



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:  
Monostory Iván

**MATEMATIKA PÉLDATÁR**  
**VI. kötet**  
**DIFFERENCIÁLGEOMETRIA ÉS**  
**VEKTORANALÍZIS**

Összeállította:  
Szeredai Erik



**Műegyetemi Kiadó, 2005.**

(Tizedik utánnymás)

egyetemi jegyzet  
oktatási célra

Azonosító: **040810**

**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Természettudományi Karának**  
megrendelése alapján kiadja a  
**Műegyetemi Kiadó**

**[www.kiado.bme.hu](http://www.kiado.bme.hu)**

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 8,4 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

**Műegyetemi Nyomda**

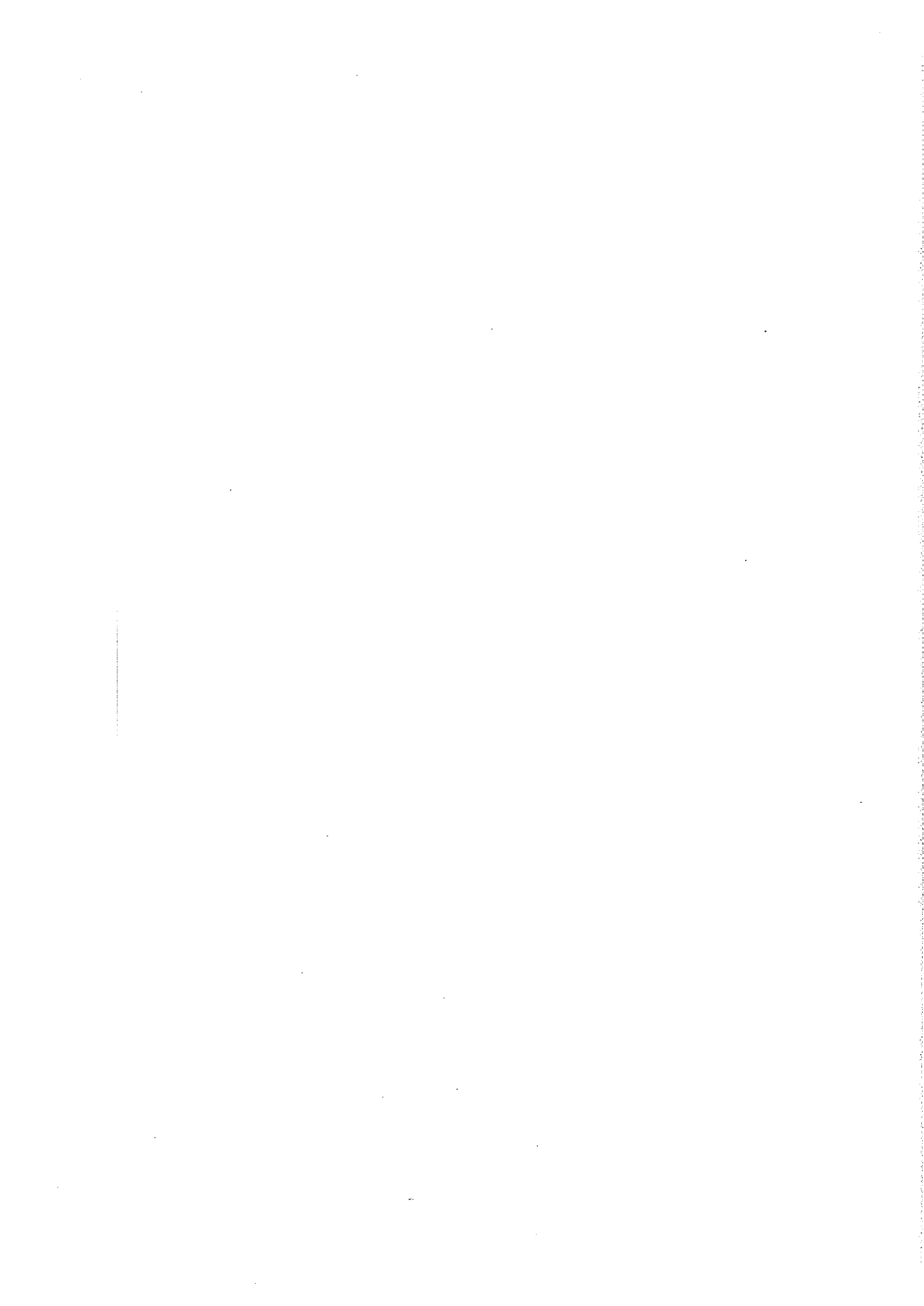
Munkaszám: 050/05

A feladatok jelentős részének sorszáma előtt csillag jelzés található. Ezzel hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a kötet második felében található megoldások között ezeknek a feladatoknak nem csupán a végeredményét közöljük, hanem a megoldás menetéhez utmutatást is adunk.



A bekeretezett sorszámú feladatok megoldását részleteiben is kidolgoztuk, egyes esetekben több megoldást is közlünk.

A szerkesztő



# Differenciálgeometria

## 1. Térgörbék

1. Egy  $z$  tengellyel párhuzamos, tőle a távolságban a  $z$  tengely körül állandó  $\omega$  szögsebességgel forgó egyenesen állandó  $b$  sebességgel mozog egy pont.  $t = 0$  időpillanatban a mozgó pont koordinátái  $(a; 0; 0)$ . Írjuk fel a pont mozgásának egyenletét, ha  $b$  sebesség felfelé van irányítva.

\*2. Írjuk fel a térbeli pontmozgás egyenletét, ha

a)  $t = 0$  időpillanatban a pont az origóban van;

b) egy egyenesen mozog egyenletesen  $c$  sebességgel, az egyenes  $t = 0$  időpillanatban az  $x$  tengellyel esik egybe;

c) az egyenes a  $z$  tengely körül  $\omega$  egyenletes szögsebességgel forog; és végül

d) az egyenes függőleges irányban felfelé  $b$  egyenletes sebességgel emelkedik.

Igazoljuk, hogy a pontmozgás kupfelületen történik!

\*3. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{x}(t) = \underline{l}R \cos^2 t + \underline{j}R \sin t \cos t + \underline{k}R \sin t$$

görbe rajta fekszik az

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

gömbön és az

$$x^2 + y^2 - Rx = 0$$

hengeren (Viviani-féle görbe).

4. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{x}(t) = \underline{l} e^{\alpha t} \cos \beta t + \underline{j} e^{\alpha t} \sin \beta t + \underline{k} \gamma e^{\alpha t}$$

térgörbe rajta van a

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

kupfelületen (kúpos csavarvonal).

5. Melyek az

$$\underline{r}(t) = \frac{1}{4} t^4 \underline{i} + \frac{1}{3} t^3 \underline{j} + \frac{1}{2} t^2 \underline{k}$$

térgörbe azon érintői, melyek párhuzamosak az

$$x + 3y + 2z = 36$$

síkkal? (Felírandók az érintő egyenesek egyenletei.)

6. Igazoljuk, hogy az egyenes körhengerre írt csavarvonal a henger alkotót állandó szög alatt metszi.

7. Keresők az

$$\underline{r}(t) = (-t \cos t + \sin t) \underline{i} + (t \sin t + \cos t) \underline{j} + (t + 1) \underline{k}$$

térgörbének azon pontjait, melyekben az érintő párhuzamos az  $(y, z)$  ill.  $(x, z)$  koordinátságokkal.

8-15. Számítsuk ki az alábbi térgörbék ívhosszát a megadott határok között:

$$8. \underline{r}(t) = \underline{i} \sqrt{t} \cos t + \underline{j} \sqrt{t} \sin t + \underline{k} t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$9. \underline{r}(t) = \underline{i} \cos t \cos \left\{ a \ln \operatorname{tg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\} +$$

$$+ \underline{j} \cos t \sin \left\{ a \ln \operatorname{tg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\} + \underline{k} \sin t;$$

$$(a > 0 \text{ adott állandó}); \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$10. \underline{r}(t) = t \cos(3 \ln t) \underline{i} + t \sin(3 \ln t) \underline{j} + 2t \underline{k}; \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$11. \underline{r}(t) = \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t} \underline{i} + \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} \underline{j} + (t - \operatorname{th} t) \underline{k}; \quad 0 \leq t \leq 10;$$

$$12. \underline{r}(t) = (t - \sin t) \underline{i} + (1 - \cos t) \underline{j} + 4 \sin \frac{t}{2} \underline{k}; \quad 0 \leq t \leq 10;$$

$$13. \underline{r}(t) = \underline{i} e^{\alpha t} \cos \beta t + \underline{j} e^{\alpha t} \sin \beta t + \underline{k} \gamma e^{\alpha t}.$$

a kup csúcspontjától a  $t_0$  paraméterű pontig;

$$14. \underline{r}(t) = at \underline{i} + \sqrt{3ab} t^2 \underline{j} + 2bt^3 \underline{k}; \quad 0 \leq t \leq 1;$$

(a és b pozitív állandók);

$$15. x^2 = 3y, \quad 2xy = 9z; \quad 0 \leq x \leq 2.$$

16-24. Határozzuk meg az alábbi térgörbék (ill. térbeli pontmozgások) kísérő triéderének három egységvektorát, három síkjának egyenletét, görbületét, torzióját, sebességét, gyorsulását, a gyorsulás érintő és normális irányu komponenseit az adott  $t_0$  paraméterű pontban.

$$16. \underline{r}(t) = (3t^2 - 2t) \underline{i} + t^3 \underline{j} + (1 - t) \underline{k}; \quad t_0 = 2;$$

$$17. \underline{r}(t) = (t^2 - 1) \underline{i} + (t + 2) \underline{j} + (t^3 - t) \underline{k}; \quad t_0 = 1;$$

$$18. \underline{r}(t) = 4 \cos t \underline{i} + 2 \sin t \underline{j} + 2t \underline{k}; \quad t_0 = \frac{\pi}{3};$$

$$19. \underline{r}(t) = 3t^2 \underline{i} + (2t + 3) \underline{j} + 3t^3 \underline{k}; \quad t_0 = -1;$$

$$20. \underline{r}(t) = (t^3 - 2t^2) \underline{i} + (3t + 2) \underline{j} + (t^2 - 5) \underline{k}; \quad t_0 = 1;$$

$$21. \underline{r}(t) = (t^3 - 2) \underline{i} + (t + 1) \underline{j} + \frac{t^3}{3} \underline{k}; \quad t_0 = 1.$$

$$22. \underline{r}(t) = \underline{i} \operatorname{ch} t + \underline{j} \operatorname{sh} t + \underline{k} t; \quad t = t_0$$

$$23. \underline{r}(t) = \underline{i} a \operatorname{ch} t \cos t + \underline{j} a \operatorname{ch} t \sin t + \underline{k} a t \quad t = t_0$$

(a adott állandó);

$$24. \underline{r}(t) = e^t \underline{i} + e^{-t} \underline{j} + \sqrt{2} t \underline{k}; \quad t = t_0$$

25-28. A következő feladatokban a térgörbe két felület metszésvonalaként van megadva. Ilyen esetekben a görbének csak geometriai jellemzőit számíthatjuk, u.i. pontmozgásról nem beszélhetünk, mert csak a mozgás pályája ismeretes, a befutási törvényszerűség ("menetrend") nincs megadva. Az alábbi görbéknél határozzuk meg tehát a kísérő triéder három élvektorát, három síkját, a görbületet és torziót az adott pontban.

25.  $x + 3y + 4z = 26; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 56; \quad P(6; 4; 2);$

26.  $4x^2 - 3yz + 6y = 0; \quad 3x^2 + xz - 6z = 0; \quad P(0; 0; 0);$

\*27.  $xy - z^2 = 0; \quad x + y + z - 3 = 0; \quad P(1; 1; 1);$

28.  $x^2 - y^2 + z^2 = 1; \quad y^2 - 2x + z = 0; \quad P(1; 1; 1).$

29. Igazoljuk, hogy az

$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t + \underline{j} a \sin t + \underline{k} a \cos \alpha \sin t$  (a és  $\alpha$  adott állandók) térgörbe normál síkjai áthaladnak az

$$x = 0; \quad y \operatorname{tg} \alpha + z = 0$$

egyenesen.

30. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} e^t \cos t + \underline{j} e^t \sin t + \underline{k} e^t$$

kúpos csavarvonal simulósíkja a kúp tengelyével (x tengely) állandó szöget zár be.

31. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = (t^2 - 2t) \underline{i} + (3t - 5) \underline{j} - (t^2 + 2) \underline{k}$$

síkgörbe, és írjuk fel a görbe síkjának egyenletét.

32. Igazoljuk, hogy tetrazóleges állandó a, b és c vektorok esetén az

$$\underline{r}(t) = \underline{a} t^2 + \underline{b} t + \underline{c}$$

síkgörbe.



33. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}(t - \sin t) + \underline{j}(1 - \cos t) + \underline{k} 4 \sin \frac{t}{2}$$

egyenlettel adott térbeli pontmozgás sebessége és gyorsulása mindenütt merőleges egymásra.

34. Határozzuk meg azt az állandó irányt, amellyel az

$$\underline{r}(t) = 2t\underline{i} + 3t^2\underline{j} + 3t^3\underline{k}$$

térgörbe érintőli állandó szöget zárnak be. Mekkora ez a szög?

35-37. Írjuk fel az alábbi térgörbék evolvensének egyenletét. Az ívhosszat az adott  $t_0$  paraméterű ponttól számítsuk.

35.  $\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos t + \underline{j} a \sin t + \underline{k} b t$ ; (a és b adott állandók); hengeres csavarvonal;  $t_0 = 0$ ;

36.  $\underline{r}(t) = \underline{i} e^t \cos t + \underline{j} e^t \sin t + \underline{k} a e^t$ ; (a adott állandó); kúpos csavarvonal;  $t_0 = -\infty$ ;

37.  $\underline{r}(t) = \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t} \underline{i} + \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} \underline{j} + (t - \operatorname{th} t) \underline{k}$ ;  $t_0 = 0$ .

38-40. Meghatározandó az alábbi térgörbék görbületi középpontjainak mértani helye:

38.  $\underline{r}(t) = \underline{i} \operatorname{ch} t + \underline{j} \operatorname{sh} t + \underline{k} t$ ;

39. hengeres csavarvonal; (egyenlete: 35. pl.)

40.  $\underline{r}(t) = e^t \underline{i} + e^{-t} \underline{j} + \sqrt{2} t \underline{k}$ .

41. Milyen síkgörbét alkotnak az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} e^t \sin t + \underline{j} e^t + \underline{k} e^t \cos t$$

térgörbe érintőinek az (x, z) síkkal való dőféspontjai?

42. Milyen síkgörbét alkotnak az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos^2 t + \underline{j} a \cos t \sin t + \underline{k} a \sin t$$

(a adott állandó) Viviani-görbe érintőinek az  $(x, y)$  síkkal való  
dőféspontjai?

43. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \frac{t^3}{3} \underline{i} + \frac{t^2}{2} \underline{j} + t \underline{k}$$

térgörbe binormális egyenesének és az  $(x, z)$  sík közös pontjai-  
nak mértani helyét.

44-46. Határozzuk meg az alábbi térgörbék görbületi körének egyenletét,  
az adott  $t_0$  paraméterű pontban.

44.  $\underline{r}(t) = (t^2 - 1) \underline{i} + (t^3 - 2) \underline{j} + (t + 3) \underline{k}; \quad t_0 = 0;$

\*45.  $\underline{r}(t) = \underline{i} \cos t + \underline{j} \sin t + \underline{k} t; \quad t_0 = \frac{\pi}{2};$

46.  $\underline{r}(t) = \underline{i} \cos t + \underline{j} \sin t + \underline{k} e^t; \quad t_0 = 0.$

47. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = 3 \cos t \underline{i} + 6 \underline{j} + 3 \sin t \underline{k}$$

körnek az

$$x = y = z$$

egyenestől való távolságát. (Távolságon a két egymáshoz legkö-  
zelebb levő pont távolságát értjük.)

48. Milyen távol van az

$$\underline{r}(t) = 2t \underline{i} + 3t^2 \underline{j} + 3t^3 \underline{k}$$

térgörbe az

$$x + y + 1 = 0 \text{ síktól?}$$

## 2. Felületek

49-52. Irjuk fel az alábbi három ponton átmenő sík (egy) kétváltozós vektor-skalár függvényvel adott egyenletét. Irjuk át a kapott eredményt

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

alakba.

49.  $P_1(2; 3; 5); \quad P_2(4; 5; -6); \quad P_3(1; 3; 2).$

50.  $P_1(2; 1; 9); \quad P_2(1; 5; 10); \quad P_3(0; 4; 0).$

51.  $P_1(-1; 4; 0); \quad P_2(0; 3; -2); \quad P_3(-1; 0; 1).$

52.  $P_1(0; 0; 3); \quad P_2(0; -1; 0); \quad P_3(2; 0; 0).$

53. Az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos^2 t + \underline{j} a \cos t \sin t + \underline{k} a \sin t$$

( $a > 0$  konstans) Viviani-görbe minden pontján át párhuzamost húzunk az

$$x = y = z$$

egyenessel. Irjuk fel az így keletkező hengerfelület egyenletét.

54-60. Irjuk fel a hengerfelület vektoregyenletét, ha adott a vezérvonala és alkotójának iránya:

54. Vezérvonal:  $x^2 - y^2 = 1; z = 0$ ; alkotó  $z$  tengely irányu;

55. Vezérvonal:  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}}$ ;  $z = 0$ ;  $\underline{a} = (3; -2; 5)$ ;

56. Vezérvonal: az  $(x, y)$  síkban fekvő, polárkoordinátákkal adott  $r = a\varphi$  ( $a > 0$  állandó) spirális;  $\underline{a} = (0; 2; 3)$ ,

57. Vezérvonal:  $(y, z)$  síkban fekvő  $9y^2 + 4z^2 = 36$  ellipszis; alkotó  $x$  tengely irányu;
58. Vezérvonal:  $(x, z)$  síkban fekvő  $x^2 - 9z^2 = 9$  hiperbola; alkotó  $y$  tengely irányu;
59. Vezérvonal:  $\underline{r}(t) = \underline{i} 4 \operatorname{ch}^3 t + \underline{j} 3 \operatorname{sh}^3 t$ ;  
 $\underline{a} = (2; 3; -6)$ ;
60. Vezérvonal:  $\underline{r}(t) = (\operatorname{ch} t + t \operatorname{sh} t) \underline{i} + (\operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} t) \underline{k}$ ;  
 $\underline{a} = (1; 5; -1)$ .
- 61-67. Írjuk fel a kupfelület vektoregyenletét, ha adott a vezérvonala és csúcspontja:

**61.** Vezérvonal a Viviani görbe:

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos^2 t + \underline{j} a \cos t \sin t + \underline{k} a \sin t$$

( $a > 0$  állandó); csúcspont az origó;

**62.** Vezérvonal:  $y^2 = 4x$ ;  $z = 0$  parabola; csúcspont  $P(2; 1; 3)$ ;

63. Vezérvonal:  $z = x^2$ ;  $y = -1$  parabola; csúcspont  $P(2; 3; -4)$ ;

64. Vezérvonal: az  $(x, y)$  síkban fekvő  $y^2 - x^2 = 1$  hiperbola; csúcspont a  $z$  tengely  $(0; 0; 5)$  pontja;

65. Vezérvonal:  $(x, y)$  síkbeli  $y = x^4$  görbe, csúcspont:  $(0; 3; 7)$ ;

66. Vezérvonal:

$$\underline{r}(t) = 2(\sin t - t \cos t) \underline{i} + 2(\cos t + t \sin t) \underline{k}$$

csúcspont:  $(0; -8; 0)$ ;

67. Vezérvonal:

$$\underline{r}(t) = \frac{3t}{1+t^3} \underline{j} + \frac{3t^2}{1+t} \underline{k}; \quad \text{csúcspont: } (5; -1; -1).$$

68-70. Írjuk fel az alábbi térgörbék érintőegyenesei által alkotott felület egyenletét:

68.  $\underline{r}(t) = 3 \cos t \underline{i} + 2 \sin t \underline{j} + t \underline{k}$ ;

69.  $\underline{r}(t) = 4 \underline{i} \cos^2 t + 2 \underline{j} \sin 2t + 4 \underline{k} \sin t$ ;

70.  $\underline{r}(t) = \underline{i} e^t \cos t + \underline{j} e^t \sin t + \underline{k} e^t$ .

71-76. Írjuk fel a forgásfelület egyenletét, ha adott a megforgatott vonal egyenlete és a forgástengely: (V. ö.: Példatár, V. kötet 2. pont)

71.  $(y, z)$  síkbeli  $2y - 3z = 7$  egyenes;  $y$  tengely körül;

\*72.  $(x, z)$  síkbeli  $(x - a)^2 + z^2 = b^2$  ( $a > b > 0$  állandók) kör;  $z$  tengely körül;

73.  $(y, z)$  síkbeli  $z = y^2 + 5$  parabola;  $y$  tengely körül;

74.  $(y, z)$  síkbeli  $z = y^2 + 1$  parabola;  $z$  tengely körül;

75.  $\underline{r} = (2 \cos t - \cos 2t) \underline{i} + (2 \sin t - \sin 2t) \underline{j}$ ;  
 $x$  tengely körül;

\*76.  $x - 1 = y = z$  egyenes;  $z$  tengely körül.

77-88. Írjuk fel az alábbi vektoregyenlettel adott felületek egyenletét (explicit vagy implicit) skaláralakban  $s$  - ha lehet - állapítsuk meg a felület típusát:

77.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} a \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v + \underline{j} b \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v + \underline{k} c \operatorname{sh} u$   
( $a, b, c$  pozitív adott állandók);

78.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \operatorname{ch} v + \underline{j} u \operatorname{sh} v + \underline{k} \frac{2}{\operatorname{sh} 2v}$ ;

79.  $\underline{r}(u, v) = u \underline{i} + v \underline{j} + u^2 \underline{k}$

80.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} a \cos u \operatorname{ch} v + \underline{j} b \sin u \operatorname{ch} v + \underline{k} c \operatorname{sh} v$   
( $a, b, c$  adott pozitív állandók);

81.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v;$
- \*82.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} \operatorname{ch} u + \underline{j} \operatorname{sh} u + \underline{k} v;$
- \*83.  $\underline{r}(u, v) = (8 \cos^3 u + 3v) \underline{i} + (8 \sin^3 u - 2v) \underline{j} + 5 v \underline{k};$
- \*84.  $\underline{r}(u, v) = 3 \underline{i} \operatorname{ch} u + \underline{j} v + \underline{k} \operatorname{sh} u;$
- \*85.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} v \operatorname{sh} u + \underline{j} v \operatorname{ch} u + 5(1 - v) \underline{k};$
- \*86.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i}(a + b \cos u) \cos v + \underline{j}(a + b \cos u) \sin v + \underline{k} b \sin u;$
- \*87.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k}(u^2 + 1);$
- \*88.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} \sqrt{2u^2 + 2u + 1} \cos v + \underline{j} \sqrt{2u^2 + 2u + 1} \sin v + \underline{k} u.$

89-93. Válasszunk alkalmas paramétereket és írjuk át kétváltozós vektor-skalár függvény alakjába az alábbi kétváltozós függvényeket:

$$[z = f(x, y)]$$

89.  $f(x, y) = h + a \sqrt{x^2 + y^2};$

90.  $f(x, y) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x};$

91.  $f(x, y) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + y}{x - y};$

92.  $f(x, y) = \ln xy;$

93.  $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}.$

94-98. Milyen vonalak az alábbi felületek paramétervonalai:

94.  $\underline{r}(u, v) = \underline{r}_1 + (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)u + (\underline{r}_3 - \underline{r}_1)v$

( $\underline{r}_1$ ,  $\underline{r}_2$  és  $\underline{r}_3$  adott állandó helyvektorok);

95.  $\underline{r}(u, v) = \underline{r}(u) + va;$   $\underline{r}(u)$  adott függvény (tér görbe) és  $\underline{a}$  állandó vektor;

96.  $\underline{r}(u, v) = \underline{c} + v(\underline{r}(u) - \underline{c})$ ;  $\underline{r}(u)$  adott függvény és  $\underline{c}$  állandó vektor;

97.  $\underline{r}(u, v) = \underline{f}(u) \cos v + \underline{f}(u) \sin v + \underline{k} g(u)$ ;  
 $\underline{f}(u)$  és  $g(u)$  adott egyváltozós skalár függvények;

98.  $\underline{r}(u, v) = \underline{r}(u) + v \underline{r}'(u)$ ;  $\underline{r}(u)$  adott függvény;

99. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} f(u)$$

ahol  $f(u)$  adott egyváltozós függvény, felület paramétervonalai egymásra merőlegesek.

**100.** A gömb azon pontjai, melyeken – földrajzi terminológiával élve – a hosszúsági és szélességi szögek megegyeznek, a Viviani-görbét alkotják. Irjuk fel a Viviani-görbe egyenletét.

\*101. Mi annak a felületi görbének az egyenlete, mely a

$$z = \text{Arc tg } \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

felületen fekszik s az  $x = 2y$  paraméterek közti összefüggéssel van adva.

102-107. Határozzuk meg az alábbi felületek érintősíkját az adott paraméterű pontjában:

**102.**  $\underline{r}(u, v) = uv \underline{i} + (u^2 + v) \underline{j} + (u - v^2) \underline{k}$ ;  $u = 1, v = -1$ ;

103.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} \text{Arc tg } u$ ;  $u = 1, v = \frac{\pi}{4}$ ;

104.  $\underline{r}(u, v) = u^4 \underline{i} + 3u v^2 \underline{j} + v^3 \underline{k}$ ;  $u = 2, v = 1$ ;

\*105.  $\underline{r}(u, v) = (u + v) \underline{i} + (u^2 + v^2) \underline{j} + (u^3 + v^3) \underline{k}$ ;  
az érintési pont  $P(2; 2; 2)$ ;

106.  $\underline{r}(u, v) = (\cos u - v \sin u) \underline{i} + (\sin u - v \cos u) \underline{j} + (u + v) \underline{k}$ ;  
 $u = 0, v = 1$ ;

107.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} v;$   
 $u = u_0; \quad v = v_0.$

108. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = (u + v) \underline{i} + (u - v) \underline{j} + u \underline{v} \underline{k}$$

felületnek az

$$x + 2y + 2z = 32$$

síkkal párhuzamos érintősíkját.

109. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(u, v) = (a \cos u - v \sin \frac{u}{2} \cos u) \underline{i} + (a \sin u + v \sin \frac{u}{2} \cos u) \underline{j} +$$

$$+ v \cos \frac{u}{2} \underline{k} \quad (a > 0 \text{ állandó})$$

(Möbius-féle) felület  $P(a, 0, 0)$  pontjában a felületi normálisok ellentétes irányításúak aszerint, hogy a  $P$  az  $u = 0; v = 0$ , vagy az  $u = 2\pi, v = 0$  paraméterértékpároknak felel meg.

110. Számítsuk ki a torusz felszínét.

\*111. Számítsuk ki a Viviani-féle felület nagyságát.

112-124. Számítsuk ki az alábbi felületek felszínét az adott határok között:

112.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} v$  csavarfelület,  
 $0 \leq u \leq 1; \quad 0 \leq v \leq 2\pi;$

113.  $\underline{r}(u, v) = (\cos u - v \sin u) \underline{i} + (\sin u + v \cos u) \underline{j} + (u + v) \underline{k};$   
 $0 \leq u \leq \pi; \quad 0 \leq v \leq 1;$

\*114.  $\underline{r}(u, v) = \underline{i} u \cos v + \underline{j} u \sin v + \underline{k} \frac{hu}{a}$  ( $h$  és  $a > 0$  állandók), integrálási tartomány:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$



$$115. \underline{r}(u, v) = \underline{i}u^2 + \underline{j}2u \cos v + \underline{k}2u \sin v;$$

$$0 \leq u \leq 1; \quad 0 \leq v \leq 2\pi;$$

$$116. \underline{r}(u, v) = \underline{i}4 \operatorname{ch} u \cos v + \underline{j}4u + \underline{k}4 \operatorname{ch} u \sin v;$$

$$0 \leq u \leq 2; \quad 0 \leq v \leq \pi;$$

$$117. \underline{r}(u, v) = \underline{i}v + \underline{j}(u + \ln \sqrt{3 - v^2}) + \underline{k} \operatorname{ch} v;$$

$$0 \leq u \leq 4; \quad 0 \leq v \leq 1;$$

$$118. \underline{r}(u, v) = \underline{i}u + \underline{j}(v + \operatorname{tg} u) + \underline{k} \operatorname{ch} u;$$

$$0 \leq u \leq 1; \quad 2 \leq v \leq 4;$$

$$\boxed{119.} \quad z = \frac{x^2}{2y}; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 1 \leq y \leq 2;$$

$$*120. \quad z = \operatorname{arc} \sin(\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y); \quad 2 \leq y \leq 3; \quad -\frac{1}{\operatorname{sh} y} \leq \operatorname{sh} x \leq \frac{1}{\operatorname{sh} y};$$

$$*121. \quad z = xy; \quad (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0;$$

$$*122. \quad z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0;$$

$$123. \quad z = 1 - (x + y)^2; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad z \geq 0;$$

$$*124. \quad 2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

125-129. Számítsuk ki az alábbi felületek kívánt görbületi adatait:

$$\boxed{125.} \quad \underline{r}(u, v) = \underline{i}u \cos v + \underline{j}u \sin v + \underline{k}c v \quad (c > 0 \text{ állandó});$$

összeg és szorzat görbület, főgörbületek, főirányok;

$$*126. \quad z = \frac{1}{n} \ln \frac{\cos nx}{\cos ny}; \quad \text{összeggörbület};$$

$$127. \quad z = 4x^2 - 2xy - 3y^2 + x + 2y + 5; \quad \text{főgörbületek az}$$

$$x = 1, \quad y = 3 \text{ helyen};$$

128.  $z = \operatorname{ar ch} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ ; szorzatgörbület;

\*129.  $\underline{r}(u, v) = (u^2 + v^2) \underline{i} + 2u v \underline{j} + (u - v) \underline{k}$ ; főirányok, főmetszetek síkjának egyenletei  $u = -1$ ;  $v = -1$  paraméterű pontban.

\*130. Mely pontokban lesz a

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6}$$

hiperbolikus paraboloid összeggörbűlete zérus?

131. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(a + b \cos u) \cos v + \underline{j}(a + b \cos u) \sin v + \underline{k} b \sin u$$

( $a > b > 0$  állandók) toruszfelület elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontjait.

132. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = e^u \underline{i} + e^v \underline{j} + (u - v) \underline{k}$$

felület  $u = 0$ ,  $v = 0$  paraméterű pontjában az

$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = 2$$

feltétellel megadott normálsíkjával  $\varphi = 30^\circ$ -os szöget bezáró ferdemetszet görbületét.

## Vektoranalízis

### 3. Skalár-vektor függvények

133-140. Milyen felületek alkotják az alábbi skalár-vektor függvények szint-felületeit:

$$133. u(\underline{r}) = z - x^2 - y^2;$$

$$134. u(\underline{r}) = x^2 - y - z;$$

$$135. u(\underline{r}) = \underline{r}^2;$$

$$136. u(\underline{r}) = \underline{a} \cdot \underline{r}, \quad (\underline{a} \text{ adott állandó vektor});$$

$$\boxed{137.} \quad u(\underline{r}) = |\underline{a} \times \underline{r}|, \quad (\underline{a} \text{ adott állandó vektor});$$

$$138. u(\underline{r}) = (\underline{r} - \underline{a})^2, \quad (\underline{a} \text{ adott állandó vektor});$$

$$\boxed{139.} \quad u(\underline{r}) = \frac{\underline{e} \cdot \underline{r}}{|\underline{r}|}, \quad (\underline{e} \text{ adott állandó egységvektor});$$

$$140. u(\underline{r}) = \sqrt{\underline{r}^2 - (\underline{e} \cdot \underline{r})^2}, \quad (\underline{e} \text{ adott állandó egységvektor}).$$

141-145. Képezzük az alábbi függvények gradiens-vektorát:

$$141. u(\underline{r}) = c \underline{r}^2, \quad (c \text{ adott állandó});$$

$$142. u(\underline{r}) = \underline{a} \cdot \underline{r}, \quad (\underline{a} \text{ adott állandó vektor});$$

$$143. u(\underline{r}) = |\underline{r}|;$$

$$144. u(\underline{r}) = \frac{1}{|\underline{r}|};$$

$$145. u(\underline{r}) = |\underline{r}|^n, \quad (n > 1 \text{ pozitív egész}).$$

146. Határozzuk meg  $u(\underline{r}) = \ln |\underline{r}|$  gradiensvektorát a  $P_0(2, 3, -1)$  pontban.

147-150. Határozzuk meg az adott skalártér adott pontjában az előirt irányban vett irány szerinti deriváltjának értékét:

$$\boxed{147.} \quad u(\underline{r}) = xy^3 - 2e^x + \sin z; \quad P(0; 2; \pi); \quad \underline{a} = 3\underline{i} - 4\underline{j} + 12\underline{k};$$

$$148. \quad u(\underline{r}) = 2x^2y - xyz; \quad P(1; 1; 2); \quad \underline{a} = \underline{i} + 3\underline{j} - 5\underline{k};$$

$$149. \quad u(\underline{r}) = x^3y^2z; \quad P(1; 2; -3); \quad \underline{a} = -2\underline{i} + 5\underline{j} - 3\underline{k};$$

$$150. \quad u(\underline{r}) = x^2y + 2xz^2; \quad P(3; 1; -3) \quad \underline{a} = 3\underline{i} - 4\underline{j} + \underline{k}.$$

151. Határozzuk meg az  $u(\underline{r}) = |\underline{r}|$  skalár-vektor függvény irány szerinti deriváltját az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \cos t + \underline{j} \sin t + \underline{k} 2t \quad \text{tér görbe} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$$

paraméterű pontjabeli érintővektora irányában.

152. Igazoljuk, hogy

$$\text{grad} \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2 \text{ grad } u_1 - u_1 \text{ grad } u_2}{u_2^2} \quad (u_2 \neq 0).$$

#### 4. Vektor-vektor függvények

$\boxed{153.}$  Határozzuk meg azt a tenzort, mely a tér bármely helyvektorához annak az origón átmenő  $\underline{e}$  (adott egységvektor) irányu egyenesen levő vetületét rendeli hozzá. Mennyi a tenzor matrixának a rangszáma?

\*154. Határozzuk meg az origón átmenő  $\underline{e}$  (adott egységvektor) irányu egyenesre való tükrözés tenzorát.

155. Határozzuk meg azt a tenzort, mely a tér bármely helyvektorához annak az origón átmenő  $\underline{e}$  (adott egységvektor) normális síkon való vetületét rendeli hozzá.

156. Határozzuk meg az origón átmenő  $\underline{e}$  (adott egységvektor) normális síkra való tükrözés tenzorát.

157. Irjuk fel azt a vektor-vektor függvényt, mely a tér tetszőleges pontjához annak az

$$\frac{x-1}{2} - \frac{y-3}{4} = z+1$$

egyenesen való vetületét rendeli hozzá! Tenzor-e az eredményül kapott vektor-vektor függvény?

158. Melyik az a tenzor, mely az  $(1; 1; 1)$  vektor irányában  $\lambda$ -szoros nyújtást végez?

158/a Melyik az a tenzor, mely az  $\underline{e}(e_1; e_2; e_3)$  irányban ( $\underline{e}$  egységvektor)  $\lambda$ -szoros nyújtást végez?

158/b Melyik az a tenzor, amelyik a tér vektorait az  $\frac{x}{3} = y = \frac{z}{2}$  egyenes irányában 14-szeresre nyújtja, majd tükrözi az egyenesre?

158/c Melyik az a tenzor, amelyik a tér vektorait a  $2x - y + 2z = 0$  síkra tükrözi és a tükröképet 9-szeresére nyújtja?

\*159. Melyik az a tenzor, mely az origón átmenő,  $(1; 2; -2)$  irányú tengely körül  $\alpha = 30^\circ$ -os szöggel pozitív irányba elforgatja a tér pontjait.

160-166. Számítsuk ki az alábbi vektor-vektor függvények divergenciáját és rotációját:

160.  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}^2 \underline{r};$

161.  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r} e^{\underline{r}^2};$

162.  $\underline{v}(\underline{r}) = (\underline{a} \times \underline{r}) \times \underline{r}$ , ahol  $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k};$

163.  $\underline{v}(\underline{r}) = (y^2 + z^2) \underline{i} + (z^2 + x^2) \underline{j} + (x^2 + y^2) \underline{k};$

164.  $\underline{v}(\underline{r}) = x^2 y z \underline{i} + x y^2 z \underline{j} + x y z^2 \underline{k};$

165.  $\underline{v}(\underline{r}) = -\frac{x}{x^2 + y^2} \underline{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \underline{j} + \underline{k};$

$$166. \underline{v}(\underline{r}) = e^{xy} \underline{i} + e^{yz} \underline{j} + e^{zx} \underline{k}.$$

167-170. Számítsuk ki az alábbi vektor-vektor függvények divergenciáját és rotációját a megadott pontban:

$$167. \underline{v}(\underline{r}) = 3x \underline{i} + xy \underline{j} + z \underline{k}; \quad P(1; 2; 3);$$

$$168. \underline{v}(\underline{r}) = (x^2 - y^2) \underline{i} + (y^2 - z^2) \underline{j} + (z^2 - x^2) \underline{k}, \quad P(2; 1; 0);$$

$$169. \underline{v}(\underline{r}) = \frac{x}{y} \underline{i} + \frac{y}{z} \underline{j} + xz \underline{k}, \quad P(1; 2; 3);$$

$$170. \underline{v}(\underline{r}) = (x^2 - y^2) \underline{i} + (y^2 - z^2) \underline{j} + (z^2 + x^2) \underline{k}; \quad P(0; 1; 2).$$

171-172. Számítsuk ki az alábbi vektor-vektor függvények deriválttenzorát divergenciáját és rotációját:

$$171. \underline{v}(\underline{r}) = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|};$$

$$172. \underline{v}(\underline{r}) = \text{grad} \ln |\underline{r}|.$$

173-178. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket:

$$173. \text{div grad} |\underline{r}|;$$

$$174. \text{div grad} \frac{1}{|\underline{r}|};$$

$$175. \text{rot grad} |\underline{r}|;$$

$$176. \text{grad div} \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|};$$

$$177. \text{grad div} \underline{r}^2 \cdot \underline{r};$$

$$178. \text{rot rot} (e^{yz} \underline{i} + e^{zx} \underline{j} + e^{xy} \underline{k}).$$

179. Igazoljuk, hogy

$$\text{rot rot} \underline{v} = \text{grad div} \underline{v} - \Delta \underline{v}.$$

180-193. Számítsuk ki az alábbi vonalintegrálokat:

180.  $\underline{v}(\underline{r}) = -y\underline{i} + x\underline{j}$ ; A(1; 0) ponttól B(0; 1) pontig a két pontot összekötő egyenes mentén;

181. mint 180., de az ut a két pontot összekötő egység sugaru körív;

\*182. mint 180., de az ut a két pontot összekötő

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ parabolaív;}$$

\*183.  $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{-y\underline{i} + y\underline{j}}{x^2 + y^2}$ ; az origót egyszer körülvevő zárt görbe men-

tén pozitív irányban;

184.  $\underline{v}(\underline{r}) = xy\underline{i} + y\underline{j}$ ; az  $x = t - \sin t$ ;  $y = 1 - \cos t$  ciklois íve mentén  
 $0 \leq t \leq 2\pi$ ;

185.  $\underline{v}(\underline{r}) = (x + yz)\underline{i} + (x^2 - z^2)\underline{j} + (xy + z)\underline{k}$ ; A(1; 1; 1) ponttól  
 B(0; 3; 5) pontig a két pontot összekötő egyenes mentén;

186. mint 185. az ut azonban a két pont között először az x, majd az y és végül a z tengellyel halad párhuzamosan;

187.  $\underline{v}(\underline{r}) = yz\underline{i} + zx\underline{j} + xy\underline{k}$ ; A(-1; 2; 0) ponttól B(5; 5; 9) pontig a két pontot összekötő egyenes mentén;

\*188. mint 187. az ut azonban a két pont között először az x, majd az y és végül a z tengellyel halad párhuzamosan;

\*189.  $\underline{v}(\underline{r}) = yz\underline{i} + zx\underline{j} + xy\underline{k}$ ;  $\underline{r}(t) = \underline{i} \text{ Arc sin } t + (t^2 + 1)\underline{j} + t^3\underline{k}$ ;  
 $0 \leq t \leq 1$ ;

$$190. \underline{v}(\underline{r}) = 2x\underline{i} - \frac{y}{2}\underline{j} + (x - z)\underline{k};$$

$$\underline{r}(t) = (1 - t)\underline{i} + (t^2 - 1)\underline{j} + t^3\underline{k}; \quad 0 \leq t \leq 2;$$

\*191.  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ ;  $\underline{r}(t) = \underline{i} \cos^2 t + \underline{j} \cos t \sin t + \underline{k} \sin t$

Viviani-görbe;  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ ;

\*192.  $\underline{v}(\underline{r}) = (x^2 + y + z)\underline{i} + (x + y^2 + z)\underline{j} + (x + y + z^2)\underline{k}$ ;  
 $\underline{r}(t) = \underline{i} \operatorname{ch} t + \underline{j} \operatorname{sh} t + 2t \underline{k}$ ;  $0 \leq t \leq 2$ ;

\*193.  $\underline{v}(\underline{r}) = 2xyz \underline{i} + x^2 z \underline{j} + x^2 y \underline{k}$ ; integrációs út a  $z = 3$  síkban fekvő  $x^2 + y^2 = 1$  körnek íve az  $A(1; 0; 3)$  ponttól a  $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 3\right)$  pontig.

\*194. A koordinátarendszer kezdőpontjában elhelyezett  $M$  tömeg a  $P(x, y, z)$  pontban elhelyezett tömegegységre a fizika tanítása szerint

$$\underline{F} = fM \frac{1}{r^2} \left( -\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} \right) = -fM \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

erőt gyakorol, ahol  $f$  a gravitációs állandó. Mekkora az erőtér ellenében végzett munka, ha az egységnyi tömegpont az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \cos t + \underline{j} \sin t + \underline{k}t$$

csavarvonal mentén mozog a  $t = 0$  paraméterű pontból kiindulva a  $t = 4$  paraméterű pontig?

195-198. Potenciáloszkek-e az alábbi vektor-vektor függvények; ha igen, hol; és állapítsuk meg a potenciálfüggvényt:

195.  $\underline{v}(\underline{r}) = (2x - 4xyz)\underline{i} + (3z^3 - 2x^2 z)\underline{j} + (9yz^2 - 2x^2 y)\underline{k}$ ;

196.  $\underline{v}(\underline{r}) = e^{xyz} \left\{ (2x + x^2 yz + y^3 z + yz^3)\underline{i} + (2y + x^3 z + xy^2 z + xz^3)\underline{j} + (2z + x^3 y + xy^3 + xyz^2)\underline{k} \right\}$ ;

197.  $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{1}{1 + (x + yz)^2} (\underline{i} + z\underline{j} + y\underline{k})$ ;

198.  $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{2xy}{4 - z^2} \underline{i} + \frac{x^2}{4 - z^2} \underline{j} + \frac{2x^2 yz}{(4 - z^2)^2} \underline{k}$ .



199. Potenciálos-e a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \frac{-y \underline{i} + x \underline{j}}{x^2 + y^2}$$

vektor-vektor függvény? Ha igen, határozzuk meg a potenciálfüggvényt. Számítsuk ki a vonalintegrált a következő zárt görbe mentén

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \cos t + \underline{j} \sin t + \underline{k} t \text{ csavarvonal } 0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$x = 1, y = 0 \text{ egyenes } z \geq 0 \text{ (irányítás lefelé).}$$

Miért nem zérus a zárt görbére vett vonalintegrál?

200-206. Számítsuk ki az alábbi felületi integrálokat felfelé mutató felületi normális mellett:

200.  $\underline{v}(\underline{r}) = y\underline{i} + z\underline{j} + x\underline{k}$ ; a felület origó középpontú, egységsugarú gömbfelület azon része, melyre

$$y \geq 0; \quad z \geq 0;$$

\*201.  $\underline{v}(\underline{r}) = x\underline{i} + y\underline{j}$ ; a felület origó középpontú, 4 egységsugarú gömbfelület I. térfolyadba eső azon része, melynek vetülete az

$$x^2 + y^2 - 4x = 0 \text{ kör fele;}$$

202.  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ ; a felület

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(a + b \cos u) \cos v + \underline{j}(a + b \cos u) \sin v + \underline{k} b \sin u$$

( $a > b > 0$  állandók) toruszfelület ( $x, y$ ) sík felett levő része;

\*203.  $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{1}{xz} \underline{i} + \frac{1}{yz} \underline{j}$ ; a felület az

$$\underline{r}(u, v) = 5\underline{i} \cos^3 u \cos v + 5\underline{j} \cos^3 u \sin v + 5\underline{k} \sin^3 u$$

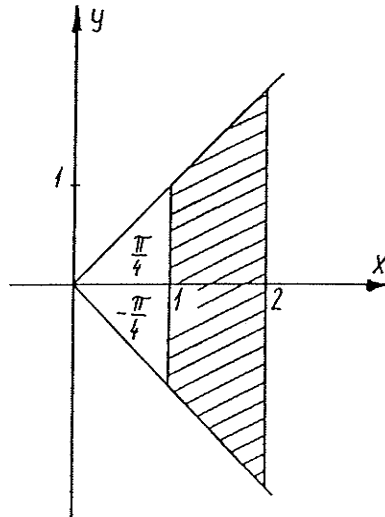
forgási asztrois felület  $z = \frac{5\sqrt{2}}{4}$  sík felett levő része;

204.  $\underline{v}(\underline{r}) = -y\underline{x}\underline{i} + x\underline{y}\underline{j} + z\underline{k}$ ; a felület  $z = x^2 - y^2$  hiperbolikus paraboloid azon darabja, melynek vetülete az ( $x, y$ ) síkon:

$$-2 \leq x \leq 2; \quad -3 \leq y \leq 3;$$

205.  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ ; a felület  $z = x^2 + y^2$  forgási paraboloid  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  henger belsejébe eső része;

206.  $\underline{v}(\underline{r}) = (y+z)\underline{i} + xz\underline{j} + (x^2 + y^2)\underline{k}$ ; a felület  $z = \frac{y}{x}$  felület azon része, melynek  $(x, y)$  síkon való vetülete az 1. ábrán látható.



1. ábra

\*207. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(\underline{r}) = (2x - \sin \sqrt{yz})\underline{i} + (e^{x+z} - y)\underline{j} + \sqrt{x^2 + y^2 + 3x}\underline{k}$$

vektor-vektor függvény felületi integrálját arra a zárt felületre vonatkozólag, mely az  $x^2 + y^2 \leq 1$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $0 \leq z \leq 2$  térrészt határolja befelé mutató normális esetén.

208-212. Szemléltessük az alábbi feladatokon a Gauss-Osztrogradszki tételt úgy, hogy mind a felületi, mind a térfogati integrált kiszámítsuk:

[208]  $\underline{v}(\underline{r}) = y\underline{i} + z\underline{j} + x\underline{k}$ ; a térrész:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  
 $y \geq 0, z \geq 0$ ;

209.  $\underline{v}(\underline{r}) = (-x^2 + y + z)\underline{i} + (x - y^2 + z)\underline{j} + (x + y - z^2)\underline{k}$ ; a térrész;  
 $0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 2$ ;

210.  $\underline{v}(\underline{r}) = (x - 2z)\underline{i} + (2x + y)\underline{j} + (x - y + z)\underline{k}$ ; a térrész:  
 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ;

\*211.  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ ; a térrész:  $0 \leq z \leq 5 - \frac{5}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ ;

212.  $\underline{v}(\underline{r}) = x^3\underline{i} + y^3\underline{j} + z^3\underline{k}$ ; a térrész:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$   
 ( $R > 0$  állandó);

**213.** A gömb középpontjára vonatkozó inercia nyomatéka:

$$\iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

Számítsuk ki ennek értékét felületi integrálként a Gauss-Osztrog-radszki-tétel felhasználásával.

214-218. Szemléltessük az alábbi feladatokon a Stokes-tételt, hogy mind a felületi, mint a vonalintegrált kiszámítjuk:

**214.**  $\underline{v}(\underline{r}) = (x + z)\underline{i} + (3y - 2z)\underline{j} + (5x - 3y)\underline{k}$ ; a felület  $x^2 + y^2 = 1$ ;  
 $z = 0$  alapkörű és  $(0; 0; 5)$  csúcspontu kuppalást;

215.  $\underline{v}(\underline{r}) = xz^2\underline{i} + zy^2\underline{j} + x^2y\underline{k}$ ; a felület  $z = 4 - x^2 - y^2$  forgási  
 paraboloid  $z \geq 0$  darabja;

216.  $\underline{v}(\underline{r}) = (x + y + z)\underline{i} + xyz\underline{j} + x^2\underline{k}$ ; a felület  $z = x^2 + y^2$  forgásparabolo-  
 id azon része, melyre  $x^2 + y^2 \leq 4$ ;

\*217.  $\underline{v}(\underline{r}) = (x - y)\underline{i} + (x + y)\underline{j} + xy\underline{k}$ ; a felület  $z = xy$  hiperbolikus pa-  
 raboloid azon része, melyre  $x^2 + y^2 \leq 4$ ;

218.  $\underline{v}(\underline{r}) = (y + 3z)\underline{i} - (x + 2z)\underline{j} - (3x - 2y)\underline{k}$ ;

a felület az  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  gömbfelület azon része, melyre  
 $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ .



## Megoldások

1. Az egyenes  $t = 0$  időpillanatban az  $x$  tengelyt metszi. Tetszőleges  $t$  időpontban az egyenes és az  $(x, y)$  sík dőléspontjának koordinátái:  $x = a \cos \omega t$ ;  $y = a \sin \omega t$ ; az egyenesen mozgó pont  $z$  koordinátája pedig  $bt$ . Tehát a pontmozgás egyenlete:

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos \omega t + \underline{j} a \sin \omega t + \underline{k} bt.$$

A mozgás pályája: hengeres csavarvonal.

2.  $\underline{r}(t) = \underline{i} ct \cos \omega t + \underline{j} ct \sin \omega t + \underline{k} bt$ .

A felület egyenletét úgy nyerjük, hogy a térgörbe egyenletét skalár-paraméteres alakban írjuk és a  $t$  paramétert kiküszöböljük:

$$x = ct \cos \omega t$$

$$y = ct \sin \omega t$$

$$z = bt$$

és a felület

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 z^2$$

kupfelület.

3. A vektor-skalár függvényt átírjuk skalár-paraméteres alakba (lásd előző feladat) s  $x$ ,  $y$  és  $z$  értékeit a megadott felület egyenletébe helyettesítve, azonosságot kell kapnunk.

5. Az  $\underline{r}(t)$  vektor merőleges a sík normálvektorára. Merőleges vektorok skaláris szorzata zérus. Így a skaláris szorzat zérus volta  $t$ -re – lényegileg – másodfoku egyenletet szolgáltat.

A két megoldás:

$$\frac{1 - 4x}{4} = \frac{3y + 1}{3} = \frac{1 - 2z}{2}$$

és

$$\frac{4-x}{4} = \frac{3y+8}{6} = 2-z.$$

6. A körhenger alkotóinak irányvektora  $\underline{k}$ , a csavarvonal egyenlete pedig

$$\underline{r}(t) = \underline{i} a \cos bt + \underline{j} a \sin bt + \underline{k} ct$$

ahol  $a$ ,  $b$  és  $c$  adott állandók. A keresett szög: az érintővektor és  $\underline{k}$  által alkotott szög. Ennek (ill. a cosinusának)  $t$ -től függetlennek kell lennie.

7.  $t = k\pi$  ( $k$  egész);  $(y, z)$  sikkal párhuzamos érintőjű pontok paramétere;

$t = 0$  és  $(2k+1)\frac{\pi}{2}$  ( $k$  egész);  $(x, z)$  sikkal párhuzamos érintőjű pontok paramétere.

8.  $\underline{r}(t) = \underline{i}\sqrt{t} \cos t + \underline{j}\sqrt{t} \sin t + \underline{k}t$ ;

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i} \left( \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \sin t \right) + \underline{j} \left( \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \cos t \right) + \underline{k};$$

$$\begin{aligned} |\dot{\underline{r}}(t)| &= \left\{ \left( \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \sin t \right)^2 + \left( \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \cos t \right)^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \frac{1}{4t} + t + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}. \end{aligned}$$

Az ívhossz számításánál fellépő integrál Improprius, de konvergens:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) dt = \left[ \sqrt{t} + \frac{2}{3} \sqrt{t^3} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \left[ \sqrt{t} \left( 1 + \frac{2}{3} t \right) \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2\pi} \left( 1 + \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

9.  $\sqrt{1+a^2} \frac{\pi}{2}$ .

10.  $2\pi\sqrt{14}$ .

11. 10.

12. 20.

13. A csúcspont paramétere  $t = -\infty$ .

$$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t_0} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 \gamma^2}.$$

14.  $a + 2b$ .

15. A térgörbe itt két felület metszésvonalaként van adva. Jelen példában a görbe paraméteres egyenlete is egyszerűen felírható, ha az  $x$ -et választjuk paraméternek:

$$x = t$$

$$y = \frac{1}{3} t^2$$

$$z = \frac{2}{27} t^3$$

vagy vektor-alakba írva:

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + \frac{1}{3} t^2 \underline{j} + \frac{2}{27} t^3 \underline{k}; \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Az eredmény:  $\frac{70}{27}$ .

16. Először kiszámítjuk az első három derivált értékét a  $t_0$  helyen.

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3 \underline{j} + (1-t) \underline{k},$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = (6t - 2) \underline{i} + 3t^2 \underline{j} - \underline{k},$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\underline{i} + 6t \underline{j},$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = 6\underline{j}.$$

$$\underline{r}(2) = 8\underline{i} + 8\underline{j} - \underline{k},$$

$$\dot{\underline{r}}(2) = 10\underline{i} + 12\underline{j} - \underline{k}, \quad |\dot{\underline{r}}(2)| = 245 = 7\sqrt{5},$$

$$\ddot{\underline{r}}(2) = 6\underline{i} + 12\underline{j},$$

$$\ddot{\underline{r}}(2) = 6\underline{j}.$$

Az érintő egységvektor:

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|} = \frac{10}{7\sqrt{5}} \underline{i} + \frac{12}{7\sqrt{5}} \underline{j} - \frac{1}{7\sqrt{5}} \underline{k}.$$

A görbület:

$$\kappa = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}.$$

(Természetesen minden érték a  $t_0 = 2$  helyen veendő.)

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 12 & -1 \\ 6 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 6(2\underline{i} - \underline{j} + 8\underline{k}),$$

$$|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}| = 6\sqrt{69}; \quad |\dot{\underline{r}}|^3 = 343 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} = 1715\sqrt{5},$$

$$\kappa = \frac{6}{1715} \sqrt{\frac{69}{5}}.$$

A binormális egységvektor:

$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}.$$

Tehát

$$\underline{b} = \frac{2}{\sqrt{69}} \underline{i} - \frac{1}{\sqrt{69}} \underline{j} + \frac{8}{\sqrt{69}} \underline{k}.$$



A főnormális egységvektort a  $\underline{b}$  és  $\underline{t}$  (ilyen sorrendben vett) vektori szorzataként nyerjük.

$$\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t} = \frac{1}{7\sqrt{5} \sqrt{69}} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -1 & 8 \\ 10 & 12 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7\sqrt{345}} (-95\underline{i} + 82\underline{j} + 34\underline{k}).$$

A simulósík normálisa a binormális, egyenlete:

$$2(x - 8) - (y - 8) + 8(z + 1) = 0,$$

vagy:

$$2x - y + 8z = 0.$$

A normálsík normálisa az érintő, egyenlete:

$$10(x - 8) + 12(y - 8) - (z + 1) = 0,$$

vagy:

$$10x + 12y - z - 177 = 0.$$

A rektifikáló sík normálisa a főnormális, egyenlete:

$$-95(x - 8) + 82(y - 8) + 34(z + 1) = 0,$$

vagy:

$$-95x + 82y + 34z = -138.$$

A torzió:

$$\tau = \frac{\underline{\dot{r}} \cdot \underline{\ddot{r}} \cdot \underline{\ddot{r}}}{|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}|^2}.$$

$$\underline{\dot{r}} \cdot \underline{\ddot{r}} \cdot \underline{\ddot{r}} = (\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}) \cdot \underline{\ddot{r}} = 6(2\underline{i} - \underline{j} + 8\underline{k}) \cdot 6\underline{j} = -36,$$

$$\tau = -\frac{36}{36 \cdot 69} = -\frac{1}{69}.$$

A sebesség vektor:

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = 10\underline{i} + 12\underline{j} - \underline{k}.$$

A sebesség abszolút értéke:

$$|\underline{v}| = v = 7\sqrt{5}.$$

A gyorsulás vektor:

$$\underline{a} = \ddot{\underline{x}} = 6\underline{i} + 12\underline{j}.$$

A gyorsulás abszolút értéke:

$$|\underline{a}| = a = 6\sqrt{5}.$$

A gyorsulásvektor felbontása érintő és főnormális irányu komponensre:

$$\underline{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \underline{t} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \underline{n}.$$

Mindkét oldalt szorozva  $\underline{t}$  egységvektorral skalárisan, és figyelembe véve, hogy a merőlegesség miatt  $\underline{t} \cdot \underline{n} = 0$ , kapjuk:

$$\underline{a} \cdot \underline{t} = \frac{dv}{dt},$$

tehát

$$\frac{dv}{dt} = (6\underline{i} + 12\underline{j}) \cdot \frac{1}{7\sqrt{5}} (10\underline{i} + 12\underline{j} - \underline{k}) = \frac{12}{7\sqrt{5}} \cdot 17 = \frac{204}{7\sqrt{5}}.$$

Majd  $\underline{n}$ -nel szorozva skalárisan:

$$\frac{v^2}{\rho} = \underline{a} \cdot \underline{n} = (6\underline{i} + 12\underline{j}) \cdot \frac{1}{7\sqrt{345}} (-95\underline{i} + 82\underline{j} + 34\underline{k}) =$$

$$= \frac{6}{7\sqrt{345}} \cdot 69 = \frac{6}{7} \sqrt{\frac{69}{5}}.$$

Tehát

$$\underline{a} = \frac{204}{7\sqrt{5}} \underline{t} + \frac{6}{7} \sqrt{\frac{69}{5}} \underline{n}.$$

A feladatot megoldottuk, vagyis minden kérdésre választ adtunk.  
A továbbiakban egyes adatokat más módon fogunk kiszámítani.  
Tekintsük pl. a gyorsulás felbontásának képletét:

$$\underline{a} = \frac{dv}{dt} \underline{t} + \frac{v^2}{\rho} \underline{n}.$$

Képezve az

$$\underline{a} - \frac{dv}{dt} \underline{t} = \underline{a} - (\underline{a} \cdot \underline{t}) \underline{t}$$

vektort, ennek iránya  $\underline{n}$  és abszolút értéke  $v^2$ -tel osztva a görbületet adja. Az előbbiekből

$$\underline{a} \cdot \underline{t} = \frac{204}{7\sqrt{5}},$$

és így

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{\rho} \underline{n} &= \underline{a} - (\underline{a} \cdot \underline{t}) \underline{t} = 6\underline{i} + 12\underline{j} - \frac{204}{7\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{7\sqrt{5}} (10\underline{i} + 12\underline{j} - \underline{k}) = \\ &= 6\underline{i} + 12\underline{j} - \frac{204}{245} (10\underline{i} + 12\underline{j} - \underline{k}) = \\ &= \frac{1}{245} (-570\underline{i} + 492\underline{j} + 204\underline{k}). \end{aligned}$$

Ennek irányába mutató egységvektor, vagyis  $\underline{n}$  (az egyes komponensek oszthatók 6-tal):

$$\frac{1}{7\sqrt{345}} (-95\underline{i} + 82\underline{j} + 34\underline{k}),$$

és az abszolút érték:

$$\frac{v^2}{Q} = \frac{6 \cdot 7 \cdot \sqrt{345}}{245} = \frac{6\sqrt{345}}{35}.$$

$v^2 = 245$ -tel osztva, kapjuk a görbületet:

$$\frac{1}{Q} = \kappa = \frac{6\sqrt{345}}{35 \cdot 245} = \frac{6}{1715} \sqrt{\frac{345}{25}} = \frac{6}{1715} \sqrt{\frac{69}{5}}.$$

A görbületet és a főnormálst kiszámíthatjuk az első Frenet-képlet segítségével is:

$$\frac{dt}{dt} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \kappa \cdot \underline{n} \cdot v.$$

Ehhez azonban ki kell általánosságban számítani  $\underline{t}$  érintő egységvektort:

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|} = \frac{(6t-2)\underline{i} + 3t^2\underline{j} - \underline{k}}{\sqrt{36t^2 - 24t + 4 + 9t^4 + 1}},$$

és ezt kell a  $t$  paraméter szerint deriválnunk:

$$\frac{d\underline{t}}{dt} = \frac{6\underline{i} + 6t\underline{j}}{\sqrt{9t^4 + 36t^2 - 24t + 5}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{36t^3 + 72t - 24}{(9t^4 + 36t^2 - 24t + 5)^{\frac{3}{2}}} \left\{ (6t-2)\underline{i} + 3t^2\underline{j} - \underline{k} \right\}.$$

$t$  helyébe  $t_0 = 2-t$  írva:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{t}}{dt} \Big|_{t=2} &= \frac{6(\underline{i} + 2\underline{j})}{\sqrt{245}} - \frac{240}{245\sqrt{245}} (10\underline{i} + 12\underline{j} - \underline{k}) = \\ &= \frac{6}{245\sqrt{245}} (-95\underline{i} + 82\underline{j} + 34\underline{k}). \end{aligned}$$

Ez  $\underline{n}$  irányba mutat és  $\underline{v} = \sqrt{245}$ -tel osztva az abszolút értékét

$$\kappa = \frac{6}{245^2} \cdot 7\sqrt{345} = \frac{6}{1715} \cdot \sqrt{\frac{69}{5}}.$$

Hasonlóan lehetne a torziót is kiszámítani a 3. Frenet-féle képlet segítségével, de  $\underline{b}$  vektort általánosságban felírni, majd  $t$  szerint deriválni, nagyon munkaigényes.

$$17. \quad \underline{t} = \frac{1}{3} (2; 1; 2); \quad \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{234}} (-7; -8; 11);$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{26}} (3; -4; -1);$$

$$\text{simulósík: } 3x - 4y - z + 12 = 0;$$

$$\text{normál sík: } 2x + y + 2z - 3 = 0;$$

$$\text{rektifikáló sík: } 7x + 8y - 11z - 24 = 0;$$

$$\kappa = \frac{2\sqrt{26}}{27}; \quad \tau = -\frac{3}{26};$$

$$\underline{v} = (2; 1; 2); \quad |\underline{v}| = 3;$$

$$\underline{a} = (2; 0; 6); \quad |\underline{a}| = \sqrt{40}; \quad \underline{a} = \frac{16}{3} \underline{t} + \frac{2}{3} \sqrt{26} \underline{n}.$$

$$18. \quad \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{17}} (-2\sqrt{3}; 1; 2); \quad \underline{n} = -\frac{1}{\sqrt{391}} (8; 10\sqrt{3}; 3\sqrt{3});$$

$$\underline{b} = \frac{2}{\sqrt{23}} (\sqrt{3}; -2; 4);$$

$$\text{simulósík: } \sqrt{3}x - 2y + 4z = \frac{8\sqrt{3}}{3}; \quad \kappa = \frac{2}{17} \sqrt{\frac{23}{17}};$$

$$\text{normál sík: } 2\sqrt{3}x - y - 2z = 3\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}; \quad \tau = \frac{4}{23};$$

$$\text{rektifikáló sík: } 8x + 10\sqrt{3}y + 3\sqrt{3}z = 46 + 2\mu\sqrt{3};$$

$$\underline{v} = (-2\sqrt{3}; 1; 2); \quad |\underline{v}| = \sqrt{17}; \quad \underline{a} = (-2; -\sqrt{3}; 0)$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{7}; \quad \underline{a} = 3\sqrt{\frac{3}{17}} \underline{t} + 2\sqrt{\frac{23}{17}} \underline{n}.$$

$$19. \quad \underline{t} = \frac{1}{11} (-6; 2; 9); \quad \underline{n} = -\frac{1}{11} (7; -6; 6);$$

$$\underline{b} = -\frac{1}{11} (6; 9; 2);$$

$$\text{simulósík: } 6x + 9y + 2z = 21; \quad \kappa = \frac{6}{121};$$

$$\text{normálsík: } 6x - 2y - 9z = 43;$$

$$\text{rektifikáló sík: } 7x - 6y + 6z = -3; \quad \tau = -\frac{6}{121};$$

$$\underline{v} = (-6, 2, 9); \quad |\underline{v}| = 11; \quad \underline{a} = 6(1, 0, -3);$$

$$|\underline{a}| = 6\sqrt{10}; \quad \underline{a} = -18\underline{t} + 6\underline{n}.$$

$$20. \quad \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{14}} (-1; 3; 2); \quad \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{42}} (5; -1; 4);$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1; 1; -1);$$

$$\text{simulósík: } x + y - z = 8; \quad \kappa = \frac{3}{7} \sqrt{\frac{3}{14}};$$

$$\text{normálsík: } x - 3y - 2z = -8;$$

$$\text{rektifikáló sík: } 5x - y + 4z = -26; \quad \tau = \frac{1}{3};$$

$$\underline{v} = (-1; 3; 2); \quad |\underline{v}| = \sqrt{14}; \quad \underline{a} = (2; 0; 2);$$

$$|\underline{a}| = 2\sqrt{2}; \quad \underline{a} = \frac{2}{\sqrt{14}} \underline{t} + \frac{18}{\sqrt{42}} \underline{n}.$$

$$21. \quad \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{11}} (3; 1; 1); \quad \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{110}} (3; -10; 1);$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{10}} (1; 0; -3); \quad \kappa = \frac{2}{11} \sqrt{\frac{10}{11}};$$

$$\text{simulósik: } x - 3z = -2; \quad \tau = 0;$$

$$\text{normálsik: } 3x + y + z = -\frac{2}{3};$$

$$\text{rektifikáló sik: } 3x - 10y + z = -\frac{68}{3}$$

$$\underline{v} = (3; 1; 1); \quad |\underline{v}| = \sqrt{11}; \quad \underline{a} = (6; 0; 2);$$

$$|\underline{a}| = 2\sqrt{10}; \quad \underline{a} = \frac{20}{\sqrt{11}} \underline{t} + \frac{20}{\sqrt{110}} \underline{n}.$$

$$22. \quad \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \underline{i} \operatorname{th} t_0 + \underline{j} + \frac{\underline{k}}{\operatorname{ch} t_0} \right);$$

$$\underline{n} = \frac{\underline{i}}{\operatorname{ch} t_0} - \underline{k} \operatorname{th} t_0;$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\underline{i} \operatorname{th} t_0 + \underline{j} - \frac{\underline{k}}{\operatorname{ch} t_0} \right);$$

$$\text{simulósik: } x \operatorname{th} t_0 - y + \frac{z}{\operatorname{ch} t_0} = \frac{t_0}{\operatorname{ch} t_0}$$

$$\text{normálsik: } x \operatorname{sh} t_0 + y \operatorname{ch} t_0 + z = t_0 + \operatorname{sh} 2t_0;$$

$$\text{rektifikáló sik: } \frac{x}{\operatorname{ch} t_0} - z \operatorname{th} t_0 = 1 + t_0 \operatorname{th} t_0;$$

$$\kappa = \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 t_0}; \quad \tau = \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 t_0};$$

$$\underline{v} = \underline{i} \operatorname{sh} t_0 + \underline{j} \operatorname{ch} t_0 + \underline{k}; \quad |\underline{v}| = \sqrt{2} \operatorname{ch} t_0;$$

$$\underline{a} = \underline{i} \operatorname{ch} t_0 + \underline{j} \operatorname{sh} t_0; \quad |\underline{a}| = \sqrt{\operatorname{ch} 2 t_0};$$

$$\underline{a} = 2\underline{t} \operatorname{sh} t_0 + \underline{n}.$$

$$23. \quad \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{ch} t_0} \left\{ \underline{i}(\operatorname{sh} t_0 \cos t_0 - \operatorname{ch} t_0 \sin t_0) + \right. \\ \left. + \underline{j}(\operatorname{sh} t_0 \sin t_0 + \operatorname{ch} t_0 \cos t_0) + \underline{k} \right\};$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{ch} t_0} \left\{ -\underline{i}(\operatorname{ch} t_0 \sin t_0 + \operatorname{sh} t_0 \cos t_0) + \right. \\ \left. + \underline{j}(\operatorname{ch} t_0 \cos t_0 - \operatorname{sh} t_0 \sin t_0) - \underline{k} \right\};$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\operatorname{ch} t_0} (-\underline{i} \cos t_0 - \underline{j} \sin t_0 + \underline{k} \operatorname{sh} t_0);$$

simulációsik:  $x \cos t_0 + y \sin t_0 - z \operatorname{sh} t_0 = a(\operatorname{ch} t_0 - t_0);$

normálsík:  $x(\operatorname{sh} t_0 \cos t_0 - \operatorname{ch} t_0 \sin t_0) +$

$$+ y(\operatorname{sh} t_0 \sin t_0 + \operatorname{ch} t_0 \cos t_0) + z =$$

$$= a(\operatorname{sh} t_0 \operatorname{ch} t_0 + t_0);$$

rektifikáló sík:  $x(\operatorname{ch} t_0 \sin t_0 + \operatorname{sh} t_0 \cos t_0) -$

$$- y(\operatorname{ch} t_0 \cos t_0 - \operatorname{sh} t_0 \sin t_0) + z = -a(\operatorname{ch} t_0 \operatorname{sh} t_0 + t_0);$$



$$\kappa = \frac{\operatorname{th} t_0}{\sqrt{2} a \operatorname{ch} t_0}; \quad \tilde{\tau} = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 t_0};$$

$$\underline{v} = a \left\{ \underline{i}(\operatorname{sh} t_0 \cos t_0 - \operatorname{ch} t_0 \sin t_0) + \right. \\ \left. + \underline{j}(\operatorname{sh} t_0 \sin t_0 + \operatorname{ch} t_0 \cos t_0) + \underline{k} \right\};$$

$$|\underline{v}| = a \sqrt{2} \operatorname{ch} t_0;$$

$$\underline{a} = 2a \operatorname{sh} t_0 (-\underline{i} \sin t_0 + \underline{j} \cos t_0); \quad |\underline{a}| = 2a \operatorname{sh} t_0;$$

$$\underline{a} = \sqrt{2} a \operatorname{sh}^2 t_0 (\underline{t} + \underline{n}).$$

$$24. \quad \underline{t} = \frac{\begin{pmatrix} e^{t_0} & e^{-t_0} & \sqrt{2} \\ e^{t_0} & -e^{-t_0} & \sqrt{2} \end{pmatrix}}{e^{t_0} + e^{-t_0}}; \quad \underline{n} = \frac{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -e^{t_0} + e^{-t_0} \\ e^{t_0} & -e^{-t_0} & \sqrt{2} \end{pmatrix}}{e^{t_0} + e^{-t_0}};$$

$$\underline{b} = \frac{\begin{pmatrix} -e^{-t_0} & e^{t_0} & \sqrt{2} \\ -e^{-t_0} & e^{t_0} & \sqrt{2} \end{pmatrix}}{e^{t_0} + e^{-t_0}};$$

$$\text{simulósík: } e^{-t_0} x - e^{t_0} y - \sqrt{2} z = -2 t_0;$$

$$\text{normálsík: } e^{t_0} x - e^{-t_0} y + \sqrt{2} z = e^{2t_0} - e^{-2t_0} + 2t_0;$$

$$\text{rektifikáló sík: } \sqrt{2} x + \sqrt{2} y + (-e^{t_0} + e^{-t_0}) z = \\ = \sqrt{2} \left\{ e^{t_0} (1 - t_0) + e^{-t_0} (1 + t_0) \right\};$$

A görbületet és a torziót a Frenet-formulák segítségével számíthatjuk. A torziónál vigyázzunk a negatív előjelre.

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right)^2}; \quad \tau = -\frac{\sqrt{2}}{\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right)^2};$$

$$\underline{v} = \left(e^{\frac{t}{2}}; -e^{-\frac{t}{2}}; \sqrt{2}\right); \quad |\underline{v}| = e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}$$

$$\underline{a} = \left(e^{\frac{t}{2}}; e^{-\frac{t}{2}}; 0\right); \quad |\underline{a}| = \sqrt{e^{2\frac{t}{2}} + e^{-2\frac{t}{2}}};$$

$$\underline{a} = \left(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\right)\underline{t} + \sqrt{2}\underline{n}.$$

25. Tekintsük paraméternek  $x$ -et, és  $y$ -t és  $z$ -t az  $x$  paraméter függvényének:  $y = y(x)$ ;  $z = z(x)$ .

Az implicit függvények deriválási szabálya szerint:

$$1 + 3y' + 4z' = 0$$

$$\underline{2x + 2yy' + 2zz' = 0} \quad /:2 \quad (x)$$

A számolásnál természetesen  $x' = 1$ .  $y$  és  $z$  értékeit behelyettesítve a

$$3y' + 4z' = -1$$

$$4y' + 2z' = -6$$

egyenletrendszert kell megoldani. Ebből

$$y' = -\frac{11}{5}; \quad z' = \frac{7}{5}.$$

Tehát

$$\underline{\dot{x}} = \left(1; -\frac{11}{5}; \frac{7}{5}\right).$$

Hasonlóan számítjuk  $\underline{\ddot{x}}$ -t is a (x) egyenletből, figyelembe véve, hogy  $x'' = 0$ :

$$3y'' + 4z'' = 0$$

$$1 + y'^2 + yy'' + z'^2 + zz'' = 0.$$

Az ismert értékeket beírva:

$$3y'' + 4z'' = 0$$

$$4y'' + 2z'' = -1 - \frac{121}{25} - \frac{49}{25} = -\frac{39}{5}.$$

Igy

$$y'' = -\frac{78}{25}; \quad z'' = \frac{117}{50},$$

és

$$\ddot{\underline{x}} = \left(0; -\frac{78}{25}; \frac{117}{50}\right) = \frac{39}{50} (0; -4; 3).$$

$\ddot{\underline{x}}$  meghatározása ugyanígy történik, ezt jelen példában azonban felesleges kiszámítani. U.i.  $\ddot{\underline{x}}$  értéke csak a torzió kiszámításánál szükséges, itt azonban síkgörbéről lévén szó ( $x + 3y + 4z = 26$  síkot jelent), a torzió 0.

$$\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{195}} (5; -11; 7).$$

$$\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}} = \frac{39}{250} (-5; -15; -20) = -\frac{39}{50} (1; 3; 4).$$

$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}}{|\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}|} = -\frac{1}{\sqrt{26}} (1; 3; 4);$$

$$\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t} = -\frac{1}{\sqrt{30}} (5; 1; -2).$$

$$\text{Simulósík: } x - 6 + 3(y - 4) + 4(z - 2) = 0$$

vagyis

$$x + 3y + 4z = 26.$$

A példából is látható, hogy a síkgörbe simulósíkjában fekszik.

Normálsík:  $5x - 11y + 7z = 0$ .

Rektifikáló sík:  $5x + y - 2z = 30$ .

A görbület:

$$\kappa = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3} = \frac{39\sqrt{26} \cdot 5^3}{50 \cdot \sqrt{195^3}} = \frac{1}{\sqrt{30}},$$

ugyanis

$$195 = 15 \cdot 13.$$

A görbület elemi uton is számítható, ha észrevesszük, hogy a szóban forgó görbe kör: gömb és sík metszésvonala. A sík távolsága az origótól, a gömb középpontjától,  $\sqrt{26}$  és a kör sugara Pythagoras tételével számolva  $\sqrt{30}$ . Ennek reciproka a görbület.

26. Ezt a feladatot – először – az előző példa megoldásától eltérő módon tárgyaljuk. Ez visszavezethető u. i. paraméteres alakra. Válasszuk paraméternek az  $x$ -et, legyen  $x = t$ . Ekkor

$$4t^2 - 3yz + 6y = 0$$

$$3t^2 + tz - 6z = 0$$

A második egyenletből  $z$ -t, majd az elsőből  $y$ -t fejezzük ki:

$$z = \frac{3t^2}{6 - t}$$

$$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{6t^2 - t^3}{3t^2 + 2t - 12}$$

Ezzel megvan a paraméteres előállítás és a megoldás a 16. példa menetével egyezik:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{1}.$$

Az elemi műveleteket elvégezve:

$$\dot{y} = \frac{4}{3} \frac{-3t^4 - 4t^3 + 48t^2 - 144t}{(3t^2 + 2t - 12)^2}$$

$$\dot{z} = \frac{36t - 3t^2}{(6-t)^2}$$

A további deriváltak - szintén a szükséges elemi műveletek elvégzése után:

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = \frac{32}{3} \frac{-19t^3 + 180t^2 - 108t + 216}{(3t^2 + 2t - 12)^3}$$

$$\ddot{z} = \frac{216}{(6-t)^3}$$

$$\ddot{\bar{x}} = 0$$

$$\ddot{\bar{y}} = \frac{32}{3} \left( \frac{(-57t^2 + 360t - 108)(3t^2 + 2t - 12)}{(3t^2 + 2t - 12)^4} - \frac{3(6t + 2)(-19t^3 + 180t^2 - 108t + 216)}{(3t^2 + 2t - 12)^4} \right)$$

$$\ddot{\bar{z}} = \frac{648}{(6-t)^4}$$

Látható, hogy a deriváltak kiszámítása meglehetősen munkaigényes. Mivel  $x$  a paraméter és az élelrt pontban  $x = 0$ , azért a deriváltak értékei a  $t = 0$  paraméterértéknél számíthatók:

$$\dot{\bar{x}} = (1; 0; 0);$$

$$\dot{\bar{y}} = (0; -\frac{4}{3}; 1);$$

$$\dot{\bar{z}} = (0; 0; \frac{1}{2}).$$

Számítsuk ki a deriváltak értékeit az origóban az előző feladatban alkalmazott eljárással.

$$\left. \begin{array}{l} 4x^2 - 3yz + 6y = 0 \\ 3x^2 + xz - 6z = 0 \end{array} \right\} P(0; 0; 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 8x - 3y'z - 3yz' + 6y' = 0 \\ 6x + z + xz' - 6z' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y' = 0; z' = 0;$$

$$\left. \begin{array}{l} 8 - 3y''z - 6y'z' - 3yz'' + 6y'' = 0 \\ 6 + 2z' + xz'' - 6z'' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y'' = -\frac{4}{3}; z'' = 1;$$

$$\left. \begin{array}{l} -3y'''z - 9y''z' - 9y'z'' - 3yz''' + 6y''' = 0 \\ 3z'' + xz''' - 6z''' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y''' = 0; z''' = \frac{1}{2}.$$

A további számolás már ugyanúgy folytatható, mint az előző feladatoknál.

$$\underline{t} = (1; 0; 0); \quad \underline{n} = -\frac{1}{5} (0; 4; -3);$$

$$\underline{b} = -\frac{1}{5} (0; 3; 4);$$

$$\text{simulósík: } 3y + 4z = 0;$$

$$\text{normálsík: } x = 0;$$

$$\text{rektifikáló sík: } 4y - 3z = 0;$$

$$\kappa = \frac{5}{3}; \quad \tau = -\frac{6}{25}.$$

27. Megoldhatjuk mindkét módon. Implicit függvényként deriválva – akár csak az előző példánál – a számolás sokkal egyszerűbb. Számolás nélkül felírhatjuk a simulósík egyenletét:

$$x + y + z = 0$$

$$\text{és megadhatjuk a torziót: } \tau = 0.$$

$$\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1; -1; 0); \quad \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} (1; 1; -2);$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1; 1; 1);$$

normálsík:  $x - y = 0$ ;

rektifikáló sík:  $x - y - 2z = -2$ ;

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$28. \quad \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1; 1; 0); \quad \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} (1; -1; -2);$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1; 1; -1);$$

simulósík:  $x - y + z = 1$ ;

normálsík:  $x + y = 2$ ;

rektifikáló sík:  $x - y - 2z = -2$ ;

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \tau = 1.$$

30. A simulósík és a z tengely által bezár szög

$$\arccos \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

31.  $3x + 2y + 3z + 16 = 0$ .

a) megoldás

Egy  $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$  görbe síkgörbe, ha létezik olyan

$ax + by + cz = d$  síkegyenlet, ahol

$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$  és amelyet a görbe minden pontja kielégít.

Feladatunkban

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= a(t^2 - 2t) + b(3t - 5) + c(-t^2 - 2) = \\ &= (a - c)t^2 + (3b - 2a)t - 5b - 2c. \end{aligned}$$

Ez a kifejezés csak akkor lehet minden  $t$ -re állandó értékű, ha a paramétert tartalmazó tagok kiesnek, azaz, ha

$$a - c = 0.$$

és

$$3b - 2a = 0.$$

$$\text{Ez teljesül, ha } a = c \neq 0 \text{ és } b = \frac{2a}{3}.$$

Tehát a görbe valóban síkgörbe. A sík egyenletének felírásához legyen pl.  $a = c = 3$ , akkor  $b = 2$  és  $d = -5 - 2c = -16$ .

A keresett sík egyenlete tehát

$$3x + 2y + 3z + 16 = 0.$$

Megjegyzés:  $a = c = 0$ -ból  $b = 0$  adódna, s így fenti feltevésünkkel elmentmondásba kerülünk: nincs sík-egyenletünk.

b) megoldás

Ha egy görbe síkgörbe, símulósíkja állandó. Ezért elegendő a símulósík normálisának (binormális irányu vektornak) az előállítás.

Feladatunkban:

$$\underline{\dot{x}} \times \underline{\dot{x}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2t - 2 & 3 & -2t \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6\underline{i} - (-4t + 4 + 4t) \underline{j} - 6\underline{k}.$$

A símulósík normálisának iránya tehát a  $3\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$  (állandó) irányu vektor.

A sík normálisának, s egy pontjának ismeretében a szóban forgó sík egyenlete felírható.



c) megoldás

Síkgörbe torziója  $\tau \equiv 0$ .

Azt kell tehát belátni, hogy  $\underline{\dot{r}} \cdot \underline{\ddot{r}} \cdot \underline{\ddot{\ddot{r}}}$  vegyesszorzat  $\equiv 0$ . Ez biztosan bekövetkezik, ha – mint jelen feladatunkban is –  $\underline{\ddot{\ddot{r}}} \equiv 0$ .

34. Az érintő vektor:

$$\underline{\dot{r}}(t) = 2\underline{i} + 6t\underline{j} + 9t^2\underline{k}.$$

A keresett irány:

$$\underline{v} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k},$$

ahol  $a, b$  és  $c$  egyenlőre ismeretlenek.

$\underline{\dot{r}}(t)$  és  $\underline{v}$  vektorok által bezárt szög legyen  $\gamma$ , tehát

$$\cos \gamma = \frac{2a + 6tb + 9t^2c}{\sqrt{4 + 36t^2 + 81t^4} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

A feltétel szerint  $\cos \gamma$  állandó. Jelöljük a

$$\cos \gamma \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

állandót  $q$ -val. Ekkor  $\cos \gamma$  kifejezéséből átrendezéssel

$$q(2 + 9t^2) = 2a + 6tb + 9t^2c.$$

Ez az egyenlőség csak

$$a = q; \quad b = 0 \quad \text{és} \quad c = q$$

esetén állhat fenn. Vagyis

$$\underline{v} = q(\underline{i} + \underline{k})$$

tehát a keresett irány  $\underline{i} + \underline{k}$  vektor iránya és a szög

$$\cos \gamma = \frac{2 + 9t^2}{(2 + 9t^2) \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \gamma = 45^\circ.$$

35. Legelőször ki kell számítani az ívhosszat  $t = 0$  paramétertől kezdve.

$$\underline{\dot{r}}(t) = -\underline{i} a \sin t + \underline{j} a \cos t + \underline{k} b;$$

$$|\underline{\dot{r}}(t)| = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = t \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ebből

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

és a hengeres csavarvonal egyenlete az ívhossz függvényeként:

$$\underline{r}(s) = \underline{i} a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \underline{j} a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \underline{k} \frac{b s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ennek  $s$  szerinti deriváltja a  $\underline{t}(s)$  érintő egységvektor:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{r}}{ds} = \underline{t}(s) &= -\underline{i} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \\ &+ \underline{j} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \underline{k} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Most már felírhatjuk az evolvens

$$\underline{p}(s) = \underline{r}(s) - s\underline{t}(s)$$

egyenletét:

$$\begin{aligned} \underline{p}(s) &= \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \underline{i} + \\ &+ \left( a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{a s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \underline{j}. \end{aligned}$$