



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

# MATEMATIKA PÉLDATÁR

Szerkesztette:  
Monostory Iván

**VII. kötet**

## KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Összeállította:  
Kelemen Mihály



**Műegyetemi Kiadó, 2004.**

(Tizedik utáányomás)

egyetemi jegyzet  
oktatási célra

Azonosító: **040811**

**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**

**Természettudományi Karának**

megrendelése alapján kiadja a

**Műegyetemi Kiadó**

[www.kiado.bme.hu](http://www.kiado.bme.hu)

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 7,4 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

**Műegyetemi Nyomda**

Munkaszám: 061/04

\* A feladatok jelentős részének sorszáma előtt csillag jelzés található. Ezzel hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a kötet második felében található megoldások között ezeknek a feladatoknak nem csupán a végeredményét közöljük, hanem a megoldás menetéhez utmutatást is adunk.

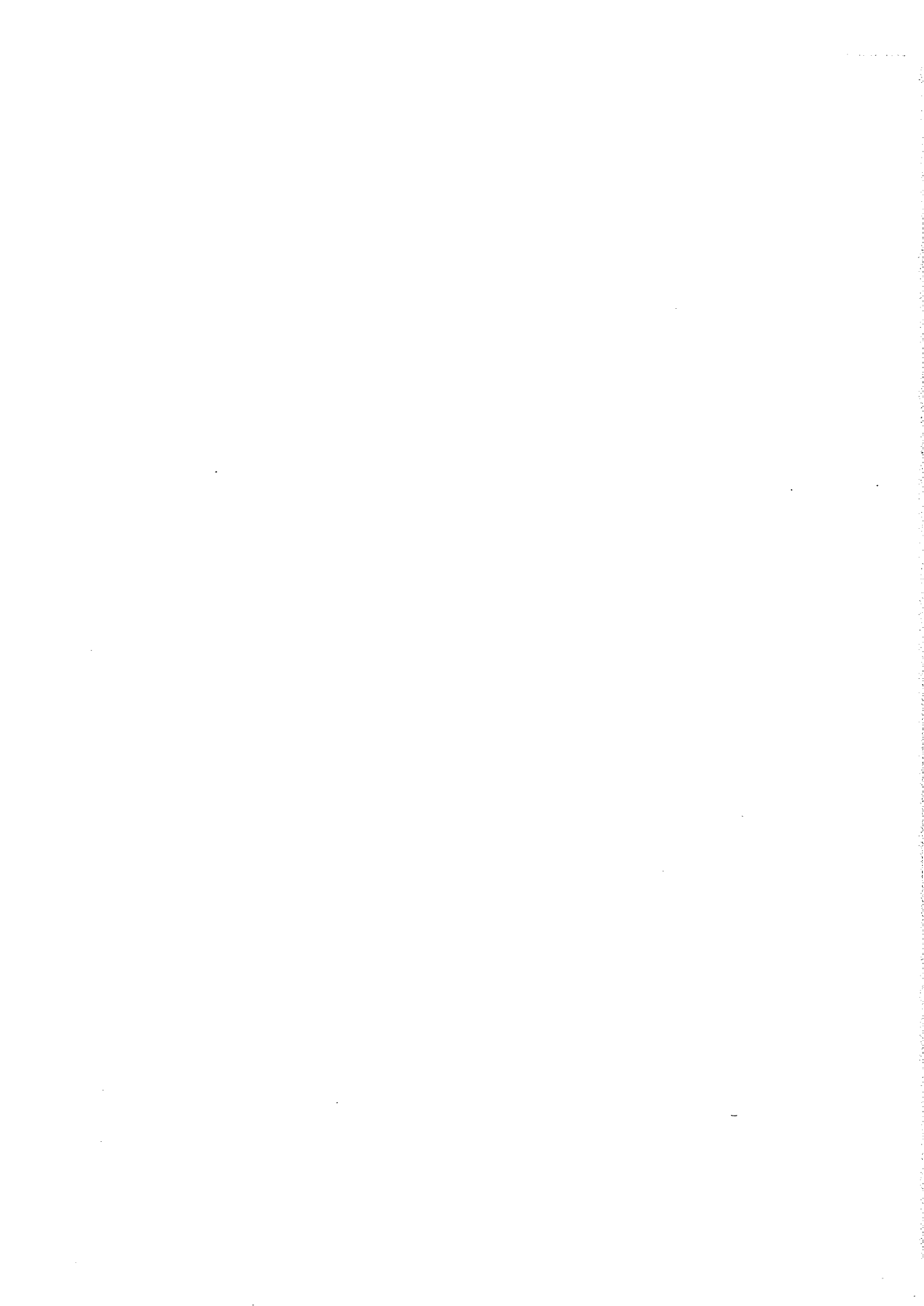
A bekeretezett sorszámú feladatok megoldását részleteiben is kidolgoztuk, egyes esetekben több megoldást is közlünk.

A szerkesztő



## Tartalomjegyzék

	Feladat sorszám	Feladat	Megoldás
I. Komplex függvények valós és képzetes rész összegére bontott alakja. Euler összefüggés	1-21	9-10	37-41
II. Tartományok, geometriai helyek és vonalak a komplex számsíkon	22-58	10-12	41-45
III. Komplex számokból álló halmazok. Komplex tagu sorozatok és sorok	59-82	12-14	45-50
IV. Függvényhatárérték és folytonosság	83-103	15-17	50-52
V. Komplex függvények differenciálhatósága	104-144	17-21	52-60
VI. Léképezések	145-174	21-24	60-69
VII. Komplex függvények görbementi integrálja. Cauchy-tétel	175-194	25-30	69-77
VIII. Komplex hatványsorok, sorfejtések. Reziduum	195-216	30-33	77-81



# FELADATOK





I. Komplex függvények valós és képzetes rész összegére bontott alakja. Euler összefüggés

Hozzuk  $u(x, y) + iv(x, y)$  alakra a következő komplex függvényeket:

$$1. \quad w(z) = \frac{z^2 + 1}{z}, \quad * 2. \quad w(z) = \frac{z - i}{z + i}, \quad 3. \quad w(z) = \frac{w^2 + 1}{z},$$

$$4. \quad w(z) = e^z, \quad 5. \quad w(z) = z e^z, \quad 6. \quad w(z) = \ln z,$$

$$7. \quad w(z) = \cos z, \quad 8. \quad w(z) = \sin z, \quad * 9. \quad w(z) = \operatorname{ch} z,$$

$$10. \quad w(z) = \operatorname{sh} z, \quad 11. \quad w(z) = \frac{z}{\bar{z}}, \quad 12. \quad w(z) = \frac{4z}{z^2 - 2}$$

Állítsuk elő  $w(z) = f(z, \bar{z})$  alakban a következő komplex függvényeket:

$$* 13. \quad w(z) = 2 \frac{x + iy}{x^2 - y^2},$$

$$* 14. \quad w(z) = \frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{x^2 + y^2}$$

Az Euler formula felhasználásával adjunk zárt összegképleteket a következő összegekre, ahol  $n \geq 1$  egész:

$$15. \quad \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx,$$

$$16. \quad \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$$

Határozzuk meg a következő végtelen sorok összegét:

$$* 17. \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi, \quad * 18. \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi.$$

(ahol  $r$  és  $\varphi$  valósak, továbbá  $0 < r < 1$ )

$$\boxed{19.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \varphi}{n!} \quad (\text{Vizsgáljuk } e^{e^{i\varphi}} \text{ Taylor sorát!})$$

Igazoljuk a következő azonosságokat.

$$* 20. \quad |\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x.$$

$$\boxed{21.} \quad \frac{e^{i\varphi} + e^{i\psi}}{e^{i\varphi} - e^{i\psi}} = -i \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \psi}{2} \quad (\varphi \text{ és } \psi \text{ valósak}).$$

## II. Tartományok, geometriai helyek és vonalak a komplex számsíkon

Jelöljük ki a komplex számsíkon az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott tartományokat:

$$22. \quad |z| \leq 2, \quad 23. \quad |z| > 2, \quad 24. \quad 1 \leq |z| \leq 2,$$

$$25. \quad \frac{1}{|z|} < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ tetszőleges kis pozitív szám})$$

$$26. \quad \frac{1}{|z-1|} > 1, \quad 27. \quad |z - i + 1| < 2,$$

$$* 28. \quad |\operatorname{Re}z| > 1, \quad |\operatorname{Im}z| > 2, \quad 29. \quad |z| + \operatorname{Re}(z) \leq 1,$$

$$30. \quad \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1, \quad 31. \quad \left| \frac{z+1}{z-1} \right| < \sqrt{2}$$

Határozzuk meg a komplex számsíkon a következő egyenleteket kielégítő komplex számoknak megfelelő pontok mértani helyét:

$$32. \quad \operatorname{Re}(z^2) = 0, \quad 33. \quad \operatorname{Re}(z^2) = 1,$$

$$34. \quad \operatorname{Re}(z^2) = -1, \quad 35. \quad \operatorname{Im}(z^2) = 0,$$

36.  $\operatorname{Im}(z^2) = 1,$

37.  $\operatorname{Im}(z^2) = -1,$

\* 38.  $|z - 1| = |z + i|,$

\* 39.  $|z - 1| + |z + 1| = 4$

\* 40.  $|z^2 - 1| = \alpha \quad (0 < \alpha < 1; \alpha = 1; \alpha > 1 \text{ esetekben})$

Írjuk fel a következő egyenesek egyenletét  $z$  és  $\bar{z}$  komplex változók segítségével:

\* 41.  $x = c,$

\* 42.  $y = c, \quad (c \text{ valós állandó})$

\* 43.  $y = x,$

\* 44.  $y = -x,$

\* 45.  $x + y = 2$

\* 46.  $ax + by + c = 0 \quad (a, b, c \text{ valós egyetthatók}).$

\* 47.  $z_1$  és  $z_2$  adott komplex számoknak megfelelő pontok távolságát felező merőleges.

Írjuk fel a következő körök egyenletét  $z$  és  $\bar{z}$  komplex változók segítségével:

48. Origó középpontu  $r$  sugaru kör.

\* 49.  $P_0$  középpontu  $r$  sugaru kör. ( $P_0$  a  $z_0$  adott komplex számnak megfelelő pont.)

\* 50.  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad (a, b, c \text{ valósak}).$

Milyen görbék felelnek meg az alábbi valós " $t$ " változótól függő elfajuló komplex függvénynek?

51.  $z(t) = a \cos t + ib \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi, \quad (a > 0, b > 0)$

52.  $z(t) = ae^{it} + be^{-it}, \quad 0 \leq t < 2\pi \quad (a > 0, b > 0)$

53.  $z(t) = e^{(a+bi)t}, \quad (a \text{ és } b \text{ valós}), \quad -\infty < t < \infty.$

54.  $z(t) = at + be^{i\omega t} \quad t \geq 0 \quad (a > 0, b > 0, \omega > 0).$

55.  $z(t) = t + \frac{i}{t},$

56.  $z(t) = \frac{i+t}{i-t}$

Igazoljuk a következő állításokat:

57. Ha  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  és  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ , akkor a szóban forgó komplex számoknak megfelelő pontok az origó középpontu egységkör kerületét három egyenlő részre osztják.

58. Ha  $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$  és  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ , akkor a szóban forgó komplex számoknak megfelelő pontok egy az origó középpontu egységkörbe irt derékszögű paralelogramma csucsai.

### III. Komplex számokból álló halmazok Komplex tagú sorozatok és sorok

59. Korlátos-e a  $|z| + \operatorname{Re}(z) \leq 1$  egyenlőtlenséget kielégítő "z" komplex számok halmaza? Adjuk meg a komplex számsík azon tartományát, amelyet ezen halmaz elemeinek megfelelő pontok kitöltenek.

60. Adjuk meg az  $\frac{1}{m+1} + \frac{i}{n+1}$  (m és n természetes számok) számhalmaz összes sűrűsödési helyeit.

61. Adjuk meg azon  $z = x + iy$  komplex számok halmazának összes sűrűsödési helyeit, amelyeknél x is, meg y is racionális. Rendezzük e halmaz elemeit úgy, hogy azok számsorozatot alkossanak.

62. Sorozatba rendezhető-e az egységnyi abszolút értékű komplex számok halmaza?

Számítsuk ki a következő  $z_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  sorozatok határértékét, és határozzuk meg, hogy hányadik tagtól kezdve lesz a sorozat tagjainak a határértéktől való eltérése adott  $\varepsilon > 0$  számnál kisebb. (Mi lesz az  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $N(\varepsilon)$  küszöbszám?)

\* 63. 
$$z_n = \frac{n - i}{n + 1},$$

\* 64. 
$$z_n = \frac{1 + 2ni}{n + i}$$

Vizsgáljuk a következő sorozatokat korlátosság, sűrűsödési helyek és konvergencia szempontjából. Ha konvergensek, számítsuk ki határértéküket:

$$* 65. \quad z_n = (1-i)^n, \quad 66. \quad z_n = 1 + \frac{i^n}{n},$$

$$\boxed{67.} \quad z_n = i^n \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad * 68. \quad z_n = \left(\frac{2+i}{3}\right)^n,$$

$$* 69. \quad z_n = \frac{(1+i)^{2n}}{3^n}, \quad * 70. \quad z_n = \frac{(\sqrt{2}+i)^n}{3^n},$$

$$* 71. \quad z_n = (2+i)^n$$

$$* 72. \quad z_n = \frac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{(1+i)^n} \quad (\varphi \text{ valós})$$

$$73. \quad z_n = z_0 + \frac{1}{n} e^{i\varphi n} \quad (z_0 \text{ komplex, } \varphi \text{ valós})$$

$$74. \quad z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i\frac{\pi}{n}},$$

$$* 75. \quad z_n = \left(2 + \frac{3}{n}\right) e^{i\pi n}.$$

$$\boxed{76.} \quad \text{Ismeretes, hogy valós } x \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Mutassuk meg, hogy ez az összefüggés komplex  $z$  esetén is fennáll.

Utmutatás: Hozzuk  $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  komplex számot  $r_n e^{i\varphi_n}$  exponenciális alakra, majd vegyük figyelembe, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n e^{i\varphi_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \cdot e^{i \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n}$$

A 76. feladatban bizonyított tételt felhasználva számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

$$77. \quad z_n = \left(1 + i \frac{\pi}{2n}\right)^n,$$

$$78. \quad z_n = \left(1 + i \frac{\pi}{n}\right)^n$$

Vizsgáljuk a következő sorokat és amennyiben konvergensek, számítsuk ki az összegüket:

$$* 79. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k,$$

$$* 80. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^k$$

Vizsgáljuk a következő sorok konvergenciáját:

$$81. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n},$$

$$\boxed{82.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$$

Utmutatás a 82. feladat megoldásához:

Mutassuk meg mindenek előtt  $|s_n| = |e^i + e^{2i} + \dots + e^{ni}|$  korlátosságát.

Majd alkalmazzuk a következő tételt: Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  komplex tagu sor rész-

letösszegeinek abszolút értéke korlátos és  $b_1 > b_2 > \dots > b_n > \dots$  sorozat a zérushoz tart, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ végtelen sor konvergens.}$$

Jelen esetben  $a_n = e^{in}$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$  és így  $|s_n|$  korlátossága és

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \dots \rightarrow 0 \text{ miatt az idézett}$$

tétel értelmében a konvergencia feltételei teljesülnek.

#### IV. Függvényhatárérték és folytonosság

Vizsgáljuk a következő valós változós komplex értékű függvényeket a megadott  $t_0$  helyen határérték és folytonosság szempontjából:

83. 
$$z(t) = t + i \frac{\sin t}{t}, \quad t_0 = 0;$$

84. 
$$z(t) = t + i \sin \frac{1}{t}, \quad t_0 = 0;$$

\* 85. 
$$z(t) = \frac{1}{t} + i e^{\frac{1}{t-2}}, \quad t_0 = 2;$$

86. 
$$z(t) = \frac{it}{t^2 + 1}, \quad t_0 = i;$$

Számítsuk ki a következő határértékeket:

\* 87. 
$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{z^3 - a^3}{z - a},$$

88. 
$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 + 3z}{5z^2 - 9}$$

\* 89. 
$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{i(z^4 - 1)}$$

\* 90. 
$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{2(z^3 + z)}{i(z^2 + 1)}$$

**91.** Vizsgáljuk  $f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$  függvényt  $z_0 = 0$  helyen.

Értelmezzék az alábbi függvényeket  $|z| > 0$  esetben a közölt képletek. Vizsgáljuk őket a  $z_0 = 0$  helyen határérték és folytonosság szempontjából:

$$92. \quad f_1(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{1 + |z|},$$

$$93. \quad g_1(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{1 + |z|}$$

$$* 94. \quad f_2(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$$

$$* 95. \quad g_2(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$$

$$* 96. \quad f_3(z) = \frac{[\operatorname{Re}(z)]^2}{|z|}$$

$$* 97. \quad g_3(z) = \frac{[\operatorname{Im}(z)]^2}{|z|}$$

Vizsgáljuk a következő függvényeket  $z_0 = 0$  helyen:

$$98. \quad f(z) = e^{\frac{1}{|z|}}$$

$$99. \quad f(z) = e^{\frac{1}{\operatorname{Re}(z)}}$$

$$100. \quad f(z) = e^{\frac{1}{\operatorname{Im}(z)}}$$

Vizsgáljuk folytonosság szempontjából a következő függvényeket:

$$101. \quad f(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z = 0 \text{ vagy } |z| \text{ irracionális} \\ \frac{1}{q} & \text{ha } |z| = \frac{p}{q} \text{ racionális} \end{cases}$$

( $p$  és  $q$  pozitív egészek és relativ primek)



$$102. \quad f(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z = 0 \\ \sin \varphi & \text{ha } z = re^{i\varphi} \text{ és } r > 0 \end{cases}$$

**103.** Igazoljuk, hogy  $f(z) = z^n$  az egész nyílt síkon folytonos, azaz tetszőleges  $z_0$ -ra fennáll, hogy  $|z^n - z_0^n| < \varepsilon$  ha csak  $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ . Határozzuk meg  $\delta(\varepsilon)$  függvényt.

## V. Komplex függvények differenciálhatósága

Határozzuk meg a következő valós változós komplex függvények deriváltját a megadott helyen a derivált definíciója alapján:

$$\text{104.} \quad z(t) = \frac{i+t}{i-t}, \quad t = 1;$$

$$\text{105.} \quad z(t) = e^{(a+bi)t}, \quad t = t_0.$$

Határozzuk meg a következő valós változós komplex függvényekkel adott görbék érintő- és normálvektorát a  $t_0$  paraméterű pontban:

$$* 106. \quad z(t) = a e^{it} + b e^{-it}$$

$$* 107. \quad z(t) = e^{(a+bi)t}$$

Vizsgáljuk meg a derivált definíciója alapján, hogy differenciálhatók-e a következő komplex változós függvények:

$$\text{108.} \quad w(z) = z^3, \quad 109. \quad w(z) = \frac{1}{z},$$

$$110. \quad w(z) = \sqrt{z} \quad \text{111.} \quad w(z) = \frac{-2}{z^2},$$

$$\text{112.} \quad w(z) = z|z| \quad 113. \quad w(z) = z \operatorname{Re}(z)$$

A Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenletekkel vizsgáljuk a következő függvények differenciálhatóságát:

\* 114.  $f(z) = z^3,$

115.  $f(z) = \frac{1}{z},$

116.  $f(z) = e^z,$

\* 117.  $f(z) = \frac{-2}{z},$

118.  $f(z) = \frac{-2}{z^2}$

119.  $f(z) = \frac{1}{z}$

**120.** Mutassuk meg, hogy a következőképpen értelmezett komplex függvény az origóban folytonos, továbbá itt a Cauchy-Riemann féle differenciálegyenletek is teljesülnek és a függvény mégsem analitikus.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ ahol}$$

$$u(x, y) = v(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{ha } |x| + |y| > 0 \\ 0 & \text{ha } x = y = 0 \end{cases}$$

Ismeretes, hogy az  $f(z)$  komplex függvényt akkor mondjuk analitikusnak, ha a derivált független a  $\Delta z \rightarrow 0$  határmenet módjától. Ennek feltételét tehát két tetszőleges egymásra merőleges

$$\Delta z = \Delta s \cdot e^{i\alpha} \rightarrow 0 \text{ illetve } \Delta z = \Delta n \cdot ie^{i\alpha} \rightarrow 0$$

határmenettel képezett derivált egybevetése útján is megadhatjuk, legyen ugyanis  $w = u + iv$ , és így a kétféle derivált:

$$\frac{1}{e^{i\alpha}} \frac{\partial w}{\partial s} = e^{-i\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + i \frac{\partial v}{\partial s} \right)$$

illetve

$$\frac{1}{ie^{i\alpha}} \frac{\partial w}{\partial n} = e^{-i\alpha} \left( \frac{\partial v}{\partial n} - i \frac{\partial u}{\partial n} \right)$$

és innen az egybevetés eredményeképpen:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}$$

Ezek az egyenletek a Cauchy-Riemann féle feltételek általánosításának tekinthetők.

Mutassuk meg, hogy az általánosított Cauchy-Riemann feltételek  $w(z)=f(z)$  alább felsorolt megadásai esetén milyen alakot öltenek:

\* 121.  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

\* 122.  $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$

\* 123.  $f(z) = \rho(x, y) e^{i\psi(x, y)}$

\* 124.  $f(z) = \rho(r, \varphi) e^{i\psi(r, \varphi)}$

A Cauchy-Riemann féle feltételek polárkoordinátás alakjával vizsgáljuk meg, hogy analitikusak-e a következő függvények:

\* 125.  $f(z) = r^2 e^{2i\varphi}$

126.  $f(z) = \frac{1}{r} e^{-2i\varphi}$

127.  $f(z) = \sqrt{r} e^{\frac{i\varphi}{2}}$

\* 128.  $f(z) = \frac{r}{2} e^{2i\varphi}$

**129.** Ha  $w(x, y) = \rho(x, y) e^{i\psi(x, y)}$  függvény analitikus, akkor analitikusak-e az alábbi függvények:

$$w(x, y) = \rho(x, y) + i\psi(x, y)$$

$$w(x, y) = \ln \rho(x, y) + i\psi(x, y).$$

Az alább felsorolt  $u$  illetve  $v$  függvények lehetnek-e egy analitikus komplex függvény valós illetve képzetes részei? Amennyiben lehetnek, keressük meg harmonikus társukat és állítsuk elő az  $u + iv = f$  analitikus függvényt.

130.  $u(x, y) = 2x(1-y),$

131.  $v(x, y) = 3x^2 y - y^3,$

132.  $u(x, y) = e^x \cos y,$

133.  $v(x, y) = e^x \sin y,$

**134.**  $u(x, y) = \operatorname{sh} x \sin y,$

135.  $v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y$

136.  $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2},$

137.  $v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$

\* 138.  $u(r, \varphi) = \ln r,$

\* 139.  $v(r, \varphi) = r^2 \sin 2\varphi.$

(ahol  $r = |z|$  és  $\varphi = \arg z$ )

(A két utolsó feladat megoldásánál a Laplace operátor és a Cauchy-Riemann féle feltételek polárkoordinátás alakját használjuk.)

\* 140. Milyen kapcsolatnak kell fennállni  $a > 0$  és  $b > 0$  között, hogy  $u(x, y) = e^{-ax} \cos by$  egy  $f(z)$  analitikus függvény valós része lehessen. Határozzuk meg ezt az  $f(z)$  analitikus függvényt.

**141.** A komplex nabla operátort a következőképpen definiáljuk:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{és} \quad \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$$

Mutassuk meg, hogy egy analitikus  $f(z) = u + iv$  komplex függvény deriváltja a következő módon is előállítható:

$$2f'(z) = \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (u + iv).$$

\* 142. Bizonyítsuk be, hogy ha  $f = u + iv$  analitikus, akkor  $g = -v + iu$  is analitikus.

143. Bizonyítsuk be, hogy ha  $f(z)$  és  $\overline{f(z)}$  mindketten analitikusak, akkor  $f(z) = \text{konst.}$

\* 144. Mutassuk meg, hogy ha az  $f(z) = u + iv$  analitikus függvény egy síkáramlás komplex potenciálját jelenti, ahol "u" a sebességpotenciál "v" pedig az áramfüggvény, akkor a sebességpotenciál szintvonalai és az áramvonalak egy ortogonális trajektória-hálózatot képeznek.

## VI. Leképezések

145. Mutassuk meg, hogy a  $w = az + b$  leképezés egy nyújtás-zsugorítás, egy forgatás és egy eltolás szuperpozíciója. Számítsuk ki a leképezés helyben maradó pontját. Határozzuk meg a lokális vonalmenti nyújtás-zsugorítás, elforgatás és területtorzítás mértékét. Mit mondhatunk a leképezés konformitásáról?

146. Mutassuk meg, hogy a  $w = \frac{1}{z}$  leképezés a "z"-nek megfelelő pontot a "w"-nek megfelelő pontba az egységkörre való inverzió, majd a valós tengelyen való tükrözés útján viszi át. Konform-e a leképezés? Mit mondhatunk külön-külön az előbbi két lépés konformitásáról?

147. Mibe viszi át a  $w = \frac{1}{z}$  leképezés a "z" sík köreit és egyeneseit? Milyen görbe felel meg a "w" síkon az

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ hiperbolának?}$$

\* 148. Mutassuk meg, hogy a  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  lineáris törtfüggvény, (ahol a, b, c és d komplex együtthatók és  $ad - bc \neq 0$ ) egy lineáris egész, egy reciprokom majd ismét egy lineáris egész függvény láncolataként állítható elő.

- \* 149. Mibe viszi át a lineáris törtfüggvény a "z" sík köreit és egyeneseit?  
(Útmutatás: a "z" sík köreit és egyeneseit adjuk meg  $f(z, \bar{z})=0$  alakú egyenletekkel, majd alkalmazzuk az inverz leképezést.)

A következő lineáris egész függvények a "z" sík megadott tartományait a "w" sík mely tartományaira képezik le?

- \* 150.  $w = i(z+1)$  a  $\operatorname{Re}(z) > 0$  tartományt.  
 \* 151.  $w = (1+i)z$  az  $\operatorname{Im}(z) > 0$  tartományt.  
 \* 152.  $w = -(1z+1)$  a  $|z| < 1$  tartományt.  
 153.  $w = (1-1)z$  a  $|z| > 1$  tartományt.

Határozzuk meg azokat a lineáris egész függvényeket amelyek az alábbi "z" síkbeli tartományokat a mellettük feltüntetett "w" síkbeli tartományokra képezik le?

**154.**  $|z| < 1$  - et  $|w - 2(1+i)| < 3$ -ra

\* 155.  $|z - 1| > 2$ -t  $|w - 2i| > 1$ -re

A "w" sík mely tartományába viszi át a  $w = \frac{1}{z}$  leképezés a "z" sík-nak az alábbiakban adott tartományait?

**156.**  $0 < y < 1$ ;      157.  $x \geq 0, 0 \leq y \leq 1$ .

Határozzuk meg azokat a lineáris törtfüggvényeket, amelyek az alábbiakban adott  $z_1, z_2, z_3$  pontokat adott  $w_1, w_2, w_3$  pontokba viszik át:

**158.**  $z_1 = 2$  pontot  $w_1 = 1$  pontba,

$z_2 = 1$  "  $w_2 = i$  "

$z_3 = -2$  "  $w_3 = -1$  "

159.  $z_1 = -1$  pontot  $w_1 = -1$  pontba

$z_2 = 0$  "  $w_2 = i$  "

$z_3 = 1$  "  $w_3 = 1$  "

160.  $z_1 = 0$  pontot  $w_1 = -1$  pontba  
 $z_2 = 1$  "  $w_2 = 0$  "  
 $z_3 = \infty$  "  $w_3 = 1$  "
161.  $z_1 = \infty$  pontot  $w_1 = 0$  pontba  
 $z_2 = i$  "  $w_2 = 1$  "  
 $z_3 = 0$  "  $w_3 = \infty$  "

**162.** Mibe viszi át a

$$w = i \frac{1 - z}{1 + z} \text{ leképezés az } x = 0, y = 0$$

egyeneseket, és az  $x^2 + y^2 = 1$  kört?

\* 163. Mutassuk meg, hogy a

$$w(z) = \frac{2z + 1}{iz - 2}$$

lineáris törtfüggvény a "z" és "w" síkok origó középpontú egységsugarú köreit egymásra képezi le.

Határozzuk meg az alábbi leképezések helyben maradó (fix) pontjait:

164.  $w = \frac{z - 1}{z + 1}$

165.  $w = \frac{6z - 9}{z}$

\* 166. Határozzuk meg mindazokat a lineáris törtfüggvényeket, amelyek által létesített leképezéseknek két helyben maradó (fix) pontja:

$$z_1 = +1 \text{ és } z_2 = -1$$

\*167. Határozzuk meg, hogy az alábbi lineáris törtfüggvény-nyel adott leképezés a "z" síknak melyik tartományát felelteti meg az  $\text{Im}(w) > 0$  félsíknak?

$$w = \frac{z - c}{z + c} \quad (c > 0)$$

168. Mutassuk meg, hogy a

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \quad (\alpha \text{ valós, "a" komplex állandó és } |a| \neq 1)$$

alaku lineáris törtfüggvények által létesített leképezések az egységkört önmagára képezik le.

\* 169. Mutassuk meg, hogy a

$$w(z) = \frac{1}{z + i} \text{ függvény az } y \geq 0 \text{ félsíkot az}$$

$$u^2 + v^2 + v \leq 0 \text{ körtartományra képezi le.}$$

170. Milyen vonalakra képezi le a  $w = z^2$  leképezés a "z" sík  $y = \text{konst}$  és  $x = \text{konst}$  egyeneseit a "w" síkon?

171. Mutassuk meg, hogy a

$$w(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \text{ függvénnyel adott leképezés}$$

nem egy-egyértelmű. Milyen kapcsolat van a "z" sík azon pontjai között, amelyeknek a "w" síkon ugyanaz a pont felel meg? A "z" sík mely tartományaiban egy-egyértelmű a leképezés?

\* 172. Vizsgáljuk meg, hogy az előbbi leképezés a "w" síkon milyen görbékre képezi le a "z" sík origóból kiinduló sugarainak az egységkörön kívüli és belüli részét? Milyen görbékbe viszi át a "z" sík origó középpontú köreit?

Vizsgáljuk a következő komplex függvényekkel adott leképezéseket:

173.  $w(z) = e^z$

174.  $w(z) = \sin z$



Mutassuk meg, hogy mind a két függvény periódusos; határozzuk meg a periódusukat és jelöljük ki a "z" sík azon tartományait, amelyek az egész "w" síkra képeződnek le. A "z" sík  $x = \text{konst.}$  és  $y = \text{konst.}$  egyeneseinek milyen görbék felelnek meg a "w" síkon? Vannak-e olyan helyek ahol a leképezés nem konform?

## VII. Komplex függvények görbementi integrálja Cauchy-tétel

Számítsuk ki az alábbi improprius komplex paraméteres integrálokat, és adjuk meg, hogy ezek a komplex "p" paraméter mely tartományában konvergensek.

$$175. \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} dt .$$

$$176. \quad \int_0^{\infty} te^{-pt} dt .$$

$$177. \quad \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt .$$

$$178. \quad \int_0^{\infty} \cos at \cdot e^{-pt} dt$$

(t valós változó, a valós állandó)

Számítsuk ki a definíció alapján az alábbi komplex függvények görbementi integrálját az "a" és "b" komplex számoknak megfelelő pontok között tetszőleges görbe mentén.

179.

$$f(z) = 1$$

180.

$$f(z) = z$$

181. Számítsuk ki a következő görbemeneti integrált:

$$\oint_{(G)} \frac{dz}{z - z_0}$$

ahol a  $G$  görbe:  $z = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

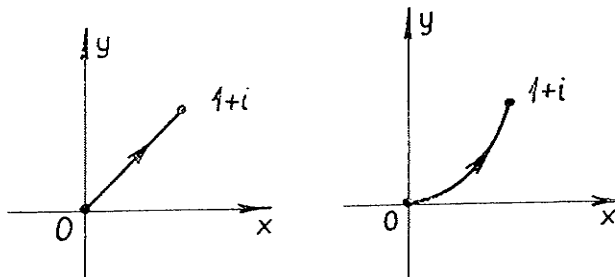
( $z_0$  komplex,  $r$  valós állandó)

Határozzuk meg az alábbi függvények integrálját az adott görbék mentén:

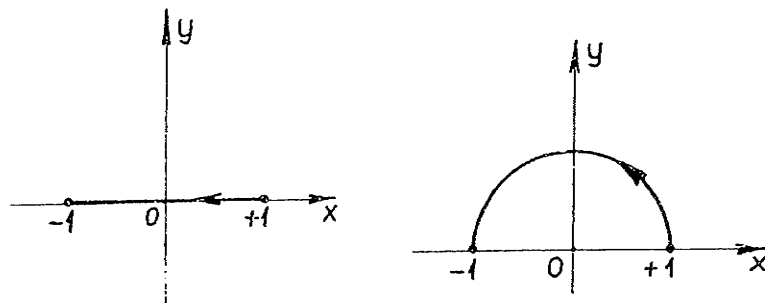
182.  $w(z) = z^2$   $G_1: z_1 = 0 \rightarrow z_2 = 1 + i$ , egyenes mentén.

$G_2: z_1 = 0 \rightarrow z_2 = 1 + i$ ,  $y = x^2$  parabolaiv mentén.

(182. a., és b., ábra)



182. a-b ábra



183. a-b ábra

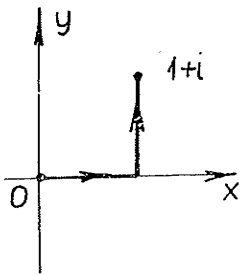
183.  $w(z)=z^2$   $G_1: z_1 = 1 \rightarrow z_2 = -1$  egyenes mentén.

$G_2: z_1 = 1 \rightarrow z_2 = -1, z(t) = e^{it}$  körívén.

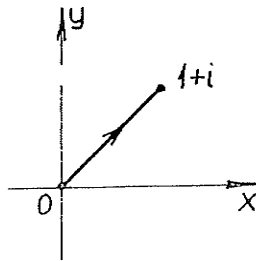
(183. a, és b. ábra)

\* 184.  $w(z)=\bar{z}$   $z_1 = 0 \rightarrow z_2 = 1+i$  az alábbi ábrákon feltüntetett vonalak mentén

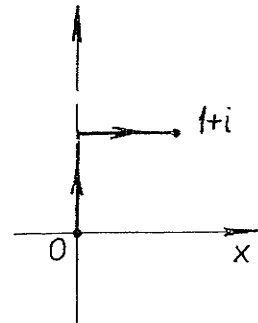
(183. a, b, c)



184. a ábra



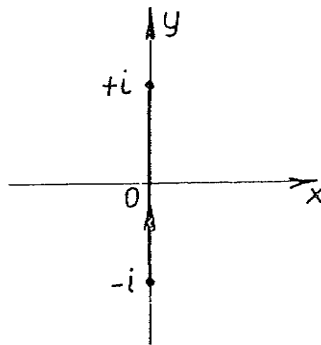
184. b ábra



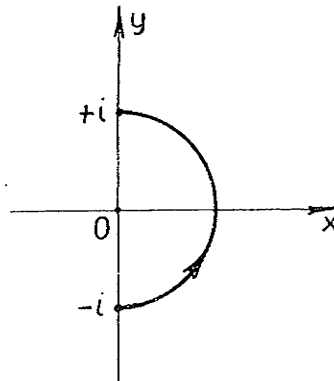
184. c ábra

185.  $w(z)=|z|$   $z_1 = -i \rightarrow z_2 = i$ . az alábbi ábrákon feltüntetett vonalak mentén

(185. a, és b)



185. a ábra

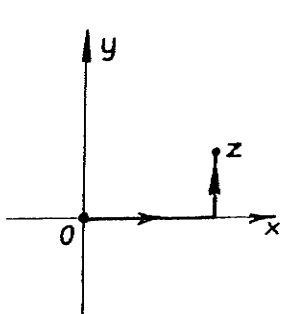


185. b ábra

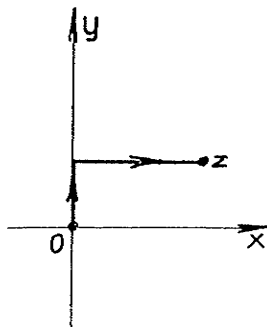
186. Kiszámítandó  $\oint_{(G)} (z - z_0)^m dz$

ahol  $G: z_0 + r(\cos t + i \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi, m$  egész

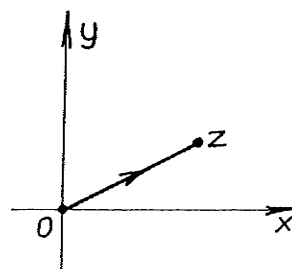
187. Számítsuk ki  $w(z) = 3z^2$  függvény integrálját 0 és  $z$  komplex számoknak megfelelő pontok között az alábbi ábrákon feltüntetett utak mentén. (187.a, b, c)



187.a ábra



187.b ábra



187.c ábra

Mutassuk meg, hogy az eredmény mindhárom esetben  $z^3$ . Mi ennek az oka?

A Cauchy formula alkalmazásával számítsuk ki a következő integrálokat az adott zárt görbék mentén:

188.  $\oint_{(G)} \frac{e^{iz} \sin^n z}{z - \frac{\pi}{2}} dz, G: |z - \frac{\pi}{2}| = 2$

189.  $\oint_{(G)} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 1} dz, G: |z - \frac{1}{2}| = 1$

190.  $\oint_{(G)} \frac{z^8 e^{\pi z}}{z^2 + 1} dz, G: |z - 1| = \frac{3}{2}$

Az integrálandó függvényeket bontsuk rész törtre, majd a Cauchy-tétel és formula alkalmazásával integráljunk az adott zárt görbék mentén:

$$* 191. \oint_{(G_k)} \frac{dz}{1+z^2}$$

$$G_1: |z - 5| = 1$$

$$G_2: |z - i| = 1$$

$$G_3: |z + i| = 1$$

$$G_4: |z| = 2$$

$$* 192. \oint_{(G_k)} \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$$

$$G_1: |z - 4i| = 1$$

$$G_2: |z| = \frac{1}{2}$$

$$G_3: |z - 1| = \frac{1}{2}$$

$$G_4: |z + 1| = \frac{3}{4}$$

$$G_5: |z| = 2$$

$$* 193. \oint_{(G)} \frac{dz}{z^4 + 1}, \quad x^2 + y^2 = 2x \text{ kör mentén.}$$

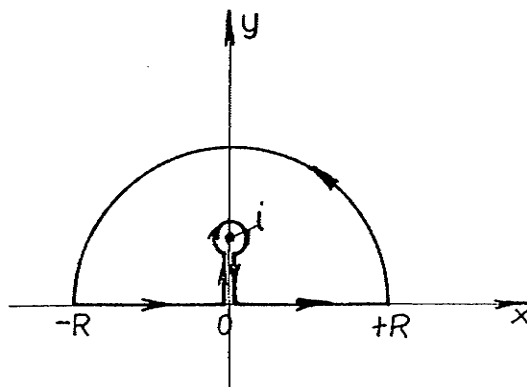
**194.** Számítsuk ki a Cauchy-tétel segítségével a következő valós improprius integrált:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$$

Utmutatás: Kiszámítjuk

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \text{ komplex}$$

függvény integrálját az ábrán látható görbe mentén a feltüntetett irányítás értelmében.



194. ábra

Az "i" szinguláris helyet kirekesztő kis körhöz és onnan visszavezető párhuzamos egyenes szakaszok mentén vett integrálok az ellentétes irányítás és a végzendő határátmenet miatt kiesnek, maradnak tehát a következő utak:

1. A valós tengely mentén  $-R$ -től  $+R$ -ig.
2. Az  $R$  sugaru felső félkör mentén.
3. A szinguláris helyet kizáró  $Q$  sugaru kör mentén. (194. ábra)

$R \rightarrow \infty$  és  $Q \rightarrow 0$  határátmenetek után a Cauchy-tétel egy egyenletet ad a kérdéses ismeretlen integrál meghatározására.

### VIII. Komplex hatványsorok, sorfejtések. Reziduum

Mely tartományban konvergensek a következő hatványsorok:

\* 195. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n},$$

\* 196. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{iz-1}{2+i} \right)^n,$$

Határozzuk meg a sorok összegét is.

Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergencia körének sugarát

197. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

198. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}, \quad \text{PÉR adott}$$

199. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^n$$

200. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^n z^n$$

Hogyan viselkednek a konvergenciakör kerületén a következő hatványsorok:

\* 201. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

\* 202. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{np}}{n}, \quad p \in \mathbb{R} \text{ adott}$$

Fejtsük Taylor sorba az alábbi függvényeket a megadott hely környezetében:

\* 203. 
$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad a = 1;$$

\* 204. 
$$f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad a = -1;$$

\* 205. 
$$f(z) = e^z, \quad a = 1;$$

\* 206. 
$$f(z) = \sin^2 z, \quad a = 0.$$

207. Állítsuk elő az

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

függvénynek az

az alábbi tartományokra érvényes Laurent-sorát:

- a)  $|z| < 1;$   
 b)  $1 < |z| < 2;$   
 c)  $2 < |z|.$

Utmutatás: Bontsuk fel a szóban forgó függvényt rész törtre és használjuk fel a geometriai sor összegképletét.

Fejtsük Laurent-sorba az alábbi függvényeket a megadott hely környezetében:

$$\boxed{208.} \quad f(z) = \frac{z^2 + z + 3}{z^2 - 1}, \quad a = 1.$$

Utmutatás:  $z - 1 = \xi$  jelöléssel vezessük be  $\xi$  -t változónak, majd a polinomok osztási eljárásával állítsuk elő a kívánt sort.

$$* 209. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^k}, \quad a = 0, \quad "k" \text{ pozitív egész szám.}$$

$$* 210. \quad f(z) = \frac{2z}{(z+1)^2(z-4)}, \quad a = -1 \text{ (Rész törtre való felbontással)}$$

Határozzuk meg az alábbi függvények reziduumát a megjelölt pólusra vonatkozólag.

$$\boxed{211.} \quad f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1}, \quad a = i;$$

$$\boxed{212.} \quad f(z) = \frac{e^{iz}}{\sin z}, \quad a = \pi$$

$$* 213. \quad f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2}, \quad a = 1.$$

Számítsuk ki a következő zárt görbementi integrálokat a görbe által körülzárta izolált szinguláris pontokra vonatkozó reziduumok meghatározása útján.

$$* 214. \quad \oint_{(G)} \frac{e^z - 1}{z^3} dz, \quad G: |z| = 2$$

$$* 215. \quad \oint_{(G)} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz, \quad G: |z| = 2$$



216. Számítsuk ki a reziduum tétel segítségével a következő valós improprius integrált:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$$

(Lásd a 194. feladatot, ahol ugyanezt az integrált a Cauchy-tétel felhasználásával kellett kiszámítani.)

217<sup>x</sup> Döntse el az alábbi kétdimenziós vektor-vektor függvényről, hogy van-e komplex potenciálja; ha van, akkor határozza meg azt.

$$\text{a) } \underline{p}(\underline{r}) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \underline{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \underline{j}$$

$$\text{b) } \underline{p}(\underline{r}) = \frac{\underline{i} + \underline{j}}{x + y}$$

218. A valós értékű  $k$  paraméter mely értéke mellett van a  $\underline{p}(\underline{r}) = \cos x \operatorname{ch} ky \underline{i} + \sin x \operatorname{sh} ky \underline{j}$  vektor-vektor függvénynek komplex potenciálja? Írja fel az ezen  $k$ -hoz tartozó potenciálfüggvényt.



# MEGOLDÁSOK



I.

$$1. \quad u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$2. \quad u(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1}, \quad v(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 2y + 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{z - i}{z + i} &= \frac{(z - i)(\bar{z} - i)}{(z + i)(\bar{z} - i)} = \frac{z\bar{z} - i(z + \bar{z}) - 1}{z\bar{z} - i(z - \bar{z}) + 1} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2ix - 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1} \text{ stb.} \end{aligned}$$

$$3. \quad u(x, y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$4. \quad u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

$$5. \quad u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y),$$

$$v(x, y) = e^x (y \cos y + x \sin y).$$

$$6. \quad u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$\ln z = \ln r e^{i\varphi} = \ln r + i\varphi, \quad r = |z|, \varphi = \operatorname{arc} z.$$

$$7. \quad u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v(x, y) = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \left[ e^{i(x + iy)} + e^{-i(x + iy)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^y) \end{aligned}$$

Alkalmazva az Euler formulát és rendezve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ (e^y + e^{-y}) \cos x - i (e^y - e^{-y}) \sin x \right] = \\ = \operatorname{ch} y \cos x - i \operatorname{sh} y \sin x. \end{aligned}$$

8.  $u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y.$

(Az előbbihez hasonlóan)

9.  $u(x, y) = \cos y \operatorname{ch} x, \quad v(x, y) = \sin y \operatorname{sh} x.$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} (e^{x+iy} + e^{-x-iy}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^x (\cos y + i \sin y) + e^{-x} (\cos y - i \sin y) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (e^x + e^{-x}) \cos y + i (e^x - e^{-x}) \sin y \right] \text{ stb.} \end{aligned}$$

10.  $u(x, y) = \cos y \operatorname{sh} x, \quad v(x, y) = \sin y \operatorname{ch} x.$

(Az előbbihez hasonlóan)

11.  $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad v(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

12.  $u(x, y) = \frac{2x}{x^2 - y^2} \quad v(x, y) = \frac{2y}{x^2 - y^2}$

13.  $w(z, \bar{z}) = \frac{4z}{z^2 + \bar{z}^2} \quad 14. w(z, \bar{z}) = \frac{z}{\bar{z}}$

A 13. és 14. feladat megoldásánál alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{és} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$15. \quad \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin n \frac{x}{2} \cdot \sin (n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$16. \quad \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin n \frac{x}{2} \cdot \cos (n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

Utmutatás a 15. és 16. feladat megoldásához: az Euler formula értelmében

$$\cos kx + i \sin kx = e^{ikx}$$

$$s = \sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1}$$

$e^{i \frac{x}{2}}$  = "a" jelölést bevezetve

$$s = a^2 \frac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1} = a^2 \frac{a^n (a^n - a^{-n})}{a (a - a^{-1})} = a^{n+1} \frac{a^n - a^{-n}}{a - a^{-1}}$$

$$a - a^{-1} = e^{i \frac{x}{2}} - e^{-i \frac{x}{2}} = 2i \sin \frac{x}{2}$$

$$a^n - a^{-n} = e^{in \frac{x}{2}} - e^{-in \frac{x}{2}} = 2i \sin n \frac{x}{2}$$

$$a^{n+1} = e^{i(n+1) \frac{x}{2}} = \cos (n+1) \frac{x}{2} + i \sin (n+1) \frac{x}{2}$$

$$\text{Tehát } s = \left[ \cos (n+1) \frac{x}{2} + i \sin (n+1) \frac{x}{2} \right] \frac{\sin n \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

ahonnan a valós és képzetes rész szétválasztása útján nyerjük a kívánt összegképleteket.

$$17. \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{1 - r \cos \varphi}{1 + r^2 - r \cos \varphi}$$

$$18. \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r \sin \varphi}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi}$$

Utmutatás a 17. és 18. feladat megoldásához

$$r^n \cos n\varphi + ir^n \sin n\varphi = r^n e^{in\varphi} \quad r < 1$$

Kiszámítjuk  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\varphi}$  konvergens végtelen mértani sor összegét, majd az összeg valós és képzetes részét szétválasztva kapjuk a kívánt összegképleteket.

$$19. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n!} = e^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \text{legyen } z = e^{i\varphi}$$

$$\text{ekkor: } e^{e^{i\varphi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n!}$$



mindkét oldalt felbontva valós és képzetes rész összegére:

$$e^{\cos \varphi + i \sin \varphi} = e^{\cos \varphi} \cdot e^{i \sin \varphi} = e^{\cos \varphi} \left[ \cos(\sin \varphi) + i \sin(\sin \varphi) \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \varphi + i \sin n \varphi}{n!}$$

A valós részek egybevetése útján kapjuk a kívánt összegképletet.

20. Használjuk fel a 8. feladatban kapott végeredményt.

$$|\sin(x + iy)|^2 = u^2 + v^2; \text{ stb.}$$

21.  $-i \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \psi}{2}$ , megoldás:

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{i\psi}}{e^{i\varphi} - e^{i\psi}} = \frac{(e^{i\varphi} + e^{i\psi})(e^{-i\varphi} - e^{-i\psi})}{(e^{i\varphi} - e^{i\psi})(e^{-i\varphi} - e^{-i\psi})} =$$

$$= \frac{e^{i(\psi - \varphi)} - e^{-i(\psi - \varphi)}}{2 - [e^{i(\psi - \varphi)} + e^{-i(\psi - \varphi)}]} = \frac{2i \sin(\psi - \varphi)}{2 - 2 \cos(\psi - \varphi)} =$$

$$= i \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\cos(\varphi - \psi) - 1} = i \frac{2 \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi - \psi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi - \psi}{2} - 1} =$$

$$= -i \frac{2 \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi - \psi}{2}} = -i \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \psi}{2}$$

II.

22. Origó középpontu, 2 egység sugaru zárt körtartomány.

23. Az előbbi zárt körtartomány komplementer tartománya.

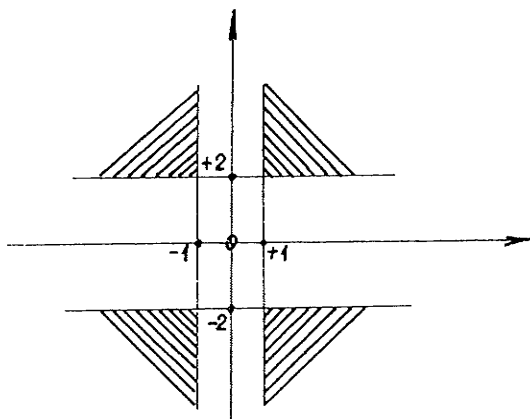
24. Az origó középpontu, 1 és 2 egység sugaru körök közti zárt körgyűrű tartomány.

25.  $|z| > \frac{1}{\xi}$ ,  $z = \infty$  pont környezete; azaz a számsíknak tetszőlegesen nagy sugaru origó középpontú zárt körtartományon kívül eső része.

26.  $|z - 1| < 1$ ,  $z_0 = 1$  középpontú egységsugaru kör belseje.

27.  $|z - (i - 1)| < 2$ ,  $z_0 = i - 1$  középpontú két egységnyi sugaru kör belseje.

28. (28. ábra) A határoló egyenesek nem tartoznak a megoldást jelentő bevonalkázott síkrészekhez.



28. ábra

29. Az  $y^2 = 1 - 2x$  parabola belseje a határvonallal együtt.

30.  $x \geq 0$ , a jobb oldali félsík az  $y$  tengelyt is beleértve.

31.  $(x-3)^2 + y^2 > 8$ ; a számsík  $z_0 = 3$  középpontú  $2\sqrt{2}$  sugaru körön kívül eső része a határvonal nélkül.

32.  $x^2 - y^2 = 0$ ;  $y = x$ ,  $y = -x$  egyenespár

33.  $x^2 - y^2 = 1$  hiperbola;

34.  $y^2 - x^2 = 1$  hiperbola.

35.  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,

36.  $xy = \frac{1}{2}$

37.  $xy = -\frac{1}{2}$

38.  $z_1 = 1$  és  $z_2 = -i$  pontoktól egyenlő távolságra eső pontok mértani helye,  $y = -x$  egyenes.

39. Azon pontok mértani helye, amelyeknek a  $z_1 = 1$  és  $z_2 = -1$  fix pontoktól való távolság-összege 4 egység. (Ellipszis)

40.  $|z - 1||z + 1| = \alpha$ . Azon pontok mértani helye, amelyekre nézve a  $z_1 = +1$  és  $z_2 = -1$  fix pontoktól való távolságok szorzata állandó. (A lemniszkáta három esete).

$$41. z + \bar{z} = 2c;$$

$$42. z - \bar{z} = 2ci;$$

$$43. z - \bar{z} - i(z + \bar{z}) = 0;$$

$$44. z - \bar{z} + i(z + \bar{z}) = 0;$$

$$45. z - \bar{z} + i(z + \bar{z}) = 4;$$

$$46. b(z - \bar{z}) + [a(z + \bar{z}) + 2c]i = 0.$$

A 41-46. feladatok megoldásánál az  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  és  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$  helyettesítést alkalmaztuk.

$$47. (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)z + (z_1 + z_2)\bar{z} + (z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1) = 0$$

Utmutatás: azon pontok mértani helye, amelyek az adott  $z_1$  és  $z_2$  pontoktól egyenlő távol vannak.

(47. ábra)

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

vagy

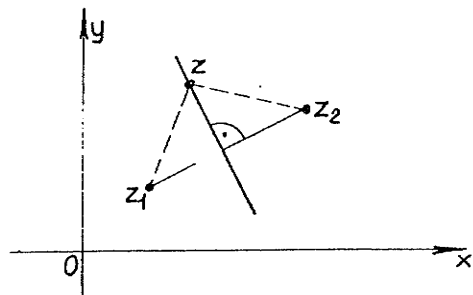
$$(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) = (z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_2)$$

innen rendezéssel kapjuk a fenti eredményt.

$$48. z\bar{z} = r^2$$

$$49. z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + z_0 \bar{z}_0 = r^2$$

Utmutatás:  $|z - z_0| = r$  vagy  $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$  stb.



47. ábra

$$50. \quad 2\bar{z}z + (a - bi)z + (a + bi)\bar{z} + 2c = 0$$

$$\text{Utmutatás: } x^2 + y^2 = \bar{z}z, \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

helyettesítés után megfelelő rendezéssel.

$$51. \quad x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad \text{ellipszis.}$$

$$52. \quad x = (a + b) \cos t, \quad y = (a - b) \sin t, \quad \text{ellipszis.}$$

$$53. \quad x = e^{at} \cos bt, \quad y = e^{at} \sin bt \quad \text{vagy} \quad r = e^{at}, \quad \varphi = bt$$

és így  $r = e^{\frac{a}{b}\varphi}$ , log spirális.

$$54. \quad x = at + b \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t$$

Közösleges, nyújtott, vagy hurkolt ciklois az  $a = b$ ,  $a < b$ ,  $a > b$  eseteknek megfelelően.

$$55. \quad x = t, \quad y = \frac{1}{t}; \quad t \neq 0 \quad \text{vagy} \quad xy = 1.$$

$$56. \quad x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = -\frac{2t}{1 + t^2};$$

ha  $t = \infty$  akkor  $x = -1, y = 0$ .

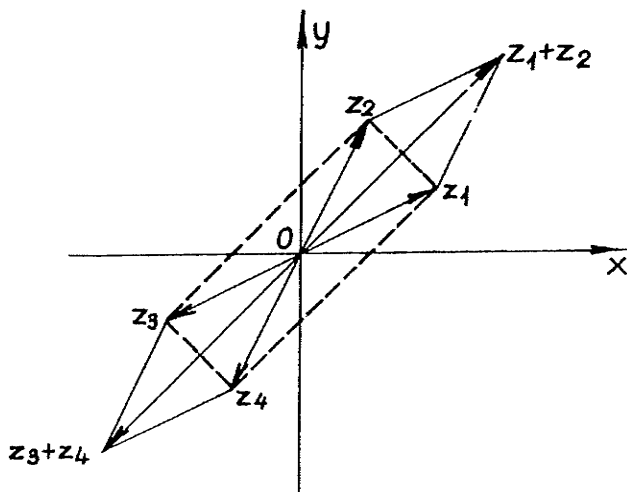
vagy a "t" paramétert kiküszöbölve:  $x^2 + y^2 = 1$ .

57. A  $z_1, z_2, z_3$  komplex számoknak megfelelő vektorokat irány és nagyság szerint egymás után felmérve szabályos vektorháromszöget kapunk. Innen látható, hogy az egymást közvetlenül követő vektorok arkuszának különbsége rendre:

$$\frac{2\pi}{3}.$$

58.  $z_1 + z_2 = -(z_3 + z_4)$  egyenlőségből látható, hogy a  $0, z_1, z_2, z_1 + z_2$  és a  $0, z_3, z_4, z_3 + z_4$  csúcspontokkal rendelkező két rombusz

egymásnak az origóra vonatkozó tükörképe. A  $z_1, z_2, z_3, z_4$  helyvektorok végpontjai tehát megfelelnek a feladat követelményeinek. (58. ábra)



58. ábra

III.

59. Nem. Az  $y^2 = 1-2x$  parabola belseje a határvonallal együtt.

60.  $0, \frac{1}{m+1}, \frac{i}{n+1}$ .

61. A számsík minden helye. A racionális számok halmaza megszámlálható, azaz elemei sorozatba foglalhatók; legyen ez a sorozat:  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$

A következő kétszeresen végtelen schéma a szóban forgó halmaz minden számát tartalmazza:

$$\begin{array}{llll}
 r_1 + ir_1, & r_1 + ir_2, & \dots & r_1 + ir_n \dots \dots \\
 r_2 + ir_1, & r_2 + ir_2, & \dots & r_2 + ir_n \dots \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 r_n + ir_1, & r_n + ir_2, & \dots & r_n + ir_n \dots \dots
 \end{array}$$

Azok a pontok, amelyeknél az indexek összege állandó, a fenti schéma egy-egy átlójában helyezkednek el; a  $p$ -edik átló elemei:

$$r_p + ir_1, \quad r_{p-1} + ir_2, \dots, \quad r_1 + ir_p.$$

A schéma számai tehát a  $p = 1, 2, 3, \dots$  átlók szerint sorozatba foglalhatók.

(A megszámlálható halmaz fogalmát lásd a "Matematika alapjai" című I. kötetben)

62. Nem, mert az összes lehetséges arkuszok fő-értékei a valós számok  $[0, 2\pi)$  alul zárt, felül nyitott intervallumának számai. A valós számok intervallumai pedig nem megszámlálható halmazok.

$$63. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-i}{n+1} = 1; \quad n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1, \text{ ugyanis:}$$

$$\left| 1 - \frac{n-i}{n+1} \right| = \left| \frac{1+i}{n+1} \right| = \frac{\sqrt{2}}{n+1} < \varepsilon \text{ stb.}$$

$$64. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2ni}{n+i} = 2i; \quad n > \sqrt{\frac{9}{\varepsilon^2} - 1} \text{ ugyanis:}$$

$$\left| 2i - \frac{1+2ni}{n+i} \right| = \frac{3}{\sqrt{n^2+1}} < \varepsilon \text{ stb.}$$

$$65. \text{ Nem korlátos, mert } \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2^n} = \infty$$

$$66. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i^n}{n}\right) = 1$$

$$67. \text{ Ha } n = 4k, \quad \text{akkor} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} i^{4k} \left(1 + \frac{1}{4k}\right) = 1$$

$$\text{Ha } n = 4k+1 \quad " \quad \lim_{k \rightarrow \infty} i^{4k+1} \left(1 + \frac{1}{4k+1}\right) = i$$

$$\text{ha } n = 4k+2 \quad " \quad \lim_{k \rightarrow \infty} i^{4k+2} \left(1 + \frac{1}{4k+2}\right) = -1$$

ha  $n = 4k + 3$  akkor  $\lim_{k \rightarrow \infty} i^{4k+3} \left(1 + \frac{1}{4k+3}\right) = -i$

A szóban forgó sorozat korlátos, sűrűsödési helyei: 1,  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$ , és így nem konvergens.

68. Konvergens, mert  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n = 0$  és így  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

69. Konvergens, mert  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2})^{2n}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$   
és így  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

70. Konvergens, mert  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n = 0$  és így  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

71. Nem korlátos, mert  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5})^n = \infty$

72. Konvergens, mert  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = 0$  és így  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

73. Konvergens,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(z_0 + \frac{1}{n} e^{in\varphi}\right) = z_0$

74.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i \frac{\pi}{n}} = 1$

75.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 2$ , de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n$  nem létezik.

A sorozat korlátos, de nem konvergens.

76.  $r_n = \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \right]^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \cdot \ln \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)$$

$\frac{0}{0}$  alakra hozva és a l'Hospital szabályt alkalmazva:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln r_n = x \quad \text{és így} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = e^x$$

Az előbbihez hasonló eljárással:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = y$$

$$\text{és így} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

$$77. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + i \frac{\pi}{2n} \right)^n = e^{i \frac{\pi}{2}} = i$$

$$78. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + i \frac{\pi}{n} \right)^n = e^{i\pi} = -1$$

79. Mértani sor; hányados:  $q = \frac{i}{2}$ ,  $|q| = \frac{1}{2}$  és így a sor konvergens

$$\text{Összeg: } \frac{1}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{2}{2 - i}$$

80. Mértani sor; hányados:  $q = \frac{1}{2}(1+i)$ ,  $|q| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  és így a sor konvergens

$$\text{Összeg: } \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(1+i)} = \frac{2}{1-i}$$



81. A sor abszolút konvergens, mert a tagok abszolút értékeiből képezett

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ sor konvergens.}$$

82.  $\{s_n\}$  korlátosságának igazolása:

$$|s_n| = |e^i + e^{2i} + \dots + e^{ni}| = \left| e^i \frac{e^{in} - 1}{e^i - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^i - 1|} = K$$

Az utmutatásban idézett tétel igazolása:

A szóban forgó sor konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele:

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| = \left| \sum_{v=n+1}^{n+p} a_v b_v \right| < \varepsilon \text{ ha csak } n > N(\varepsilon)$$

( $p > 1$ , ha  $p = 1$ , akkor a feltétel csak szükséges.)

Az Abel féle parciális összegezés értelmében:

$$\sum_{v=n+1}^{n+p} a_v b_v = \sum_{v=n+1}^{n+p} s_v (b_v - b_{v+1}) - (s_n b_{n+1} - s_{n+p} b_{n+p+1})$$

$$|s_n| < K \text{ és } b_1 > b_2 > \dots > b_n > \dots \rightarrow 0 \text{ miatt}$$

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| < K \left| \sum_{v=n+1}^{n+p} (b_v - b_{v+1}) - b_{n+1} + b_{n+p+1} \right| < \varepsilon$$

ha csak  $n > N(\varepsilon)$ , ami bizonyítandó volt.

Megjegyzés: Az előbbieket alapján nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n} \text{ sor is konvergens, ha } \varphi \neq 2k\pi, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Ha egy komplex tagokból álló sor konvergens, akkor külön a valós részek és külön a képzetes részek sora is konvergens, és így a szóban forgó komplex tagu sor konvergenciájából a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} \quad (\varphi \neq 2k\pi, \quad k=0, 1, \dots)$$

valós tagu Fourier sorok konvergenciája is következik.

IV.

$$83. \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left( t + i \frac{\sin t}{t} \right) = i;$$

$z(0) = 1$  értelmezéssel a függvény  $t = 0$  helyen is folytonos függvénné kiterjeszthető.

84. Sem jobb, sem bal oldali határérték nem létezik, mert  $\sin \frac{1}{t}$  függvény a  $t_0 = 0$  hely környezetében  $-1$  és  $+1$  között végtelen sokszor oszcillál.

85. Létezik jobb és bal oldali határérték, de ezek nem egyenlők egymással:

$$\lim_{t \rightarrow 2+0} z(t) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{t \rightarrow 2-0} z(t) = \frac{1}{2}$$

A függvénynek tehát  $t_0 = 2$  helyen nincs határértéke.

$$86. \quad \lim_{t \rightarrow i} \frac{it}{t^2 + 1} = -\infty$$

87.  $3a^2$ ;  $(z - a) \neq 0$  egyszerűsítéssel.

88.  $\infty$

$$89. \quad \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{i(z^2 - 1)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{i(z^2 - 1)} = \frac{i}{2}$$