BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:
Monostory Iván

MATEMATIKA PÉLDATÁR
IV. kötet
VÉGTELEN SOROK

Összeállította:
Lőkös Ágnes - Pataki Béláné

Műegyetemi Kiadó, 2006.

Szerkesztette:

Monostory Iván
egyetemi adjunktus

Összeállította:

Lőkös Ágnes
egyetemi adjunktus

Pataki Béláné
egyetemi adjunktus

(Tizenkettedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040803**

VESZÉLY
A fénymásolás megöli a könyvet!

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 11,9 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 5906/06

* A feladatok jelentős részének sorszáma előtt csillag jelzés található. Ezzel hivjuk fel a figyelmet arra, hogy a kötet második felében található megoldások között ezeknek a feladatoknak nem csupán a végeredményét közöljük, hanem a megoldás menetéhez utmutatást is adunk.

□ A bekeretezett sorszámu feladatok megoldását részleteiben is kidolgoztuk, egyes esetekben több megoldást is közlünk.

A szerkesztő

Tartalomjegyzék

Numerikus sorok

1. Részletösszeg. Maradékösszeg

1-10. Irjuk fel az alábbi sorok n-edik részletösszegét: s_n-et. Vizsgáljuk meg, hogy az $\{s_n\}$ sorozat konvergens-e és amenynyiben konvergens, állapitsuk meg a határértékét.

<u>Megjegyzés:</u> A jegyzethez hasonlóan – jelöléseink egyszerűbbé tétele céljából – azt a megállapodást tesszük, hogy <u>ha az összegezés k = 0-val kezdődik,</u> akkor a részletösszegeket is ennek megfelelően indexeljük, vagyis nulladik, első, második stb. részletösszeg. Ebben az esetben tehát az n-edik részletösszeg n + 1 tagot tartalmaz.

$\boxed{1.}$ $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

2. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-5}{4^k}$$

* 3. $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)^k$$

4. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{2k}}$$

* 5. $$\sum_{k=0}^{\infty} a + kd \qquad (a \in R, \quad d \in R, \quad d \neq 0)$$

$\boxed{6.}$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

* 7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

* 8. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

10. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+kb)\,[a+(k+1)\,b]}$ $(a>0; \quad b>0)$

11-14. **Irjuk fel az alábbi konvergens sorok h_n maradékösszegét és adjunk meg egy olyan $N_o(\varepsilon)$ küszöbszámot, amelyre fennáll, hogy**

$$n > N_o(\varepsilon) \Longrightarrow |h_n| < \varepsilon$$

$\boxed{11.}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

13. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+kb)\,[a+(k+1)\,b]}$ $(a>0 \quad b>0)$

14. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{3k-1}}$

15-16. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk meg az összegüket

* 15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 2k}$

16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2 + 3k}$

17. Adott a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor. Igazoljuk, hogy ha van olyan $r \in T$, amelyre a $h_r = \sum_{k=r+1}^{\infty} a_k$ maradéksor konvergens, akkor bármely $n \in T$-re h_n konvergens és $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$.

18-22. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak:

$\boxed{18.}$ ha egy sorból zárójelek elhagyásával nyert uj sor konvergens, akkor az eredeti sor is konvergens,

$\boxed{19.}$ ha egy sorból zárójelek elhagyásával nyert uj sor divergens, akkor az eredeti sor is divergens,

20. ha egy sorból zárójelek beiktatásával nyert uj sor konvergens, akkor az eredeti sor is konvergens,

21. ha egy sorból zárójelek beiktatásával nyert uj sor divergens, akkor az eredeti sor is divergens,

$\boxed{22.}$ ha egy pozitiv tagu sorból zárójelek beiktatásával nyert uj sor konvergens, akkor az eredeti sor is konvergens.

Megjegyzés: A továbbiakban megállapodás szerint: $x^0 \equiv 1$.

2. Mértani sor

23-26. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi mértani sorok konvergensek-e és a konvergenseknek határozzuk meg az összegét.

23. $\sum_{k=0}^{\infty} 1000 \cdot 0{,}5^{k}$

24. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1000 \cdot 0{,}5^{k}}$

25. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{4^{k+3}}{5^{k}}$

26. $\sum_{k=2}^{\infty} 10^{-k}$

27-30. Irjuk fel az alábbi szakaszos végtelen tizedestörteket két egész szám hányadosaként.

$\boxed{27.}$ $0{,}\dot{3}33\ldots$

28. $0{,}\dot{2}5\dot{2}5\ldots$

$\boxed{29.}$ $20{,}7\dot{2}5\dot{2}5\ldots$

30. $0{,}2\dot{3}21\dot{3}21\ldots$

31-32. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk meg az összegüket.

31. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c^{2}}{c^{2}+1} \right)^{k} \qquad (c \in R)$

* 32. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{k} + 3 \cdot 2^{k}}{6^{k}}$

33-38. Állapitsuk meg, hogy a szereplő betük mely értékénél konvergensek az alábbi sorok és határozzuk meg az összegüket:

33. $$\sum_{k=0}^{\infty} \sin^k \alpha$$

34. $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2x}\right)^k$$

35. $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-u}{u-1}\right)^k$$

36. $$\sum_{k=0}^{\infty} (-2\lambda^{-1})^k$$

37. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{5 \cdot 3^{2k}}$$

* 38. $$\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot \frac{b^{k+n}}{c^{k+m}}$$ (a, b, $c \in R$; $c \neq 0$; n és m egész)

3. Cauchy-kritérium

$\boxed{39.}$ A Cauchy-kritérium (Jegyzet IV. kötet 1.1. tétel) felhasználásával igazoljuk, hogy a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \quad (|a_k| < 10) \text{ sor konvergens.}$$

40. Fogalmazzuk meg pozitiv állitás formájában azt, hogy egy végtelen sor nem elégiti ki a Cauchy-féle konvergencia-kritériumban szereplő feltételt.

* 41. A Cauchy-kritérium felhasználásával igazoljuk, hogy a

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ harmonikus sor divergens.

* 42. Igazoljuk, hogy ha $a_k \leq c_k \leq b_k$ $(k \in T)$, továbbá a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sorok konvergensek, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ sor is konvergens.

4. Váltakozó előjelü sorok

43. A váltakozó előjelü $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ $(a_k > 0)$ sorról tudjuk, hogy a páros indexü részletösszegeiből alkotott sorozat monoton csökkenő. Következik-e ebből, hogy az $\{a_k\}$ sorozat monoton csökkenő?

$\boxed{44}$ Legyen a $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ $(a_k > 0)$ sor Leibniz-tipusu (vagyis legyen $a_k \geq a_{k+1}$ $(k \in T)$ és $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, lásd Jegyzet IV. kötet 1.19 tétel);

a) igazoljuk, hogy a sor páros indexü részletösszegeiből alkotott sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos,

b) jelöljük az a)-ban szereplő részletösszeg-sorozat határértékét S-sel. Mutassuk meg, hogy a sor páratlan indexü részletösszegeiből alkotott sorozat is S-hez konvergál,

c) fogalmazzuk meg és bizonyitsuk be azt a sorozatokra vonatkozó állitást, amelynek alapján a) és b)-ből következik a Leibniz-tipusu sor konvergenciája.

45-50. Irjuk fel az alábbi sorokat $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ alakban és vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e?

Állapitsuk meg azt is, hogy Leibniz tipusuak-e!

45. $0,1 - 0,1 + 0,1 - 0,1 + - \dots\dots\dots$

46. $0,1 - 0,01 + 0,001 - + \dots\dots\dots$

$\boxed{47.}$ $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+-\dots\dots\dots\dots$

48. $-0,11+0,101-0,1001+-\dots\dots\dots\dots$

49. $0,3-0,03+0,003-+\dots\dots\dots\dots$

50. $0,01-\sqrt{0,01}+\sqrt[3]{0,01}-\sqrt[4]{0,01}+-\dots\dots\dots\dots$

$\boxed{51.}$ a) Irjuk fel a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

$$a_k = \begin{cases} 1 \text{ ha } k=0 \\ \frac{-1}{k+2} \text{ ha } k \text{ páratlan} \\ \frac{1}{k} \text{ ha } k \text{ páros és } k \neq 0 \end{cases}$$

sor első 10 tagját.

b) Leibniz-tipusu-e a sor?

*c) Konvergens-e a sor?

5. Pozitiv tagu sorok

52-94. Vizsgáljuk még, hogy az alábbi sorok konvergensek, vagy divergensek!

$\boxed{52.}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

53. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}$

54. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i}{i!}$

$\boxed{55.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$

$\boxed{56.}$ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$

* 57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

58. $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^2+50}$

* 59. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$

60. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+28)}$

∗ 61. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

62. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{5^k+1}$

∗ 63. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{5^k-1}$

64. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$

65. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 3^k}$

66. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$

68. $\frac{1}{3} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{3^3}{3^3} + \frac{4^3}{3^4} + \frac{5^3}{3^5} + \ldots\ldots$

69. $\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \ldots\ldots$

70. $1000 + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \frac{1000^4}{4!} + \ldots\ldots$

71. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \ldots\ldots$

72. $\frac{2 \cdot 3}{1!} + \frac{3 \cdot 4}{2!} + \frac{4 \cdot 5}{3!} + \frac{5 \cdot 6}{4!} + \ldots\ldots$

$\boxed{73.}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4}\right) + \ldots\ldots$

74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$

Megjegyzés: $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-3)(2n-1)$ " Szemi-faktoriális".

75. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

77. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{3}}$

Megjegyzés: $\binom{n}{k}$ "binomiális együttható" lásd. Jegyzet I. kötet 8. §

78. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{2}}$

79. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

80. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k}$

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln (n+1)}$

82. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$

$\boxed{83.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k^k}$

$\boxed{84.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

85. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$

86. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$

87. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

★ 88. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$

$\boxed{89.}$ $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{k^2}$

90. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{k^2}$

★ 91. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$

★ 92. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}^n n}{(n+1)\,2^{n-1}}$

$\boxed{93.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ahol $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$

★ 94. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ahol $a_k=\int_k^{k+1} e^{-x^2}\,dx$

★ 95. Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pozitiv tagu sor konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor is konvergens?

6. Feltételes és abszolut konvergencia

96-113. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok divergensek, feltételesen konvergensek, vagy abszolut konvergensek-e?

96. $1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}++-\ldots$

97. $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}-\frac{4}{3^3}+\frac{5}{3^4}-+\ldots\ldots$

* 98. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + - \dots\dots\dots\dots$

99. $\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + - \dots\dots\dots\dots$

* 100. $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{5} - + \dots\dots\dots\dots$

101. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4} + - \dots\dots\dots\dots$

102. $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^3+1} - \frac{3}{3^3+1} + \frac{4}{4^3+1} - -+ \dots$

* 103. $\frac{1}{2} - \frac{4}{2^3+1} + \frac{9}{3^3+1} - \frac{16}{4^3+1} + - \dots$

104. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \frac{9}{16} - + \dots$

105. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

106. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$ (e = 2,718 ... az Euler-féle szám)

107. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2^n}{n^2}$

108. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k^2}}$

109. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3}}$

110. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$

111. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$ 112. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

113. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n}$

* 114. Igazoljuk, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ $(|a_k| < 10)$ sor konvergens.

$\boxed{115.}$ Irjuk fel egyszerübb alakban az alábbi sor általános tagját. Igazoljuk, hogy a sor konvergens, és határozzuk meg az összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n+1} \int_{\pi}^{0} x \sin nx \, dx \right]$$

116-127. Vizsgáljuk meg, hogy a t paraméter mely értékeinél lesznek

a) abszolut konvergensek

b) feltételesen konvergensek az alábbi sorok.

116. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^2}$ 117. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin t}{n}$

118. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n t}{n}$ 119. $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$

120. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{t}\right)^n$ 121. $\sum_{n=1}^{\infty} n^t$

122. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^t$

123. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$

124. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n$

* 125. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^n n^t$

126. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{1-t}\right)^n$

127. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg}^n t$

128. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right)^n$

129. Válasszuk ki a 116-128. feladatokban szereplő sorok közül a geometriai sorokat és állapítsuk meg az összegüket.

130-135. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ sorról tudjuk, hogy végtelen sok pozitiv és negativ tagot tartalmaz. Hagyjuk el a sorból a negativ és zérus tagokat, és jelöljük a visszamaradó uj sort $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$-nel.

Tekintsük ismét az eredeti $\sum c_n$ sort és hagyjuk el belőle a pozitiv és zérus tagokat. Jelöljük a visszamaradó uj (negativ tagu) sort $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$-nel. Döntsük el, hogy az alábbi állitások közül melyek igazak és melyek hamisak:

* 130. Ha a $\sum c_n$ abszolut konvergens, akkor a $\sum a_n$ is és a $\sum b_n$ is konvergens.

$\boxed{131.}$ Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor a $\sum c_n$ abszolut konvergens.

x 132. Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ közül az egyik divergens és a másik konvergens, akkor $\sum c_n$ divergens.

133. Ha $\sum c_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ és $\sum b_n$ közül az egyik konvergens a másik pedig divergens.

134. Ha $\sum c_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ és $\sum b_n$ közül legalább az egyik divergens.

* 135. Ha $\sum c_n$ feltételesen konvergens, akkor $\sum a_n$ is és $\sum b_n$ is divergens.

* 136. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor is konvergens?

137. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor abszolut konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor is konvergens?

138. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor is konvergens?

$\boxed{139.}$ A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sorról tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és hogy a sor s_n részletösszeg-sorozatának $s_{100}, s_{200}, \dots, s_{100k}, \dots$ részsorozata konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor a konvergens?

$\boxed{140.}$ A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sorról tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és, hogy a sor s_n részletösszeg-sorozatának van egy konvergens részsorozata. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor is konvergens?

7. Végtelen sorok átrendezése; müveletek sorokkal

* 141. Egy feltételesen konvergens sort átrendezünk, ugy, hogy az első tagot felcseréljük a második taggal, a harmadik tagot felcseréljük a negyedik taggal, ..., a (2k - 1)-edik tagot felcseréljük a 2k-adik taggal.

Bizonyitsuk be, hogy az igy nyert sor konvergens és összege megegyezik az eredeti sor összegével.

* 142. Egy konvergens sort átrendezünk ugy, hogy az átrendezés során bármely tag indexe legfeljebb 1000-rel változzék meg. Mutassuk meg, hogy ez az átrendezés sem a konvergencia tényét, sem a sor összegét nem változtatja meg.

* 143. Mutassuk meg, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergál a $+\infty$-hez, akkor akármilyen nagy (rögzitett) K szám esetén tetszőleges nagy n számhoz megválasztható az m értéke ugy, hogy

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} \right| > K \text{ fennálljon.}$$

Igaz-e ez az állitás tetszőleges divergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor esetén?

* 144. Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ feltételesen konvergens sort. Adjunk meg egy átrendezési utasitást, ugy, hogy az átrendezett sor összege +12 legyen.

* 145. Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ feltételesen konvergens sort. Adjunk meg egy átrendezési utasitást, ugy, hogy az átrendezett sor $(-\infty)$-hez divergáljon.

*146-148. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sor feltételesen konvergens és S összegére fennáll, hogy

$$\frac{1}{2} < S < \frac{5}{6} .$$

Adjunk olyan utasitást, hogy az átrendezett sor összege az alábbiakban megadott érték legyen. Irjuk fel az ilyen módon átrendezett sor első 8 tagját.

$\boxed{146.}$ $S_1 = 0$

147. $S_2 = 1$

$\boxed{148.}$ $S_3 = +\infty$

* 149. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

150. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} + \left(\frac{1}{n^n}\right)^n\right]$ és a

$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{n^n}\right)^n\right]$ sorok konvergensek és határozzuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} + \left(\frac{1}{n^n}\right)^n\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{n^n}\right)^n\right] = ?$$

151-154. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk meg az összegüket:

151. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots$

152. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - + \ldots$

153. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{3^n}$

154. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^n}$$

* 155. a) $$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = ?$$

b) az a) feladat eredményének felhasználásával igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

c) mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{az} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x} \text{ határozott}$$

integrálnak egy alsó közelítő összege.

d) a b) és c) feladat eredményeinek felhasználásával határozzuk meg a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{konvergens sor összegét.}$$

156-158. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és – felhasználva, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$$ – határozzuk meg az összegüket.

156. $$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots\ldots$$

157. $$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \ldots\ldots$$

$\boxed{158.}$ $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + - - \ldots$

159. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ sorok abszolut konvergensek és képezzük a szorzatukat.

160. Mutassuk meg, hogy az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

és az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - + \ldots$$

sorok közül az egyik abszolut konvergens és képezzük a szorzatukat.

161. Mutassuk meg, hogy az

$1 - \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + - \ldots$ sor abszolut konvergens és képezzük a négyzetét.

* 162. Mutassuk meg, hogy a

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ sor négyzete divergens.

163. Mutassuk meg, hogy $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n$

$(|q| < 1)$ és ennek alapján határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ sor összegét.

164. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}\right) = ?$

8. Sor összegének közelítő meghatározása; hibabecslés

165-176. Számítsuk ki az alábbi konvergens sorok kijelölt s_n részletösszegét és becsüljük meg s_n-nek a sor összegétől való eltérését. (l. az 1-10 feladatnál levő megjegyzést.)

$\boxed{165.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ s_4

166. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ s_6

167. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ s_4

$\boxed{168.}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ s_4

169. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ s_6

170. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}$ s_3

171. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ s_3

172. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ s_7

173. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,2^n}$ s_4

174. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n}$ s_3

175. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ s_4

176. $\frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - ++ - \dots$ s_4

177-179. Az alábbi pozitív tagu konvergens soroknál határozzuk meg a kijelölt indexü s_n részletösszeget, majd a hozzátartozó h_n maradéksorhoz keressünk minoráns és konvergens majoráns impropriusintegrálokat. Ennek alapján adjunk alsó és felső korlátot a sor összegére.

$\boxed{177.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ s_4

* 178. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ s_4

179. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ s_6

180-186. Határozzuk meg, hogy az alábbi konvergens sorok milyen n indexü részletösszegei közelitik meg a sor összegét a megadott $\varepsilon > 0$-nál kisebb hibával.

$\boxed{180.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ $\qquad \varepsilon = \frac{1}{10}$

181. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ $\qquad \varepsilon = 10^{-3}$

$\boxed{182.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^k$ $\qquad \varepsilon = 10^{-3}$

$\boxed{183.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ $\qquad \varepsilon = 10^{-2}$

184. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$ $\qquad \varepsilon = 10^{-2}$

* 185. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $\qquad \varepsilon = 10^{-2}$

186. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ $\qquad \varepsilon = 10^{-2}$

187-200. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét 3 tizedes pontossággal.

$\boxed{187.}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$

211. Ha egy folytonos függvényekből álló sorozat egyenletesen konvergens valamely intervallumban, akkor azon az intervallumon a határfüggvénye is folytonos függvény.

212. Ha egy folytonos függvényekből álló sorozat határfüggvénye folytonos valamely intervallumon, akkor azon az intervallumon a konvergencia egyenletes.

123. Ha egy folytonos függvényekből álló sorozat határfüggvénye nem folytonos valamely intervallumban, akkor azon az intervallumon a konvergencia nem egyenletes.

214. Ha valamely intervallumon egy folytonos függvényekből álló sorozat konvergál, de nem egyenletesen, akkor azon az intervallumon a sorozat határfüggvénye nem folytonos.

215-219. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorozatok egyenletesen konvergensek-e a megadott intervallumon?

* 215.	$\{x^n\}$	$[0,1]$
$\boxed{216.}$	$\{x^n\}$	$(0,1)$
$\boxed{217.}$	$\{x^n\}$	$[0,C)$ $(0 < C < 1$ tetszőleges rögzitett szám)
* 218.	$\{x^n - x^{n+1}\}$	$[0,1]$
219.	$\{n^x\}$	$[-1,0]$

10. Függvénysorok konvergencia-tartománya. Abszolut és egyenletes konvergencia

220-229. Állapitsuk meg az alábbi függvénysorok konvergencia-tartományát és határozzuk meg az összegfüggvényt.

* 220. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n$ 221. $\sum_{n=0}^{\infty}\sin^n x$

222. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^n$

223. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mathrm{tg}\, 5x)^n$

224. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

225. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{nx}$

226. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$

227. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)^n$

228. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(x^2+1)^n}$

229-235. Állapitsuk meg az alábbi sorok
a) konvergencia-tartományát,
b) abszolut konvergencia-tartományát.

229. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n}$

230. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$

231. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$

232. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)x^n}{n}$

233. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{x}\right)^n$

234. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$

235. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^n$

236-240. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a megadott intervallumban?

$\boxed{236.}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin x}{2^n}$ $(-\infty, +\infty)$

$\boxed{237.}$ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(-1, 1)$

238. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-nx}$ $(0, +\infty)$

* 239. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$ $[1, +\infty)$

240. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$ $(-\infty, +\infty)$

* 241. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$ $(0, 1)$

242-243. Állapitsuk meg az alábbi függvénysorok
a) konvergencia-tartományát,
b) összegfüggvényét,
c) egyenletes konvergencia-tartományát.

242. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$

243. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$

$\boxed{244.}$ Igazoljuk, hogy a

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$ függvénysor egyenletesen konvergens a $(-\infty, +\infty)$ intervallumon, de nem abszolut konvergens x egyetlen értékénél sem.

$\boxed{245.}$ Igazoljuk, hogy az alábbi függvénysor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$ abszolut konvergens minden $x \in (-\infty, +\infty)$ -re,

de nem egyenletesen konvergens pl. a $[0,1]$ intervallumban.

246-257. Állapitsuk meg az alábbi hatrványsorok konvergencia-tartományát!

$\boxed{246.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

247. $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$

248. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$\boxed{249.}$ $\sum_{k=0}^{\infty} k!\,(x-5)^k$

250. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$

251. $\sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n$

252. $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$

253. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{n}\right)^n$

254. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

255. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k \cdot 4^k}$

$\boxed{256.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k \cdot 4^k}$

257. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

$\boxed{258.}$ Tekintsük a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ sort. Igazoljuk, hogy ha

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = R$$ létezik (lehet $R=0$ vagy $R=\infty$ is), akkor

R a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ hatványsor konvergencia intervallumának a sugara.

259-260. Állapitsuk meg az alábbi sorok konvergencia-intervallumának a sugarát:

$\boxed{259.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k$ 260. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

261. A 259. feladat eredményének felhasználásával igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

11. Függvények hatványsorba fejtése

262-293. Állitsuk elő az alábbi függvények $x_0 = 0$ helyhez tartozó hatványsorát – ha lehet, többféle módszerrel is – és állapitsuk meg a hatványsor konvergencia-tartományát.

$\boxed{262.}$ $\cos 5x$ * 263. $\sin x \cos x$

264. $\cos \sqrt{x}$ 265. $\cos (x - \frac{\pi}{4})$

266. $\sin(x + a)$ ("a" tetszőleges valós szám).

* 267. $\sin^2 x$ 268. $\cos x^2$

269. e^{-x^2} 270. $\sqrt[3]{e^x}$

271. a^x $(a > 0,\ a \neq 1$

272. $\operatorname{sh} 2x$ 273. $\operatorname{sh}^2 x$

274. $\operatorname{ch}^2 x$ 275. $(1 + x)^3$

276. $(1+x)^{-3}$

277. $(1+x)^{\frac{1}{3}}$

278. $\frac{1}{1+x}$

279. $\frac{1}{1-x^2}$

280. $\frac{x}{1+x^2}$

* 281. $\frac{1}{(1-x)^2}$

282. $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

* 283. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

284. $\sqrt[3]{8+x}$

* 285. $\ln(1-x)$

* 286. $\ln(1-x^2)$

287. $\ln(1+x^2)$

* 288. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

* 289. $\arccos x$

290. $\arcsin 2x$

291. $\operatorname{arctg} x$

292. $\operatorname{arsh} x$

293. $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$

294-306. Irjuk fel az alábbi függvények megadott x_o helyhez tartozó Taylor-sorát és állapitsuk meg a sor konvergencia-tartományát.

294. $\sin x$ $\quad x_o = \frac{\pi}{4}$

295. $\sin x$ $\quad x_o = \frac{\pi}{2}$

296. $\sin x \cos x$ $\quad x_o = \frac{\pi}{4}$

297. e^x $\qquad x_0 = 1$

298. $\ln x$ $\qquad x_0 = 1$

299. $\ln x$ $\qquad x_0 = e$

* 300. $2x^3 - x$ $\qquad x_0 = \frac{1}{2}$

$\boxed{301.}$ $\frac{x+1}{x+3}$ $\qquad x_0 = -2$

302. $\frac{x+1}{x+3}$ $\qquad x_0 = -1$

303. $\sqrt{1+x}$ $\qquad x_0 = 3$

$\boxed{304.}$ $\frac{1}{1+x}$ $\qquad x_0 = 2$

305. $\frac{1}{1+x}$ $\qquad x_0 = -2$

306. $\frac{1}{1+x}$ $\qquad x_0 = c \quad (c \neq -1)$

$\boxed{307.}$ Igazoljuk, hogy páros függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorában x páratlan kitevőjű hatványainak együtthatói zérusok, páratlan függvény esetén pedig x páros kitevőjű hatványainak együtthatói nullák.

12. Műveletek hatványsorokkal

308-310. Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergencia-tartománya $(-R, R)$. Rendezzük hatványsorba az alábbi szorzatokat és állapitsuk meg az igy nyert sor konvergencia-intervallumát:

308. $(1+x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

309. $(1+x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

310. $\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n\right)$

* 311. Adjuk meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ helyhez tartozó hatványsorát. Állapitsuk meg a konvergencia-intervallumot is!

a) $\left(\frac{1}{1-x}\right)'$ b) $\left(\frac{1}{1-x}\right)''$ c) $\left(\frac{1}{1-x}\right)'''$

d) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(m)}$ $m \geqq 2$ egész

e) $\int_0^x \frac{dt}{1-t}$

312-316. Rendezzük hatványsorba az alábbi szorzatokat és állapitsuk meg, hogy az eredményül kapott sor milyen függvényt állit elő és milyen konvergencia-intervallumban?

* 312. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2$ 313. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^3$

314. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^4$

* 315. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^m$ $m \geqq 2$, egész

∗ 316. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n\right]^2$

∗ 317. Igazoljuk, hogy

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{b}{k}x^k\right]=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{a+b}{r}x^r$$

318-319. Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergencia-intervalluma (-R, R). Fejtsük hatványsorba az alábbi függvényeket és állapitsuk meg az eredményül kapott sor konvergencia-intervallumát.

318. $\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} x^k}$

319. $\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{1-x}$

320-324. Adjuk meg az alábbi függvények x = 0-körüli hatványsorának ötödfoku részletösszegét.

320. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{ha } x\neq 0\\ 1 & \text{ha } x=0\end{cases}$

321. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sin x} & \text{ha } x\neq 0\\ 1 & \text{ha } x=0\end{cases}$

322. tg x

323. th x

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{sh}^3 x}{x^2} & \text{ha } x\neq 0\\ 1 & \text{ha } x=0\end{cases}$

13. Sorfejtések alkalmazásai; hibabecslés

325-333. Állapitsuk meg az alábbi határértékeket a megfelelő hatványsorok segitségével:

$\boxed{325.}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ * 326. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

327. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

328. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} \right)$

329. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x}$ 330. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sh} x}{x \operatorname{sh} x}$

331. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$

332. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\sqrt{x^2+1} - \operatorname{arsh} x}{x^3}$

A hatványsorok felhasználhatók függvényértékek közelitő meghatározására:

a függvényt Taylor-sorának n-edik szeletével (Taylor-polinom) helyettesitjük. Az ily módon elkövetett hibát becsülhetjük a Lagrange-féle maradéktag segitségével, vagy a maradéksor majorizálásával. Erre vonatkozó példák megtalálhatók a Matematikai Példatár I-II. kötetében (1001-1026 feladatok).

További feladatok:

333-339. Állapitsuk meg, hogy az alábbi függvényeket $x_0 = 0$ körüli Taylor-soruk

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) másodfoku} \\ \text{b) negyedfoku} \end{array}\right\} \text{részletösszege}$$

milyen abszolut hibakorláttal közelíti meg az $|x|<\frac{1}{2}$ intervallumon?

Adjuk meg a közelítés %-os hibáját $x_1 = \frac{1}{2}$ -nél.

$\boxed{333.}$ $y = e^{x^2}$

334. $y = e^{-x^2}$

335. $y = \operatorname{sh} x$

336. $y = \ln(1+x)$

337. $y = \operatorname{arctg} x$

338-344. Határozzuk meg az alábbi függvényértékeket 3 tizedes pontossággal:

$\boxed{338.}$ $\operatorname{arctg} \frac{1}{4}$

339. $\arcsin 0,5$

340. $\frac{1}{1,02}$

341. $\frac{1}{0,98}$

342. $\sqrt[3]{1,02}$

* 343. $\sqrt[4]{80}$

344. $\sqrt[5]{30}$

* 345. Milyen x értékig közelíti meg $\sin x$-et a $T_1(x) = x$ Taylor-polinomja

a) legfeljebb 1%-os hibával?
b) legfeljebb 0,1%-os hibával.

* 346. Milyen intervallumban közelíti meg a $\operatorname{ch} x$ függvényt $T_4(x)$ ($x_0=0$ körüli) Taylor-polinomja 0,1%-nál kisebb hibával?

347-350. Határozzuk meg az alábbi integrálokat 3 tizedes pontossággal: ($5 \cdot 10^{-4}$-nél kisebb hibával!)

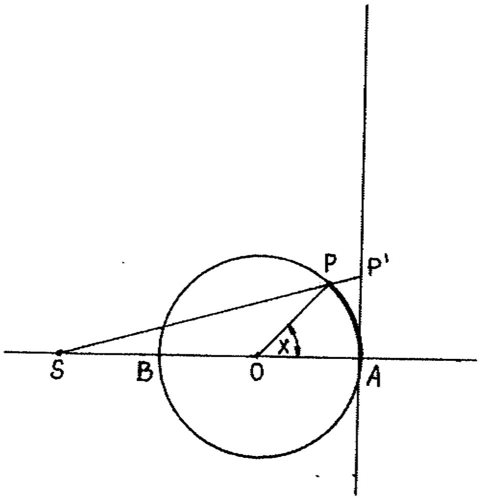
$\boxed{347.}$ $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x}\,dx$

348. $\int_0^1 \sin x^2\,dx$

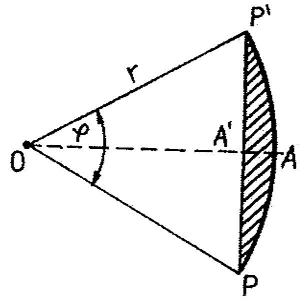
349. $\int_0^{0,2} \cos\sqrt{x}\,dx$

350. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}$

$\boxed{351.}$ Az $\widehat{AP}$ körívvel közelítőleg egyenlő hosszuságu egyenes szakaszt szerkeszthetünk ugy, hogy a kör AB átmérőjét (l. az ábrát) egy sugárnyi távolsággal meghosszabbítjuk és a kapott S pontot P-vel összekötjük. Az SP egyenes a kör A-hoz huzott érintőjét egy olyan P' pontban metszi, amelyre $\widehat{AP} \approx \overline{AP'}$. Becsüljük meg ezen közelítés relativ hibáját, ha az AOP $\sphericalangle \leq 1$ radián.



351. ábra



352. ábra

$\boxed{352.}$ Adjunk a φ nyilásszögü r sugaru körszelet területére közelítő formulát és adjunk becslést a közelítés %-os hibájára.

14. Fourier-sorok

353-356. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények ortogonális függvényrendszert alkotnak a megadott intervallumon:

$\boxed{353.}$ sin x, sin 2x, sin 3x, ..., sin nx, ... $(0,\pi)$

* 354. sin ax, sin 2ax, sin 3ax, ..., sin nax, ... $(0, \frac{\pi}{a})$
("a" tetszőleges valós szám, $a \neq 0$).

355. $1, \cos\frac{\pi}{p}x, \cos\frac{2\pi}{p}x, \ldots, \cos\frac{n\pi}{p}x \ldots \ (0,p)$

("p" tetszőleges valós szám, $p \neq 0$)

356. $1, \cos\frac{\pi}{p}x, \sin\frac{\pi}{p}x, \cos\frac{2\pi}{p}x, \sin\frac{2\pi}{p}x, \ldots$

$\ldots, \cos\frac{n\pi}{p}x, \sin\frac{n\pi}{p}x, \ldots$

a $(-p, p)$ intervallumon ("p" tetszőleges valós szám, $p \neq 0$)

$\boxed{357.}$ Legyen $f(x) = x$ ha $-\pi < x \leq \pi$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

a) ábrázoljuk f-et,
b) irjuk fel a Fourier-sorát,
c) ábrázoljuk f-nek és az

$S_2(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x$ részletösszeg függvénynek a $[0,\pi]$ intervallumra való leszükitését.

$\boxed{358.}$ Legyen $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ ha } & -\pi < x \leq 0 \\ \pi \text{ ha } & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

a) ábrázoljuk f-et,
b) határozzuk meg f Fourier-sorát.
c) ábrázoljuk f-nek továbbá az

$S_1(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ és az

$S_2(x) = S_1(x) + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$

részletösszeg függvényeknek a $[-\pi, \pi]$ intervallumra való leszükitését.

359-361. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket és határozzuk meg a Fourier-sorukat (az alábbiakban $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ tetszőleges egész szám)

$\boxed{359.}$ $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ ha } & -\pi \leq x < 0 \\ x \text{ ha } & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

360. $f(x) = \begin{cases} -\pi \text{ ha } & -\pi < x \leq 0 \\ x \text{ ha } & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

361. $f(x) = \begin{cases} x \text{ ha } & 0 \leq x < \pi \\ -x \text{ ha } & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

362-374. Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-sorát ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

362. $f(x) = x^2$ ha $-\pi \leq x < \pi$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

363. $f(x) = x^2$ $0 < x \leq 2\pi$ és $f(x + 2k\pi) = f(x)$

364. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ ha } & -\pi < x \leq 0 \\ x^2 \text{ ha } & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

365. $f(x) = |\sin x|$

366. $f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ ha } & 0 \leq x < \pi \\ 0 \text{ ha } & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

367. $f(x) = \sin^2 x$

368. $f(x) = \sin^2 x \cos 2x$ 369. $f(x) = \sin^4 x$

370. $f(x) = e^x$ ha $0 < x \leq 2\pi$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

$\boxed{371.}$ $f(x) = x$ ha $0 < x \leq 1$ és $f(x + k) \equiv f(x)$

372. $f(x) = x^2$ ha $-1 < x \leq 1$ és $f(x+2k) \equiv f(x)$

373. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{ha } -2 \leq x < -1 \\ x & \text{ha } -1 \leq x < 1 \\ 2 & \text{ha } 1 \leq x < 2 \end{cases}$ és $f(x+4k) \equiv f(x)$

* 374. $f(x) = x - [x]$

$\boxed{375.}$ a) Állapitsuk meg, hogy mennyi lesz a 363. feladatban szereplő f függvény Fourier-sorának összege $x_0 = 0$-nál.

b) az a)-beli eredmény felhasználásával határozzuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ konvergens numerikus sor összegét.

376-377. Válasszuk ki a 357-374. feladatokban szereplő Fourier-sorok közül azokat, amelyek felhasználhatók az alábbi konvergens numerikus sorok összegének megállapitására és határozzuk meg ezen sor-összegeket.

$\boxed{376.}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

377. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

378. Legyen $\varphi(x) = x$ ha $0 < x \leq 2$. Adjuk meg és ábrázoljuk φ-nek olyan - lehető legkisebb periódusa - $(-\infty, +\infty)$-re való kiterjesztését, f-et, hogy f páratlan függvény legyen. Határozzuk meg f Fourier-sorát.

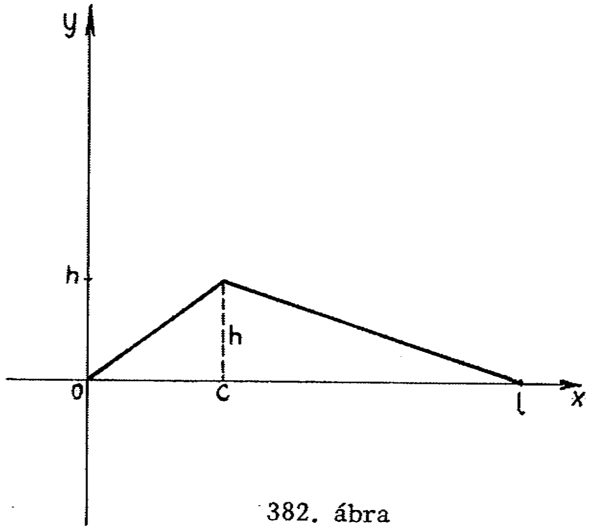
379. Legyen $\varphi(x) = x$ ha $0 < x \leq 2$. Adjuk meg és ábrázoljuk φ-nek olyan - lehető legkisebb periódusu - $(-\infty, +\infty)$-re való kiterjesztését, f-et, hogy f páros függvény legyen. Határozzuk meg f Fourier-sorát.

380-382. Állitsuk elő az alábbi függvényeket a megadott intervallumban tiszta szinuszos Fourier-sor segitségével.

380. $\cos x$ $\quad 0 < x \leq \pi$

381. $x(\pi - x)$ $\quad 0 < x \leq \pi$

382. Az a függvény, amelynek grafikonja az ábrán látható $0 \leq x < \ell$



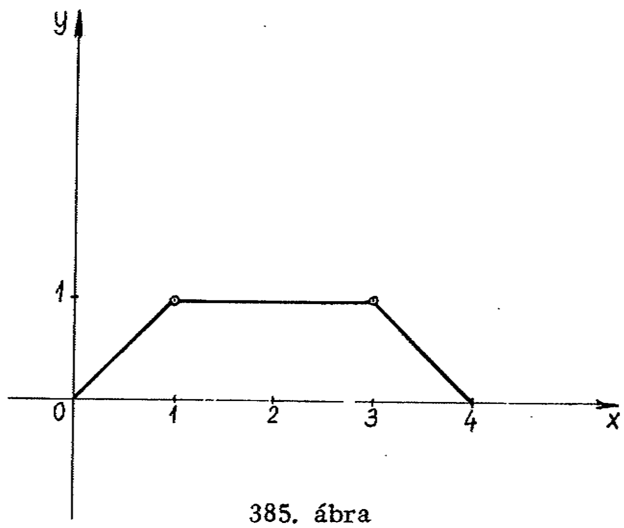
382. ábra

383-385. Állitsuk elő az alábbi függvényeket a megadott intervallumban tiszta koszinuszos Fourier sor segitségével.

383. $\sin x$ $\quad 0 < x \leq \pi$

384. $x(\pi - x)$ $\quad 0 < x \leq \pi$

385. az a függvény, amelynek grafikonja az ábrán látható



385. ábra

* 386. Léteznek-e olyan $a_0, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, \dots, b_3, \dots$ számok, amelyekre a

$$\cos x = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \dots$$ egyenlőség,

a) minden $0 < x < 2\pi$-re
b) minden $0 < x < \pi$ -re

fennálljon?

Ha igen, ugy határozzuk meg ezen együtthatókat!

$\boxed{387.}$ Az f(x) 2π szerint periodikus integrálható függvény Fourier együtthatói ismertek (a_n, b_n, $n \in T$). Határozzuk meg az f(x)-ből eltolással származó f(x + c) függvény Fourier együtthatóit.

388. Mit állithatunk az f(x) függvény Fourier-együtthatóiról, ha

a) $f(x+\pi) \equiv f(x)$
b) $f(x+\pi) \equiv -f(x)$

$\boxed{389.}$ Igazoljuk, hogy ha f 2π szerint periodikus, páratlan és görbéje szimmetrikus az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenesre, akkor Fourier-sora

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin (2k+1) x$$ alaku.

390. Hogyan kell a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumon megadott integrálható f függvényt kiterjeszteni a $(-\pi, \pi)$ intervallumra, hogy Fourier-sora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (2n-1) x \qquad (-\pi < x < \pi)$$

alaku legyen?

391. Mi a kapcsolat f és g Fourier-együtthatói között, ha

a) $f(-x) = g(x)$
b) $f(-x) = -g(x)$

392. Határozzuk meg a b_1, b_2, b_5, ... együtthatókat ugy, hogy az

$$x = b_1 \sin x + b_3 \sin 3x + b_5 \sin 5x + \ldots$$

egyenlőség minden $x \in (0, h)$-ra fennálljon. $(h > 0)$. Állapitsuk meg a legnagyobb h értéket, amelyre a feladat megoldható.

Megoldások

1. $\frac{1}{2}$ hányadosu mértani sor:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{2}}$$

2. $$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{\frac{-20}{3}}}$$

3. $s_n = \frac{4}{9} + (-1)^n \frac{4}{9}\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}$; az $\{s_n\}$ sorozatnak <u>nincs</u> határértéke.

4. $$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{12}}$$

5. Számtani sor;

$s_n = (n+1)\,(a + \frac{n}{2}\,d)$ az $\{s_n\}$ sorozat <u>divergens.</u>

6. Felhasználva, hogy

$$a_k = \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{1}}$$

7. Használjuk fel, hogy

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

8. Bontsuk $a_k = \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$ -et részlettörtekre!

$$a_k = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3(k+1)+1}\right]$$

Ennek alapján

$$s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n+4}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

9. $$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

10. $s_n = \frac{1}{ab} - \frac{1}{b[a+(n+1)b]}$; $\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{ab}$

11-14. Megjegyzések:

a) a megoldásokban szereplő $\Longrightarrow$ az <u>implikáció</u>, $\Longleftrightarrow$ és $\Updownarrow$ pedig az <u>ekvivalencia</u> jele

b) Definició szerint $h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k -$

$- \sum_{k=0}^{n} a_k = s - s_n.$

11. $h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$ (l az 1. feladatot)

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon}$$ (az ln x függvény monoton növekedő!)

$$\Updownarrow$$

$$n \ln 2 > \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$n > \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}$$; a keresett küszöbszám ennek az egész része

vagyis

$$n > N_o = \left[\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}\right] \Longrightarrow |h_n| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

12. $h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}$ (6. feladat)

$$N_o = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$$

13. $h_n = \frac{1}{b\,[a + (n+1)\,b]}$ (l. 10. feladatot)

$$N_o(\varepsilon) = \frac{1}{b^2 \varepsilon} - \frac{a}{b} - 1$$

14. $N_o(\varepsilon) = \dfrac{\ln 5\varepsilon - \ln 144}{\ln 3 - \ln 8} - 1$

15. Használjuk fel, hogy

$\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right]$ és mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ létezik $\left(= \dfrac{3}{4}\right)$.

16. $s = \dfrac{11}{6}$

17. h_r-ből h_n-et $n < r$ esetén véges számu tag hozzávételével, $n > r$ esetén véges számu tag elhagyásával nyerjük, ez pedig a konvergencia tényén nem változtat. h_r-ből az eredeti sort a véges s_r hozzáadásával nyerjük, tehát a sor konvergens és igy

$\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ (Jegyzet IV. kötet 1.8. tétel).

18. Igaz, mert az eredeti sor részletösszegei az uj sor konvergens részletösszeg-sorozatának egy részsorozatát alkotják és konvergens sorozatnak minden részsorozata konvergens.

19. Nem igaz (l. 16. feladat megoldását; divergens sorozatnak lehet konvergens részsorozata).

Példa: A $(c - c) + (c - c) + (c - c) + \dots$ $(c \in R)$ sor konvergens, de a belőle zárójelek elhagyásával nyert $c - c + c - c + - \dots$ sor $c \neq 0$ esetén divergens.

20. Nem igaz.

21. Igaz.

22. Igaz. Mivel a sor pozitiv tagu, részletösszegei monoton növekednek, tehát a belőlük alkotott sorozat vagy konvergens, vagy divergál a $+\infty$-hez. Ez utóbbi eset azonban nem állhat fenn, mert egy végtelenhez divergáló sorozatnak minden részsorozata divergens, a részletösszeg sorozatnak pedig van egy konvergens részsorozata: a zárójelek beiktatásával nyert uj sor részletösszegeiből alkotott sorozat.