $(n, 0)$, ha n egész, 227/2 $(a, 1)$, ha $a \leq -1$ vagy $a \geq 1$, 228/a

$(a, 1)$, ha a racionális, $228/b \left(\frac{p}{q}, \frac{1}{q}\right)$, ha $p \in T$,
 $q \in T$ és p és q legnagyobb közös osztója 1.

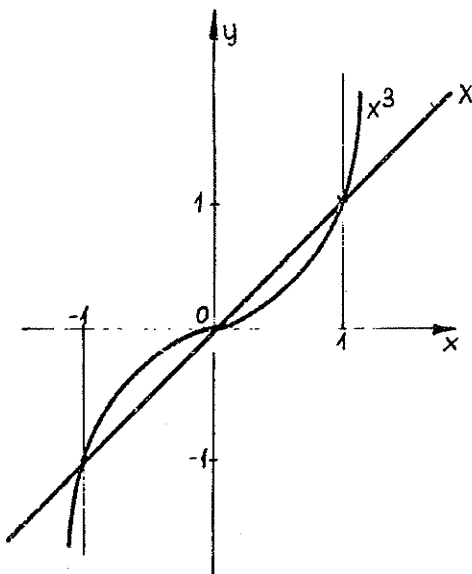
232. a) és b) páros, c) és d) páratlan. Könnyen belátható ugyanis, hogy páros, illetve páratlan függvénynek a reciproka is ugyanugy páros, illetve páratlan, és akkor már alkalmazható a jegyzetből (1.7), (1.8), (1.9).

233. a) páros, b) páros, ha n páros szám, páratlan, ha n páratlan szám.

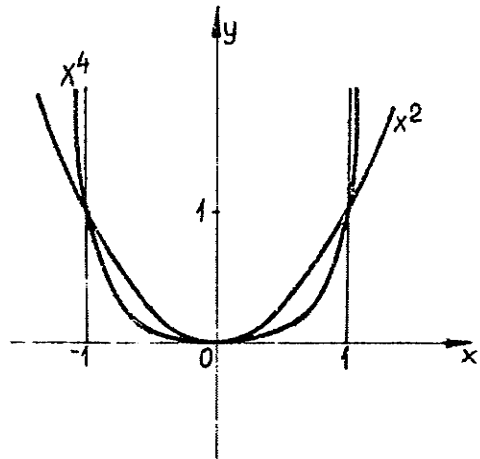
234. Nem. Az egyetlen szöbakerülhető érték ugyanis mind a két esetben $a = \frac{1}{2}$ lenne, de a függvények így sem lesznek páratlanok, mert az origóra szimmetrikus szakaszvégpontok közül az egyik rajta van a függvénygörbén, a másik nincs.

235. Az összes $y = c$ alakú függvények, ahol $c \in \mathbb{R}$.

236. Lásd az ábrát.



236/a ábra



236/b ábra

237. Az $(1, 1)$, valamint páros m, n esetén a $(-1, 1)$, páratlan m, n esetén a $(-1, -1)$ pontban metszik egymást, és a $(-1, 1)$ intervallumban az x^m , azon kívül az x^n görbe van közelebb az x tengelyhez. Bármennyi ugyanis $k, 1^k = 1, (-1)^{2k} = 1, (-1)^{2k-1} = -1$; és $m > n$ esetén $|x^m| > |x^n|$, ha $|x| > 1$, $|x^m| < |x^n|$, ha $|x| < 1$.

238-251. Mindegyiket lineáris transzformációval, illetve ilyenek sorozatával.

Alább mindenütt felsoroljuk, hogy milyen lineáris transzformációkkal milyen függvénygrafikonok sorozatán keresztül juthatunk el az eredményig. A transzformációkat hivatkozás céljából zárójelbe tett római sorszámokkal jelöljük.

238. $y = x^3 - t$ tükrözzük az x tengelyre.

239. $y = \frac{1}{x}$ -et tükrözzük az x tengelyre.

240. x^2 (I) $2x^2$ (II) $2x^2 + 1$.

(I) nyújtás kétszeresre az y tengely mentén, (II) párhuzamos eltolás 1 egységgel az y tengely (pozitív) irányában.

241. $\frac{1}{x}$ (I) $\frac{3}{x}$ (II) $\frac{3}{x} + 21$.

(I) nyújtás háromszorosra y mentén, (II) eltolás 21 egységgel y irányában ("felfelé").

242. $\frac{1}{x}$ (I) $\frac{4}{x}$ (II) $\frac{4}{x+2}$.

(I) nyújtás 4-szeresre y irányában, (II) eltolás -2 egységgel x irányában ("2-vel balra").

243. $y = \frac{1}{2(x-1,5)}$, tehát

$\frac{1}{x}$ (I) $\frac{1}{2x}$ (II) $\frac{1}{2(x-1,5)}$,

ahol (I) zsugorítás felére akár x , akár y mentén (itt ez mindegy), II eltolás 1,5 egységgel "jobbra".

244. x^3 (I) $2x^3$ (II) $2x^3 - 2$,

(I) nyújtás kétszeresre y irányában, (II) eltolás 2-vel "lefelé".

245. $y = -x^2 + 4x - 4 = -(x - 2)^2$, tehát

$$x^2 \text{ (I) } (x - 2)^2 \text{ (II) } -(x - 2)^2;$$

(I) eltolás 2-vel "jobbra", (II) tükrözés az x tengelyre.

246. $y = (x - 3)^3$; ezt a görbét tehát megkapjuk, ha x^3 -t eltoljuk 3-mal "jobbra".

247. $y = 2(x^2 - 2x + 4) = 2(x^2 - 2x + 1) + 3 = 2(x - 1)^2 + 6$; ezért

$$x^2 \text{ (I) } (x - 1)^2 \text{ (II) } 2(x - 1)^2 \text{ (III) } 2(x - 1)^2 + 6, \text{ ahol}$$

(I) eltolás 1-gyel "jobbra", (II) nyújtás 2-szeresre y mentén,
(III) eltolás 6-tal "felfelé".

248. $y = -\frac{1}{4}(x^2 - 4x) = -\frac{1}{4}[(x^2 - 4x + 4) - 4] = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 1$;

$$x^2 \text{ (I) } (x - 2)^2 \text{ (II) } \frac{1}{4}(x - 2)^2 \text{ (III) } -\frac{1}{4}(x - 2)^2 \text{ (IV) } -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 1,$$

ahol (I) eltolás 2-vel "jobbra", (II) zsugorítás $1/4$ részre y mentén,
(III) tükrözés x -re, (IV) eltolás 1-gyel "felfelé".

249. $y = \frac{(2x - 2) + 5}{x - 1} = 2 + \frac{5}{x - 1}$

$$\frac{1}{x} \text{ (I) } \frac{1}{x - 1} \text{ (II) } \frac{5}{x - 1} \text{ (III) } \frac{5}{x - 1} + 2,$$

ahol (I) eltolás 1-gyel "jobbra", (II) nyújtás 5-szörösre y mentén,
(III) eltolás 2-vel "felfelé".

250. $y = \frac{3x + 2}{2(x - 2,5)} = \frac{3(x - 2,5) + 9,5}{2(x - 2,5)} = \frac{3}{2} + \frac{9,5}{2(x - 2,5)} = \frac{3}{2} + \frac{4,75}{x - 2,5}$,

tehát

$$\frac{1}{x} \text{ (I) } \frac{1}{x - 2,5} \text{ (II) } \frac{4,75}{x - 2,5} \text{ (III) } \frac{4,75}{x - 2,5} + \frac{3}{2},$$

ahol (I) eltolás 2,5-del "jobbra", (II) 4,75-szoros nyújtás y mentén,
(III) eltolás $\frac{3}{2}$ -del "felfelé".

$$\begin{aligned} 251. \quad y &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \end{aligned}$$

tehát

$$x^2 \text{ (I) } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{(II) } a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{(III) } a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

ahol (I) eltolás x mentén $-\frac{b}{2a}$ -val, (II) a -szoros nyújtás y mentén (ez $|a| < 1$ esetén persze zsugorítás, $a < 0$ esetén pedig az x tengelyre való tükrözést is magában foglal), (III) eltolás y irányában $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ egységgel.

$$252. \quad \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}};$$

így

$$\frac{1}{x} \text{ (I) } \frac{1}{x+\frac{d}{c}} \quad \text{(II) } \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} \quad \text{(III) } \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c},$$

ahol (I) eltolás x mentén $-\frac{d}{c}$ -vel, (II) $\frac{bc-ad}{c^2}$ -szeres nyújtás y mentén (ez persze zsugorítást is jelenthet, és az x tengelyre való tükrözést is magában foglalhat), (III) eltolás $\frac{a}{c}$ -vel y mentén.

253. Az első esetben az $y = \frac{1}{x}$, a másodikban az $y = k \cdot \frac{1}{x}$ függvény grafikonját kapjuk, és $\frac{1}{\frac{x}{k}} = k \cdot \frac{1}{x}$.

$$254. \quad y = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \quad (x=0\text{-ra nincs értelmezve}).$$

255. $y = x$, ha $x \neq 0$; $y = 0$ -ra nincs értelmezve.

$$256. \quad y = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } -2 \leq x < -1, \\ \frac{1}{x}, & \text{ha } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ x, & \text{ha } 1 \leq x < 2, \\ x^2, & \text{ha } 2 \leq x < 3, \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 0\text{-ra nincs értelmezve!} \\ \text{sit.} \end{array}$$

257. Az, hogy csak a) páros, b) páratlan fokszámu tagokat tartalmazzon.

258. Nem. Ha ugyanis valamely x_0 helyen nemcsak a számláló, hanem a nevező is 0 (vagyis x_0 nemcsak a számlálónak gyöke, hanem a nevezőnek is), akkor ott a törtfüggvény nincs értelmezve.

A helyes állítás: a $\frac{p(x)}{q(x)}$ racionális törtfüggvény 0-helyei azok b helyek, amelyekre $p(b) = 0$, de $q(b) \neq 0$.

259. Az állítás igazolható akár a többtaguak osztási szabályán, akár az eredményből visszaszorzással.

260. a) Gyöke $x_0 = 1$, és ezért osztható $x - 1$ -gyel; b) gyöke $x_0 = -1$, és ezért osztható $x + 1$ -gyel.

261. a) Csak negatívak lehetnek,
b) csak pozitívak lehetnek.

262. Ha a gyöktényezős felbontásban elvégezzük a szorzást, az egyenlőség azonnal belátható.

$$263. \quad x^3 - x^2 + 2 = (x + 1)(x^2 - 2x + 2).$$

Valós racionális gyökökként ugyanis a 2.7. tétel szerint csak egész számok, mégpedig a 2 osztói: 1, 2, -1, -2 kerülhetnek szóba. Ezek közül csak -1 gyök. Osszuk el tehát $x^3 - x^2 + 2$ -t $x + 1$ -gyel:

$$(x^3 - x^2 + 2) : (x + 1) = x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + x^2 \\
 \hline
 - 2x^2 + 2 \\
 - 2x^2 - 2x \\
 \hline
 + \quad + \\
 \hline
 2x + 2 \\
 2x + 2 \\
 \hline
 - \quad - \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Vagy Horner-eljárással:

	1	-1	0	2
	0	-1	2	-2
-1	1	-2	2	0

Ezek szerint $x^3 - x^2 + 2 = (x + 1)(x^2 - 2x + 2)$. Ez utóbbi másodfokú polinomnak - ezt már megállapíthatjuk a diszkriminánsból - nincsenek valós gyökei, tehát nem is bontható fel további valós tényezőkre.

264. $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

Valós racionális gyökként ugyanis csak egész számok, mégpedig a 6 osztói: 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6 kerülhetnek szóba. Azonnal látható, hogy 1 és 3 gyök; akkor pedig az x_3 harmadik gyökre (l. a 262. feladatot)

$$1 + 3 + x_3 = -6,$$

$$\text{ugyhogy } x_3 = -2.$$

265. $(x - 1)(x + 3)^2$.

266. $(x - 2)(2x^2 + x + 1)$.

A 2.7. tétel szerint ugyanis racionális gyöke ennek az egyenletnek csak olyan $\frac{u}{v}$ tört lehet, amelyre u is, v is osztója 2-nek, és u , v relatív prímszámok. Szóba kerülhet tehát 1, 2, -1, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

Ezek közül 2 gyök, tehát a polinom osztható $x - 2$ -vel. A hányados $2x^2 + x + 1$; ez tovább nem bontható.

$$267. \quad (x+1)^3(x-1).$$

I. megoldás. Valós racionális gyök csak 1 vagy -1 lehet. Mind a kettő valóban gyöke a polinomnak, tehát $x-1$ is, $x+1$ is gyöktényező. Ezek szorzatával, x^2-1 -gyel osztva hányadosul $x^2+2x+1=(x+1)^2$ -t kapunk.

II. megoldás.

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 2x - 1 &= x^4 - 1 + 2(x^3 - x) = (x^2+1)(x^2-1) + \\ &+ 2x(x^2-1) = (x^2-1)(x^2+1+2x) = (x+1)(x-1)(x+1)^2 = \\ &= (x+1)^3(x-1). \end{aligned}$$

$$268. \quad (x+1)^2(x-2)^2.$$

$$269. \quad (x+1)^2(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 2 &= x^4(x+1) - 3x^2(x+1) + 2(x+1) = \\ &= (x+1)(x^4 - 3x^2 + 2); \text{ ez az utóbbi tényező pedig felbontható } \\ x^2 &= y \text{ helyettesítéssel:} \\ x^4 - 3x^2 + 2 &= y^2 - 3y + 2 = (y-1)(y-2) = (x^2-1)(x^2-2) = \\ &= (x+1)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

270. Nincs. A 2.7. tétel szerint ugyanis csak 1 vagy -1 lehetne gyök, de egyik sem az.

271. Nincs, mert

$$\begin{aligned} x^8 + x^4 + 1 &= x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4+1)^2 - (x^2)^2 = \\ &= (x^4+1+x^2)(x^4+1-x^2) = [(x^4+2x^2+1) - x^2][(x^4+2x^2+1) - \\ &3x^2] = [(x^2+1)^2 - x^2][(x^2+1)^2 - (\sqrt{3} \cdot x)^2] = (x^2+x+1)(x^2-x+1) \\ &(x^2+\sqrt{3} \cdot x+1)(x^2-\sqrt{3} \cdot x+1), \end{aligned}$$

és eközül a négy másodfoku polinom közül - amint azt a diszkriminánssuk mutatja - egyiknek sincs valós gyöke.

$$272. \quad b = -5.$$

Látható, hogy a polinomnak -1 b bármilyen értéke mellett gyöke. Osztással (vagy Horner-eljárással) megállapíthatjuk, hogy

$$x^5 - bx^2 - bx + 1 = (x+1)[x^4 - x^3 + x^2 - (b+1)x + 1].$$

A -1 akkor lesz többszörös gyök, ha a hányados-polinom is osztható $x + 1$ -gyel, vagyis ha

$$(-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 - (b+1)(-1) + 1 = 0.$$

azaz $b = -5$.

273. a) minden $n \in T$ -re,
b) páratlan n -re.

Az eredmény igazolható akár a polinomosztás eredeti módszerével, akár Horner-eljárással. Ha a bizonyítást teljesen hiánytalaná akarjuk tenni, matematikai indukciót alkalmazunk.

274. Nem. A számláló maradéktalanul osztható ugyan a nevezővel, a hányados $x^3 - 2x + 1$; ez azonban nem azonos az eredeti törttel, mert a nevező gyökhelyein, az $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$ helyeken $x^3 - 2x + 1$ értelmezve van, a feladatban adott törtfüggvény viszont nincs.

275. Legyen a polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Ekkor a feladat szerint

$$f(0) = a_0,$$

$$f(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

egyenként páratlan számok.

Ha viszont a_0 páratlan, akkor semmilyen $x = 2k$ páros szám nem lehet gyöke a polinomnak, hiszen az

$$f(2k) = a_n (2k)^n + a_{n-1} (2k)^{n-1} + \dots + a_2 (2k)^2 + a_1 (2k) + a_0$$

kifejezésben az utolsó kivételével minden tag páros; így $f(2k)$ csak páratlan szám lehet, tehát

$$f(2k) \neq 0.$$

Ha pedig az együtthatók összege páratlan, akkor nyilván páratlan számú páratlan együttható van; de ekkor az

$$f(2k+1) = a_n (2k+1)^n + a_{n-1} (2k+1)^{n-1} + \dots + a_2 (2k+1)^2 + a_1 (2k+1) + a_0$$

kifejezés is páratlan számú páratlan tagot tartalmaz, hiszen az

$$a_j(2k+1)^j$$

szorzat a_j -vel együtt páros, illetve páratlan. Így $f(2k+1)$ is páratlan egész szám, tehát $f(2k+1) \neq 0$; ez azt jelenti, hogy semmilyen $2k+1$ páratlan szám nem lehet gyöke a polinomnak.

$$\begin{aligned} 276. \quad p(x) &= -\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4) - 2(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3) = \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + 10x^2 - \frac{65}{3}x + 15. \end{aligned}$$

$$277. \quad p(x) = -x^4 + 4x^3 - x^2 - 7x + 5.$$

$$278. \quad p(x) = \frac{1}{945}(4x^3 - 65x^2 + 556x + 450);$$

$$p(2) = \frac{1334}{945} \approx \sqrt[3]{2} \quad (2 \text{ tizedesig}).$$

279. Igen. Vezessük be az

$$x = \frac{t}{100} - 3, \quad y = s - 25$$

új változókat. Ekkor az alábbi új értéktáblázatot kapjuk:

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	0	-1	-4

Ennek legalacsonyabbfoku interpolációs polinomja

$$y = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{8}x^2 - \frac{5}{4}x.$$

A régi változókra visszatérve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x - 25 &= -\frac{1}{8}\left(\frac{t}{100} - 3\right)^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{t}{100} - 3\right)^3 + \\ &+ \frac{5}{8}\left(\frac{t}{100} - 3\right)^2 - \frac{5}{4}\left(\frac{t}{100} - 3\right); \end{aligned}$$

innen $s = s(t)$ -re ugyancsak negyedfoku polinomot kapunk. Ez a keresett interpolációs polinom, hiszen a feladatban megadott értékpárok nyilván kielégítik. Más - legfeljebb negyedfoku - megoldás pedig a 2.9. tétel szerint nem lehet.

280. Négy tizedesig: a) -0,9093, b) -0,8414,
c) 0,8253, d) 0,5463, e) 0,1559, f) 0,6495.

281-286. Lineáris transzformációval, az alábbi lépéseken át:

281. $\sin x, \sin 3x, 2 \sin 3x, 2 \sin 3x - 1.$

282. $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} 2x, 3 \operatorname{tg} 2x, 3 \operatorname{tg} 2x + 2.$

283. $\cos x, \cos 4x, \cos 4x - 1, \frac{1}{2} (\cos 4x - 1).$

284. Mivel

$$\cotg \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -\cotg \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\operatorname{tg} x,$$

azért a vázolandó függvény $\frac{\operatorname{tg} x}{2}.$

285. a) $\sin x$ -et k -ad részére zsugorítjuk,
b) $\cos x$ -et k -szorosára nyújtjuk
az x tengely mentén.

286. a) Vagy a
 $\sin x$ (I) $\sin (x + c)$ (II) $\sin (bx + c)$ (III) a $\sin (bx + c)$ lépéseken
át, ahol (I) eltolás c -vel "balra", (II) zsugorítás b -edrészre x men-
tén, (III) nyújtás a -szorosra y mentén -, vagy a

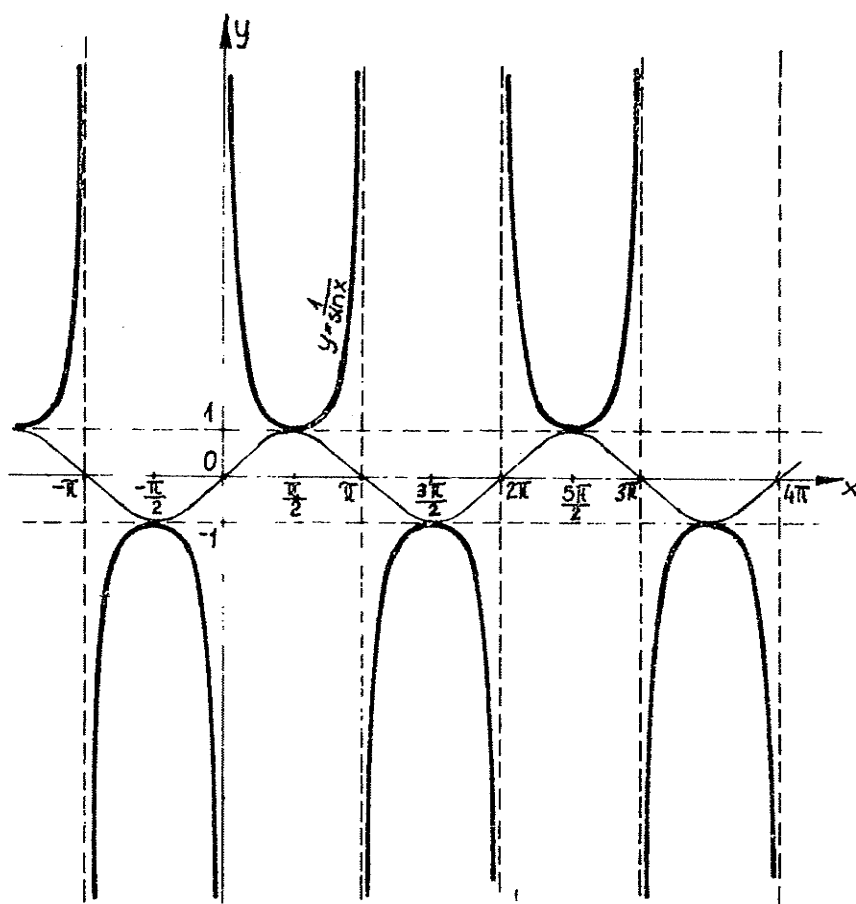
$$\sin x$$
 (I) $\sin bx$ (II) $\sin b \left(x + \frac{c}{b} \right)$ (III) a $\sin b \left(x + \frac{c}{b} \right)$ lépéseken át.

(Ez utóbbi módszer mellett szól az, hogy az előzőnek a (II) lépésé-
ben az x mentén már eltolt görbét kell ugyancsak x mentén zsugori-
tani.)

b) Hasonlóképpen.

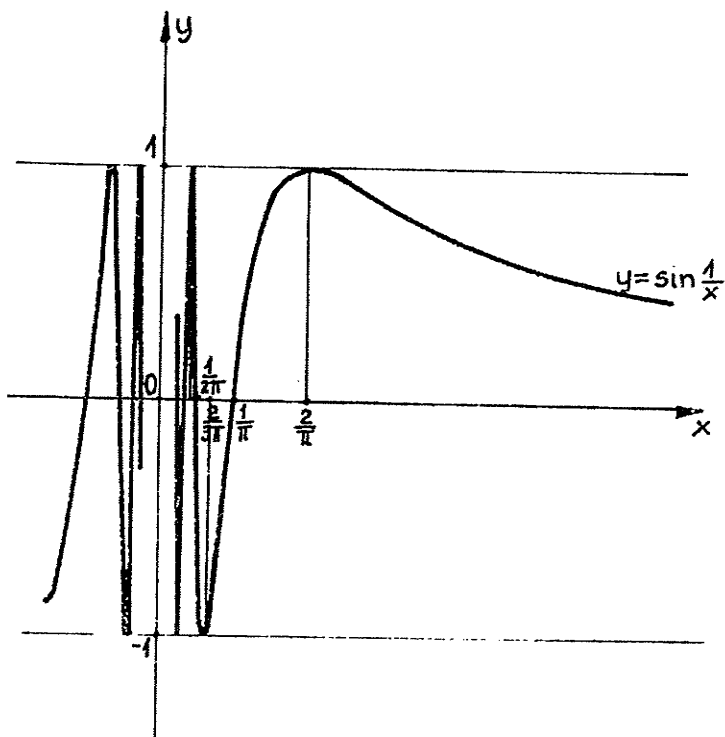
A 285., 286. függvények konkrétan persze csak akkor ábrázolha-
tók, ha a, b, c is konkrétan adott értékek.

287. Lásd az ábrát.



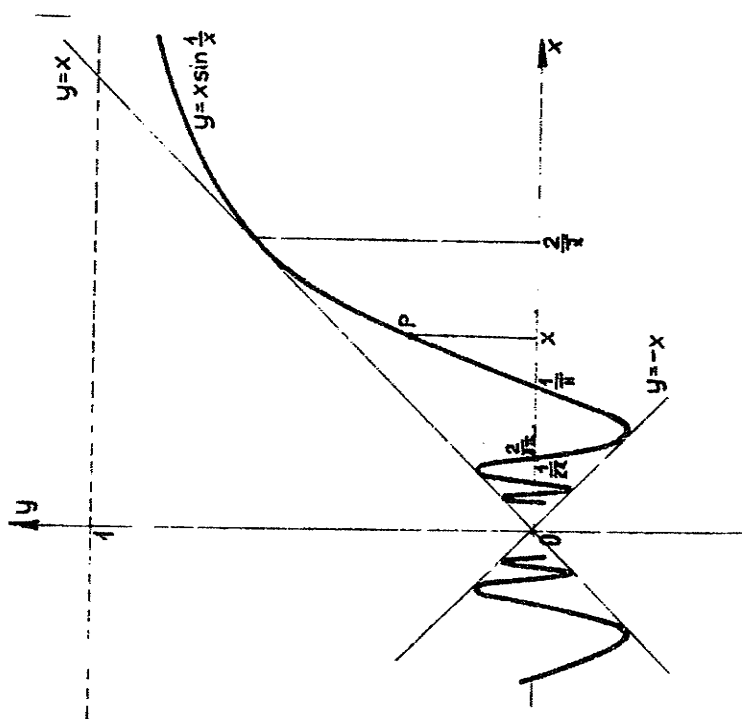
287. ábra

288. Lásd az ábrát. A 0 hely felé közeledve a hullámok egyre sűrűsödnek; a 0 helyen a függvény nincs értelmezve.

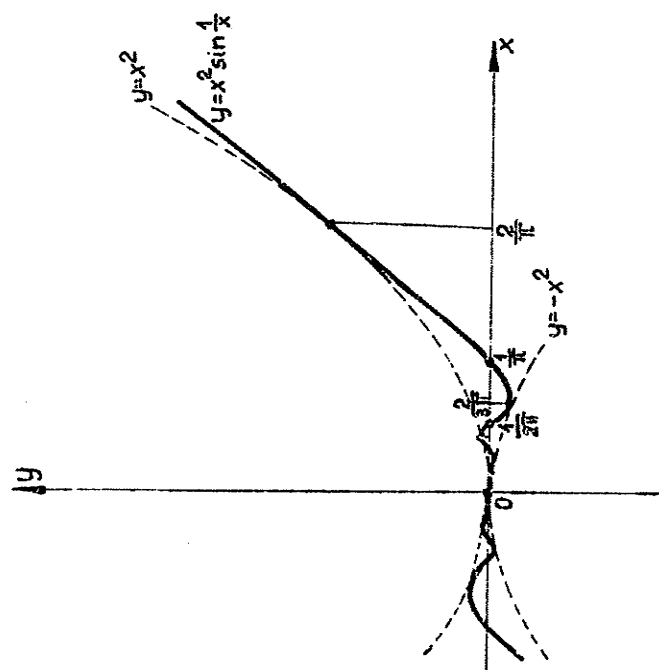


288. ábra

- 289-290. Lásd az ábrákat. Mivel $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, a görbe az $y = x$ és az $y = -x$, illetve az $y = x^2$ és az $y = -x^2$ grafikonja között "hullámzik".

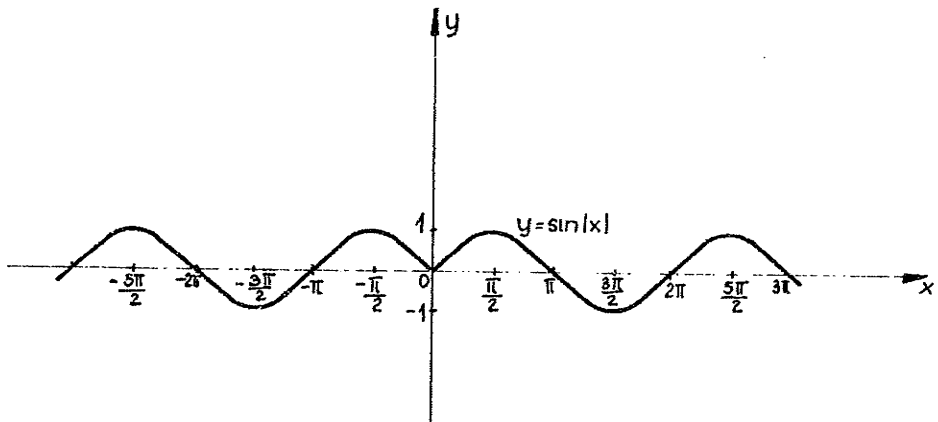


289. ábra



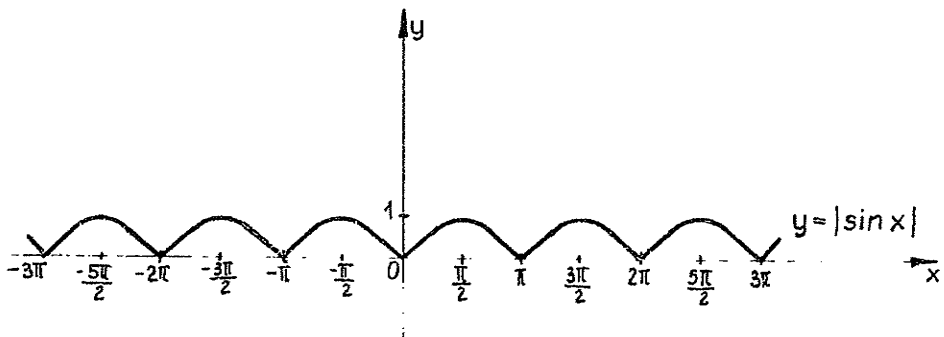
290. ábra

291. A $\sin x$ görbének a pozitív x tengelyre eső felét tükrözzük az y tengelyre (l. az ábrát).



291. ábra

292. A $\sin x$ görbének az x tengely "alá" eső részeit tükrözzük az x tengelyre (ábra).



292. ábra

293.

$$\operatorname{sg} \cos x = \begin{cases} -1, & \text{ha } (4k+1)\frac{\pi}{2} < x < (4k+3)\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ha } x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{ha } (4k-1)\frac{\pi}{2} < x < (4k+1)\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(k, n egész.)

$$294. \quad \operatorname{sg} \operatorname{tg} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } k\pi < x < (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ha } x = k\pi, \\ -1, & \text{ha } (2k-1) \frac{\pi}{2} < x < k\pi. \end{cases}$$

(k, n egész.)

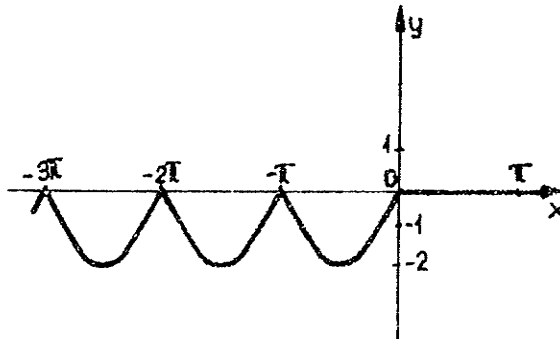
$$295. \quad \cos x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 2k\pi, \\ 0, & \text{ha } (4k-1) \frac{\pi}{2} < x < (4k+1) \frac{\pi}{2}, \text{ de } x \neq 2\pi \\ -1, & \text{ha } (4k+1) \frac{\pi}{2} < x < (4k+3) \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(k, n egész.)

$$296. \quad x[1 - \operatorname{sg}(\sin \pi x)] = \begin{cases} 0, & \text{ha } 2k < x < 2k+1, \\ x, & \text{ha } x = n, \\ 2x, & \text{ha } 2k-1 < x < 2k \end{cases}$$

$$297. \quad 1 - \operatorname{sg}(\sin^2 \pi x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ nem egész szám,} \\ 1, & \text{ha } x \text{ egész szám.} \end{cases}$$

298. Lásd az ábrát. Mivel



298. ábra

$$\operatorname{sg} \sin x \cdot \sin x = |\sin x|,$$

azért

$$\begin{aligned} \operatorname{sg} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{sg} \sin x - |\sin x| &= \operatorname{sg} x \cdot |\sin x| - |\sin x| = \\ &= |\sin x| (\operatorname{sg} x - 1) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \geq 0, \\ -2 |\sin x|, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

299. 281. $x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-3, 1]$; 282. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \cdot \frac{\pi}{4}, k \text{ egész} \right\}, f(x) \in \mathbb{R}$; 283. $x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-1, 0]$; 284. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \text{ egész} \right\}, f(x) \in \mathbb{R}$; 285. a) és b) $x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-1, 1]$; 286. a) $x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-a, a]$, b) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi - 2c}{2b}, k \text{ egész} \right\}, f(x) \in \mathbb{R}$; 287. $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \text{ egész}\}, f(x) \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$; 288. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) \in [-1, 1]$; 289., 290. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; 291. $x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-1, 1]$; 292. $x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0, 1]$; 293. $x \in \mathbb{R}, f(x) \in \{-1, 0, 1\}$; 294. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \text{ egész} \right\}, f(x) \in \{-1, 0, 1\}$; 295. $x \in \mathbb{R}, f(x) \in \{-1, 0, 1\}$; 296. $x \in \mathbb{R}, f(x) \in \{k\} \cup (4k-2, 4k), k \text{ egész}$; 297. $x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0, 1]$; 298. $x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-2, 0]$.

300. a) 283, 285. b), 286. b) az a, b, c állandók bizonyos értékei mellett (l. a 320. feladatot) 286. a), 289., 291., 292., 293., 295., 297.

b) 281., 282., 284., 285., a), a b, c állandók bizonyos értékei mellett (l. a 320. feladatot) 286. a) és b), 287., 288., 290., 294.

c) 281. $(\frac{2\pi}{3})$, 282. $(\frac{\pi}{2})$, 283. $(\frac{\pi}{2})$, 284. (π) , 285. a) $(\frac{2\pi}{k})$,

b) $(k \cdot 2\pi)$, 286. a) $(\frac{2\pi}{b})$, b) $(\frac{\pi}{b})$, 287. (2π) , 291. csak külön a $(-\infty, 0]$ és a $[0, +\infty)$ félegyenesen 2π szerint, 292. (π) , 293. (2π) , 294. (π) , 295. (2π) , 297. (1), 298. csak külön a $(-\infty, 0]$ félegyenesen π és a $[0, +\infty)$ félegyenesen akármilyen pozitív szám szerint.

301.
$$\begin{aligned} \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x) &= \frac{1}{2} \cdot \sin 2x (\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin^2 x) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{4} \cdot 2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 302. \quad & (\sqrt{2} \cos x + 1)^2 (\sqrt{2} \cos x - 1)^2 - 4 \sin^2 x \cos^2 x = \\
 & = (2 \cos^2 x - 1)^2 - (2 \sin x \cos x)^2 = (2 \cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x)^2 - \\
 & - \sin^2 2x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x.
 \end{aligned}$$

$$303. \quad \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right).$$

304-307. A 3.1. segédétel (és bizonyítása) szerinti átalakítást alkalmazva

$$304. \quad \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right),$$

$$305. \quad \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$306. \quad \sqrt{3} \sin x + 2 \cos x = \sqrt{7} \sin (x + \varphi), \text{ ahol } \sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{7}},$$

$$307. \quad -\frac{\sin x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6} \cos x}{3} = \sin (x + \varphi), \text{ ahol } \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

308. A (3.12.) képlet szerint

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin x \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin x.$$

$$309. \quad a = \sqrt{2}.$$

A 3.2. tétel bizonyításának végén található képlet szerint az eredő rezgés kezdőfázisára ugyanis

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \varphi &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{6} + a \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{6} + a \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right)} = \\
 &= \frac{1 - a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3} + a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}.
 \end{aligned}$$

Az eredő rezgés akkor és csak akkor lesz $A \sin \omega t$ alakú, ha $\operatorname{tg} \varphi = 0$. (Ebből ugyan nem következik, hogy $\varphi = 0$, csak az, hogy $\varphi = k\pi$; de

$$A \sin (\omega t + k\pi) = (-1)^k A \sin \omega t.$$

Igy a feladat követelménye ekvivalens az

$$1 - a \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

egyenlettel, s innen $a = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} 311. \quad \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{4 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 318. \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z &= \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} [\pi - (x + y)] = \\ &= \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} (x + y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y - \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \\ &= (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) \left(1 - \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}\right) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) \cdot \frac{-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \\ &= -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \cdot \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} (x + y) = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y (-\operatorname{tg} z) = \\ &= \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z. \end{aligned}$$

319. A szögfüggvények értelmezése alapján

$$(1) x_I = a + 2k\pi, \quad x_{II} = (\pi - a) + 2k\pi = -a + (2k + 1)\pi,$$

$$(2) x = \pm a + 2k\pi,$$

$$(3) x = a + k\pi,$$

ahol k tetszőleges egész szám lehet.

$$320. \quad (1) a) \quad a = 0 \text{ vagy } c = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$(1) b) \quad a = 0 \text{ vagy } c = k\pi; \quad (2) a) \quad a = 0; \quad (2) b) \quad a = 0 \\ \text{vagy } c = k \cdot \frac{\pi}{2}.$$

(1) a) ugyanis akkor teljesül, ha

$$a \sin (bx + c) = a \sin (-bx + c),$$

azaz ha vagy $a = 0$, vagy (l. a 319 (1) feladatot)

$$bx + c = 2k\pi - bx + c \quad \text{vagy} \quad bx + c = bx - c + (2k + 1)\pi; \text{ így vagy}$$

$$(I) \ 2bx = 2k\pi \quad \text{vagy} \quad (II) \ c = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

(I) bármely x -re nyilván nem teljesülhet, tehát vagy $a = 0$, vagy

$$a, b, \text{ tetszőleges, } c = (2k + 1) \frac{\pi}{2}.$$

$$321. \quad 4 \sin x \sin 2x \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 2x \quad / : 2$$

$$\sin 2x (2 \sin x \sin 3x - \cos 2x) = 0,$$

a (3.11.) képlet alapján

$$\sin 2x (\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0,$$

tehát

$$\sin 2x \cos 4x = 0,$$

$$\text{azaz vagy (I) } \sin 2x = 0, \quad \text{vagy} \quad (II) \quad \cos 4x = 0.$$

$$(I) \text{ gyökei: } x_I = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (II) \text{ gyökei: } x_{II} = (2k + 1) \frac{\pi}{8}.$$

Mivel $x_I = 4k \cdot \frac{\pi}{8}$, azért az egyenlet gyökei $\frac{\pi}{8}$ -nak mindazok az egész számú többszörösei, amelyekben $\frac{\pi}{8}$ szorzója vagy páratlan, vagy osztható 4-gyel. Ez a szorzó tehát lehet bármilyen egész szám, kivéve a 4-gyel nem osztható páros számokat (a $2k + 2$ alakú számokat).

$$322. \quad \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \sin x \cos x / \cos x$$

(amikor $\cos x$ -szel szorzunk, ki kell kötnünk, hogy $\cos x \neq 0$, tehát

$$x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

$$\sin x = 4 \sin x \cos^2 x,$$

$$\sin x (4 \cos^2 x - 1) = 0,$$

$$\text{tehát vagy (I) } \sin x = 0, \quad \text{vagy (II) } \cos x = \pm \frac{1}{2}.$$

$$(I) \text{ megoldásai: } x_1 = k\pi, \quad (II)\text{-ét: } x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi = (6k + 1) \cdot \frac{\pi}{3},$$

$$x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = (6k + 2) \cdot \frac{\pi}{3}, \quad x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi = (6k + 4) \cdot \frac{\pi}{3},$$

$x_5 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi = (6k+5)\frac{\pi}{3}$. Eszerint x_2, x_3, x_4, x_5 ma-
 gában foglalja $\frac{\pi}{3}$ -nak mindazokat az egész számú többszöröseit,
 amelyekben $\frac{\pi}{3}$ szorzóját 6-tal osztva a maradék 1, 2, 4, vagy 5
 lesz. Mivel a maradék ezen kívül már csak 0 vagy 3 lehetne, s a $6k$,
 $6k+3$ alakú számok éppen az összes 3-mal osztható számokat jelen-
 tik, azért x_2, x_3, x_4, x_5 együttesen: $\frac{\pi}{3}$ -nak azok az egész számú
 többszöröse, amelyekben a szorzó nem osztható 3-mal. Ugyanakkor
 $x_1 = k\pi = 3k \cdot \frac{\pi}{3}$ éppen $\frac{\pi}{3}$ -nak azokat az egész számú többszörö-
 seit tartalmazza, amelyekben a szorzó osztható 3-mal. Így az egyen-
 let megoldásai $\frac{\pi}{3}$ összes egész számú többszöröse:

$$x = n \cdot \frac{\pi}{3}.$$

323. x vagy $\frac{\pi}{2}$ -nek, vagy $\frac{\pi}{5}$ -nek egész számú többszöröse.

324. Ennek az egyenletnek nincs gyöke. Mivel ugyanis bármely
 szinusz abszolút értékben legfeljebb 1, azért megoldás csak akkor
 lehet, ha

$$|\sin x| = |\sin 2x| = |\sin 3x| = 1,$$

vagyis ha x is, $2x$ is, $3x$ is páratlan számú többszöröse $\frac{\pi}{2}$ -nek. De
 ha x páratlan számú többszöröse, akkor $2x$ már csak páros számú
 többszörös lehet.

325. $(4k+1)\frac{\pi}{4} < x < (4k+2)\frac{\pi}{4}.$

Az egyenlőtlenségből ugyanis

$$\operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x + 1) \geq 1 + \operatorname{tg} x,$$

$$(\operatorname{tg}^2 x - 1) (\operatorname{tg} x + 1) \geq 0,$$

$$(\operatorname{tg} x - 1) (\operatorname{tg} x + 1)^2 \geq 0,$$

s mivel $(\operatorname{tg} x + 1)^2 \geq 0$ minden szóbajöhető x -re ($x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$
 kivételével minden x -re) teljesül, azért lényegében a

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0$$

egyenlőtlenségünk marad, melynek megoldása

$$(4k+1)\frac{\pi}{4} < x < (4k+2)\frac{\pi}{4}.$$

A kizárt $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ érték ebben nincs benne, tehát eredeti egyenlőtlenségünknek is ez a megoldása.

326. A határérték 0.

Mivel $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, és 0 és $\frac{\pi}{2}$ közti számnak a szinusza is 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé esik, azért matematikai indukcióval bebizonyítható, hogy a sorozatnak minden tagja pozitív. Eszerint a sorozat monoton csökkenő, hiszen pozitív x -re $\sin x < x$; és ugyanakkor alulról korlátos is, hiszen alsó korlátja például a 0 .

Ennélfogva a sorozatnak van egy A határértéke. Ha tehát a sorozatra jellemző

$$a_{n+1} = \sin a_n$$

egyenlőség két oldalán $n \rightarrow \infty$, akkor a bal oldal határértéke A , a jobb oldalé $\sin A$:

$$A = \sin A.$$

Ennek az egyenletnek egyetlen megoldása

$$A = 0.$$

Határérték, folytonosság

327. $+\infty$.

328. $+\infty$.

329. 0 .

330. 1 .

331. a) -1 , b) $+1$, c) nincs.

332. a) -1 , b) $+1$, c) nincs.

333. a) 1 , b) -1 , c) -1 , d) 1 .

334. $+\infty$.

335. a) $\frac{1}{2}$, b) nincs (nem $+\infty$!) c) $\frac{1}{2}$.

336. Nem létezik egy sem.

337. a) n , b) $n-1$, c) nincs.
338. a) 0, b) 1, c) nincs.
339. a) $+\infty$, b) nincs.
340. a) $-\infty$, b) $+\infty$.
341. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) nincs.
342. a) nincs, b) -1, c) -1.
343. a) 0, b) -1.
344. a) 0, b) 0.
345. a) $+\infty$, b) $+\infty$, c) $-\infty$.
346. a) 0, b) $+\infty$, c) $-\infty$,
d) 0, e) nincs, f) 1,
g) -1, h) nincs.
347. a) 0, b) $+\infty$, c) 1, d) 1, e) 1, f) 2,
g) 4, h) nincs, i) $-\infty$, j) 1, k) nincs.
348. Nem létezik egyik sem.
349. Nem létezik egyik sem.
350. a) 0, b) 0, c) 1, d) 1, e) 0, f) 0,
g) $+\infty$, h) $-\infty$.
351. a) nincs, b) nincs, c) nincs (a $\sin \frac{1}{x}$ függvény a 0-nak akármilyen kis környezetében is felvesz minden -1 és 1 közti értéket),
d) 0, e) 0, f) 0, g) 0.
352. 0 (akkor is, ha a egész szám).
353. Mindegyik 0.
354. Ilyen szám nincs.
355. Bármely c -re

$$\lim_{x \rightarrow c} Q(x) = 0.$$

Azok a racionális számok ugyanis, amelyeknek $\frac{p}{q}$ alakjában a nevező egy meghatározott q szám, nem helyezkednek el végtelen sűrűn a számegyenesen: két ilyen szám között a távolság legalább $\frac{1}{q}$. Ennélfogva van egy legkisebb távolság azok között a $\frac{p}{q}$ racionális számok között is, amelyeknek nevezője legfeljebb q . Ha tehát adva van bármilyen kis pozitív ε szám, azok a törtek, amelyeknek nevezője legfeljebb $\frac{1}{\varepsilon}$, bizonyos minimális távolságban követik egymást. Így akármelyik c helynek van olyan kis környezete, amely (magát a c számot esetleg kivéve) ilyen törteket egyáltalán nem tartalmaz. Ebben a környezetben (az irracionális számokon kívül) csakis olyan racionális számok vannak, amelyeknek $\frac{p}{q}$ alakjában a q nevező nagyobb, mint $\frac{1}{\varepsilon}$, így itt a $Q(x)$ függvény értéke minden racionális helyen olyan $\frac{1}{q}$, amelyre

$$q > \frac{1}{\varepsilon},$$

tehát

$$\frac{1}{q} < \varepsilon.$$

Mivel az irracionális helyeken $Q(x) = 0$, azért ebben a környezetben mindenütt

$$Q(x) < \varepsilon,$$

s ez azt jelenti, hogy valóban

$$\lim_{x \rightarrow c} Q(x) = 0.$$

356. a) c , b) $\frac{1}{c}$, ha $c \neq 0$; ha $c = 0$, a határérték nem létezik; c) ha $c = 1$ vagy -1 , akkor a határérték is ugyanennyi, egyébként nem létezik.

357. $\frac{1}{\operatorname{sg} c}.$

358. 0, ha $c = 0$; egyébként nem létezik.

359. 0, ha $c = 0$; egyébként nem létezik.

360. $[k + c]$, ha c nem egész; egyébként nem létezik.

361. $\{c\}$, ha c nem egész; egyébként nem létezik.

362. Nem. Előállíthatunk ugyan tetszőszerinti kicsiny olyan intervallumot, amelyben a függvény még mindig nem korlátos, és találhatunk olyan c helyet is, amelynek bármilyen kis környezetében sem korlátos; ez azonban még mindig nem jelenti azt, hogy a c helyen $|f(x)| \rightarrow \infty$, mert lehet, hogy a c hely bármilyen kis környezetében vannak a függvénynek 0-hoz közeli értékei is. Legyen például

$$f(x) = \begin{cases} q, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{T}, \quad q \in \mathbb{T}, \quad p \text{ és } q \text{ relatív prímek,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Ez a függvény semmilyen intervallumban nem korlátos, és $|f(x)| = f(x)$ mégsem tart ∞ -hez sehol sem: egyetlen helyen sincs sem véges, sem végtelen határértéke. Bármely helynek bármilyen kis környezetében vagy ugyanis irracionális hely is - ahol $f(x) = 0$ - és bármilyen nagy előre megadott K számhoz olyan $\frac{p}{q}$ racionális hely is, ahol $q > K$, tehát $f(x) = q > K$.

363. 0.

Mivel ugyanis $\lim_{x \rightarrow a} |q(x)| = \infty$, bármilyen kis előre meg-

adott ξ pozitív számhoz van olyan K_a , amelyben

$$|q(x)| > \frac{N}{\xi},$$

akkor pedig $K_a \cap K'_a$ -ben

$$\left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| < \frac{N}{\frac{N}{\xi}} = \xi,$$

s ez éppen azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

364. Általában nem létezik, csak akkor, ha van olyan K_a^* , amelyben

$$\frac{q(x)}{p(x)} \geq 0, \text{ vagy olyan, amelyben } \frac{q(x)}{p(x)} \leq 0.$$

A határérték az előbbi esetben $+\infty$, ez utóbbiban $-\infty$.

Bizonyítás:

A feladat feltételeivel

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{q(x)}{p(x)} \right| = +\infty;$$

mivel ugyanis $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = +\infty$, azért bármilyen nagy előre

megadott M pozitív számhoz található olyan K'_a , amelyben

$$|q(x)| > MN,$$

akkor pedig $K_a \cap K'_a$ -ben

$$\left| \frac{q(x)}{p(x)} \right| > \frac{MN}{N} = M,$$

s ez éppen azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{q(x)}{p(x)} \right| = +\infty.$$

A $\left| \frac{q(x)}{p(x)} \right| \rightarrow +\infty$ határérték-összefüggésből a megoldás már következik.

365. 0.

Minthogy ugyanis $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = 0$, bármilyen kis előre meg-

adott pozitív ε számhoz van olyan K'_a , amelyben

$$|p(x)| < \varepsilon N;$$

akkor $K_a \cap K'_a$ -ben

$$\left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| = \frac{|p(x)|}{|q(x)|} < \frac{\varepsilon N}{N} = \varepsilon,$$

s ez éppen azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

366. Általában nem létezik, csak akkor, ha van olyan K_a^* , amelyben $p(x) \geq 0$, vagy amelyben $p(x) \leq 0$. A határérték az előző esetben $+\infty$, ez utóbbiban $-\infty$.

A feladat feltételeiből ugyanis csak az következik, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{q(x)}{|p(x)|} = +\infty.$$

367. Egyik sem létezik, csak a jobb- és a baloldali határérték:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x-1}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{x-1}{x} = +\infty.$$

368. Mind a kettő 0.

369. -10, mert

$$\frac{x^2 - 25}{x + 5} = x - 5, \quad \text{ha } x \neq -5,$$

és így

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} (x - 5) = -10.$$

Egyrészt ugyanis a 4.1. Definíció szerint a határérték független a függvénynek az $a = -5$ helyen felvett értékétől (csak a $K_a \setminus \{a\}$ halmazon felvett értékeitől függ), másrészt az $x - 5$ függvény mindenütt folytonos (l. a jegyzet 6.2. Példáját).

370. 2b.

371. $n b^{n-1}$. (Végezzük el a polinom-osztást - lehet Horner-eljárással is.)

372. $\frac{n}{k} b^{n-k}$. Az előző feladat eredményét felhasználva ugyanis

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b} \frac{x^n - b^n}{x^k - b^k} &= \lim_{x \rightarrow b} \left(\frac{x^n - b^n}{x - b} : \frac{x^k - b^k}{x - b} \right) = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^n - b^n}{x - b}}{\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^k - b^k}{x - b}} = \frac{n b^{n-1}}{k b^{k-1}} = \frac{n}{k} b^{n-k}. \end{aligned}$$

373. 0, mert

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x - 2} &= \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{(x^3-1) + (x-1)} = \\ &= \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x^2+x+1+1)} = \frac{x^2-1}{x^2+x+2}, \quad \text{ha } x \neq 1. \end{aligned}$$

374. $+\infty$ (l. az előző feladatot).

375. l. (Adjuk össze a két törtet.)

376. Nincs. (A jobb oldali határérték $+\infty$, a bal oldali $-\infty$.)

377. Nincs. (A jobb oldali határérték $-\infty$, a bal oldali $+\infty$.)

378. a) ha $b = 3a$; egyébként nincs.

379. $+\infty$.

380. sg $A \cdot \infty$.

381. Nincs.

382. $\frac{2}{3}$,

383. $+\infty$,

384. 0

lásd a jegyzet 5.2. Példáját.

385. $\frac{p(c)}{q(c)}$, ha $q(c) \neq 0$,

Ha $x = c$ páros multiplicitású, $2k$ -szoros gyöke $q(x)$ -nek, és $p(c) = 0$, legyen $q(x) = (x - c)^{2k} = s(x)$, ekkor a határérték sg $\frac{p(c)}{s(c)} \cdot \infty$;

nincs, ha $x = c$ páratlan multiplicitású gyöke $q(x)$ -nek (mert a bal és a jobb oldali határérték különböző előjelű ∞).

Ha $q(c) = p(c) = 0$, és c $p(x)$ -nek k_1 -szeres, $q(x)$ -nek k_2 -szeres gyöke, továbbá $\min(k_1, k_2) = k$, akkor előbb egyszerűsítjük a törtet $(x - c)^k$ -nal, és az egyszerűsített tört határértékét vizsgáljuk.

386. $\frac{5}{3}$.

Jelöljük ugyanis $\sqrt[15]{x}$ -et (ennek $\sqrt[3]{x}$ is, $\sqrt[5]{x}$ is teljes hatványa - 15 a 3 és az 5 legkisebb közös többszöröse) y -nal. Ekkor

$$\sqrt[15]{x} = y, \quad \sqrt[5]{x} = y^3, \quad \sqrt[3]{x} = y^5,$$

és

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} &= \lim_{\sqrt[15]{x} \rightarrow 1} \frac{y^5 - 1}{y^3 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^5 - 1}{y^3 - 1} = \\ &= \frac{5}{3} (-1)^{5-3} = \frac{5}{3} \quad (\text{l. a 372. feladatot}). \end{aligned}$$

387. $\frac{5}{3}$.

388. Mind a kettő egyaránt $\frac{1}{2}$.

389. $\frac{1}{3}$ ($\sqrt[3]{1+x} = y$ helyettesítéssel).

390. $\frac{1}{n}$.

391. $\frac{1}{2}$. (Bővítsünk $\sqrt{x^2 + x + 1} + 1$ -gyel.)

392. 5.

393. $\frac{1}{5}$. (Elegendő $\sqrt{x-1} + 2$ -vel bővíteni.)

394. 4. ($\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+16}+4}$ -gyel bővítünk.)

395. 3. ($\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\sqrt{x}}_1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{3/2} - 1}{x^{1/2} - 1}$)

397. 1.

398. Igen. A bizonyítás is lényegében ugyanaz marad.

399. 0:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x) - x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = 0$$

(l. a 363. és az előző feladatot).

400. $+\infty$. (Az előző feladat számításmódját követhetjük.)

401. $\frac{1}{2}$.

402. 0.

403. 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

404. a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} a \cdot \frac{\sin ax}{ax} = a \lim_{ax \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = a \cdot 1 = a.$$

405. $\frac{a}{b}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin ax}{ax} \cdot a}{\frac{\sin bx}{bx} \cdot b} = \frac{a}{b}.$$

406. a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin ax}{x} = 1 \cdot a = a.$$

407. $\frac{a}{b}$.

408. $\frac{a}{b}$.

409. $\frac{1}{2}$. (Bővítsünk $1 + \cos x$ -szel.)

410. 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

411. $\frac{a^2}{2}$.

412. $\frac{1}{2}$.

413. -1.

414. $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

415. 0.

416. $\frac{1}{6}$. (Használjuk fel a 412. feladat eredményét.)

417. 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \\ &= \lim_{\substack{\frac{\pi}{2} - x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\cos y}{\sin y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cdot \cos y = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

418. 1. ($\pi - x = y$ helyettesítéssel).

419. $\frac{\pi}{2}$. Az előző feladat eredménye szerint ugyanis

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}} = \pi^2 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2} = \pi^2 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\pi + x} \cdot \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x}$$

$$= \pi^2 \cdot \frac{1}{\pi + \pi} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

420. $2 \cos a.$

421. $\frac{b^2 - a^2}{2}.$

422. $\frac{\sqrt{2}}{2}.$

423. 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \operatorname{tg} x) - (1 - \operatorname{tg} x)}{\sin x (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 - \operatorname{tg} x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

424. $-\frac{1}{4}.$

425. -1. (A függvény folytonos a 0 helyen!)

426. 0.

427. -1.

428. $\infty.$

429. $-\frac{1}{3}.$ Legyen ugyanis $\sqrt[3]{\cos x} = t$; ekkor

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - t}{1 - (t^3)^2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t^2 - 1)}{1 - t^6} =$$

$$= - \lim_{t \rightarrow 1} t \cdot \frac{t^2 - 1}{(t^3)^2 - 1} = -1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

430. 0, mert a számláló korlátos marad, és a nevező $\rightarrow \infty$.

431. Nincs. Bármilyen nagy számon halad is túl x , $\operatorname{tg} x$ még minden valós értéket felvehet.

432. Nincs.

433. Nincs.

434. 0, mert $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ minden x -re, a függvény tehát azonosan 0.

435. Nincs, mert $\cos(x + \pi) = -\cos x$.

436. a) Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ és van olyan K_a és $N > 0$, hogy K_a -ban

$$|g(x)| < N, \text{ akkor}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

b) Ha $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$ és van olyan K_a és $N > 0$, hogy K_a -ban

$$|g(x)| > N, \text{ akkor}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x) \cdot g(x)| = \infty.$$

Ugyanez a két szabály ugyanígy igaz marad akkor is, ha x nem egy véges a számhoz, hanem ∞ -hez vagy $-\infty$ -hez tart.
(A bizonyítást az olvasóra bizzuk.)

437. 0, mert $\sqrt{x} \rightarrow 0$ és $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$ (l. az előző feladat megoldását.)

438. $+\infty$, mert $\sqrt{x} \rightarrow \infty$ és ha pl. $x > \frac{6}{\pi}$, akkor $\cos \frac{1}{x} > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

439. Nincs (mert $|\cos x|$ -nek nincs pozitív alsó korlátja.)

440. a) 1, b) $+\infty$.

441. Nincs.

442. 0. Ez szemléletesen is világos abból, hogy igen nagy x -ekre $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ igen közel van 0-hoz (399. feladat), $\cos x$ pedig folytonos függvény.

Szabatos bizonyítás:

$$\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x} = -2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2},$$

és itt $x \rightarrow \infty$ esetén $\left| \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right|$ az 1 korlát alatt marad,

$\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}$ pedig 0-hoz tart:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = \sin \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = \sin 0 = 0.$$

mert a szinuszfüggvény folytonos

443. Nem, mert a tangensfüggvény - a szinusztól eltérőleg - nem mindenütt folytonos.

(A határérték valóban nem is létezik; ez azonban csak a derivált fogalmának és $\operatorname{tg} x$ deriválási képletének segítségével bizonyítható be egyszerűen.)

444. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cong \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. (Ugyanugy a $+\infty$ -ben is.)

$$\begin{aligned} 445. \quad \lim_{a \rightarrow 0} x_1 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{b^2 - 4ac - b^2}{2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-4ac}{2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = -\frac{c}{b}, \\ \lim_{a \rightarrow 0} |x_2| &= \lim_{a \rightarrow 0} \left| \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \cdot \frac{1}{a} \right| = +\infty. \end{aligned}$$

A $\lim x_2$ határérték nem létezik, csak jobb- és bal oldali határérték van: ez a kettő ellenkező előjellű ∞ .

Eredményünk összhangban van azzal, hogy ha $a \rightarrow 0$, akkor

$$|x_1 + x_2| = \left| -\frac{b}{a} \right| \rightarrow \infty$$

$$|x_1 x_2| = \left| \frac{c}{a} \right| \rightarrow \infty, \text{ ha } c \neq 0.$$

Az x_1 gyök határértéke megegyezik a $0 \cdot x^2 + bx + c = 0$, vagyis $bx + c = 0$ egyenlet gyökével.

446. $(3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$ -ban (vagyis a 3 hely ε sugarú környezetében). A határérték ugyanis 6, tehát az

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Mivel $x \neq 3$, egyszerűsíthetünk:

$$|x + 3 - 6| < \varepsilon,$$

innen

$$|x - 3| < \varepsilon,$$

illetve

$$-\varepsilon < x - 3 < \varepsilon,$$

és

$$3 - \varepsilon < x < 3 + \varepsilon.$$

$$447. \quad \left(-2 - \frac{4\varepsilon}{1+4\varepsilon}, -2 + \frac{4\varepsilon}{1+4\varepsilon} \right) \text{-ban, ha } \varepsilon < \frac{1}{4}.$$

A határérték ugyanis $-\frac{1}{4}$, tehát az előző feladathoz hasonlóan

$$\left| \frac{1}{x-2} + \frac{1}{4} \right| < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon < \frac{1}{x-2} + \frac{1}{4} < \varepsilon,$$

$$-\frac{1}{4} - \varepsilon < \frac{1}{x-2} < -\frac{1}{4} + \varepsilon,$$

$$-\frac{1+4\varepsilon}{4} < \frac{1}{x-2} < -\frac{1-4\varepsilon}{4};$$

reciprok értéket véve (az egyenlőtlenség megfordul, mert ha $\varepsilon < \frac{1}{4}$, mindegyik oldal negatív)

$$-\frac{4}{1+4\varepsilon} > x-2 > -\frac{4}{1-4\varepsilon} \quad / + 4$$

$$4 - \frac{4}{1+4\varepsilon} > x+2 > 4 - \frac{4}{1-4\varepsilon},$$

innen pedig

$$-\frac{4\varepsilon}{1+4\varepsilon} > x+2 > \frac{4\varepsilon}{1-4\varepsilon}$$

448. Páratlan n -re a $(-\varepsilon^n, \varepsilon^n)$, párosra a $(0, \varepsilon^n)$ intervallumban.

449. A $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$ intervallumban.

450. Biztosan megközelíti az $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ intervallumban; esetleg $\frac{1}{\varepsilon}$ -on innen is, ezt azonban pontosabban csak konkrétan adott ε -ra állapíthatjuk meg.

Most ugyanis csak annyit mondhatunk, hogy

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon$$

biztosan teljesül, ha

$$\frac{1}{x} < \varepsilon,$$

hiszen

$$|\sin x| \leq 1.$$

451. A $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumban biztosan.

452. Az $(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}, \infty)$ intervallumban n $(\varepsilon \leq \frac{1}{4})$

Az

$$\frac{x}{1+x^2} < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kell ugyanis megoldanunk:

$$x < \varepsilon + \varepsilon x^2,$$

$$\varepsilon x^2 - x + \varepsilon > 0;$$

ez teljesül $x < x_1$ -re és $x > x_2$ -re, ahol x_1 és x_2 a baloldali polinom gyökei, és $x_1 < x_2$. Bennünket $x > x_2$ érdekel (az $x < x_1$ megoldás a $-\infty$ -beli határértékre vonatkozik).

453. A $(-\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}})$ intervallumban. Az

$$\frac{1}{x^2} > N$$

egyenlőtlenségből ugyanis

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

454. $(-\frac{1}{N}, 0)$ -ban.

455. $((5+N)^2 + 2, +\infty)$ -ben.

456. A $(N, +\infty)$ intervallumban biztosan.

457. A hiperbolát az

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

kétértékű függvény állítja elő. Először azt bizonyítjuk, hogy az $y = \frac{b}{a} x$ egyenes aszimptotája a felső félhiperbola jobb szárának, azaz, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x \right) = 0.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x \right) &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - a^2 - x^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = -ab \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \\ &= -ab \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

mert a számláló korlátos, a nevező pedig ∞ -hez tart.

Eredményünkből a szimmetria folytán következik a másik három aszimptota-reláció is.

458. a) $k < n$, b) $k = n$, c) $k = n + 1$, d) $k = n + 2$,
e) $k > n + 2$.

a) Ha az x tengely - melynek egyenlete $y = 0$ - aszimptotája a görbének, akkor

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{p_k(x)}{q_n(x)} - 0 \right| = 0,$$

vagy $x \rightarrow -\infty$

azaz

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p_k(x)}{q_n(x)} = 0$$

kell, hogy legyen. Ez csak akkor teljesül, ha $k < n$. Ebben az esetben pedig az x tengely valóban aszimptotája a görbének, mégpedig $a + \infty$ -ben és $a - \infty$ -ben egyaránt.

- b) Az ilyen egyenes egyenlete $y = c$, ahol c tetszőleges 0-tól különböző valós szám. Ha tehát ez aszimptotája a görbének, akkor

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{vagy } x \rightarrow -\infty}} \left| \frac{p_k(x)}{q_n(x)} - c \right| = 0,$$

azaz

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p_k(x)}{q_n(x)} = c$$

kell, hogy legyen. Ez csak akkor teljesül valamely c -re, ha $k < n$. Ebben az esetben pedig az $y = c$ egyenes valóban aszimptotája a görbének, mégpedig $a + \infty$ -ben és $a - \infty$ -ben egyaránt.

- c) Az ilyen egyenes egyenlete $y = ax + b$, ahol a és b tetszőleges valós számok ($a \neq 0$). Ha tehát ez aszimptotája a görbének, akkor

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{vagy } x \rightarrow -\infty}} \left| \frac{p_k(x)}{q_n(x)} - (ax + b) \right| = 0$$

kell, hogy legyen; ez csak akkor teljesül valamilyen a -ra és b -re,

ha $\frac{p_k(x)}{q_n(x)}$ felírható egy első fokú egész és egy valódi törtfüggvény

összegeként, vagyis ha $k = n + 1$. Ebben az esetben pedig az $y = ax + b$ egyenes valóban aszimptotája a görbének, mégpedig $a + \infty$ -ben és $a - \infty$ -ben egyaránt.

Hasonlóan igazolható a d) és az e) esetre vonatkozó állítás is.

459. Az, hogy

$$\lim_{x \rightarrow c} \left| \frac{p_k(x)}{q_n(x)} \right| = \infty$$

legyen, vagyis, hogy $x = c$ nagyobb multiplicitású gyöke legyen $q_n(x)$ -nek, mint $p_k(x)$ -nek. (Ha $x = c$ nem gyök, a multiplicitást 0-nak tekintjük.)

460. Az origó.

Az OP egyenes iránytangense ugyanis (l. az ábrát) $m = \frac{\sin x}{x}$,
 FQ-é tehát $-\frac{1}{m} = -\frac{x}{\sin x}$; másfelől az OP szakasz F felezőpont-
 jának koordinátái $(\frac{x}{2}, \frac{\sin x}{2})$. Így FQ egyenlete

$$Y - \frac{\sin x}{2} = -\frac{x}{\sin x} (X - \frac{x}{2}),$$

ahol X, Y, az FQ egyenes futópontjának koordinátái.
 Ha itt $X = 0$, Y megadja Q ordinátáját:

$$Y - \frac{\sin x}{2} = -\frac{x}{\sin x} (-\frac{x}{2}),$$

tehát

$$Y = \frac{x^2}{2 \sin x} - \frac{\sin x}{2}$$

és így

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{\sin x} - \frac{\sin x}{2}) = \frac{0}{2} \cdot 1 - \frac{0}{2} = 0.$$

461. Nem; a Q pontnak az origótól való távolsága ∞ -hez tart.
 Az előbbi módon számítva most ugyanis azt kapjuk, hogy

$$Y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x}.$$

462. Ha a középpont helyzete is, a sugár nagysága is ugyanattól a
 változótól függ, akkor a kör határhelyzetének azt a kört nevezhetjük,
 melynek középpontja a mozgó középpont határhelyzete, sugara pedig
 a változó sugár határértéke.

463. Az a kör, amelynek középpontja a $(0, \frac{1}{2})$ pont, sugara pedig $\frac{1}{2}$.

Ha ugyanis a változó helyzetű kör sugara (l. az ábrát) r, akkor
 K középpontjának koordinátái (0, r), és mivel KP = r, azért

$$\sqrt{(x-0)^2 + (x^2-r)^2} = r,$$

ahonnan

$$r = \frac{x^2 + 1}{2},$$

ugyhogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} r = \frac{1}{2}.$$

464. Az a kör, amely ugyanabban a pontban érinti az ellipszist, középpontja a nagy tengely egyenesén, az érintési ponttól a nagy tengely másik végpontja felé van, átmérője pedig akkora, hogy az ellipszis kis tengelye egyenlő a nagy tengely és a körátmérő mértani középértékével.

Legyen ugyanis (l. az ábrát) az ellipszis nagy tengelye $2a$, kis tengelye $2b$, és vegyük fel a koordináta-rendszert úgy, hogy az ellipszis egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

legyen. Innen

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

a két - a nagy tengelyre nyilván szimmetrikus helyzetű - metszéspont koordinátái pedig

$$Q_1(x, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}), \quad Q_2(x, -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}).$$

Ennélfogva a PQ egyenes iránytangense

$$\frac{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}{x - a},$$

merőleges felezőjéé

$$-\frac{x - a}{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}},$$

s mivel a PQ_1 távolság F felezőpontjának koordinátái

$$(\frac{x+a}{2}, \frac{b}{2a} \sqrt{a^2 - x^2}),$$

azért PQ_1 merőleges felezőjének, KF-nek az egyenlete

$$Y - \frac{b}{2a} \sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{x - a}{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} (X - \frac{x+a}{2}),$$

ahol (X, Y) KF futópontjának koordinátái. Ha itt $Y = 0$, X megadja a K körközéppont abszcisszáját:

$$-\frac{b}{2a} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (X = \frac{x+a}{2}),$$

innen

$$X = (-\frac{b^2}{2a^2} + \frac{1}{2})(a+x),$$

ugyhogy

$$\lim_{x \rightarrow a} X = (-\frac{b^2}{2a^2} + \frac{1}{2}) \cdot 2a = a - \frac{b^2}{a},$$

és így a határcör sugara

$$r = a - (a - \frac{b^2}{a}) = \frac{b^2}{a}.$$

465. A főtengely felezőpontja.

Legyen ugyanis $OQ = x$, (l. az ábrát) a sugár beesési pontja P . Az OPQ háromszög O és P szöge egyaránt φ , így a háromszög egyenlőszáru, és a felezésével kapható OQR derékszögű háromszögből

$$x = \frac{OR}{\cos \varphi} = \frac{\frac{OP}{2}}{\cos \varphi} = \frac{\frac{r}{2}}{\cos \varphi} = \frac{r}{2 \cos \varphi}.$$

Ha a beeső sugár közeledik a főtengelyhez, $\varphi \rightarrow 0$, és

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} x = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{r}{2 \cos \varphi} = \frac{r}{2}.$$

466. Konvergens, $\lim a_n = 0$.

Minthogy ugyanis

$$\sin(n\pi + \frac{1}{n}) = \sin n\pi \cos \frac{1}{n} + \cos n\pi \sin \frac{1}{n} = (-1)^n \sin \frac{1}{n},$$

azért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} = \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n},$$

és mivel a szinuszfüggvény folytonos,

$$\pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = \pm \sin \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \pm \sin 0 = 0.$$

467. Konvergens, $\lim a_n = 1$.

468. Divergens, mert $\cos n\pi = (-1)^n$, és így a páros sorszámú tagok részsorozata +1-hez, a páratlanoké -1-hez tart.

469. Divergens: a páros sorszámú tagok részsorozata 0-hoz, a $4k + 1$ alakú sorszámúaké 1-hez, a $4k - 1$ alakú sorszámúaké -1-hez tart.

470.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\sin a}{\cos \frac{a}{2^n} \cdot \cos \frac{a}{2^{n-1}} \cos \frac{a}{2^{n-2}} \dots \cos \frac{a}{8} \cos \frac{a}{4} \cos \frac{a}{2}} = \\
 &= \frac{2 \sin \frac{a}{2^n} \sin a}{2 \sin \frac{a}{2^n} \cos \frac{a}{2^n} \cos \frac{a}{2^{n-1}} \cos \frac{a}{2^{n-2}} \dots \cos \frac{a}{8} \cos \frac{a}{4} \cos \frac{a}{2}} = \\
 &= \frac{2^2 \sin \frac{a}{2^n} \sin a}{2 \sin \frac{a}{2^{n-1}} \cos \frac{a}{2^{n-1}} \cos \frac{a}{2^{n-2}} \dots \cos \frac{a}{8} \cos \frac{a}{4} \cos \frac{a}{2}} = \\
 &= \frac{2^3 \sin \frac{a}{2^n} \sin a}{2 \sin \frac{a}{2^{n-2}} \cos \frac{a}{2^{n-2}} \dots \cos \frac{a}{8} \cos \frac{a}{4} \cos \frac{a}{2}} = \\
 &= \frac{2^4 \sin \frac{a}{2^n} \sin a}{2 \sin \frac{a}{2^{n-3}} \dots \cos \frac{a}{8} \cos \frac{a}{4} \cos \frac{a}{2}} = \dots = \\
 &= \frac{2^{n-2} \sin \frac{a}{2^n} \sin a}{2 \sin \frac{a}{8} \cos \frac{a}{8} \cos \frac{a}{4} \cos \frac{a}{2}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2^{n-1} \sin \frac{a}{2^n} \sin a}{2 \sin \frac{a}{4} \cos \frac{a}{4} \cos \frac{a}{2}} = \frac{2^n \sin \frac{a}{2^n} \sin a}{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} = \\
 &= \frac{2^n \sin \frac{a}{2^n} \sin a}{\sin a} = 2^n \sin \frac{a}{2^n} = \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{1}{2^n}},
 \end{aligned}$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{\frac{1}{2^n} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = a.$$

471. Mindenütt folytonos (l. a jegyzet 6.2. Példáját, valamint 6.6. és 6.2. Tételét).
472. Az $x = 0$ helyen M, egyebütt folytonos.
473. Az $x = \pm 2$ helyeken M, egyebütt folytonos.
474. Az $x = 0$ helyen I, negatív x -ekre folytonos.
475. Az egész helyeken I, J, egyebütt folytonos.
476. Az egész helyeken I, J, egyebütt folytonos.
477. Az egész helyeken I, B, egyebütt folytonos.
478. A 0 helyen II, az $\frac{1}{n}$ (n egész) helyeken I, B, egyebütt folytonos.
479. A 0 és az 1 helyen M, - az 1 helyen J -, a többi egész helyeken I, J, egyebütt folytonos.
480. A 0 helyen II, egyebütt folytonos.
481. A 0 helyen I, egyebütt folytonos.
482. Az egész helyeken az $x = 0$ és 1 helyet kivéve I, az $x = 1$ helyet kivéve J, a 0 helyen II, az $x = 1$ helyen és a nem egész helyeken folytonos.

483. Azokon az $x = c$ helyeken, amelyekre $q(c) = 0$,
 M , ha c nem többszörös,
 Π , ha többszörös
gyöke $q(x)$ -nek, mint $p(x)$ -nek. (Ha nem gyök, akkor 0-szoros gyöknek számít.)
484. Az $x = k\overline{1}$ helyeken (k egész) Π , egyebütt folytonos.
485. a) az $x = (2k + 1) \cdot \frac{\overline{1}}{2}$ helyeken Π , egyebütt folytonos;
b) az $x = k\overline{1}$ ($= 2k \cdot \frac{\overline{1}}{2}$) helyeken Π , egyebütt folytonos.
486. a) az $x = 0$ helyen M , a többi $x = k\overline{1}$ helyeken (k egész) Π , egyebütt folytonos,
b) az $x = 0$ helyen és az $x = (2k + 1) \cdot \frac{\overline{1}}{2}$ helyeken M , az $x = k\overline{1}$ helyeken (k 0-tól különböző egész) Π , egyebütt folytonos.
487. a) Az $x = \frac{k\overline{1}}{7}$ helyeken
 M , ha k osztható 7-tel,
 Π , ha nem osztható;
egyebütt folytonos.
b) Az $x = 7k\overline{1}$ helyeken
 M , ha k osztható 5-tel,
 Π , ha nem osztható;
egyebütt folytonos.
488. Az $x = 0$ helyen Π , egyebütt folytonos.
489. Az $x = 0$ helyen M , egyebütt folytonos.
490. a) Az $x = (2k + 1) \cdot \frac{\overline{1}}{2}$ helyeken I , egyebütt folytonos.
b) Az $x = k \cdot \frac{\overline{1}}{2}$ helyeken I , egyebütt folytonos.
491. A 0-tól különböző egész helyeken I , a 0 helyen és a nem egész helyeken folytonos.
492. Az egész helyeken M , egyebütt folytonos.
493. Mindenütt folytonos.
494. Mindenütt Π .
495. A racionális helyeken M , az irracionális helyeken folytonos.

496. Mindenütt II.

497. Nem. Ha pl. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -A$ és $f(a) = A$
vagy $-A$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)^2 = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)^2 = f(a)^2 = A^2.$$

498. Igaz. Ha ugyanis $f(x)$ folytonos a 0 helyen, akkor itt van határértéke, tehát

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x), \quad (1)$$

a páratlanság folytán pedig

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\lim_{x \rightarrow -0} f(x) \quad (2)$$

(1) és (2) egyszerre csak akkor állhat fenn, ha

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0,$$

tehát

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Ekkor pedig, mivel $f(x)$ folytonos a 0 helyen,

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

499. Igaz. A bizonyításban csak a 0 helyen való folytonosságot használtuk fel.

500. Legyen $x = a^{2k+1}$ -szeres gyök; ekkor

$$p(x) = (x - a)^{2k+1} p_1(x),$$

ahol $p_1(x)$ olyan polinom, amelynek $x = a$ nem gyöke. Ennélfogva és mert minden polinom mindenütt folytonos - a 6.8. Tétel szerint van olyan K_a , amelyben $\operatorname{sg} p_1(x) = \operatorname{sg} p_1(a)$. Ebben a K_a -ban a feladat állítása nyilván teljesül.

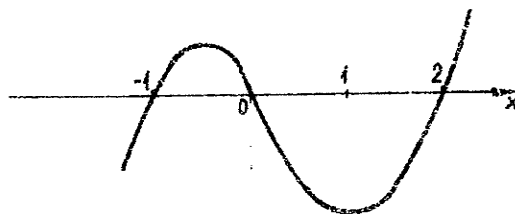
501. Az előző feladat megoldásához hasonlóan bebizonyítjuk, hogy van olyan K_a , amelyben $\operatorname{sg} f(x)$ (az a hely kivételével) végig állandó. Ebből a szélsőérték léte már következik.

502. Legyen a_1 és a_2 a két egymás utáni gyökhely. Ekkor (a_1, a_2) -ben a polinom vagy I. mindenütt pozitív, vagy II. mindenütt negatív. A 7.6. tétel (Weierstrass II. tétele) szerint $[a, b]$ -ben a polinomnak az I. esetben is van maximuma, a II. esetben is van minimuma; ennek pedig mind a két esetben az intervallum belsejébe kell esnie, és így lokális szélsőérték (mert az egész intervallumra, mint környezetre teljesül az 1.8. definíció).

503. $y = x(x+1)(x-2)$, a 0-helyek tehát -1, 0, 2. Nyilván

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty;$$

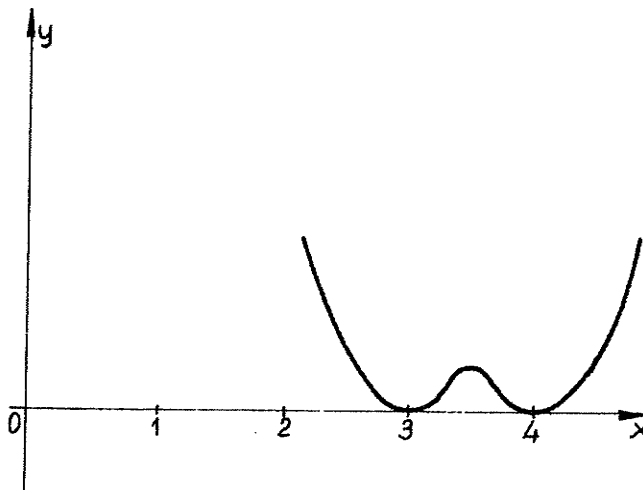
ezért $-\infty$ -től -1-ig y negatív (különben a Bolzano-tétel szerint -1 előtt is kellene 0-helyének lennie); -1-nél előjelet vált (mert -1 egyszeres, páratlan multiplicitású gyök), -1 és 0 közt tehát pozitív - itt van (legalább) egy maximuma; 0-nál ugyanúgy ismét előjelt vált, 0 és 2 közt van egy minimuma; 2-nél ismét előjelet vált, és tart a $+\infty$ -be (l. az ábrát).



503. ábra

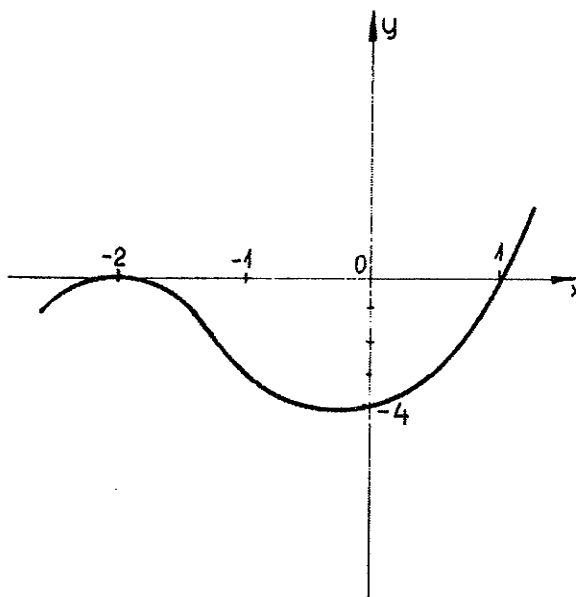
Azt, hogy a függvény szélsőértékei hol vannak és mekkorák, hogy több szélsőértéke nincs-e, hogy a görbe csakugyan ott domboru és homoru-e (alulról), ahol annak rajzoltuk stb. - ezen a fokon még nem tudhatjuk biztosan. Erről később, a differenciálszámításban lesz szó.

504. Végig $y = 0$, $x = 3$ -nál és 4 -nél tehát minimum. (Lásd az ábrát.)



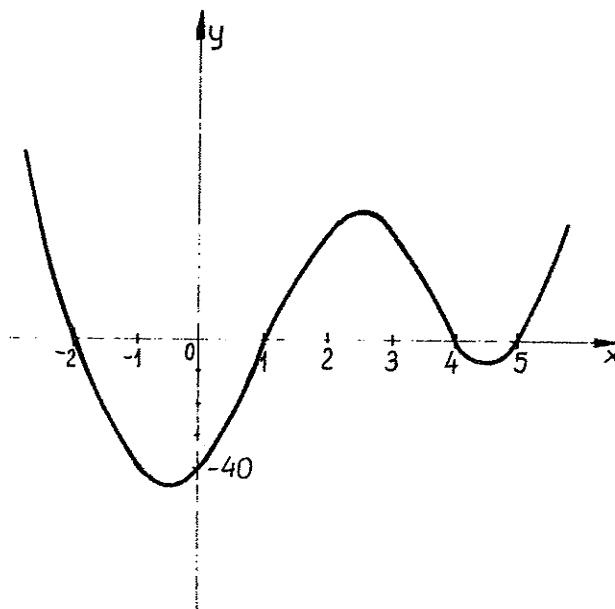
504. ábra

505. L. az ábrát.



505. ábra

506. L. az ábrát.



506. ábra

507. Legyen a szóban forgó racionális törtfüggvény $\frac{p(x)}{q(x)}$, ahol $p(x)$ és $q(x)$ két olyan polinom, amelynek nincs közös gyöke. (Ha van, a közös gyöktényező megfelelő hatványával egyszerűsíthetünk - ez a megszüntethető szakadások kivételével semmit sem változtat a grafikonon.) Ebben

a) és b) szó szerint igaz marad, ha a feltételt a $p(x)$ számlálóra, a következményt pedig már $\frac{p(x)}{q(x)}$ -re vonatkoztatjuk.

A bizonyításban arra kell vigyázni, hogy a racionális törtfüggvény csak olyan intervallumban folytonos, amely nem tartalmazza a nevező egyetlen 0-helyét sem;

c) csak $\frac{p(x)}{q(x)}$ - vagyis $p(x)$ - két olyan egymás utáni 0-helyére igaz, amely közé nem esik $q(x)$ -nek egyetlen 0-helye sem. Másként ugyanis $\frac{p(x)}{q(x)}$ nem folytonos a két 0-hely közé eső intervallumban.

508. A bizonyítás hasonló az 500. és az 501. feladat állításához.

509. A bizonyítás teljesen azonos az előző feladattal.

510. A számláló magasabbfoku, mint a nevező, ezért elvégezzük a két polinom maradékos osztását:

$$(x^2 + 9) : x = x + \frac{9}{x}.$$

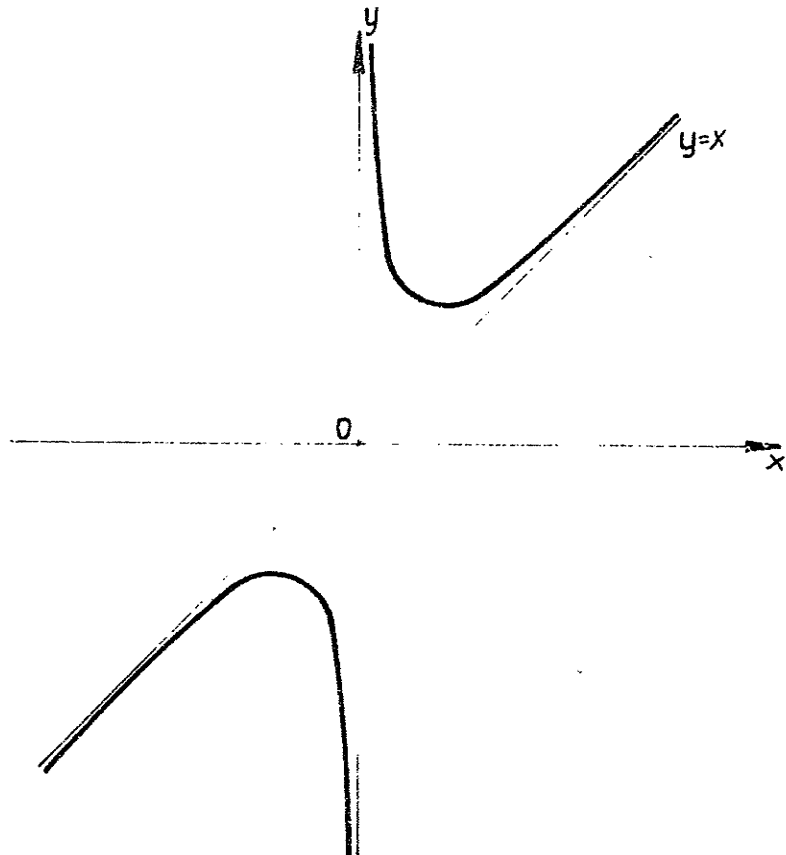
Eszerint az $y = x$ egyenes aszimptotája lesz a görbének. Ebből is (de egyébként is) látható, hogy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 9}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 9}{x} = +\infty.$$

A két határérték közül elegendő lett volna az egyiket kiírunk, mert a függvény páratlan (a számláló páros, a nevező páratlan).

0-hely nincs (mert a számlálónak nincs gyöke); mivel pedig a $(0, +\infty)$ intervallumban a függvény folytonos, azért itt végig pozitív. Ennélfogva

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 + 9}{x} = +\infty \quad (\text{l. az ábrát}).$$

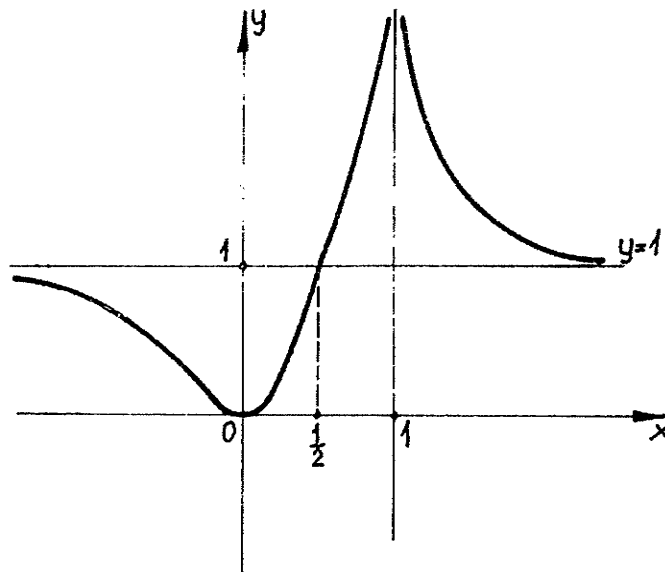


510. ábra

Az x tengely pozitív felén a görbe végig az aszimptota fölött halad, mert a függvény és az $y = x$ aszimptota-függvény különbsége, $\frac{9}{x}$, pozitív.

Az x tengely negatív felén a függvény páratlanul folytatódik; így a pozitív félen már felvázolt görbét tükrözzük az origóra.

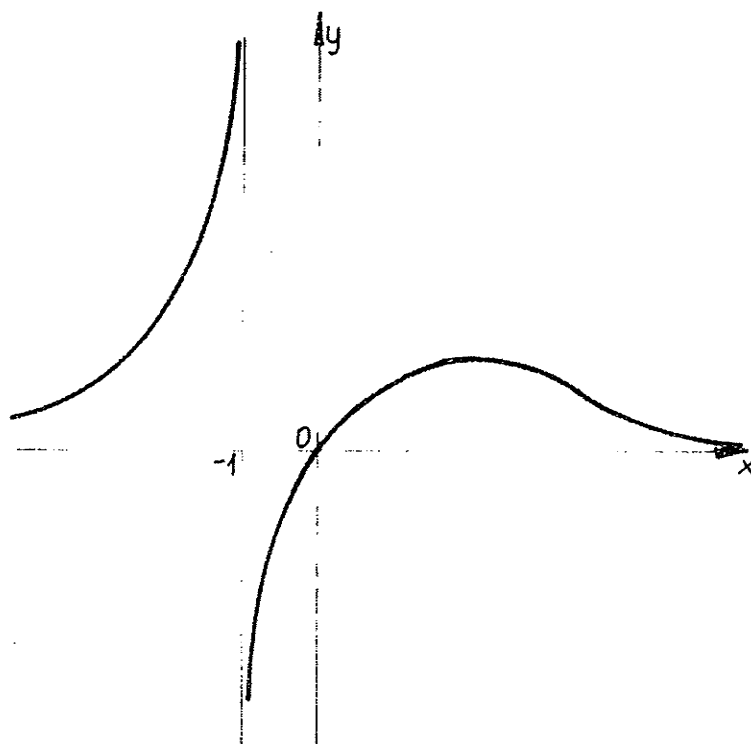
511. Aszimptota az $y = 1$ egyenes; $x = 0$ kétszeres 0-hely, $x = 0$ másodrendű polus. L. az ábrát.



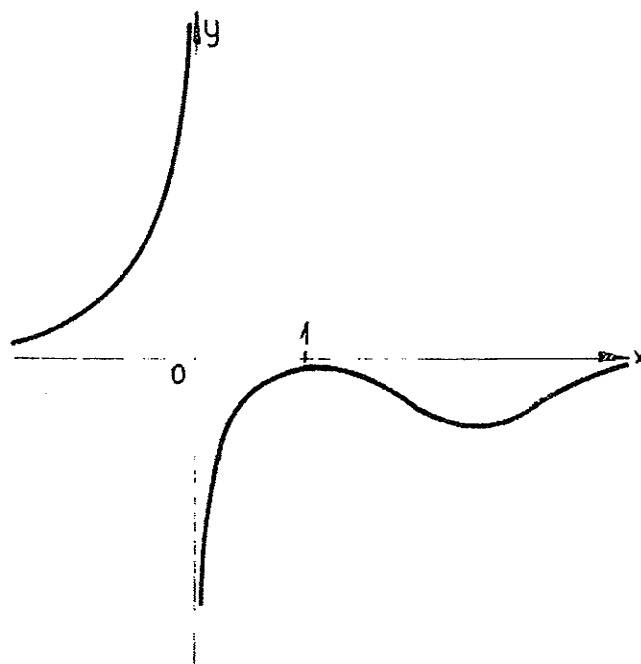
511. ábra

512. $y = \frac{6x}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$; a nevező második tényezője tovább már nem bontható. 0-hely: $x = 0$,
elsőrendű pólus $x = -1$;
aszimptota az x tengely. L. az ábrát.

513. Lásd az ábrát.



512. ábra



513. ábra

514. $x + 1$ -gyel egyszerűsíthetünk:

$$y = \frac{(x - 1)(x^2 + 1)}{x + 1}.$$

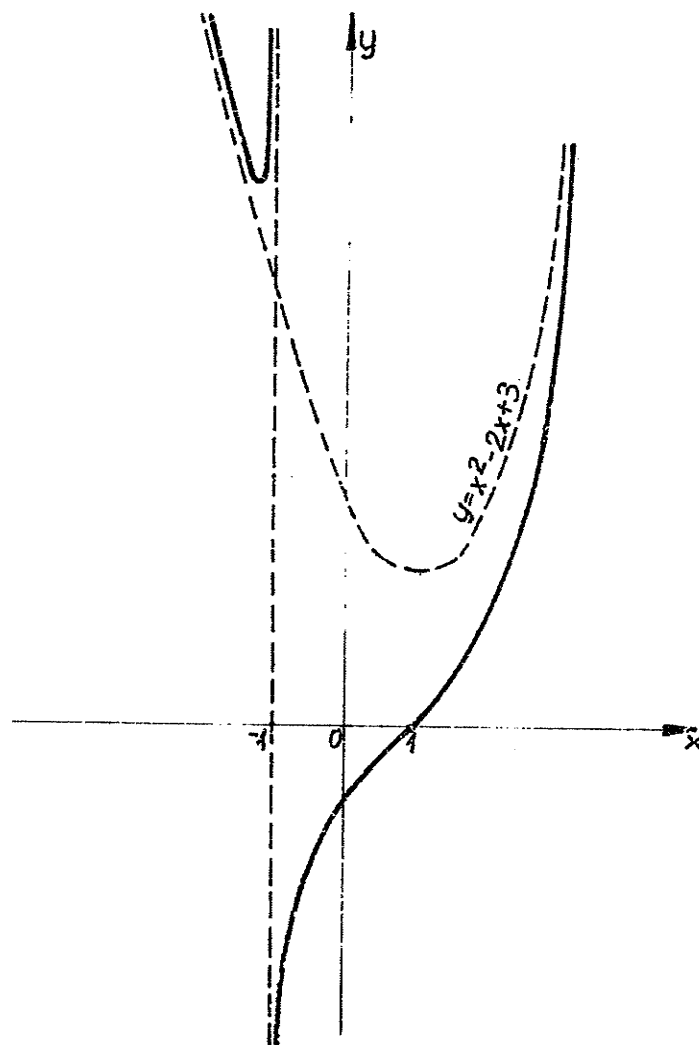
De $x = -1$ mégsem megszüntethető szakadás, mert $x = -1$ a nevezőnek többszörös gyöke, mint a számlálónak: itt - amint azt az egyszerűsített alak mutatja - elsőrendű pólus van.

A számláló magasabb fokú, mint a nevező, ezért el kell végeznünk a polinomosztást (akár az eredeti, akár az egyszerűsített alakban):

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 + x - 1) : (x + 1) = x^2 - 2x + 3 - \frac{4}{x + 1} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ - 2x^2 + x - 1 \\ \underline{+ 2x^2 + 2x} \\ 3x - 1 \\ \underline{3x + 3} \\ - 4 \end{array}$$

Aszimptota: $y = x^2 - 2x + 3$. A görbe $x \rightarrow +\infty$ esetén az aszimptota alatt, $x \rightarrow -\infty$ esetén felette halad, mert a különbség

$-\frac{4}{x + 1}$, $x > -1$ -re negatív, $x < -1$ -re pozitív. L. az ábrát.



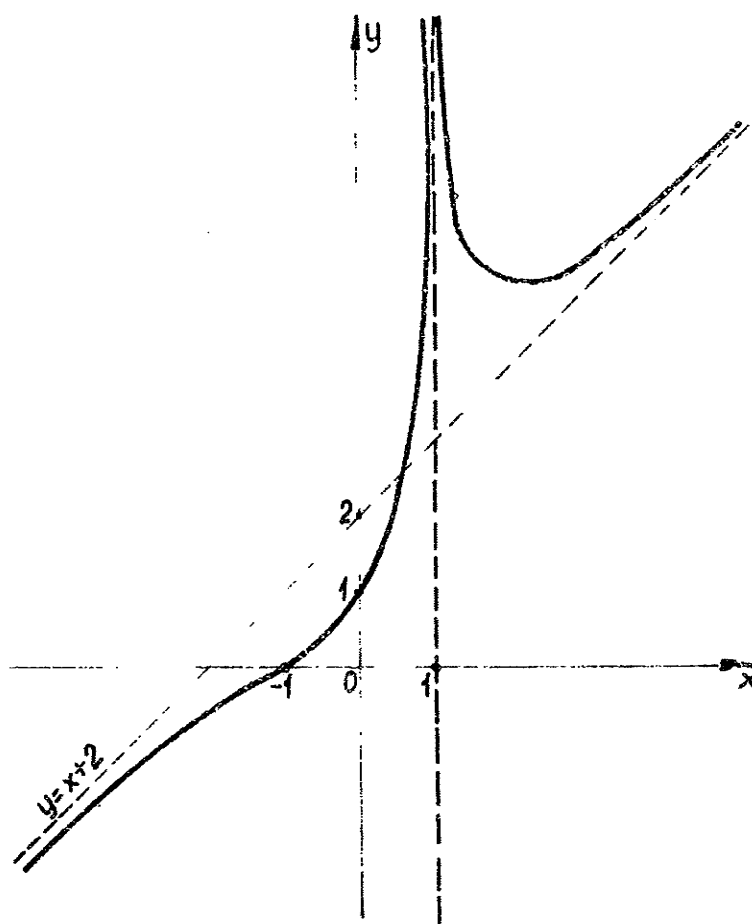
514. ábra

$$515. \quad y = \frac{x(x^3 + 1)}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

Osztás:

$$(x^3 + 1) : (x^2 - 2x + 1) = x + 2 + \frac{3x - 1}{(x - 1)^2}.$$

Az aszimptota tehát az $y = x + 2$ egyenes. Az $x = 0$ helyen megszűn-
tethető szakadás. L. az ábrát.



515. ábra

516. Legyen a polinom $p_{2k}(x)$. Ekkor $a_0 = p_{2k}(0)$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} p_{2k}(x) = \text{sg } a_{2k}$ a feladat szerint ellenkező előjelű. Így ha c elég nagy, akkor

$$\text{sg } f(c) = \text{sg } \lim_{x \rightarrow \infty} p_{2k}(x) = \text{sg } a_{2k} = - \text{sg } p_{2k}(0),$$

a Bolzano-tétel szerint tehát a 0 és a c hely között kell egy gyöknek lennie. Ugyanígy igazolható, hogy az x tengely negatív felén is van egy gyökhely.

517. Igen. A vörösréz ugyanis jó hővezető, ezért hőmérséklete az olvadó jégtől (vagy a forró víztől) való távolságnak gyakorlatilag folytonos függvénye lesz. Így a Bolzano-tétel szerint bármilyen 0°C és 100°C közötti hőmérsékletű hely található rajta.

518. Nem. Ellenpélda:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = -1, \\ x, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ -1, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

519. A bizonyítás közvetlenül adódik az a helyen való folytonosság értelmezéséből.

520. Igen. Ha ugyanis a lemez oldala a , a levágandó saroknégyzeteké x , akkor az edény térfogata $V = (a - 2x)^2 \cdot x$ lesz. A V függvény - mint polinom - folytonos, értéke az $x = 0$ és az $x = \frac{a}{2}$ helyeken egyaránt 0, $0 < x < \frac{a}{2}$ esetén pozitív. A 7.6. tétel (Weierstrass II. tétele) szerint tehát a $(0, \frac{a}{2})$ intervallumban kell lennie egy maximumának.

521. Legyen a függvény $f(x)$. A $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határérték $+\infty$ nem

lehet, mert ez azt jelentené, hogy bármilyen nagy M -hez található olyan N , amelyre $f(x) > M$, ha $x > N$. A $(N, +\infty)$ intervallum azonban mindenképpen magában foglal egy teljes periódust; így arra jutnánk, hogy a függvénynek egy teljes periódus minden helyén - a periodikusság miatt tehát mindenütt - csak akármilyen nagy számnál nagyobb értékei lehetnek. Ez azt jelentené, hogy a függvénynek sehol nincs véges értéke, tehát értelmezve sincs sehol.

Ugyanígy belátható, hogy $\lim = -\infty$ sem lehetséges. Ezért

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

véges szám. Ez azonban azt jelenti, hogy bármilyen kis előre megadott pozitív ε -hoz található olyan N , amelyre

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

ha $x > N$. Így az előbbiekhez hasonló módon arra jutunk, hogy minden x -re

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

bármekkora ε esetén. Ez azonban csak akkor állhat fenn, ha minden x helyen

$$f(x) = A.$$

Az $f(x)$ függvény tehát állandó, és ennél fogva folytonos.

522. $y = \pm x^2$; két függvény.

523. $y = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2} x$, ahol a két kettős előjel független egymástól;
négy függvény.

Számítás:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = x^2y^2,$$

$$y^2 - x^2 = \pm xy,$$

$$y^2 \pm xy - x^2 = 0,$$

s innen y -t kifejezzük a másodfoku egyenlet gyökképletével.

524. $y = \pm \frac{x+1}{x+3}$, ha $x < -3$ vagy $x \geq -1$; a $[-3, -1)$

félig zárt intervallumban nincs értelmezve. Két függvény.

Az adott egyenletből ugyanis

$$|y| = \frac{x+1}{x+3};$$

ez teljesül, ha

$$y = \frac{x+1}{x+3} \quad \text{vagy} \quad y = -\frac{x+1}{x+3},$$

de $\frac{x+1}{x+3}$ nem lehet negatív.

$$525. \quad y = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & \text{ha } x \leq 0 \quad (\text{de } x \neq -1), \\ x+1, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

$x = -1$ -re nincs megoldás. Megoldás viszont még $x = 0$ is az origó kivételével.

$$526. \quad y = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & \text{ha } x < 0, \quad x \neq -2 \\ x+2, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Az $x = 0$ helyen a függvény nincs értelmezve, mert $y^0 = 2$ semmilyen y -ra nem teljesül.

$$527. \quad y = \begin{cases} x, & \text{ha } x > 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

$x = 0$ -ra a függvény nincs értelmezve.

Az implicit alakból ugyanis

$$y^1 = x, \quad \text{ha } y > 0,$$

$$y^{-1} = x, \quad \text{ha } y < 0,$$

és $0^0 = x$ volna $y = 0$ -ra, de 0^0 értelmetlen kifejezés.

$$528. \quad \text{a) Az összes } y = \frac{(4k+1) \frac{\pi}{2}}{x} \text{ hiperbolák serege,}$$

$$\text{b) az összes } y = x - (2k+1) \frac{\pi}{2} \text{ egyenesek serege,}$$

$$\text{c) az összes } x = (4k+1) \frac{\pi}{2}, \quad y = (4n+1) \frac{\pi}{2},$$

$$\text{valamint az összes } x = (4k-1) \frac{\pi}{2}, \quad y = (4n-1) \frac{\pi}{2}$$

pontok halmaza, ahol k és n mindenütt tetszőleges egész számok.

$$529. \quad \text{a) Az összes } y = \frac{(4k+1) \frac{\pi}{4}}{x} \text{ hiperbolák,}$$

$$\text{b) az összes } y = x - (2k+1) \frac{\pi}{4} \text{ egyenesek,}$$

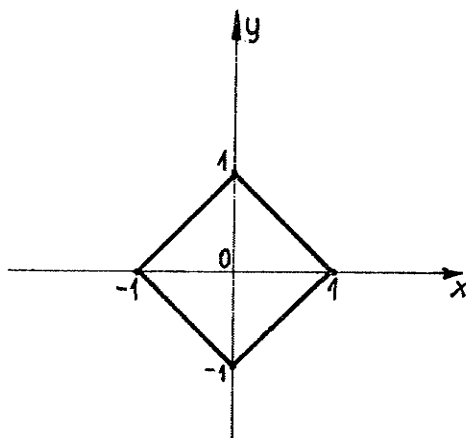
$$\text{c) az összes } y = (2k+1) \frac{\pi}{2} - x \text{ egyenesek}$$

halmaza, ahol k mindenütt tetszőleges egész szám.

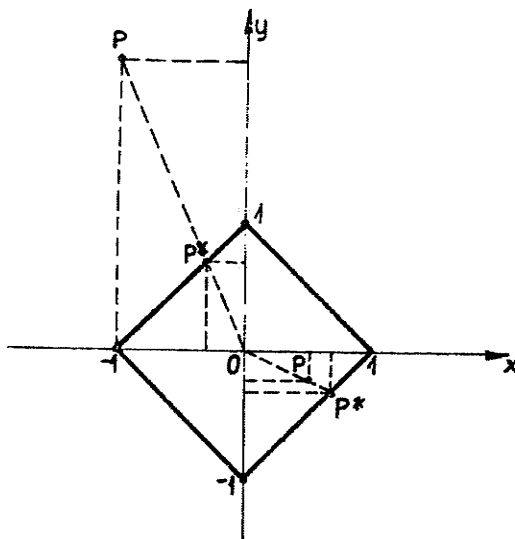
(A c) egyenesekből azonban kivéve az összes $x = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$,
 $x = n\pi$ abszcisszáju pontokat, n bármely egész értékére.)

530. L. az ábrákat. (A d) grafikonnak egyetlen pontja sincs.)

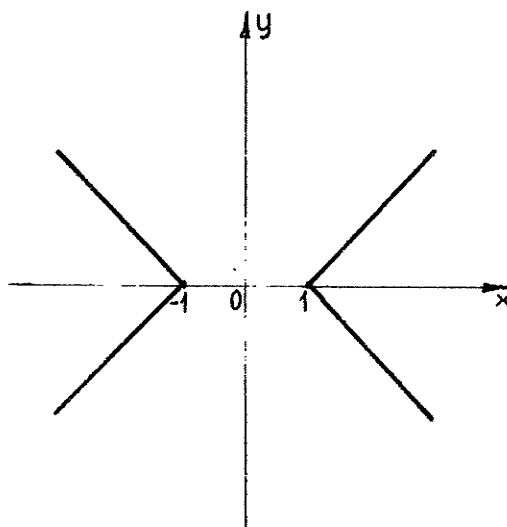
a) (I. megoldás.) Az $x + y = 1$ egyenes I. síknegyedbeli szakasza nyilván beletartozik a függvény képébe; mivel pedig az egyenlet teljesülését x és y előjele nem befolyásolja, azért ennek a szakasznak a tengelyekre és az origóra való tükrösképe is.



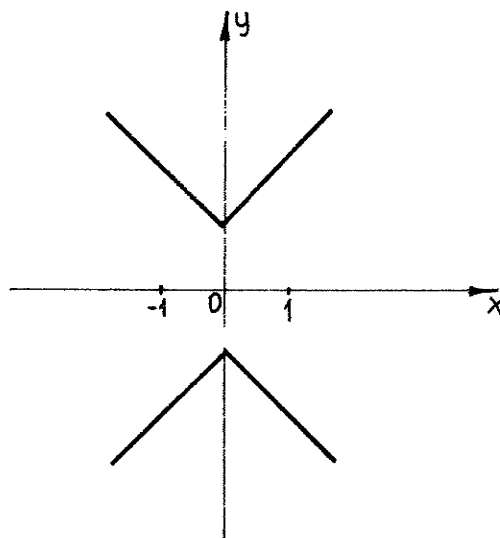
530/a ábra



530/a* ábra



530/b ábra



530/c ábra

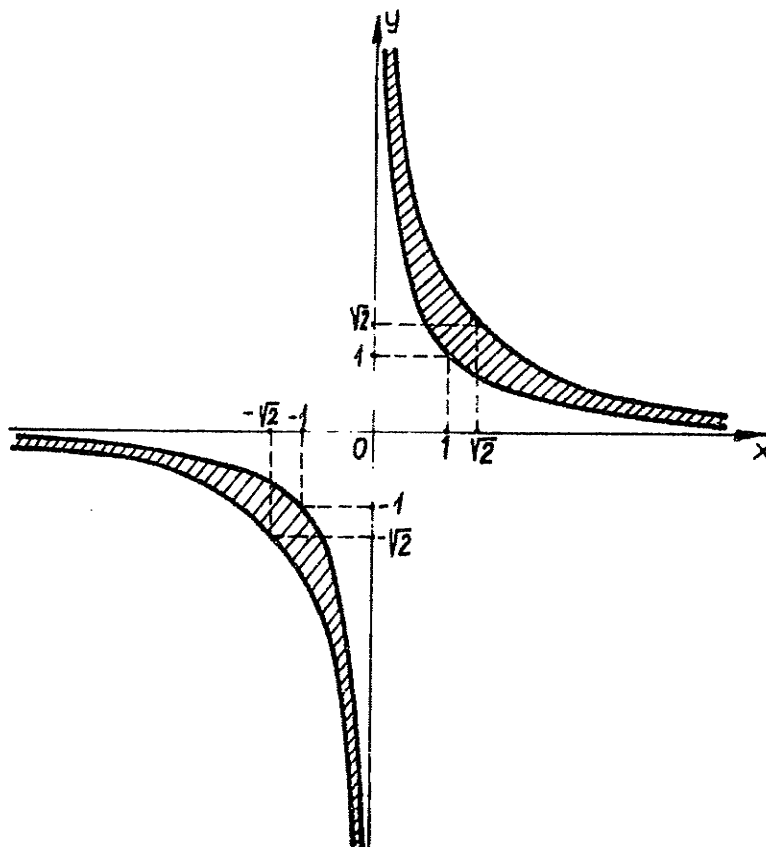
Más pontok viszont - amelyek nincsenek rajta az így kapott négyzet területén - nem elégíthetik ki az egyenletet. Kösztük össze ugyanis az ilyen P pontot és az origót egy félegyenessel. Ha ez a P^* pontban metszi a négyzet területét, akkor P^* kielégíti az

egyenletet, és nyilvánvaló, hogy a négyzeten $\begin{cases} \text{kívül} \\ \text{belül} \end{cases}$ levő pontra $|x|$ is, $|y|$ is $\begin{cases} \text{nagyobb,} \\ \text{kisebb,} \end{cases}$ mint P^* -ra (530/a* ábra).

(II. megoldás) $|y| = 1 - |x|$, tehát $y = \pm(1 - |x|)$.

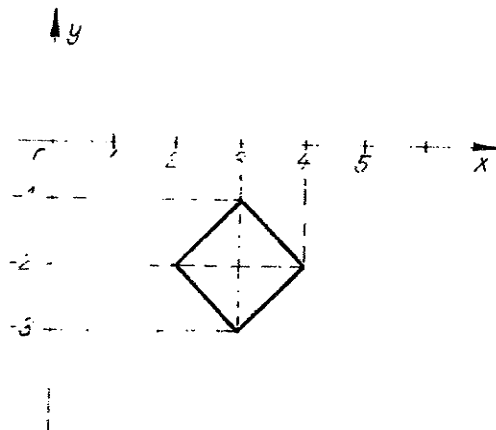
531. A grafikon az $y = x^2$ parabola, az $y = 3 - x$ egyenes és az $x^2 + y^2 = 4$ kör együttese.

532. a) A grafikon az $y = \frac{1}{x}$ és $y = \frac{2}{x}$ hiperbolák által bezárt egész terület, oly módon, hogy az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola beletartozik, az $y = \frac{2}{x}$ nem (l. az ábrát).

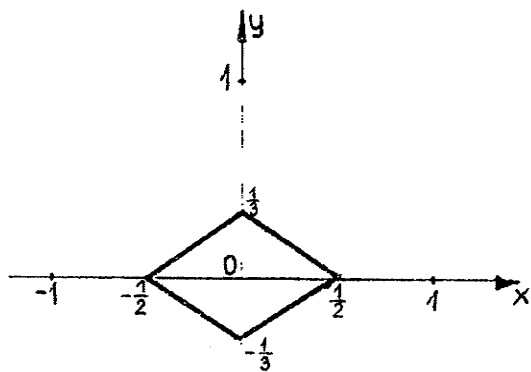


532/a ábra

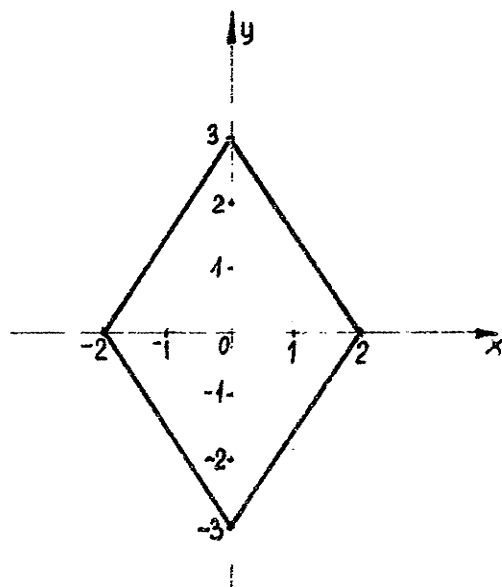
- b) A grafikon az $y = \frac{2k + 1}{2x}$ hiperbolák serege, ahol k tetszőleges egész szám.
533. a) Ugy, hogy az eredeti görbét önmagával párhuzamosan eltoljuk az x tengely mentén a és az y tengely mentén b egységgel (vagyis az $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ vektorral).
- b) Az x tengely mentén a -szoros (a -adrészre való), y mentén b -szeres (b -edrésre való) zsugorítással.
- c) Az eredeti görbéből először az $f(x + b, y + d)$ görbére térünk át (l. a)), azután erről az $f(ax + b, cy + d)$ görbére (l. b)).
534. L. az ábrákat Indokolás: az 530/a, valamint a 533. feladat alapján.



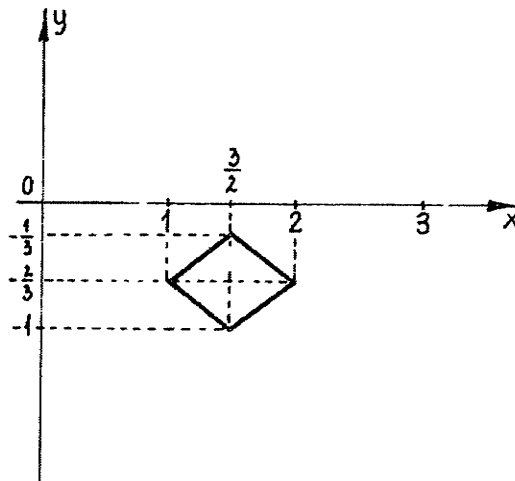
534/a ábra



-1+
534/b ábra



534/c ábra



534/d ábra

535. Ha $k < 1$, ellipszis,
 ha $k = 1$, parabola,
 ha $k > 1$, hiperbola

(a tengely(ek), gyújtópont(ok) helyét, valamint a tengelyek, ill. a paraméter hosszát az alábbi számítás adja).

Vegyük ugyanis fel a koordináta-rendszert úgy, hogy e az $x = -1$ egyenes, A pedig a $(k, 0)$ pont legyen. (A távolságegység hosszát tetszés szerint vehetjük fel; ezt használtuk ki ezzel a felvétellel, amelyben $a = k + 1$. Ez nem csorbitja az általánosságot!) Ebben az esetben bármely $P(x, y)$ pont akkor felel meg a feltételnek, ha

$$\sqrt{(x - k)^2 + y^2} = k(x + 1),$$

ahonnan ekvivalens átalakításokkal

$$(1 - k^2)x^2 - 2(k + k^2)x + y^2 = 0.$$

Innen ugyancsak ekvivalens átalakításokkal

$$\frac{\left(x - \frac{k}{1 - k}\right)^2}{\left(\frac{k}{1 - k}\right)^2} + \frac{y^2}{(1 - k^2)\left(\frac{k}{1 - k}\right)^2} = 1, \text{ ha } k < 1,$$

$$y^2 = 4x,$$

$$\text{ha } k = 1,$$

$$\frac{\left(x - \frac{k}{k-1}\right)^2}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^2} - \frac{\frac{y^2}{2}}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^2 (k^2 - 1)} = 1, \quad \text{ha } k > 1.$$

Inverz függvények

536. Van, x .

537. Van, ha $a \neq 0$. mégpedig $\frac{x-b}{a}$.

538. Külön-külön van a $(-\infty, 3)$ és a $(3, +\infty)$ intervallumra való leszűkítésnek. Az első:

$$3 - \sqrt{x+1},$$

a másodiké

$$3 + \sqrt{x+1}.$$

539. Ha $a = 0$, a feladat visszavezetődik az 537.-re. Ha $a \neq 0$, külön-külön van inverze a $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ és a $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ intervallumra való leszűkítésnek. Az első

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a},$$

a másodiké

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}.$$

540. Van, annak ellenére, hogy az $x = 0$ helyen a függvény szakadásos - mert különböző helyeken nem veszi fel ugyanazt az értéket: $\frac{1}{x}$.

541. Van: $-\frac{3x+2}{2x-1}$.

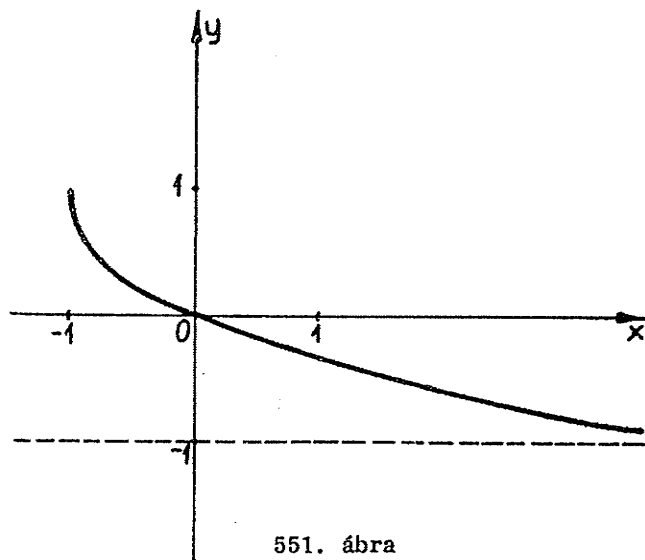
542. Van, ha $a^2 + c^2 \neq 0$: $-\frac{dx-b}{cx-a}$.

543. Nincs (a függvény egyetlen intervallumban sem szigorúan monoton).

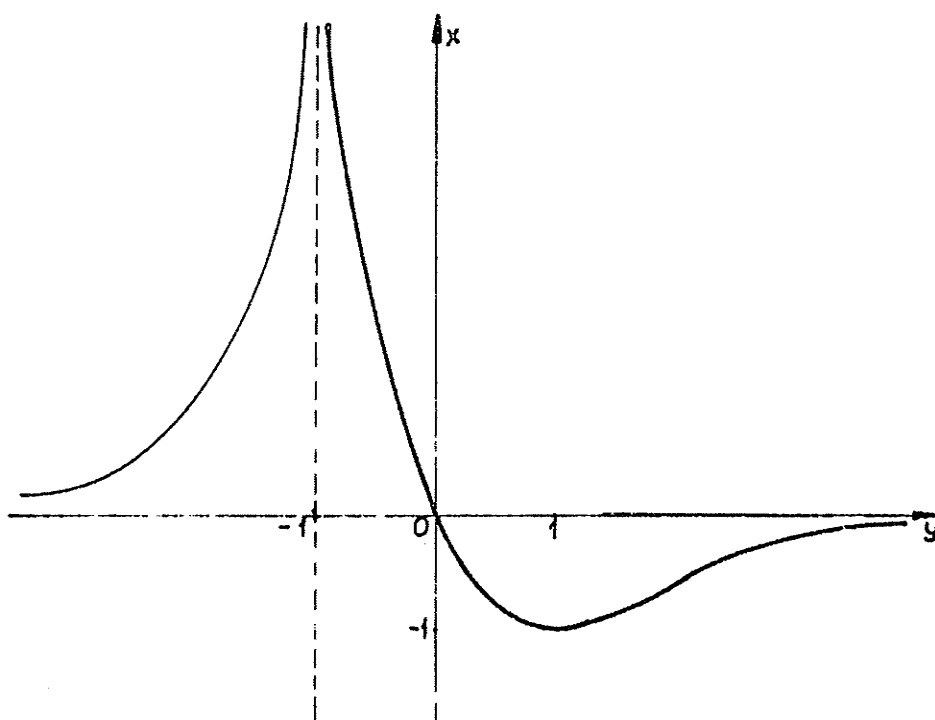
544. Külön-külön a $(-\infty, 0]$ és a $[0, +\infty)$ intervallumban van: az elsőben $y = -x$, a másodikban $y = x$.
545. Külön-külön bármely $[k, k+1)$ intervallumban van: $y = x + k$.
546. Nincs.
547. Van, noha a függvény a 0 helyen nem folytonos:
- $$y = \begin{cases} x, & \text{ha } x \leq 0, \\ x - 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$
- A $(0, 1]$ intervallumban az inverz nincs értelmezve.
548. Nincs egyetlen intervallumban sem, mert bármely (és bármilyen kicsiny) intervallumban található több olyan hely, ahol ugyanazt az értéket veszi fel: az irracionális helyek.
549. Nem. Bármilyen kis I intervallumot veszünk ugyanis, elég nagy egész q esetén elérhetjük, hogy legyen legalább két olyan $\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}$ hely, amelyre p_1 is, p_2 is egész, $p_1 \in I, p_2 \in I$, és sem p_1 -nek, sem p_2 -nek nincs q -val közös törzstényezője.
550. $a = -1$, vagy $a = 1$ és $b = 0$. A feltétel ugyanis
- $$a) \frac{x-b}{a} \equiv ax+b$$
- (l. az 537. feladatot - a $\equiv$ jel azt hangsúlyozza, hogy az egyenlőségnek x minden értékére fenn kell állnia); ez pedig teljesül és csak akkor teljesül, ha
- $$\frac{1}{a} = a, \quad -\frac{b}{a} = b.$$
- b) $a^2 + c^2 \neq 0$ és $a + d = 0$.
551. L. az 551. ábrát.
(Ebben az alakjában nehezen tudnánk vázolni a grafikonját a függvénynek. Próbálkozzunk tehát az inverzével; a képlet sejteti, hogy ez egyszerűbb lesz.)

Az inverz függvény

$$f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 - 1$$



551. ábra



551/a bára

-nek a $(-1, 1]$ intervallumra $(-1 < x \leq 1)$ való leszűkítése.

552. a) Rajzolunk a derékszögű koordináta-rendszerben olyan folytonos görbét, amely
- I. tükrös az $y = x$ egyenesre,
 - II. bármely $x = c$ egyenest ($c \in \mathbb{R}$) legfeljebb egy pontban metsz.
- b) Végtelen sok.
553. a) Nem. Ha ugyanis valamely az y tengelyre tükrös görbét tükrözzünk az $y = x$ egyenesre, a tükrökép már nem y -ra, hanem x -re lesz tükrös (és így kétértékű lesz, jelezve ezzel, hogy páros függvénynek az egész számegyenesen nincs inverze).
- b) Igen (ha az inverz létezik). Ha ugyanis valamely az origóra tükrös görbét tükrözzünk az $y = x$ egyenesre, az origóra a kapott tükrökép is tükrös marad.
554. Csak közelítőleg számíthatók ki. Három tizedesre:
- a) 1,120 b) 0,733, c) - 0,126, d) 1,107, e) 0,983
555. a) $-\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{\pi}{4}$, c) $\frac{\pi}{3}$, d) $\frac{5\pi}{6}$.
556. a) $x_1 = \frac{1}{4} [2 \arccos(b-1) - 3] + 2k\pi$,

$$x_2 = -\frac{1}{4} [2 \arccos(b-1) - 3] + 2k\pi.$$

ha $0 \leq b \leq 2$; egyébként nincs megoldás.

b) $x = 3 - \cos^2 \frac{a}{2b}$,

ha $b \neq 0$ és $0 \leq \frac{a}{b} \leq 2\pi$; egyébként nincs megoldás.

c) $x = \frac{1}{2}(3 - 5 \sin \frac{5}{4})$, d) $x = 1 + (6k+1)\pi$ vagy $1 + (6k+2)\pi$.

557. a) $x \in [1, 2]$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Az értelmezési tartományra nézve ugyanis

$$-1 \leq 2x - 3 \leq 1,$$

$$-2 \leq 2x \leq 4$$

és $1 \leq x \leq 2$.

$$b) x \in \left[-\frac{b+1}{a}, \frac{1-b}{a}\right], f(x) \in [0, \pi] .$$

$$c) x \in [-1, 1] , \quad f(x) \in \left[b - \frac{a\pi}{2}, b + \frac{a\pi}{2}\right] .$$

$$d) x \in \left[-\frac{c+1}{b}, \frac{1-c}{b}\right], \quad f(x) \in [d, a\pi + d] .$$

$$e) x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

$$f) x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \in \left[b - \frac{a\pi}{2}, b + \frac{a\pi}{2}\right] .$$

$$558. \quad a) x \in [-1, 1], \quad f(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] .$$

$$b) x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty), \quad f(x) \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} .$$

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (csak arra kell figyelni, hogy a tört értelmezve legyen, mert az arc tg függvény minden valós számra értelmezve van); $f(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ (mínthogy ugyanis

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x-1} = -\infty$, továbbá a $(-\infty, 1)$ intervallumban az $\frac{x}{x-1}$ függvény folytonos, a Bolzano-tétel: $[-M, 1-\delta]$ intervallumra alkalmazva - ahol $M \rightarrow -\infty, \delta \rightarrow 0$ - nem nehéz bebizonyítani, hogy $\frac{x}{x-1}$ már a $(-\infty, 1)$ intervallumban is felvesz minden valós értéket - de $\frac{x}{x-1}$;

559. a) $x \in [0, 1], \quad f(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Egyfelől ugyanis az értéktartomány a két tag értelmezési tartományának közös része, másfelől a függvény monoton növekvő és folytonos, tehát $x \in [a, b]$, akkor $f(x) \in [f(a), f(b)]$.

$$b) x \in \{-1, 1\} . \quad f(x) \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} .$$

c) Sehol sincs értelmezve.

560. a) Monotonitási intervallumban van. $A\left[\frac{-2b-\pi}{2a-b}, \frac{-2b+\pi}{a}\right]$ intervallumban például az inverz $\frac{\arcsin \frac{x-b}{a}}{a}$.

b) Ugyanugy. a $A[0, \pi]$ intervallumban például $\arccos \frac{x-b}{a}$

c) Van. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ -ben $\frac{\operatorname{tg} x - b}{a}$.

d) Van. $[b, b+a\pi]$ -ben $\cos \frac{x-b}{a}$

561. a) Például a $\left[\frac{2}{\pi}, \infty\right)$ intervallumbeli inverz $\frac{1}{\arcsin x}$.

Ugyanígy a $(-\infty, -\frac{2}{\pi}]$ intervallumbeli is.

b) A $[0, 1]$ intervallumbeli inverz $\sqrt{\sin x}$. Ugyanígy a $[-1, 0]$ intervallumbeli $-\sqrt{\sin x}$.

562. a) A függvény a $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ (k egész) intervallumban monoton és folytonos, inverze van, ez azonban képlettel nem fejezhető ki.

b) Mai ismereteinkkel csak a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumbeli inverz létezése bizonyítható egyszerűen. Differenciálszámítással igazolható, hogy a függvény végig monoton, tehát van inverze; ez azonban képlettel nem fejezhető ki.

c) Van, de képlettel nem fejezhető ki.

563. a) Ha $|a| \leq 1$, $y = \frac{\arcsin a - 2x}{3}$

b) Ha $0 \leq c \leq \pi$ és $b \neq 0$, $y = \frac{\cos c - ax}{b}$.

c) $y = 2k\pi x - 1$, k egész (végtelen sok függvény).

d) $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$.

e) $y = \arcsin(1 - \sin x)$.

f) $y = -x + \alpha_0$, ahol α_0 a $\sin \alpha = 1 - \alpha$ egyenlet egyetlen gyöke. Az α_0 szám azonban elemi módon pontosan nem határozható meg.

g) $y = \arcsin(-\frac{1}{4 \sin x})$.

Mivel ugyanis $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$,
azért

$$-2 \sin x \sin y = \frac{1}{2}$$

és

$$y = \arcsin(-\frac{1}{4 \sin x}).$$

$$564. \quad \varphi = \arccos \left[- (a^2 - b^2) \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2(a^2 + b^2)^2 - x^2(a^2 - b^2)^2}} \right]$$

Az APB Δ -ból ugyanis (l. az ábrát) a cosinustétel szerint

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{AP^2 + BP^2 - AB^2}{2 \cdot AP \cdot BP} = \\ &= \frac{(a+x)^2 + y^2 + (a-x)^2 + y^2 - 4a^2}{2 \sqrt{(a+x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(a-x)^2 + y^2}}\end{aligned}$$

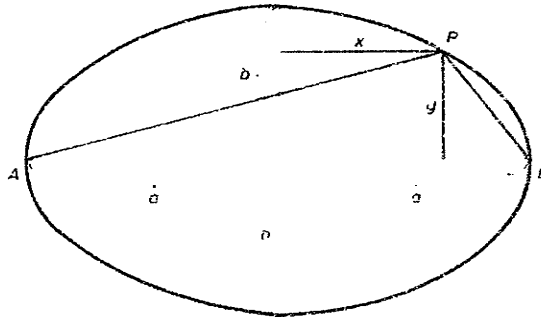
(bármelyik síknegyedben van is P); innen pedig

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

helyettesítéssel és kézenfekvő átalakításokkal megkapjuk a vég-
eredményt.

Mivel φ kifejezésében az $\arccos$ függvény argumentuma mindig negatív, φ mindig tompaszög (az A és a B pontot kivéve). (Ez következik abból is, hogy az ellipszis - e két pont kivételével - a főkörön belül fekszik.)

g 1



564. ábra

565. Ismeretes, hogy ha $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$, akkor $\sin t < t$. Ha $0 < x \leq 1$, akkor itt írhatunk t helyébe $\arcsin x$ -et, mert ekkor $0 < \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$. Ez esetben tehát
- $$\sin \arcsin x < \arcsin x,$$
- vagyis

$$x < \arcsin x.$$

Igy bizonyítható be az is, hogy $\arcsin x < x$.

566. a) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,
c) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, d) $\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x$.

Az a) és a c) állítás azonnal következik abból, hogy páratlan függvénynek az inverze is páratlan (l. 553. feladat), b)-t és d)-t pedig megkapjuk, ha egyrészt vesszük mindkét oldal cosinusát, ill. cotangensét, másrészt figyelembe vesszük, hogy a $\pi - \arccos x$, $\pi - \operatorname{arccotg} x$ függvények értékkészlete azonos az $\arccos x$, $\operatorname{arccotg} x$ függvényekével.

567. a) és b) $\sqrt{1-x^2}$, c) és d) $\frac{1}{x}$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos \arcsin x &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x} = \\ &= \pm \sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2} = \pm \sqrt{1 - x^2}; \text{ itt pedig mindig a } + \\ &\text{előjel érvényes, hiszen az } \arcsin x \text{ értékkészletében, a} \end{aligned}$$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ intervallumban a cosinusfüggvény nem negatív.}$$

Ugyanígy bizonyítható be b) is.

568. a) $\operatorname{tg} \arccotg x = \frac{1}{\cotg \arccotg x} = \frac{1}{x}$

Ugyanígy bizonyítható be b) is.

569. a) és d) $+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, b) és c) $+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

$$\text{c) } \operatorname{tg} \arcsin x = \frac{\sin \arcsin x}{\cos \arcsin x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

Ugyanígy számítható b), c) és d) is.

570. a) és d) $+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, b) és c) $+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Számítás:

$$\text{b) } \cos \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \arccos x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

az előjel nyilván pozitív, mert $\operatorname{arctg} x$ az I. vagy a IV. síknyegyben van.

a) Mivel $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha$ (bármely α -ra, amelynek van tg -e), azért

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \cdot \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

c) és d) ugyanígy számítható.

571. a) $x + 2k\pi$ vagy $(2k+1)\pi - x$ b) $2k\pi + x$,
c) és d) $x + k\pi$, ahol k mindenütt tetszőleges egész.

572. a)
$$\operatorname{arc} \sin \cos x = \begin{cases} (1+4k)\frac{\pi}{2} - x, & \text{ha } 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, \\ (1+4k)\frac{\pi}{2} - x, & \text{ha } (2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi. \end{cases}$$

b)
$$\operatorname{arc} \cos \sin x = \begin{cases} (-4k+1)\frac{\pi}{2} - x, & \text{ha } (4k-1)\frac{\pi}{2} \leq x \leq \\ & \leq (4k+1)\frac{\pi}{2}, \\ (-4k-1)\frac{\pi}{2} + x, & \text{ha } (4k+1)\frac{\pi}{2} \leq x \leq \\ & \leq (4k+3)\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

c) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \cotg x = (1+2k)\frac{\pi}{2} - x$, ha $k\pi < x < (k+1)\pi$.

d) $\operatorname{arc} \cotg \operatorname{tg} x = (1+2k)\frac{\pi}{2} - x$, ha $(2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

573. Mindnek ugyanaz; egyik sem fejezhető ki egyszerűbben.

574. Nem, hiszen pl. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ -re a jobb oldal $\frac{\pi/3}{\pi/6} = 2$, a
bal oldal viszont $\frac{\pi}{4} \approx 0,785$ -nél is kevesebb ($\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{2} <$
 $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \frac{\pi}{4}$).

575. Az előző feladat megoldása azt jelentette, hogy az egyenlőség nem azonosság, azaz nem teljesül x minden szóba jöhető értékére. Kivételes x értékekre ettől még igaz lehet.

I.

a) A bizonyítandó azonosság ekvivalens ezzel:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

Ennek két oldala pedig valóban egyenlő egymással, mert mindkettőnek a sinusa x , és mindkettő 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé esik, ahol különböző számoknak a sinusa is különböző.

b) Ugyanígy bizonyítható.

II.

a) ugyanugy érvényes marad,

b) viszont ebbe megy át:

$$\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

A bal oldal pozitív (mert az $\arctg$ függvény monoton növekedő, és $3 + 2\sqrt{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$), és nyilván kisebb $\frac{\pi}{2}$ -nél: tangense pedig

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left[\arctg (3 + 2\sqrt{2}) - \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \\ & \frac{\operatorname{tg} \arctg (3 + 2\sqrt{2}) - \operatorname{tg} \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \operatorname{tg} \arctg (3 + 2\sqrt{2}) \cdot \operatorname{tg} \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{(3 + 2\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + (3 + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ & = \frac{6 + 3\sqrt{2}}{2 + 3\sqrt{2} + 4} = 1. \end{aligned}$$

0 és $\frac{\pi}{2}$ között pedig az egyetlen olyan szám, amelynek tangense 1 , $\frac{\pi}{4}$.

A bizonyítandó egyenlőség ekvivalense ezzel:

$$\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{4}{5}.$$

Itt pedig mind a két oldal 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé esik, és cosinusuk is egyenlő:

$$\cos \left(\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} \right) = \cos \arcsin \frac{4}{5}.$$

$$\cos \arcsin \frac{16}{65} = \sin \arcsin \frac{5}{13} \cdot \sin \arcsin \frac{16}{65} =$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{16}{65}\right)^2} - \frac{5}{13} \cdot \frac{16}{65} = \frac{12}{13} \cdot \frac{63}{65} - \frac{5 \cdot 16}{13 \cdot 65} = \frac{676}{13 \cdot 65} = \frac{2^2 \cdot 13^2}{13 \cdot 13 \cdot 5} = \frac{4}{5},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{4}{5}\right) = \sin \arcsin \frac{4}{5} = \frac{4}{5}.$$

579.

A

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

képletek segítségével.

580-585.

Azonos átalakítással mindegyik olyan alakra hozhat lineáris transzformációval ábrázolni tudunk.

$$\begin{aligned} 580. \quad \arccos \sqrt{1 - x^2} &= \arccos \sqrt{1 - \sin^2 (\arcsin x)} = \\ &= \arccos |\cos \arcsin x| = |\arcsin x|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 581. \quad \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} &= \operatorname{arccotg} \frac{1}{\operatorname{tg} \arcsin x} = \\ &= \operatorname{arccotg} \operatorname{cotg} \arcsin x = \begin{cases} \arcsin x, & \text{ha } x > 0, \\ \pi - \arcsin x, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 582. \quad \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} &= \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \arcsin x}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \arcsin x} = \\ &= \operatorname{arctg} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \arcsin x \right) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \arcsin x, & \text{ha } x < 1, \\ \frac{3\pi}{4} + \arcsin x, & \text{ha } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 583. \quad \arccos (2x^2 - 1) &= \arccos (2 \cos^2 \arccos x - 1) = \\ &= \arccos (\cos 2 \arccos x) = \begin{cases} 2 \arccos x, & \text{ha } 0 \leq x < 1, \\ -2 \arccos x, & \text{ha } -1 < x < 0, \\ 2 \arccos x - 2\pi, & \text{ha } x < -1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 584. \quad \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} &= \arccos \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \arcsin x}{1 + \operatorname{tg}^2 \arcsin x} = \\ &= \arccos (\cos 2 \arcsin x) = \begin{cases} 2 \arcsin x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -2 \arcsin x, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(l. a (3.17.) képletet).

$$585. \quad \arcsin \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \arcsin (\sin 2x) =$$

$$= \begin{cases} 2(x - k\pi), & \text{ha } (4k - 1) \frac{\pi}{4} \leq x \leq (4k + 1) \frac{\pi}{4}, \\ (2k + 1)\pi - 2x, & \text{ha } (4k + 1) \frac{\pi}{4} \leq x \leq (4k + 3) \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$586. \quad \arccos \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \begin{cases} (4k + 1) \frac{\pi}{2} - 2x, & \text{ha } (4k - 1) \frac{\pi}{4} \leq x \leq (4k + 1) \frac{\pi}{4}, \\ -(4k + 1) \frac{\pi}{2} + 2x, & \text{ha } (4k + 1) \frac{\pi}{4} \leq x \leq (4k + 3) \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

587. Mindkét oldalnak ugyanannyi

a)-ban a tangense, b)-ben a sinusa. Ezért mind a két egyenlőségre az áll, hogy igaz, ha a bal oldal legalább $-\frac{\pi}{2}$ és legfeljebb $\frac{\pi}{2}$: egyébként nem.

$$588. \quad a) \quad x = \operatorname{tg} (\arcsin a + \arccos b) = \frac{\sin (\arcsin a + \arccos b)}{\cos (\arcsin a + \arccos b)} =$$

$$= \frac{ab + \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}}{b\sqrt{1 - a^2} + a\sqrt{1 - b^2}},$$

$$b) \quad x = \cos (\arccos a + \operatorname{arctg} b) =$$

$$a \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} - \sqrt{1 - a^2} \cdot \frac{|b|}{\sqrt{1 + b^2}} = \frac{a - |b|\sqrt{1 - a^2}}{\sqrt{1 + b^2}},$$

$$c) \quad \text{mivel } \operatorname{arctg} a + \operatorname{arccotg} a = \frac{\pi}{2},$$

azért

$$x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \arccos b \right) = \cos \arccos b = b.$$

589. Igaz, az $f_1(x)$ és az $f_k(x)$ függvény értelmezési tartományának közös részében $f_1(x) - f_k(x)$ ($i, k = 1, 2, \dots, 8$) mindig állandó. Példaként két esetben bebizonyítjuk:

$$I. \quad \sin \frac{f_1(x) - f_2(x)}{2} = \sin (\arcsin \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{1 - x}) =$$

$$= \sin \arcsin \sqrt{x} \cdot \cos \arcsin \sqrt{1 - x} + \cos \arcsin \sqrt{x} \cdot \sin \arcsin \sqrt{1 - x} =$$

$$= \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - (1 - x)} + \sqrt{1 - x} \cdot \sqrt{1 - x} = x + (1 - x) = 1;$$

$$\text{ennélfogva } \frac{f_1(x) - f_2(x)}{2} = (4k + 1) \frac{\pi}{2},$$

$$f_1(x) - f_2(x) = (4k + 1) \pi, \text{ ahol csak } k = 0 \text{ lehetséges, mert}$$

$$- \pi \leq f_1(x) \leq \pi,$$

$$- \pi \leq - f_2(x) \leq \pi,$$

s e két egyenlőtlenséget összeadva

$$-2\pi \leq f_1(x) - f_2(x) \leq 2\pi.$$

Ezért

$$f_1(x) - f_2(x) = \pi.$$

$$\text{II. } f_5(x) - f_6(x) = 2 \left(\arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}} + \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) =$$

$$= 2 \left(\arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}} + \arctan \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{1-x}}} \right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

(l. 576/b feladat).

$$590. \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -2. \text{ (Vegyük mindkét oldal tangensét.}$$

vel pedig ez az átalakítás nem ekvivalens - a kapott eredmény más egyenletből is származhatna - a próba kötelező!)

$$591. \quad \text{Nincs gyöke.}$$

Vegyük ugyanis mindkét oldal sinusát:

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} \sqrt{1 - (1-x)} + \sqrt{1 - \frac{4}{9x}} \cdot \sqrt{1-x} = \frac{1}{3};$$

innen

$$\sqrt{\frac{(9x-4)(1-x)}{9x}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}, \text{ itt pedig a bal oldal}$$

nem negatív, a jobb oldal igen.

$$592. \quad x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Mindkét oldal cosinusát véve ugyanis

$$1 - 2 \sin^2 \arcsin x = 2x,$$

$$1 - 2x^2 = 2x,$$

$$\text{és } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}. \text{ Itt } x_2 \text{ értelmetlen, mert abszolút}$$

értéke 1-nél nagyobb.

593. $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1$; ebben a zárt intervallumban azonosság.

A jobb oldal ugyanis

$$\begin{aligned} \arcsin(2x \sqrt{1-x^2}) &= \arcsin(2 \cos \arccos x \sin \arccos x) = \\ &= \arcsin(\sin 2 \arccos x) = \begin{cases} 2 \arccos x, & \text{ha } 0 \leq 2 \arccos x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \text{más,} & \text{ha } 2 \arccos x > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

594. $x = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$.

595. A $(-2 \arctan \varepsilon, 2 \arctan \varepsilon)$ intervallumban.
Az

$$\left| \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kell ugyanis megoldanunk. Ekvivalens átalakításokkal

$$\left| \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \tan \frac{x}{2} \right| < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon < \tan \frac{x}{2} < \varepsilon,$$

$$-\arctan \varepsilon < \frac{x}{2} < \arctan \varepsilon.$$

596. Az $\left(\frac{1}{\arccos \frac{1}{1+\varepsilon}}, +\infty \right)$ intervallumban.

Az

$$\left| \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} - 1 \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kell ugyanis megoldanunk. Ebből ekvivalens átalakításokkal

$$\frac{1}{\cos \frac{1}{x}} < 1 + \varepsilon,$$

$$\cos \frac{1}{x} > \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad (\cos \frac{1}{x} > 0!),$$

$$\frac{1}{x} < \arccos \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad (\text{az egyenlőtlenség azért fordul meg, mert az } \arccos \text{ függvény monoton fogy}),$$

$$x > \frac{1}{\arccos \frac{1}{1 + \varepsilon}}.$$

597. Az $\frac{1}{\arcsin \frac{1}{M}}$ -nél nagyobbakra.

598. 1. $\arcsin x = t$ helyettesítéssel ugyanis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{\arcsin x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

599. 1.

600. a. $(\arcsin ax = t$ helyettesítéssel.)

601. 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = \lim_{\arctg x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = 1.$$

602. $\frac{a}{b}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{\arcsin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arcsin ax}{x}}{\frac{\arcsin bx}{x}} = \frac{a}{b}.$$

603. 1 (l. az 598., a 601. és az előző feladat megoldását).

604. $\frac{1}{3}$.

605. $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin (x+2)}{x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin (x+2)}{x+2} \\ &= \frac{1}{-2} \cdot \lim_{x+2 \rightarrow 0} \frac{\arcsin (x+2)}{x+2} = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

606. 0.

607. 1 (a számláló is, a nevező is $\frac{\pi}{2}$ -höz tart).

608. sg a . sg b, ha $b \neq 0$ (másként a függvény értelmetlen).

609. $\frac{\pi}{4}$, mert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$, és az arc tg függvény mindenütt folytonos.

610. Nem létezik: a jobb oldali határérték $\frac{\pi}{2}$, a bal oldali $-\frac{\pi}{2}$.

611. $\frac{\pi}{2}$.

612. a) 7, b) 2, c) $\frac{1}{3}$, d) $\frac{1}{6^5} = \frac{1}{7776}$,

e) $\sqrt[5]{5}$ [mert $3^{9 \log 5} = (9^{\frac{1}{2}})^{9 \log 5} = \left(9^{9 \log 5}\right)^{\frac{1}{2}}$],

f) 27 (mert $8^{4 \log 9} = (2^3)^{4 \log 9} = \left[(2^2)^{\frac{3}{2}} \right]^{4 \log 9} =$

$$= \left[4^{4 \log 9} \right]^{3/2} = 9^{3/2} = 27).$$

613. a) $\frac{1}{2}$, b) $2\frac{1}{3}$, c) $-\frac{2}{3}$.

614. a) -0,6931, b) 3,31 c) -2,240.

615. a) 1,282, b) 0,774, c) 2,20, d) 2,48

a (10.17) képlet alapján:

$${}_a \log b = \frac{\lg b}{\lg a},$$

vagy

$${}_a \log b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

(attól függően, hogy lg vagy ln-táblázatunk van-e).

616. $\frac{k}{n}$, mert $(a^{\frac{k}{n}})^n = a^k$.

617. a) $\frac{3}{2}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{5}{4}$, d) $-\frac{5}{4}$, e) $-\frac{5}{4}$, f) $\frac{5}{4}$
(mind az előző feladat megoldása alapján).

618. Azokét a racionális számokét, amelyeknek legegyszerűbb alakjában (ahol a számláló és a nevező relatív prim egész számok) sem a számláló, sem a nevező nem tartalmaz 2, 3, 5-ön kívül más törzstényezőt.

619. a) b) $x \in (0, +\infty)$ c) $x \in [0, +\infty)$.

620. $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ($x \neq 1$, mert az 1 alapú logaritmus ugyanugy értelmetlen, mint a 0 nevezőjű tört). $f(x) \in \mathbb{R}$.

621. $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $f(x) \in \{1\}$.

622. a) $x \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $f(x) \in (-\infty, 0]$,

b) $x \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} ((4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2})$, $f(x) \in (-\infty, 0]$,

c) $x \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2})$, $f(x) \in (-\infty, +\infty)$.

623. a) $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \in [0, +\infty)$,

b) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(x) \in \mathbb{R}$.

624. a) $x \in [\frac{1}{e}, e]$, $f(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, b) $x \in [\frac{1}{e}, e]$,

$f(x) \in [0, \pi]$.

625. a) $x \in (0, 1]$, $f(x) \in (-\infty, \ln \frac{\pi}{2}]$, b) $x \in [-1, 1]$,

$f(x) \in (-\infty, \ln \pi]$.

626. a) $x \in (-\infty, 0]$, $f(x) \in (0, \frac{\pi}{2})$, b) $x \in (-\infty, 0]$,

$f(x) \in [0, \frac{\pi}{2})$.

627. Párosak: (1), (5), (7), (10).

Páratlanok: (2), (3), (4).

Se nem párosak, se nem páratlanok: (6), (8), (9), (11), (12), (13), (14).

628. Az első esetben az $y = \ln \frac{x}{k}$, a másodikban az $y = a + \ln x$ görbét kapjuk.

Az

$$\ln \frac{x}{k} = a + \ln x$$

egyenletből

$$\ln \frac{x}{k} - \ln x = a,$$

$$\ln \frac{1}{k} = a,$$

és így az

$$a = -\ln k$$

értékre a feladat állítása teljesül.

- 629-635. Ezeket mind lineáris transzformációval:

629. $2^x = (e^{\ln 2})^x = e^{x \ln 2}$; $\frac{1}{\ln 2}$ -szörös nyújtás az x tengely mentén.

630. $(e^x)^3 = e^{3x}$; zsugorítás $\frac{1}{3}$ részre az x tengely mentén.

631. $y = \frac{3}{4} e^{x \ln 5}$; zsugorítás $\frac{1}{\ln 5}$ részre x mentén, azután $\frac{3}{4}$ részre y mentén.

632. $\ln (ex)^2 = 2 \ln e + 2 \ln x = 2 \ln x + 2$.

633. ${}^3\log x = \frac{\ln x}{\ln 3}$.

634. ${}^3\log \frac{x}{27} = 4$. ${}^3\log x - {}^3\log 27 = 4$. $\frac{\ln x}{\ln 3} - 3$.

635. ${}^2\log \frac{1}{10 x^5} = - ({}^2\log 10 + 5 \cdot {}^2\log x) = -5 \cdot \frac{\ln x}{\ln 2} - \frac{\ln 10}{\ln 2}$.

$$636. \quad \ln \sqrt{x^2 - 1} = \begin{cases} \frac{1}{2} [\ln(x-1) + \ln(x+1)], & \text{ha } x > 1, \\ \frac{1}{2} [\ln(1-x) + \ln(-1-x)], & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

Emellett $\ln \sqrt{x^2 - 1}$ páros függvény; elegendő tehát, ha az $x > 1$ félegyenest ábrázoljuk $\ln(x-1)$ -et és $\ln(x+1)$ -et, és a két görbe függőleges távolságát megfelezzük. Az így kapott görbét még tükrözzük az y tengelyre.

637. Az előzőhöz hasonlóan (a függvény páratlan).

$$\begin{aligned} 638. \quad & \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \\ & = \ln[(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})] = \ln[x^2 - (x^2 - 1)] = \\ & = \ln 1 = 0; \quad \text{a két szám összege 0, tehát ellentettek.} \end{aligned}$$

640. Legyen a (10.17) képletben $y = a$.

641. Legyen a (10.17) képletben $b = a^k$.

$$642. \quad (1) \quad a^n \log b^n = n \cdot a^n \log b = n \cdot \frac{a^n \log b}{n} = a^n \log b$$

(1. az előző feladatot).

(2) Legyen az (1) egyenlőségben $a^n = A$, $b^n = B$.

$$643. \quad a) \quad {}^2\log 3, \quad b) \quad {}^2\log \frac{1}{3} = - {}^2\log 3,$$

$$c) \quad e^3 \log 27 - \ln \frac{1}{3} = e \log \sqrt[3]{27} + \ln 3 = \ln 3 + \ln 3 = 2 \ln 3.$$

644. Legyen a 641. egyenlőségben $k = -1$.

$$\begin{aligned} 645. \quad & \frac{{}_a\log x}{{}_{ab}\log x} = \frac{\frac{1}{{}_x\log a}}{\frac{1}{{}_x\log(ab)}} = \frac{{}_x\log(ab)}{{}_x\log a} = \frac{{}_x\log a + {}_x\log b}{{}_x\log a} = \\ & = 1 + \frac{{}_x\log b}{{}_x\log a} = 1 + {}^a\log b. \end{aligned}$$

646. Vegyük mindkét oldal reciprokát!

$$\begin{aligned}
 647. \quad a_1 a_2 \dots a_n \log x &= \frac{1}{x^{\log(a_1 a_2 \dots a_n)}} = \\
 &= \frac{1}{x^{\log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n}} = \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{a_1^{\log x}} + \frac{1}{a_2^{\log x}} + \dots + \frac{1}{a_n^{\log x}}} .
 \end{aligned}$$

648. a) Általában nem. $P(x) = Q(x)$ akkor is fennállhat, ha a két függvény értéke nem pozitív, $\ln P(x) = \ln Q(x)$ viszont nem.

b) Általában nem. Az első egyenlet megköveteli, hogy $P(x)$ is, $Q(x)$ is pozitív legyen; a második csak azt, hogy egyenlő előjelek legyenek.

c) Ha n páratlan, akkor igen, ha páros, akkor általában nem. Ez utóbbi esetben ugyanis az első egyenlet teljesülhet, ha $P(x) \neq 0$, a második viszont csak akkor, ha $P(x) > 0$.

$$\begin{aligned}
 649. \quad a) e^3 &\approx 20,1, & b) e^\pi &\approx 23,2, & c) e^e &\approx 15,6, \\
 d) e^{3,24} &\approx 35,1.
 \end{aligned}$$

$$650. \quad x = {}^b \log {}^a \log c, \quad \text{ha } c > a. \text{ Ha } c < a, \text{ nincs megoldás.}$$

$$\begin{aligned}
 651. \quad x &= 3. \text{ Az egyenlet ugyanis} \\
 {}^2 \log (x+1) + {}^2 \log (x+1) &= 3 \\
 \text{vagyis}
 \end{aligned}$$

$$\frac{{}^2 \log (x+1)}{2} + {}^2 \log (x+1) = 3$$

alakba írható.

$$652. \quad x = 27. \text{ (A baloldalon a két szélső tag összege 0.)}$$

$$653. \quad x = 1. \text{ Az egyenlet ugyanis így írható:}$$

$${}^a \log x \cdot {}^b \log x \cdot (-1) = 0$$

$$654. \quad x = (8k+1) \frac{\pi}{4}, \quad k \text{ tetszőlegesen egész. } A$$

$$\cos x_{\log \sin x} = y$$

helyettesítéssel ugyanis az

$$y + \frac{1}{y} = 2$$

egyenletet kapjuk.

655. $x_1 = 3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = -1.$

Az egyenlőség ugyanis teljesül, ha a két kitevő egyenlő:

$$x + 7 = x^2 + 1,$$

akkor is, ha a kitevők nem egyenlők, de a közös alap $x = 1$ (ennek minden hatványa 1, a kitevő értékétől függetlenül); továbbá akkor is, ha az alap $x = 0$ vagy -1 .

656. Ezt az egyenletet kielégíti x -nek minden olyan értéke, amelyre

I. $g(x) = h(x) = a$, és az $f(x)^a$ hatványnak van értelme (l. a következő feladatot), vagy

II. $f(x) = 1$, vagy

III. $f(x) = 0$, és $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, vagy

IV. $f(x) = -1$, és a $(-1)^{g(x)}$, $(-1)^{h(x)}$ hatványok értelmesek és egyenlők egymással (l. a következő feladatot).

657. Azok a racionális számok, amelyeknek $\frac{p}{q}$ legegyszerűbb alakjában (p és q relatív primek) q páratlan.

658. a) divergens, határértéke $+\infty$,
b) konvergens, határértéke 0.

Az a) sorozatban ugyanis a tangens argumentuma balról tart

$\frac{\pi}{2}$ -höz, b)-ben viszont jobbról; így a kitevő a)-ban $+\infty$ -hez, b)-ben $-\infty$ -hez tart.

659. a) 1, ha $a > 1$; $1/2$, ha $a = 1$; 0, ha $0 \leq a < 1$; ha $a < 0$, nem létezik. b) 0, ha $a > 1$; $1/2$, ha $a = 1$; 1, ha $0 < a < 1$; ha $a \leq 0$, nem létezik.

660. a) Nem létezik: a jobb oldali határérték $+\infty$, a bal oldali 0.
b) $+\infty$.

661. a) 0, b) 1.

662. Mind a kettő $\frac{1}{2}$.

663. 0:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\ln \sin x - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

mert a $\ln$ függvény az 1 helyen folytonos

664. $\ln 1, 8$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} (\ln \sin 9x - \ln \sin 5x) &= \lim_{x \rightarrow \pi} \ln \frac{\sin 9x}{\sin 5x} = \\ &= \lim_{\pi - x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin 9x}{\sin 5x} = \lim_{y \rightarrow 0} \ln \frac{\sin 9(\pi - y)}{\sin 5(\pi - y)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \ln \frac{\sin(9\pi - 9y)}{\sin(5\pi - 5y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \ln \frac{\sin 9y}{\sin 5y} = \\ &= \ln \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 9y}{\sin 5y} = \ln \frac{9}{5} = \ln 1,8. \end{aligned}$$

665., 666. Nem létezik; a jobboldali határérték $+\infty$, a baloldali 0.

667. a) $e^{\frac{\pi}{2}}$, b) $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

668. a) $\ln \frac{\pi}{2}$, b) nem létezik.

669. a) $+\infty$, b) 0.

670. e.

Ez nem magától értetődő; nem azonos a sorozatoknál tárgyalt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

határértékkel. Ez utóbbiban ugyanis n csak a természetes számokon át tart a ∞ -hez.

A két határérték egyenlősége azonban belátható, ha megmutatjuk, hogy

$$k < x < k+1 \quad (k \in \mathbb{T})$$

esetén

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1}.$$

(Ennek megmutatását, valamint a két határérték egyenlőségének további bizonyítását az olvasóra bizzuk.)

671. e^a .

672. e :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-1}{y}\right)^{-y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{-1}{y}\right)^y} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-1}{y}\right)^y} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e. \end{aligned}$$

673. e^a .

674. $+\infty$, hiszen

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^x.$$

Szabatos bizonyítás: ha x elég nagy, akkor

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 2 \text{ (hiszen } e \approx 2,72\text{-hoz tart),}$$

és így

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} > 2^x \rightarrow \infty$$

675. 1, mert ha x elég nagy, akkor

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \sqrt[x]{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}} \approx \sqrt[x]{e},$$

az pedig már világos, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{e} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

(A szabatos bizonyítást az olvasóra bizzuk.)

676. e^2 . Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{x-5} &= \lim_{x+1 \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x+1} \right)^{x+1-6} = \\ &= \lim_{x+1 \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x+1} \right)^{x+1} : \lim_{x+1 \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x+1} \right)^5 = e^2 : 1 = e^2. \end{aligned}$$

677. e :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[{\sin x}]{1 + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\sin x}} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = e. \end{aligned}$$

678. e .

679. e^3 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 2} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x - 1}{x^2 - 5x + 2} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x - \frac{1}{3}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x - \frac{14}{3} - \frac{8}{3x-1}} \right)^x = \\ &= \lim_{x - \frac{14}{3} - \frac{8}{3x-1} \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x - \frac{14}{3} - \frac{8}{3x-1}} \right)^{x - \frac{14}{3} - \frac{8}{3x-1}} \cdot \\ &\quad \left(1 + \frac{3}{x - \frac{14}{3} - \frac{8}{3x-1}} \right)^{\frac{14}{3} + \frac{8}{3x-1}} = e^3 \cdot 1 = e^3. \end{aligned}$$

680. k ;

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow \pm \infty} \ln\left(1 + \frac{k}{\frac{1}{x}}\right) = \ln \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{k}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^k = k.\end{aligned}$$

681. $\frac{1}{\ln a}$. Az előbbi feladat megoldását figyelembe véve ugyanis

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{a+x}{a}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{a} \cdot x\right)}{x} = \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

682. $\frac{1}{a}$. (Alkalmazzuk az $x - a = y$ helyettesítést.)

683. e^a . Az $x = \ln y$ helyettesítéssel ugyanis

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} &= \lim_{\ln y \rightarrow a} \frac{e^{\ln y} - e^a}{\ln y - a} = \lim_{y \rightarrow e^a} \frac{y - e^a}{\ln y - a} = \\ &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow e^a} \frac{\ln y - a}{y - e^a}} = e^a\end{aligned}$$

(az előző feladat megoldása alapján).

$$\begin{aligned}684. \quad & \text{a) } \frac{e^4 - 1}{2e^2} \quad \text{b) } \frac{e^6 + 1}{2e^3} \quad \text{c) } \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \\ & \text{d) } \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1} \quad \text{e) } \frac{12}{5} \quad \text{f) } \frac{5}{4} \quad \text{g) } \frac{4}{5} \quad \text{h) } \frac{e^{2e} + 1}{e^{2e} - 1}\end{aligned}$$

685. a) $\ln(2 + \sqrt{5})$ b) $\ln 1 = 0$ c) $\ln(1 + \sqrt{e^4 + 1})$
d) értelmetlen e) $\ln(e + \sqrt{e^2 + 1}) - 1$
686. a) $\frac{1}{2} \ln 3$ b) és c) értelmetlen d) $\frac{1}{2} \ln 3$
e) $\frac{1}{2} \ln \frac{e+1}{e-1}$, f) 1.
687. a) $x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}$; b) ha $a \neq 0, x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}$; c) ha $a \neq 0, x \in \mathbb{R}, f(x) \in [1, +\infty)$; d) $x \in \mathbb{R}, f(x) \in (-1, 1)$; e) $x \in \mathbb{R}, f(x) \in (-3, 3)$; f) ha $ab \neq 0, x \in \mathbb{R}, f(x) \in (-|a|, |a|)$; g) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{c}{b}\}, f(x) \in (-\infty, -|a|) \cup (|a|, +\infty)$.
688. Mindenütt feltesszük, hogy $a \neq 0$. a) $x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}$;
b) $x \in [\frac{1-b}{a}, +\infty)$, ha $a > 0$, $x \in (-\infty, \frac{1-b}{a})$, ha $a < 0$,
 $f(x) \in [0, +\infty)$, c) $x \in (\frac{-1-b}{a}, \frac{1-b}{a})$ ha $a > 0$,
 $(\frac{1-b}{a}, \frac{-1-b}{a})$, ha $a < 0$, $f(x) \in \mathbb{R}$;
d) $x \in (-\infty, \frac{-1-b}{a}) \cup (\frac{1-b}{a}, +\infty)$, ha $a > 0$,
 $x \in (-\infty, \frac{1-b}{a}) \cup (\frac{-1-b}{a}, +\infty)$, ha $a < 0$, $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
689. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $x \in \mathbb{R}, f(x) \in (0, 1]$;
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ (mert $\frac{1}{\operatorname{th} x} = \operatorname{cth} x$),
d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ ($\frac{1}{\operatorname{cth} x} = \operatorname{th} x$, ha $x \neq 0$).
690. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) \in [1, +\infty)$;
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) \in (-1, 1) \setminus \{0\}$; d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

691. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $x \in [1, +\infty)$, $f(x) \in (0, +\infty)$,
 c) $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 d) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

692. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $x \in (0, 1)$, $f(x) \in (0, +\infty)$,
 c) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; d) $x \in (-1, 0) \cup$
 $\cup (0, 1)$, $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

693. (I): 687. c), ha $b = 0$; 689. b), 690. b).

(II): 687. b), ha $b = 0$; d); e); f); g), ha $c = 0$;

688. a), c), d), ha $b = 0$,

689. a); c); d); 690. a); c); d); 691. a); c); d);

692. a); c); d).

694. a) van, $\operatorname{ar sh} \frac{x-3}{2}$; b) van, $\frac{\operatorname{ar sh} x - 3}{2}$; c) van, $\frac{1}{\operatorname{ar sh} x}$.

695. a) külön-külön az $x \leq 0$ és az $x \geq 0$ intervallumra való leszűkíté-
 sének van:

$$- \operatorname{arch} \frac{x+3}{2}, \text{ illetve } \operatorname{arch} \frac{x+3}{2},$$

- b) külön-külön az $x \leq \frac{3}{2}$ és az $x \geq \frac{3}{2}$ leszűkítésnek van:

$$\frac{3 - \operatorname{arch} x}{2}, \text{ illetve } \frac{3 + \operatorname{arch} x}{2};$$

- c) ugyanugy [mert $\operatorname{ch}(3 - 2x) = \operatorname{ch}(2x - 3)$];

- d) külön-külön az $x \leq 0$ és az $x \geq 0$ leszűkítésnek van:

$$- \frac{1}{\operatorname{arch} x}, \text{ illetve } \frac{1}{\operatorname{arch} x}.$$

696. Mindegyik függvény $x \geq 0$ és $x \leq 0$ leszűkítésének külön-külön
 van:

$$a) \pm \sqrt{\operatorname{ar sh} x},$$

$$b) \pm \sqrt{\operatorname{ar ch} x},$$

$$c) \pm \operatorname{ar sh} \sqrt{x},$$

$$d) \pm \operatorname{ar ch} \sqrt{x}.$$

$x \geq 0$ -ra a pozitív, $x \leq 0$ -ra a negatív előjel vonatkozik.

697. a) van, $\frac{\text{sh } x - 3}{2}$; b) van, $\frac{\text{ch } x + 3}{2}$; c) van, $\frac{3 - \text{ch } x}{2}$.

A b) és a c) esetben $x \cong 0$.

698. a) van: $\frac{\text{arth } x}{4}$. b) van: $3 \text{ arth } x$. c) van: $\frac{\text{th } x + 3}{2}$,

d) van: $\frac{1}{\text{cth } x}$.

699. a) b) Van (mert mindkét függvény monoton növekedő), de explicit alakban nem fejezhető ki.

c) Van, mert $\text{sh } x - \text{th } x = \text{sh } x (1 - \frac{1}{\text{ch } x})$ végig monoton növekedő; explicit alakban való kifejezése azonban bonyolult (negyedfokú egyenlet megoldását kívánná meg).

700. a) $\frac{x^2 - 1}{2x}$, b) $\frac{x^2 + 1}{2x}$, c) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$,

d) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

701. a) $x + \sqrt{x^2 + 1}$, b) $x + \sqrt{x^2 - 1}$, c) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

d) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

702. a) $\text{sh } \frac{x}{2} = \text{sg } x \cdot \sqrt{\frac{\text{ch } x - 1}{2}}$

b) $\text{ch } \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\text{ch } x + 1}{2}}$

c) $\text{th } \frac{x}{2} = \text{sg } x \cdot \sqrt{\frac{\text{ch } x - 1}{\text{ch } x + 1}}$

d) $\text{cth } \frac{x}{2} = \text{sg } x \cdot \sqrt{\frac{\text{ch } x + 1}{\text{ch } x - 1}}$.

Könnyen adódnak a

$$\left. \begin{aligned} \text{ch}^2 \frac{x}{2} + \text{sh}^2 \frac{x}{2} &= \text{ch } x, \\ \text{ch}^2 \frac{x}{2} - \text{sh}^2 \frac{x}{2} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerből (ugyanugy, mint a megfelelő trigonometrikus képletek).

$$703. \quad a) \operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

$$b) \operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

Ugyanugy kaphatók, mint a megfelelő trigonometrikus képletek:

$$a) \operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{sh}(x+y)}{\operatorname{ch}(x+y)} = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}$$

a számlálót és a nevezőt $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$ -nal elosztva tehát

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}.$$

$$b) \operatorname{th}(x-y) = \operatorname{th}[x + (-y)] = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th}(-y)}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th}(-y)} = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

$$704. \quad \operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x} \quad (703/a \text{ alapján}).$$

$$705. \quad a) \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}, \quad b) \operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}.$$

A

$$\operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}$$

egyenlőség a négyzetes összefüggés alapján ugyanis felírható

$$\text{akár } a)^* \quad \operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{1 + \operatorname{sh}^2 x}$$

$$\text{akár } b)^* \quad \operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

alakban. Ekkor $a)^*$ -ből $a)$, $b)^*$ -ből $b)$ könnyen megkapható.

(Az előjel pozitív, mert $\operatorname{ch} x > 0$, és ezért $\operatorname{sg} \operatorname{sh} x = \operatorname{sg} \operatorname{th} x$.)

$$706. \quad a) \operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}},$$

$$b) \operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}.$$

$$707. \quad a) \operatorname{sh} 3x = 3 \operatorname{sh} x + 4 \operatorname{sh}^3 x, \quad -$$

$$b) \operatorname{ch} 4x = 1 - 8 \operatorname{ch}^2 x + 8 \operatorname{ch}^4 x.$$

708. Lineáris transzformációval mindegyik ábrázolható:

$$a) \quad 2^{x-1} + \frac{1}{2^{x+1}} = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} = \frac{(e^{\ln 2})^x + (e^{\ln 2})^{-x}}{2} =$$

$$= \frac{e^{x \ln 2} + e^{-x \ln 2}}{2} = \operatorname{ch}(x \ln 2),$$

$$b) \quad \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = \frac{e^{\frac{x}{2} \ln 2} - e^{-\frac{x}{2} \ln 2}}{e^{\frac{x}{2} \ln 2} + e^{-\frac{x}{2} \ln 2}} = \operatorname{th} \frac{x}{2} \ln 2,$$

$$c) \operatorname{ch}^4 x = (\operatorname{ch}^2 x)^2 = \left(\frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \right)^2 = \frac{\operatorname{ch}^2 2x + 2 \operatorname{ch} 2x + 1}{4} =$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{ch} 4x + 1}{2} + 2 \operatorname{ch} 2x + 1}{4} = \frac{\operatorname{ch} 4x + 4 \operatorname{ch} 2x + 3}{8},$$

tehát

$$\operatorname{ch}^4 x - \frac{1}{8} \operatorname{ch} 4x = \frac{4 \operatorname{ch} 2x + 2}{8} = \frac{2 \operatorname{ch} 2x + 1}{4}.$$

$$709. \quad a) \operatorname{ch} \operatorname{ar} \operatorname{sh} x = \sqrt{1 + x^2}, \quad b) \operatorname{sh} \operatorname{ar} \operatorname{ch} x = \sqrt{1 + x^2}$$

$$c) \text{ és } d) \operatorname{th} \operatorname{ar} \operatorname{cth} x = \operatorname{cth} \operatorname{ar} \operatorname{th} x = \frac{1}{x}.$$

Bizonyítás:

$$a) \operatorname{ch} \operatorname{ar} \operatorname{sh} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \operatorname{ar} \operatorname{sh} x} = \sqrt{1 + x^2},$$

$$b) \operatorname{sh} \operatorname{ar} \operatorname{ch} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \operatorname{ar} \operatorname{ch} x - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$c) \operatorname{th ar cth} x = \frac{1}{\operatorname{cth ar cth} x} = \frac{1}{x},$$

d) hasonlón.

$$710. \quad a) \operatorname{th ar sh} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$b) \operatorname{th ar ch} x = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$c) \operatorname{cth ar sh} x = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

$$d) \operatorname{cth ar ch} x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$711. \quad a) \operatorname{sh ar th} x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$b) \operatorname{ch ar th} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$c) \operatorname{sh ar cth} x = \frac{\operatorname{sg} x}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$d) \operatorname{ch ar cth} x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$712. \quad a) c) d) x, \quad b) \cdot x.$$

$$713. \quad a) \text{ és } b) \text{ nem hozható egyszerűbb alakra, } c) \text{ és } d) \text{ értelmetlen.}$$

$$714. \quad a) c) \text{ és } d) \text{ nem hozható egyszerűbb alakra, } b) \text{ értelmetlen.}$$

$$715. \quad a) \operatorname{sh} \frac{\operatorname{ar ch} x}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2}}, \quad b) \operatorname{th} \frac{\operatorname{ar ch} x}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

A 702. feladst eredményei alapján ugyanis

$$a) \operatorname{sh} \frac{\operatorname{ar ch} x}{2} = \operatorname{sg ar ch} x \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{ch ar ch} x - 1}{2}} = \sqrt{\frac{x-1}{2}},$$

$$b) \operatorname{th} \frac{\operatorname{ar ch} x}{2} = \operatorname{sg ar ch} x \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{ch ar ch} x - 1}{\operatorname{ch ar ch} x + 1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

716-721.

Mindegyik felvázolható lineáris transzformációval:

716. a) A 709/b feladat szerint

$$\operatorname{ar sh} \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{ar sh sh ar ch x} = \operatorname{ar ch x}$$

$$\text{b) } \operatorname{ar ch} \sqrt{x^2 + 1} = \operatorname{ar ch ch ar sh x} = \operatorname{ar sh x} \\ (709/a \text{ feladat}).$$

717. $\operatorname{ar th} \frac{1}{x} = \operatorname{ar cth x}.$

718. a) $\operatorname{ar sh} (2x \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{ar sh} (2 \cdot \operatorname{sh ar sh x} \cdot \operatorname{ch ar sh x}) =$
 $= \operatorname{ar sh sh 2 ar sh x} = 2 \operatorname{ar sh x},$

b) $\operatorname{ar ch} (2x^2 - 1) = \operatorname{ar ch} [x^2 + (x^2 - 1)] =$
 $= \operatorname{ar ch} [\operatorname{ch}^2 \operatorname{ar ch x} + (\operatorname{ch}^2 \operatorname{ar ch x} - 1)] =$
 $= \operatorname{ar ch} [\operatorname{ch}^2 \operatorname{ar ch x} + \operatorname{sh}^2 \operatorname{ar ch x}] = \operatorname{ar ch ch 2 ar ch x} =$
 $= 2 \operatorname{ar ch x}.$

719. $\operatorname{ar th} \frac{5x - 3}{5 - 3x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{5x - 3}{5 - 3x}}{1 - \frac{5x - 3}{5 - 3x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{2 + 2x}{8 - 8x} =$
 $= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1 + x}{1 - x} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} = \ln \sqrt{\frac{1}{4}} + \operatorname{ar th x} =$
 $= \operatorname{ar th x} - \ln 2.$

720. a) $\operatorname{ar sh} \frac{2x}{1 - x^2} = \operatorname{ar sh} \frac{2 \operatorname{th ar th x}}{1 - \operatorname{th}^2 \operatorname{ar th x}} =$
 $= \operatorname{ar sh sh 2 ar th x} = 2 \operatorname{ar th x},$

b) ugyanugy $\operatorname{ar ch} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = 2 \operatorname{ar th x}$, ahol az $\operatorname{ar ch}$ előjele azonos x -ével (l. a 706. feladatot).

721. a) $x = \operatorname{sh} (\operatorname{ar sh a} + \operatorname{ar sh b}) = \operatorname{sh ar sh a ch ar sh b} +$
 $+ \operatorname{ch ar sh a sh ar sh b} = a \sqrt{1 + b^2} + b \sqrt{1 + a^2},$

b) $x = ab + \sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} \quad (a, b \geq 1).$

722. a) $ab + \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 - 1)} \quad (b \geq 1),$

b) $b \sqrt{a^2 + 1} + a \sqrt{b^2 - 1} \quad (b \geq 1, \operatorname{ar sh a} + \operatorname{ar ch b} \geq 0).$

$$723. \quad a) x = \operatorname{th} (\operatorname{ar th} a + \operatorname{ar th} b) = \frac{\operatorname{th} \operatorname{ar th} a + \operatorname{th} \operatorname{ar th} b}{1 + \operatorname{th} \operatorname{ar th} a \operatorname{th} \operatorname{ar th} b} = \frac{a + b}{ab + 1},$$

$$(|a| > 1, \quad |b| > 1),$$

$$b) x = \operatorname{cth} (\operatorname{ar cth} a + \operatorname{ar cth} b) = \frac{1}{\operatorname{th} (\operatorname{ar th} \frac{1}{a} + \operatorname{ar th} \frac{1}{b})} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{ab}}} = \frac{1}{\frac{b+a}{ab+1}} = \frac{ab+1}{a+b},$$

a) alapján.

$$(|a| > 1, \quad |b| > 1, \quad a + b \neq 0),$$

$$c) x = \operatorname{th} (\operatorname{ar th} a + \operatorname{ar th} \frac{1}{b}) = \frac{a + \frac{1}{b}}{a \cdot \frac{1}{b} + 1} = \frac{ab+1}{a+b}$$

$$|a| < 1, \quad |b| > 1).$$

$$724. \quad a) x = \operatorname{sh} (\operatorname{ar th} a + \operatorname{ar th} b) = \operatorname{sh} \operatorname{ar th} a \operatorname{ch} \operatorname{ar th} b +$$

$$+ \operatorname{ch} \operatorname{ar th} a \operatorname{sh} \operatorname{ar th} b = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \cdot b +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sqrt{b^2-1} = \frac{ab + \sqrt{b^2-1}}{1-a^2} \quad (|a| < 1, \quad |b| > 1),$$

$$b) x = \operatorname{ch} (\operatorname{ar cth} a + \operatorname{ar ch} b) = \operatorname{ch} \operatorname{ar cth} a \operatorname{ch} \operatorname{ar ch} b +$$

$$+ \operatorname{sh} \operatorname{ar cth} a \operatorname{sh} \operatorname{ar ch} b =$$

$$= \frac{|a|}{\sqrt{a^2-1}} b + \frac{\operatorname{sg} a}{\sqrt{a^2-1}} \sqrt{b^2-1} = \frac{\operatorname{sg} a}{\sqrt{a^2-1}} (ab + \sqrt{b^2-1})$$

$$(b > 1, \quad |a| > 1, \quad \operatorname{ar th} a + \operatorname{arch} b \geq 1).$$

725. 1 és -4. Vegyük ugyanis mindkét oldal th -át - ez nem jelenthet gyökvesztést, mert különböző számoknak a th -a is különböző:

$$\frac{(x+2) - (x+1)}{1 - (x+2)(x+1)} = -\frac{1}{5},$$

innen

$$-\frac{1}{x^2 + 3x + 1} = -\frac{1}{5},$$

$$x^2 + 3x + 1 = 5$$

és

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

726.

Megoldás nem lehet, hiszen az $\operatorname{ar sh} x$ és az $\operatorname{ar ch} x$ függvény grafikonjának nincs közös pontja. Ez számítással is kiderül:

$$x = \operatorname{ar ch} x = \sqrt{x^2 - 1}.$$

ugyhogy

$$x^2 = x^2 - 1$$

kellene hogy legyen.

727.

$x = 0$; a két görbének ugyanis az origó az egyetlen közös pontja. Ez számítással is kiderül:

$$x = \operatorname{sh ar th} x,$$

$$x = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

innen pedig vagy $x = 0$, vagy $1 = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Ez utóbbi egyenletnek is $x = 0$ az egyetlen gyöke.

728. $x = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

Az egyenlethől ugyanis

$$x = \operatorname{sh} 2 \operatorname{ar ch} x,$$

$$x = 2 \operatorname{sh ar ch} x \cdot \operatorname{ch ar ch} x,$$

$$x = 2 \sqrt{x^2 - 1} \cdot x$$

(itt $x = 0$ nem lehetséges, mert akkor $\sqrt{x^2 - 1}$ értelmetlenné válik); ekkor

$$1 = ? \sqrt{x^2 - 1},$$

stb.

$$729. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(5+h)^2 - 3 \cdot 5^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{30h + h^2}{h} = 30$$

$$730. \quad \frac{3}{2}.$$

$$731. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{-1}{4}$$

$$732. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} 733. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{\sqrt{4+h}} - \frac{1}{2} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{2 - \sqrt{4+h}}{2 + \sqrt{4+h}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{2h \sqrt{4+h} (2 + \sqrt{4+h})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2 \sqrt{4+h} (2 + \sqrt{4+h})} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$734. \quad -2;$$

$$735. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{\pi}{4} + h) - 2 \sin \frac{\pi}{4}}{h} \text{ -t kell meghatároznunk.}$$

Első megoldás:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{\pi}{4} + h) - 2 \sin \frac{\pi}{4}}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(\sin \frac{\pi}{4} \cos h + \cos \frac{\pi}{4} \sin h) - 2 \sin \frac{\pi}{4}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \cos h + \sqrt{2} \sin h - \sqrt{2}}{h} = \sqrt{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1 + \sin h}{h} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right] = \sqrt{2}$$

(felhasználva, hogy $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ és $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$)

410. feladat)

Második megoldás:

Felhasználva, hogy $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + h \right) - \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}$$

tehát

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + h \right) - 2 \sin \frac{\pi}{4}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} \right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$736. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1+h} - e^{-1}}{h} = \frac{1}{e} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{e}$$

(felhasználtuk, hogy $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$)

$$737. \quad 2 - 6x_0$$

$$738. \quad \frac{-8}{(4x_0 - 3)^2}$$

$$739. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x_0 + h)^2 - 1} - \sqrt{x_0^2 - 1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h(\sqrt{(x_0 + h)^2 - 1} + \sqrt{x_0^2 - 1})} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}}$$

$$740. \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h} = \frac{1}{x_0}$$

(a 681. feladat eredménye alapján)

$$741. \quad \Delta f = 3 \cdot 5,1^2 - 3 \cdot 5^2 = 3,03$$

$$df = f'(x_0) h = 3$$

$$\Delta f - df = 0,03$$

$$742. \quad \Delta f = -0,024$$

$$df = -0,025$$

$$\Delta f - df = -0,001$$

$$743. \quad \Delta f = 2,48 \cdot 10^{-2}$$

$$df = 2,50 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta f - df = -0,2 \cdot 10^{-2}$$

$$744. \quad f'(-0,5) = f'(0,5) = 0$$

$x = -1$, $x = 0$ és $x = 1$ -nél a függvény nem differenciálható, a jobb oldali derivált létezik és egyenlő nullával, a bal oldali derivált nem létezik.

$$745. \quad f'(x) = 15x^4 - 21x^2$$

746. 1. módszer:
elvégezve a négyzetreemelés

$$f(x) = x^6 + 2x^3 + 1$$

$$f'(x) = 6x^5 + 6x^2$$

2. módszer: a "láncszabály" alkalmazásával.

$$h \circ f = (x^3 + 1)^2$$

$$f(x) = x^3 + 1 = u$$

$$h(u) = u^2$$

$$(h \circ f)'(x) = 2u \cdot 3x^2 = 2(x^3 + 1) \cdot 3x^2$$

$$747. \quad f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x}{x+2} \quad (\text{for } x \neq 2)$$

$$f'(x) = \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} \quad (x \neq 2)$$

$$748. \quad f'(x) = \frac{4x+37}{2(x+5)^{\frac{3}{2}}}$$

$$749. \quad f'(x) = 2 \cos 2x$$

$$750. \quad f'(x) = 0$$

$$751. \quad f'(x) = 2x \sin \sqrt{x+3} + \frac{x^2+2}{2\sqrt{x+3}} \cos \sqrt{x+3}$$

$$752. \quad f'(x) = 0$$

$$753. \quad f'(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{1+4x^2}$$

$$754. \quad f'(x) = -2 \operatorname{ctg} x (1 + \operatorname{ctg}^2 x) + \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$755. \quad f'(x) = (x-1)^2 \left[\frac{e^x}{(x^2+1)^2} - e^{-x} \right]$$

$$756. \quad f'(x) = \operatorname{ch} x - e^{x^2} (\sin 2x + 2x \sin^2 x)$$

$$757. \quad f'(x) = e^{x-1} (1 + e^x) + e^x (1 + x^e)$$

$$758. \quad f'(x) = 2(\operatorname{cth} x - \operatorname{th} x) (\ln \operatorname{th} x + 2x) + 4 \ln \operatorname{th} x$$

$$759. \quad f'(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{1+\sqrt{x}}^2} + 3 \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x - 6x^2 \operatorname{sh} x^3 + 2 \operatorname{sh} 2x$$

$$760. \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$761. \quad f'(x) = 10^x \ln 10 + \frac{1}{x \ln 10}$$

$$762. \quad f(x) = 3 \lg x + x^2 \lg e + \frac{1}{2} \lg(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \lg(x^2 + 7)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \left(\frac{3}{x} + 2x + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 + 7} \right)$$

(felhasználtuk, hogy $\lg e = \frac{1}{\ln 10}$).

$$763. \quad f'(x) = \cos 2x$$

$$764. \quad f'(x) = \frac{\arccos x + \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2} (\arccos x)^2}$$

$$765. \quad f'(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$766. \quad f'(x) = 4e^{4x} + 4^x \ln 4$$

$$767. \quad f'(x) = 3x^2 + 3\sqrt{x} \cdot \frac{\ln 3}{2\sqrt{x}}$$

$$768. \quad f'(x) = \frac{x}{2} \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2} \right)$$

$$769. \quad f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$770. \quad f'(x) = \frac{5}{x} (1 - 7 \ln^4 x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} (2 + \ln x)$$

$$771. \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln x} \left[1 + \frac{9}{2 \sqrt{\ln \ln^6 \left(\sqrt[5]{x} \right)}} \right]$$

772. a) Első módszer: "logaritmikus differenciálás"

$$f(x) = x^x$$

$$\ln f(x) = \ln (x^x) = x \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) [1 + \ln x]$$

$$f'(x) = (x^x)' = x^x [1 + \ln x]$$

b) Második módszer: x alapról "e" alapra térve át:

$$x = e^{\ln x}$$

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (1 + \ln x)$$

$$773. \quad f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \left[-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right]$$

774. $f(x)$ deriválható szorzatként, vagy hányadosként, vagy logaritmikus differenciálással:

$$\ln f(x) = 3 \ln x + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 3)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 + 3}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 3}} \left[\frac{3}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 + 3} \right]$$

$$775. \quad \cos (x + a) = \cos x \cos a - \sin x \sin a$$

$$776. \quad 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n x^{n-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1}{(x-1)^2}$$

$$777. \quad 1 + \operatorname{tg}^2 (a + x) = \frac{1}{\cos^2 (a + x)}$$

$$778. \quad f(x) = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$f'(x) = \frac{4}{1 + \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \right)^2} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{1-x} + \frac{1 + \sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} =$$

$$= \frac{4(1-x)}{1-x+1+2\sqrt{x}+x} \cdot \frac{1-x+\sqrt{x}+x}{2(1-x)\sqrt{x}\sqrt{1-x}} =$$

$$= \frac{2(1 + \sqrt{x})}{(2 + 2\sqrt{x})\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

786. Felhasználva, hogy $\operatorname{ar ch} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$

tehát

$$e^{\operatorname{ar ch} u} = u + \sqrt{u^2 - 1}$$

így

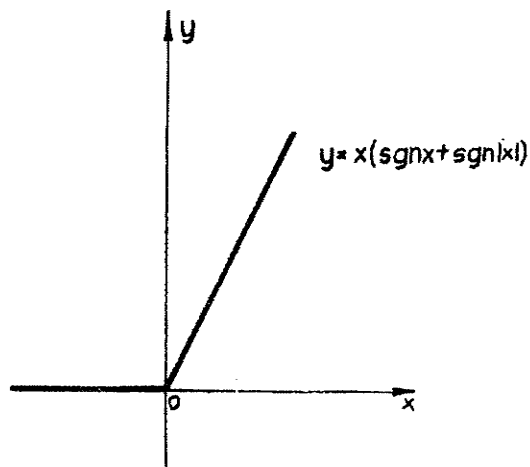
$$f(x) = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{\frac{1}{1-x} - 1} \right)$$

(784. feladat).

$$788. \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1. & \text{ha } x > 0 \\ 0. & \text{ha } x = 0 \\ -1. & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} |x| = \begin{cases} 1. & \text{ha } x \neq 0 \\ 0. & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} |x| = \begin{cases} 2. & \text{ha } x > 0 \\ 0. & \text{ha } x = 0 \\ 0. & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



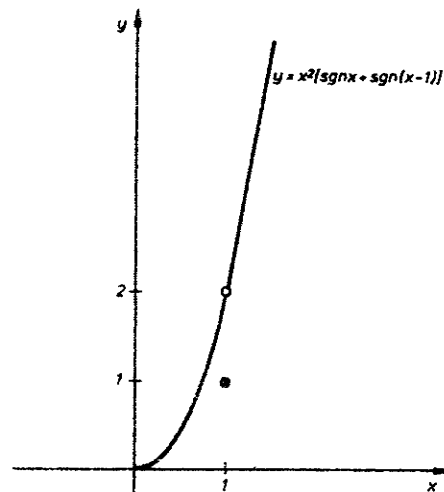
788. ábra

$$f(x) = x(\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} |x|) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

vagyis y az $x = 0$ kivételével mindenütt differenciálható.

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x > 0 \\ \text{nem létezik,} & \text{ha } x = 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$789. \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{ha } x > 0, x \neq 1 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$



789. ábra

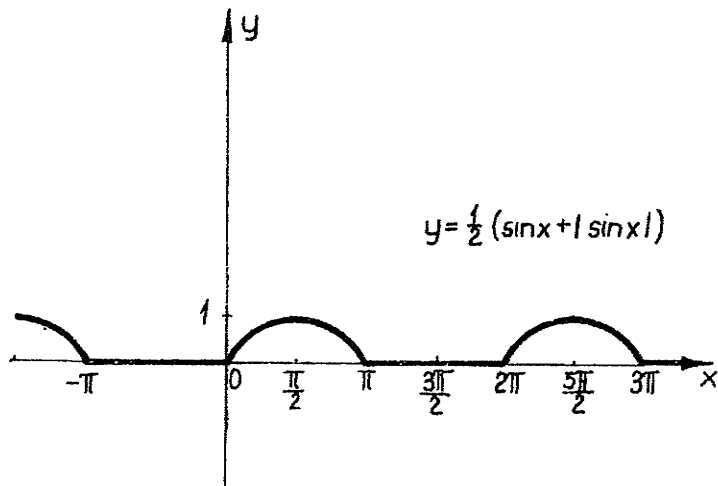
Ez a függvény $x = 1$ kivételével mindenütt differenciálható és

$$f'(x) = \begin{cases} 4x, & \text{ha } x > 0, x \neq 1 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

$$790. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } \sin x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } \sin x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$ deriválható, ha $\sin x \neq 0$ vagyis $x \neq k\pi$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ 0, & \text{ha } (2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi \end{cases}$$

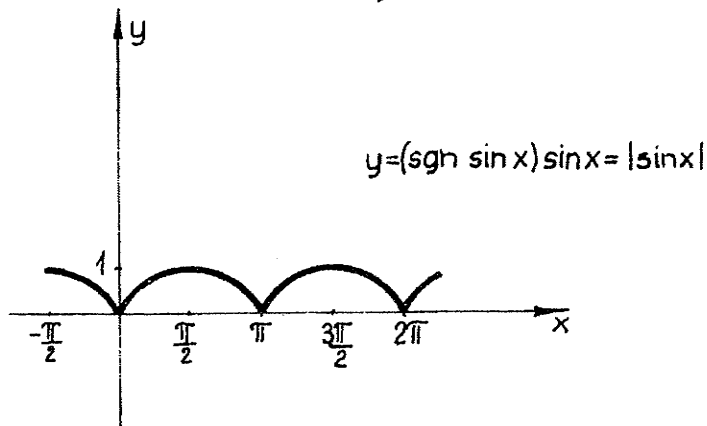


790. ábra

$$791. \quad \operatorname{sgn} \sin x = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sin x > 0 \\ 0, & \text{ha } \sin x = 0 \\ -1, & \text{ha } \sin x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = (\operatorname{sgn} \sin x) \sin x = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } \sin x > 0, \text{ vagyis } 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ 0, & \text{ha } \sin x = 0, \text{ vagyis } x = k\pi \\ -\sin x, & \text{ha } \sin x < 0, \text{ vagyis } (2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi \end{cases}$$

4



791. ábra

tehát

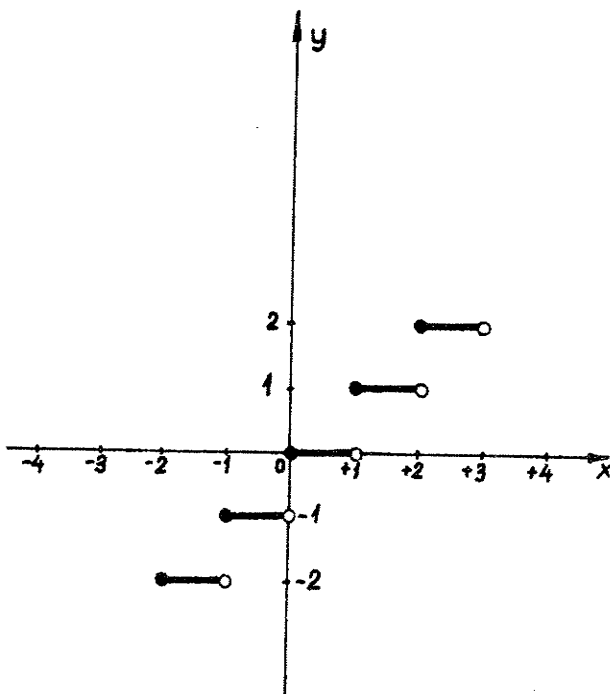
$$f(x) = (\operatorname{sgn} \sin x) \sin x = |\sin x|$$

differentiálható, ha $\sin x \neq 0$ azaz $x \neq k\pi$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ -\cos x & (2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi \end{cases}$$

792. $f(x) = [x]$ differentiálható, ha $x \neq$ egész szám

$f'(x) = 0$ mindenütt, ahol a függvény differentiálható



792. ábra

793. Mivel $[x] \leq x$, a függvény csak $x = k$ (egész) helyeken van értelmezve. Sehol sem differentiálható.

794. $f'(x) = \sin 2x, \dots, f^{(v)}(x) = 16 \sin 2x$

795. $f'''(x) = \frac{-\cos x (\cos^2 x + 3 \cos x + 2)}{\sin^4 x}$

796. $f''(x) = a^x (x \ln^2 a + 2 \ln a)$

$$797. \quad f^{(n)}(x) = e^x (n + x)$$

$$798. \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}$$

$$799. \quad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

800. Felhasználva, hogy

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 (x + |x|) = \begin{cases} 2x^3, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Mindentűt differenciálható és

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

f' is mindenütt differenciálható és

$$\frac{df'(x)}{dx} = f''(x) = \begin{cases} 12x, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

f'' folytonos az $x = 0$ helyen, de már nem differenciálható $x = 0$ -nál, mert a bal oldali differenciáhányadosa 0, a jobb oldali differenciáhányadosa pedig 12; tehát $f'''(0)$ nem létezik.

801. f folytonos az $x = 0$ helyen, mert

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ fennáll; } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

Definíció szerint

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

vagyis

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ nem folytonos $x = 0$ -nál (mert $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ nem létezik).

Mivel $f'(x)$ nem folytonos $x = 0$ -nál, $f''(0)$ nem létezik.

802. Mivel a függvény csak jobbról folytonos $x = 0$ -nál, $f'(0)$ nem létezik, $x = 0$ -nál csak a jobb oldali derivált létezik.
(A jobb oldali derivált valóban létezik:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\cos^2 \sqrt{h} - \cos^2 0}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{-\sin^2 \sqrt{h}}{h} =$$

$$= -\lim_{h \rightarrow +0} \left(\frac{\sin \sqrt{h}}{\sqrt{h}} \right)^2 = -1$$

803. $f(x) = |x(x+1)| = |x^2 + x| = \begin{cases} x^2 + x, & \text{ha } -\infty < x \leq -1 \\ -x^2 - x, & \text{ha } -1 < x \leq 0 \\ x^2 + x, & \text{ha } 0 < x < +\infty \end{cases}$

$x = 0$ -nál nem differenciálható, mert a bal oldali derivált -1 , a jobb oldali derivált pedig $+1$.

804. A megadott egyenlettel definiált $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az egyenletbe helyettesítve minden $x \in D$ -re érvényes azonosságot kapunk:

$$\forall x \in D: f^3(x) - 3x f(x) + x^2 = 0$$

Ezt deriválva:

$$3 f^2(x) f'(x) - 3f(x) - 3x f'(x) + 2x = 0$$

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 2x}{3f^2(x) - 3x}$$

$$805. \quad f'(x) = \frac{-f^2(x)}{xf(x) + 1}$$

306. Az $\ln$ függvény szigorú monotonitása miatt a megadott egyenlet ekvivalens az

$y \ln x = x \ln y$ egyenlettel. Az általa definiált $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az egyenletbe helyettesítve a

$\forall x \in D: f(x) \ln x - x \ln f(x) = 0$ azonosságot kapjuk, amiből

$$f'(x) = \frac{f^2(x) - x f(x) \ln f(x)}{x^2 - x f(x) \ln x}$$

$$807. \quad nf^{n-1}(x) f'(x) = \frac{[1 + f'(x)][x - f(x)] - [1 - f'(x)][x + f(x)]}{[x - f(x)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{2f(x)}{2x - nf^{n-1}(x)[x - f(x)]^2}$$

$$808. \quad f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1 - x e^{f(x)}}$$

$$809. \quad f''(x) = -\frac{2f^2(x) + 2}{f^5(x)}$$

$$810. \quad f''(x) = \frac{[2f(x)f'(x) + 3f(x) + 3xf'(x)][x^2 - xf(x)]}{[x^2 - xf(x)]^2} - \frac{[2x - f(x) - xf'(x)][f^2(x) + 3xf(x)]}{[x - xf(x)]^2}$$

ahol

$$f'(x) = \frac{f^2(x) + 3xf(x)}{x^2 - xf(x)}$$

$$811. \quad f''(x) = \frac{[f'(x) - 2][2f(x) - x] - [2f'(x) - 1][f(x) - 2x]}{[2f(x) - x]^2}$$

ahol

$$f'(x) = \frac{f(x) - 2x}{2f(x) - x}$$

812. $P_0(2, 8)$ az érintő meredeksége

$$m_{\epsilon} = f'(2) = [3x^2]_{x=2} = 12$$

a normális meredeksége

$$m_u = -\frac{1}{m_{\epsilon}} = -\frac{1}{12}$$

Az érintő egyenlete:

$$y - 8 = 12(x - 2)$$

$$y = 12x - 16$$

a normális egyenlete:

$$y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2)$$

$$813. \quad y - \sqrt{e^3} = \frac{1}{3} \sqrt{e^3} (x - 2,25) \quad (\text{érintő})$$

$$y - \sqrt{e^3} - 3 \cdot e^{-\frac{3}{2}} (x - 2,25) \quad (\text{normális})$$

$$814. \quad y - \frac{\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}} (x - \frac{1}{2}) \quad (\text{érintő})$$

$$y - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} (x - \frac{1}{2}) \quad (\text{normális})$$

$$815. \quad y - 6,08 = -50,1 (x - 2)$$

$$816. \quad y - e^4 = 4e^2 (x - e^2)$$

$$817. \quad y + 0,51 = 2,15 (x - 0,8)$$

$$818. \quad y = -x + 6$$

$$819. \quad y = -\frac{1}{2} (x - \pi)$$

$$820. \quad y = -3x + 2\sqrt{2}$$

$$821. \quad y - y_0 = \sqrt{\frac{2}{y_0} - 1} (x - x_0)$$

822. A megadott egyenes meredeksége $m = 3$, a görbe meredeksége $m(x) = f'(x) = 3x^2$.

Az egyenes párhuzamos a görbe érintőjével, ha

$$3x^2 = 3 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$\text{Ekkor} \quad y_1 = 3 \quad y_2 = 1$$

$$\text{és} \quad m = 3$$

tehát az érintők egyenlete $y = 3x$ és $y = 3x + 4$

823. $P_1(1, -\frac{\pi}{4})$

$$P_2(3, \frac{\pi}{4})$$

$$y + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

824. $P_1(-2, \frac{\sqrt{3}}{8})$

$$P_2(2, -\frac{\sqrt{3}}{8})$$

$$y - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{16}(x + 2)$$

$$y + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{16}(x - 2)$$

825. Azokban a pontokban, ahol az érintő meredeksége:

$$f'(x) = 12;$$

$$P_1(-2, -7) \quad \text{és} \quad P_2(2, 9)$$

az érintők egyenlete pedig:

$$y = 12x - 15 \quad \text{és} \quad y = 12x + 17$$

826. $f'(x) = \frac{y - 2x}{y - x}$

Ha az érintő párhuzamos az y tengellyel, akkor irányszöge $\alpha = 90^\circ$, tehát f' nincs értelmezve.

A megadott görbénél ez akkor teljesül, ha $x = 1$ vagy $x = -1$, vagyis a $P_1(1, 1)$ és $P_2(-1, -1)$ pontokban

$$827. \quad P_0(e, 1) \quad y = \frac{x}{e}$$

$$828. \quad \text{A } P_0(x_0, 3x_0^5) \text{ pontbeli érintő egyenes egyenlete}$$

$$y - 3x_0^5 = 15x_0^4(x - x_0)$$

Az x tengellyel való $A(x_1, 0)$ metszéspont meghatározása

$$0 - 3x_0^5 = 15x_0^4(x_1 - x_0)$$

$$x_1 = \frac{4}{5} x_0$$

A vetület hossza:

$$x_1 - x_0 = -\frac{1}{5} x_0$$

$$829. \quad 2f(x) f'(x) = 4p$$

a P_0 pontbeli érintő meredeksége:

$$f'(x_0) = \frac{2p}{y_0}$$

az érintő egyenlete:

$$y - y_0 = \frac{2p}{y_0} (x - x_0)$$

$$y y_0 = 2px - 2px_0 + y_0^2 \quad \text{de} \quad y_0^2 = 4px_0$$

tehát

$$y y_0 = 2px + 2px_0$$

$$830. \quad f'(x) = 6 \sin x \cos x - 8 \cos^3 x \sin x = 0$$

$$2 \sin x \cos x (3 - 4 \cos^2 x) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \quad \text{vagy} \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = k \frac{\pi}{2} \quad \text{vagy} \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

831. A

$P_1(0, 0)$ és $P_2(4, 0)$ pontokban.

832. A metszéspontok:

$P_1(2, 2)$ és $P_2(2, -2)$

$$P_1\text{-nél } m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = -1 \quad \alpha_1 = 135^\circ$$

$$m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = 0 \quad \alpha_2 = 0$$

Tehát a két érintő hajlásszöge 45°

$$P_2\text{-nél } m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = 1$$

$$m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = 0$$

tehát a két érintő hajlásszöge itt is 45°

833. A metszéspontok: $P_1(2\sqrt{2}, 2), P_2(-2\sqrt{2}, 2)$
 $P_3(2\sqrt{2}, -2) P_4(-2\sqrt{2}, -2)$

Az ellipszis érintőjének iránytangense:

$$-\frac{2x}{y},$$

a hiperboláé pedig:

$$\frac{x}{4y}$$

Ha x és y helyébe bármelyik metszéspont koordinátáit helyettesítjük, $m_1 m_2 = -1$ adódik, tehát a két görbe mind a négy metszéspontban merőlegesen metszi egymást.

834. A metszéspontok: $P_1(3, 4) P_2(4, 3)$
 $P_3(-3, -4) P_4(-4, -3)$

A hiperbola érintőjének iránytangense $m_1 = -\frac{y}{x}$

a kör érintőjének iránytangense $m_2 = -\frac{x}{y}$

Felhasználva, hogy

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

az érintők hajlásszögének tangense:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{7}{24} \quad (\text{mind a négy metszéspontban})$$

$$\gamma = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{7}{24}$$

$$835. \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2$$

$$836. \quad v(t_0) = \frac{4}{5} \quad a(t_0) = -\frac{6}{25}$$

$$837. \quad v(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad a(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$838. \quad v(t_0) = 0 \quad a(t_0) = \ln 9$$

$$839. \quad df = \frac{195}{4} dx$$

$$840. \quad df = 0$$

$$841. \quad df = -\frac{12}{5} dx$$

$$842. \quad df = \frac{2\sqrt{3}}{3e} dx$$

$$843. \quad df = \frac{-1}{3\sqrt{5}} du$$

$$844. \quad df = \frac{1}{13} dt$$

$$845. \quad df = 3(x_0 + h)^2 + 5 - (3x_0^2 + 5) = 6x_0 h + h \cdot h$$

$$A = 6x_0 \quad \xi(h) = h \quad \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

$$846. \quad df = (x_0 + h)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 =$$

$$df = 3x_0^2 h + (3x_0 h + h^2) h$$

$$A = 3x_0^2 \quad \xi(h) = 3x_0 h + h^2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (3x_0 h + h^2) = 0$$

$$847. \quad \Delta f = \frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} = \frac{-h}{x_0^2 + hx_0}$$

Itt már nem olvasható le közvetlenül, hogy mi a megváltozás fő része és elenyésző része. Felhasználjuk, hogy a Δf megváltozás fő része

$$df = f'(x_0) dx = f'(x_0) h$$

tehát

$$\Delta f = f'(x_0) h + [\Delta f - f'(x_0) h]$$

fő rész elenyésző rész

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{-h}{x_0^2 + hx_0} = \frac{-h}{x_0^2} + \frac{-h}{x_0^2 + hx_0} + \frac{h}{x_0^2} = \\ &= -\frac{h}{x_0^2} + \frac{-x_0^2 + x_0^2 + hx_0}{(x_0^2 + hx_0) x_0^2} h = -\frac{h}{x_0^2} + \frac{hx_0}{(x_0^2 + hx_0) x_0^2} h \end{aligned}$$

vagyis

$$\xi(h) = \frac{h}{(x_0^2 + hx_0) x_0}$$

és valóban

$$\lim_{h \rightarrow 0} \xi(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{(x_0^2 + hx_0) x_0} = 0$$

848. Megoldható a 847-es feladathoz hasonlóan.

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0} = \frac{h}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \\ &= \frac{h}{2\sqrt{x_0}} + \frac{2\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}) 2\sqrt{x_0}} h \end{aligned}$$

és

$$\lim_{h \rightarrow 0} \xi(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}) 2\sqrt{x_0}} = 0$$

$$849. \quad df = [2g(x)g'(x) + h'(x^2) \cdot 2x] dx$$

$$850. \quad df = [2g(x)g'(x)h(x^2) + 2xg^2(x)h'(x^2)] dx$$

$$851. \quad df = e^{h(x)} [g'(x) + g(x)h'(x)] dx$$

$$852. \quad df = [g'(x) \ln h(x) + g(x) \frac{h'(x)}{h(x)}] dx$$

$$853. \quad df = [h(x)^{g(x)}] [g'(x) \ln h(x) + g(x) \frac{h'(x)}{h(x)}] dx$$

$$854. \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + \Delta f \approx f'(x_0) + df = f(x_0) + f'(x_0)h$$

$$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$$

$$f(0,99) \approx f(1) + f'(1)(-0,01) = 1 - 0,03 = 0,97$$

$$855. \quad 0,9967$$

$$856. \quad 0,5151$$

$$857. \quad -0,4849$$

$$858. \quad 1,0043$$

$$859. \quad 0,9783$$

$$860. \quad 0,1$$

$$861. \quad 0,98$$

$$862. \quad a) a = 10 \text{ dm} \quad \Delta a = 1 \text{ cm} = 0,1 \text{ dm}$$

$$V = a^3 \text{ dm}^3 \quad \Delta V \approx dV = 3a^2 \Delta a = 300 \cdot 0,1 = 30$$

$$\Delta V \approx 30 \text{ dm}^3$$

$$b) \Delta V \approx dV = 3a^2 \Delta a \approx 10$$

$$\Delta a = \frac{10}{300} = \frac{1}{30}$$

$$\Delta a \approx \frac{1}{30} \text{ dm} = 0,33 \text{ cm}$$

863. 20 erg

864. a) 40π

b) 8π

865. $T = 2 \sqrt{\frac{1}{g}}$

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{8\pi^2}{T^2}$$

$400 T = 1135 \pm 0,5$

$T = 2,8375$

$T = 1,25 \cdot 10^{-3}$

$$\Delta g \approx dg = - \frac{16\pi^2}{T^3} dT$$

$$\frac{dg}{g} = \left(- \frac{16\pi^2}{T^3} : \frac{8\pi^2}{T^2} \right) dT = - \frac{2}{T} dT = - \frac{1}{1135}$$

$$\frac{100 dg}{g} = -0,09\%$$

866. $T = 706,5 \text{ cm}^2$

$\Delta T = 1,5 \text{ dm}^2$

$L = 2 \sqrt{\pi T}$

$\Delta L \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{T}} \Delta T = 0,0998 \approx 0,1 \text{ dm}$

867. $V = \frac{4 R^3 \pi}{3}$

$dV = 4 R^2 \pi dR$

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = 3 \frac{\Delta R}{R}$$

3%-kal nő a térfogat.

868. $\frac{ds}{s} = 2 \frac{dt}{t} \quad \left| \frac{dt}{t} \right| = 3\% \quad \text{tehát} \quad \left| \frac{\Delta s}{s} \right| \approx \left| \frac{ds}{s} \right| = 6\%$

869. $\sin(\beta - \alpha) : \sin(180^\circ - \beta) = 6 : 8$

$4(\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) = 3 \sin\beta$

$\cos\alpha - \sin\alpha \cotg\beta = \frac{3}{4}$

$\cotg\beta = \frac{1}{\sin\alpha} \left(\cos\alpha - \frac{3}{4} \right)$

$$\Delta \beta \approx d\beta = \frac{4 - 3 \cos \alpha}{13 - 6 \cos \alpha} d\alpha = 0,034^\circ$$

$$870. \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{100}{100 - 1} \cdot \frac{\Delta 1}{1} = \frac{100}{37,6} \cdot 0,3\%$$

871. Teljesül az, hogy $f(x) = \sin x$ folytonos $[0, \pi]$ -ben és differenciálható $(0, \pi)$ -ben, továbbá $\sin 0 = \sin \pi = 0$. Tehát a Rolle-tétel alapján létezik olyan $\xi \in (0, \pi)$, amelyre $f'(\xi) = \cos \xi = 0$ ($\xi = \frac{\pi}{2}$)

872. Hasonló a 871-es feladathoz, de itt két olyan ξ van, amelyre $\xi \in (0, 2\pi)$ és $f'(\xi) = \cos \xi = 0$.

$$\xi_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \xi_2 = \frac{3\pi}{2}$$

873. A folytonosság illetve differenciálhatóság nyilván teljesül és

$$\sin^2 \frac{0}{2} = \sin^2 \frac{2\pi}{2} = 0$$

$$f'(\xi) = \frac{1}{2} \sin \xi = 0 \quad \text{a} \quad (0, 2\pi)\text{-ben, ha } \xi = \pi$$

$$874. \quad \xi = 1$$

$$875. \quad \xi = 2$$

876. A függvény minden $x \in \mathbb{R}$ helyen folytonos és differenciálható, továbbá $f(-a) = f(a)$, ezért a Rolle-féle közéértéktétel tetszőleges $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ esetén alkalmazható a $[-a, a]$ intervallumon. A derivált zérushelye $\xi = 0$.

877. A függvény a $(-\infty, +\infty)$ -en szigorúan monoton nő, ezért nincs olyan $a \neq b$, amelyre $f(a) = f(b)$, így a Rolle-féle közéértéktétel nem alkalmazható. A deriválnak van zérushelye: $f'(0) = 0$.

878. Alkalmazható például a $[0, 1]$ intervallumon és a $[-1, 0]$ intervallumon.

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

79. A Rolle-féle középértéktétel nem alkalmazható. (l. a 877. feladat megoldását.)

$f(x) = e^x$ egyetlen $\xi \in \mathbb{R}$ -nél sem veszi fel a 0 értéket.

880. $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$ mindenütt differenciálható, tehát nyilvánvalóan kielégíti a Lagrange-féle középértéktétel feltételeit (folytonos $[1, 3]$ -ban és differenciálható $(1, 3)$ -ban)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{2} = 16$$

$f'(x) = 6x + 4$, tehát olyan értéket kell meghatároznunk, amelyre $6\xi + 4 = 16$

$$\xi = 2 \in (1, 3)$$

881. $\xi = 2\sqrt{3}$

882. $f(x) = \arcsin x$ folytonos $[0, 1]$ -ben és differenciálható $(0, 1)$ -ben, tehát a tétel alkalmazható

$$\xi = \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi} \in (0, 1)$$

883. $\xi = \frac{a+b}{2} \in (x_1, x_2)$

884. $\xi = \frac{19}{\ln 20} \in (1, 20)$

885. $\xi = x_0 + \ln(e-1)$

és mivel $0 < \ln(e-1) < 1$ tehát $\xi \in (x_0, x_0 + 1)$

886. $f(x) = \frac{1}{x}$ differenciálható minden $x \neq 0$ -ra, tehát a $[-4, -1]$ intervallumban kielégíti a Lagrange-féle középértéktétel feltételeit.

$$\xi = -2 \in (-4, -1)$$

887. A $[-4, 4]$ intervallumon nem alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel, mert

$x = 0 \in [-4, 4]$ -nél $f(x) = \frac{1}{x}$ nem folytonos.

888. A tétel nem alkalmazható, mert az $x = 0 \in [0, 1]$ helyen a függvény nem folytonos.

889. A tétel alkalmazható.

$$\xi = \frac{1 - x_0}{\ln \frac{1}{x_0}}$$

890. Mivel az $f(x) = \sin x$ függvény minden x -re differenciálható, tetszőleges $[a, b]$ intervallumon alkalmazható rá a Lagrange-éle közéértéktétel. Alkalmazzuk a $[0, x]$ intervallumon ($x > 0$)

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos \xi \quad (0 < \xi < x)$$

amiből:

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \quad (\text{mert bármely } \xi \text{ esetén } \cos \xi < 1)$$

891. a) Igazolás a $-1 < x < 0$ esetre.

$f(x) = \sqrt{1+x}$ -re teljesül, hogy folytonos az $[x, 0]$ -ban, és differenciálható $(x, 0)$ -ban tehát a Lagrange-tétel alapján létezik olyan ξ ($x < \xi < 0$) amelyre

$$\frac{\sqrt{1+0} - \sqrt{1+x}}{0 - x} = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}}$$

vagyis, mivel $\xi < 0$

$$\frac{1 - \sqrt{1+x}}{-x} > \frac{1}{2}$$

amiből, az egyenlőtlenségből $\sqrt{1+x}$ -et kifejezve:

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x \text{ adódik.}$$

b) Igazolás az $x > 0$ esetre

$f(x) = \sqrt{1+x}$ -re teljesül, hogy folytonos $[0, x]$ -ben és differenciálható $(0, x)$ -ben, tehát létezik olyan $0 < \xi < x$ amelyre

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}}$$

vagyis mivel most $\xi > 0$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$$

892. A megadott függvények minden x -re differenciálhatók, tehát nyilvánvalóan teljesül rájuk, hogy folytonosak az $[1, 4]$ zárt intervallumban és differenciálhatók az $(1, 4)$ nyílt intervallumban. Továbbá $g'(x) = 2x \neq 0$ ha $x \in (1, 4)$. Így a Cauchy-féle középérték-tétel feltételei teljesülnek. A tételben szereplő ξ érték:

$$\frac{14 - 5}{17 - 2} = \frac{3}{2\xi}$$

$$\xi = \frac{5}{2} \in (1, 4)$$

893. $\xi = \operatorname{arc th} \frac{\operatorname{sh} 2 - \operatorname{sh} 1}{\operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} 1} \approx \operatorname{arc th} 1,1$

894. $\xi = \frac{\pi}{4}$

895. $\left(\frac{0}{0}\right)$ típusu

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}}{2x - 1} = \frac{4}{35}$$

896. $\left(\frac{0}{0}\right)$ típusu; a határérték $2 \ln a$

897. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ típusu; a határérték 0

898. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ típusu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}}$$

ha $n = 1$ akkor ez a határérték $+\infty$, ha $n > 1$ akkor még mindig

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ típusu, tehát ismét alkalmazható a Bernoulli-L'Hospital

szabály:

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} \text{ és így tovább, } n\text{-szer alkal-}$$

mazva a tételt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

(vessük össze a Jegyzet II. 16.3 példájával)

899. $(0, \infty)$; Irjuk $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\lg 9x}$ alakba, amely már $\left(\frac{0}{0}\right)$ alak.

A Bernoulli-L' Hospital tétel alapján határértéke $\frac{1}{9}$.

900. $(0, \infty)$; a határérték 1.

901. $(\infty - \infty)$; közös nevezőre hozva $\left(\frac{0}{0}\right)$ alakra hozható; a határérték 0.

902. $\left(\frac{0}{0}\right)$; a határérték 1.

903. $(\infty - \infty)$; közös nevezőre való hozás után $\left(\frac{0}{0}\right)$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

I. módszer: a tétel gépies ismételt alkalmazásával (hosszadalmas)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \sin x \cos x}{2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x} \quad \text{a Bernoulli-L' Hospital szabály alkalmazása.}$$

összevonások és egyszerűsítések után:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{\sin^2 x + 2x \sin 2x + x^2 \cos 2x}$$

ez még mindig $\left(\frac{0}{0}\right)$ alak, tehát ismét alkalmazható a Bernoulli-L' Hospital szabály:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{3 \sin 2x + 6x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x}{12 \cos 2x - 16x \sin 2x - 4x^2 \cos 2x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

II. módszer: a fentiekben négyszer alkalmaztuk a Bernoulli-L' Hospital szabályt. Valójában a második alkalmazás után leolvasható a határérték.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{\sin^2 x + 2x \sin 2x + x^2 \cos 2x}$$

számlálóját és nevezőjét $\sin^2 x$ -szel osztva:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + 4 \frac{x}{\sin x} \cos x + \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cos 2x} = \frac{1}{3}$$

(figyelembe véve, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

III. módszer:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \cdot \frac{x + \sin x}{\sin x} \right)$$

a második tényezőről közvetlenül leolvasható, hogy kettőhöz tart, elegendő tehát csak az első tényező határértékét vizsgálni

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + 4x \cdot \cos x - x^2 \sin x} = \end{aligned}$$

számlálót is, nevezőt is $\sin x$ -szel osztva:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + 4 \frac{x}{\sin x} \cos x - x^2} = \frac{1}{6}$$

tehát

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

904. $(\infty - \infty)$; a határérték ∞ -hez tart

905. $(\infty - \infty)$; a határérték 0

906. $\left(\frac{0}{0}\right)$; a határérték 0

907. $\left(\frac{0}{0}\right)$; a határérték (-1)

908. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; a határérték 0

909. $\left(\frac{0}{0}\right)$; a határérték nem létezik
($+\infty$ ha x tart a $+0$ -hoz és $-\infty$ ha x tart a -0 -hoz)

910. $\left(\frac{0}{0}\right)$; a határérték 0

911. $\left(\frac{0}{0}\right)$; a határérték $\ln a - \ln b$

912. $\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)$; a határérték a

913. $(\infty - \infty)$; a határérték $\frac{1}{2}$

914. (∞^0)

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = A$$

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow +0} \ln \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} \sin x \ln \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin x}{x} \cos x \cdot \sin x\right) = 0$$

tehát

$$A = e^{\ln A} = e^0 = 1$$

915. (∞^0) ; határértéke 1

916. (∞^0) ; határértéke 1

917. (1^∞) ; határértéke 1

918. (1^∞) ; határértéke $\frac{1}{\sqrt{e}}$

919. $(\infty - \infty)$; határértéke $\frac{1}{2}$

920. (1^∞) ; határértéke $e^{-\frac{1}{6}}$

921. $\left(\frac{0}{0}\right)$; határértéke $-\frac{1}{8}$

922. $(\infty - \infty)$; a határérték $\frac{1}{2}$

923. Az eredeti alak $(\frac{\infty}{\infty})$ típusu. Alkalmazva a Bernoulli-L'Hospitali szabályt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}(x+a)}{\operatorname{ch}(x-a)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh}(x+a)}{\operatorname{sh}(x-a)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}(x+a)}{\operatorname{ch}(x-a)}$$

nem jutunk célhoz. Írjuk fel függvényeinket exponenciális alakban:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ch}(x+a)}{\operatorname{ch}(x-a)} &= \frac{e^{x+a} + e^{-x-a}}{e^{x-a} + e^{-x-a}} = \frac{e^x e^a + e^{-x} e^{-a}}{e^x e^{-a} + e^{-x} e^a} = \\ &= \frac{e^a + e^{-2x} e^{-a}}{e^{-a} + e^{-2x} e^a} \end{aligned}$$

vagyis, mivel $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}(x+a)}{\operatorname{ch}(x-a)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^a + e^{-2x} e^{-a}}{e^{-a} + e^{-2x} e^a} = e^{2a}$$

924. Ennél a példánál $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nem létezik, mert $\frac{f'(x)}{g'(x)} =$

$$= \frac{2x \sin x + \cos \frac{1}{x}}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$
 és $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ nem létezik; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ azon-

ban létezik és egyenlő 0-val, mert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \cdot x \right) \left(\sin \frac{1}{x} \right)$$

és

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \cdot x = 0$$

továbbá

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \text{ tehát a szorzat határértéke } 0.$$

925. $a = 2$ (helyi maximum)

926. $k = 1$ -nél helyi minimum
 $k = -1$ -nél helyi maximum

927. $\alpha(r) = 2 \arcsin \frac{1}{2r}$ Értelmezési tartománya $r \geq \frac{1}{2}$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{-1}{r \sqrt{4r^2 - 1}} < 0 \text{ a függvény minden } r \geq \frac{1}{2} \text{-re monoton fogyó.}$$

Geometria értelme: egységnyi hosszúságú húr csak olyan körbe lehet elhelyezni, amelyre $r \geq \frac{1}{2}$; α értéke akkor a legnagyobb, ha $r = \frac{1}{2}$. Ekkor $\alpha(r = \frac{1}{2}) = \pi$ ha a kör sugara növekszik, a $h = 1$ hosszúságú hurhoz tartozó középponti szög csökken.

928. $f(x) = 2 \ln|x| - 3 \ln(x+1)$

Értelmezési tartomány: $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2-x}{x(x+1)} = -\frac{x-2}{x(x+1)}$$

f monoton fogyó, ha $f' < 0$ vagyis $x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$; monoton növekvő, ha $f' > 0$ vagyis $x \in (0, 2)$

929. $f' = \frac{[x - (2 + \sqrt{6})][x - (2 - \sqrt{6})]}{x^2(x+1)^2}$

f monoton nő: $(-\infty, -1)$; $(-1, 2 - \sqrt{6})$; $(2 + \sqrt{6}, +\infty)$

f monoton fogy: $[2 - \sqrt{6}, 0)$; $(0, 2 + \sqrt{6}]$

930. f grafikonja alulról konvex:

$$(-1, 2 - \sqrt{6}); [2 + \sqrt{6}, +\infty)$$

f grafikonja alulról konkáv:

$$[2 - \sqrt{6}, 0); (0, 2 + \sqrt{6}]$$

931. $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén a függvény görbéje alulról konkáv

$|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén a függvény görbéje alulról konvex.

$$(x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{-nél és } x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{-nél inflexiós pont})$$

932. $f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ ($x \neq k\pi$) tehát $y = \ln|\sin x|$

görbéje az értelmezési tartományban mindenütt alulról konkáv.

933. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

1. értelmezési tartomány: $D = R = (-\infty, +\infty)$

Folytonos az egész értelmezési tartományban

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = (x+1)x(x-2)$$

Zérushelyek: $\left. \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{array} \right\} \text{ (egyszeres zérushelyek: előjelváltás)}$

2. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$

$$f'(x) = 0, \text{ ha } x_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \quad \text{vagy} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$$

vagyis

	$x \in (-\infty; \frac{1 - \sqrt{7}}{3})$	$x \in (\frac{1 - \sqrt{7}}{3}; \frac{1 + \sqrt{7}}{3})$	$x \in (\frac{1 + \sqrt{7}}{3}; +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	monoton nő	monoton fogy	monoton nő

$$y_1 = f(x_1) \approx 0,63$$

$$y_2 = f(x_2) \approx -2,11$$

a $P_1(-0,55; 0,63)$

pontban helyi maximum

a $P_2(1,22; -2,11)$

pontban helyi minimum

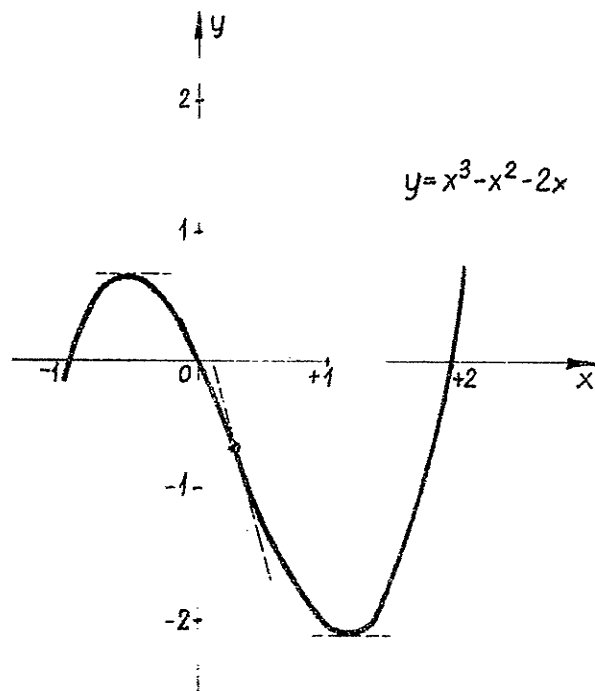
3. $f''(x) = 6x - 2 = 6(x - \frac{1}{3})$

	$x < \frac{1}{3}$	$x > \frac{1}{3}$
$f''(x)$	-	+
a görbe	alulról homorú	alulról domború

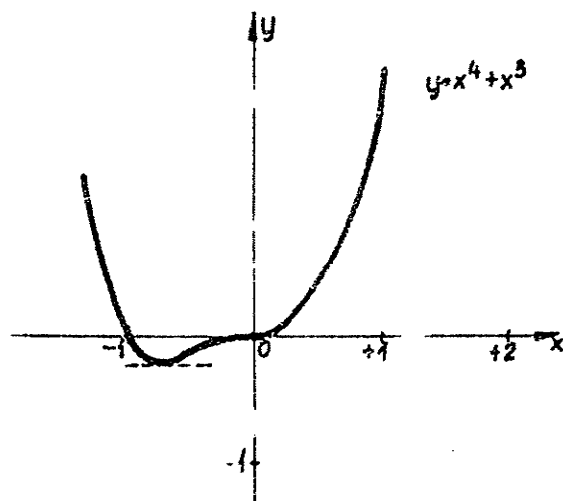
$$x_3 = \frac{1}{3} \text{ -nál}$$

$$y_3 = f(x_3) = -0,74$$

a $P_3(0,33; -0,74)$ pont inflexiós pont



933. ábra



934. ábra

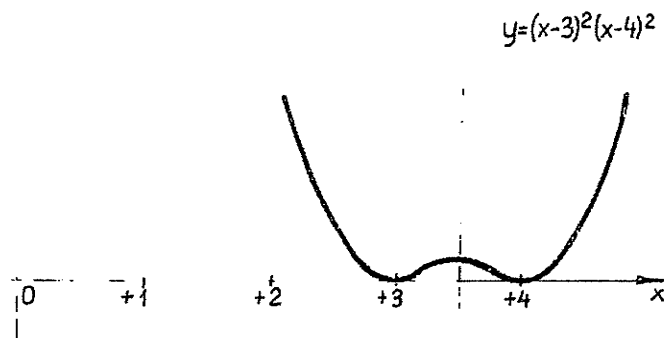
84. Zérushelyek: $x_1 = 0$ (háromszoros)
 $x_2 = -1$ (egyszeres)

Helyi minimum: $P_3(-\frac{3}{4}, -\frac{27}{256})$

Inflexiós pontok: $P_1(0, 0)$
 $P_4(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16})$

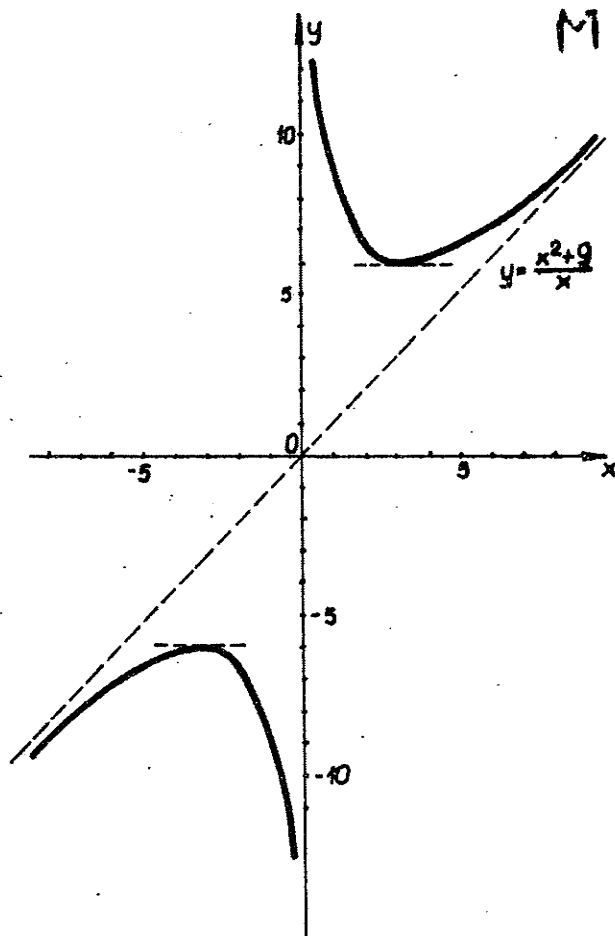
935. Zérushelyek: $x_1 = 4$ (kétszeres)
 $x_2 = 3$ (kétszeres)
Helyi minimum: $P_1(3, 0)$ és $P_2(4, 0)$
Helyi maximum: $P_3(3, 5; 0, 06)$
Inflexió: $P_4(3, 21; 0, 027)$ és $P_5(3, 79; 0, 027)$

↑ y
↑ x



935. ábra

936. Értelmezési tartomány: $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Páratlan függvény, zérushelye nincs
 $P_1(-3, -6)$ helyi minimum
 $P_2(3, 6)$ helyi maximum
Inflexiós pontja nincs, az egész értelmezési tartományban alulról domború. Aszimptota egyenlete: $y = x$



936. ábra

937. Értelmezési tartomány $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

$$\overline{f(x)} = \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

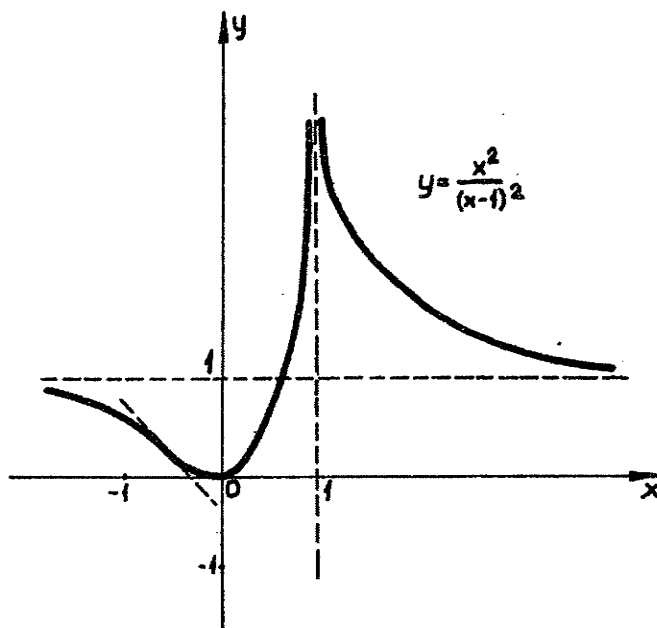
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 - 0$$

Zérushely: $P_1(0, 0)$

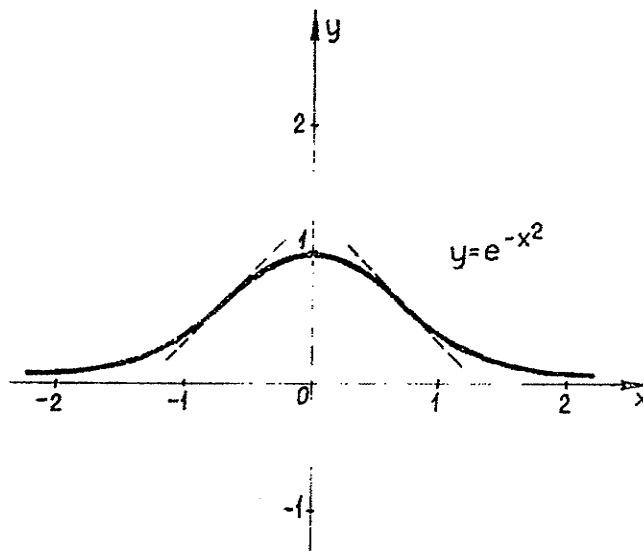
Helyi minimum: $P_1(0, 0)$

Inflexiós pont: $P_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{9})$



937. ábra

938. Értelmezési tartomány: $x \neq -1$
 Zérushely: $x = 0$
 Lokális maximum: $P_2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 2\sqrt[3]{4} \right)$
 Inflexiós pont: $P_2 \left(\sqrt[3]{2}; 2\sqrt[3]{2} \right)$
939. Értelmezési tartomány: $(-\infty, +\infty)$ Páros függvény.
 Zérushelye nincs.
 Lokális maximum: $P_1 (0, 1)$
 Inflexió: $P_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}} \right) \quad P_3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$



939. ábra

940. $f(x) = x^2 e^{-x}$ Értelmezési tartomány: $(-\infty, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$$

Zérushely: $P_1(0, 0)$ (előjelváltás nincs)

$$f'(x) = -e^{-x} x(x-2) \quad f'(x) = 0 \quad \text{ha } x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

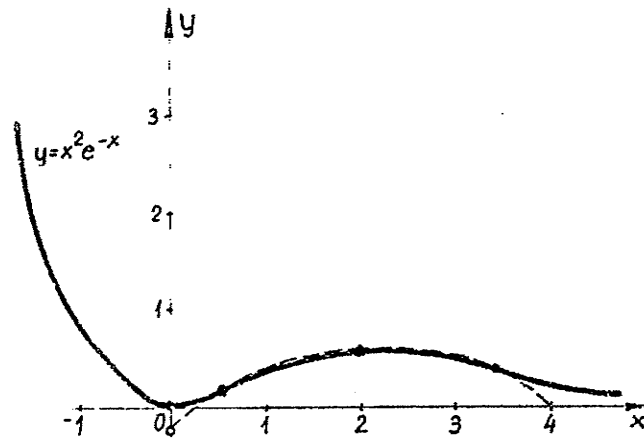
$$y_1 = 0 \quad y_2 = 4e^{-2} \approx 0,54$$

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \quad f''(x) = 0 \quad \text{ha } x_3 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41 \quad y_3 \approx 0,38$$

$$x_4 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,59 \quad y_4 \approx 0,19$$

$f''(0) > 0 \quad P_1$ lokális minimum

$f''(2) < 0 \quad P_2$ lokális maximum



940. ábra

941. Értelmezési tartomány: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 Páratlan függvény, ezért elegendő $x > 0$ -ra vizsgálni (görbéje az origóra szimmetrikus).
 Függvényvizsgálat $x > 0$ esetén:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = -0 \end{aligned}$$

Zérushely: $x_1 = 1$

$$f'(x) = 1 - \ln x$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{ha} \quad x_2 = \frac{1}{e}$$

$$y_2 = y(x_2) = -\frac{1}{e}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

a görbe alulról domború

$$f''(x_2) > 0$$

$P_2\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ helyi minimum

$x < 0$ esetén (a szimmetria alapján):

Zérushely: $x_3 = -1$

Szélsőérték: $P_4(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ (helyi maximum)

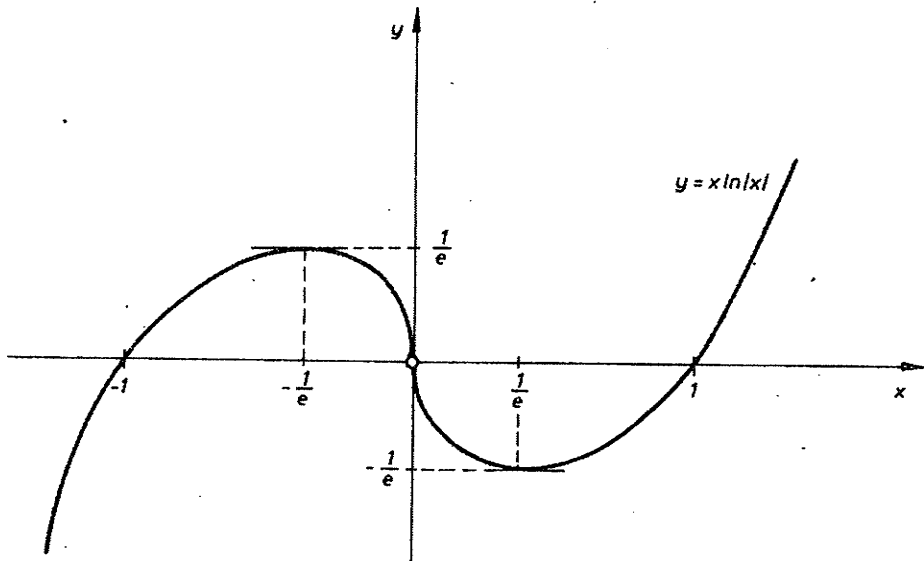
a görbe minden $x < 0$ -ra alulról homorú.

Megjegyzés: $x = 0$ -nál

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

a függvénynek megszüntethető szakadása van.

A $(0, 0)$ ponttal kiegészített függvény grafikonjának az y tengely inflexió érintője.



941. ábra

942. Értelmezési tartomány: $x \in (-\infty, +\infty)$

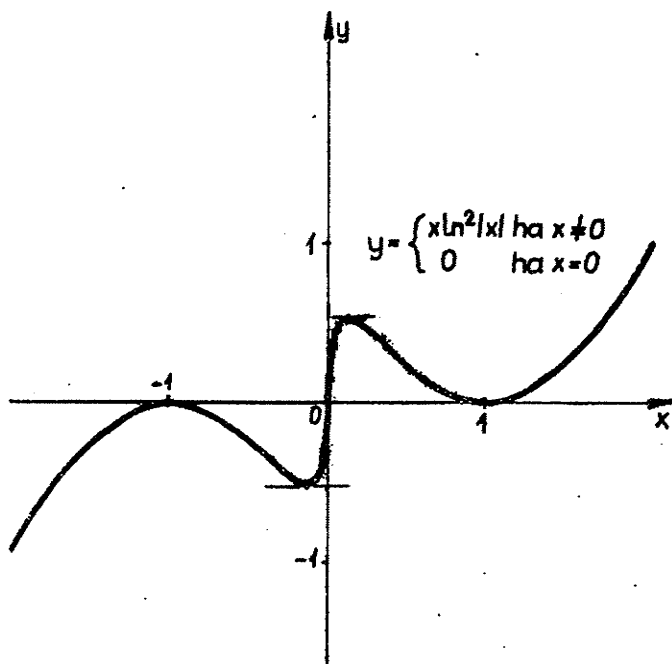
Páratlan függvény

Zérushelyek: $x_1 = -1$ $x_2 = 1$

Lokális minimum: $P_2(1, 0)$ és $P_3(-\frac{1}{e}, -\frac{4}{e^2})$

Lokális maximum: $P_1(-1, 0)$ és $P_4(\frac{1}{e}, \frac{4}{e^2})$

Inflexió pont: $P_5(-\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$ és $P_6(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$



942. ábra

943. Értelmezési tartomány: $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

(a Bernoulli-L' Hospital szabály alapján)

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{\ln x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{\ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\ln x} = -0$$

Zérushelye nincs.

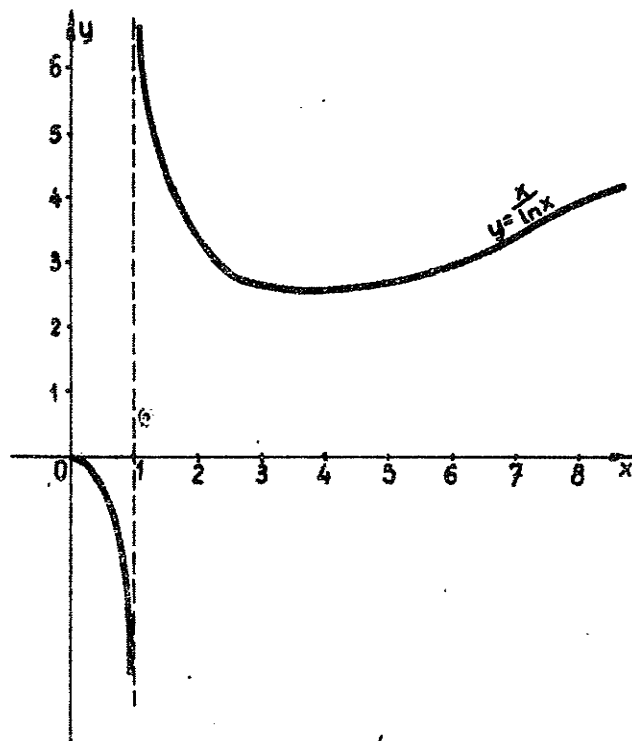
$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \quad f'(x) = 0 \quad \text{ha } x_1 = e \quad f(x_1) = e$$

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \quad f''(x) = 0 \quad \text{ha } x_2 = e^2 \quad f(x_2) = \frac{e^2}{2}$$

$f''(x_1) = \frac{1}{e} > 0$ tehát a $P_1(e, e)$ pontban a függvénynek helyi minimuma van.

	$x \in (0, 1)$	$x \in (1, e^2)$	$x \in (e^2, +\infty)$
f''	-	+	-
agörbe	alulról homorú	alulról domború	alulról homorú

$P_2(e^2, \frac{e^2}{2})$ inflexiós pont.



943. ábra

944. Értelmezési tartomány: $|x| > 1$ Páros függvény (y tengelyre szimmetrikus)

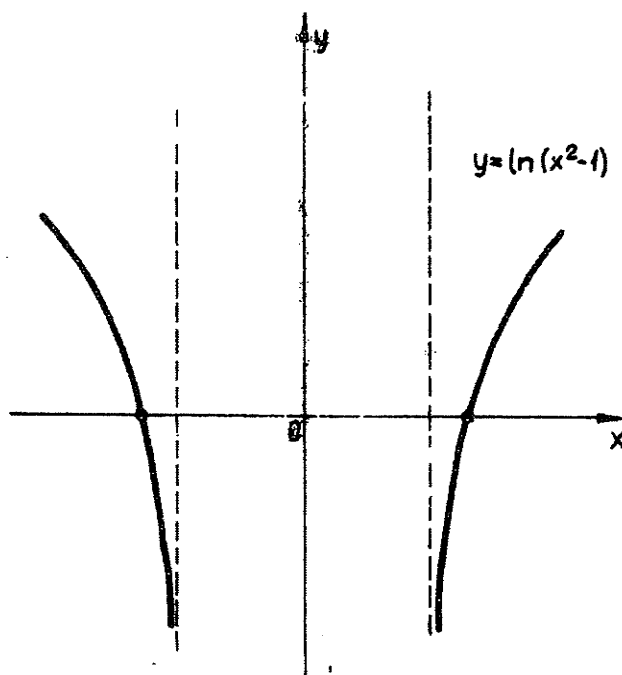
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = -\infty$$

$$\text{Zérushelyek: } x_1 = +\sqrt{2} \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \neq 0 \text{ az értelmezési tartományban}$$

	$x < -1$	$x > 1$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	monoton csökkenő	monoton növekedő

$$f''(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1} < 0 \text{ az értelmezési tartományban, tehát a függvény görbéje mindenütt alulról ígmörv.}$$



944. ábra

945. Értelmezési tartomány: $x \neq k\pi$
 A függvény periodikus. Legkisebb periódusa π , tehát elég a $(0, \pi)$ intervallumon vizsgálni.

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi - 0} f(x) = -\infty$$

$$\text{Zérushely: } x_1 = \frac{\pi}{2}$$

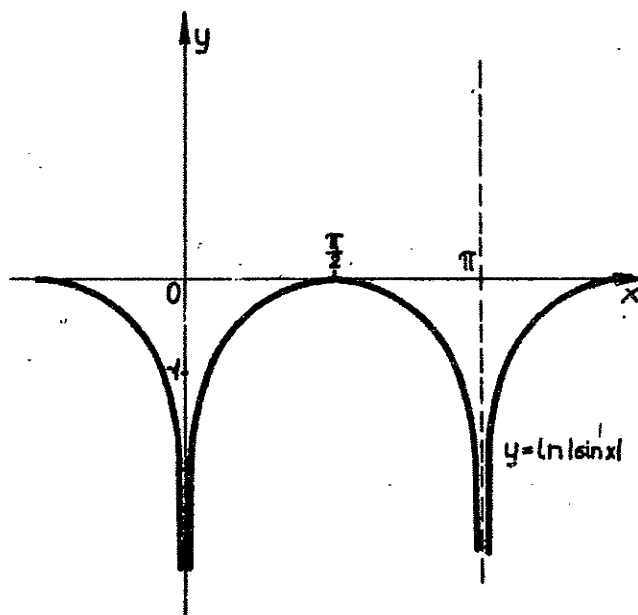
$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{ha} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$P_1 \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \quad \text{lokális maximum}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$$

a teljes értelmezési tartományban,
tehát a görbéje mindenütt alulról
homorú



945. ábra

946. Értelmezési tartomány: $(-\infty, +\infty)$

Periodikus függvény.

Legkisebb periódusa: 2π , ezért elegendő a $[0, 2\pi]$ intervallumon vizsgálni.

$$\text{Zérushelyek: } \sin x + \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x (1 + \cos x) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \pi \quad x_3 = 2\pi$$

$$f'(x) = \cos x + \cos 2x \quad f'(x) = 0 \quad \text{ha} \quad \cos x + \cos 2x = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

vagy

$$\cos x = -1$$

tehát

$$x_4 = \frac{\pi}{3}$$

$$x_5 = \frac{5\pi}{3}$$

$$x = \pi = x_2$$

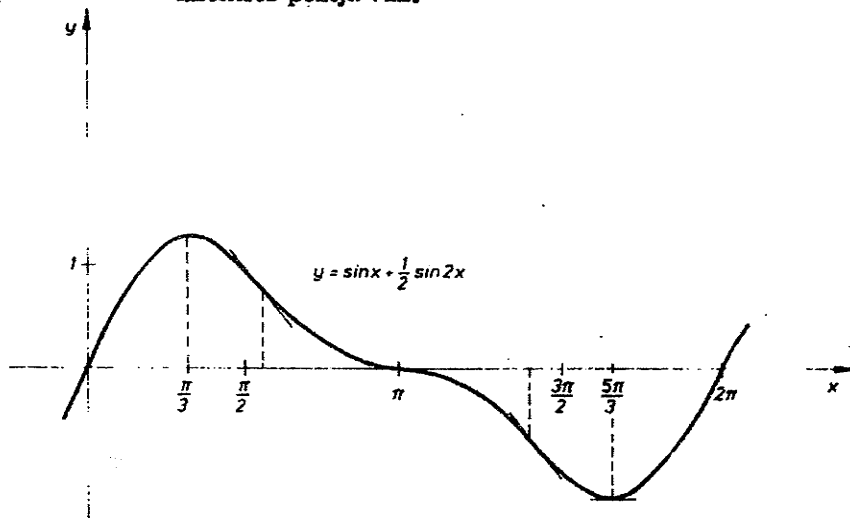
$$f'(x) = -\sin x - 2 \sin 2x$$

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$ ezért a $P_4\left(\frac{\pi}{3}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ pontban helyi maximum van

$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) > 0$ ezért a $P_5\left(\frac{5\pi}{3}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ pontban helyi minimum van.

$f''(\pi) = 0$ tehát a második derivált értéke alapján nem tudjuk eldönteni, hogy $x = \pi$ -nél szélsőérték van, vagy inflexiós pont.

$f''(x) = 0$, ha $x = k\pi$ vagy $\cos x = -\frac{1}{4}$. Mivel $x_2 = \pi$; $x_6 = 1,82$; $x_7 = 4,46$ értékeknél $f''(x)$ előjelet vált, ezért itt a görbének inflexiós pontja van.



946. ábra

947. Értelmezési tartomány: $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (2π szerint periodikus).

Zérushelyek: $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$

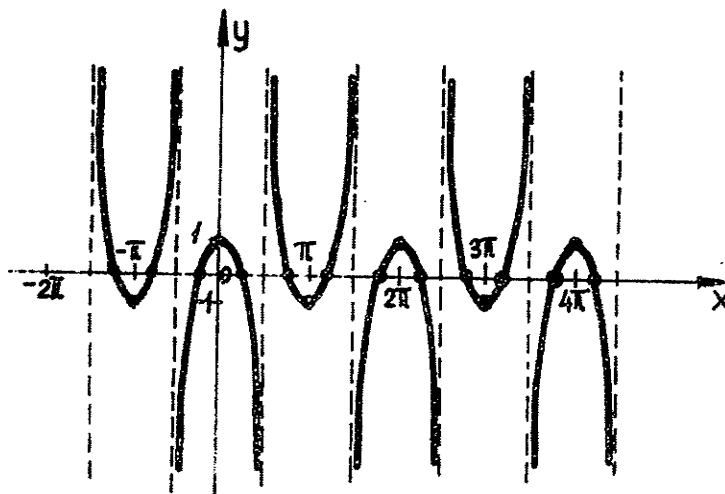
Helyi maximum: $x = 2k\pi$

Helyi minimum: $x = (2k+1)\pi$

Alulról homoru: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Alulról domboru: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$$y = \frac{\cos 2x}{\cos x}$$



947. ábra

948. $\frac{2}{3} = 1 - x = 1 - (-x)$ tehát x -hez és $(-x)$ -hez ugyanazon y értékek tartoznak: a görbe szimmetrikus az y tengelyre.

Hasonlóan $\frac{2}{3} = 1 - y = 1 - (-y)$ miatt a görbe szimmetrikus az x tengelyre is.

Elegendő tehát csak az első negyedben vizsgálni.

Vizsgálat az első negyedben ($x \geq 0$ $y \geq 0$)

A görbe egyenletében x -et és y -t felcserélve, az változatlan marad, tehát a görbe szimmetrikus az $y = x$ egyenesre.

Értelmezési tartomány: $0 \leq x \leq 1$

Értékkészlet $0 \leq y \leq 1$

Zérushely: $x = 1$

$f'(x)$ létezik, ha $0 < x < 1$ és itt

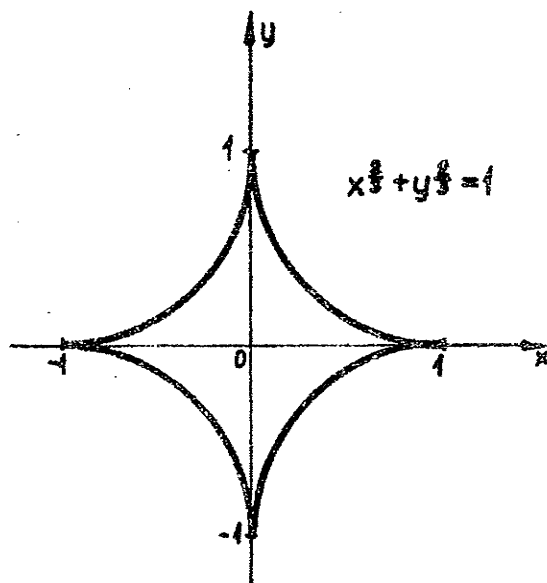
$f'(x) = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} < 0$ tehát a függvény monoton csökkenő.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = -\infty$$

$$f''(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{f'(x)x - y}{x^2} \quad (0 < x < 1)$$

Mivel $x > 0$ $y > 0$ és $f'(x) < 0$
tehát

$f''(x) > 0$ a görbe alulról domború



948. Ábra

949. a) 1. módszer: $f(x) = \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}}$

a görbe egyenlete két függvénnyel adható meg.

$$f(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{x}} \quad \text{és} \quad f(x) = +\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

Vizsgáljuk $f(x) = +\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ -et

Értelmezési tartomány: $(0, 1]$

Értékkészlet: $[0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$$

Zérushely: $x_1 = 1$

$$f'(x) \text{ létezik, ha } 0 < x < 1 \quad \text{és} \quad f'(x) = -\frac{1}{2x} \sqrt{\frac{x}{1-x}} < 0$$

tehát f monoton csökkenő

$$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = -\infty$$

$$f''(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x^5(1-x)^3}} (3-4x)$$

	$x < \frac{3}{4}$	$x > \frac{3}{4}$
$f''(x)$	+	-
agörbe	alulról domboru	alulról homoru

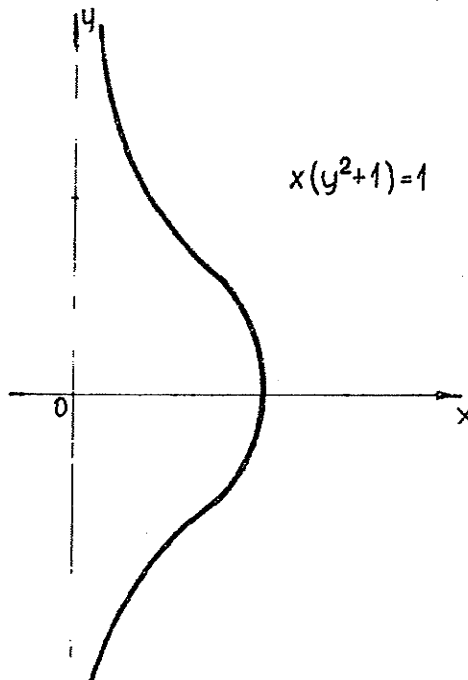
A $P_2\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ pont inflexiós pont.

A görbének az $y = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ egyenletű ága az eddig vizsgált görbe-ágnak az x -tengelyre való tükröképe.

b) második módszer: Ha az egyenletben x és y szerepét felcseréljük, akkor ezáltal a görbét az $y = x$ egyenesre tükrözzük. A tükrözött görbe egyenlete:

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

Vizsgáljuk és vázoljuk ezt a görbét, majd tükrözzük az $y = x$ egyenesre.



949. ábra

950. Használjuk fel, hogy $x = 1$ -nél kétszeres zérushely, $x = -1$ -nél egyszeres zérushely van. A gyöktényezős alaknál fellépő konstans értékét abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy a görbe áthalad a $P_1(0, 2)$ ponton.

$$y = 2(x^3 - x^2 - x + 1) \quad P_0(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$$

951. $T(x) = x^2 + (a - x)^2$

$$\frac{dT}{dx} = 4x - 2a \quad \frac{dT}{dx} = 0 \quad \text{ha} \quad x = \frac{a}{2}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 4 > 0 \quad x = \frac{a}{2} \text{-nél a } T(x) \text{-nek minimuma van.}$$

952. $P_1(2, 4)$ és $P_2(2, -4)$

953. $d^2(x) = (40 - 4x)^2 + (30 - 2x)^2$

$$x_m = 11 \text{ sec} \quad d(x_m) = \sqrt{80} \approx 8,9 \text{ m}$$

954. $a = b = R \sqrt{2}$

955. $\frac{dH}{dk} = -2 \sum_{i=1}^4 x_i (y_i - kx_i) = -2 \sum_{i=1}^4 x_i y_i + 2k \sum_{i=1}^4 x_i^2$

$$\frac{dH}{dk} = 0 \quad \text{ha } k = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i y_i}{\sum_{i=1}^4 x_i^2} = \frac{776,5}{241,5} = \underline{\underline{3,21}}$$

$$\frac{d^2 H}{dk^2} = 2 \sum_{i=1}^4 x_i^2 > 0 \text{ tehát valóban minimum.}$$

956. $\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$

957. $T(\alpha) = \frac{1}{2} R^2 \sin 4\alpha + R^2 \sin 2\alpha$

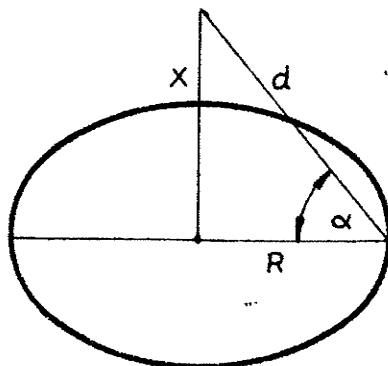
$$\alpha = 30^\circ$$

958. Ha a beesési szög $\frac{\pi}{2} - \alpha$, akkor

$$J(\alpha) = k \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{R^2} \quad (k = \text{konstans})$$

$$J'(\alpha) = \frac{k}{R^2} (\cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha) = 0 \quad \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 0 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha \approx 35^\circ$$



958. ábra

$$x = R \operatorname{tg} \alpha = \frac{R\sqrt{2}}{2} \quad J_{\max} = \frac{k}{d^2 \sqrt{3}} = \frac{2k \sqrt{3}}{9R^2}$$

959. Ha a tölcseér alapkörének sugara x , akkor térfogata:

$$V(x) = \frac{\pi}{3} x^2 \sqrt{R^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq R)$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} \left(2x \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) =$$

$$= \frac{-\pi x \left(x + \sqrt{\frac{2}{3}} R \right) \left(x - \sqrt{\frac{2}{3}} R \right)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$V'(x) = 0 \quad \text{ha} \quad x = R \sqrt{\frac{2}{3}}$$

($x = -\sqrt{\frac{2}{3}} R$ geometriailag képtelenség, $x = 0$ -nál $V(0) = 0$ itt a térfogatnak minimuma van.)

	$x < R \sqrt{\frac{2}{3}}$	$x > R \sqrt{\frac{2}{3}}$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	monoton nő	monoton fogy

vagyis $x = R \sqrt{\frac{2}{3}}$ -nél valóban maximuma van a függvénynek.

Jelöljük α -val a körlapból kivágott körcikk nyílásszögét. Ekkor

$$\alpha : 2\pi = 2\pi R \sqrt{\frac{2}{3}} : 2R\pi$$

$$\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \alpha^\circ \approx 294^\circ$$

$$960. \quad u(\alpha) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha + \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2 \quad \alpha \approx 52^\circ$$

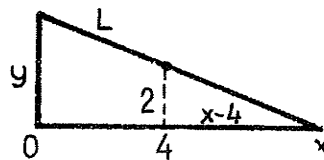
961.

Jelöljük ℓ -lel a keresett hosszúságot.

Legyen továbbá $L(x)$ az egy adott helyzethez tartozó, a toronyba még éppen becsuszatható gerenda-hossz. Mivel a toronyba bevihető gerendának minden helyzetből továbbmozdithatónak kell lennie,

$$\ell \leq L(x)\text{-nek kell teljesülni minden } x\text{-re:}$$

$$\ell = \min L(x)$$



961. ábra

$$L^2 = x^2 + y^2 \quad \text{és} \quad \frac{y}{2} = \frac{x}{x-4} \quad (x > 4)$$

$$L^2(x) = x^2 + \left(\frac{2x}{x-4}\right)^2 \quad L'(x) = 0 \quad \text{ha } x = 4 + \sqrt[3]{16}$$

$$\ell = L(x) \approx 9,03$$

min

962.

$$S(t) = t + k = t + \frac{tf}{t-f}$$

$$S'(t) = 1 - \frac{f^2}{(t-f)^2}$$

$$S'(t) = 0 \quad \text{ha} \quad t(t-2f) = 0$$

$$t_1 = 0 \quad \text{nem lehetséges}$$

$$t_2 = 2f$$

$$S''(2f) = \frac{2}{f} > 0 \quad \text{vagyis } t_1 = 2f\text{-nél } S(t)\text{-nek minimuma van. } k_1 = 2f$$

$$S(2f) = t_1 + k_1 = 4f$$

Ez S legnagyobb alsó korlátja: a kép és tárgy távolság összege nem kisebb a fókusz távolság négyszeresénél. Felső korlát nem adható meg, mert $t \rightarrow f$ esetén $S(t) \rightarrow +\infty$

963.

	$x_0 = 0$
$u(x) = x^2$	0
$f'(x) = 2x$	0
$f''(x) = 2$	2

A simulókör sugara:

$$r = \frac{(1 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y_0''|} = \frac{(1 + 0)^{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$u = x_0 - y_0' \frac{1 + y_0'^2}{y_0''} = 0 - 0 \frac{1 + 0}{2} = 0$$

$$v = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''} = 0 \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

A simulókör középpontja: $C(0, \frac{1}{2})$

A simulókör egyenlete:

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$964. \quad r = \frac{5\sqrt{5}}{2} \quad C(-4, \frac{7}{2})$$

$$(x + 4)^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{125}{4}$$

$$965. \quad r = +2 \quad C(2, 0)$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

$$966. \quad r = \sqrt{2} \quad C(2, 2)$$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

$$967. \quad r = \frac{5\sqrt{5}}{6} \quad C(\frac{8}{3}, \frac{11}{6})$$

$$(x - \frac{8}{3})^2 + (y - \frac{11}{6})^2 = \frac{125}{36}$$

$$968. \quad k = 0 \quad r = \frac{1}{k} = \infty \quad \text{inflexi6 van}$$

$$969. \quad r = +1 \quad C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$970. \quad r = + \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad C\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right)$$

$$\left[x - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\right)\right]^2 + (y + \sqrt{2})^2 = \frac{27}{4}$$

$$971. \quad r = 1 \quad C\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$$

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

$$972. \quad r = +1 \quad C(0, 0)$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$973. \quad r = + \frac{1}{2} \quad C\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$974. \quad r = + \frac{5\sqrt{5}}{4} \quad C\left(\frac{9}{4}; \frac{\pi - 10}{4}\right)$$

$$\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{\pi - 10}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$$

$$975. \quad r = 2\sqrt{2} \quad C(-2; 3)$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$$

$$976. \quad r = +2\sqrt{2} \quad C(3, -2)$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$$

$$977. \quad r = \frac{1}{2} \quad C(1, \frac{1}{2})$$

$$(x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$978. \quad r = 1 \quad C(0, 2)$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$979. \quad r = \frac{1}{2} \quad C(0, \frac{1}{2})$$

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

980-985. feladatokat megoldhatjuk

ugy, hogy kiszámítjuk a görbület értékét egy tetszőleges x helyen, vagyis előállítjuk a $k = k(x)$ függvényt és megkeressük ennek a függvénynek a szélsőértékét (szélsőértékeit) a szokásos módon.

$$980. \quad x_0 = 2\text{-nél maximum, } k_{\max} = 2$$

$$981. \quad y = ax^2 + bx + c \quad y' = 2ax + b \quad y'' = 2a$$

$$k(x) = \frac{2a}{1 + (2ax + b)^2} = 2a (4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$k'(x) = -3a (4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 1)^{-\frac{5}{2}} (8a^2x + 4ab) =$$

$$= -24a^3 (4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 1)^{-\frac{5}{2}} (x + \frac{b}{2a})$$

$k'(x)$ előjelet vált $x_0 = -\frac{b}{2a}$ -nál (pozitívból negatívba), tehát

$$x_0 = -\frac{b}{2a}\text{-nál a görbületnek maximuma van } k_{\max} = 2$$

$$982. \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{maximum} \quad k(x_1) = +1$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \quad \text{maximum} \quad k(x_2) = 1$$

$$983. \quad x = -\frac{\ln 2}{2} \approx -0,35 \quad \text{maximum} \quad k_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$984. \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{maximum} \quad k_{\min} = +\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$985. \quad x_1 = \operatorname{ar sh} 1 \approx 0,88 \quad \text{minimum} \quad k_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$x_2 = \operatorname{ar sh} (-1) \approx -0,88 \quad \text{maximum} \quad k_{\max} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$986. \quad y = \frac{b}{a} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$k(x) = +a^4 b (a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$k'(x) = +3 a^4 b x (a^2 - b^2) (a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Első eset $a > b$

	$x < 0$	$x > 0$
$k'(x)$	-	+
$k(x)$	monoton fogy	monoton nő

tehát $x = 0$ -nál a görbületnek minimuma; az értelmezési tartomány határain $x = a$ -nál és $x = -a$ -nál pedig a görbületnek maximuma van.

$$k(x=0) = k_{\max} = +\frac{b}{a^2}$$

$$k(x=-a) = k(x=a) = k_{\min} = +\frac{a}{b^2}$$

Második eset: $a < b$

Ekkor a $k'(x)$ -ben fellépő $(a^2 - b^2)$ tényező miatt $k'(x) > 0$ esetén lesz negatív és $x < 0$ esetén

pozitív, vagyis $x = 0$ nál a görbületnek maximuma,
 $x = -a$ és $x = a$ értékeknél pedig a görbületnek mi-
 nimuma van.

987. $r(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{2} \quad x = \arccos \frac{2}{3}$

$x_1 = 0,84 \quad y_1 = \ln 3 - \ln 2 = 0,41$

$x_2 = -0,84 \quad y_2 = 0,4$

988.	$f(x) = \sin x$	$g(x) = x - \frac{x^3}{6}$	$f(0) = 0 = g(0)$
	$f'(x) = \cos x$	$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$	$f'(0) = 1 = g'(0)$
	$f''(x) = -\sin x$	$g''(x) = -x$	$f''(0) = 0 = g''(0)$
	$f'''(x) = -\cos x$	$g'''(x) = -1$	$f'''(0) = -1 = g'''(0)$
	$f^{(IV)}(x) = \sin x$	$g^{(IV)}(x) = 0$	$f^{(IV)}(0) = 0 = g^{(IV)}(0)$
	$f^{(V)}(x) = \cos x$	$g^{(V)}(x) = 0$	$f^{(V)}(0) = 1 \neq g^{(V)}(0) = 0$

Pontosan negyedrendben.

989. a) mindkét görbe áthalad a $P_0(1, 1)$ ponton. az érintkezés legalább
nulladrendű.
 b) Az első egyenlet által definiált f függvényt az egyenletbe he-
 lyettesítve és az így nyert azonosságot deriválva azt kapjuk,
 hogy

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{f'(x)}{2f(x)} = 0, \text{ amiből}$$

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{x} \cdot f'(x) = 0$$

Hasonlóan a második egyenlet által definiált g függvény deri-
 váltjára:

$$2x + 2g(x) \cdot g'(x) = 6 - 6g'(x) = 0, \text{ amiből}$$

$$(x - 3) + [g(x) - 3] g'(x) = 0$$

Figyelembe véve, hogy $f(1) = g(1) = 1$, azt kapjuk, hogy $f'(1) = g'(1) = -1$, az érintkezés legalább elsőrendű.

c) Deriválás és egyszerűsítés után (figyelembe véve, hogy

$$\sqrt{x} + \sqrt{f(x)} = 0 :$$

$$f'(x) + x\sqrt{f(x)} f''(x) = 0$$

$$1 + g'^2(x) + [g(x) - 3]g''(x) = 0$$

ahonnan, felhasználva, hogy

$f(1) = g(1) = 1$ és $f'(1) = g'(1) = -1$, azt kapjuk, hogy $f''(1) = g''(1) = -1$, vagyis az érintkezés legalább másodrendű.

$$d) [2\sqrt{f(x)} + 2f(x) + x f'(x)] f''(x) + 2x f(x) f'''(x) = 0$$

$$3 g'(x) g''(x) + [g(x) - 3] g'''(x) = 0$$

amiből $f'''(1) = g'''(1) = -\frac{3}{2}$ adódik: az érintkezés legalább harmadrendű.

e) A d) pontban felírt azonosságokat deriválva és $f(1)$, $g(1)$, $\dots$, $\dots f'''(1)$, $g'''(1)$ értékeit behelyettesítve:

$$f^{(IV)}(1) = \frac{17}{2} \neq g^{(IV)}(1) = \frac{9}{2}$$

Az érintkezés pontosan harmadrendű.

990. Létezik pontosan egy legfeljebb negyedfoku polinom, amely a feladat feltételeit kielégíti (Jegyzet 18.2. tétel). Ennek együtthatói a "Taylor formula" alapján:

$$C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

ahol a mi példánkban $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
 $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$f^{(k)}(x)$	$x_0 = \frac{\pi}{4}$	C_k
$\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$C_1 = \frac{1}{1! \sqrt{2}}$
$-\sin x$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$C_2 = \frac{-1}{2! \sqrt{2}}$
$-\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$C_3 = \frac{-1}{3! \sqrt{2}}$
$\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$C_4 = \frac{1}{4! \sqrt{2}}$

a keresett polinom:

$$P_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} \right]$$

991. $P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3$

992. $P_4(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$

993. $P_4(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4$

994. $P_5(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

995. $P_{2n}(x) = \operatorname{sh} a \left| 1 + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^4}{4!} + \dots + \frac{(x-a)^{2n}}{(2n)!} \right| +$
 $+ \operatorname{ch} a \left| x - a + \frac{(x-a)^3}{3!} + \frac{(x-a)^5}{5!} + \dots + \frac{(x-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} \right|$

996. másod rendben; $P(x) = x + \frac{x^2}{2}$

997. másod rendben; $P(x) = x$

998. harmad rendben; $P(x) = x^2$

999. harmad rendben; $P(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$

1000. $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$

$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

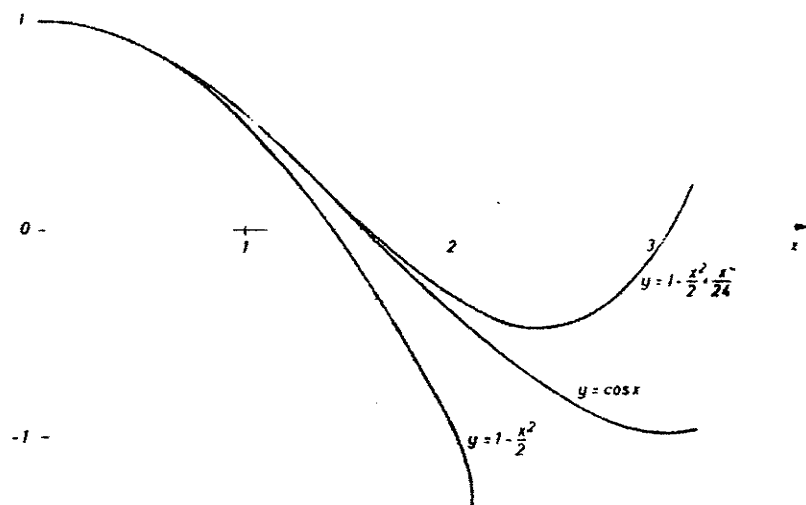
1001. $T_1(x) = x$

$T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$

1002. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}$ $(0 \dots \xi \dots x)$

1003. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{(\sin \xi) x^6}{6!}$ $(0 \dots \xi \dots x)$

y



1000. ábra

Megjegyezzük, hogy mivel $T_5(x)$ az $y = \sin x$ görbét hatodrendben érinti, a maradéktagot írhatjuk

$$-\frac{(\cos \xi) x^7}{7!} \quad \text{alakban is, ahol} \quad (0 \dots \xi \dots x)$$

$$1004. \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

$$+ (-1)^n \frac{(\sin \xi) x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

$$+ (-1)^n \frac{(\cos \xi) x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(0 \dots \xi \dots x) \quad \text{és} \quad (0 \dots \xi \dots x)$$

$$1005. \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{(\sin \xi) x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{(\cos \xi) x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$(0 \dots \xi \dots x) \quad \text{és} \quad (0 \dots \xi \dots x)$$

$$1006. \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{(1+\xi)^6 \cdot 6}$$

$$(0 \dots \xi \dots x)$$

1007. Az $x_0 = 1$ körüli elsőrendű Taylor polinom a Lagrange-féle maradéktaggal

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + \frac{6\xi}{2!} (x-1)^2 \quad (0,99 < \xi < 1)$$

$$x_1 = 0,99\text{-nél}$$

$$0,99^3 \approx 1 - 3 \cdot 0,01 = 0,97$$

Mivel az elhagyott maradéktag pozitív, a számított közelítő érték a valódi értéknél kisebb.

A hiba abszolút értéke:

$$|H_1| = 3 \cdot 10^{-4} < 3 \cdot 10^{-4}$$

tehát

$$0,9700 < 0,99^3 < 0,9703$$

vagyis a $0,99^3 = 0,970$ eredmény 3 tizedesre pontos.

1007-1027. Megjegyzés: Az, hogy egy számot pl. 3 tizedesre pontosan adunk meg, azt jelenti, hogy az első két tizedesjegye biztosan a valódi érték, eltérés legfeljebb a 3. tizedesben lehet, de a hiba nem nagyobb mint $5 \cdot 10^{-4}$. Az, hogy a $\sqrt[3]{x}$ értéke 3 tizedesre pontosan 3,142 azt jelenti, hogy

$$3,1415 < \sqrt[3]{x} < 3,1425$$

1008. Az $x_0 = 8$ körüli Taylor-polinom a maradéktaggal:

$$\sqrt[3]{x} = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{2}{219} \frac{(x-8)^2}{\sqrt[3]{85}} \quad (8 \dots \sqrt[3]{x} \dots x)$$

$x_1 = 10$ -nél:

$$\sqrt[3]{10} \approx \frac{13}{6} = 2,167 \quad (\text{a valódi értéknél nagyobb})$$

$$|H_1| = \frac{4}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{85}} < \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{72} < 14 \cdot 10^{-3}$$

vagyis

$$2,153 < \sqrt[3]{10} < 2,167$$

Az egy tizedesre pontos eredmény:

$$\sqrt[3]{10} \approx 2,2$$

$$1009. \quad \sqrt[3]{x} = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{32 \cdot 9}(x-8)^2 + \frac{5}{256 \cdot 81}(x-8)^3 - \frac{80}{81} \cdot \frac{1}{4!} \frac{(x-8)^4}{\sqrt[3]{11}}$$

$$(8 < \sqrt[3]{x} < 10)$$

$x_1 = 10$ -nél

$\sqrt[3]{10} \approx 2,1547$ (az elhagyott maradéktag negatív, tehát ez a valószínűleg nagyobb érték)

$$|H_3(x_1)| = \frac{160}{243} \frac{1}{3 \sqrt[3]{11}} < 4 \cdot 10^{-4}$$

$$2,1543 < \sqrt[3]{10} < 2,1547$$

1010. Az $x_0 = \frac{\pi}{6}$ körüli elsőrendű Taylor-polinom a maradéktaggal:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$(x \dots \frac{\pi}{6})$$

Ha

$$x_1 = 28 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ (radián),}$$

akkor

$$x_1 - \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$|H_1(x_1)| = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{2} 4 \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 < 2 \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 < 6,1 \cdot 10^{-4} < 7 \cdot 10^{-4}$$

A részletszámításokat 4 tizedesjegy pontossággal végezve:

$$T_1(x_1) = 0,8834$$

Mivel a maradéktag negatív, ezért:

$$0,8827 < \cos 28^\circ < 0,8834$$

vagyis a 3 tizedesre pontos eredmény:

$$\cos 28^\circ = 0,883$$

$$1011. |H_2(x_1)| < 7,1 \cdot 10^{-6} < 8 \cdot 10^{-6}$$

$$\cos 28^\circ \approx 0,8829 \quad (4 \text{ tizedesre pontos eredmény})$$

$$1012. \ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4} \frac{1}{x^4} (x-1)^4$$

$$T_3(x_1) = 0,264 \quad |H_3(x_1)| < 3 \cdot 10^{-3}$$

$$0,261 < \ln 1,3 < 0,264$$

a 2 tizedesre pontos eredmény:

$$\ln 1,3 \approx 0,26$$

$$1013. \quad T_4(x_1) = 0,2620 \quad \left| H_4(x_1) \right| < 5 \cdot 10^{-4}$$

$$0,2620 < \ln 1,3 < 0,2625$$

a 3 tizedesre pontos eredmény: $\ln 1,3 \quad 0,262$

$$1014. \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^{\xi} x^4}{4!} \quad x \in \left\{ \dots 0 \right\}$$

$$x_1 = -\frac{1}{4}\text{-nél}$$

$$T_3(x_1) = 0,7787 \quad \left| H_3(x_1) \right| < 2 \cdot 10^{-4}$$

$$0,7787 < \frac{1}{4\sqrt{e}} < 0,7785$$

A 3 tizedesre pontos eredmény:

$$\frac{1}{4\sqrt{e}} = 0,779$$

1015. Az $x_0 = \frac{\pi}{4}$ körüli Taylor-polinom a Lagrange-féle maradéktaggal:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= 1 + 2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \\ &+ (6 \operatorname{tg}^4 \xi + 8 \operatorname{tg}^2 \xi + 2) \frac{1}{6} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \\ &\quad \left(x \dots \xi \dots \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$x_1 = 0,75\text{-nél}$$

$$\left| H_2(x_1) \right| < 2 \cdot 10^{-4}$$

$$T_2(x_1) = 0,9317$$

$$0,9315 < \operatorname{tg} \frac{3}{4} < 0,9317$$

A két tizedesre pontos eredmény:

$$\operatorname{tg} \frac{3}{4} = 0,932$$

$$1016. \quad T_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \quad \left| H_2(x) \right| < 10^{-3}$$

$$1017. \quad T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} \quad \left| H_4(x) \right| < 3 \cdot 10^{-4}$$

$$1018. \quad T_4(x) = T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \left| H_5(x) \right| < 3 \cdot 10^{-5}$$

$$1019. \quad T_3(x) = T_4(x) = x + \frac{x^3}{3!} \quad \left| H_4(x) \right| < 4 \cdot 10^{-5}$$

$$1020. \quad T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots + (-1)^{(n+1)} \frac{x^n}{n}$$

$$\left| H_n(x) \right| < \frac{1}{n+1} \cdot 10^{-(n+1)}$$

$$1021. \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$(0 \dots \xi \dots x)$$

$x_1 = 1$ -nél tehát

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$$

$$(0 < \xi < 1)$$

n értékét úgy kell megválasztanunk, hogy

$$\left| H_n \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < 3 \cdot 10^{-6} \text{ legyen}$$

Mivel $e^{\xi} < e < 3$

$$\left| H_n \right| < \frac{3}{(n+1)!}$$

vagyis a hiba az adott korlátot nem lépi túl, ha

$$\frac{3}{(n+1)!} < 3 \cdot 10^{-6}$$

vagyis

$$(n+1)! > 10^6$$

könnyen kiszámolható, hogy

$$9! = 362\,880$$

$$10! = 3\,628\,800$$

ahonnan $n = 9$ -et kapunk

$$T_9(x) = 2,71828$$

(5 tizedesre pontos eredmény)

$$1022. \quad \sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{64 + 6} = 4 \sqrt[3]{1 + \frac{3}{32}}$$

vagyis

$\sqrt[3]{1 + \frac{3}{32}}$ értékét kell meghatározni $\frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$ -nál kisebb hibával.

$\sqrt[3]{1+x}$ $x_0 = 0$ körüli elsőrendű Taylor-polinomjához tartozó maradéktag:

$$|H_1| < \frac{1}{1024} < 2,5 \cdot 10^{-4}$$

vagyis nincs biztosítva a megkívánt pontosság

$$|H_2| < \frac{10}{32^3} < 2,5 \cdot 10^{-4}$$

tehát $T_2(x)$ megfelelő közelítést szolgáltat.

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$$

$$x_2 = \frac{3}{32} \text{-nél:}$$

$$T_2\left(\frac{3}{32}\right) = 1 + \frac{1}{32} - \frac{1}{32^2} = \frac{1055}{1024}$$

vagyis

$$\sqrt[3]{70} \approx \frac{1055}{256} = 4,121$$

$$1023. \quad \sqrt[5]{250} = 3 \sqrt[5]{1 + \frac{7}{243}}$$

$$|H_1| < 2 \cdot 10^{-4} < \frac{1}{3} \cdot 10^{-3}$$

$$\sqrt[5]{250} \approx 3,017$$

$$1024. \quad \sqrt[10]{x} \approx 2,001$$

$$1025. \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \\ + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} (n+1)} \quad (1 \dots \xi \dots x)$$

vagyis

$$\left| H_n(x) \right| < \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{10^{n+1} (n+1)}$$

n-et úgy kell megválasztani, hogy

$$\frac{1}{10^{n+1} (n+1)} < 10^{-3} \text{ legyen, vagyis}$$

$$(n+1) 10^{n+1} > 10^3$$

ahonnan $n = 2$

$$T_2(x_1) = 0,1 - \frac{0,01}{2} = 0,095$$

$$1026. \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\operatorname{ch} \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2} \\ (0 \dots \xi \dots x)$$

$$x_1 = 1\text{-nél}$$

$$\operatorname{ch} 1 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{2n!} + \frac{\operatorname{ch} \xi}{(2n+2)!}$$

$$0 < \xi < 1$$

$$\left| H_{2n} \right| = \frac{\operatorname{ch} \xi}{(2n+2)!} < \frac{\operatorname{ch} 1}{(2n+2)!}$$

ch 1-re akarunk egy felső korlátot adni
Figyelembe véve, hogy $2 < e < 3$

$$\operatorname{ch} 1 = \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{3} \right) < \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{4}$$

$$\left| H_{2n} \right| < \frac{7}{4} \frac{1}{(2n+2)!} \text{ kisebbnek választandó } 10^{-3}\text{-nál,}$$

vagyis

$$(2n+2)! > 1750$$

$$n = 3\text{-ra teljesül } (2n = 6)$$

$$T_6(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{720} = 1,543$$

$$1027. \quad x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

$$y = \frac{1}{2} t$$

$$1028. \quad x = \frac{2}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi} \quad (-150^\circ < \varphi^\circ < 30^\circ)$$

$$y = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi}$$

$$1029. \quad x = u_0 + r_0 \cos t \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

$$y = v_0 + r_0 \sin t$$

$$1030. \quad y = x + 2 \quad x \geq -1$$

($P_0(-1, 1)$ kezdőpontu $\alpha^0 = 45^\circ$ -os irányszögű félegyenes)

1031. a) A feladat megoldható pl. úgy, hogy t -t kifejezzük az első egyenletből és behelyettesítjük a második egyenletbe:

$$t = \frac{1}{1-x}$$

$$y = 1 + \frac{1}{\frac{1}{1-x} - 1} = \frac{1}{x}$$

b) ez az eredmény rögtön leolvasható a paraméteres alakból is, ha azt közös nevezőre hozzuk:

$$x = \frac{t-1}{t} \quad \text{és} \quad y = \frac{t}{t-1}$$

Vagyis a paraméteres egyenletrendszerrel kielégítő pontok valamilyen rajta vannak az

$$y = \frac{1}{x} \text{ hiperbolán}$$

A teljes hiperbolát akkor kapnánk, ha x felvenne minden

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ - beli értéket,

azonban az $x = 1 - \frac{1}{t}$ egyenletből látszik, hogy

$x \neq 0$ -n kívül $x \neq 1$ is fennáll:

a paraméteres egyenletrendszert kielégítő pontok az

$$y = \frac{1}{x} \quad x \neq 1 \quad \text{görbét határozzák meg.}$$

$$1032. \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (y \neq 1)$$

(a fenti körvonal pontjai a $(0, 1)$ pont kivételével)

$$1033. \quad (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

1034. $t = \operatorname{tg} x$ -et behelyettesítve a második egyenletbe:

$$y = \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) = \ln \frac{1}{\cos^2 x} = -2 \ln |\cos x|$$

vagyis a paraméteres egyenletrendszernek eleget tevő pontok rajta vannak a fenti görbén.

Ha $t \in (-\infty, +\infty)$ akkor $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

és ezen intervallumban $|\cos x| = \cos x \in (0, 1)$ tehát a paraméteres egyenletrendszert kielégítő pontok mértani helye az

$y = -2 \ln \cos x$ egyenletű görbének a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumra való leszűkítése.

1035. a) Idő

$$b) y = -\frac{g}{18} x^2 + \frac{10}{3} x \quad (\text{parabola})$$

1036. A metszéspontok mértani helye az $\overline{AB}$ szakaszra, mint áthaladó emelt Thalesz-kör.

Ha $\alpha \neq 0^\circ$ és $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$, akkor

az A-n áthaladó egyenes egyenlete: $y = m(x + 1)$

a B-n áthaladó egyenes egyenlete $y = \frac{-1}{m} (x - 1)$

A két egyenes metszéspontjának koordinátái:

$$\begin{cases} x = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} \\ y = \frac{2m}{1 + m^2} \end{cases} \quad m \in (-\infty, +\infty)$$

Ez a két egyenlet a P pont által leírt görbe keresett paraméteres egyenletrendszere.

Megjegyzés: 1. bár a B-n áthaladó egyenes egyenlete csak $m \neq 0$

vagyis $\alpha \neq 0$ esetben írható $y = \frac{-1}{m}(x - 1)$

alakban, a paraméteres egyenletrendszer $m = 0$ -nál is a valódi értéket (a B pont koordinátáit) szolgáltatja. Ez érthető, ha arra gondolunk, hogy a B-n áthaladó egyenes egyenletét írhatjuk $-ym = x - 1$ alakban és ez $m = 0$ esetén is érvényes.

2. a fenti paraméteres egyenletrendszer nem írja le a teljes görbét, csak az A pont eltávolításával nyert körvonalat. Ennek az az oka, hogy az A pontot $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (vagy $-\frac{\pi}{2}$) esetén kapjuk, de ekkor $m = \tan \alpha$ nincs értelmezve.

A paramétert kiküszöbölve: $x^2 + y^2 = 1$

(a teljes körvonal egyenlete)

(V. & Jegyzet II. kötet 20.1. példa)

1037. Az első egyenes irányszöge α ; iránytangense $\tan \alpha = m$

A második egyenes irányszöge $\frac{\pi}{2} - \alpha$; iránytangense $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{m}$

A görbe paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = \frac{1 + m^2}{1 - m^2} \\ y = \frac{2m}{1 - m^2} \end{cases} \quad m \in (-\infty, +\infty)$$

(a görbe tartalmazza még ezen pontokon kívül az

A (-1, 0) pontot)

A paramétert kiküszöbölve: $x^2 - y^2 = 1$

(a teljes görbe egyenlete)

$$1038. \quad \begin{aligned} x &= vt \\ y &= x \operatorname{tg} \omega t \end{aligned} \quad (t \geq 0)$$

Ha a t paramétert kiküszöböljük:

$$y = x \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{v} x \right) \quad (x \geq 0)$$

$$1039. \quad \begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

(a " t " paraméter: a rudnak az x tengellyel bezárt hajlásszöge)

a paramétert kiküszöbölve: az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ellipszis első negyedbeli íve.}$$

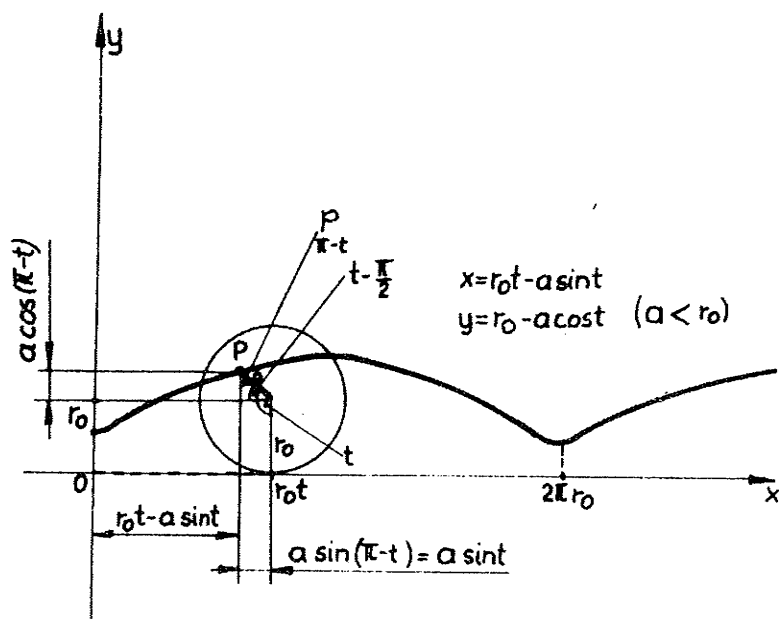
$$1040. \quad \begin{cases} x = r_0 \left(\cos t + \frac{1}{\cos t} \right) \\ y = r_0 \sin t \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

(a " t " paraméter: az érintési ponthoz vezető sugárnak az x tengely pozitív felével bezárt szöge)

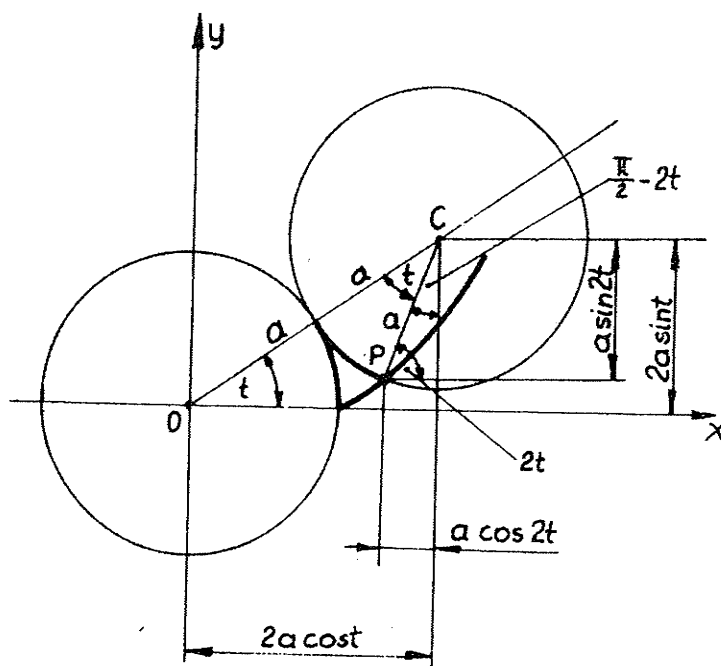
$$1041. \quad x_1 = a \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{és} \quad x_2 = a \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$1042. \quad \begin{cases} x = r_0 t - a \sin t \\ y = r_0 - a \cos t \end{cases}$$

$$1043. \quad \begin{aligned} x &= a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y &= a(2 \sin t - \sin 2t) \end{aligned}$$



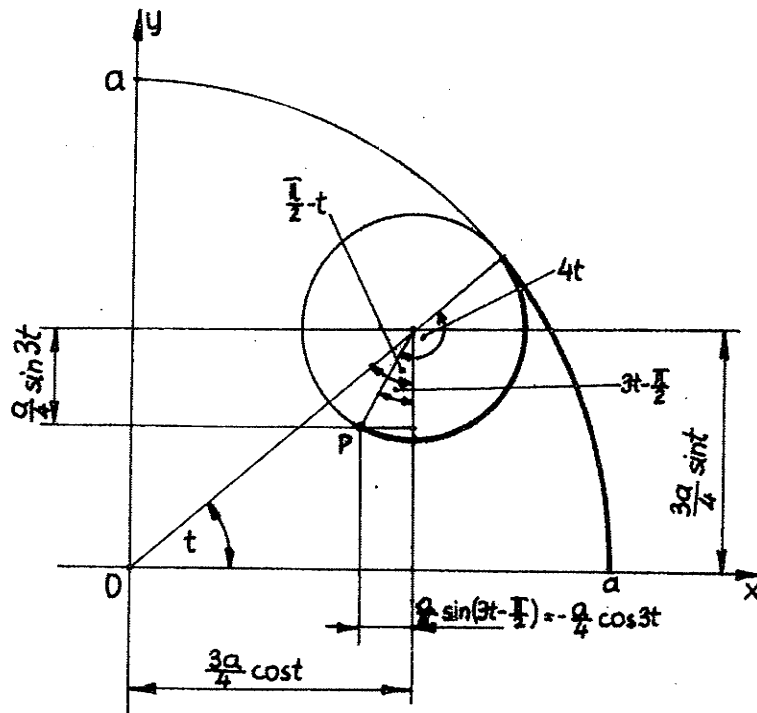
1042. ábra



1043. ábra

1044. $x = \frac{a}{4} (3 \cos t + \cos 3t)$

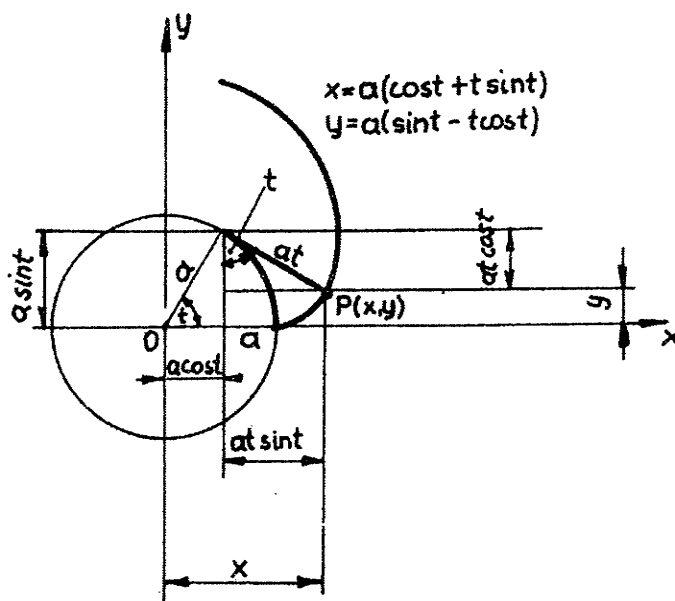
$y = \frac{a}{4} (3 \sin t - \sin 3t)$



1044. ábra

1045. $x = a (\cos t + t \sin t)$

$y = a (\sin t - t \cos t)$



1045. ábra

1046. a) $x_1 = \sqrt{5}$ $\varphi_1 = \arctg 2 = 1,11$

b) $x_1 = -0,4161$ $y_2 = 0,9093$

1047. $r = \frac{a}{\cos \varphi}$ $(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$

1048. $r = \frac{b}{\sin \varphi}$ $(0 < \varphi < \pi)$

1049. 1. módszer: az a) ábra alapján:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r \sin \varphi}{2\sqrt{3} - 1 + r \cos \varphi}$$

ahonnan:

$$r = \frac{2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} \sin \varphi - \cos \varphi}$$

2. módszer: a b) ábráról könnyen leolvasható, hogy egyenesünknek a pólustól való távolsága

$$d = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

továbbá, hogy a bevonalkázott derékszögű háromszög r átfogója:

$$r = \frac{d}{\sin(\varphi - \frac{\pi}{6})} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2 \sin(\varphi - \frac{\pi}{6})}$$

3. módszer: az

$$y - 2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (x - 1) \text{ derékszögű koordinátás alakból}$$

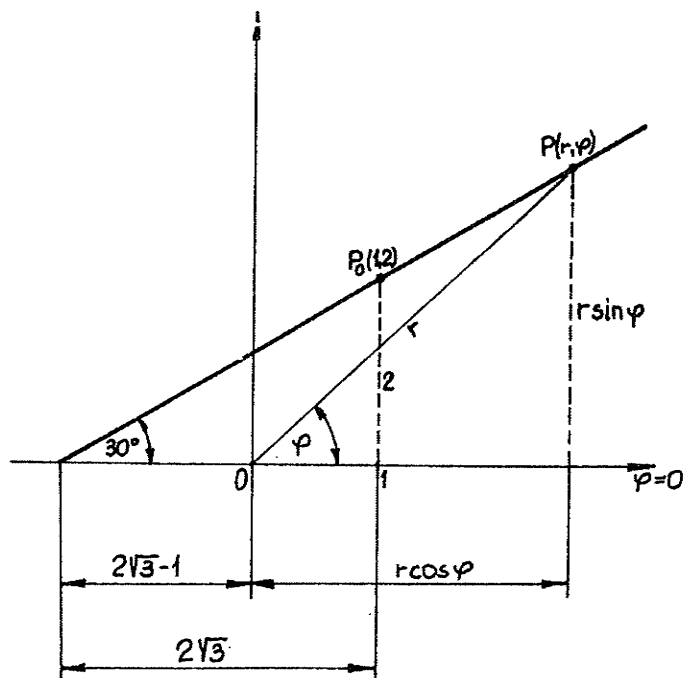
az

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{ helyettesítéssel}$$

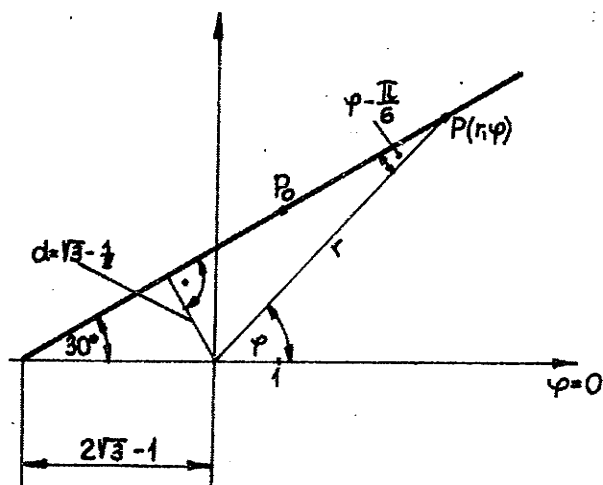
is megkaphatjuk az egyenes polárkoordinátás egyenletét.

Megjegyzés: P pont az egyenes egyszer futja végig, ha pl.

$$\varphi \in (\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$$



1049/a ábra



1049/b ábra

1050. $r \cos \varphi = r_0 \cos \varphi_0$

1051. $r = \frac{3}{\sin(\frac{\pi}{3} - \varphi)}$ $\varphi \in (-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

$r = \frac{3}{\sin(\varphi - \frac{\pi}{3})}$ $\varphi \in (\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$

1052. $r = 2r_0 \sin \varphi$ $\varphi \in [0, \pi)$

1053. $\rho^2 = r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$

(az eredményt megkaphatjuk pl. a koszinusz-tétel alkalmazásával)

1054. $x = 5$ függőleges egyenes

1055. $x^2 - 3x + y^2 = 0$ $C(\frac{3}{2}, 0)$ középpontu $\rho = \frac{3}{2}$ sugaru kör

1056. $x^2 - y^2 = 1$ egyenlő oldalú hiperbola

1057. A koszinusztételt alkalmazva:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$1058. \quad r = \frac{d}{1 - \cos \varphi}$$

$$y^2 = 2d \left(x + \frac{d}{2}\right)$$

(olyan parabola, amelynek tengelye a polártengely, fókusz a pólus)

$$1059. \quad r = \frac{d}{2 - \cos \varphi}$$

$$\frac{\left(x - \frac{d}{3}\right)^2}{\left(\frac{2d}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

(olyan ellipszis, amelynek egyik fókusz a pólus,

fél nagytengelye $a = \frac{2d}{3}$;

fél kistengelye $b = \frac{\sqrt{3}d}{3}$)

$$1060. \quad r = \frac{d}{\frac{1}{2} - \cos \varphi}$$

$$\frac{\left(x + \frac{4}{3}d\right)^2}{\left(\frac{2d}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{2d}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

(olyan hiperbola, amelynek fél tengelyei:

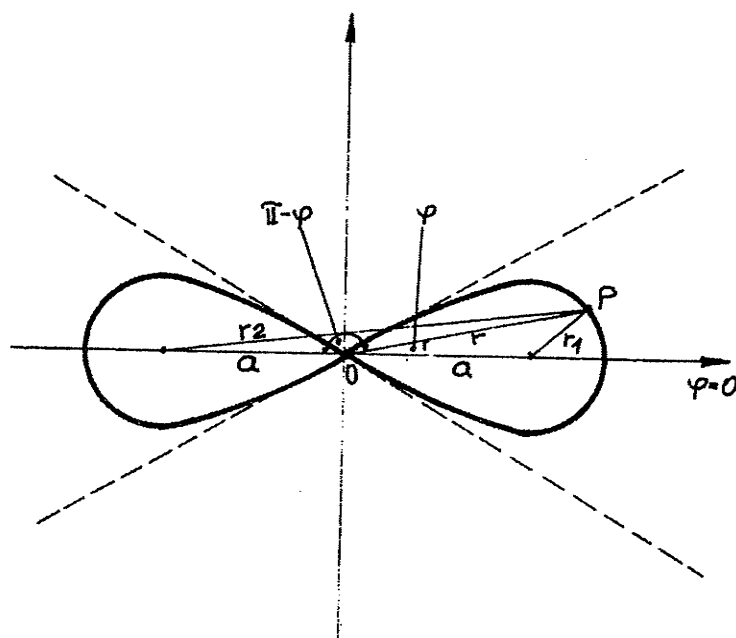
$$a = \frac{2d}{3} \quad \text{b) } \frac{2d}{\sqrt{3}} \quad \text{és a fél-fokusz-távolsága:}$$

$$c = \frac{4d}{3})$$

1061. b) Legyen a két adott pont F_1 és F_2 ; távolságuk $2a$. Ekkor az ábra alapján (koszinusz-tételből)

$$r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi$$

$$r_2^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\pi - \varphi) = a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi$$



1061. ábra

A megadott feltétel alapján $r_1 r_2 = a^2$ vagyis:

$$r_1^2 r_2^2 = a^4 = (a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi)(a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi) =$$

$$a^4 = (a^2 + r^2)^2 - 4a^2 r^2 \cos^2 \varphi$$

amiből:

$$r^2 = 2a^2 (2 \cos^2 \varphi - 1) = 2a^2 \cos 2\varphi$$

$$r = \sqrt{2} a \sqrt{\cos 2\varphi}$$

$$c) \quad r^2 = 2a^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

szorozzuk mindkét oldalt r^2 -tel:

$$r^4 = 2a^2 (r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$$

1062. A $t = 0$ időpontban a pont vt távolságra van az origótól, irány-
szöge pedig ωt , vagyis:

$$r = vt$$

azonnan a "t" paramétert

$$\varphi = \omega t$$

kiküszöbölve:

$$r = \frac{v}{\omega} \varphi$$

(archimédesi spirális lásd Jegyzet II. kötet 20.7. példa)

1063. 2 radiánnal való elforgatás pozitív irányba (az óramutató járásával ellentétesen) és sugárirányú háromszoros nyújtás.

1064. Az igazolás történhet:

a) úgy, hogy n megadott értékének helyettesítése után az egyenlet átírjuk derékszögű koordináták alakba; vagy

b) az előző feladatok eredményeivel való összehasonlítás alapján.

$$1065. \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad (t \neq 2k\pi; k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots)$$

$$1066. \frac{dy}{dx} = t(1 - \cos t)$$

$$1067. \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{-\sin \varphi + \cos \varphi}$$

$$1068. \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \dot{y}}{\dot{x}^3} = \frac{1}{3 \cos^4 t \sin t}$$

$$1069. \frac{d^2 y}{dx^2} = 5(2 \cos t - \sin t)^{-3}$$

$$1070. \frac{d^2 y}{d\varphi^2} = \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-1}{\varphi \sin^3 \varphi}$$

$$1071. \frac{d^2 u}{dv^2} = \frac{a}{b^2 \operatorname{ch}^3 t} \quad \frac{d^2 v}{du^2} = \frac{-b}{a^2 \operatorname{sh}^3 t}$$

$$1072. \left. \begin{array}{l} \sin 1 = 0,8415 \\ \cos 1 = 0,5403 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x(1) = 0,3012 \approx 0,30 \\ y(1) = 1,3818 \approx 1,38 \end{array}$$

$$y' = \operatorname{ctg} t$$

$$y'(1) \approx 0,64$$

$$y - 1,38 = 0,64 (x - 0,30) \quad (\text{érintő})$$

$$y - 1,38 = -1,56 (x - 0,30) \quad (\text{normális})$$

$$1073. \quad y - \frac{3}{4}b = \frac{3b}{5a} \left(x - \frac{5}{4}a\right) \quad (\text{érintő})$$

$$y - \frac{3}{4}b = -\frac{5a}{3b} \left(x - \frac{5}{4}a\right) \quad (\text{normális})$$

$$1074. \quad y = \frac{5\sqrt{3}}{9}x - \frac{\sqrt{3}}{18} \quad (\text{érintő})$$

$$y = \frac{-3\sqrt{3}}{5}x + \frac{7\sqrt{3}}{30} \quad (\text{normális})$$

$$1075. \quad \dot{x} = \frac{12(1-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\dot{y} = \frac{24t - 12t^4}{(1+t^3)^2}$$

$$y'(t) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} = \operatorname{tg} \alpha$$

Ha t helyébe $\frac{1}{t} - t$ írunk:

$$y'\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2t^3 - 1}{t(t^3 - 2)} = \operatorname{tg} \beta$$

tehát valóban

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} \cdot \frac{2t^3-1}{t(t^3-2)} = 1$$

Innen

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

vagyis

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta + k\pi$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0 \text{ vagy } k = 1 \text{ vagy } k = -1)$$

1076-1086. Az $y = y(x)$ egyenlettel adott görbe görbülete

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ha a görbe paraméteres alakban van megadva:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

akkor figyelembe véve, hogy

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

a görbületet a

$$k = \frac{\left| \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} \right|}{\left(1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

összefüggés alapján számolhatjuk.

1076. $k = + \frac{\sqrt{2}}{2}$

1077. $k = \frac{2}{3}$

1078. $k = \frac{2}{3}$

1079. Ellipszis; $\rho = \frac{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}$

1080. Kör; $\rho = 2$

1081. Ciklois; $\rho = 4a \sin \frac{t}{2}$

1082. Kardoid; $\rho = \frac{8}{3} \sin \frac{\varphi}{2}$

1083. Kőrevolvens; $\rho = a\varphi$

$$\begin{array}{ll}
 1084. \quad x = t^3 + 2t^2 + 3 & x = 3 \\
 y = t^3 + 3t + 5 & y = -9 \\
 \dot{x} = 3t^2 + 4t & \dot{x} = 4 \\
 \dot{y} = 3t^2 + 3 & \dot{y} = 15 \\
 \ddot{x} = 6t + 4 & \ddot{x} = -8 \\
 \ddot{y} = 6t & \ddot{y} = -12
 \end{array}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t_0=-2} - \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)_{t_0=-2} = \frac{15}{4} > 0 \quad (t_0 = -2 \text{-nél lokális minimum})$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t_0=-2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} \Big|_{t_0=-2} > 0$$

($t_0 = -2$ -nél lokálisan konvex)

a görbület:

$$(k)_{t_0=-2} = \frac{72}{241} \approx 0,30$$

a simuláskör sugara:

$$\rho = \frac{241}{72} = 0,33$$

$$\begin{array}{lll}
 1085. \quad x(0) = 0 & \dot{x}(0) = 3 & \ddot{x}(0) = 0 \\
 y(0) = 0 & \dot{y}(0) = 0 & \ddot{y}(0) = 6
 \end{array}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0} = 0 \quad \text{vízszintes érintő}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=0} = \frac{2}{3} > 0 \quad \text{lokálisan konvex}$$

vagyis $t = 0$ -nál (az origóban) helyi minimum van.

$$\text{a görbület} \quad k = \frac{2}{3}$$

a görbületi sugár $\rho = \frac{3}{2}$

1086. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} < 0$ lokálisan csökken

$y'' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{32}{3\sqrt{3}a} > 0$ lokálisan konvex

a görbület $k = 1$

a görbületi kör sugara: $\rho = 3$

1087-1119. Ha a görbe $r = r(\varphi)$ polárkoordinátás alakban van megadva, akkor a rádiuszvektor és az érintő által bezárt szög tangense:

$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'}$ (Jegyzet II. Kötet 20.3 tétel)
(az érintő irányyszöge pedig $\alpha = \omega + \varphi$)

1087. $r = \frac{2\pi}{\varphi}$ $r' = -\frac{2\pi}{\varphi^2}$

$r \left(\frac{\pi}{6} \right) = 12$ $r' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{72}{\pi}$

$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'} = \frac{12\pi}{72} = \frac{\pi}{6} = 0,5236$

$\omega^0 = 152^0 31'$

1088. $\operatorname{tg} \omega = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} = -0,4878$

$\omega^0 = 150^0 48'$

1089. $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{r}$

$r' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$ $\omega^0 = 90^0$

1090. $\operatorname{tg} \omega = 1$ $\omega^0 = 45^0$

1091. $r'(0) = 0$ $\omega^0 = 90^0$

1092. $r = 3\varphi$ Archimédeszi spirális.

$r' = 3$

Az érintő iránytangensének meghatározása:

1. módszer az $x = r(\varphi) \cos \varphi$ paraméteres alakból
 $y = r(\varphi) \sin \varphi$

a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \text{összefüggés alapján:}$$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi}{r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi}$$

(jegyzet II. kötet 20. 10)

$$m = \frac{3 \sin \frac{\pi}{6} + 3 \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}}{3 \cos \frac{\pi}{6} - 3 \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{6 - \sqrt{3}\pi}{6\sqrt{3} - \pi} = 1,578$$

2. módszer:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'} = \varphi = \frac{\pi}{6} = 0,524$$

ahonnan

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\varphi + \omega) \quad \text{meghatározható:}$$

a) úgy, hogy meghatározzuk ω -t

$$\omega = \arctg 0,524 = 27^{\circ} 38'$$

$$\alpha = \varphi + \omega = 57^{\circ} 38'$$

tehát

$$m = \operatorname{tg} \alpha = 1,578$$

b) vagy a $\operatorname{tg}(\varphi + \omega) = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \omega}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \omega}$ összefüggés alapján

$$m = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2 - (\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}) \cdot \frac{\pi}{6}} = \frac{0,557 + 0,524}{1 - 0,302}$$

$$m = 1,578$$

továbbá:

$$r_0 = r\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} = 1,571$$

$$x_0 = r_0 \cos \frac{\pi}{6} = 1,571 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,366$$

$$y_0 = r_0 \sin \frac{\pi}{6} = 1,571 \cdot \frac{1}{2} = 0,785$$

Az érintőegyenes egyenlete:

$$y - 0,785 = 1,578 (x - 1,366)$$

1093. Logaritmikus spirális

Az érintőegyenes egyenlete:

$$y - 2,40 = 1,12 (x - 4,17)$$

1094. Hiperbolikus spirális

$$r_0 = \frac{2}{3^{\frac{1}{3}}} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$y = \frac{2}{3^{\frac{1}{3}}} (x - 1) \quad \text{az érintő egyenlete}$$

1095. Lemnizskáta; $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ -nál az érintő vízszintes; egyenlete

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1096. Lemnizskáta; az érintőegyenes $y = x$

1097-1100. Megjegyzés:

A

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

Összefüggés alapján polárkoordinátákban adott görbék vízszintes érintőjű helyeit az

$$r' \sin \varphi + r \cos \varphi = 0 \quad (\text{és } r' \cos \varphi - r \sin \varphi \neq 0)$$

egyenlethől, függőleges érintőjű helyeit pedig az

$$r' \cos \varphi - r \sin \varphi = 0 \quad (\text{és } r' \sin \varphi + r \cos \varphi \neq 0)$$

egyenlethől határozhatjuk meg.

Ha valamely φ_0 helyen a számláló is, meg a nevező is 0, akkor további vizsgálatra van szükség (lásd pl. az 1099. feladatot).

Megjegyzés: Ugyanezt az eredményt kapjuk a következő okoskodással:

A vízszintes érintőjű helyeknél $\alpha = 0$
tehát

$$\varphi + \omega = 0$$

vagy

$$\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg} \omega = \frac{-r}{r'}$$

a függőleges érintőjű helyeken $\alpha = \frac{\pi}{2}$
tehát

$$\varphi + \omega = 90^\circ$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (90^\circ - \omega) = \frac{1}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{r'}{r}$$

$$1097. \quad r = e^\varphi$$

$$r' = e^\varphi$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^\varphi \sin \varphi + e^\varphi \cos \varphi}{e^\varphi \cos \varphi - e^\varphi \sin \varphi} = \frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi}$$

A vízszintes, ha

$$\operatorname{tg} \varphi = -1 \quad \varphi = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

Az érintő függőleges, ha

$$\operatorname{tg} \varphi = 1 \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$1098. \quad \text{Vízszintes az érintő, ha} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{3} \quad \text{vagyis}$$

$$\varphi^0 = 161^\circ 34' + k \cdot 180^\circ$$

Függőleges az érintő, ha $\operatorname{tg} \varphi = 3$ vagyis $\varphi^0 = 71^\circ 34' + k \cdot 180^\circ$

$$1099. \quad r = 1 - \cos \varphi$$

$$r' = \sin \varphi$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 \varphi + (1 - \cos \varphi) \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi - (1 - \cos \varphi) \sin \varphi} = \frac{-2 \cos^2 \varphi + \cos \varphi + 1}{2 \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi}$$

A számláló 0, ha

$$\cos \varphi = 1 \quad \varphi = 0 + 2k\pi$$

vagy

$$\cos \varphi = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\varphi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

A nevező 0, ha

$$\sin \varphi = 0$$

$$\varphi = k\pi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

a) vízszintes az érintő, ha

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

b) függőleges az érintő, ha

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\varphi_4 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\varphi_5 = (2k+1)\pi$$

$\varphi = 2k\pi$ -nél a törtnek számlálója is és nevezője is 0. Vizsgáljuk a tört határértékét, ha $\varphi \rightarrow 0$

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{-2 \cos^2 \varphi + \cos \varphi + 1}{2 \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi}$$

alkalmazva a Bernoulli-L'Hospital szabályt

$$= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{4 \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi}{2 \cos 2\varphi - \cos \varphi} = 0$$

Ha a számlálóban $\sin$ - t kiemeljük, az is könnyen látható, hogy

$$\lim_{\varphi \rightarrow +0} \frac{dy}{dx} = +0 \quad \text{és} \quad \lim_{\varphi \rightarrow -0} \frac{dy}{dx} = -0$$

$$1100. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi}$$

vízszintes érintője van

$$\varphi = (2k+1) \frac{\pi}{6} \text{-nél}$$

függőleges érintője van

$$\varphi = k \frac{\pi}{3} \text{-nél}$$

Megjegyzés: itt természetesen k -nak csak azokat az értékeit kell figyelembe venni, amelyekhez tartozó értékek az

$r = 2 \sqrt{\cos 2\varphi}$ értelmezési tartományában vannak.

1101-1103. Azt kell megmutatnunk, hogy a metszéspontbeli érintők α iránytangensére $|\alpha_1 - \alpha_2| = 90^\circ$, vagy másként, hogy a metszéspontbeli érintőknek a radiusvektorral bezárt ω szögére fennáll, hogy $|\omega_1 - \omega_2| = 90^\circ$, vagyis, hogy

$$\operatorname{tg} \omega_1 \operatorname{tg} \omega_2 = -1$$

1101. a két görbe (két egységsugarú kör) metszéspontjai:

a) a pólus: itt $\alpha_1 = 0^\circ$ $\alpha_2 = 90^\circ$

b) a $P_1(r_1, \varphi_1)$ pont, amelyre

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$r_1 = \sqrt{2}$$

ebben a pontban

$$\operatorname{tg} \omega_1 = 1$$

$$\operatorname{tg} \omega_2 = -1$$

vagyis valóban

$$\operatorname{tg} \omega_1 \operatorname{tg} \omega_2 = -1$$

1102. A két lemniszkáta metszi egymást:

a) a pólusban: itt nem áll fenn a merőleges metszés

b) a

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{8}$$

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ pontban}$$

akkor

$$\operatorname{tg} \omega_1 = -1$$

$$\operatorname{tg} \omega_2 = 1$$

$$1103. \text{ metszéspont: } r_1 = 4 \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} : \operatorname{tg} \omega_1 = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \omega_2 = -\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = -\sqrt{3}$$

$$r_2 = 4 \quad \varphi_2 = \frac{4\pi}{3} \quad \operatorname{tg} \omega_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \omega_2 = \sqrt{3}$$

Megjegyzés: az, hogy ezek a görbék merőlegesen metszik egymást, belátható a $\operatorname{tg} \omega_1$ és $\operatorname{tg} \omega_2$ metszéspontbeli értékeinek kiszámítása nélkül is, mert bármely φ -nél (és így természetesen a metszéspontban is)

$$\operatorname{tg} \omega_1 \cdot \operatorname{tg} \omega_2 = \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right) \left(-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) = -1$$

1104-1105. $|\omega_1 - \omega_2|$ -t kell meghatároznunk.

$$\operatorname{tg} \omega_1 - \operatorname{tg} \omega_2 = \frac{\operatorname{tg} \omega_1 + \operatorname{tg} \omega_2}{1 - \operatorname{tg} \omega_1 \operatorname{tg} \omega_2}$$

$$(\text{ahol } \operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'})$$

1104. A metszéspontok:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} \quad r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi_2 = \frac{5\pi}{6} \quad r_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

a pólus

a metszési szögek:

$$|\omega_1 - \omega_2| = \arctg 3\sqrt{3} = 79^\circ 6'$$

$$|\omega_1 - \omega_2| = 79^\circ 6'$$

0° és 90°

1105. $\varphi = \frac{\pi}{3}$ -nál $79^\circ 6'$

a pólusban 0°

1106. A pólustól legtávolabbi pontok

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \quad r_1 = 1$$

$$\varphi_2 = \frac{5\pi}{4} \quad r_2 = 1$$

A polártengelytől legtávolabbi pontok:

$$\varphi_3 = \arctg \sqrt{2} = 54^\circ 42' \quad r_1 = 0,943$$

$$\varphi_4 = 234^\circ 42' \quad r_2 = 0,943$$

1107. A pólustól legtávolabbi pontok:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \quad r_1 = 1$$

$$\varphi_2 = \frac{5\pi}{4} \quad r_2 = 1$$

A polártengelytől legtávolabbi pontok:

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{3} \quad r_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0,93$$

$$\varphi_4 = \frac{4\pi}{3} \quad r_4 = 0,93$$

1108-1119. Polárkoordinátákban adott görbék görbületének meghatározását visszavezethetjük a paraméteresen adott görbék görbületének vizsgálatára, ha egyenletüket

$$x = r(\varphi) \cos \varphi \quad \text{alakban írjuk fel.}$$

$$y = r(\varphi) \sin \varphi$$

akkor

$$\dot{x} = r' \cos \varphi - r \sin \varphi$$

$$\dot{y} = r' \sin \varphi + r \cos \varphi$$

$$\ddot{x} = r'' \cos \varphi - 2r' \sin \varphi - r \cos \varphi$$

$$\ddot{y} = r'' \sin \varphi + 2r' \cos \varphi - r \sin \varphi$$

Tudjuk, hogy a paraméteres alakban adott görbék görbülete:

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a fenti értékeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy polárkoordinátás megadás esetén:

$$k = \frac{|r^2 + 2r'^2 - r r''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} 1108. \quad r &= \sin^2 \varphi & r' &= \sin 2\varphi & r'' &= 2 \cos 2\varphi \\ r\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 & r'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 & r''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2 \end{aligned}$$

$$k = 3$$

$$1109. \quad k = \frac{3 + 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$$

$$1110. \quad k = \frac{1}{5\sqrt{5}}$$

$$1111. \quad k = \frac{1}{7\sqrt{7}}$$

$$1112. \quad k = \frac{3}{\sqrt{40}}$$

$$1113. \quad k = \frac{5}{3\sqrt{6}}$$

$$1114. \quad \text{Archimédési spirális} \quad \rho = a \frac{(\varphi^3 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^2 + 2}$$

$$1115. \quad \text{Logaritmiikus spirális} \quad \rho = \sqrt{10} e^{3\varphi}$$

$$1116. \quad \text{Hiperbolikus spirális} \quad \rho = \frac{(1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^4}$$

$$1117. \quad \text{Lemniskáta} \quad \rho = \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$1118. \quad r = a e^{k\varphi}$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} a e^{k\varphi}$$

amiből

$$\frac{r}{\rho} = \sqrt{1 + k^2}$$

$$1119. \quad r = \overline{OP} = \overline{OB} - \overline{OA} = 2R \left(\frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi \right)$$

$$\rho = \frac{R \operatorname{tg} \varphi}{3} \left(3 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^{\frac{3}{2}}$$

1120. a) Hurvó-szer:

$$\text{Mivel } f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 2 \in C^C$$

és $\operatorname{sgn} f(0) \neq \operatorname{sgn} f(1)$, tehát van olyan $0 < \xi < 1$, amelyre $f(\xi) = 0$.
A számítást célszerűen a következőképp rendezzük be:

a	b_1	$f(a_1)$	$f(b_1)$	$\frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} \cdot f(a_1)$	c
0	1	-2	2	-0,5	0,5
0,5	1	-0,875	2	-0,152	1,652
0,652	0,8	-0,24	0,5	-0,054	0,706
0,706	0,8	-0,03	0,5	-0,005	0,711

Az $f(a_1)$ és $f(b_1)$ értékeket a Horner-méle elrendezés segítségével

számítottuk ki. A számításokat logarléccel végeztük. A második lépésben kapott $C_2 = 0,652$ helyen helyettesítési értékül $-0,24$ adódott, ami lényegesen kisebb abszolút értékű, mint a $b_2 = 1$ helyen kapott $f(2) = 2$. Ezért b_3 -nak 1 helyett 0,8-et választottunk. $f(0,8) = 0,5$ még pozitív. Ezért a legkövetkező lépésben csak a_3 -al bővízzük $f(a_3) = -0,29$ -től.

Logarléccel számolva $f(0,711) = 0$ adódik, így ez a gyök már nem finomítható:

	3	2	-2
	1	2,133	0,806
0,711	3	1,133	2,806
			0

Innen az is látható, hogy több valós gyök nincs, hiszen az eggyel csökkentett fokszámú egyenlet:

$$3x^2 + 1,133x + 2,806 = 0$$

b) Érintőmódszer:

$$f'(x) = 9x^2 - 2x + 2$$

$$f''(x) = 18x - 2$$

$$f(0,5) = -0,785$$

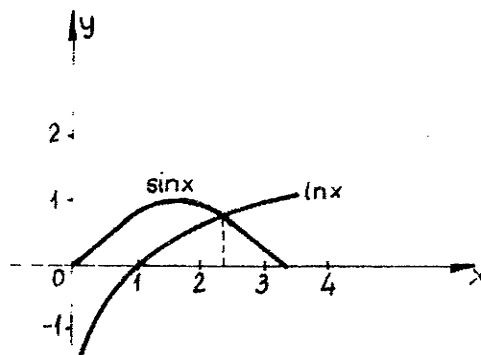
$$f(1) = 2$$

a $(0,5; 1)$ intervallumban $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$ továbbá $\text{sgn } f'(1) = \text{sgn } f(1)$, így az érintőmódszerrel adódó értékek szorzata a $\sqrt[n]{f(x)}$ gyökhöz konvergál.

A számítást így rendezzük be:

x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	$x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
1	2	9	0,222	0,778
0,778	0,363	5,889	0,062	0,716
0,716	0,019	5,179	0,004	0,712

1121. $\sqrt[n]{f(x)} \approx 2,21$



1121. ábra

Célszerű a görbéket egy közös koordináta-rendszerben felvázolni, s a metszéspont abszcisszáját megbecsülni. Az ábrából látható, hogy a keresett gyök $x = 2$ és $x = 3$ között van.

1122. $\xi \approx -0,567$

Mivel $f(x) = e^x + x$ és $f'(x) = e^x + 1 > 0$

tehát $f(x)$ monoton növekedő, így legfeljebb egy helyen veheti fel a nulla értéket.

$\operatorname{sgn} f(0) \neq \operatorname{sgn} f(-1)$, tehát 0 és 1 között kell a keresett gyöknek lennie.

Míthogy $f'(x) = e^x > 0$, azért kiindulóértéknek $f(0) = 1$ miatt $x = 0$ választandó.

1123. $\xi \approx 1,088$

1124. $-1,325$ (csak egy valós gyöke van)

1125. $-3,949; -0,217; 1,166$

1126. $-2,230; 0,202$, s a harmadik gyök pl. az $a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + x_3)$ összefüggés alapján számítható ki.

1127. $0,834; 5,949$; (lásd az előző megjegyzést)

1128. $-1,250; 0,445; 1,800$

1129. $0,387; 1,217$

1130. $-0,435; 0,381$

1131. $1,380; -0,819$

1132. $1,90$

1133. $0,450$

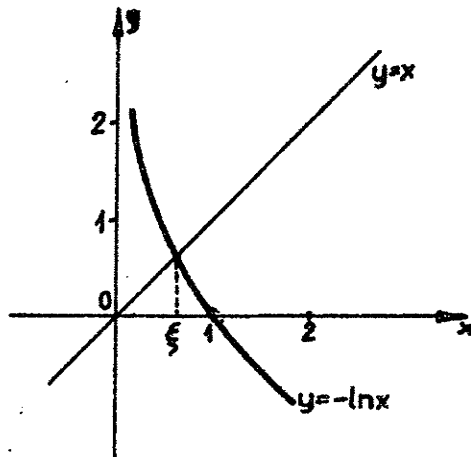
Egyenletünket $x = \frac{1}{2} \cos x$ alakba írva látható, hogy

$$|\varphi'(x)| = \left| -\frac{1}{2} \sin x \right| \leq \frac{1}{2}$$

A kiindulási x értéket tehát bárhogyan megválaszthatjuk, az iteráció konvergálni fog. Ha pl. $x_1 = 0$, a számítás így alakul:

x_1	$\varphi(x_1) = \frac{1}{2} \cos x_1$
0	0,5
0,5	0,439
0,439	0,453
0,453	0,450
0,450	0,450

1135. 0,567



1135. ábra

Az ábrán látható, hogy a keresett gyök $x = 0$ és $x = 1$ között van. Mivel ebben az intervallumban

$|\varphi'(x)| = \frac{1}{x}$ nem kisebb egynél, az inverz függvényre kell áttérnünk. Tehát az $x = e^{-x}$ egyenletet oldjuk meg.

1136. 0,450

1137. 2,03

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{\cos^2 x} \geq 1 \text{ miatt az inverz függvényre térünk át:}$$

$$x = \arctg(-x)$$

Vázlatot készítve látható, hogy a megoldandó egyenlet

$$x = \pi - \arctg x$$

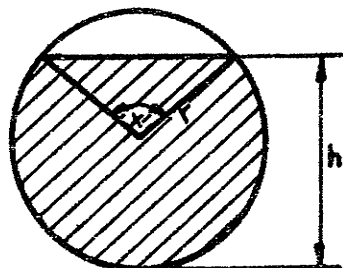
1138. 4,493

1139. $h \approx 1,16 r$

A kazán térfogata: $V = r^2 \pi m$, ahol m a kazán hossza.

Az üresen maradt rész térfogata:

$$V_x = \left(\frac{1}{2} r^2 x - \frac{1}{2} r^2 \sin x\right) m$$



1139. ábra

$$V_x : V = 600 : 1500$$

Innen

$$\frac{1}{2} (x - \sin x) : \pi = 2 : 5; \quad x - \sin x = \frac{4\pi}{5}$$

$$f(x) = x - \sin x - \frac{4\pi}{5}$$

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

$$f''(x) = \sin x$$

Érintőmódszerrel dolgozva, első közelítésnek $x = \pi$ választható.
Az 1120. példa táblázatához hasonlóan dolgozva:

$$x_1 = \pi \quad x_2 = 0,9\pi \quad x_3 \approx 2,825 \approx 161^\circ 52'$$

adódik.

$$\text{Tehát } h \approx r(1 + \cos 80^\circ 56') \approx 1,16 r$$

$$1140. \quad 65,27 \text{ cm}$$

$$1141. \quad \frac{x^6}{2} + c$$

$$1142. \quad x - 7 \ln |x| - \frac{8}{x} + c; \quad \text{végezzük el az osztást.}$$

$$1143. \quad \frac{2}{3} (x+3) \sqrt{x} + c$$

$$1144. \quad \frac{24}{41} x^{24} \sqrt{x^{17}} + c$$

$$1145. \quad \left(\frac{2}{7} x^3 + \frac{6}{5} x^2 + 2x + 2\right) \sqrt{x} + c; \quad \text{végezzük el a köbre emelést, majd az osztást.}$$

$$1146. \quad \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x - \arctg x + c$$

$$1147. \quad -\frac{2}{5} \arctg x + c$$

$$1148. \quad 2 \operatorname{ar} \operatorname{ch} x + c$$

$$1149. \quad \int \frac{x+1}{x-1} dx = \int \frac{x-1+2}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) dx =$$

$$= x + 2 \ln |x-1| + c$$

Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy elvégezzük az osztást és tagonként integrálunk. A fenti eljárással lényegében az osztást végeztük el.

$$1150. \quad 2x + 7 \ln |x - 2| + c$$

$$1151. \quad 3 \operatorname{ch} x - 5 \operatorname{sh} x + c$$

$$1152. \quad 2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{th} x + c$$

$$1153. \quad \int \operatorname{th}^2 x \, dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \right) \, dx = x - \operatorname{th} x + c$$

$$1154. \quad -(x + \operatorname{ctg} x) + c$$

$$1155. \quad \frac{1}{16} (e^{8x} - 4e^{-2x}) + c$$

$$1156. \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + c; \quad \text{a számlálót írjuk } \sin^2 x + \cos^2 x \text{ alakba.}$$

$$1157. \quad \frac{1}{4} (e^{2x} - 2x) + c$$

$$1158. \quad \frac{1}{4} \sin^4 x + c$$

$$1159. \quad \frac{1}{6} \ln^6 |x| + c$$

$$1160. \quad -\frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 - 5x + 13)^4}} + c$$

$$1161. \quad \int \frac{7x^2}{\sqrt{5 - 4x^3}} \, dx = -\frac{7}{12} \int (-12x^2) (5 - 4x^3)^{-\frac{1}{2}} \, dx =$$

$$= -\frac{7}{6} \sqrt{5 - 4x^3} + c$$

$$1162. \quad 2\sqrt{\arcsin x} + c$$

$$1163. \quad \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{ar} \operatorname{sh} x)^3} + c$$

$$1164. \quad \frac{3}{2} \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 x + c}$$

$$1165. \quad \frac{-2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + c$$

$$1166. \quad \int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$1167. \quad \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \, dx = \ln |\ln x| + c$$

$$1168. \quad \ln |\operatorname{arc} \operatorname{tg} x| + c$$

$$1169. \quad \frac{1}{2} \ln (x^2 - 6x + 27) + c; \quad \text{mivel } x^2 - 6x + 27 > 0 \text{ minden } x\text{-re,}$$

az abszolútérték-jel felesleges.

$$1170. \quad \frac{1}{3} \ln (e^{3x} + 5) + c$$

$$1171. \quad \int \frac{e^x (\operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x)}{\operatorname{ch} 3x} \, dx = \int \frac{\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}}{\frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2}} \, dx =$$

$$= \int \frac{2e^{3x}}{e^{3x} + e^{-3x}} \, dx = \int \frac{2e^{6x}}{e^{6x} + 1} \, dx = \frac{1}{3} \ln (e^{6x} + 1) + c$$

$$1172. \quad e^{\operatorname{tg} x} + c$$

$$1173. \quad -\frac{1}{2} \cos x^2 + c$$

$$1174. \quad \operatorname{arc} \sin e^x + c$$

$$1175. \quad 2 \operatorname{ch} \sqrt{x} + c$$

$$1176. \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} \ln x + c$$

$$1177. \quad \operatorname{ar} \operatorname{sh} \operatorname{tg} x + c$$

$$\begin{aligned}
 1178. \quad \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 29} &= \int \frac{dx}{(x+5)^2 + 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{(x+5)^2}{4} + 1} = \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{4} \cdot 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+5}{2} + c = \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+5}{2} + c. \text{ Helyettesítés: } t = \frac{x+5}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1179. \quad \int \frac{dx}{2x^2 - 12x + 23} &= \int \frac{dx}{2(x-3)^2 + 5} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\frac{2}{5}(x-3)^2 + 1} = \\
 &= \frac{1}{5} \left\{ \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{5}}(x-3)} \right\}^2 + 1 = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{5}{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{2}{5}}(x-3) + c = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{2}{5}}(x-3) + c. \text{ Helyettesítés: } t = \sqrt{\frac{2}{5}}(x-3)
 \end{aligned}$$

$$1180. \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{2}(x+2) + c$$

$$1181. \quad \operatorname{ar} \operatorname{sh} \frac{x-2}{6} + c$$

$$\begin{aligned}
 1182. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 12x + 30}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 6}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{18}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{(x+2)^2}{6} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{18}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2 + 1}} = \\
 &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}} \operatorname{ar} \operatorname{sh} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ar} \operatorname{sh} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + c. \\
 \text{Helyettesítés: } t &= \frac{x+2}{\sqrt{6}}
 \end{aligned}$$

$$1183. \quad \operatorname{arc} \sin \frac{x-1}{\sqrt{5}} + c$$

1184. ar $\text{ch} \frac{x+3}{3} + c$

1185. A feladat legegyszerűbben a trigonometriából ismeretes képlet (szorzat összeggé alakítása) segítségével oldható meg. E példánál:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \}.$$

$$\text{Tehát } \sin 3x \sin 8x = \sin 8x \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos 5x - \cos 11x)$$

$$\int \sin 3x \cdot \sin 8x \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 5x - \cos 11x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 11x}{11} \right) + c.$$

1186. $\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 12x}{12} + \frac{\sin 2x}{2} \right) + c$. A megoldásnál a $\cos \alpha \cos \beta =$

$$= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \} \quad \text{képletet alkalmaztuk.}$$

1187. $\frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 7x}{7} \right\} + c$.

$$\text{A felhasznált képlet: } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}.$$

1188. A másodfokú trigonometrikus kifejezést elsőfokúvá alakítjuk

$$(\text{linearizáljuk}): \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x).$$

A teljesség kedvéért még 3 linearizáló képletet iktatunk ide:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x); \quad \text{sh}^2 x = \frac{1}{2} (\text{ch } 2x - 1);$$

$$\text{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\text{ch } 2x + 1).$$

$$\text{A feladat tehát: } \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c.$$

1189. $-\frac{1}{4} \left\{ 1 - 2x - \frac{1}{2} \sin(2 - 4x) \right\} + c$. Lásd az előző példát.

1190. Kétszer kell alkalmazni a linearizáló képletet:

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \frac{1}{4} (1 - \cos 2x)^2 \text{ és}$$

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} (1 + \cos 4x).$$

Az eredmény:

$$\frac{1}{32} (12x - 8 \sin 2x + \sin 4x) + c. \text{ Lásd még 1209. feladatot.}$$

1191. Alkalmazzuk a $\cos^5 x = \cos^4 x \cdot \cos x = (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x$ átalakítást s vegyük észre, hogy $(\sin x)' = \cos x$.

Az eredmény:

$$\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + c$$

1192. $\frac{1}{3} \sin^3 x - 2 \sin x - \frac{1}{\sin x} + c$

1193. $-\ln |\sin x - \cos x| + c$. Irjunk $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ -et és távolítsuk el az emeletes törtet.

1194. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + c$. Alkalmazzuk az $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ azonosságot.

1195. $\frac{1}{3} (\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 4 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}) + c$. $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

helyettesítéssel oldható meg a feladat.

1196. A feladatok eredményeinek ismertetése előtt közlünk néhány nagyon gyakran előforduló típust, melyek parciálisan integrálhatók.

1. $y = x^{\alpha} (\ln x)^n$, ahol $\alpha \neq -1$ és $n \geq 1$ egész.

Választás: $u = (\ln x)^n$; $v' = x^{\alpha}$. n lépés után alapintegrálra vezet.

2. $y = P_n(x) e^x$, ahol $P_n(x)$ n -ed fokú polinom.

Választás: $u = P_n(x)$; $v' = e^x$. n lépés után alapintegrált kapunk. e^x helyett állhat e^{ax+b} is vagy $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, $\operatorname{sh}(ax+b)$ ill. $\operatorname{ch}(ax+b)$.

3. Ha az integrálandó arcus vagy area függvény. Szorozzunk 1-et írunk mellé s a választás: $u =$ az integrálandó függvény $v' = 1$.

4. $y = e^{\alpha x} \cos \beta x$ vagy $y = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Lásd a jegyzetet. Az exponenciális függvény helyett $\operatorname{sh} x$ vagy $\operatorname{ch} x$ függvény is szerepelhet.

$$\int \ln x \, dx = \int \frac{1}{v'} \cdot \frac{\ln x}{u} \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + c.$$

$$v = x; \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$1197. \quad x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x + c$$

$$1198. \quad \text{Írjuk az integrálható függvényt } y = x^{-\frac{1}{2}} \ln x \text{ alakba, a továbbiakban lásd az 1196. példához fűzött megjegyzést. } 2 \sqrt{x}(-2 + \ln x) + c$$

$$1199. \quad \frac{x^3}{27} (9 \ln^3 x - 9 \ln^2 x + 6 \ln x - 2) + c$$

$$1200. \quad \int (5 - x) \ln(3x + 5) \, dx = ? \quad \text{Ajánlatos először egy lineáris helyettesítést alkalmazni:}$$

$$3x + 5 = t; \quad \text{innen:}$$

$$x = \frac{1}{3}(5 - t) \quad \text{és} \quad dx = -\frac{1}{3} dt \quad \text{Tehát a feladat:}$$

$$\int (5 - x) \ln(3x + 5) \, dx = \frac{1}{9} \int \frac{(20 - t) \ln t}{v' \cdot u} \, dt =$$

$$v = 20t - \frac{t^2}{2}; \quad u' = \frac{1}{t}$$

$$= \frac{1}{9} \left\{ \left(20t - \frac{t^2}{2} \right) \ln t - \int \left(20 - \frac{t}{2} \right) dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{9} \left\{ \left(20t - \frac{t^2}{2} \right) \ln t - \left(20t - \frac{t^2}{4} \right) \right\} + c =$$

$$= \frac{1}{18} (-9x^2 + 90x + 175) \ln(3x + 5) + \frac{1}{36} (9x^2 - 210x - 375) + c$$

A visszahelyettesítést követő számítást nem írtuk le részletesen

$$1201. \quad \frac{1}{4} (6x - 13) e^{2x+3} + c$$

$$1202. \quad (x^2 - 5x + 10) e^x + c$$

$$1203. \quad \text{A feladat } x^2 = t \text{ helyettesítéssel: } \int \frac{1}{2} t^2 e^t \, dt \text{ parciálisan integrálható típust ad. Megoldható helyettesítés nélkül is a következő választással:}$$

$$\int \frac{x^4}{u} \cdot \frac{xe^{x^2}}{v'} dx \quad \text{Kétszer kell parciálisan integrálni.}$$

$$u' = 4x^3; \quad v = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\text{Az eredmény: } e^{x^2} \left(\frac{1}{2} x^4 - x^2 + 1 \right) + c$$

$$1204. \quad \text{A választás: } u = x e^x; \quad v = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Eredmény:

$$\frac{e^x}{x+1} + c$$

$$1205. \quad \left. \begin{aligned} \int \frac{\cos x}{u} \frac{\operatorname{sh} x}{v'} dx &= \cos x \operatorname{ch} x + \int \frac{\sin x}{u} \operatorname{ch} x dx \\ \int \frac{\cos x}{v'} \frac{\operatorname{sh} x}{u} dx &= \sin x \operatorname{sh} x - \int \frac{\sin x}{u} \operatorname{ch} x dx \end{aligned} \right\} +$$

$$\int \cos x \operatorname{sh} x dx = \frac{1}{2} (\cos x \operatorname{ch} x + \sin x \operatorname{sh} x) + c$$

$$1206. \quad (2x+1) \sin x - (x^2 + x - 1) \cos x + c$$

$$1207. \quad \text{A négyzetre emelés után a } \sin^2 x \text{-et linearizáljuk.}$$

$$\frac{x^3}{6} - \frac{1}{4} x^2 \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + c$$

$$1208. \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \right) dx$$

Az első integrál alapintegrál. A második kiszámítása:

$$- \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx =$$

$\begin{matrix} u & v' \end{matrix}$

$$u' = 1; \quad v = -\frac{1}{1+x^2}$$

$= \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx$. A végeredmény tehát a lehetséges összevonás elvégzése után:

$$\frac{1}{2} \left(\arctg x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + c$$

1209. A feladat többféleképpen oldható meg. Ha n páros, akkor ismételten alkalmazhatjuk a linearizáló formulát, példa erre az 1190. feladat. Ha n páratlan, alkalmazhatjuk az 1191. feladatban követett eljárást. Most a megoldást parciális integrálással végezzük el s eredményül rekurziós formulát fogunk kapni.

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \, dx &= \int \underbrace{\sin^{n-1} x}_u \cdot \underbrace{\sin x \, dx}_{v'} = -\sin^{n-1} x \cos x + \\ &+ (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = -\sin^{n-1} x \cos x + \\ &+ (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = -\sin^{n-1} x \cos x + \\ &+ (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx \end{aligned}$$

Az egyenlőség első és utolsó részét tekintve, az ismeretlen integrálra egyenletet kapunk. Ebből a keresett integrál:

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx.$$

Ennek alkalmazásával az 1190. feladat megoldása: $n = 4$;

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx = \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} x + c \end{aligned}$$

(Mutassuk ki, hogy a kétféle módon kapott eredmény csak konstansban különbözik.)

$$\begin{aligned} 1210. \quad \int \underbrace{\arcsin x}_u \underbrace{dx}_{v' = 1} &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

$$1211. \quad x^2 + 1 \quad \arctg x - \frac{x}{2} + c$$

$$1212. \quad \arccos x \cdot \sqrt{x^2 - 1} + c$$

1213. Lásd a jegyzetben kidolgozott példát:

$$\frac{e^{3x}}{34} (3 \cos 5x + 5 \sin 5x) + c$$

$$\begin{aligned} 1214. \quad \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} &= \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int \frac{dx}{\frac{4}{3}(x + \frac{1}{2})^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1215. \quad \int \frac{x+5}{x^2 - x + 5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-1+1+10}{x^2 - x + 5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2 - x + 5} dx + \frac{1}{2} \int \frac{11}{x^2 - x + 5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 5) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{19}{4}} = \\ &= \ln \sqrt{x^2 - x + 5} + \frac{11}{2} \cdot \frac{4}{19} \int \frac{dx}{\frac{4}{19}(x - \frac{1}{2})^2 + 1} = \\ &= \ln \sqrt{x^2 - x + 5} + \frac{22}{19} \int \frac{dx}{(\frac{2x-1}{\sqrt{19}})^2 + 1} = \\ &= \ln \sqrt{x^2 - x + 5} + \frac{22}{19} \cdot \frac{\sqrt{19}}{2} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{19}} + c = \end{aligned}$$

$$= \ln \sqrt{x^2 - x + 5} + \frac{11}{19} \arctg \frac{2x-1}{19} + c.$$

1216. A nevező szorzattá alakítása: $6x^2 + x - 2 = 0$;

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12}$$

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{cases} \quad . \quad 6x^2 + x - 2 = 6(x - \frac{1}{2})(x + \frac{2}{3}) = (2x-1)(3x+2).$$

Az integrálandó rész törtre bontása:

$$\frac{11-x}{6x^2+x-2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{3x+2} = \frac{A(3x+2) + B(2x-1)}{(2x-1)(3x+2)}$$

Együttható összehasonlítással:

$$x \text{ együtthatói } 3A + 2B = -1$$

$$\text{állandó tagok } 2A - B = 11$$

$$\text{Innen: } A = 3; \quad B = -5.$$

Tehát az integrál:

$$\begin{aligned} \int \frac{11-x}{6x^2+x-2} dx &= \int \left(\frac{3}{2x-1} - \frac{5}{3x+2} \right) dx = \\ &= \frac{3}{2} \ln |2x-1| - \frac{5}{3} \ln |3x+2| + c = \ln \frac{\sqrt{|2x-1|}^3}{\sqrt{|3x+2|}^5} + c \end{aligned}$$

$$1217. \ln (x-4)^2 |x+3|^5 + c$$

$$1218. \frac{5}{6} \ln \frac{|x-7|}{|x-1|} + c$$

1219. A rész törtre bontás:

$$\frac{3x-5}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A+Bx+B}{(x+1)^2};$$

$$B = 3; \quad A = -8.$$

Azonban - jelen esetben - a részlettörtekre bontás elkerülhető:

$$\begin{aligned}\frac{3x-5}{(x+1)^2} &= 3 \frac{x+1-1-\frac{5}{3}}{(x+1)^2} = 3 \frac{x+1-\frac{8}{3}}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{3}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Ezután az integrál:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-5}{(x+1)^2} dx &= \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2} \right) dx = \\ &= 3 \ln |x+1| + \frac{8}{x+1} + c\end{aligned}$$

$$1220. \quad \frac{3}{2(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} + 5 \ln |x+2| + c$$

1221. A részlettörtek:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \\ &= \frac{A(x^2+1) + B(x^2+1)(x-1) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\end{aligned}$$

A beszorzás elvégzése után együttható-összehasonlítás következik:

$$\begin{array}{ll}x^3 \text{ együtthatói:} & B + C = 0 \\ x^2 \text{ együtthatói:} & A - B - 2C + D = 0 \\ x \text{ együtthatói:} & B + C - 2D = 0 \\ x^0 \text{ együtthatói:} & A - B + D = 1\end{array}$$

A négy egyenletet összeadva: $2A = 1; \quad A = \frac{1}{2}$

A második egyenlethől az utolsót kivonva: $-2C = -1; \quad C = \frac{1}{2}$

S a további két ismeretlen: $B = -\frac{1}{2}; \quad D = 0.$

Az integrál most már könnyen számítható:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) + c =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x-1} + \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|} \right) + c$$

$$1222. \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$$

$$1223. \ln \frac{(x+1)^4}{|x-2| \sqrt{|2x-5|}^3} + c$$

$$1224. \ln \frac{|x-1|^3}{|x-3|} - \frac{2}{(x-3)^2} + c$$

$$1225. \ln|x+1| + (x^2+1) - \operatorname{arctg} x + c$$

$$1226. \ln \sqrt{x^2-2x+5} + c$$

$$1227. \ln \frac{10\sqrt{|x|} \cdot 15\sqrt{|x-5|}}{6\sqrt{|x-2|}} + c$$

$$1228. \frac{1}{25} \left\{ \frac{1}{5x-7} + \ln(5x-7)^2 \right\} + c$$

$$1229. \ln \sqrt{(x^2+2x+100)^5} - \frac{15}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+6}{8} + c$$

$$1230. \ln|x-2| \sqrt{\frac{|x-1|^3}{|x+1|}} + c$$

$$1231. \frac{1}{4} x^2 + \frac{3}{4} x + \frac{9}{8} \ln|2x-3| + c$$

$$1232. \ln(x^2-2x+17)^3 + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{4} + c$$

$$1234. \quad -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + c$$

$$1234. \quad \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{t^2}{t+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{t+1} dt =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = t - \ln |t+1| + c = e^x - \ln(e^x + 1) + c$$

$$e^x = t; \quad x = \ln t; \quad dx = \frac{1}{t} dt$$

$$1235. \quad \arctg e^x + c$$

$$1236. \quad \frac{1}{2} e^{2x} + e^x + \ln |e^x - 1| + c$$

1237. Sok esetben célszerű hiperbolikus függvények helyett exponenciális függvénnyel dolgozni. Pl. jelen esetben vagy lásd az 1171. példát.

$$\ln \frac{|e^x - 1|}{e^x + 1} + c$$

1238. Lásd az előző példához fűzött megjegyzést.

$$\ln \frac{|e^x - 1|}{e^x + 1} - \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} + c$$

1239. A feladat $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel oldható meg. Lásd a jegyzetet.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$$

1240. Az előző példához hasonlóan $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel számolhatunk.

Az eredmény:

$$2 \arctg \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c.$$

Ez a példa megegyezik lényegileg az 1177. feladattal, mert

$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \cos x$. Igazoljuk, hogy a kétféle eredmény csak konstansban különbözik egymástól.

$$1241. \quad \frac{2}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + c$$

1242. A helyettesítés: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, az alkalmazandó formulák:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

Az integrál tehát:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1} &= \int \frac{2}{2t + 1 - t^2 + 1 + t^2} dt = \\ &= \int \frac{1}{t+1} dt = \ln |t+1| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + c \end{aligned}$$

$$1243. \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c$$

$$1244. \quad \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + c$$

1245. A feladat $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel integrálható. Megoldható azonban az alábbi egyszerű átalakítással is:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x \, dx &= \int \left[\operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x + 1) - \operatorname{tg} x \right] dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \\ &+ \ln \cos x + c \end{aligned}$$

$$1246. \quad \frac{1}{2} \left\{ x + \ln \sin x + \cos x \right\} + c$$

$$1247. \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right| + \frac{1}{2} x + c$$

1248. A célszerű helyettesítés $t = \operatorname{tg} x$. Egyszerűbben is megoldható:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + c$$

129. A "típus" helyettesítés az elmélet szerint:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \text{ Ekkor:}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3} = 2 \int \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^3} dt.$$

Látható, hogy a rész törtre bontás célra vezet ugyan, de borzasztó hosszadalmas. Ehelyett a következő megoldási módot ajánljuk. Ez rövidebb, viszont átvezet a következő csoportba: az irracionális integrálokhoz.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x} dx$$

Most két helyettesítés következik: $u = \operatorname{tg} x$ és $u = \operatorname{sh} t$. Ezeket egyszerre végezve:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{sh} t \quad \text{és} \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{ch} t dt.$$

Igy az integrál:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x} dx &= \int \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t dt = \int \operatorname{ch}^2 t dt = \\ &= \int \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2} dt = (\text{lásd 1188. példa}) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + t) + c = \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} + t) + c = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \\ &+ \operatorname{ar} \operatorname{sh} \operatorname{tg} x) + c. \end{aligned}$$

1250. A helyettesítés: $x = \sin t$ $dx = \cos t dt$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \int \sin^2 t dt =$$

$$= (\text{lásd 1188. pl.}) = \frac{1}{2} (t - \sin t \cos t) + c =$$

$$= \frac{1}{2} (\text{Arc sin } x - x \sqrt{1-x^2}) + c.$$

1251. Itt a helyettesítés. $x = \text{ch } t$; $dx = \text{sh } t dt$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx = \int \frac{\sqrt{\text{ch}^2 t - 1}}{\text{ch}^4 t} \text{sh } t dt = \int \frac{\text{sh}^2 t}{\text{ch}^4 t} dt =$$

$$= \int \text{th}^2 t \cdot \frac{1}{\text{ch}^2 t} dt = \int u^2 du \quad \text{ahol } u = \text{th } t;$$

$$\int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + c =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{\text{sh } t}{\text{ch } t} \right)^3 + c = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{\text{ch}^2 t - 1}}{\text{ch } t} \right)^3 + c = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right)^3 + c.$$

1252. Először a gyök alatti kifejezést teljes négyzetre kell alakítani.

$$\int \sqrt{x^2 + 6x + 10} dx = \int \sqrt{(x+3)^2 + 1} dx = \int \sqrt{\text{sh}^2 t + 1} \text{ch } t dt$$

$$x+3 = \text{sh } t; \quad dx = \text{ch } t dt$$

$$= \int \text{ch}^2 t dt = (\text{lásd 1188. pl.}) = \frac{1}{2} (\text{sh } t \text{ch } t + t) + c =$$

$$= \frac{1}{2} (\text{sh } t \sqrt{\text{sh}^2 t + 1} + t) + c = \frac{1}{2} \left\{ (x+3) \sqrt{x^2 + 6x + 10} + \text{ar sh } (x+3) \right\} + c$$

1253. $\int \sqrt{1+2x-x^2} dx = \int \sqrt{2-(x-1)^2} dx = \int \sqrt{2-2\sin^2 t} \sqrt{2} \cos t dt =$

$$x-1 = \sqrt{2} \sin t; \quad dx = \sqrt{2} \cos t dt$$

$$= 2 \int \cos^2 t dt = (\text{lásd 1188. pl.}) = t + \sin t \cos t + c =$$

$$\begin{aligned}
&= \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2} + c = \\
&= \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{2} \sqrt{1 + 2x - x^2} + c \\
1254. \quad &\int \sqrt{2x^2 + 8x + 5} \, dx = \sqrt{2} \int \sqrt{x^2 + 4x + \frac{5}{2}} \, dx = \\
&= \sqrt{2} \int \sqrt{(x+2)^2 - \frac{3}{2}} \, dx = x+2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{ch} t; \\
&\quad dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sh} t \, dt = \\
&= \sqrt{2} \int \sqrt{\frac{3}{2} \operatorname{ch}^2 t - \frac{3}{2}} \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sh} t \, dt = \frac{3}{\sqrt{2}} \int \operatorname{sh}^2 t \, dt = \\
&= (1. 1188. \text{ pl.}) = \frac{3}{2\sqrt{2}} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t) + c = \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} (x+2) \sqrt{\frac{2}{3} (x+2)^2 - 1} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \operatorname{ar} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{2}{3}} (x+2) + \\
&+ c = \frac{x+2}{2} \sqrt{2x^2 + 8x + 5} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \operatorname{ar} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{2}{3}} (x+2) + c.
\end{aligned}$$

$$1255. \quad \frac{x}{2} \sqrt{5x^2 - 7} - \frac{7}{2\sqrt{5}} \operatorname{ar} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{7}} x + c$$

$$1256. \quad \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} x + \frac{x}{2} \sqrt{3 - 2x^2} + c$$

$$\begin{aligned}
1257. \quad &\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \int \frac{dx}{x \sqrt{(x-1)^2 + 4}} = \\
&\quad x-1 = 2 \operatorname{sh} t; \quad dx = 2 \operatorname{ch} t \, dt \\
&= \int \frac{2 \operatorname{ch} t \, dt}{(2 \operatorname{sh} t + 1) \sqrt{4 \operatorname{sh}^2 t + 4}} = \int \frac{dt}{2 \operatorname{sh} t + 1} = \\
&= \int \frac{dt}{e^t - e^{-t} + 1} = \int \frac{e^t \, dt}{e^{2t} - 1 + e^t} =
\end{aligned}$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + u - 1} = \int \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} = \frac{4}{5} \frac{du}{\left(\frac{2u+1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1} =$$

$$u = e^t; \quad du = e^t dt$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{5} \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{ar th} \frac{2u+1}{\sqrt{5}} + c & \text{ha } \left| \frac{2u+1}{\sqrt{5}} \right| < 1 \\ \frac{4}{5} \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{ar cth} \frac{2u+1}{\sqrt{5}} + c & \text{ha } \left| \frac{2u+1}{\sqrt{5}} \right| > 1 \end{cases}$$

A két eset egybe foglalható, ha áttérünk a logaritmus-függvényre:

$$\frac{4}{5} \frac{du}{\left(\frac{2u+1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{2u+1}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{2u+1}{\sqrt{5}}} \right| + c =$$

$$= -\frac{1}{5} \ln \frac{\sqrt{5} + 2u + 1}{\sqrt{5} - 2u - 1} + c$$

A visszahelyettesítéseket elvégezve:

$$u = e^t = e^{\operatorname{ar sh} \frac{x-1}{2}} = e^{\ln \left(\frac{x-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1} \right)} =$$

$$= \frac{x-1}{2} + \frac{1}{\sqrt{4}} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

Tehát az integrálás eredménye:

$$-\frac{1}{5} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}}{\sqrt{5} - x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}} \right| + c$$

1258.

A példát kétféle módon oldjuk meg. Először:

$$\int \sqrt{\frac{x}{x-1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}} dx = \int \frac{x dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int \frac{x}{\sqrt{(2x-1)^2 - 1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{ch} t + 1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}} \operatorname{sh} t dt = \\
&\quad 2x - 1 = \operatorname{ch} t; \quad 2dx = \operatorname{sh} t dt \\
&= \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} t + 1) dt = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t + t) + c = \frac{1}{2} (\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} + t) + \\
&+ c = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{4x^2 - 4x + 1 - 1} + \operatorname{ar} \operatorname{ch} (2x - 1) \right\} + c = \\
&= \sqrt{x^2 - x} + \frac{1}{2} \ln (2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 1 - 1}) + c = \\
&= \sqrt{x^2 - x} + \frac{1}{2} \ln (2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x}) + c.
\end{aligned}$$

Másodszor a

$$x = \frac{t^2}{t^2 - 1} \text{ helyettesítéssel.}$$

Innen:

$$x = \frac{t^2}{t^2 - 1} \quad \text{és} \quad dx = -\frac{2t}{(t^2 - 1)^2} dt.$$

Az integrál tehát:

$$\int \sqrt{\frac{x}{x-1}} dx = -2 \int \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} dt$$

Az integrálandót részlet törtre bontjuk:

$$\frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}$$

Az együtthatókat meghatározva nyerjük, hogy

$$A = \frac{1}{4}; \quad B = \frac{1}{4}; \quad C = -\frac{1}{4} \quad \text{és} \quad D = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned}
-2 \int \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} dt &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left\{ -\ln |t-1| + \frac{1}{t-1} + \right. \\
&\left. + \ln |t+1| + \frac{1}{t+1} \right\} + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + \frac{t}{t^2 - 1} + c.
\end{aligned}$$

A visszahelyettesítésnél:

$$\frac{t+1}{t-1} = \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1} = 2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x}$$

és

$$\frac{t}{t^2 - 1} = \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \sqrt{x^2 - x}$$

Az eredmény - ha a visszahelyettesítést elvégezzük - pontosan egyezik az előbbivel.

$$1259. \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \int \frac{2t \, dt}{(t^2 - 4)t} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-2} - \frac{\frac{1}{2}}{t+2} \right) dt =$$

$$x+4 = t^2; \quad dx = 2t \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \ln |t-2| - \ln |t+2| \right\} + c = \ln \sqrt{\left| \frac{t-2}{t+2} \right|} + c =$$

$$= \ln \sqrt{\left| \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2} \right|} + c$$

$$1260. \quad \frac{1}{3} (5x - 44) \sqrt{2x+7} + c$$

$$1261. \quad \frac{2}{3} (x-2) \sqrt{x+1} + c$$

$$1262. \quad \int (x^2 - 3x + 2) \sqrt{2x-1} \, dx = \frac{1}{2} \int \left\{ \left(\frac{t+1}{2} \right)^2 - 3 \frac{t+1}{2} + 2 \right\} \sqrt{t} \, dt =$$

$$2x-1 = t; \quad dx = \frac{1}{2} \, dt$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(\frac{5}{2} t^{\frac{5}{2}} - 4t^{\frac{3}{2}} + 3t^{\frac{1}{2}} \right) dt = \frac{1}{8} \left\{ \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} - \frac{8}{5} t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} \right\} +$$

$$+ c = t^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{28} t^2 - \frac{1}{5} t + \frac{1}{4} \right) + c = \frac{1}{35} \sqrt{(2x-1)^3} (5x^2 - 19x + 17) + c$$

A visszahelyettesítésnél a részletes számolást mellőztük.

$$1263. \quad \frac{2}{27} (3x - 10) \sqrt{3x + 5} + c$$

$$1264. \quad \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx = \int \frac{t^2}{1 + t^3} \cdot 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^2(t^3 + 1 - 1)}{t^3 + 1} dt =$$

$$x = t^4; \quad dx = 4t^3 dt$$

$$= 4 \int \left(t^3 - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) dt = 4 \left\{ \frac{t^3}{3} - \frac{1}{3} \ln |t^3 + 1| \right\} + c =$$

$$= \frac{4}{3} \left\{ \sqrt[4]{x^3} - \ln |\sqrt[4]{x^3} + 1| \right\} + c.$$

$$1265. \quad \int \frac{1}{x-1} \sqrt{\frac{x}{x-1}} dx = \int \frac{1}{x-1} \sqrt{1 + \frac{1}{x-1}} dx =$$

$$= \int t \sqrt{1+t} \frac{-dt}{t^2} = - \int \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt = -2 \int \frac{u^2}{u^2-1} du =$$

$$t = \frac{1}{x-1}; \quad x = \frac{1}{t} + 1; \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt;$$

$$= -2 \int \left(1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du =$$

$$1+t = u^2; \quad dt = 2u du$$

$$= -2 \left(u + \frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} \right) + c = -2u + \ln \frac{u+1}{u-1} + c =$$

$$= -2 \sqrt{\frac{x}{x-1}} + \ln |2x-1+2\sqrt{x^2-x}| + c$$

Itt lényegében az $u^2 = \frac{x}{x-1}$ helyettesítést alkalmaztuk két lépésben. Lásd az 1258. példát.

1266. A feladatot kétféleképpen oldjuk meg. Először $x = 6 \sin t$ helyettesítéssel:

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{36-x^2}} = \int \frac{6 \cos t dt}{6 \sin t \sqrt{36-36 \sin^2 t}} = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sin t} dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= (\text{lásd } 1239. \text{ pl.}) = \frac{1}{6} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + c = \frac{1}{6} \ln \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} + c = \\
 &= \frac{1}{12} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{36}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{36}}} \right| + c = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{6 - \sqrt{36 - x^2}}{6 + \sqrt{36 - x^2}} \right| + c
 \end{aligned}$$

Másik lehetőség: $36 - x^2 = t^2$ helyettesítés.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x \sqrt{36 - x^2}} &= - \int \frac{t dt}{(36 - t^2) t} = - \int \frac{dt}{36 - t^2} = \\
 &= \frac{1}{12} \int \left(\frac{1}{t - 6} - \frac{1}{t + 6} \right) dt = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{t - 6}{t + 6} \right| + c = \\
 &= \frac{1}{12} \ln \left| \frac{\sqrt{36 - x^2} - 6}{\sqrt{36 - x^2} + 6} \right| + c
 \end{aligned}$$

1267. Az előbbi feladathoz hasonlóan kétféle módon is megoldható: $x = 3 \sin t$ vagy $9 - x^2 = t^2$ helyettesítéssel. Eredmény:

$$9 - x^2 + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{9 - x^2} - 3}{\sqrt{9 - x^2} + 3} \right| + c$$

$$\begin{aligned}
 1268. \quad \int \frac{x^3 \sqrt{1 + x^2} dx}{1 + x^2} &= \int \frac{(t^2 - 1) t^2 dt}{t^2} = \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 + c = \\
 &= \frac{1}{15} t^3 (3t^2 - 5) + c = \frac{1}{15} \sqrt{(1 + x^2)^3} (3x^2 - 2) + c
 \end{aligned}$$

Megoldható még $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel is.

$$1269. \quad -\frac{1}{2} \ln \left| \cos(x^2 - 6x + 7) \right| + c$$

$$1270. \quad (\ln |\ln x| - 1) \ln x + c; \quad t = \ln x \text{ helyettesítéssel.}$$

$$1271. \quad x - \sqrt{1 - x^2} \operatorname{arc} \sin x + c; \quad x = \sin t \text{ helyettesítéssel.}$$

$$1272. \quad \frac{1}{4} \left\{ (4x - 6) \operatorname{arc} \operatorname{tg} (3 - 2x) + \ln \left| 10 - 12x + 4x^2 \right| \right\} + c$$

1273. $2(\sin \sqrt{x} - \sqrt{x} \cos \sqrt{x}) + c$

1274. A feladat megoldásánál $\operatorname{tg} x = t^2$ helyettesítést vezetjük be.
 $x = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} t^2$ és $dx = \frac{2t}{1+t^2} dt$.

Az integrál:

$$\int \sqrt{\operatorname{tg} x} dx = \int \frac{2t^2}{1+t^4} dt.$$

Az integrálandót részlet törtre bontjuk. A nevező szorzatalakja:

$$t^4 + 1 = (t^2 + t\sqrt{2} + 1)(t^2 - t\sqrt{2} + 1)$$

$$\frac{2t^2}{t^4 + 1} = \frac{At + B}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} + \frac{Ct + D}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \quad / \cdot (t^4 + 1)$$

$$2t^2 = (At + B)(t^2 - t\sqrt{2} + 1) + (Ct + D)(t^2 + t\sqrt{2} + 1)$$

$$2t^2 = (A + C)t^3 + (-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D)t^2 + (A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D)t + B + D$$

Együttható-összehasonlítással:

$$A + C = 0$$

$$-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D = 2$$

$$A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0$$

$$B + D = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása: $A = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad B = 0;$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad D = 0.$$

Az egyes részlet tört integrálása:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{-t}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} dt &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} dt + \\ + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} dt &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln |t^2 + t\sqrt{2} + 1| + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln |t^2 + t\sqrt{2} + 1| +$$

$$+ \frac{dt}{(\sqrt{2}t + 1)^2 + 1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln |t^2 + t\sqrt{2} + 1| +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{2}t + 1)$$

És hasonlóan:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{t}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln |t^2 - t\sqrt{2} + 1| +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{2}t - 1)$$

Felhasználva az $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$ függvény addíciós képletét (tessék igazolni!):

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} a + \operatorname{arc} \operatorname{tg} b = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+b}{1-ab}$$

és $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ visszahelyettesítéssel nyerjük az eredményt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x + \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1} \right| + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right\} + c$$

$$1275. \quad \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln (x^2 + x + 1) - 2x + \sqrt{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$1276. \quad -(\cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x) + c. \quad \text{Lásd 1191. ill. 1209. példát.}$$

$$1277. \quad t = x^2 + 1 \text{ helyettesítéssel.}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ x^2 \operatorname{sh} (x^2 + 1) - \operatorname{ch} (x^2 + 1) \right\} + c$$

$$1278. \quad \int_{u'}^x \operatorname{arc} \sin x \, dx = \frac{x^3}{3} - \operatorname{arc} \sin x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} (-x) dx = \int \frac{1-t^2}{t} t dt = t - \frac{t^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} t (3-t^2) = \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} (2+x^2);$$

$$1-x^2 = t^2; \quad -x dx = t dt$$

$$\int x^2 \arcsin x dx = \frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{1}{9} \sqrt{1-x^2} (2+x^2) + c$$

$$1279. \quad \frac{1}{13} \left\{ 3 \sin (2x-1) \operatorname{sh} (3x+2) - 2 \cos (2x-1) \operatorname{ch} (3x+2) \right\} + c$$

Lásd 1196. és 1205. példát.

$$1280. \quad \left(x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\right) \arctg x + \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + c$$

$$1281. \quad -\frac{1}{\ln x} + c$$

$$1282. \quad \frac{3x-2}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2} \arctg x + c. \quad \text{Lásd 1208. pl.}$$

$$1283. \quad \int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-5x+6}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x+6}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}} =$$

$$= \sqrt{x^2-5x+6} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} =$$

$$= \sqrt{x^2-5x+6} - \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-5)^2 - 1}} = \sqrt{x^2-5x+6} -$$

$$- \frac{1}{2} \operatorname{ar ch} (2x-5) + C$$

Másik megoldási mód:

$$\int \sqrt{\frac{(x-3)^2}{(x-2)(x-3)}} dx = \int \sqrt{\frac{x-3}{x-2}} dx; \quad t^2 = \frac{x-3}{x-2}$$

helyettesítéssel. Ez azonban bonyolult.

$$1284. \quad \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{7}} + c$$

$$1285. \quad \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{ar ch} x + c$$

Másik - sokkal bonyolultabb - megoldási lehetőség a

$$t^2 = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{helyettesítéssel}$$

$$1286. \quad -\frac{1}{11} \cos^{11} x + \frac{1}{13} \cos^{13} x + c. \quad \text{Lásd 1191. pl.}$$

$$1287. \quad \int \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^2 dx = \int \left(1 + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} \right) dx = x + \ln(x-1)^4 - \frac{4}{x-1} + c$$

$$1288. \quad \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$$

$$1289. \quad \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 17) + \frac{3}{4} \arcsin \frac{x+1}{4} + c$$

$$1290. \quad \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \arcsin x \right\} + c$$

$$1291. \quad \int \frac{x}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{x}{(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + c$$

$$1292. \quad \frac{3}{4} \ln|2x^2 - 12x + 23| + \frac{4}{\sqrt{10}} \arcsin \sqrt{\frac{2}{5}}(x-3) + c$$

$$1293. \quad -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}(3x-2) + c$$

$$1294. \int_1^e x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9} \left[x^3 \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9} e^3 + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9} \approx 4,575.$$

Eljárhattunk volna úgy is, hogy kiszámítjuk az $y = x^2 \ln x$ függvény egy primitív függvényét s a primitív függvénybe helyettesítjük a határokat.

$$1295. \frac{1}{4} (43 e^{10} - 15 e^{-4}) \approx \frac{1}{4} \cdot 43 \cdot e^{10} \approx 236\,755$$

$$\text{Ugyanis } e^{10} = 22\,026 \text{ és } e^{-4} = 0,018.$$

$$1296. 3 \ln^2 3 - 16 \ln 3 + 4 \approx 1,030$$

$$1297. \frac{4 + \sqrt{2}}{8} \sqrt{2} - 1 \approx 0,2584$$

$$1298. \sqrt{2}^2 - 4 \approx 5,8696$$

$$1299. -\frac{1}{13} (3e^{\sqrt{2}} + 2) \approx -5,4940$$

$$1300. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = \left[x \operatorname{tg} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx = \frac{\pi}{4} + [\ln \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,4388$$

$$1301. 2 \ln 2 - 1 \approx 0,3862$$

$$1302. 2e(3\sqrt{e} - 5) \approx -0,1465$$

1303. Határozott integrálok helyettesítéssel kétféle módon számíthatók: a határok megváltoztatásával, ill. a primitív függvény kiszámításával. Két feladatot mindkét módon megoldunk.

Megváltoztatjuk a határokat; az új változó:

$$t = 5x - 2; \quad dt = 5 \, dx;$$

$$\text{alsó határ: } x = 1; \quad t = 5 \cdot 1 - 2 = 3$$

$$\text{felső határ: } x = 4; \quad t = 5 \cdot 4 - 2 = 18.$$

Tehát:

$$\int_1^4 \ln(5x-2) dx = \int_3^{18} \ln t \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} [t \ln t - t]_3^{18} =$$

$$= \frac{1}{5} (18 \ln 18 - 18 - 3 \ln 3 + 3) \approx 6,7463$$

Most a primitív függvényt számítjuk ki, a határok változását csak jelöljük.

$$\int_1^4 \ln(5x-2) dx = \int_{t_1}^{t_2} \ln t \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} [t \ln t - t]_{t_1}^{t_2} =$$

$$t = 5x - 2; \quad dt = 5 dx$$

$$= \frac{1}{5} [(5x-2) \ln(5x-2) - (5x-2)]_1^4 = \frac{1}{5} (18 \ln 18 -$$

$$- 18 - 3 \ln 3 + 3)$$

$$1304. \int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx = \int_2^{28} t^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \left[t^{\frac{4}{3}} \right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$1+x^3 = t; \quad 3x^2 dx = dt; \quad \begin{array}{ll} \text{alsó határ} & x=1; \quad t=2 \\ \text{felső határ} & x=3; \quad t=28 \end{array}$$

$$= \frac{1}{4} (28 \sqrt[3]{28} - 2 \sqrt[3]{2}) \approx 20,629.$$

Vagy:

$$\int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx = \int_{t_1}^{t_2} t^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \left[t^{\frac{4}{3}} \right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$1+x^3 = t; \quad 3x^2 dx = dt$$

$$= \frac{1}{4} \left[\sqrt[3]{(1+x^3)^4} \right]_1^3 = \frac{1}{4} (\sqrt[3]{28^4} - \sqrt[3]{2^4})$$

$$1305. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \cdot x dx = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1} dt =$$

$$1+x^2 = t^2; \quad x dx = t dt$$

$$\begin{array}{lll} \text{alsó határ:} & x = \sqrt{3}; & t = 2 \\ \text{felső határ:} & x = \sqrt{8}; & t = 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) dt = \left[t - \operatorname{ar} \operatorname{cth} t \right]_2^3 = 3 - \operatorname{ar} \operatorname{cth} 3 - 2 + \\ &+ \operatorname{ar} \operatorname{cth} 2 = 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{3+1}{3-1} + \frac{1}{2} \ln \frac{2+1}{2-1} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \approx 1,2027 \end{aligned}$$

$$1306. \quad \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}} dx = \int_0^2 \frac{2t^2}{1+2t} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{4t^2 - 1 + 1}{2t+1} dt =$$

$$\begin{array}{lll} x = t^2; & dx = 2t dt; & \text{alsó határ: } x = 0; \quad t = 0 \\ & & \text{felső határ: } x = 4; \quad t = 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(2t - 1 + \frac{1}{2t+1}\right) dt = \frac{1}{2} \left[t^2 - t + \frac{1}{2} \ln(2t+1) \right]_0^2 = \\ &= \frac{1}{2} (4 - 2 + \frac{1}{2} \ln 5) = 1 + \frac{1}{4} \ln 5 \approx 1,4023. \end{aligned}$$

$$1307. \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = - \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - t^2) dt =$$

$$\cos x = t; \quad -\sin x dx = dt$$

$$\text{alsó határ: } x = 0; \quad t = 1$$

$$\text{felső határ: } x = \frac{\pi}{4}; \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{5}{6} \approx 0,0775$$

$$1308. \quad \frac{1}{2} \ln \frac{9}{4} \approx 0,4054$$

$$1309. \quad \frac{1}{2} (\operatorname{ar sh} a + a \sqrt{1+a^2})$$

$$1310. \quad 2 \ln(e^2 + 1) - 2 - 2 \ln 2 \approx 0,8676$$

$$1311. \quad 1$$

$$1312. \quad \frac{1}{2} (3 \sqrt{10} - \ln(\sqrt{10} + 3)) \approx 3,834$$

$$1313. \quad a) 10.$$

$$\xi_k = \frac{kh + (k-1)h}{2} = (k - \frac{1}{2})h,$$

ahol $h = \frac{2}{n}$.

$$b) \quad \sigma'_n = \sum_{k=1}^n [2(k - \frac{1}{2})h + 3] h = h^2 \sum_{k=1}^n (2k - 1) +$$

$$+ h \sum_{k=1}^n 3 = h^2 \cdot n^2 + 3nh$$

Mivel $n \cdot h = 2$ (t. i. az intervallum hossza 2), azért

$$\sigma'_n = 4 + 3 \cdot 2 = 10$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma'_n = 10$$

$$1314. \quad \frac{22}{3};$$

Mivel az $f(x) = x^2 + 1$ függvény a $[2, 3]$ intervallumban korlátos és monoton, azért integrálható (lásd a 25. 1. tételt), így a függvény grafikonja alatti A tartomány mérhető területű és

$$\text{mes } A = \int_2^3 (x^2 + 1) dx \text{ (lásd a 24. 6. tételt)}$$

$$\Delta P_n = \max_k (x_k - x_{k-1}) = \max_k \frac{3-2}{n} = \frac{1}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta P_n = 0$, tehát ΔP_n minden határon túl finomodó felosztás-sorozat.

Mivel az integrandus-függvény monoton növekedő és folytonos, azért

$$M_k = 1 + x_k^2$$

$$S_{P_n} = \left\{ 1 + \left[2 + \frac{k}{n} \right]^2 \right\} \frac{1}{n}$$

Felhasználva a négyzetszámok összegére vonatkozó

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ismert}$$

összefüggést,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{P_n} = \frac{22}{3} \text{ adódik.}$$

$$\text{Tehát mes } A = \frac{22}{3}$$

1315. In 2;

Először azt kell belátni, hogy P_n $n = 1, 2, \dots$ minden határon túl finomodó felosztás-sorozat.

$$\Delta P_n = \max_k (x_k - x_{k-1}) = \max_k \left(2^{\frac{k}{n}} - 2^{\frac{k-1}{n}} \right) =$$

$$= \max_k 2^{\frac{k}{n}} \left(1 - 2^{-\frac{1}{n}} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta P_n = 2(1 - 1) = 0.$$

Mivel $f(x) = \frac{1}{x}$ monoton csökkenő, folytonos függvény, azért

$$m_k = \frac{1}{x_k} = 2^{-\frac{k}{n}}$$

és

$$s_{p_n} = \sum_{k=1}^n 2^{-\frac{k}{n}} (2^{\frac{k}{n}} - 2^{\frac{k-1}{n}}) = \sum_{k=1}^n (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) =$$

$$= n (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Itt $\sqrt{2} = 1 + h$, ahol $h \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$

$$\text{Ebből } \frac{\ln 2}{n} = \ln(1 + h); \quad n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + h)}$$

Igy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{p_n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln 2}{\ln(1 + h)} \cdot \frac{1 + h - 1}{1 + h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln 2}{1 + h} \cdot \frac{1}{\frac{\ln(1 + h)}{h}} = \ln 2$$

Ugyanis $\ln \frac{1+h}{h}$ éppen az $f(x) = \ln x$ függvény $x_0 = 1$ helyhez tartozó differenciáhányadosa, s így határértéke

$$f'(1) = \frac{1}{1}$$

Tehát

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{p_n} = \ln 2$$

1316. $e^b - e^a$

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = h, \quad \xi_k = x_k = a + kh$$

Felhasználva az

$$1 + e^h + e^{2h} + \dots + e^{(n-1)h} = \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} \quad \text{összefüggést,}$$

továbbá a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \text{ határérték-relációt,}$$

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a \text{ adódik.}$$

1317. 1;

$$S_P = \sum_{k=1}^n h \cdot \sin kh$$

Felhasználva a $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

összefüggést, (-1) -gyel végigszorozva, $\alpha = (k + \frac{1}{2})h$,
 $\beta = (k - \frac{1}{2})h$ szereposztással,

$2 \sin \frac{h}{2} \sin kh = \cos (k - \frac{1}{2})h - \cos (k + \frac{1}{2})h$ adódik. Fussa át
 k az 1, 2, ..., n számokat:

$$k = 1 : 2 \sin \frac{h}{2} \sin h = \cos (-\frac{1}{2}h) - \cos \frac{1}{2}h$$

$$k = 2 : 2 \sin \frac{h}{2} \sin 2h = \cos \frac{1}{2}h - \cos \frac{3}{2}h$$

$$k = 3 : 2 \sin \frac{h}{2} \sin 3h = \cos \frac{3}{2}h - \cos \frac{5}{2}h$$

.....

$$k = n : 2 \sin \frac{h}{2} \sin nh = \cos (n - \frac{1}{2})h - \cos (n + \frac{1}{2})h$$

Ezek összegezésével:

$$2 \sin \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n \sin kh = \cos (-\frac{h}{2}) - \cos (n + \frac{1}{2}) \frac{h}{2} =$$

$$= 2 \sin n \frac{h}{2} \sin (n + 1) \frac{h}{2}$$

Innen:

$$h \sum_{k=1}^n \sin kh = \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} 2 \sin n \frac{h}{2} \cdot \sin (n + 1) \frac{h}{2} =$$

$$= \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} 2 \sin \frac{nh}{2} \cdot \sin \frac{nh + h}{2}$$

Tekintetbe véve, hogy

$$n \cdot h = \frac{\pi}{2}, \text{ és } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1,$$

az adódik, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[h \sum_{k=1}^n \sin kh \right] = 1 \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

Tehát:

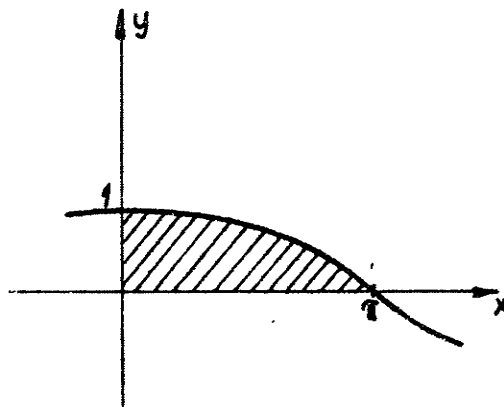
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{P_n} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1$$

1318. $\frac{2}{3}$;

1319. 40,75;

1320. 2;

$$\text{més } A = \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \, dx = 2 \left[\sin \frac{x}{2} \right]_0^{\pi} = 2 \cdot 1 = 2$$

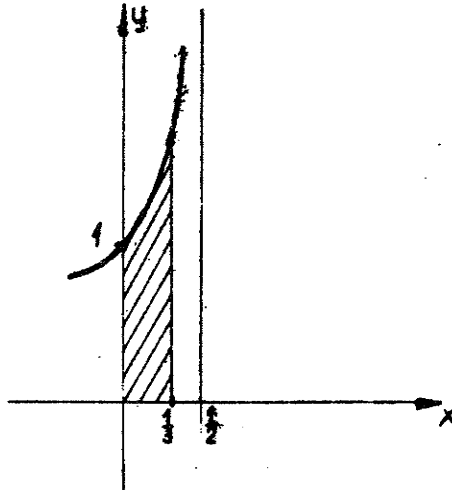


1320. ábra

1321. $\ln \frac{\sqrt{10}}{2};$

1322. $\approx 0,423;$

$$\text{mes } A = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx = \left[-\sqrt{1-2x} \right]_0^{\frac{1}{3}} = -\sqrt{\frac{1}{3}} + 1 \approx 0,423$$



1322. ábra

1323. $\frac{\pi}{4};$

1324. a) -2 ill. 2; b) 0 ill. 4;

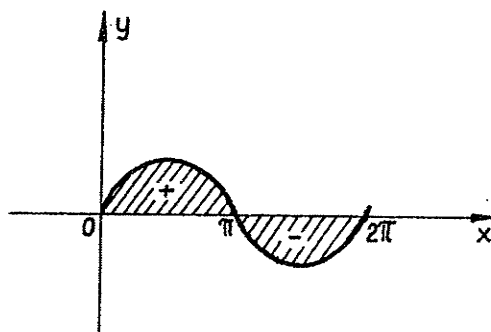
$$\text{a) mes } T = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -1 - 1 = -2$$

$$\text{mes } T_{\text{geom}} = \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = |-2| = +2$$

$$\text{b) mes } T = \int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0$$

A geometriai terület meghatározása végett először a görbe a tengellyel való metszéspontjait kell meghatározni.

$$\text{mes } T_{\text{geom}} = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = 4$$



1324. ábra

1325. $-1, 18;$

1326. $\frac{bc}{a};$

1327. $4, 5;$

A metszéspontok abszcisszája $x^2 = x + 2$ -ből:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1; \quad y_1 = 4, \quad y_2 = 1$$

A trapéz területéből (az egyenes-szakasz alatti területből) le kell vonni a parabola-ív alatti területet, tehát

$$\text{még } A = 7,5 - \int_{-1}^2 x^2 dx = 7,5 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = 7,5 - 3 = 4,5$$

1328. $\frac{32}{3};$

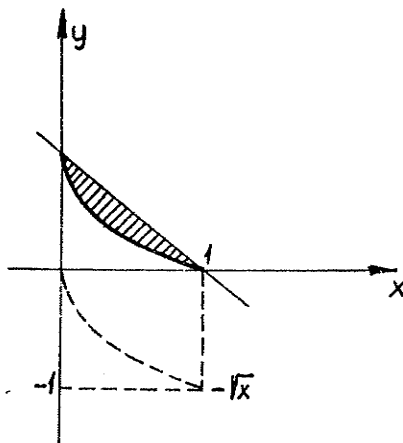
1329. $\approx 0,49; \quad \left(\frac{15}{8} - 2 \cdot \ln 2 \right)$

1330. $\approx 0,428; \quad \left[2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right]$

1331. $\frac{1}{3};$

Az ábrából leolvashatók az integrálás határai.

$$\text{még } A = \frac{1}{2} - \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$



1331. ábra

1332. 9;

1333. 2, 56;

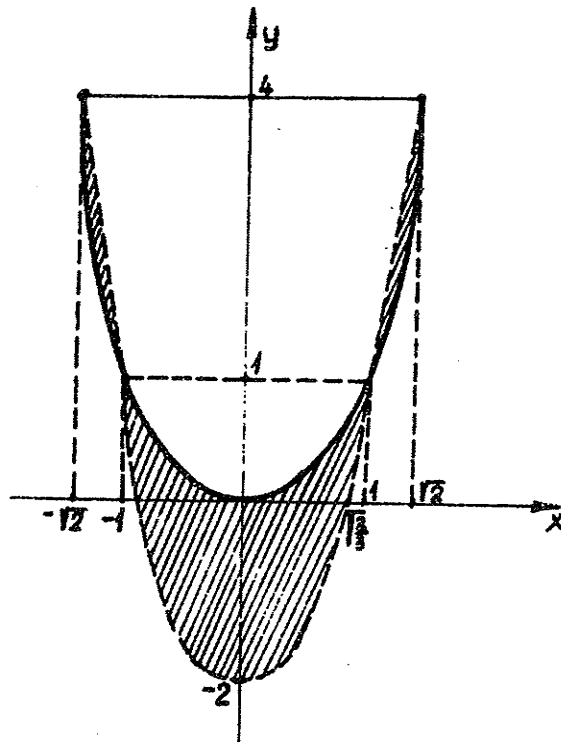
A két görbe metszéspontjai: $M_{1,2}(\pm 1, 1)$; $M_{3,4}(\pm \sqrt{2}, 4)$

A szimmetriát felismerve:

$$\begin{aligned} \text{mes } A_{\text{geom}} &= 2 \left[\int_0^1 x^4 dx + \int_1^{\sqrt{2}} (3x^2 - 2) dx - \int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^1 (3x^2 - 2) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_1^{\sqrt{2}} x^4 dx + \left| \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} (3x^2 - 2) dx \right| \right] \approx 2,56 \end{aligned}$$

Rövidebben:

$$\begin{aligned} \text{mes } A_{\text{geom}} &= 2 \left[\left(\int_0^1 x^4 dx - \int_0^1 (3x^2 - 2) dx \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_1^{\sqrt{2}} (3x^2 - 2) dx - \int_1^{\sqrt{2}} x^4 dx \right) \right] \end{aligned}$$



1333. ábra

1334. $\frac{2}{3}$;

Az érintő meredeksége $f'(4) = \frac{1}{4}$, s így egyenlete

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

Az érintő alatti trapéz területe: 6

$$\text{mes } A = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$$

1335. $\frac{2}{3}$;

1337. r^2 ;

A szimmetriát és a befutás irányát tekintetbe véve:

$$\text{mes } A = 2 \int_{\pi}^0 (-r^2 \sin^2 t) dt$$

$$1338. \quad ab \left(1 - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$1339. \quad \frac{3r^2\pi}{8};$$

$$\text{mes } A = 4 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^0 r \sin^3 t \cdot 3r \cos^2 t (-\sin t) dt =$$

$$= 12r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = 12r^2 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3r^2\pi}{8}$$

$$1340. \quad 3r^2\pi;$$

A ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= r(t - \sin t) \\ y(t) &= r(1 - \cos t) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{mes } C = \int_a^b f(x) dx = \int_{\mathcal{L}} y(t) \cdot x'(t) dt =$$

[lásd a 31. l. tételt: $a = 0$, $b = 2\pi r$, $\mathcal{L} = 0$, $\beta = 2\pi$]

$$= r(1 - \cos t) r(1 - \cos t) dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= r^2 \left[\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = 3r^2\pi$$

Tehát a szóban forgó terület háromszorosa a gördülő kör területének.

$$1341. \quad \frac{r^2\pi^3}{48};$$

Az ODBC téglalap területéből ki kell vonni a negyedkör és az AB görbeiv alatti területet. Miután az evolvens paraméteres egyenletrendszere:

$$x(t) = r(\cos t + t \sin t)$$

$$y(t) = r(\sin t - t \cos t)$$

A görbe alatti terület:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\sin t - t \cos t) r t \cos t dt = \frac{r^2 \pi}{4} - \frac{r^2 \pi^3}{48}$$

[Az egyes tagok parciálisan integrálhatók]

Igy a keresett terület:

$$\text{mes } A = \frac{r^2 \pi^3}{48}$$

$$1342. \quad \frac{a^2 \pi}{2};$$

$$1343. \quad \approx 5,3; \quad \left[\frac{3}{4} e^{\frac{2\pi}{3}} - 1 \right]$$

$$1344. \quad \approx 0,29; \quad \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$1345. \quad R^2 \left(\beta - \mathcal{L} + \frac{\sin 2\beta - \sin 2\mathcal{L}}{2} \right);$$

A polárkoordinátarendszer kezdőpontját A-ban, $\varphi = 0$ tengelyét a jelölt körátmérő irányában elhelyezve, a kör egyenlete:

$$r = 2R \cos \varphi$$

A szektortartomány területe tehát:

$$\begin{aligned} \text{mes } S &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}}^{\beta} 4R^2 \cos^2 \varphi d\varphi = 2R^2 \int_{\mathcal{L}}^{\beta} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \\ &= R^2 \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{\mathcal{L}}^{\beta} = R^2 \left(\beta - \mathcal{L} + \frac{\sin 2\beta - \sin 2\mathcal{L}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$1346. \quad 16[\pi - 1];$$

$$1347. \quad \approx 10,28;$$

A kör és lemniszkáta metszéspontja:

$$4\sqrt{\cos 2\varphi} = 2; \quad \varphi = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}$$

A lemniszkáta $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}$ íve által meghatározott szektortartomány területéből kivonva a körszektor területét, a keresett siktartomány-terület $\frac{1}{4}$ -e adódik.

$$\begin{aligned} [\text{Számolás közben: } \sin(\arccos \frac{1}{4})] &= \sqrt{1 - \cos^2(\arccos \frac{1}{4})} = \\ &= \sqrt{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

Végeredményben:

$$\text{mes } S = 4 \left(\sqrt{15} - \arccos \frac{1}{4} \right) \approx 10,28$$

1348. $\sqrt[3]{30};$

1349. $\approx 9,18; \quad \left[\frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \right]$

1350. $a \operatorname{sh} 1;$

1351. $\approx 0,6; \quad \left[\ln 3 - \frac{1}{2} \right]$

1352. $\text{mes } p = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{ar} \operatorname{sh} 1;$

1353. $\text{mes } \ell = 1 + \ln \sqrt{1,5} \approx 1,2;$

Mivel $\ln x \in C^1_{[\sqrt{3}, \sqrt{8}]}$ és $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ korlátos $[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$ -ban, azért

$$\text{mes } \ell = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \quad (\text{lásd a 31.5. tételt})$$

Alkalmazva az $\frac{1}{x} = \operatorname{sh} t$ helyettesítést:

$$\begin{aligned}
 \text{mes } \ell &= - \int_{\operatorname{ar sh} \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\operatorname{ar sh} \frac{1}{\sqrt{8}}} \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh}^2 t} dt = - \int_{\operatorname{ar sh} \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\operatorname{ar sh} \frac{1}{\sqrt{8}}} \frac{1 + \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{sh}^2 t} dt = \\
 &= \left[\operatorname{cth} t - t \right]_{\operatorname{ar sh} \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\operatorname{ar sh} \frac{1}{\sqrt{8}}} = \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{ar sh} \frac{1}{\sqrt{8}})}{\operatorname{sh}(\operatorname{ar sh} \frac{1}{\sqrt{8}})} - \operatorname{ar sh} \frac{1}{\sqrt{8}} - \\
 &\quad - \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{ar sh} \frac{1}{\sqrt{3}})}{\operatorname{sh}(\operatorname{ar sh} \frac{1}{\sqrt{3}})} - \operatorname{ar sh} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{8}}}{\frac{1}{\sqrt{8}}} - \\
 &\quad - \ln \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \sqrt{\frac{1}{8} + 1} \right) - \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \ln \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3} + 1} \right) = \\
 &= 3 - 2 - \ln \frac{4}{\sqrt{8}} + \ln \frac{3}{\sqrt{3}} = 1 - \ln \sqrt{2} + \ln \sqrt{3} = 1 + \ln \sqrt{1,5}
 \end{aligned}$$

1354. $\approx \ln 30,03 \approx 3,4;$

1355. $6a;$

$$\text{mes } a = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{\frac{2}{3} - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = 6a$$

1356. $\sqrt{2} [e^{\frac{\pi}{2}} - 1] \approx 5,5;$

1357. $\frac{\pi}{\sqrt{2}};$

1358. $\frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{1}{8} \ln(4 + \sqrt{17}) \approx 2,32;$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 16 \sin^2 t \cos^2 t + \cos^2 t$$

$$\text{mes } g = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sqrt{1 + 16 \sin^2 t} dt$$

Alkalmazva a $4 \sin t = \text{sh } u$ helyettesítést, az $\int \frac{1}{4} \text{ch}^2 u du$ integrált kell kiszámítani.

1359. $8r$;

$$\text{mes } c = 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8r$$

1360. $\frac{8a}{3}$;

1361. $8a$;

$$\begin{aligned} r'^2 + r'^2 &= 4a^2 (2 + 2 \cos \varphi) = 8a^2 (1 + \cos \varphi) = \\ &= 8a^2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \\ \text{mes } g &= 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \end{aligned}$$

1362. $\frac{c}{2} (2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \text{ar sh } 2\pi)$;

1363. $\approx 0,76$;

$$\text{mes } g = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sqrt{\varphi^2 + 1}}{\varphi^2} d\varphi$$

$\varphi = \text{sh } t$ helyettesítéssel

$$\int \frac{\text{ch}^2 t}{\text{sh}^2 t} dt = -\text{cth } t + t \text{ adódik.}$$

Igy

$$\begin{aligned} \text{mes } g &= \left[-\frac{\sqrt{\varphi^2 + 1}}{\varphi} + \operatorname{ar sh} \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\sqrt{\pi^2 + 4} - \sqrt{\pi^2 + 1}}{\pi} + \\ &+ \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}) - \ln\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 1}\right) \approx 0,13 + \\ &+ \ln \frac{2(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})}{\pi + \sqrt{\pi^2 + 4}} \approx 0,13 + 0,63 \end{aligned}$$

1364. $\frac{2}{3}\pi$;

1365. $\approx 0,73\pi$;

1366. $\frac{\pi}{4} (e^2 - 1)$;

1367. 0,6;

A feladat kétféle úton is megoldható:

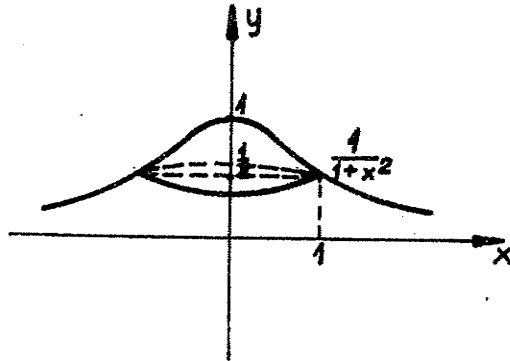
a) Áttérve az inverz függvényre és az y integrálási változóval dolgozva:

$$\begin{aligned} \text{mes } F &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 [f^{-1}(y)]^2 dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = \\ &= -\frac{\pi}{2} + \pi \ln 2 \approx 0,6 \end{aligned}$$

b) Az x integrálási változóval dolgozva, először a határokat kell megállapítani:

$$\begin{aligned} \text{mes } F &= \pi \int_1^2 x^2 f'(x) dx = \pi \int_1^2 x^2 \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx = \\ &= -\pi \int_1^2 2x \frac{(x^2 + 1) - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = -\pi \int_1^2 \left[\frac{2x}{x^2 + 1} - 2x(x^2 + 1)^{-2} \right] dx = \\ &= -\pi \left| \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \right|_1^2 = \end{aligned}$$

$$= -\pi \left[1 - \ln 2 - \frac{1}{2} \right] = -\frac{\pi}{2} + \pi \ln 2$$



1367. ábra

1368. $\frac{e\pi}{2} (e^2 - 1);$

$$a) \pi \int_{y_1}^{y_2} [f^{-1}(y)]^2 dy = \pi \int_{0,5}^{1,5} e^{2y} dy = \frac{e\pi}{2} (e^2 - 1)$$

$$b) \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 f'(x) dx = \pi \int_{e^{0,5}}^{e^{1,5}} x^2 \frac{1}{x} dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_{e^{0,5}}^{e^{1,5}} = \frac{e\pi}{2} (e^2 - 1)$$

1369. $\frac{26}{81} \pi;$

1370. $\approx 11,4\pi;$

1371. $5\pi^3 \pi^2;$

A t paramétert vezetve be új integrációs változónak (lásd az 1340. feladatot)

$$\text{més } P = \pi \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t) r dt =$$

$$= \pi^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^3 \pi^2$$

$$1372. \quad r^3 \pi \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{8}{3} \right);$$

$$\text{mes } F = \pi \int_0^{\pi} r^3 (t - \sin t)^2 \sin t \, dt$$

A fellépő integrálok közül:

$$\int t^2 \sin t \, dt \text{ parciálisan integrálva,}$$

$$\int t \sin^2 t \, dt = \int t \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt, \text{ továbbá}$$

$$\int \sin^3 t \, dt = \int (1 - \cos^2 t) \sin t \, dt, \text{ a közölt átalakítás után számítható ki.}$$

$$1373. \quad \frac{\pi^2}{2};$$

$$1374. \quad \frac{\pi}{3} \operatorname{th}^3 t_0;$$

$$1375. \quad \frac{4a^3 \pi}{3};$$

$$1376. \quad \frac{144}{49};$$

Az x tengely körül forgatva:

$$\text{mes } X = \pi \int_0^a x^3 \, dx = \frac{\pi a^4}{4}$$

Az y tengely körül forgatva:

$$\text{mes } Y = \pi \int_0^a y^{\frac{3}{2}} \, dy = \frac{3}{7} \pi a^{\frac{7}{2}}$$

A keresett a értéke az alábbi egyenlet gyöke:

$$\frac{\pi a^4}{4} = \frac{3\pi a^{\frac{7}{2}}}{7}$$

$$1377. \approx 18,62;$$

A két görbe metszéspontjának meghatározása után, tekintettel a szimmetriára

$$\text{mes } F = 2\pi \int_0^1 x^4 dx + \int_1^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx = 2\pi a^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{11}{30} \sqrt{2} \right)$$

$$1378. y_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi} + 4} - 2;$$

A folyadékszint emelkedésének a mértékét y_0 -al jelölve:

$$1 = \pi \int_2^{2+y_0} y dy;$$

$$\frac{\pi}{2} [(2+y_0)^2 - 4] = 1 \quad \text{Innen } y_0 \text{ számítható.}$$

$$1379. 31.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{mes } S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx \approx 31$$

$$1380. \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) \approx 5,3;$$

$$1381. \approx 2,14;$$

$$1382. \left(\frac{15}{\pi} + \frac{1}{8} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{4} \approx 2,53$$

$$1383. \frac{\pi}{27} (10^{\frac{3}{2}} - 1) \approx 3,6$$

$$1384. \frac{\pi}{6} (\sqrt{125} - 1);$$

$$\text{mes } P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (\sqrt{125} - 1)$$

1385. $\frac{12}{5} a^{\frac{2}{3}} \pi$;

$$y' = -\frac{x^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{mes } A = 4\pi \int_0^a \left(\sqrt{\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}} - x^{\frac{2}{3}}} \right)^3 \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cos u \text{ helyettesítéssel}$$

$$\text{mes } A = -12a^{\frac{2}{3}} \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 u \cos u du \text{ adódik, s ez már } \int f(u) \cdot f'(u)$$

alakú integrál.

1386. $40\pi \left(\frac{5}{3} \text{Arc sin } 0,6 + \frac{4}{5} \right)$

1387. $2\pi \left(25 + \frac{80}{3} \ln 2 \right)$

Célszerű a mes $E = 2\pi \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) \sqrt{1 + [f^{-1}(y)]'^2} dy$ integrállal számolni az $f^{-1}(y)$ inverz függvény birtokában.

1388. $7\sqrt{2}\pi$;

Olyan csonkakúp-palástról van szó, ahol

$$r = 3, \quad R = 4, \quad m = 1$$

1389. $200\pi^2$ (x tengely körül forgatva)

$100\pi^2$ (y tengely körül forgatva)

$$1390. \quad \frac{128\pi}{5};$$

$$y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 4\sqrt{2} (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}} \sin t$$

$$1391. \quad \frac{64r^2\pi}{3};$$

$$y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{2} r^2 (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}} = 4r^2 \sin^3 \frac{t}{2}$$

$$U. \text{ is } \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$1392. \quad 8r^2\pi \left(\pi - \frac{4}{3}\right);$$

A ciklois egyenlete abban a koordináta-rendszerben, amelyben az y tengely az $x = r\pi$ egyenesre (a ciklois szimmetria tengelye) esik:

$$x = r(t - \sin t - \pi)$$

$$y = r(1 - \cos t)$$

Az új y tengely körül forgatva:

$$\begin{aligned} \text{mes } C &= 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} r(t - \sin t - \pi) \sqrt{2r^2(1 - \cos t)} dt = \\ &= 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} r^2 \sqrt{2} (t - \sin t - \pi) \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 4r^2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \left(t \sin \frac{t}{2} - 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} - \pi \sin \frac{t}{2}\right) dt = \\ &= 4r^2\pi \left[t \left(-\frac{\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right) + 4 \sin \frac{t}{2} - \frac{4}{3} \sin^3 \frac{t}{2} + \right. \\ &\quad \left. + 2\pi \cos \frac{t}{2} \right]_{\pi}^{2\pi} = 4r^2\pi \left[4\pi - 2\pi - 4 + \frac{4}{3} \right] = 8r^2\pi \left(\pi - \frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

$$1393. \quad \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (2e^{\pi} + 1);$$

$$\begin{aligned} \text{mes } L &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\varphi} \sin \varphi \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{5} \left[2e^{2\varphi} \sin \varphi - e^{2\varphi} \cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

(lásd $\int e^{ax} \sin bx \, dx$ parciális integrálását)

$$1394. \quad \frac{32 R^2 \pi}{5};$$

$$1395. \quad 4\pi^2;$$

Az x tengelyt az origóban érintő, egységsugarú kör megforgatásával nyert tórusz felületéről van szó. A meridián-görbe ívhossza 2π , a görbe súlypontja által leírt kör kerülete szintén 2π , így szorzatuk $4\pi^2$ megadja a forgásfelület felszínét. (Guldin első tétele. Gyakorlásul ellenőrizzük az 1389. feladat eredményeit Guldin-szabállyal.)

$$1396. \quad 8\pi(2 - \sqrt{2});$$

$$1397. \quad x_s = \frac{\pi}{2}, \quad y_s = \frac{\pi}{8};$$

$$f(x) \in C^0_{[a, b]} \quad \text{és} \quad f(x) \geq 0$$

$x \in [a, b]$ teljesül. (l. a 31.7. példát.) Felismerve a szimmetriát, $x_s = \frac{\pi}{2}$ adódik.

Az x tengelyre vonatkozó elsőrendű nyomaték:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{4}\pi$$

Másrészt

$$\text{mes } A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \text{ ismeretében, a súlypont fogalmából következően:}$$

$$\frac{1}{4}\pi = 2 \cdot y_s$$

$$1398. \quad x_s = \frac{2}{5}, \quad y_s = \frac{4}{7};$$

$$1399. \quad x_s = \frac{3}{\ln 4} \approx 2,16, \quad y_s = \frac{3}{8 \cdot \ln 4} \approx 0,27;$$

$$1400. \quad x_s = 0, \quad y_s \approx 2,16;$$

$$1401. \quad y_s = \frac{16}{3\pi};$$

$$\text{mes } E = \frac{1}{2} b \pi = 10\pi$$

$$M_x = \frac{16}{25} \int_0^5 (25 - x^2) dx = \frac{2 \cdot 5 \cdot 16}{3}$$

$$y_s = \frac{160}{3} \cdot \frac{1}{15\pi} = \frac{16}{3\pi}; \quad x_s = 0$$

$$1402. \quad x_s = 1,56, \quad y_s = 0,28;$$

$$1403. \quad x_s = r\pi, \quad y_s = \frac{5}{6} r;$$

x_s értéke a szimmetriából adódik.

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos t)^2 r (1 - \cos t) dt =$$

$$= \frac{r^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$= \frac{r^3}{2} \int_0^{2\pi} [1 - 3 \cos t + \frac{3}{2} (1 + \cos 2t) - \cos t (1 - \sin^2 t)] dt =$$

$$= \frac{r^3}{2} \left[\frac{5}{2} t - 4 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{5r^3\pi}{2}$$

$$\text{mes } C = 3r^2\pi$$

$$3r^2\pi \cdot y_s = \frac{5r^3\pi}{2}, \quad y_s = \frac{5}{6} r$$

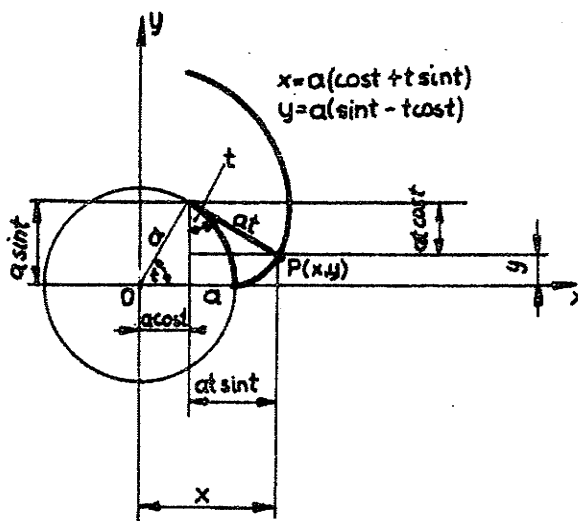
$$1404. \quad x_s = \frac{r\sqrt{3}}{2} + \frac{8r}{9\sqrt{3}}, \quad y_s = \frac{5}{6} r;$$

$$M_y = \int_0^{\sqrt{3}} x(t) \cdot y(t) \dot{x}(t) dt = \int_0^{\sqrt{3}} r^3 (t - \sin t) (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= r^3 \left(\frac{3\sqrt{3}^2}{4} + \frac{4}{3} \right)$$

$$\frac{3r^2\sqrt{3}}{2} \cdot x_s = r^3 \left(\frac{3\sqrt{3}^2}{4} + \frac{4}{3} \right)$$

$$1405. \quad x_s = \frac{a}{3}, \quad y_s = \frac{b}{3};$$



1405. ábra

$$1406. \quad y_s = \frac{m}{3} \frac{a+2b}{a+b};$$

$$1407. \quad y_s = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$M_x = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2+x^2} dx = 2$$

A félkörív tömege ($\rho \equiv 1$ miatt a hossza):

$$\text{mes } F = \pi$$

$$y_s \pi = 2$$

$x_s = 0$ a szimmetria folytán.

$$1408. \quad y_s = \frac{1}{2} \left(\text{ch } 1 + \frac{1}{\text{sh } 1} \right);$$

$$1409. \quad x_s = r\pi, \quad y_s = \frac{4}{3} r;$$

$$1410. \quad x_s = y_s = \frac{2}{\pi} \quad (\text{V. 8. 1407. pl.})$$

Formálisan:

$$M_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin s \cdot \sqrt{(-\sin s)^2 + (\cos s)^2} ds = \left[-\cos s \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

A negyedkörív hossza: $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} \cdot y_s = 1$$

$$M_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos s \sqrt{1} \cdot ds = \left[\sin s \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$1411. \quad M_y = -1,6 \sqrt{2} (e^{2\pi} + 1);$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi) \cos \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} 2e^{\varphi} \cos \varphi \sqrt{4e^{2\varphi} + 4e^{2\varphi}} d\varphi = 4\sqrt{2} \int_0^{\pi} e^{2\varphi} \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

Parciálisan integrálva nyerjük az eredményt.

1412. A magasságnak a csucstól számított $\frac{3}{4}$ részében. Mivel a forgástestnek az x tengely szimmetria tengelye, a súlypont rajta van az x tengelyen.

Tehát

$$y_s = z_s = 0$$

$$M_{y,z} = \pi \int_0^h x \cdot f^2(x) dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^3 dx = \frac{r^2 h^2}{4} \pi$$

$$M_{y,z} \text{ a súlypont segítségével kifejezve: } x_s = \frac{r^2 \pi h}{3}$$

$$x_s \frac{r^2 h \pi}{3} = \frac{r^2 h^2 \pi}{4}; \quad x_s = \frac{3h}{4}$$

$$1413. \quad x_s = \frac{3}{8}; \text{ (félgömb)}$$

$$1414. \quad x_s = \frac{r \pi}{2} + \frac{64r}{45 \pi};$$

$$1415. \quad x_s = \frac{13}{6};$$

A szimmetria következtében $y_s = z_s = 0$

$$M_{y,z} = 2\pi \int_1^3 y \cdot x \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_1^3 x^2 \sqrt{2} dx = \frac{52\pi \sqrt{2}}{3}$$

$$\text{més } F = \frac{6\pi + 2\pi}{2} \sqrt{8} = 8\pi \sqrt{2}$$

$$1416. \quad x_s = \frac{r}{2}$$

$$1417. \quad x_s = \frac{2 + \sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} M_{y,z} &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sqrt{\cos 2\varphi} \sin 2\varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \sqrt{4 \cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \sin 2\varphi \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}} \sin 2\varphi \, d\varphi = 4\pi \left[-\frac{(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\
 &= 4\pi \frac{2}{3} = \frac{8\pi}{3}
 \end{aligned}$$

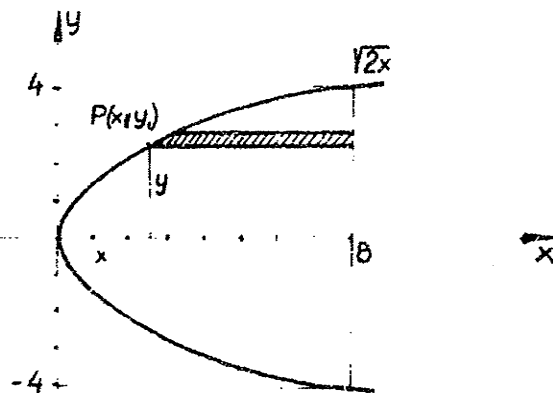
A forgásfelület felszíne: $4\pi(2 - \sqrt{2})$ (l. az 1396. példát!) A nyomatékok megegyezése folytán:

$$\begin{aligned}
 4\pi(2 - \sqrt{2}) x_s &= \frac{8\pi}{3} \\
 x_s &= \frac{2}{3(2 - \sqrt{2})} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{3 \cdot 2}
 \end{aligned}$$

1418. 136,5;

$$I_x \approx \sum_{i=1}^n y_i^2 (8 - x_i) (y_i - y_{i-1})$$

$$I_x = \int_{-4}^4 y^2 \left(8 - \frac{y^2}{2}\right) dy = 2 \int_0^4 \left(8y^2 - \frac{y^4}{2}\right) dy = 136,5$$



1418. ábra

1419. 125π ;

$$I_y = 4 \int_0^5 x^2 \cdot y \, dx = 16 \int_0^5 x^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{5}\right)^2} \, dx =$$

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 125 \sin^2 t \cos^2 t \, dt = 4 \cdot 125 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt = 125\pi.$$

1420. $\frac{a b^3}{3}$;

Célszerű az y tengelyt a kiszemelt a oldalra helyezni, és a téglalapot az y tengellyel párhuzamos egyenesekkel szeletelni.

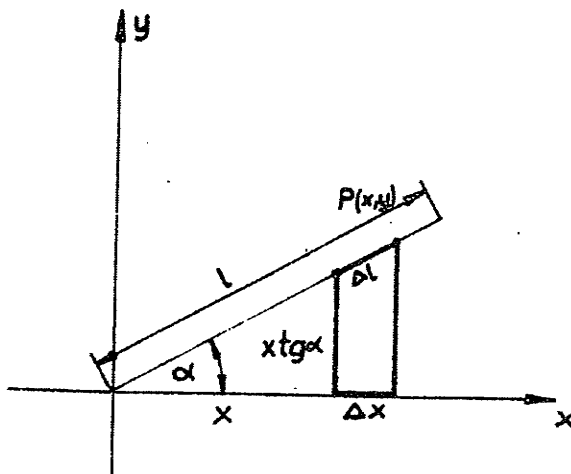
1421. $\frac{a b^3}{12}$;

1422. $\frac{a m^3}{12}$;

1423. $\frac{l^3}{3}$.

1424. $\frac{l^3}{3} \sin^2 \alpha$;

Az ábráról leolvasható: $\Delta l = \frac{\Delta x}{\cos \alpha}$



1424/a ábra

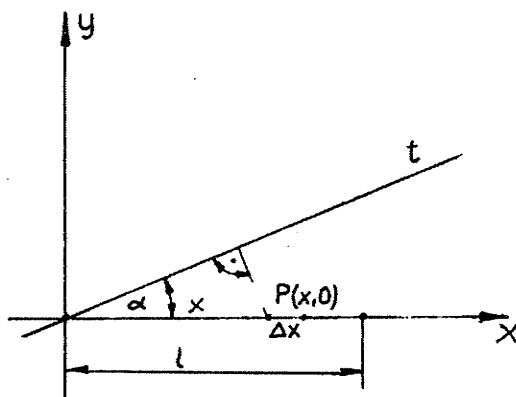
Tehát

$$x = \int_0^{\ell \cos \alpha} (x \operatorname{tg} \alpha)^2 \frac{1}{\cos \alpha} dx = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} \int_0^{\ell \cos \alpha} x^2 dx =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} \frac{1}{3} \cdot \ell^3 \cos^3 \alpha$$

Vagy:

$$I_t = \int_0^{\ell} (x \sin \alpha)^2 dx = \sin^2 \alpha \int_0^{\ell} x^2 dx = \sin^2 \alpha \cdot \frac{\ell^3}{3}$$



1424/b ábra

1425. $\frac{MR^2}{2}$;

Az x sugaru, Δx vastagságú hengergyűrűk nyomatékait összegezve:

$$I = \int_0^R r^2 (2\pi x h) dx = \frac{R^4 h \pi}{2}$$

$\rho \approx 1$ miatt $R^2 \pi h$ térfogat számértéke megegyezik a tömeg számértékével.

1426. $0,3 MR^2$;

Első megoldás: 1426/a ábra.

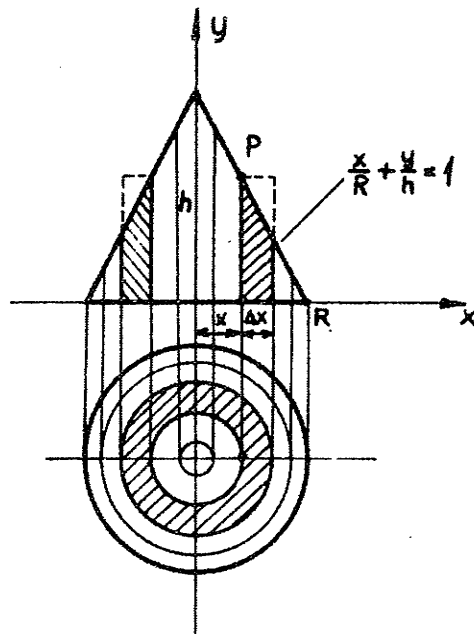
A kupot hengerekkel megközelítően hengergyűrűknek tekinthető részekre daraboljuk. (A daraboló hengerek közös tengelye

a kup tengelye, így a kup alapkörét a hengerek alapköréi körgyűrűkre bontják szét.)

Egy "hengergyűrű" közelítő nyomatéka:

$$x^2 \cdot 2\pi y \cdot \Delta x = 2\pi x^3 \left(h - \frac{h}{R} x\right)$$

ahol $y = h - \frac{h}{R} x$, az alkotó egyenes egyenlete.



1426/a ábra

Összegezve és határértéket képezve:

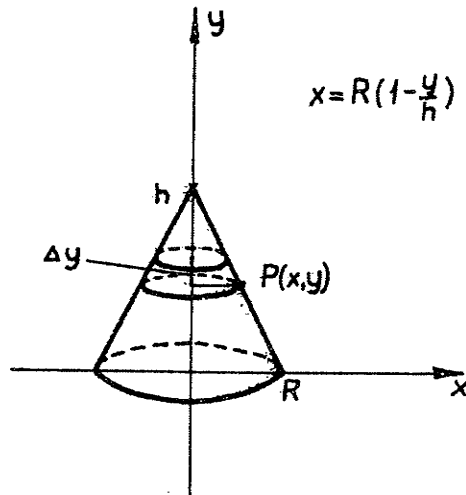
$$\begin{aligned} I_t &= 2\pi h \int_0^R \left(x^3 - \frac{x^4}{R}\right) dx = 2\pi h \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5R} \right]_0^R = \\ &= 2\pi h \frac{R^4}{20} \end{aligned}$$

$\rho \equiv 1$ miatt a térfogat és tömeg számértéke megegyezik, így

$$I_t = \frac{R^2 \pi h}{3} \cdot \frac{3}{10} R^2 = M \cdot 0,3 R^2$$

Másik megoldás:

A kupot az alappal párhuzamos síkokkal szeletelve, egy-egy - közelítőleg hengernek tekinthető - szelet tehetetlenségi nyomatéka:



1426/b ábra

$$\Delta I = \frac{x^4 \pi}{2} \Delta y \text{ (l. az 1425. feladatot).}$$

Ezeket az elemi nyomatékokat összegezve és a határértéket képezve:

$$\begin{aligned} I_t &= \int_0^h \frac{x^4 \pi}{2} \cdot dy = \int_0^h \frac{R^4 \left(1 - \frac{y}{h}\right)^4 \pi}{2} dy = \\ &= \frac{R^4 \pi}{2} \left[(-h) \frac{\left(1 - \frac{y}{h}\right)^5}{5} \right]_0^h = - \frac{R^4 h \pi}{2} \left(0 - \frac{1}{5}\right) = \\ &= + \frac{1}{10} R^4 h \pi \end{aligned}$$

A nyert eredmény azonos az előbbivel.

1427. $\frac{8 R^5 \pi}{15};$

Most is célszerű hengergyűrűkre darabolni.

1428. $H^2 \left(a + \frac{H}{3m}\right), \text{ ahol } m = \operatorname{tg} \angle$

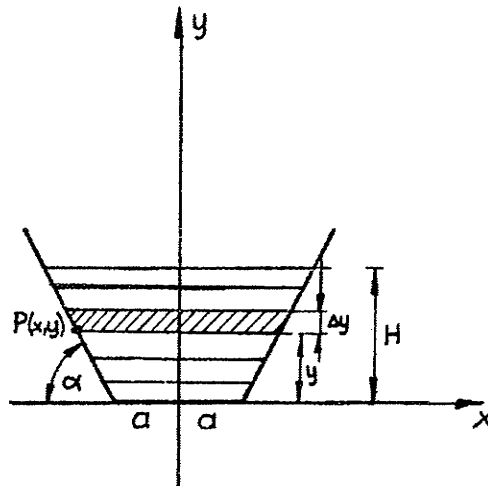
A nyomóerőt nem lehet a "nyomás" és a nyújtott felület szorzataként kiszámítani, mert a nyomás a felszínről mért távolsággal egyenes arányban változik.]

A lapot vízszintes sávokra bontjuk. (Egy ilyen sáv minden pontjában a nyomás közelítőleg azonos értékű.) Egy sávra ható nyomóerő: $(H - y)\gamma$ szorozva a sávterülettel. Egy sávra ható központi erő:

$$(2a + 2 \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha}) \Delta y$$

$\int$ miatt, összegezés és határérték képzés után a nyomóerő

$$\begin{aligned} F &= \int_0^H (H - y) (2a + 2 \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha}) dy = \\ &= \left[2aHy - ay^2 + \frac{1}{g \alpha} y^2 - \frac{2}{3 \operatorname{tg} \alpha} y^3 \right]_0^H = 2aH^2 + \frac{H^3}{3 \operatorname{tg} \alpha} \end{aligned}$$



1428. ábra

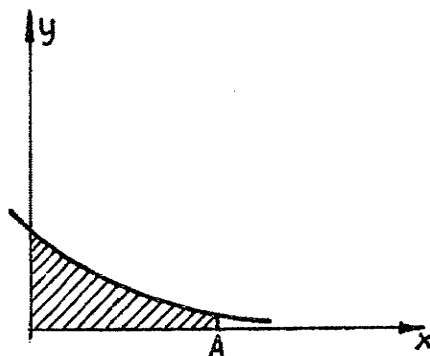
1429. 1:

Mivel e^{-x} $(-\infty, 0)$ intervallum minden véges részintervallumán korlátos és integrálható, továbbá $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \text{ létezik, azért (l. 30.8. tétel)}$$

$$\text{mes } T = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \right]_0^A =$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} [-e^{-A} + 1] = 1$$

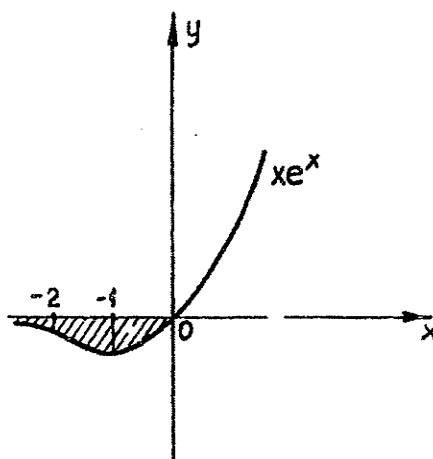


1429. ábra

430 π :

1431. $\frac{\pi}{4}$;

$$\text{mes } V = \pi \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot e^{2x} dx$$



1431. ábra

A parciális integrálás elvégzése után, a primitív függvény ismeretében, a 30.9. tétel alkalmazható:

$$\int_{-\infty}^0 x^2 e^{2x} dx = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} [F(0) - F(\omega)]$$

1432. $\frac{1}{2}$;

1433. divergens;

1434. $\sqrt{2}$;

1435. $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$;

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+3x^2} dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{1}{2+3x^2} dx + \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B \frac{1}{2+3x^2} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[-\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\sqrt{\frac{3}{2}} A \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{3}{2}} B \right] \right\} \end{aligned}$$

1436. 2; ($\sqrt{x} = t$ helyettesítés alkalmazandó)

1437. Nem;

Az integrálandó függvény a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallum $x = \frac{\pi}{2}$ helyén nincs értelmezve, és

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} = \infty$$

Ezért

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0+0} [\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\delta) - \operatorname{tg} 0] = \text{divergens} \end{aligned}$$

1438. $\frac{\pi}{2}$;

1439. $\mathfrak{H}$;

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-1+\delta}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \lim_{\xi \rightarrow 0+0} \int_0^{1-\xi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

1440. divergens;

1441. $\frac{2}{8}$;

1442. divergens;

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} [\ln(\ln x)] = -\infty$$

1443. Az integrál két okból kifolyólag is improprius: egyrészt az integrációs intervallum végtelen, másrészt a függvény nem kor-

látos a $[0, \infty)$ -ban. Ugyanis az $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ függvény az $x = 0$ helyen nincs értelmezve, és

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = \infty$$

A konvergencia igazolásához az integrált két részre kell bontani:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Mivel $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ primitív függvényei az elemi függvényjelekkel nem

írhatók fel, a konvergenciát majorizáló függvényekkel próbáljuk bizonyítani (anélkül, hogy az integrált konkrétan kiszámítsuk).

a) $[0, 1]$ -ben $e^{-x} < 1$, tehát

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

és mivel

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \text{ konvergens, azért a 30.3. tétel - majoráns}$$

kritérium - értelmében

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \text{ is konvergens.}$$

b) Ha $x \geq 1$, akkor $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$, tehát

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq e^{-x}$$

és mivel

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e} \text{ konvergens, azért}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \text{ is konvergens.}$$

Igy az eredeti integrál léte-ése igazolást nyert.

1444. konvergens;

1445. konvergens;

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ha } 0 < x < 1$$

1446. konvergens;

$$\sin x > \frac{x}{2}, \quad \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

1447. divergens;

$$\frac{1}{x + \sin^2 x} \geq \frac{1}{x+1}, \quad \text{és } \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x} \text{ (minoráns) divergens.}$$

$$1448. \quad \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\xi} \frac{dx}{\sin x} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\ln \left| \operatorname{tg} \left| -\frac{\xi}{2} \right| \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \left| -\frac{\pi}{6} \right| \right| \right] + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right]$$

Mivel egyik határérték sem létezik, az integrál divergens. Viszont:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\xi} \frac{dx}{\sin x} + \int_{\xi}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} \right] =$$

$$= \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln \operatorname{tg} \left| -\frac{\pi}{6} \right| = \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \ln \sqrt{3}$$

1449. Téglalap-módszerrel 2,188

Trapéz-módszerrel 2,338

Simpson-szabállyal $\frac{7}{3} = 2,333\dots$, s ez egyuttal a pontos érték is, hiszen a közelítő parabolák az eredeti parabolával egybeesnek. A kiszámított függvényértékeket az alábbi táblázat foglalja össze:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4

a) Téglalap-módszer.

Az integrál közelítő értéke (az alsó téglányösszeggel):

$$\int_1^2 x^2 dx \approx 0,1(1 + 1,21 + 1,44 + 1,69 + 1,96 + 2,25 + 2,56 +$$

$$+ 2,89 + 3,24 + 3,61) = 0,1 \cdot 21,85 = 2,185 \text{ (a pontos értéknel}$$

kisebb. Miért?)

b) Trapéz-módszer.

$$\int_1^2 x^2 dx \approx 0,1 \left(\frac{1+4}{2} + 1,21 + 1,44 + 1,69 + 1,96 + 2,25 + 2,56 +$$

$$+ 2,89 + 3,24 + 3,61 \right) = 0,1(2,5 + 20,85) = 2,335 \text{ (a pontos érték-}$$

nél nagyobb. Miért?)

c) Simpson-szabály. (Lényeges, hogy a felosztások száma páros legyen!)

$$\int_1^2 x^2 dx \approx \frac{0,1}{3} \left[1 + 4 + 2(1,44 + 1,96 + 2,56 + 3,24) + \right.$$

$$\left. + 4(1,21 + 1,69 + 2,25 + 2,89 + 3,61) \right] =$$

$$= \frac{1}{30} (5 + 18,4 + 46,6) = \frac{70}{3} = \frac{7}{3}$$

1450. a) Téglalap-módszerrel: 0,810 (felső téglányösszeggel)
 b) Trapéz-módszerrel: 0,7850
 c) Simpson-szabállyal: 0,7854
 d) A pontos érték: $\arctg 1 = \frac{\pi}{4} (\approx 0,7854...)$

A felhasznált függvényértékek táblázata:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	1	0,990	0,962	0,917	0,862	0,800	0,735	0,671	0,610	0,553	0,560

1451. $\approx 1,8;$

Először az előírt pontossághoz szükséges osztópontok számát becsüljük meg:

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}, \text{ ennek maximuma az } [1, 6] \text{ intervallumon}$$

$$M = 24, b - a = 5, \text{ így}$$

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{24 \cdot 5^5}{180 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}} \text{ kell legyen. Innen}$$

$$n \geq 5 \sqrt[4]{14} \approx 10, \text{ ezért } h = \frac{1}{2}$$

Tehát

$$\ln 6 \approx \frac{1}{6} (1 + 0,17 + 4 \cdot 1,76 + 2 \cdot 1,28) = 1,79$$

(négyjegyű táblázatból $\ln 6 = 1,7918$)

1452. $\approx 1,548;$

1453. $\approx 7,640;$ (Simpson-szabállyal)

$$\text{mes } \frac{\pi}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx \approx \frac{\pi}{24} \cdot 14,596 = 0,608\pi$$

1454. Trapéz-szabállyal: 22 m^2
 Simpson-formulával: $21,9 \text{ m}^2$

1455. $\approx 1,41;$

1456. $\approx 3,24;$

1457. $\approx 28,36;$

Az ellipszis paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 4 \cos t$$

$$y = 5 \sin t$$

$$\text{mes } E = 4 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{16 + 9 \cos^2 t} dt \approx 4 \cdot \frac{\pi}{24} [5 + 5 +$$

$$+ 4(4,87 + 4,16) + 2 \cdot 4,83] = \pi \cdot 9,03$$

1458. $x^2 + y^2 = c; \quad c \geq 0$

A differenciálegyenlet $y' = f(x) \cdot g(y)$ alakú, tehát a "változók szétválasztásával" megoldható:
 y -nal végigszorozva (feltesszük, hogy $y \neq 0$)

$$y(x) \frac{dy}{dx} = -x \text{ egyenletet nyerjük.}$$

Mindkét oldalon x szerint integrálunk:

$$y(x) y'(x) dx = -x dx$$

A bal oldali integrálban az $y(x) = y$ helyettesítést alkalmazva:

$$\int y dy = - \int x dx \text{ adódik.}$$

$$[\text{Formálisan: } y' = -\frac{x}{y}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}]$$

$$\text{"Keresztbe szorozva":} \quad y dy = -x dx$$

$$\text{Innen: } \int y dy = - \int x dx]$$

Tehát:

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

Az egyenletet rendezve, s a két integrációs konstanst összevonva, az általános megoldás:

$$x^2 + y^2 = c \quad \text{koncentrikus körsereg. (} c \geq 0 \text{)}$$

$$1459. \quad v = \frac{1}{1 - Cx};$$

A változókat formálisan szétválasztva:

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$1460. \quad y_1 = \sin(\arctg x + C_1);$$

$$y_2 = -\sin(\arctg x + C_2);$$

$$1461. \quad y = e^{c \operatorname{tg} \frac{x}{2}};$$

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y} dy = \ln |\ln y|$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx =$$

$$= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

$$1462. \quad \ln \sqrt{1+x^2} + \arctg y = C;$$

$$1463. \quad v = C e^{\sqrt{1+x^2}};$$

$$1464. \quad y_1 = \frac{1}{2} \sin(2x + c)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}$$

Ugyanis $y' = \pm \sqrt{1 - 4y^2}$ -ből csak akkor következik

$$\frac{dy}{\pm \sqrt{1 - 4y^2}} = dx, \quad \text{ha } 1 - 4y^2 \neq 0, \text{ vagyis ha } y \neq \pm \frac{1}{2}$$

1465. $y = -\frac{9}{2x}$; (Ábrázoljuk!)

Ugyanis

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{2}{x} dx \text{-ből:}$$

$$\ln|y| = -2 \ln|x| + \ln C$$

$$|y| = \frac{C}{|x|^2}; \quad C > 0$$

$$y = \frac{A}{x^2}$$

Beírva a kezdeti értékeket, A meghatározható:

$$-1 = \frac{A}{9}; \quad A = -9$$

A keresett partikuláris megoldás tehát:

$$y = -\frac{9}{x^2}$$

1466. $y = 2e^{1-x^2}$; (Ábrázoljuk!)

1467. $\frac{8}{3} - e^{-y} = \frac{e^x}{2} \left(1 + \frac{e^{-4x}}{3}\right);$

1468. $y = \arctg\left(1 - \frac{2}{x}\right);$

Ugyanis

$$\int \frac{dy}{1 + \cos 2y} = \int \frac{dx}{x^2}; \quad 1 + \cos 2y = 1 + \cos^2 y - \sin^2 y = 2 \cos^2 y$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} y = C - \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{tg} y = -\frac{2}{x} + A; \quad \text{Innen} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{\pi}{4} \text{ folytán } A = 1$$

A keresett partikuláris megoldás tehát

$$\operatorname{tg} y = -\frac{2}{x} + 1$$

1469. $\approx 4,2\%$

Differenciálegyenletük:

$$\frac{dR}{dt} = -k R$$

Itt R a rádium mennyisége tetszőleges t időpontban, k az arányossági tényező (a negatív előjel arra utal, hogy a bomlás következtében az anyag mennyisége fogy).

Az egyenlet általános megoldása:

$$R = A e^{-kt}$$

Ha a $t = 0$ időpontban a kiindulási anyag mennyisége $R = R_0$ akkor

$$R_0 = A e^{-k \cdot 0}, \text{ s így az integrációs állandó } A = R_0$$

A differenciálegyenlet kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldása tehát:

$$R = R_0 e^{-kt}$$

A k arányossági tényező a felezési idő ismeretében határozható meg:

$$\frac{1}{2} R_0 = R_0 e^{-k \cdot 1600}, \quad \text{ahonnan} \quad k = \frac{\ln 2}{1600}$$

Igy a mindenkorai rádiummennyiség, mint az idő függvénye meghatározott

$$R = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{1600} \cdot t}$$

A keresett helyettesítési érték:

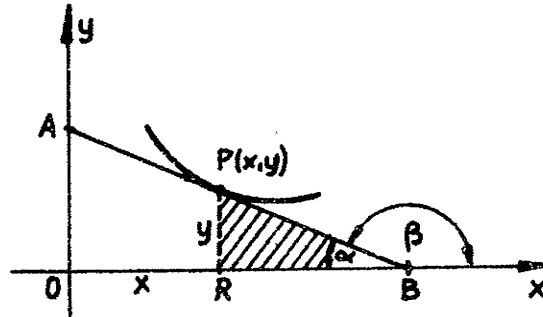
$$R(100) = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{16} \cdot 100} = R_0 e^{-0,0433}$$

Innen

$$\frac{R}{R_0} = e^{-0,0433} \approx 0,958 = 95,8\%$$

Tehát a 100. év végére megmaradt rádiummennyiség az eredeti mennyiség 95,8%-a.

1470. $y = \frac{C}{x};$



1470. ábra

A kikötés értelmében:

$$\overline{AP} = \overline{PB}, \text{ azért } \overline{OR} = \overline{RB}$$

Igy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$

Másrészt az érintő iránytangense:

$$m = y' = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Tehát

$$y' = -\frac{y}{x} \text{ a görbe bármely pontjában.}$$

A változókat szétválasztva, majd integrálva:

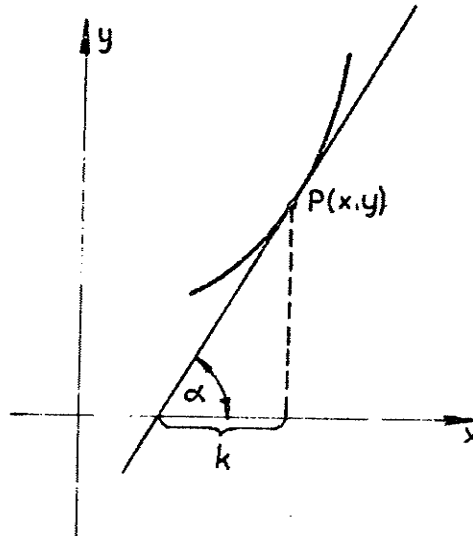
$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x} \text{ adódik.}$$

Az integrálást elvégezve, nyerjük a megoldást jelentő görbesereget (egyenlőszáru hiperbolákat).

1471. $y = \frac{C}{x^2}$ illetve $y = \frac{A}{\sqrt{x}};$

1472. $y = \frac{C}{x};$

1473. $y = C e^{\frac{x}{k}}$; (ahol k a szubtangens hossza)



1473. ábra

$$\overline{PS} = k$$

$$y' = \frac{y}{k}$$

1474. $y^n = Cx$;

Ha $n = 1$, sugársorról van szó.

Ha $n = 2$, parabolasereget kapunk.

Ha $n = -1$, hiperbolasereget kapunk.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= k \operatorname{ch} \frac{x+c}{k} \\ y_2 &= k \\ y_3 &= -k \end{aligned} \right\} \text{ ahol } k \text{ az arányossági tényező}$$

A görbe alatti terület ugyanis:

$$\text{mes } T = \int_a^x y \, dx$$

A görbeív hossza:

$$\text{mes } I = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

A feltevés szerint:

$$\int_a^x y dx = k \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Ebből az integrálegyenlethez (az ismeretlen függvény az integrál-jel alatt szerepel) deriválással kapjuk az alábbi differenciálegyenletet:

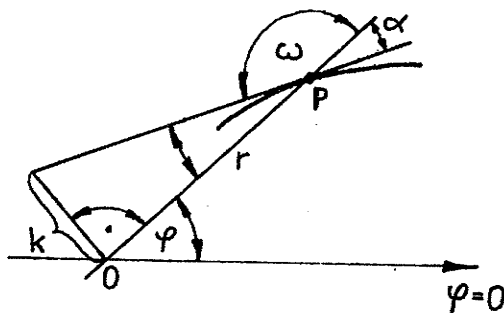
$$y = k \sqrt{1 + y'^2}; \quad y' = \frac{\sqrt{y^2 - k^2}}{k}$$

A változókat szétválasztva $y \neq \pm k$ feltevés mellett

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - k^2}} = \frac{dx}{x} \text{ adódik.}$$

Innen integrálással nyerhető az általános megoldás. Ezenkívül, az $y = \pm k$ esetet vizsgálva, adódik a másik két megoldás.

$$1476. \quad r = \frac{k}{\varphi + C}; \quad (\text{hiperbolikus spirális})$$



1476. ábra

Az ábrából:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{k}{r} = -\operatorname{tg} \varphi$$

Másrészt ismert, hogy

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'}$$

Tehát

$$\frac{r}{r'} = -\frac{k}{r}$$

Innen

$$-k \frac{dr}{r^2} = d\varphi$$

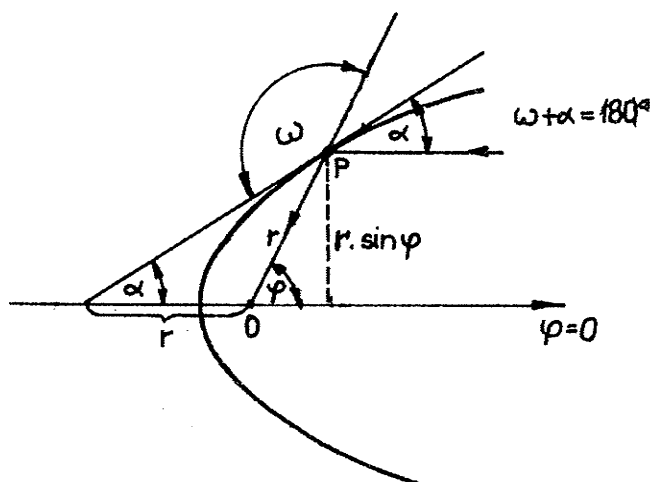
Integrálva:

$$\frac{k}{r} = \varphi + C$$

1477. $r = k\varphi + C$; (archimedesi spirális, ahol k az adott állandó szakasz)

1478. $r = C e^{\frac{\varphi}{k}}$ (logaritmikus spirális, ahol k a megadott szög tangense)

1479. $r = \frac{C}{1 - \cos \varphi}$; (0 fókuszú, $\varphi = 0$ tengelyű parabola)



1479. ábra

$$\operatorname{tg} \omega = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{r}{r'} = -\frac{r' \sin \varphi}{r' (1 + \cos \varphi)}$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi$$

Célszerű az

$$\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \text{ átalakítást végrehajtva integrálni.}$$

1480. $r = C \cdot e^{\varphi}$; (polárkoordinátákkal)

Az $y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$ átalakítás után (feltételezve, hogy $x \neq 0$), jól látható, hogy

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ alakú egyenletről van szó.}$$

Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

Innen

$$y(x) = u(x) \cdot x \text{ és } y' = u'x + u$$

Igy az $u(x)$ ismeretlen függvényre nézve a következő szétválasztható változóju differenciálegyenletet kapjuk:

$$u'x + u = \frac{1 + u}{1 - u}$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{1 - u}{1 + u} du = \frac{dx}{x} \text{ adódik.}$$

Integrálás után

$$\arctg u - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + \ln C = \ln x$$

$$\ln x \sqrt{1 + u^2} = \ln C + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} u$$

Visszaírjuk az eredeti változót és rendezünk:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C e^{\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}}$$

Áttérve polárkoordinátákra az általános megoldás:

$$r = C \cdot e^{\varphi} \quad \text{egyenletű logaritmikus spirálisok.}$$

$$1481. \quad y = \frac{C^2 x^2 - 1}{2C};$$

$$1482. \quad y \sin \frac{x}{y} = C;$$

$$1483. \quad \ln |x| + e^{-\frac{y}{x}} = C;$$

$$1484. \quad (x - C)^2 + y^2 = C^2; \quad (\text{parabolikus körsor})$$

A megoldandó differenciálegyenlet:

$$y - xy' = x \sqrt{1 + y'^2}$$

Ebből:

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right)$$

$$1485. \quad y = C \cdot e^{\frac{x}{y}};$$

A megoldandó differenciálegyenlet:

$$y - xy' = yy'$$

$$1486. \quad y = C e^{-\frac{x^2}{2}} + 1;$$

1. lépés: A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása.

$y' + yx = 0$ A változók szétválasztásával oldható meg:

$$\frac{dy}{y} = -x dx; \quad \ln |y| = -\frac{x^2}{2} + A$$

$$y_h = C e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2. lépés: Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_0 = f(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ alakban keressük:}$$

$$f'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + f(x) (-x) e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = x$$

$$f'(x) = x e^{\frac{x^2}{2}}$$

Ismét a változók szétválasztásával:

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + B$$

Miután az inhomogén egyenletnek egy partikuláris megoldását keressük. B-t az egyszerűség kedvéért nullának választhatjuk.

Tehát

$$y_0 = f(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

3. lépés: Mivel az inhomogén egyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként állítható elő, azért

$$y_{\hat{a}} = C e^{-\frac{x^2}{2}} + 1$$

$$148. \quad v = Cx + \frac{x^3}{2};$$

$$148. \quad A e^{-x} + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{5} \cos 2x;$$

$$v = e^{-x^2} \left(B + \frac{x^2}{2} \right);$$

$$1490. \quad v = (x + \ln x + C) \frac{x}{x+1};$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h = \frac{Cx}{x+1}$$

$$y_p - t \quad y = \frac{f(x) \cdot x}{x+1} \quad \text{alakban keressük.}$$

Behelyettesítve:

$$f'(x) = \frac{x+1}{x}, \text{ tehát } f(x) = x + \ln x$$

$$1491. \quad y = (x + C) \lg \frac{x}{2};$$

$$1492. \quad y_p = \frac{5}{2};$$

Az egyenlet a változók szétválasztásával is megoldható.

$$y_{\text{általános}} = \frac{5}{2} + B e^{-2x}$$

Behelyettesítve a kezdeti értékeket:

$$2,5 = \frac{5}{2} + B \cdot e^0, \text{ s innen } B = 0 \text{ adódik.}$$

Tehát

$$y_{\text{partik.}} = \frac{5}{2} \quad (x \text{ tengellyel párhuzamos egyenes})$$

$$1493. \quad y_p = \sin x + \cos x; \quad (\text{szuperpozícióval ábrázolható})$$

$$1494. \quad y_p = e^x \left(\frac{1}{x} - 1 \right);$$

$$1495. \quad i(t) = \frac{U_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \varphi);$$

Az áramkör differenciálegyenlete Ohm törvénye alapján:

$$U_0 \sin \omega t - L \frac{di}{dt} = R \cdot i,$$

Rendezve:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_0 \sin \omega t,$$

ahol

- R az ohmos ellenállás (ohmban)
 L a tekercs önindukciós együtthatója (henryben)
 U_0 a feszültség csúcserőértéke (voltban)
 ω a körfrekvencia (sec^{-1})
 i az áramerősség (amperben)

A megfelelő homogén egyenlet:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

Ennek általános megoldása:

$$i(t) = C e^{-\frac{R}{L}t}$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását:

$$i_p = f(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \text{ alakban keressük.}$$

Behelyettesítve és rendezve:

$$\frac{df}{dt} = \frac{U_0 \cdot \sin \omega t}{L} e^{\frac{R}{L}t}$$

$$f = \frac{U_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t$$

Kétszeres parciális integrálás után:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{U_0}{L} \frac{L(R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{\frac{R}{L}t} = \\
 &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left(\underbrace{\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}}_{\cos \varphi} \sin \omega t - \underbrace{\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}}_{\sin \varphi} \cos \omega t \right) e^{\frac{R}{L}t} \\
 &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin (\omega t - \varphi) e^{\frac{R}{L}t}
 \end{aligned}$$

ahol φ a fázisszög (az ellenállás háromszögéből leolvasható:

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Ezzel:

$$i_p = f(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

Tehát az eredeti inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$i = C e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

A C integrációs állandó értékét a kezdeti feltételből lehet meghatározni. A kapcsolás pillanatában, azaz a $t = 0$ időpillanatban legyen $i = 0$

$$496. \quad y = k \operatorname{ch} \frac{x}{k}$$

Az egyenletből hiányzik a függő változó. Az $v = p(x)$ helyettesítést alkalmazva $y'' = p'(\cdot)$, így a differenciálegyenletet elsőrendű differenciálegyenlet megoldására vezettük vissza:

$$k p' = \sqrt{1 + p^2}$$

A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{k} dx$$

$$\operatorname{ar} . h \quad \frac{1}{k} x + C$$

$$= \operatorname{sh} \frac{x + A}{k}$$

Visszatérve az eredeti változóra;

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} \frac{x + A}{k}$$

Ebből újabb integrálással adódik a keresett merőleges-függvény: a felfüggesztett lánc alakját megadó görbe egyenlete

$$1497. \quad y = C_1 \ln |\cos x| + C_2$$

$$1498. \quad y = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\ln x}{x} - \frac{x^2}{4} + C_1 x (\ln x - 1) + C_2$$

Az $y' = p(x)$ helyettesítés után, a p -re lineáris inhomogén egyenletet az állandó variálásának módszerével megoldva (lásd az 1486. feladatot):

$$p(x) = C \ln x + x \ln x \text{ adódik.}$$

Ebből az integrálás után (parciálisan integrálva) áll elő a közölt megoldás-függvény.

$$1499. \quad a) \quad y = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} - \frac{13}{6}x + 1$$

$$b) \quad y = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6}x + \frac{67}{24}$$

$$1500. \quad y = 4 \ln x + 0,24;$$

Az $y' = p$ -re megoldott egyenlet:

$$p = \frac{C_1}{x}$$

Az általános megoldás tehát:

$$y = C_1 \ln x + C_2$$

Először C_1 -et határozzuk meg az $y'(2) = 2$ feltételnek megfelelően:

$$C_1 = 4$$

Másrészt $y(2) = 3$; így C_1 ismeretében, az általános megoldásból

$$C_2 = 3 - 4 \ln 2 \approx 0,24$$

$$1501. \quad y_1 = \frac{1}{B} \operatorname{ch}(Bx + D); \quad \text{láncgörbék és}$$

$$(x+C)^2 + y^2 = \frac{1}{A^2}; \quad \text{olyan körök, amelyeknek a középpontja az } x \text{ tengelyen van.}$$

A görbületi sugár:

$$R = \left| \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right|$$

A normális szakasz hossza:

$$n = \left| \frac{y}{\cos \mathcal{L}} \right| = \left| y \sqrt{1 + y'^2} \right|$$

A megoldandó differenciálegyenlet tehát

$$\left| \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right| = \left| y \sqrt{1 + y'^2} \right|$$

Ebből

$$1 + y'^2 = \pm y y''$$

Két egyenlethez jutottunk tehát y'' előjelétől függően:

a) $1 + y'^2 = y y''$ A görbe alulról nézve domboru, ($y'' > 0$)
a szóban forgó két szakasz az érintő különböző oldalán van.

b) $1 + y'^2 = -y y''$ A görbe alulról nézve homoru ($y'' < 0$)

Mivel az egyenletekből hiányzik a független változó, azért

az $y' = p[y(x)]$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

a)

$$1 + p^2 = y \frac{dp}{dy} p$$

b)

$$1 + p^2 = - \frac{dp}{dy} p$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{p}{1 + p^2} dp = \frac{dy}{y} \quad \left| \quad - \frac{p}{1 + p^2} dp = \frac{dy}{y} \right.$$

Integrálás és rendezés után:

$$p = \pm \sqrt{(By)^2 - 1} \quad p = \pm \frac{\sqrt{1 - (Ay)^2}}{Ay}$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dy}{\pm \sqrt{(By)^2 - 1}} = dx \quad \left| \quad \frac{Ay}{\pm \sqrt{1 - (Ay)^2}} dy = dx \right.$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{B} \operatorname{ar ch} (By) = x + C & \mp \frac{1}{A} \sqrt{1 - (Ay)^2} = x + C \\ y = \frac{1}{B} \operatorname{ch} (Bx + D) & (x + C)^2 + y^2 = \frac{1}{A^2} \end{array}$$

1502. $y_1 = C$ és $y_2 = \pm \sqrt{Ax + B}$

1503. $y_1 = C$

$$y_2 = \begin{cases} \frac{1}{x + C_2}, & \text{ha } C_1 = 0 \\ \sqrt{C_1} \operatorname{tg} \sqrt{C_1}(x + C_2), & \text{ha } C_1 > 0 \\ -\sqrt{|C_1|} \operatorname{th} \sqrt{|C_1|}(x + C_2), & \text{ha } C_1 < 0 \end{cases}$$

$$y_2 - \ln |y_2| = Ax + B$$

1505. $y = 1 + \frac{1}{x}$; (Az általános megoldás: $y = 1 + \frac{1}{C_1 x + C_2}$)

1506. $y^2 - x^2 = 1$; (Egyenlőszáru hiperbola, amelynek valós tengelye az y tengely)

Kedves Jegyzetfelhasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői díjazást kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*.

A jegyzet címe: **MATEMATIKA I-II. A matematika alapjai-Egyváltozós valós függvények**

A jegyzet szerkesztője: **Monostory Iván**

A jegyzet azonosítója: **040801**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75%):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(A túloldalon folytatható)

