BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:
Monostory Iván

MATEMATIKA PÉLDATÁR
VI. kötet
DIFFERENCIÁLGEOMETRIA ÉS VEKTORANALÍZIS

Összeállította:
Szeredai Erik

Műegyetemi Kiadó, 2005.

(Tizedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040810**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 8,4 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 050/05

A feladatok jelentős részének sorszáma előtt csillag jelzés található. Ezzel hivjuk fel a figyelmet arra, hogy a kötet második felében található megoldások között ezeknek a feladatoknak nem csupán a végeredményét közöljük, hanem a megoldás menetéhez utmutatást is adunk.

A bekeretezett sorszámu feladatok megoldását részleteiben is kidolgoztuk, egyes esetekben több megoldást is közlünk.

A szerkesztő

Differenciálgeometria

1. Térgörbék

$\boxed{1.}$ Egy z tengellyel párhuzamos, tőle a távolságban a z tengely körül állandó ω szögsebességgel forgó egyenesen állandó b sebességgel mozog egy pont. $t = 0$ időpillanatban a mozgó pont koordinátái (a; 0; 0). Irjuk fel a pont mozgásának egyenletét, ha b sebesség felfelé van irányitva.

*2. Irjuk fel a térbeli pontmozgás egyenletét, ha

a) $t = 0$ időpillanatban a pont az origóban van;

b) egy egyenesen mozog egyenletesen c sebességgel, az egyenes $t = 0$ időpillanatban az x tengellyel esik egybe;

c) az egyenes a z tengely körül ω egyenletes szögsebességgel forog; és végül

d) az egyenes függőleges irányban felfelé b egyenletes sebességgel emelkedik.

Igazoljuk, hogy a pontmozgás kupfelületen történik!

*3. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}R\cos^2 t + \underline{j}R\sin t\cos t + \underline{k}R\sin t$$

görbe rajta fekszik az

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

gömbön és az

$$x^2 + y^2 - Rx = 0$$

hengeren (Viviani-féle görbe).

4. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, e^{\alpha t}\cos\beta t + \underline{j}e^{\alpha t}\sin\beta t + \underline{k}\,\gamma e^{\alpha t}$$

térgörbe rajta van a

$$z = \gamma\sqrt{x^2 + y^2}$$

kupfelületen (kupos csavarvonal).

*5. Melyek az

$$\underline{r}(t) = \frac{1}{4}\, t^4\, \underline{i} + \frac{1}{3}\, t^3\, \underline{j} + \frac{1}{2}\, t^2\, \underline{k}$$

térgörbe azon érintői, melyek párhuzamosak az

$$x + 3y + 2z = 36$$

síkkal? (Felírandók az érintő egyenesek egyenletei.)

*6. Igazoljuk, hogy az egyenes körhengerre írt csavarvonal a henger alkotóit állandó szög alatt metszi.

7. Keressük az

$$\underline{r}(t) = (-t \cos t + \sin t)\, \underline{i} + (t \sin t + \cos t)\, \underline{j} + (t + 1)\, \underline{k}$$

térgörbének azon pontjait, melyekben az érintő párhuzamos az (y, z) ill. (x, z) koordinátasíkokkal.

8-15. Számítsuk ki az alábbi térgörbék ívhosszát a megadott határok között:

$\boxed{8.}$ $\underline{r}(t) = \underline{i}\sqrt{t}\cos t + \underline{j}\sqrt{t}\sin t + \underline{k}\, t;\qquad 0 \le t \le 2\pi;$

9. $$\underline{r}(t) = \underline{i}\, \cos t \cos\left\{ a \ln \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} + \underline{j}\, \cos t\, \sin\left\{ a \ln \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} + \underline{k} \sin t;$$

$(a > 0$ adott állandó$);\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\,;$

10. $\underline{r}(t) = t \cos(3 \ln t)\, \underline{i} + t \sin(3 \ln t)\, \underline{j} + 2t\underline{k}\,;\qquad 0 \le t \le 2\pi,$

11. $\underline{r}(t) = \dfrac{\cos t}{\operatorname{ch} t}\, \underline{i} + \dfrac{\sin t}{\operatorname{ch} t}\, \underline{j} + (t - \operatorname{th} t)\, \underline{k};\qquad 0 \le t \le 10\,;$

12. $\underline{r}(t) = (t - \sin t)\underline{i} + (1 - \cos t)\underline{j} + 4\sin\frac{t}{2}\ \underline{k}$; $0 \le t \le 10$;

*13. $\underline{r}(t) = \underline{i}e^{\alpha t}\cos\beta t + \underline{j}e^{\alpha t}\sin\beta t + \underline{k}\gamma e^{\alpha t}$.

a kup csucspontjától a t_0 paraméterü pontig;

14. $\underline{r}(t) = at\underline{i} + \sqrt{3ab}\,t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}$; $0 \le t \le 1$;

(a és b pozitiv állandók);

*15. $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$; $0 \le x \le 2$.

16-24. Határozzuk meg az alábbi térgörbék (ill. térbeli pontmozgások) kisérő triéderének három egységvektorát, három síkjának egyenletét, görbületét, torzióját, sebességét, gyorsulását, a gyorsulás érintő és normális irányu komponenseit az adott t_0 paraméterü pontban.

$\boxed{16.}$ $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}$; $t_0 = 2$;

17. $\underline{r}(t) = (t^2 - 1)\underline{i} + (t + 2)\underline{j} + (t^3 - t)\underline{k}$; $t_0 = 1$;

18. $\underline{r}(t) = 4\cos t\underline{i} + 2\sin t\underline{j} + 2t\underline{k}$; $t_0 = \frac{\pi}{3}$;

19. $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}$; $t_0 = -1$;

20. $\underline{r}(t) = (t^3 - 2t^2)\underline{i} + (3t + 2)\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}$; $t_0 = 1$;

21. $\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{t^3}{3}\underline{k}$; $t_0 = 1$.

22. $\underline{r}(t) = \underline{i}\operatorname{ch} t + \underline{j}\operatorname{sh} t + \underline{k}t$; $t = t_0$

23. $\underline{r}(t) = \underline{i}\,a\operatorname{ch} t\cos t + \underline{j}\,a\operatorname{ch} t\sin t + \underline{k}\,at$ $t = t_0$

(a adott állandó);

*24. $\underline{r}(t) = e^t\underline{i} + e^{-t}\underline{j} + \sqrt{2}\,t\,\underline{k}$. $t = t_0$

25-28. A következő feladatokban a térgörbe két felület metszésvonalaként van megadva. Ilyen esetekben a görbének csak geometriai jellemzőit számíthatjuk, u.i. pontmozgásról nem beszélhetünk, mert csak a mozgás pályája ismeretes, a befutási törvényszerűség ("menetrend") nincs megadva. Az alábbi görbéknél határozzuk meg tehát a kísérő triéder három élvektorát, három síkját, a görbületet és torziót az adott pontban.

$\boxed{25.}$ $x + 3y + 4z = 26;$ $x^2 + y^2 + z^2 = 56;$ $P(6;\ 4;\ 2);$

$\boxed{26.}$ $4x^2 - 3yz + 6y = 0;$ $3x^2 + xz - 6z = 0;$ $P(0;\ 0;\ 0);$

*27. $xy - z^2 = 0;$ $x + y + z - 3 = 0;$ $P(1;\ 1;\ 1);$

28. $x^2 - y^2 + z^2 = 1;$ $y^2 - 2x + z = 0;$ $P(1;\ 1;\ 1).$

29. Igazoljuk, hogy az

$\underline{r}(t) = \underline{i}\ a \cos t + \underline{j}\ a \sin \alpha \sin t + \underline{k}\ a \cos \alpha \sin t$ (a és α adott állandók) térgörbe normál síkjai áthaladnak az

$$x = 0; \quad y \operatorname{tg} \alpha + z = 0$$

egyenesen.

30. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} e^t \cos t + \underline{j} e^t \sin t + \underline{k} e^t$$

kúpos csavarvonal simulósíkja a kúp tengelyével (z tengely) állandó szöget zár be.

$\boxed{31.}$ Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = (t^2 - 2t)\,\underline{i} + (3t - 5)\,\underline{j} - (t^2 + 2)\,\underline{k}$$

síkgörbe, és írjuk fel a görbe síkjának egyenletét.

32. Igazoljuk, hogy tetszőleges állandó $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok esetén az

$$\underline{r}(t) = \underline{a}t^2 + \underline{b}t + \underline{c}$$

síkgörbe.

33. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}(t - \sin t) + \underline{j}(1 - \cos t) + \underline{k}\, 4 \sin \frac{t}{2}$$

egyenlettel adott térbeli pontmozgás sebessége és gyorsulása mindenütt merőleges egymásra.

$\boxed{34.}$ Határozzuk meg azt az állandó irányt, amellyel az

$$\underline{r}(t) = 2t\underline{i} + 3t^2\underline{j} + 3t^3\underline{k}$$

térgörbe érintői állandó szöget zárnak be. Mekkora ez a szög?

35-37. Irjuk fel az alábbi térgörbék evolvensének egyenletét. Az ívhosszat az adott t_o paraméterű ponttól számítsuk.

$\boxed{35.}$ $\underline{r}(t) = \underline{i}\, a \cos t + \underline{j}\, a \sin t + \underline{k}\, b\, t;$ (a és b adott állandók); hengeres csavarvonal; $t_o = 0;$

36. $\underline{r}(t) = \underline{i}\, e^t \cos t + \underline{j}\, e^t \sin t + \underline{k}\, a\, e^t;$ (a adott állandó); kupos csavarvonal; $t_o = -\infty;$

37. $\underline{r}(t) = \dfrac{\cos t}{\operatorname{ch} t}\, \underline{i} + \dfrac{\sin t}{\operatorname{ch} t}\, \underline{j} + (t - \operatorname{th} t)\, \underline{k};\ t_o = 0.$

38-40. Meghatározandó az alábbi térgörbék görbületi középpontjainak mértani helye:

$\boxed{38.}$ $\underline{r}(t) = \underline{i} \operatorname{ch} t + \underline{j} \operatorname{sh} t + \underline{k}\, t\ ;$

39. hengeres csavarvonal; (egyenlete: 35. pl.)

40. $\underline{r}(t) = e^t\, \underline{i} + e^{-t}\underline{j} + \sqrt{2}\, t\, \underline{k}.$

$\boxed{41.}$ Milyen síkgörbét alkotnak az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}e^t \sin t + \underline{j}\, e^t + \underline{k}e^t \cos t$$

térgörbe érintőinek az (x, z) síkkal való döféspontjai?

42. Milyen síkgörbét alkotnak az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}a\cos^2 t + \underline{j}\, a\cos t\sin t + \underline{k}\, a\sin t$$

(a adott állandó) Viviani-görbe érintőinek az (x, y) síkkal való döféspontjai?

43. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \frac{t^3}{3}\,\underline{i} + \frac{t^2}{2}\,\underline{j} + t\underline{k}$$

térgörbe binormális egyeneseinek és az (x, z) sík közös pontjainak mértani helyét.

44-46. Határozzuk meg az alábbi térgörbék görbületi körének egyenletét, az adott t_o paraméterű pontban.

$\boxed{44.}$ $\underline{r}(t) = (t^2 - 1)\,\underline{i} + (t^3 - 2)\,\underline{j} + (t + 3)\,\underline{k}$; $t_o = 0$;

*45. $\underline{r}(t) = \underline{i}\cos t + \underline{j}\sin t + \underline{k}\, t$; $t_o = \frac{\pi}{2}$;

46. $\underline{r}(t) = \underline{i}\cos t + \underline{j}\sin t + \underline{k}\, e^t$; $t_o = 0$.

$\boxed{47.}$ Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = 3\cos t\,\underline{i} + 6\underline{j} + 3\sin t\,\underline{k}$$

körnek az

$$x = y = z$$

egyenestől való távolságát. (Távolságon a két egymáshoz legközelebb levő pont távolságát értjük.)

48. Milyen távol van az

$$\underline{r}(t) = 2t\underline{i} + 3t^2\underline{j} + 3t^3\underline{k}$$

térgörbe az

$x + y + 1 = 0$ síktól?

2. Felületek

49-52. Irjuk fel az alábbi három ponton átmenő sik (egy) kétváltozós vektor-skalár függvénnyel adott egyenletét. Irjuk át a kapott eredményt

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

alakba.

$\boxed{49.}$ $P_1(2;\ 3;\ 5)$; $P_2(4;\ 5;\ -6)$; $P_3(1;\ 3;\ 2)$.

50. $P_1(2;\ 1;\ 9)$; $P_2(1;\ 5;\ 10)$; $P_3(0;\ 4;\ 0)$.

51. $P_1(-1;\ 4;\ 0)$; $P_2(0;\ 3;\ -2)$; $P_3(-1;\ 0;\ 1)$.

52. $P_1(0;\ 0;\ 3)$; $P_2(0;\ -1;\ 0)$; $P_3(2;\ 0;\ 0)$.

$\boxed{53.}$ Az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}a\cos^2 t + \underline{j}\, a\cos t\sin t + \underline{k}\, a\sin t$$

($a > 0$ konstans) Viviani-görbe minden pontján át párhuzamost huzunk az

$$x = y = z$$

egyenessel. Irjuk fel az igy keletkező hengerfelület egyenletét.

54-60. Irjuk fel a hengerfelület vektoregyenletét, ha adott a vezérvonala és alkotójának iránya:

54. Vezérvonal: $x^2 - y^2 = 1$; $z = 0$; alkotó z tengely irányu;

55. Vezérvonal: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}}$; $z = 0$; $\underline{a} = (3;\ -2;\ 5)$;

56. Vezérvonal: az (x, y) sikban fekvő, polárkoodinátákkal adott $r = a\varphi$ ($a > 0$ állandó) spirális; $\underline{a} = (0;\ 2;\ 3)$,

57. Vezérvonal: (y, z) síkban fekvő $9y^2 + 4z^2 = 36$ ellipszis; alkotó x tengely irányu;

58. Vezérvonal: (x, z) síkban fekvő $x^2 - 9z^2 = 9$ hiperbola; alkotó y tengely irányu;

59. Vezérvonal: $\underline{r}(t) = \underline{i}\, 4\, \mathrm{ch}^3 t + \underline{j}\, 3\, \mathrm{sh}^3 t$; $\underline{a} = (2;\ 3;\ -6)$;

60. Vezérvonal: $\underline{r}(t) = (\mathrm{ch}\, t + t\, \mathrm{sh}\, t)\, \underline{i} + (\mathrm{sh}\, t - t\, \mathrm{ch}\, t)\, \underline{k}$; $\underline{a} = (1;\ 5;\ -1)$.

61-67. Irjuk fel a kupfelület vektoregyenletét, ha adott a vezérvonala és csucspontja:

$\boxed{61.}$ Vezérvonal a Viviani görbe:

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, a \cos^2 t + \underline{j}\, a \cos t \sin t + \underline{k}\, a \sin t$$

($a > 0$ állandó); csucspont az origó;

$\boxed{62.}$ Vezérvonal: $y^2 = 4x$; $z = 0$ parabola; csucspont P(2; 1; 3);

63. Vezérvonal: $z = x^2$; $y = -1$ parabola; csucspont P(2; 3; -4);

64. Vezérvonal: az (x, y) síkban fekvő $y^2 - x^2 = 1$ hiperbola; csucspont a z tengely (0; 0; 5) pontja;

65. Vezérvonal: (x, y) síkbeli $y = x^4$ görbe, csucspont: (0; 3; 7);

66. Vezérvonal:

$$\underline{r}(t) = 2(\sin t - t \cos t)\, \underline{i} + 2(\cos t + t \sin t)\, \underline{k};$$

csucspont: (0; -8; 0);

67. Vezérvonal:

$$\underline{r}(t) = \frac{3t}{1+t^3}\, \underline{j} + \frac{3t^2}{1+t^3}\, \underline{k}; \quad \text{csucspont: } (5;\ -1;\ -1).$$

68-70. Irjuk fel az alábbi térgörbék érintőegyenesei által alkotott felület egyenletét:

$\boxed{68.}$ $\underline{r}(t) = 3\cos t\underline{i} + 2\sin t\underline{j} + t\underline{k}$;

69. $\underline{r}(t) = 4\underline{i}\cos^2 t + 2\underline{j}\sin 2t + 4\underline{k}\sin t$;

70. $\underline{r}(t) = \underline{i}\, e^t \cos t + \underline{j}\, e^t \sin t + \underline{k}\, e^t$.

71-76. Irjuk fel a forgásfelület egyenletét, ha adott a megforgatott vonal egyenlete és a forgástengely: (V.ö.: Példatár, V. kötet 2. pont)

$\boxed{71.}$ (y, z) sikbeli $2y - 3z = 7$ egyenes; y tengely körül;

*72. (x, z) sikbeli $(x - a)^2 + z^2 = b^2$ ($a > b > 0$ állandók) kör; z tengely körül;

73. (y, z) sikbeli $z = y^2 + 5$ parabola; y tengely körül;

74. (y, z) sikbeli $z = y^2 + 1$ parabola; z tengely körül;

75. $\underline{r} = (2\cos t - \cos 2t)\,\underline{i} + (2\sin t - \sin 2t)\,\underline{j}$;
x tengely körül;

*76. $x - 1 = y = z$ egyenes; z tengely körül.

77-88. Irjuk fel az alábbi vektoregyenlettel adott felületek egyenletét (explicit vagy implicit) skalár alakban s – ha lehet – állapitsuk meg a felület tipusát:

$\boxed{77.}$ $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\; a\,\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{ch}\,v + \underline{j}\; b\,\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{sh}\,v + \underline{k}\; c\,\mathrm{sh}\,u$
(a, b, c pozitiv adott állandók);

78. $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\; u\,\mathrm{ch}\,v + \underline{j}\; u\,\mathrm{sh}\,v + \underline{k}\,\dfrac{2}{\mathrm{sh}\,2v}$;

79. $\underline{r}(u, v) = u\underline{i} + v\underline{j} + u^2\underline{k}$

80. $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\; a\cos u\,\mathrm{ch}\,v + \underline{j}\; b\sin u\,\mathrm{ch}\,v + \underline{k}\; c\,\mathrm{sh}\,v$
(a, b, c adott pozitiv állandók);

81. $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, u \cos v + \underline{j}\, u \sin v$;

*82. $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, \mathrm{ch}\, u + \underline{j}\, \mathrm{sh}\, u + \underline{k}\, v$;

*83. $\underline{r}(u, v) = (8 \cos^3 u + 3v)\, \underline{i} + (8 \sin^3 u - 2v)\, \underline{j} + 5 v\underline{k}$;

*84. $\underline{r}(u, v) = 3\underline{i}\, \mathrm{ch}\, u + \underline{j}v + \underline{k}\, \mathrm{sh}\, u$;

*85. $\underline{r}(u, v) = \underline{i}v\, \mathrm{sh}\, u + \underline{j}\, v\, \mathrm{ch}\, u + 5(1 - v)\, \underline{k}$;

*86. $\underline{r}(u, v) = \underline{i}(a + b \cos u) \cos v + \underline{j}\, (a + b \cos u) \sin v + \underline{k}\, b \sin u$;

*87. $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, u \cos v + \underline{j}\, u \sin v + \underline{k}\, (u^2 + 1)$;

*88. $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, \sqrt{2u^2 + 2u + 1} \cos v + \underline{j}\, \sqrt{2u^2 + 2u + 1} \sin v + \underline{k}\, u$.

89-93. Válasszunk alkalmas paramétereket és irjuk át kétváltozós vektor-skalár függvény alakjába az alábbi kétváltozós függvényeket: $[z = f(x, y)]$

$\boxed{89.}$ $f(x,y) = h + a \sqrt{x^2 + y^2}$;

90. $f(x,y) = \mathrm{arc\, tg}\, \frac{y}{x}$;

91. $f(x,y) = \mathrm{arc\, tg}\, \frac{x + y}{x - y}$;

92. $f(x,y) = \ln xy$;

93. $f(x,y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$.

94-98. Milyen vonalak az alábbi felületek paramétervonalai:

$\boxed{94.}$ $\underline{r}(u,v) = \underline{r}_1 + (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)u + (\underline{r}_3 - \underline{r}_1)v$

($\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$ és $\underline{r}_3$ adott állandó helyvektorok);

95. $\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\underline{a}$; $\underline{r}(u)$ adott függvény (térgörbe) és $\underline{a}$ állandó vektor;

96. $\underline{r}(u,v) = \underline{c} + v(\underline{r}(u) - \underline{c})$; $r(u)$ adott függvény és $\underline{c}$ állandó vektor;

97. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}f(u)\cos v + \underline{i}f(u)\sin v + \underline{k}\,g(u)$;

f(u) és g(u) adott egyváltozós skalár függvények;

98. $\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\,\dot{\underline{r}}(u)$; $\underline{r}(u)$ adott függvény;

99. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(u,\ v) = \underline{i}\,u\cos v + \underline{j}\,u\sin v + \underline{k}\,f(u)$$

ahol f(u) adott egyváltozós függvény, felület paramétervonalai egymásra merőlegesek.

$\boxed{100.}$ A gömb azon pontjai, melyeken – földrajzi terminológiával élve – a hosszusági és szélességi szögek megegyeznek, a Viviani-görbét alkotják. Irjuk fel a Viviani-görbe egyenletét.

*101. Mi annak a felületi görbének az egyenlete, mely a

$$z = \text{Arc tg}\,\frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

felületen fekszik s az $x = 2y$ paraméterek közti összefüggéssel van adva.

102-107. Határozzuk meg az alábbi felületek érintősíkját az adott paraméterü pontjában:

$\boxed{102.}$ $\underline{r}(u,v) = uv\underline{i} + (u^2 + v)\,\underline{j} + (u - v^2)\underline{k}$; $u = 1,\ v = -1$;

103. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}u\cos v + \underline{j}\,u\sin v + \underline{k}$ Arc tg u; $u = 1,\ v = \frac{\pi}{4}$;

104. $\underline{r}(u,v) = u^4\underline{i} + 3u\,v^2\underline{j} + v^3\underline{k}$; $u = 2,\ v = 1$;

*105. $\underline{r}(u,v) = (u + v)\,\underline{i} + (u^2 + v^2)\,\underline{j} + (u^3 + v^3)\,\underline{k}$;

az érintési pont $P(2;\ 2;\ 2)$;

106. $\underline{r}(u,v) = (\cos u - v\sin u)\,\underline{i} + (\sin u - v\cos u)\,\underline{j} + (u + v)\,\underline{k}$;

$u = 0,\ v = 1$;

107. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}\, u \cos v + \underline{j}\, u \sin v + \underline{k}v$;

$u = u_o$; $v = v_o$.

108. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u,v) = (u+v)\,\underline{i} + (u-v)\,\underline{j} + u\,v\underline{k}$$

felületnek az

$$x + 2y + 2z = 32$$

síkkal párhuzamos érintősíkját.

109. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(u,v) = \left(a \cos u - v \sin \frac{u}{2} \cos u\right) \underline{i} + \left(a \sin u + v \sin \frac{u}{2} \cos u\right) \underline{j} + $$
$$+ v \cos \frac{u}{2}\, \underline{k} \qquad (a > 0 \text{ állandó})$$

(Möbius-féle) felület $P(a, 0, 0)$ pontjában a felületi normálisok ellentétes irányításuak aszerint, hogy a P az $u = 0$; $v = 0$, vagy az $u = 2\pi$, $v = 0$ paraméterértékpároknak felel meg.

$\boxed{110.}$ Számitsuk ki a torusz felszinét.

*111. Számitsuk ki a Viviani-féle felület nagyságát.

112-124. Számitsuk ki az alábbi felületek felszinét az adott határok között:

$\boxed{112.}$ $\underline{r}(u,v) = \underline{i}\, u \cos v + \underline{j}\, u \sin v + \underline{k}v$ csavarfelület,

$0 \leq u \leq 1$; $0 \leq v \leq 2\pi$;

113. $\underline{r}(u,v) = (\cos u - v \sin u)\,\underline{i} + (\sin u + v \cos u)\,\underline{j} + (u+v)\,\underline{k}$;

$0 \leq u \leq \pi$; $0 \leq v \leq 1$;

*114. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}\, u \cos v + \underline{j}\, u \sin v + \underline{k}\,\frac{hu}{a}$ (h és a >0 állandók), integrálási tartomány:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2 ;$$

115. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}u^2 + \underline{j}\,2u\cos v + \underline{k}\,2u\sin v$;

$0 \le u \le 1$; $\quad 0 \le v \le 2\pi$;

116. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}\,4\,\mathrm{ch}\,u\cos v + \underline{j}\,4u + \underline{k}\,4\,\mathrm{ch}\,u\sin v$;

$0 \le u \le 2$; $\quad 0 \le v \le \pi$;

117. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}v + \underline{j}(u + \ln\sqrt{3 - v^2}) + \underline{k}\,\mathrm{ch}\,v$;

$0 \le u \le 4$; $\quad 0 \le v \le 1$;

118. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}u + \underline{j}(v + \mathrm{tg}\,u) + \underline{k}\,\mathrm{ch}\,u$;

$0 \le u \le 1$; $\quad 2 \le v \le 4$;

$\boxed{119.}$ $z = \dfrac{x^2}{2y}$; $\quad 0 \le x \le 1$; $\quad 1 \le y \le 2$;

*120. $z = \mathrm{arc\,sin}(\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y)$; $\quad 2 \le y \le 3$; $\quad -\dfrac{1}{\mathrm{sh}\,y} \le \mathrm{sh}\,x \le \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,y}$;

*121. $z = xy$; $\quad (x^2 + y^2)^2 \le x^2 - y^2$; $\quad x \ge 0$; $\quad y \ge 0$;

*122. $z = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x}$; $\quad \sqrt{x^2 + y^2} \le \mathrm{Arc\,tg}\,\dfrac{y}{x}$; $\quad x \ge 0$; $\quad y \ge 0$;

123. $z = 1 - (x + y)^2$; $\quad x \ge 0$; $\quad y \ge 0$; $\quad z \ge 0$.

*124. $2z = \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b}$; $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$.

125-129. Számítsuk ki az alábbi felületek kívánt görbületi adatait:

$\boxed{125.}$ $\underline{r}(u,v) = \underline{i}u\cos v + \underline{j}\,u\sin v + \underline{k}\,c\,v$ ($c > 0$ állandó);

összeg és szorzat görbület, főgörbületek, főirányok;

*126. $z = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{\cos nx}{\cos ny}$; $\quad$ összeggörbület;

127. $z = 4x^2 - 2xy - 3y^2 + x + 2y + 5$; főgörbületek az

$x = 1$, $y = 3$ helyen;

128. $z = \operatorname{ar\,ch} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$; szorzatgörbület;

*129. $\underline{r}(u,v) = (u^2 + v^2)\,\underline{i} + 2uv\,\underline{j} + (u - v)\,\underline{k}$; főirányok, főmetszetek síkjának egyenletei $u = -1$; $v = -1$ paraméterű pontban.

*130. Mely pontokban lesz a

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6}$$

hiperbolikus paraboloid összeggörbülete zérus?

131. Határozzuk meg az

$\underline{r}(u,v) = \underline{i}(a + b\cos u)\cos v + \underline{j}(a + b\cos u)\sin v + \underline{k}\,b\sin u$

($a > b > 0$ állandók) toruszfelület elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontjait.

132. Határozzuk meg az

$\underline{r}(u,v) = e^u\,\underline{i} + e^v\,\underline{j} + (u - v)\,\underline{k}$

felület $u = 0$, $v = 0$ paraméterű pontjában az

$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = 2$$

feltétellel megadott normálsíkjával $\vartheta = 30^{\circ}$-os szöget bezáró ferdemetszet görbületét.

Vektoranalízis

3. Skalár-vektor függvények

133-140. Milyen felületek alkotják az alábbi skalár-vektor függvények szint-felületeit:

133. $u(\underline{r}) = z - x^2 - y^2$;

134. $u(\underline{r}) = x^2 - y - z$;

135. $u(\underline{r}) = \underline{r}^2$;

136. $u(\underline{r}) = \underline{a} \cdot \underline{r}$, ($\underline{a}$ adott állandó vektor);

$\boxed{137}$ $u(\underline{r}) = |\underline{a} \times \underline{r}|$, ($\underline{a}$ adott állandó vektor);

138. $u(\underline{r}) = (\underline{r} - \underline{a})^2$, ($\underline{a}$ adott állandó vektor);

$\boxed{139}$ $u(\underline{r}) = \dfrac{\underline{e}\,\underline{r}}{|\underline{r}|}$, ($\underline{e}$ adott állandó egységvektor);

140. $u(\underline{r}) = \sqrt{\underline{r}^2 - (\underline{e}\;\underline{r})^2}$, ($\underline{e}$ adott állandó egységvektor.

141-145. Képezzük az alábbi függvények gradiens-vektorát:

141. $u(\underline{r}) = c\,\underline{r}^2$, (c adott állandó);

142. $u(\underline{r}) = \underline{a}\;\underline{r}$, ($\underline{a}$ adott állandó vektor);

143. $u(\underline{r}) = |\underline{r}|$;

144. $u(\underline{r}) = \dfrac{1}{|\underline{r}|}$;

145. $u(\underline{r}) = |\underline{r}|^n$, ($n > 1$ pozitív egész).

146. Határozzuk meg $u(\underline{r}) = \ln |\underline{r}|$ gradiensvektorát a $P_0(2, 3, -1)$ pontban.

147-150. Határozzuk meg az adott skalártér adott pontjában az előirt irányban vett irány szerinti deriváltjának értékét:

$\boxed{147.}$ $u(\underline{r}) = xy^3 - 2e^x + \sin z$; $P(0;\ 2;\ \pi)$; $\underline{a} = 3\underline{i} - 4\underline{j} + 12\,\underline{k}$;

148. $u(\underline{r}) = 2x^2y - xyz$; $P(1;\ 1;\ 2)$; $\underline{a} = \underline{i} + 3\underline{j} - 5\underline{k}$;

149. $u(\underline{r}) = x^3y^2z$; $P(1;\ 2;\ -3)$; $\underline{a} = -2\underline{i} + 5\underline{j} - 3\underline{k}$;

150. $u(\underline{r}) = x^2y + 2xz^2$; $P(3;\ 1;\ -3)$ $\underline{a} = 3\underline{i} - 4\underline{j} + \underline{k}$.

151. Határozzuk meg az $u(\underline{r}) = |\,\underline{r}\,|$ skalár-vektor függvény irányszerinti deviáltját az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\cos t + \underline{j}\sin t + \underline{k}\,2t \quad \text{térgörbe} \quad t_o = \frac{\pi}{4}$$

paraméterü pontjabeli érintővektora irányában.

152. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{grad}\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2 \operatorname{grad} u_1 - u_1 \operatorname{grad} u_2}{u_2^2} \qquad (u_2 \neq 0).$$

4. Vektor-vektor függvények

$\boxed{153.}$ Határozzuk meg azt a tenzort, mely a tér bármely helyvektorához annak az origón átmenő $\underline{e}$ (adott egységvektor) irányu egyenesen levő vetületét rendeli hozzá. Mennyi a tenzor matrixának a rangszáma?

*154. Határozzuk meg az origón átmenő $\underline{e}$ (adott egységvektor) irányu egyenesre való tükrözés tenzorát.

155. Határozzuk meg azt a tenzort, mely a tér bármely helyvektorához annak az origón átmenő $\underline{e}$ (adott egységvektor) normálisu síkon való vetületét rendeli hozzá.

156. Határozzuk meg az origón átmenő $\underline{e}$ (adott egységvektor) normálisu síkra való tükrözés tenzorát.

$\boxed{157.}$ Írjuk fel azt a vektor-vektor függvényt, mely a tér tetszőleges pontjához annak az

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = z+1$$

egyenesen való vetületét rendeli hozzá! Tenzor-e az eredményül kapott vektor-vektor függvény?

$\boxed{158.}$ Melyik az a tenzor, mely az (1; 1; 1) vektor irányában λ-szoros nyujtást végez?

$\boxed{158/a}$ Melyik az a tenzor, mely az $\underline{e}(e_1; e_2; e_3)$ irányban ($\underline{e}$ egységvektor) λ -szoros nyujtást végez?

158/b Melyik az a tenzor, amelyik a tér vektorait az $\frac{x}{3} = y = \frac{z}{2}$ egyenes irányában 14-szeresre nyujtja, majd tükrözi az egyenesre?

158/c Melyik az a tenzor, amelyik a tér vektorait a $2x - y + 2z = 0$ síkra tükrözi és a tükörképet 9-szeresére nyujtja?

*159. Melyik az a tenzor, mely az origón átmenő, (1; 2; -2) irányu tengely körül $\alpha = 30^{0}$-os szöggel pozitiv irányba elforgatja a tér pontjait.

160-166. Számitsuk ki az alábbi vektor-vektor függvények divergenciáját és rotációját:

$\boxed{160.}$ $\underline{v}(r) = \underline{r}^2\, \underline{r}$;

161. $\underline{v}(r) = \underline{r}\, e^{\underline{r}^2}$;

162. $\underline{v}(r) = (\underline{a} \times \underline{r}) \times \underline{r}$, ahol $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$;

163. $\underline{v}(r) = (y^2 + z^2)\,\underline{i} + (z^2 + x^2)\,\underline{j} + (x^2 + y^2)\,\underline{k}$;

164. $\underline{v}(r) = x^2 y z\, \underline{i} + x y^2 z\, \underline{j} + x y z^2\, \underline{k}$;

165. $\underline{v}(r) = -\frac{x}{x^2 + y^2}\,\underline{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\underline{j} + \underline{k}$;

166. $\underline{v}(r) = e^{xy}\,\underline{i} + e^{yz}\underline{j} + e^{zx}\underline{k}.$

167-170. Számitsuk ki az alábbi vektor-vektor függvények divergenciáját és rotációját a megadott pontban:

167. $\underline{v}(r) = 3x\,\underline{i} + xy\,\underline{j} + z\underline{k};\quad P(1;\ 2;\ 3);$

168. $\underline{v}(r) = (x^2 - y^2)\,\underline{i} + (y^2 - z^2)\,\underline{j} + (z^2 - x^2)\,\underline{k},\quad P(2;\ 1;\ 0);$

169. $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{x}{y}\underline{i} + \frac{y}{z}\,\underline{j} + xz\,\underline{k},\quad P(1;\ 2;\ 3);$

170. $\underline{v}(\underline{r}) = (x^2 - y^2)\underline{i} + (y^2 - z^2)\,\underline{j} + (z^2 + x^2)\underline{k};\quad P(0;\ 1;\ 2).$

171-172. Számitsuk ki az alábbi vektor-vektor függvények derviáltenzorát divergenciáját és rotációját:

171. $\underline{v}(\underline{r}) = \dfrac{\underline{r}}{|\underline{r}|};$

172. $\underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{grad} \ln |\underline{r}|.$

173-178. Számitsuk ki az alábbi kifejezéseket:

173. $\operatorname{div} \operatorname{grad} |\,\underline{r}\,|;$

174. $\operatorname{div} \operatorname{grad} \dfrac{1}{\underline{r}^2};$

175. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} |\,\underline{r}\,|;$

176. $\operatorname{grad} \operatorname{div} \dfrac{\underline{r}}{|\,\underline{r}\,|};$

177. $\operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{r}^2 \cdot \underline{r};$

178. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} (e^{yz}\underline{i} + e^{zx}\underline{j} + e^{xy}\underline{k}).$

179. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{v} - \triangle \underline{v}.$$

180-193. Számitsuk ki az alábbi vonalintegrálokat:

$\boxed{180.}$ $\underline{v}(\underline{r}) = -y\underline{i} + x\underline{j}$; A(1; 0) ponttól B(0; 1) pontig a két pontot összekötő egyenes mentén;

181. mint 180., de az ut a két pontot összekötő egységsugaru körív;

*182. mint 180., de az ut a két pontot összekötő

$y(x) = \sqrt{1 - x}$ parabolaív;

*183. $\underline{v}(\underline{r}) = \dfrac{-y\underline{i} + y\underline{j}}{x^2 + y^2}$; az origót egyszer körülvevő zárt görbe mentén pozitív irányban;

184. $\underline{v}(\underline{r}) = xy\,\underline{i} + y\underline{j}$; az $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$ cikloís íve mentén $0 \leq t \leq 2\pi$;

185. $\underline{v}(\underline{r}) = (x + yz)\underline{i} + (x^2 - z^2)\underline{j} + (xy + z)\underline{k}$; A(1; 1; 1) ponttól B(0; 3; 5) pontig a két pontot összekötő egyenes mentén;

186. mint 185. az ut azonban a két pont között először az x, majd az y és végül a z tengellyel halad párhuzamosan;

187. $\underline{v}(\underline{r}) = yz\,\underline{i} + zx\,\underline{j} + xy\,\underline{k}$; A(-1; 2; 0) ponttól B(5; 5; 9) pontig a két pontot összekötő egyenes mentén;

*188. mint 187. az ut azonban a két pont között először az x, majd az y és végül a z tengellyel halad párhuzamosan;

*189. $\underline{v}(\underline{r}) = yz\,\underline{i} + zx\,\underline{j} + xy\,\underline{k}$; $\underline{r}(t) = \underline{i}\,\text{Arc}\sin t + (t^2 + 1)\,\underline{j} + t^3\underline{k}$; $0 \leq t \leq 1$;

190. $\underline{v}(\underline{r}) = 2x\,\underline{i} - \frac{y}{2}\underline{j} + (x - z)\,\underline{k}$;

$\underline{r}(t) = (1 - t)\,\underline{i} + (t^2 - 1)\,\underline{j} + t^3\underline{k}$; $\quad 0 \leq t \leq 2$;

*191. $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$; $\underline{r}(t) = \underline{i}\cos^2 t + \underline{j}\cos t \sin t + \underline{k}\sin t$

Viviani-görbe; $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$;

$\star$192. $\underline{v}(\underline{r}) = (x^2 + y + z)\underline{i} + (x + y^2 + z)\,\underline{j} + (x + y + z^2)\,\underline{k}$;

$\underline{r}(t) = \underline{i}\,\mathrm{ch}\,t + \underline{j}\,\mathrm{sh}\,t + 2t\,\underline{k}$; $\quad 0 \leq t \leq 2$;

$\star$193. $\underline{v}(\underline{r}) = 2xyz\,\underline{i} + x^2 z\underline{j} + x^2 y\underline{k}$; integrációs ut a $z = 3$ sikban fekvő $x^2 + y^2 = 1$ körnek ive az $A(1;\ 0;\ 3)$ ponttól a $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ 3\right)$ pontig.

$\star$194. A koordinátarendszer kezdőpontjában elhelyezett M tömeg a P(x, y, z) pontban elhelyezett tömegegységre a fizika tanitása szerint

$$\underline{F} = fM\,\frac{1}{\underline{r}^2}\left(-\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\right) = -fM\,\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

erőt gyakorol, ahol f a gravitációs állandó. Mekkora az erőtér <u>ellenében</u> végzett munka, ha az egységnyi tömegpont az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\cos t + \underline{j}\sin t + \underline{k}t$$

csavarvonal mentén mozog a $t = 0$ paraméterü pontból kiindulva a $t = 4$ paraméterü pontig?

195-198. Potenciálosak-e az alábbi vektor-vektor függvények; ha igen, hol; és állapitsuk meg a potenciálfüggvényt:

195. $\underline{v}(\underline{r}) = (2x - 4xyz)\underline{i} + (3z^3 - 2x^2 z)\underline{j} + (9\,yz^2 - 2x^2 y)\,\underline{k}$;

196. $\underline{v}(\underline{r}) = e^{xyz}\left\{(2x + x^2 yz + y^3 z + yz^3)\underline{i} + \right.$

$\left. + (2y + x^3 z + xy^2 z + xz^3)\underline{j} + (2z + x^3 y + xy^3 + xyz^2)\,\underline{k}\right\}$;

197. $\underline{v}(\underline{r}) = \dfrac{1}{1 + (x + yz)^2}\,(\underline{i} + z\underline{j} + y\underline{k})$;

198. $\underline{v}(\underline{r}) = \dfrac{2xy}{4 - z^2}\,\underline{i} + \dfrac{x^2}{4 - z^2}\,\underline{j} + \dfrac{2\,x^2 yz}{(4 - z^2)^2}\,\underline{k}$.

199\. Potenciálos-e a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \frac{-y\,\underline{i} + x\,\underline{j}}{x^2 + y^2}$$

vektor-vektor függvény? Ha igen, határozzuk meg a potenciálfüggvényt. Számitsuk ki a vonalintegrált a következő zárt görbe mentén:

$\underline{r}(t) = \underline{i}\cos t + \underline{j}\sin t + \underline{k}t$ csavarvonal $0 \le t \le 2\pi$;

$x = 1$, $y = 0$ egyenes $2 \ge z \ge 0$ (irányitás lefelé).

Miért nem zérus a zárt görbére vett vonalintegrál?

200-206\. Számitsuk ki az alábbi felületi integrálokat felfelé mutató felületi normális mellett:

$\boxed{200}$ $\underline{v}(\underline{r}) = y\underline{i} + z\underline{j} + x\underline{k}$; a felület origó középpontu, egységsugaru gömbfelület azon része, melyre

$y \ge 0$; $z \ge 0$;

*201. $\underline{v}(\underline{r}) = x\underline{i} + y\underline{j}$; a felület origó középpontu, 4 egységsugaru gömbfelület I. térnyolcadba eső azon része, melynek vetülete az

$x^2 + y^2 - 4x = 0$ kör fele;

202\. $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$; a felület

$\underline{r}(u,v) = \underline{i}(a + b\cos u)\cos v + \underline{j}(a + b\cos u)\sin v + \underline{k}\,b\sin u$

$(a > b > 0$ állandók) toruszfelület (x, y) sik felett levő része;

*203. $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{1}{xz}\underline{i} + \frac{1}{yz}\underline{j}$; a felület az

$\underline{r}(u,v) = 5\underline{i}\cos^3 u\cos v + 5\underline{j}\cos^3 u\sin v + 5\underline{k}\sin^3 u$

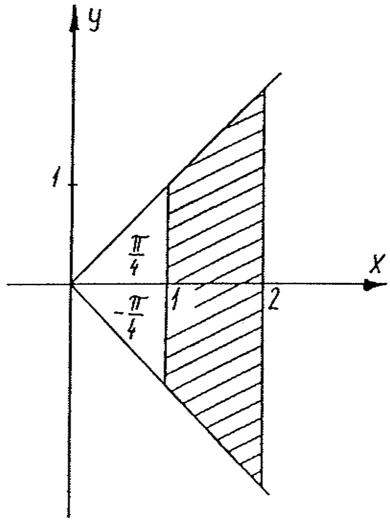
forgási asztrois felület $z = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ sik felett levő része;

$\boxed{204.}$ $\underline{v}(\underline{r}) = -yx\underline{i} - xy\underline{j} + z\underline{k}$; a felület $z = x^2 - y^2$ hiperbolikus paraboloid azon darabja, melynek vetülete az (x, y) sikon:

$-2 \le x \le 2$; $-3 \le y \le 3$;

205. $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$; a felület $z = x^2 + y^2$ forgási paraboloid $x^2 + y^2 - 4x = 0$ henger belsejébe eső része;

206. $\underline{v}(\underline{r}) = (y + z)\,\underline{i} + xz\,\underline{j} + (x^2 + y^2)\underline{k}$; a felület $z = \frac{y}{x}$ felület azon része, melynek (x, y) síkon való vetülete az 1. ábrán látható.



1. ábra

*207. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(\underline{r}) = (2x - \sin\sqrt{yz})\underline{i} + (e^{x+z^2} - y)\,\underline{j} + (\sqrt{x^2 + y^2} + 3x)\,\underline{k}$$

vektor-vektor függvény felületi integrálját arra a zárt felületre vonatkozólag, mely az $x^2 + y^2 \leq 1$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $0 \leq z \leq 2$ térrészt határolja befelé mutató normális esetén.

208-212. Szemléltessük az alábbi feladatokon a Gauss-Osztrogradszki tételt úgy, hogy mind a felületi, mind a térfogati integrált kiszámítjuk:

$\boxed{208}$ $\underline{v}(\underline{r}) = y\underline{i} + z\underline{j} + x\underline{k}$; a térrész: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

209. $\underline{v}(\underline{r}) = (-x^2 + y + z)\,\underline{i} + (x - y^2 + z)\,\underline{j} + (x + y - z^2)\underline{k}$; a térrész; $0 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 2$; $0 \leq z \leq 2$;

210. $\underline{v}(\underline{r}) = (x - 2z)\,\underline{i} + (2x + y)\,\underline{j} + (x - y + z)\,\underline{k}$; a térrész: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$;

*211. $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$; a térrész: $0 \leq z \leq 5 - \frac{5}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$;

212. $\underline{v}(\underline{r}) = x^3\underline{i} + y^3\underline{j} + z^3\underline{k}$; a térrész: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

($R > 0$ állandó);

$\boxed{213}$ A gömb középpontjára vonatkozó inercia nyomatéka:

$$\iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dV.$$

Számitsuk ki ennek értékét felületi integrálként a Gauss-Osztrogradszki-tétel felhasználásával.

214-218. Szemléltessük az alábbi feladatokon a Stokes-tételt, hogy mind a felületi, mint a vonalintegrált kiszámitjuk:

$\boxed{214}$ $\underline{v}(\underline{r}) = (x + z)\underline{i} + (3y - 2z)\,\underline{j} + (5x - 3y)\,\underline{k}$; a felület $x^2 + y^2 = 1$; $z = 0$ alapkörü és (0; 0; 5) csucspontu kuppalást;

215. $\underline{v}(\underline{r}) = xz^2\underline{i} + zy^2\underline{j} + x^2y\underline{k}$; a felület $z = 4 - x^2 - y^2$ forgási paraboloid $z \geq 0$ darabja;

216. $\underline{v}(\underline{r}) = (x + y + z)\underline{i} + xyz\underline{j} + x^2\underline{k}$; a felület $z = x^2 + y^2$ forgásparaboloid azon része, melyre $x^2 + y^2 \leq 4$;

*217. $\underline{v}(\underline{r}) = (x - y)\underline{i} + (x + y)\underline{j} + xy\underline{k}$; a felület $z = xy$ hiperbolikus paraboloid azon része, melyre $x^2 + y^2 \leq 4$;

218. $\underline{v}(\underline{r}) = (y + 3z)\,\underline{i} - (x + 2z)\underline{j} - (3x - 2y)\,\underline{k}$;

a felület az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömbfelület azon része, melyre $y \geq 0$; $z \geq 0$.

Megoldások

1. Az egyenes $t = 0$ időpillanatban az x tengelyt metszi. Tetszőleges t időpontban az egyenes és az (x, y) sík döféspontjának koordinátái: $x = a \cos \omega t$; $y = a \sin \omega t$; az egyenesen mozgó pont z koordinátája pedig bt. Tehát a pontmozgás egyenlete:

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, a \cos \omega t + \underline{j}\, a \sin \omega t + \underline{k}\, bt.$$

A mozgás pályája: hengeres csavarvonal.

2. $$\underline{r}(t) = \underline{i}\, c\, t \cos \omega t + \underline{j}\, c\, t \sin \omega t + \underline{k}\, bt.$$

A felület egyenletét ugy nyerjük, hogy a térgörbe egyenletét skalár-paraméteres alakban irjuk és a t paramétert kiküszöböljük:

$$x = ct \cos \omega t$$

$$y = ct \sin \omega t$$

$$z = bt$$

és a felület

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 z^2$$

kupfelület.

3. A vektor-skalár függvényt átirjuk skalár-paraméteres alakba (lásd előző feladat) s x, y és z értékeit a megadott felület egyenletébe helyettesitve, azonosságot kell kapnunk.

5. Az $\underline{r}(t)$ vektor merőleges a sík normálvektorára. Merőleges vektorok skaláris szorzata zérus. Igy a skaláris szorzat zérus volta t-re – lényegileg – másodfoku egyenletet szolgáltat.
A két megoldás:

$$\frac{1 - 4x}{4} = \frac{3y + 1}{3} = \frac{1 - 2z}{2}$$

és

$$\frac{4-x}{4} = \frac{3y+8}{6} = 2 - z.$$

6. A körhenger alkotóinak irányvektora $\underline{k}$, a csavarvonal egyenlete pedig

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, a \cos bt + \underline{j}\, a \sin bt + \underline{k}\, ct$$

ahol a, b és c adott állandók. A keresett szög: az érintővektor és $\underline{k}$ által alkotott szög. Ennek (ill. a cosinusának) t-től függetlennek kell lennie.

7. $t = k\pi$ (k egész); (y, z) síkkal párhuzamos érintőjű pontok paramétere;

$t = 0$ és $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (k egész); (x, z) síkkal párhuzamos érintőjű pontok paramétere.

8. $\underline{r}(t) = \underline{i}\sqrt{t}\cos t + \underline{j}\sqrt{t}\sin t + \underline{k}\, t;$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}\left(\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\sin t\right) + \underline{j}\left(\frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\cos t\right) + \underline{k};$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \left\{\left(\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\sin t\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\cos t\right)^2 + 1^2\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{4t} + t + 1\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}.$$

Az ívhossz számításánál fellépő integrál improprius, de konvergens:

$$s = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\right)dt = \left[\sqrt{t} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \left[\sqrt{t}\left(1 + \frac{2}{3}t\right)\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{4\pi}{3}\right).$$

9. $\sqrt{1+a^2}\,\frac{\pi}{2}.$

10. $2\pi\sqrt{14}.$

11. 10.

12. 20.

13. A csucspont paramétere $t = -\infty$.

$$\frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha t_o}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\gamma^2}.$$

14. $a + 2b.$

15. A térgörbe itt két felület metszésvonalaként van adva. Jelen példában a görbe paraméteres egyenlete is egyszerűen felirható, ha az x-et választjuk paraméternek:

$$x = t$$

$$y = \frac{1}{3}\,t^2$$

$$z = \frac{2}{27}\,t^3$$

vagy vektor-alakba irva:

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + \frac{1}{3}\,t^2\underline{j} + \frac{2}{27}\,t^3\underline{k}; \qquad 0 \le t \le 2.$$

Az eredmény: $\frac{70}{27}$.

16. Először kiszámitjuk az első három derivált értékét a t_o helyen.

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\,\underline{k},$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = (6t - 2)\,\underline{i} + 3t^2\underline{j} - \underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\underline{i} + 6t\underline{j},$$

$$\dddot{\underline{r}}(t) = 6\underline{j};$$

$$\underline{r}(2) = 8\underline{i} + 8\underline{j} - \underline{k},$$

$$\dot{\underline{r}}(2) = 10\underline{i} + 12\underline{j} - \underline{k}, \quad |\dot{\underline{r}}(2)| = 245 = 7\sqrt{5},$$

$$\ddot{\underline{r}}(2) = 6\underline{i} + 12\,\underline{j},$$

$$\dddot{\underline{r}}(2) = 6\underline{j}.$$

Az érintő egységvektor:

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|} = \frac{10}{7\sqrt{5}}\,\underline{i} + \frac{12}{7\sqrt{5}}\,\underline{j} - \frac{1}{7\sqrt{5}}\,\underline{k}.$$

A görbület:

$$\varkappa = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}.$$

(Természetesen minden érték a $t_0 = 2$ helyen veendő.)

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 12 & -1 \\ 6 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 6(2\underline{i} - \underline{j} + 8\underline{k}),$$

$$|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}| = 6\sqrt{69}; \quad |\dot{\underline{r}}|^3 = 343 \,.\, 5 \,.\, \sqrt{5} = 1715\sqrt{5},$$

$$\varkappa = \frac{6}{1715}\sqrt{\frac{69}{5}}.$$

A binormális egységvektor:

$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}.$$

Tehát

$$\underline{b} = \frac{2}{\sqrt{69}}\,\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{69}}\,\underline{j} + \frac{8}{\sqrt{69}}\,\underline{k}.$$

A főnormális egységvektort a $\underline{b}$ és $\underline{t}$ (ilyen sorrendben vett) vektori szorzataként nyerjük.

$$\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t} = \frac{1}{7\sqrt{5}\sqrt{69}} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -1 & 8 \\ 10 & 12 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7\sqrt{345}} (-95\underline{i} + 82\underline{j} + 34\underline{k}).$$

A simulósík normálisa a binormális, egyenlete:

$$2(x - 8) - (y - 8) + 8(z + 1) = 0,$$

vagy:

$$2x - y + 8z = 0.$$

A normálsík normálisa az érintő, egyenlete:

$$10\,(x - 8) + 12\,(y - 8) - (z + 1) = 0,$$

vagy:

$$10\,x + 12y - z - 177 = 0.$$

A rektifikáló sik normálisa a főnormális, egyenlete:

$$-95(x - 8) + 82(y - 8) + 34(z + 1) = 0,$$

vagy:

$$-95x + 82y + 34z = -138.$$

A torzió:

$$\tau = \frac{\dot{\underline{r}}\;\ddot{\underline{r}}\;\dddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|^2}.$$

$$\dot{\underline{r}}\;\ddot{\underline{r}}\;\dddot{\underline{r}} = (\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}})\dddot{\underline{r}} = 6(2\underline{i} - \underline{j} + 8\underline{k}) \cdot 6\underline{j} = -36,$$

$$\tau = - \frac{36}{36 \cdot 69} = - \frac{1}{69} .$$

A sebesség vektor:

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = 10\underline{i} + 12\underline{j} - \underline{k}.$$

A sebesség abszolut értéke:

$$|\underline{v}| = v = 7\sqrt{5}.$$

A gyorsulás vektor:

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = 6\underline{i} + 12\underline{j}.$$

A gyorsulás abszolut értéke:

$$|\underline{a}| = a = 6\sqrt{5}.$$

A gyorsulásvektor felbontása érintő és főnormális irányu komponensre:

$$\underline{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \underline{t} + \frac{v^2}{\varrho} \cdot \underline{n} .$$

Mindkét oldalt szorozva $\underline{t}$ egységvektorral skalárisan, és figyelembe véve, hogy a merőlegesség miatt $\underline{t} \cdot \underline{n} = 0$, kapjuk:

$$\underline{a} \cdot \underline{t} = \frac{dv}{dt},$$

tehát

$$\frac{dv}{dt} = (6\underline{i} + 12\underline{j}) \cdot \frac{1}{7\sqrt{5}} (10\underline{i} + 12\underline{j} - \underline{k}) = \frac{12}{7\sqrt{5}} \cdot 17 = \frac{204}{7\sqrt{5}} .$$

Majd $\underline{n}$-nel szorozva skalárisan:

$$\frac{v^2}{\varrho} = \underline{a} \cdot \underline{n} = (6\underline{i} + 12\underline{j}) \frac{1}{7\sqrt{345}} (-95\underline{i} + 82\underline{j} + 34\underline{k}) =$$

$$= \frac{6}{7\sqrt{345}} \cdot 69 = \frac{6}{7}\sqrt{\frac{69}{5}} .$$

Tehát

$$\underline{a} = \frac{204}{7\sqrt{5}} \underline{t} + \frac{6}{7}\sqrt{\frac{69}{5}}\, \underline{n}.$$

A feladatot megoldottuk, vagyis minden kérdésre választ adtunk. A továbbiakban egyes adatokat más módon fogunk kiszámitani.

Tekintsük pl. a gyorsulás felbontásának képletét:

$$\underline{a} = \frac{dv}{dt}\underline{t} + \frac{v^2}{\varrho}\underline{n}.$$

Képezve az

$$\underline{a} - \frac{dv}{dt}\underline{t} = \underline{a} - (\underline{a} \cdot \underline{t})\underline{t}$$

vektort, ennek iránya $\underline{n}$ és abszolut értéke v^2-tel osztva a görbületet adja. Az előbbiekből

$$\underline{a}\,\underline{t} = \frac{204}{7\sqrt{5}} ,$$

és igy

$$\frac{v^2}{\varrho}\underline{n} = \underline{a} - (\underline{a} \cdot \underline{t})\underline{t} = 6\underline{i} + 12\underline{j} - \frac{204}{7\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{7\sqrt{5}}(10\underline{i} + 12\underline{j} - \underline{k}) =$$

$$= 6\underline{i} + 12\underline{j} - \frac{204}{245}(10\underline{i} + 12\underline{j} - \underline{k}) =$$

$$= \frac{1}{245}(-570\underline{i} + 492\underline{j} + 204\underline{k}).$$

Ennek irányába mutató egységvektor, vagyis $\underline{n}$ (az egyes komponensek oszthatók 6-tal):

$$\frac{1}{7\sqrt{345}}(-95\underline{i} + 82\underline{j} + 34\underline{k}),$$

és az abszolut érték:

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{6 \cdot 7 \cdot \sqrt{345}}{245} = \frac{6\sqrt{345}}{35}.$$

$v^2 = 245$-tel osztva, kapjuk a görbületet:

$$\frac{1}{\varrho} = \varkappa = \frac{6\sqrt{345}}{35 \cdot 245} = \frac{6}{1715}\sqrt{\frac{345}{25}} = \frac{6}{1715}\sqrt{\frac{69}{5}}.$$

A görbületet és a főnormálist kiszámithatjuk az első Frenet-képlet segitségével is:

$$\frac{d\underline{t}}{dt} = \frac{d\underline{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \varkappa \cdot \underline{n} \cdot v.$$

Ehhez azonban ki kell általánosságban számitani $\underline{t}$ érintő egységvektort:

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|} = \frac{(6t - 2)\underline{i} + 3t^2\underline{j} - \underline{k}}{\sqrt{36t^2 - 24t + 4 + 9t^4 + 1}},$$

és ezt kell a t paraméter szerint deriválnunk:

$$\frac{d\underline{t}}{dt} = \frac{6\underline{i} + 6t\underline{j}}{\sqrt{9t^4 + 36t^2 - 24t + 5}} -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{36t^3 + 72t - 24}{(9t^4 + 36t^2 - 24t + 5)^{\frac{3}{2}}} \left\{ (6t - 2)\underline{i} + 3t^2\underline{j} - \underline{k} \right\}.$$

t helyébe $t_o = 2$-t irva:

$$\left.\frac{d\underline{t}}{dt}\right|_{t=2} = \frac{6(\underline{i}+2\underline{j})}{\sqrt{245}} - \frac{240}{245\sqrt{245}}(10\underline{i}+12\underline{j}-\underline{k}) =$$

$$= \frac{6}{245\sqrt{245}}(-95\underline{i}+82\underline{j}+34\underline{k}).$$

Ez $\underline{n}$ irányba mutat és $v = \sqrt{245}$-tel osztva az abszolut értékét

$$\varkappa = \frac{6}{245^2} \cdot 7\sqrt{345} = \frac{6}{1715} \cdot \sqrt{\frac{69}{5}}.$$

Hasonlóan lehetne a torziót is kiszámitani a 3. Frenet-féle képlet segitségével, de $\underline{b}$ vektort általánosságban felirni, majd t szerint deriválni, nagyon munkaigényes.

17. $\underline{t} = \frac{1}{3}(2;\ 1;\ 2);$ $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{234}}(-7;\ -8;\ 11);$

$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{26}}(3;\ -4;\ -1);$

simulósik: $3x - 4y - z + 12 = 0;$

normál sik: $2x + y + 2z - 3 = 0;$

rektifikáló sik: $7x + 8y - 11z - 24 = 0;$

$\varkappa = \frac{2\sqrt{26}}{27};$ $\tau = -\frac{3}{26};$

$\underline{v} = (2;\ 1;\ 2);$ $|\underline{v}| = 3;$

$\underline{a} = (2;\ 0;\ 6);$ $|\underline{a}| = \sqrt{40};$ $\underline{a} = \frac{16}{3}\underline{t} + \frac{2}{3}\sqrt{26}\,\underline{n}.$

18. $\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-2\sqrt{3};\ 1;\ 2);$ $\underline{n} = -\frac{1}{\sqrt{391}}(8;\ 10\sqrt{3};\ 3\sqrt{3});$

$\underline{b} = \frac{2}{\sqrt{23}}(\sqrt{3};\ -2;\ 4);$

simulósik: $\sqrt{3}x - 2y + 4z = \frac{8\pi}{3}$; $\varkappa = \frac{2}{17}\sqrt{\frac{23}{17}}$;

normál sik: $2\sqrt{3}x - y - 2z = 3\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$; $\tau - \frac{4}{23}$;

rektifikáló sik: $8x + 10\sqrt{3}y + 3\sqrt{3}z = 46 + 2\pi\sqrt{3}$;

$\underline{v} = (-2\sqrt{3};\ 1;\ 2)$; $|\underline{v}| = \sqrt{17}$; $\underline{a} = (-2;\ -\sqrt{3};\ 0)$

$|\underline{a}| = \sqrt{7}$; $\underline{a} = 3\sqrt{\frac{3}{17}}\,\underline{t} + 2\sqrt{\frac{23}{17}}\,\underline{n}$.

19. $\underline{t} = \frac{1}{11}(-6;\ 2;\ 9)$; $\underline{n} = -\frac{1}{11}(7;\ -6;\ 6)$;

$\underline{b} = -\frac{1}{11}(6,\ 9,\ 2)$;

simulósik: $6x + 9y + 2z = 21$; $\varkappa = \frac{6}{121}$;

normálsik: $6x - 2y - 9z = 43$;

rektifikáló sik: $7x - 6y + 6z = -3$; $\tau = -\frac{6}{121}$;

$\underline{v} = (-6,\ 2,\ 9)$; $|\underline{v}| = 11$; $\underline{a} = 6(1,\ 0,\ -3)$;

$|\underline{a}| = 6\sqrt{10}$; $\underline{a} = -18\underline{t} + 6\underline{n}$.

20. $\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1;\ 3;\ 2)$; $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{42}}(5;\ -1;\ 4)$;

$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;\ 1;\ -1)$;

simulósik: $x + y - z = 8$; $\varkappa = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{3}{14}}$;

normálsik: $x - 3y - 2z = -8$;

rektifikáló sik: $5x - y + 4z = -26$; $\tau = \frac{1}{3}$;

$\underline{v} = (-1;\ 3;\ 2);\qquad |\underline{v}| = \sqrt{14};\qquad \underline{a} = (2;\ 0;\ 2);$

$|\underline{a}| = 2\sqrt{2};\qquad \underline{a} = \dfrac{2}{\sqrt{14}}\,\underline{t} + \dfrac{18}{\sqrt{42}}\,\underline{n}.$

21. $\underline{t} = \dfrac{1}{\sqrt{11}}(3;\ 1;\ 1);\qquad \underline{n} = \dfrac{1}{\sqrt{110}}(3;\ -10;\ 1);$

$\underline{b} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(1;\ 0;\ -3);\qquad \varkappa = \dfrac{2}{11}\sqrt{\dfrac{10}{11}};$

simulósik: $x - 3z = -2;\qquad \tau = 0;$

normálsik: $3x + y + z = -\dfrac{2}{3};$

rektifikáló sík: $3x - 10y + z = -\dfrac{68}{3}$

$\underline{v} = (3;\ 1;\ 1);\qquad |\underline{v}| = \sqrt{11};\qquad \underline{a} = (6;\ 0;\ 2);$

$|\underline{a}| = 2\sqrt{10};\qquad \underline{a} = \dfrac{20}{\sqrt{11}}\,\underline{t} + \dfrac{20}{\sqrt{110}}\,\underline{n}.$

22. $\underline{t} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\underline{i}\ \mathrm{th}\ t_o + \underline{j} + \dfrac{\underline{k}}{\mathrm{ch}\ t_o}\right);$

$\underline{n} = \dfrac{\underline{i}}{\mathrm{ch}\ t_o} - \underline{k}\ \mathrm{th}\ t_o;$

$\underline{b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\underline{i}\ \mathrm{th}\ t_o + \underline{j} - \dfrac{\underline{k}}{\mathrm{ch}\ t_o}\right);$

simulósik: $x\ \mathrm{th}\ t_o - y + \dfrac{z}{\mathrm{ch}\ t_o} = \dfrac{t_o}{\mathrm{ch}\ t_o}$

normálsik: $x\ \mathrm{sh}\ t_o + y\ \mathrm{ch}\ t_o + z = t_o + \mathrm{sh}\ 2t_o;$

rektifikáló sík: $\dfrac{x}{\mathrm{ch}\ t_o} - z\ \mathrm{th}\ t_o = 1 + t_o\,\mathrm{th}\ t_o;$

$$\varkappa = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}^2 t_0}; \qquad \tau = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}^2 t_0};$$

$$\underline{v} = \underline{i}\,\mathrm{sh}\,t_0 + \underline{j}\,\mathrm{ch}\,t_0 + \underline{k}; \qquad |\underline{v}| = \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t_0;$$

$$\underline{a} = \underline{i}\,\mathrm{ch}\,t_0 + \underline{j}\,\mathrm{sh}\,t_0; \qquad |\underline{a}| = \sqrt{\mathrm{ch}\,2\,t_0};$$

$$\underline{a} = 2\underline{t}\,\mathrm{sh}\,t_0 + \underline{n}.$$

23. $$\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t_0}\left\{\underline{i}(\mathrm{sh}\,t_0 \cos t_0 - \mathrm{ch}\,t_0 \sin t_0) + \underline{j}(\mathrm{sh}\,t_0 \sin t_0 + \mathrm{ch}\,t_0 \cos t_0) + \underline{k}\right\};$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t_0}\left\{-\underline{i}(\mathrm{ch}\,t_0 \sin t_0 + \mathrm{sh}\,t_0 \cos t_0) + \underline{j}(\mathrm{ch}\,t_0 \cos t_0 - \mathrm{sh}\,t_0 \sin t_0) - \underline{k}\right\};$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,t_0}(-\underline{i}\cos t_0 - \underline{j}\sin t_0 + \underline{k}\,\mathrm{sh}\,t_0);$$

simulósík: $x \cos t_0 + y \sin t_0 - z\,\mathrm{sh}\,t_0 = a(\mathrm{ch}\,t_0 - t_0);$

normálsík: $x(\mathrm{sh}\,t_0 \cos t_0 - \mathrm{ch}\,t_0 \sin t_0) + y(\mathrm{sh}\,t_0 \sin t_0 + \mathrm{ch}\,t_0 \cos t_0) + z = a(\mathrm{sh}\,t_0\,\mathrm{ch}\,t_0 + t_0);$

rektifikáló sík: $x(\mathrm{ch}\,t_0 \sin t_0 + \mathrm{sh}\,t_0 \cos t_0) - y(\mathrm{ch}\,t_0 \cos t_0 - \mathrm{sh}\,t_0 \sin t_0) + z = -a(\mathrm{ch}\,t_0\,\mathrm{sh}\,t_0 + t_0);$

$$\varkappa = \frac{\operatorname{th} t_0}{\sqrt{2}\, a \operatorname{ch} t_0}; \qquad \tau = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 t_0};$$

$$\underline{v} = a\left\{\underline{i}(\operatorname{sh} t_0 \cos t_0 - \operatorname{ch} t_0 \sin t_0) + \right.$$

$$\left. + \underline{j}(\operatorname{sh} t_0 \sin t_0 + \operatorname{ch} t_0 \cos t_0) + \underline{k}\right\};$$

$$|\underline{v}| = a\sqrt{2} \operatorname{ch} t_0;$$

$$\underline{a} = 2a \operatorname{sh} t_0(-\underline{i} \sin t_0 + \underline{j} \cos t_0); \quad |\underline{a}| = 2a \operatorname{sh} t_0;$$

$$\underline{a} = \sqrt{2}\, a \operatorname{sh}^2 t_0(\underline{t} + \underline{n}).$$

24. $$\underline{t} = \frac{\left(e^{t_0};\ -e^{t_0};\ \sqrt{2}\right)}{e^{t_0} + e^{-t_0}}; \qquad \underline{n} = \frac{\left(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ -e^{t_0} + e^{-t_0}\right)}{e^{t_0} + e^{-t_0}};$$

$$\underline{b} = \frac{\left(-e^{-t_0};\ e^{t_0};\ \sqrt{2}\right)}{e^{t_0} + e^{-t_0}};$$

simulósik: $e^{-t_0}x - e^{t_0}y - \sqrt{2}z = -2t_0;$

normálsík: $e^{t_0}x - e^{-t_0}y + \sqrt{2}z = e^{2t_0} - e^{-2t_0} + 2t_0;$

rektifikáló sík: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + (-e^{t_0} + e^{-t_0})z =$

$$= \sqrt{2}\left\{e^{t_0}(1 - t_0) + e^{-t_0}(1 + t_0)\right\};$$

A görbületet és a torziót a Frenet-formulák segítségével számíthatjuk. A torziónál vigyázzunk a negatív előjelre.

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2}}{\left(e^{t_o} + e^{-t_o}\right)^2}; \qquad \tau = -\frac{\sqrt{2}}{\left(e^{t_o} + e^{-t_o}\right)^2};$$

$$\underline{v} = \left(e^{t_o}; \ -e^{-t_o}; \ \sqrt{2}\right); \quad |\underline{v}| = e^{t_o} + e^{-t_o}$$

$$\underline{a} = \left(e^{t_o}; \ e^{-t_o}; \ 0\right); \quad |\underline{a}| = \sqrt{e^{2t_o} + e^{-2t_o}};$$

$$\underline{a} = \left(e^{t_o} - e^{-t_o}\right)\underline{t} + \sqrt{2}\underline{n}.$$

25. Tekintsük paraméternek x-et, és y-t és z-t az x paraméter függvényének: $y = y(x)$; $z = z(x)$.

Az implicit függvények deriválási szabálya szerint:

$$\begin{aligned} 1 + 3y' + 4z' &= 0 \\ 2x + 2yy' + 2zz' &= 0 \ /:2 \end{aligned} \qquad (x)$$

A számolásnál természetesen $x' = 1$. y és z értékeit behelyettesítve a

$$3y' + 4z' = -1$$

$$4y' + 2z' = -6$$

egyenletrendszert kell megoldani. Ebből

$$y' = -\frac{11}{5}; \qquad z' = \frac{7}{5}.$$

Tehát

$$\dot{\underline{r}} = \left(1; \ -\frac{11}{5}; \ \frac{7}{5}\right).$$

Hasonlóan számítjuk $\ddot{\underline{r}}$-t is a (x) egyenletből, figyelembe véve, hogy $x'' = 0$:

$$3y'' + 4z'' = 0$$

$$1 + y'^2 + yy'' + z'^2 + zz'' = 0.$$

Az ismert értékeket beírva:

$$3y'' + 4z'' = 0$$

$$4y'' + 2z'' = -1 - \frac{121}{25} - \frac{49}{25} = -\frac{39}{5}.$$

Így

$$y'' = -\frac{78}{25}; \qquad z'' = \frac{117}{50},$$

és

$$\ddot{\underline{r}} = \left(0; \ -\frac{78}{25}; \ \frac{117}{50}\right) = \frac{39}{50} (0; \ -4; \ 3).$$

$\dddot{\underline{r}}$ meghatározása ugyanígy történik, ezt jelen példában azonban feleslegés kiszámítani. U.i. $\dddot{\underline{r}}$ értéke csak a torzió kiszámításánál szükséges, itt azonban síkgörbéről lévén szó ($x + 3y + 4z = 26$ síkot jelent), a torzió 0.

$$\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{195}} (5; \ -11; \ 7).$$

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \frac{39}{250} (-5; \ -15; \ -20) = -\frac{39}{50} (1; \ 3; \ 4).$$

$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|} = -\frac{1}{\sqrt{26}} (1; \ 3; \ 4);$$

$$\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t} = -\frac{1}{\sqrt{30}} (5; \ 1; \ -2).$$

Simulósík: $x - 6 + 3(y - 4) + 4(z - 2) = 0$

vagyis

$$x + 3y + 4z = 26.$$

A példából is látható, hogy a síkgörbe simulósíkjában fekszik.

Normálsík: $5x - 11y + 7z = 0$.

Rektifikáló sík: $5x + y - 2z = 30$.

A görbület:

$$\varkappa = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3} = \frac{39\sqrt{26} \cdot 5^3}{50 \cdot \sqrt{195^3}} = \frac{1}{\sqrt{30}},$$

ugyanis

$195 = 15 \cdot 13$.

A görbület elemi uton is számítható, ha észrevesszük, hogy a szóban forgó görbe kör: gömb és sík metszésvonala. A sík távolsága az origótól, a gömb középpontjától, $\sqrt{26}$ és a kör sugara Pythagoras tételével számolva $\sqrt{30}$. Ennek reciproka a görbület.

26. Ezt a feladatot – először – az előző példa megoldásától eltérő módon tárgyaljuk. Ez visszavezethető u. i. paraméteres alakra. Válasszuk paraméternek az x-et, legyen $x = t$. Ekkor

$$4t^2 - 3yz + 6y = 0$$

$$3t^2 + tz - 6z = 0$$

A második egyenletből z-t, majd az elsőből y-t fejezzük ki:

$$z = \frac{3t^2}{6 - t}$$

$$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{6t^2 - t^3}{3t^2 + 2t - 12}.$$

Ezzel megvan a paraméteres előállítás és a megoldás a 16. példa menetével egyezik:

$$\dot{x} = 1.$$

Az elemi müveleteket elvégezve:

$$\dot{y} = \frac{4}{3} \frac{-3t^4 - 4t^3 + 48t^2 - 144t}{(3t^2 + 2t - 12)^2}$$

$$\dot{z} = \frac{36t - 3t^2}{(6 - t)^2}$$

A további deriváltak - szintén a szükséges elemi müveletek elvégzése után:

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = \frac{32}{3} \frac{-19t^3 + 180t^2 - 108t + 216}{(3t^2 + 2t - 12)^3}$$

$$\ddot{z} = \frac{216}{(6 - t)^3}$$

$$\dddot{x} = 0$$

$$\dddot{y} = \frac{32}{3} \left(\frac{(-57t^2 + 360\,t - 108)(3t^2 + 2t - 12)}{(3t^2 + 2t - 12)^4} - \frac{3(6t + 2)(-19t^3 + 180t^2 - 108t + 216)}{(3t^2 + 2t - 12)^4} \right)$$

$$\dddot{z} = \frac{648}{(6-t)^4}$$

Látható, hogy a deriváltak kiszámitása meglehetősen munkaigényes. Mivel x a paraméter és az előirt pontban x = 0, azért a deriváltak értékei a t = 0 paraméterértéknél számitandók:

$$\dot{\underline{r}} = (1;\ 0;\ 0);$$

$$\ddot{\underline{r}} = (0;\ -\frac{4}{3}\ ;\ 1);$$

$$\dddot{\underline{r}} = (0;\ 0;\ \frac{1}{2}).$$

Számitsuk ki a deriváltak értékeit az origóban az előző feladatban alkalmazott eljárással.

$$\left.\begin{array}{l} 4x^2 - 3yz + 6y = 0 \\ 3x^2 + xz - 6z = 0 \end{array}\right\} \quad P(0;\ 0;\ 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 8x - 3y'z - 3yz' + 6y' = 0 \\ 6x + z + xz' - 6z' = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y' = 0;\ z' = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} 8 - 3y''z - 6y'z' - 3yz'' + 6y'' = 0 \\ 6 + 2z' + xz'' - 6z'' = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y'' = -\frac{4}{3};\ z'' = 1;$$

$$\left.\begin{array}{l} -3y'''z - 9y''z' - 9y'z'' - 3yz''' + 6y''' = 0 \\ 3z'' + xz''' - 6z''' = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y''' = 0;\ z''' = \frac{1}{2}.$$

A további számolás már ugyanugy folytatható, mint az előző feladatoknál.

$\underline{t} = (1;\ 0;\ 0);$ $\qquad \underline{n} = -\frac{1}{5}\ (0;\ 4;\ -3);$

$\underline{b} = -\frac{1}{5}\ (0;\ 3;\ 4);$

simulósik : $3y + 4z = 0;$

normálsik: $x = 0;$

rektifikáló sik: $4y - 3z = 0;$

$\varkappa = \frac{5}{3};$ $\qquad \tau = -\frac{6}{25}.$

27. Megoldhatjuk mindkét módon. Implicit függvényként deriválva – akárcsak az előző példánál – a számolás sokkal egyszerűbb.
Számolás nélkül felirhatjuk a simulósik egyenletét:

$$x + y + z = 0$$

és megadhatjuk a torziót: $\tau = 0.$

$\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;\ -1;\ 0);$ $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1;\ 1;\ -2);$

$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;\ 1;\ 1);$

normálsik: $x - y = 0;$

rektifikáló sik: $x - y - 2z = -2;$

$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{6}}.$

28. $\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;\ 1;\ 0);$ $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1;\ -1;\ -2);$

$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1;\ 1;\ -1);$

simulósik: $x - y + z = 1;$

normálsik: $x + y = 2;$

rektifikáló sik: $x - y - 2z = -2;$

$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{6}};$ $\tau = 1.$

30. A simulósik és a z tengely által bezár szög

$$\arccos \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

31. $3x + 2y + 3z + 16 = 0.$

a) megoldás

Egy $\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(z)\underline{k}$ görbe sikgörbe, ha létezik olyan

$ax + by + cz = d$ sikegyenlet, ahol

$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ és amelyet a görbe minden pontja kielégit.

Feladatunkban

$$ax + by + cz = a(t^2 - 2t) + b(3t - 5) + c(-t^2 - 2) =$$
$$= (a - c)t^2 + (3b - 2a)t - 5b - 2c.$$

Ez a kifejezés csak akkor lehet minden $\underline{t}$-re állandó értékü, ha a paramétert tartalmazó tagok kiesnek, azaz, ha

$$a - c = 0.$$

és

$$3b - 2a = 0.$$

Ez teljesül, ha $a = c \neq 0$ és $b = \frac{2a}{3}$.

Tehát a görbe valóban sikgörbe. A sik egyenletének felirásához legyen pl. $a = c = 3$, akkor $b = 2$ és $d = -5 - 2c = -16$.

A keresett sik egyenlete tehát

$$3x + 2y + 3z + 16 = 0.$$

Megjegyzés: $a = c = 0$-ból $b = 0$ adódna, s igy fenti feltevésünkkel ellentmondásba kerülünk: nincs sik-egyenletünk.

b) megoldás

Ha egy görbe sikgörbe, simulósikja állandó. Ezért elegendő a simulósik normálisának (binormális irányu vektornak) az előállitása.

Feladatunkban:

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2t - 2 & 3 & -2t \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6\underline{i} - (-4t + 4 + 4t)\,\underline{j} - 6\underline{k}.$$

A simulósik normálisának iránya tehát a $3\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$ (állandó) irányu vektor.

A sik normálisának, s egy pontjának ismeretében a szóban forgó sik egyenlete felirható.

c) <u>megoldás</u>

Síkgörbe torziója $\tau \equiv 0$.

Azt kell tehát belátni, hogy $\dot{\underline{r}}\ \ddot{\underline{r}}\ \dddot{\underline{r}}$ vegyesszorzat $\equiv 0$. Ez biztosan bekövetkezik, ha – mint jelen feladatunkban is – $\dddot{\underline{r}} \equiv 0$.

34. Az érintő vektor:

$$\dot{\underline{r}}(t) = 2\underline{i} + 6t\underline{j} + 9t^2\underline{k}.$$

A keresett irány:

$$\underline{v} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k},$$

ahol a, b és c egyenlőre ismeretlenek.

$\dot{\underline{r}}(t)$ és $\underline{v}$ vektorok által bezárt szög legyen γ, tehát

$$\cos\gamma = \frac{2a + 6tb + 9t^2c}{\sqrt{4 + 36t^2 + 81t^4} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

A feltétel szerint $\cos\gamma$ állandó. Jelöljük a

$$\cos\gamma \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

állandót q-val. Ekkor $\cos\gamma$ kifejezéséből átrendezéssel

$$q(2 + 9t^2) = 2a + 6tb + 9t^2c.$$

Ez az egyenlőség csak

$$a = q; \quad b = 0 \quad \text{és } c = q$$

esetén állhat fenn. Vagyis

$$\underline{v} = q(\underline{i} + \underline{k})$$

tehát a keresett irány $\underline{i} + \underline{k}$ vektor iránya és a szög

$$\cos\gamma = \frac{2 + 9t^2}{(2 + 9t^2)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \gamma = 45^\circ.$$

35. Legelőször ki kell számítani az ívhosszat $t = 0$ paramétertől kezdve.

$$\dot{\underline{r}}(t) = -\underline{i}\, a \sin t + \underline{j}\, a \cos t + \underline{k}\, b;$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = t \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ebből

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

és a hengeres csavarvonal egyenlete az ívhossz függvényeként:

$$\underline{r}(s) = \underline{i}\, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \underline{j}\, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \underline{k}\, \frac{b\, s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ennek s szerinti deriváltja a $\underline{t}(s)$ érintő egységvektor:

$$\frac{d\underline{r}}{ds} = \underline{t}(s) = -\underline{i}\, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} +$$

$$+ \underline{j}\, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \underline{k}\, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Most már felírhatjuk az evolvens

$$\underline{p}(s) = \underline{r}(s) - s\underline{t}(s)$$

egyenletét:

$$\underline{p}(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a\, s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \underline{i} +$$

$$+ \left(a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{a s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \underline{j}.$$