BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKA PÉLDATÁR

Szerkesztette:
Monostory Iván

VII. kötet

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Összeállította:
Kelemen Mihály

Műegyetemi Kiadó, 2004.

(Tizedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040811**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 7,4 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 061/04

* A feladatok jelentős részének sorszáma előtt csillag jelzés található. Ezzel hivjuk fel a figyelmet arra, hogy a kötet második felében található megoldások között ezeknek a feladatoknak nem csupán a végeredményét közöljük, hanem a megoldás menetéhez utmutatást is adunk.

☐ A bekeretezett sorszámu feladatok megoldását részleteiben is kidolgoztuk, egyes esetekben több megoldást is közlünk.

A szerkesztő

Tartalomjegyzék

FELADATOK

I. Komplex függvények valós és képzetes rész összegére bontott alakja. Euler összefüggés

Hozzuk $u(x,y) + iv(x,y)$ alakra a következő komplex függvényeket:

1. $w(z) = \dfrac{z^2+1}{z}$, * 2. $w(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$, 3. $w(z) = \dfrac{w^2+1}{z}$,

4. $w(z) = e^z$, 5. $w(z) = z\,e^z$, 6. $w(z) = \ln z$,

$\boxed{7.}$ $w(z) = \cos z$, 8. $w(z) = \sin z$, * 9. $w(z) = \operatorname{ch} z$,

10. $w(z) = \operatorname{sh} z$, 11. $w(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$, 12. $w(z) = \dfrac{4z}{z^2+z^{-2}}$

Állitsuk elő $w(z)=f(z,\bar{z})$ alakban a következő komplex függvényeket:

* 13. $w(z) = 2\,\dfrac{x+iy}{x^2-y^2}$,

* 14. $w(z) = \dfrac{x^2-y^2+2\,xy\,i}{x^2+y^2}$

Az Euler formula felhasználásával adjunk zárt összegképleteket a következő összegekre, ahol $n \geq 1$ egész:

$\boxed{15.}$ $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$,

$\boxed{16.}$ $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$

Határozzuk meg a következő végtelen sorok összegét:

* 17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi$, * 18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi$.

(ahol r és φ valósak, továbbá $0 < r < 1$)

$\boxed{19.}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n!}$ (Vizsgáljuk $e^{e^{i\varphi}}$ Taylor sorát!)

Igazoljuk a következő azonosságokat.

* 20. $|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y = \mathrm{ch}^2 y - \cos^2 x.$

$\boxed{21.}$ $\frac{e^{i\varphi}+e^{i\vartheta}}{e^{i\varphi}-e^{i\vartheta}} = -i\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi-\vartheta}{2}$ (φ és ϑ valósak).

II. Tartományok, geometriai helyek és vonalak a komplex számsíkon

Jelöljük ki a komplex számsikon az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott tartományokat:

22. $|z| \leq 2,$ 23. $|z| > 2,$ 24. $1 \leq |z| \leq 2,$

25. $\frac{1}{|z|} < \varepsilon$ (ε tetszőleges kis pozitiv szám)

26. $\frac{1}{|z-1|} > 1,$ 27. $|z - i + 1| < 2,$

* 28. $|\mathrm{Re}z| > 1,\ |\mathrm{Im}z| > 2,$ 29. $|z| + \mathrm{Re}(z) \leq 1,$

30. $\left|\frac{z-i}{z+1}\right| \leq 1,$ 31. $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| < \sqrt{2}$

Határozzuk meg a komplex számsikon a következő egyenleteket kielégitő komplex számoknak megfelelő pontok mértani helyét:

32. $\mathrm{Re}(z^2) = 0,$ 33. $\mathrm{Re}(z^2) = 1,$

34. $\mathrm{Re}(z^2) = -1,$ 35. $\mathrm{Im}(z^2) = 0,$

36. $\operatorname{Im}(z^2) = 1,$ 37. $\operatorname{Im}(z^2) = -1,$

* 38. $|z - 1| = |z + i|$, * 39. $|z - 1| + |z + 1| = 4$

* 40. $|z^2 - 1| = \alpha$ $(0 < \alpha < 1;\ \alpha = 1;\ \alpha > 1$ esetekben)

Irjuk fel a következő egyenesek egyenletét z és $\bar{z}$ komplex változók segitségével:

* 41. $x = c,$ * 42. $y = c,$ (c valós állandó)

* 43. $y = x,$ * 44. $y = -x,$ * 45. $x + y = 2$

* 46. $ax + by + c = 0$ (a, b, c valós egyetthatók).

* 47. z_1 és z_2 adott komplex számoknak megfelelő pontok távolságát felező merőleges.

Irjuk fel a következő körök egyenletét z és $\bar{z}$ komplex változók segitségével:

48. Origó középpontu r sugaru kör.

* 49. P_o középpontu r sugaru kör. (P_o a z_o adott komplex számnak megfelelő pont.)

* 50. $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$ (a, b, c valósak).

Milyen görbék felelnek meg az alábbi valós "t" változótól függő elfajuló komplex függvénynek?

51. $z(t) = a \cos t + ib \sin t,$ $0 \leq t < 2\pi,$ $(a > 0, b > 0)$

52. $z(t) = ae^{it} + be^{-it},$ $0 \leq t < 2\pi$ $(a > 0,\ b > 0)$

53. $z(t) = e^{(a+bi)t},$ (a és b valós), $-\infty < t < \infty$.

54. $z(t) = at + be^{i\omega t}$ $t \geq 0$ $(a > 0,\ b > 0,\ \omega > 0)$.

55. $z(t) = t + \frac{i}{t}$, 56. $z(t) = \frac{i + t}{i - t}$

Igazoljuk a következő állitásokat:

[57.] Ha $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ és $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, akkor a szóban forgó komplex számoknak megfelelő pontok az origó középpontu egységkör kerületét három egyenlő részre osztják.

[58.] Ha $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ és $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$, akkor a szóban forgó komplex számoknak megfelelő pontok egy az origó középpontu egységkörbe irt derékszögü paralelogramma csucsai.

III. Komplex számokból álló halmazok
Komplex tagú sorozatok és sorok

59. Korlátos-e a $|z| + Re(z) \leqq 1$ egyenlőtlenséget kielégitő "z" komplex számok halmaza? Adjuk meg a komplex számsik azon tartományát, amelyet ezen halmaz elemeinek megfelelő pontok kitöltenek.

60. Adjuk meg az $\frac{1}{m+1} + \frac{i}{n+1}$ (m és n természetes számok) számhalmaz összes sürüsödési helyeit.

[61.] Adjuk meg azon $z = x + iy$ komplex számok halmazának összes sürüsödési helyeit, amelyeknél x is, meg y is racionális. Rendezzük e halmaz elemeit ugy, hogy azok számsorozatot alkossanak.

[62.] Sorozatba rendezhető-e az egységnyi abszolut értékü komplex számok halmaza?

Számitsuk ki a következő z_n, $n = 1, 2, \ldots$ sorozatok határértékét, és határozzuk meg, hogy hányadik tagtól kezdve lesz a sorozat tagjainak a határértéktől való eltérése adott $\varepsilon > 0$ számnál kisebb. (Mi lesz az ε-hoz tartozó $N(\varepsilon)$ küszöbszám?)

* 63. $z_n = \dfrac{n - i}{n + 1}$,

* 64. $z_n = \dfrac{1 + 2ni}{n + i}$

Vizsgáljuk a következő sorozatokat korlátosság, sürüsödési helyek és konvergencia szempontjából. Ha konvergensek, számitsuk ki határértéküket:

* 65. $z_n = (1-i)^n$, 66. $z_n = 1 + \frac{i^n}{n}$,

$\boxed{67.}$ $z_n = i^n (1+\frac{1}{n})$ * 68. $z_n = \left(\frac{2+i}{3}\right)^n$,

* 69. $z_n = \frac{(1+i)^{2n}}{3^n}$, * 70. $z_n = \frac{(\sqrt{2}+i)^n}{3^n}$,

* 71. $z_n = (2+i)^n$

* 72. $z_n = \frac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{(1+i)^n}$ (φ valós)

73. $z_n = z_0 + \frac{1}{n} e^{i\varphi n}$ (z_0 komplex, φ valós)

74. $z_n = (1 + \frac{1}{n}) e^{i\frac{\pi}{n}}$,

* 75. $z_n = (2 + \frac{3}{n}) e^{i\pi n}$.

$\boxed{76.}$ Ismeretes, hogy valós x esetén $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

Mutassuk meg, hogy ez az összefüggés komplex z esetén is fennáll.

Utmutatás: Hozzuk $(1 + \frac{z}{n})^n$ komplex számot $r_n e^{i\varphi_n}$ exponenciális alakra, majd vegyük figyelembe, hogy

$$\lim_{n\to\infty} r_n e^{i\varphi_n} = \lim_{n\to\infty} r_n \cdot e^{i \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n}$$

A 76. feladatban bizonyitott tételt felhasználva számitsuk ki a következő sorozatok határértékét:

77. $z_n = (1 + i\frac{\pi}{2n})^n$, 78. $z_n = (1 + i\frac{\pi}{n})^n$

Vizsgáljuk a következő sorokat és amennyiben konvergensek, számitsuk ki az összegüket:

* 79. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k$, *80. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)^k$

Vizsgáljuk a következő sorok konvergenciáját:

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$, $\boxed{82.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$

Utmutatás a 82. feladat megoldásához:

Mutassuk meg mindenek előtt $|s_n| = |e^i + e^{2i} + \ldots + e^{ni}|$ korlátosságát.

Majd alkalmazzuk a következő tételt: Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ komplex tagu sor részletösszegeinek abszolut értéke korlátos és $b_1 > b_2 > \ldots > b_n > \ldots$ sorozat a zérushoz tart, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ végtelen sor konvergens.}$$

Jelen esetben $a_n = e^{in}$, $b_n = \frac{1}{n}$ és igy $|s_n|$ korlátossága és

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \ldots \to 0 \text{ miatt az idézett}$$

tétel értelmében a konvergencia feltételei teljesülnek.

IV. Függvényhatárérték és folytonosság

Vizsgáljuk a következő valós változós komplex értékű függvényeket a megadott t_o helyen határérték és folytonosság szempontjából:

83. $$z(t) = t + i\,\frac{\sin t}{t}, \quad t_o = 0;$$

84 $$z(t) = t + i \sin\frac{1}{t}, \quad t_o = 0;$$

* 85. $$z(t) = \frac{1}{t} + i\, e^{\frac{1}{t-2}}, \quad t_o = 2;$$

86. $$z(t) = \frac{it}{t^2 + 1}, \quad t_o = i;$$

Számitsuk ki a következő határértékeket:

* 87. $$\lim_{z \to a} \frac{z^3 - a^3}{z - a},$$

88. $$\lim_{z \to \infty} \frac{z^3 + 3z}{5z^2 - 9}$$

* 89. $$\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{i(z^4 - 1)}$$

* 90. $$\lim_{z \to i} \frac{2(z^3 + z)}{i(z^2 + 1)}$$

$\boxed{91.}$ Vizsgáljuk $f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right)$ függvényt $z_o = 0$ helyen.

Értelmezzék az alábbi függvényeket $|z|>0$ esetben a közölt képletek. Vizsgáljuk őket a $z_o = 0$ helyen határérték és folytonosság szempontjából:

92. $$f_1(z) = \frac{Re(z)}{1+|z|},$$

93. $$g_1(z) = \frac{Im(z)}{1+|z|}$$

* 94. $$f_2(z) = \frac{Re(z)}{|z|}$$

* 95. $$g_2(z) = \frac{Im(z)}{|z|}$$

* 96. $$f_3(z) = \frac{[Re(z)]^2}{|z|}$$

* 97. $$g_3(z) = \frac{[Im(z)]^2}{|z|}$$

Vizsgáljuk a következő függvényeket $z_o = 0$ helyen:

98. $$f(z) = e^{\frac{1}{|z|}}$$

99. $$f(z) = e^{\frac{1}{Re(z)}}$$

100. $$f(z) = e^{\frac{1}{Im(z)}}$$

Vizsgáljuk folytonosság szempontjából a következő függvényeket:

101. $$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z = 0 \text{ vagy } |z| \text{ irracionális} \\ \frac{1}{q} & \text{ha } |z| = \frac{p}{q} \text{ racionális} \end{cases}$$

(p és q pozitiv egészek és relativ primek)

102. $f(z) = \begin{cases} 0, \text{ ha } z = 0 \\ \sin\varphi \text{ ha } z = re^{i\varphi} \text{ és } r > 0 \end{cases}$

$\boxed{103.}$ Igazoljuk, hogy $f(z) = z^n$ az egész nyilt sikon folytonos, azaz tetszőleges z_o-ra fennáll, hogy $|z^n - z_o^n| < \varepsilon$ hacsak $|z - z_o| < \delta(\varepsilon)$. Határozzuk meg $\delta(\varepsilon)$ függvényt.

V. Komplex függvények differenciálhatósága

Határozzuk meg a következő valós változós komplex függvények deriváltját a megadott helyen a derivált definiciója alapján:

$\boxed{104.}$ $z(t) = \dfrac{i+t}{i-t}$, $t = 1$;

$\boxed{105.}$ $z(t) = e^{(a+bi)t}$, $t = t_o$.

Határozzuk meg a következő valós változós komplex függvényekkel adott görbék érintő- és normálvektorát a t_o paraméterű pontban:

* 106. $z(t) = a\,e^{it} + b\,e^{-it}$

* 107. $z(t) = e^{(a+bi)t}$

Vizsgáljuk meg a derivált definiciója alapján, hogy differenciálhatók-e a következő komplex változós függvények:

$\boxed{108.}$ $w(z) = z^3$, 109. $w(z) = \dfrac{1}{z}$,

110. $w(z) = \sqrt{z}$ $\boxed{111.}$ $w(z) = z^{-2}$,

$\boxed{112.}$ $w(z) = z|z|$ 113. $w(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$

A Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenletekkel vizsgáljuk a következő függvények differenciálhatóságát:

*114.	$f(z) = z^3$,	115.	$f(z) = \frac{1}{z}$,
116.	$f(z) = e^z$,	* 117.	$f(z) = \bar{z}^2$,
118.	$f(z) = \bar{z}\, z^2$	119.	$f(z) = \frac{1}{\bar{z}^2}$

$\boxed{120.}$ Mutassuk meg, hogy a következőképpen értelmezett komplex függvény az origóban folytonos, továbbá itt a Cauchy-Riemann féle differenciálegyenletek is teljesülnek és a függvény mégsem analitikus.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{ahol}$$

$$u(x,y) = v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } |x|+|y| > 0 \\ 0 & \text{ha } x = y = 0 \end{cases}$$

Ismeretes, hogy az f(z) komplex függvényt akkor mondjuk analitikusnak, ha a derivált független a $\Delta z \to 0$ határátmenet módjától. Ennek feltételét tehát két tetszőleges egymásra merőleges

$$\Delta z = \Delta s \cdot e^{i\alpha} \to 0 \quad \text{illetve} \quad \Delta z = \Delta n \cdot ie^{i\alpha} \to 0$$

határmenettel képezett derivált egybevetése utján is megadhatjuk, legyen ugyanis $w = u + iv$, és igy a kétféle derivált:

$$\frac{1}{e^{i\alpha}} \frac{\partial w}{\partial s} = e^{-i\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial s} + i\frac{\partial v}{\partial s}\right)$$

illetve

$$\frac{1}{ie^{i\alpha}} \frac{\partial w}{\partial n} = e^{-i\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial n} - i\frac{\partial u}{\partial n}\right)$$

és innen az egybevetés eredményeképpen:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}$$

Ezek az egyenletek a Cauchy-Riemann féle feltételek általánositásának tekinthetők.

Mutassuk meg, hogy az általánositott Cauchy-Riemann feltételek $w(z)=f(z)$ alább felsorolt megadásai esetén milyen alakot öltenek:

* 121. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

* 122. $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$

* 123. $f(z) = \varrho(x,y)\, e^{i\vartheta(x,y)}$

* 124. $f(z) = \varrho(r,\varphi)\, e^{i\vartheta(r,\varphi)}$

A Cauchy-Riemann féle feltételek polárkoordinátás alakjával vizsgáljuk meg, hogy analitikusak-e a következő függvények:

* 125. $f(z) = r^2 e^{2i\varphi}$

126. $f(z) = \frac{1}{r^2} e^{-2i\varphi}$

127. $f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$ * 128. $f(z) = \frac{r}{2} e^{2i\varphi}$

$\boxed{129.}$ Ha $w(x,y)=\varrho(x,y)e^{i\vartheta(x,y)}$ függvény analitikus, akkor analitikusak-e az alábbi függvények:

$$w(x,y) = \varrho(x,y) + i\vartheta(x,y)$$

$$w(x.y) = \ln \varrho(x,y) + i\vartheta(x,y).$$

Az alább felsorolt u illetve v függvények lehetnek-e egy analitikus komplex függvény valós illetve képzetes részei? Amennyiben lehetnek, keressük meg harmonikus társukat és állitsuk elő az $u + iv = f$ analitikus függvényt.

130. $u(x,y) = 2x(1-y)$,

131. $v(x,y) = 3x^2 y - y^3$,

132. $u(x,y) = e^x \cos y$,

133. $v(x,y) = e^x \sin y$,

$\boxed{134.}$ $u(x,y) = \operatorname{sh} x \sin y$,

135. $v(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y$

136. $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$,

137. $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$

* 138. $u(r, \varphi) = \ln r$,

* 139. $v(r, \varphi) = r^2 \sin 2\varphi$.

(ahol $r = |z|$ és $\varphi = \operatorname{arc} z$)

(A két utolsó feladat megoldásánál a Laplace operátor és a Cauchy--Riemann féle feltételek polárkoordinátás alakját használjuk.)

* 140. Milyen kapcsolatnak kell fennállni $a > 0$ és $b > 0$ között, hogy $u(x,y)=e^{-ax}\cos b y$ egy $f(z)$ analitikus függvény valós része lehessen. Határozzuk meg ezt az $f(z)$ analitikus függvényt.

$\boxed{141.}$ A komplex nabla operátort a következőképpen definiáljuk:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{és} \quad \overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$$

Mutassuk meg, hogy egy analitikus $f(z) = u + iv$ komplex függvény deriváltja a következő módon is előállitható:

$$2 f'(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (u + iv).$$

$\ast$ 142. Bizonyitsuk be, hogy ha $f = u + iv$ analitikus, akkor $g = -v + i\,u$ is analitikus.

$\boxed{143.}$ Bizonyitsuk be, hogy ha $f(z)$ és $\overline{f(z)}$ mindketten analitikusak, akkor $f(z) = \text{konst.}$

$\ast$ 144. Mutassuk meg, hogy ha az $f(z) = u + iv$ analitikus függvény egy sikáramlás komplex potenciálját jelenti, ahol "u" a sebességpotenciál "v" pedig az áramfüggvény, akkor a sebességpotenciál szintvonalai és az áramvonalak egy ortogonális trajektória-hálózatot képeznek.

VI. Leképezések

$\boxed{145.}$ Mutassuk meg, hogy a $w = az + b$ leképezés egy nyujtás-zsugoritás, egy forgatás és egy eltolás szuperpoziciója. Számitsuk ki a leképezés helyben maradó pontját. Határozzuk meg a lokális vonalmenti nyujtás-zsugoritás, elforgatás és területtorzitás mértékét. Mit mondhatunk a leképezés konformitásáról?

$\boxed{146.}$ Mutassuk meg, hogy a $w = \frac{1}{z}$ leképezés a "z"-nek megfelelő pontot a "w"-nek megfelelő pontba az egységkörre való inverzió, majd a valós tengelyen való tükrözés utján viszi át. Konform-e a leképezés? Mit mondhatunk külön-külön az előbbi két lépés konformitásáról?

$\boxed{147.}$ Mibe viszi át a $w = \frac{1}{z}$ leképezés a "z" sik köreit és egyeneseit? Milyen görbe felel meg a "w" sikon az

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ hiperbolának?}$$

$\ast$ 148. Mutassuk meg, hogy a

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$ lineáris törtfüggvény, (ahol a, b, c és d komplex együtthatók és $ad-bc \neq 0$) egy lineáris egész, egy reciprok majd ismét egy lineáris egész függvény láncolataként állitható elő.

* 149. Mibe viszi át a lineáris törtfüggvény a "z" sík köreit és egyeneseit?
(Útmutatás: a "z" sík köreit és egyeneseit adjuk meg $f(z,\bar{z})=0$ alakú egyenletekkel, majd alkalmazzuk az inverz leképezést.)

A következő lineáris egész függvények a "z" sík megadott tartományait a "w" sík mely tartományaira képezik le?

* 150. $w = i(z+1)$ a $Re(z) > 0$ tartományt.

* 151. $w = (1+i)z$ az $Im(z) > 0$ tartományt.

* 152. $w = -(iz+1)$ a $|z| < 1$ tartományt.

153. $w = (i-1)z$ a $|z| > 1$ tartományt.

Határozzuk meg azokat a lineáris egész függvényeket amelyek az alábbi "z" síkbeli tartományokat a mellettük feltüntetett "w" síkbeli tartományokra képezik le?

$\boxed{154.}$ $|z| < 1$ - et $|w - 2(1+i)| < 3$-ra

* 155. $|z - i| > 2$-t $|w - 2i| > 1$-re

A "w" sík mely tartományaiba viszi át a $w = \frac{1}{z}$ leképezés a "z" síknak az alábbiakban adott tartományait?

$\boxed{156.}$ $0 < y < 1$; 157. $x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1.$

Határozzuk meg azokat a lineáris törtfüggvényeket, amelyek az alábbiakban adott z_1, z_2, z_3 pontokat adott w_1, w_2, w_3 pontokba viszik át:

$\boxed{158.}$

$z_1 = 2$ pontot $w_1 = 1$ pontba,
$z_2 = i$ " $w_2 = i$ "
$z_3 = -2$ " $w_3 = -1$ "

159.

$z_1 = -1$ pontot $w_1 = -1$ pontba
$z_2 = 0$ " $w_2 = i$ "
$z_3 = 1$ " $w_3 = 1$ "

160. $z_1 = 0$ pontot $w_1 = -i$ pontba

$z_2 = 1$ " $w_2 = 0$ " .

$z_3 = \infty$ " $w_3 = i$ "

161. $z_1 = \infty$ pontot $w_1 = 0$ pontba

$z_2 = i$ " $w_2 = i$ "

$z_3 = 0$ " $w_3 = \infty$ "

162. Mibe viszi át a

$w = i\,\dfrac{1 - z}{1 + z}$ leképezés az $x = 0$, $y = 0$

egyeneseket, és az $x^2 + y^2 = 1$ kört?

* 163 Mutassuk meg, hogy a

$$w(z) = \frac{2z + i}{iz - 2}$$

lineáris törtfüggvény a "z" és "w" sikok origó középpontu egységsugaru köreit egymásra képezi le.

Határozzuk meg az alábbi leképezések helyben maradó (fix) pontjait:

164. $$w = \frac{z - 1}{z + 1}$$

165. $$w = \frac{6z - 9}{z}$$

* 166. Határozzuk meg mindazokat a lineáris törtfüggvényeket, amelyek által létesitett leképezéseknek két helyben maradó (fix) pontja:

$$z_1 = +1 \quad \text{és} \quad z_2 = -1$$

*167. Határozzuk meg, hogy az alábbi lineáris törtfüggvénnyel adott leképezés a "z" siknak melyik tartományát felelteti meg az $\mathrm{Im}(w) > 0$ félsiknak?

$$w = \frac{z - c^2}{z + c} \qquad (c > 0)$$

$\boxed{168.}$ Mutassuk meg, hogy a

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \qquad (\alpha \text{ valós, "a" komplex állandó és } |a| \neq 1)$$

alaku lineáris törtfüggvények által létesitett leképezések az egységkört önmagára képezik le.

* 169. Mutassuk meg, hogy a

$w(z) = \frac{1}{z + i}$ függvény az $y \geq 0$ félsikot az

$u^2 + v^2 + v \leq 0$ körtartományra képezi le.

$\boxed{170.}$ Milyen vonalakra képezi le a $w = z^2$ leképzés a "z" sik $y = \text{konst}$ és $x = \text{konst}$ egyeneseit a "w" sikon?

$\boxed{171.}$ Mutassuk meg, hogy a

$w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ függvénnyel adott leképezés

nem egy-egyértelmü. Milyen kapcsolat van a "z" sik azon pontjai között, amelyeknek a "w" sikon ugyanaz a pont felel meg? A "z" sik mely tartományaiban egy-egyértelmü a leképzés?

* 172. Vizsgáljuk meg, hogy az előbbi leképezés a "w" sikon milyen görbékre képezi le a "z" sik origóból kiinduló sugarainak az egységkörön kivüli és belüli részét? Milyen görbékbe viszi át a "z" sik origó középpontu köreit?

Vizsgáljuk a következő komplex függvényekkel adott leképezéseket:

$\boxed{173.}$ $w(z) = e^z$

$\boxed{174.}$ $w(z) = \sin z$

Mutassuk meg, hogy mind a két függvény periódusos; határozzuk meg a periodusukat és jelöljük ki a "z" sik azon tartományait, amelyek az egész "w" sikra képeződnek le. A "z" sik $x = \text{konst.}$ és $y = \text{konst.}$ egyeneseinek milyen görbék felelnek meg a "w" sikon? Vannak-e olyan helyek ahol a leképezés nem konform?

VII. Komplex függvények görbementi integrálja Cauchy-tétel

Számitsuk ki az alábbi improprius komplex paraméteres integrálokat, és adjuk meg, hogy ezek a komplex "p" paraméter mely tartományában konvergensek.

175. $$\int_0^\infty e^{-pt}\,dt\,.$$

176. $$\int_0^\infty te^{-pt}dt\,.$$

177. $$\int_0^\infty e^{at}\,e^{-pt}\,dt.$$

178. $$\int_0^\infty \cos at . e^{-pt}\,dt$$

(t valós változó, a valós állandó)

Számitsuk ki a definició alapján az alábbi komplex függvények görbementi integrálját az "a" és "b" komplex számoknak megfelelő pontok között tetszőleges görbe mentén.

$\boxed{179.}$ $f(z) = 1$

$\boxed{180.}$ $f(z) = z$

$\boxed{181.}$ Számitsuk ki a következő görbemeneti integrált:

$$\oint_{(G)} \frac{dz}{z - z_0}$$

ahol a G görbe: $z = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

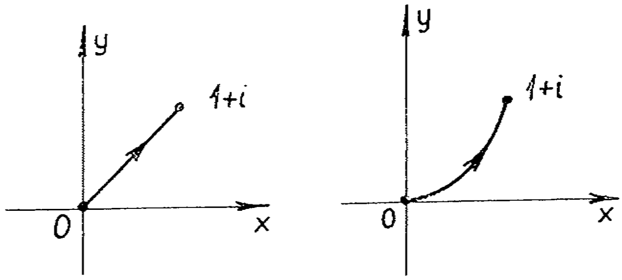
(z_0 komplex, r valós állandó)

Határozzuk meg az alábbi függvények integrálját az adott görbék mentén:

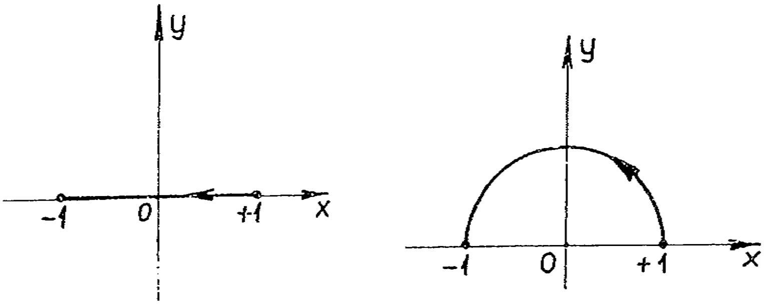
$\boxed{182.}$ $w(z)=z^2$ $G_1: z_1 = 0 \longrightarrow z_2 = 1 + i$, egyenes mentén.

$G_2: z_1 = 0 \longrightarrow z_2 = 1 + i$, $y = x^2$ parabolaiv mentén.

(182.a., és b., ábra)



182.a-b ábra



183.a-b ábra

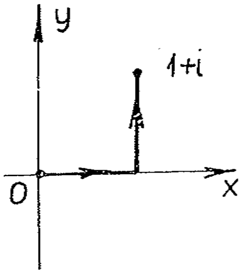
$\boxed{183.}$ $w(z)=z^2$ G_1: $z_1 = 1 \to z_2 = -1$ egyenes mentén.

G_2: $z_1 = 1 \to z_2 = -1$, $z(t) = e^{it}$ körívén.

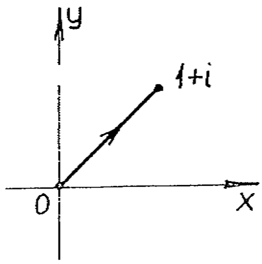
(183.a, és b. ábra)

∗ 184. $w(z)=\overline{z}$ $z_1 = 0 \to z_2 = 1 + i$ az alábbi ábrákon feltüntetett vonalak mentén

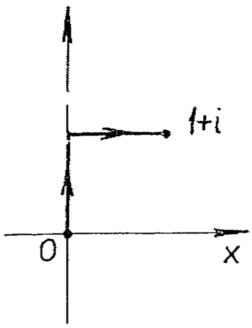
(183. a, b, c)



184.a ábra



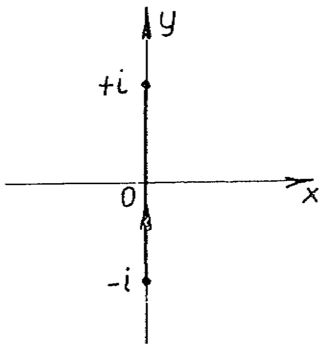
184.b ábra



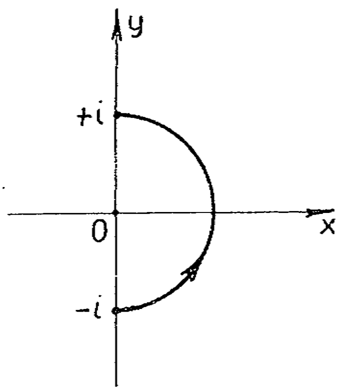
184.c ábra

$\boxed{185.}$ $w(z)=|z|$ $z_1 = -i \to z_2 = i$. az alábbi ábrákon feltüntetett vonalak mentén

(185.a, és b)



185.a ábra

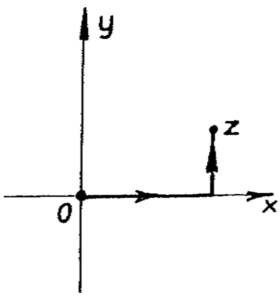


185.b ábra

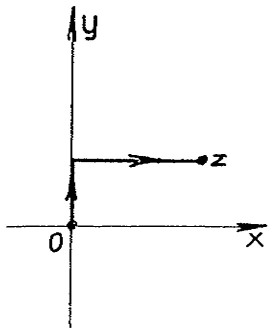
$\boxed{186.}$ Kiszámitandó $\oint\limits_{(G)} (z - z_0)^m dz$

ahol $G: z_0 + r(\cos t + i \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, m egész

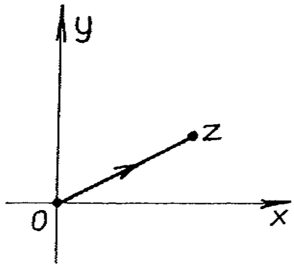
$\boxed{187.}$ Számitsuk ki $w(z)=3z^2$ függvény integrálját 0 és z komplex számoknak megfelelő pontok között az alábbi ábrákon feltüntetett utak mentén. (187.a, b, c)



187.a ábra



187.b ábra



187.c ábra

Mutassuk meg, hogy az eredmény mindhárom esetben z^3. Mi ennek az oka?

A Cauchy formula alkalmazásával számítsuk ki a következő integrálokat az adott zárt görbék mentén:

$\boxed{188.}$ $\oint\limits_{(G)} \frac{e^{iz} \sin^n z}{z - \frac{\pi}{2}} dz$, $G: | z$ [illegible] $| = 2$

$\boxed{189.}$ $\oint\limits_{(G)} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 1} dz$, $G: \left| z - \frac{1}{2} \right| = 1$

$\boxed{190.}$ $\oint\limits_{(G)} \frac{z^8 e^{\pi z}}{z^2 + 1} dz$, $G: | z - 1 | = \frac{3}{2}$

Az integrálandó függvényeket bontsuk résztörtekre, majd a Cauchy-tétel és formula alkalmazásával integráljunk az adott zárt görbék mentén.

* 191. $\displaystyle\oint_{(G_k)} \frac{dz}{1+z^2}$

$G_1: |z-5| = 1$

$G_2: |z-i| = 1$

$G_3: |z+i| = 1$

$G_4: |z| = 2$

* 192. $\displaystyle\oint_{(G_k)} \frac{dz}{z(z^2-1)}$

$G_1: |z-4i| = 1$

$G_2: |z| = \frac{1}{2}$

$G_3: |z-1| = \frac{1}{2}$

$G_4: |z+1| = \frac{3}{4}$

$G_5: |z| = 2$

* 193. $\displaystyle\oint_{(G)} \frac{dz}{z^4+1}$, $x^2+y^2 = 2x$ kör mentén.

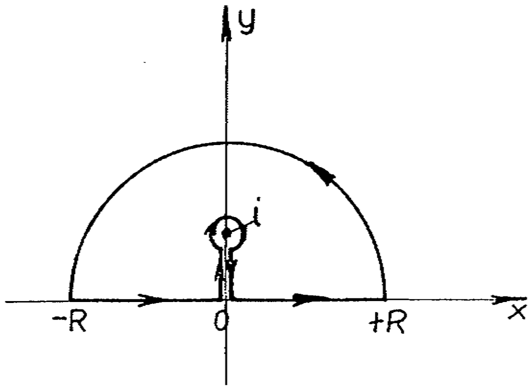
$\boxed{194.}$ Számitsuk ki a Cauchy-tétel segitségével a következő valós improprius integrált:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$$

Utmutatás: Kiszámitjuk

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1} \quad \text{komplex}$$

függvény integrálját az ábrán látható görbe mentén a feltüntetett irányitás értelmében.



194. ábra

Az "i" szinguláris helyet kirekesztő kis körhöz és onnan visszavezető párhuzamos egyenes szakaszok mentén vett integrálok az ellentétes irányitás és a végzendő határátmenet miatt kiesnek, maradnak tehát a következő utak:

1. A valós tengely mentén -R-től +R-ig.
2. Az R sugaru felső félkör mentén.
3. A szinguláris helyet kizáró ϱ sugaru kör mentén. (194. ábra)

$R \to \infty$ és $\varrho \to 0$ határátmenetek után a Cauchy-tétel egy egyenletet ad a kérdéses ismeretlen integrál meghatározására.

VIII. Komplex hatványsorok, sorfejtések. Reziduum

Mely tartományban konvergensek a következő hatványsorok:

* 195. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n},$$

*196. $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iz-1}{2+i}\right)^n,$$

Határozzuk meg a sorok összegét is.

Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergencia körének sugarát

197. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

198. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}, \quad p \in R \text{ adott}$$

199. $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^n$$

200. $$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^n z^n$$

Hogyan viselkednek a konvergenciakör kerületén a következő hatványsorok:

*201. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

*202. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{np}}{n}, \quad p \in R \text{ adott}$$

Fejtsük Taylor sorba az alábbi függvényeket a megadott hely környezetében:

*203. $f(z) = \frac{1}{z}$, $a = 1$;

*204. $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $a = -1$;

*205. $f(z) = e^z$, $a = 1$;

*206. $f(z) = \sin^2 z$, $a = 0$.

207. Állitsuk elő az

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$ függvénynek az

az alábbi tartományokra érvényes Laurent-sorát:

a) $|z| < 1$;

b) $1 < |z| < 2$;

c) $2 < |z|$.

Utmutatás: Bontsuk fel a szóban forgó függvényt résztörtekre és használjuk fel a geometriai sor összegképletét.

Fejtsük Laurent-sorba az alábbi függvényeket a megadott hely környezetében:

$\boxed{208.}$ $$f(z) = \frac{z^2 + z + 3}{z^2 - 1}, \quad a = 1.$$

Utmutatás: $z - 1 = \zeta$ jelöléssel vezessük be ζ -t változónak, majd a polinomok osztási eljárásával állitsuk elő a kivánt sort.

* 209. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^k}$, $a = 0$, "k" pozitiv egész szám.

* 210. $f(z) = \dfrac{2z}{(z+1)^2(z-4)}$, $a = -1$ (Résztörtekre való felbontással)

Határozzuk meg az alábbi függvények reziduumát a megjelölt pólusra vonatkozólag.

$\boxed{211.}$ $$f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1}, \quad a = i;$$

$\boxed{212.}$ $$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sin z}, \quad a = \pi$$

* 213. $$f(z) = \frac{z^3}{(z - 1)^2} \quad a = 1.$$

Számitsuk ki a következő zárt görbementi integrálokat a görbe által körülzárt izolált szinguláris pontokra vonatkozó reziduumok meghatározása utján.

* 214. $$\oint_{(G)} \frac{e^z - 1}{z^3}\,dz, \quad G: |z| = 2$$

* 215. $$\oint_{(G)} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1}\,dz \quad G: |z| = 2$$

216. Számitsuk ki a reziduum tétel segitségével a következő valós improprius integrált:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$$

(Lásd a 194. feladatot, ahol ugyanezt az integrált a Cauchy-tétel felhasználásával kellett kiszámitani.)

217* Döntse el az alábbi kétdimenziós vektor-vektor függvényről, hogy van-e komplex potenciálja; ha van, akkor határozza meg azt.

a) $\underline{p}(\underline{r}) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \underline{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \underline{j}$

b) $\underline{p}(\underline{r}) = \frac{\underline{i} + \underline{j}}{x + y}$

218. A valós értékü k paraméter mely értéke mellett van a $\underline{p}(\underline{r}) = \cos x \operatorname{ch} ky\, \underline{i} + \sin x \operatorname{sh} k y\, \underline{j}$ vektor-vektor függvénynek komplex potenciálja? Irja fel az ezen k-hoz tartozó potenciálfüggvényt.

MEGOLDÁSOK

I.

1. $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\qquad v(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

2. $u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+2y+1}$ $\qquad v(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2+2y+1}$

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{(z-i)(\bar{z}-i)}{(z+i)(\bar{z}-i)} = \frac{z\bar{z}-i(z+\bar{z})-1}{z\bar{z}-i(z-\bar{z})+1} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2ix-1}{x^2+y^2+2y+1} \text{ stb.}$$

3. $u(x,y) = x + \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\qquad v(x,y) = y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

4. $u(x,y) = e^x \cos y$, $\qquad v(x,y) = e^x \sin y$.

5. $u(x,y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$,

$$v(x,y) = e^x (y \cos y + x \sin y).$$

6. $u(x,y) = \dfrac{1}{2} \ln (x^2+y^2)$, $\qquad v(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

$$\ln z = \ln re^{i\varphi} = \ln r + i\varphi, \qquad r = |z|, \ \varphi = \operatorname{arc} z.$$

7. $u(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y$, $\qquad v(x,y) = -\sin x \operatorname{sh} y$.

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^{y}\right)$$

Alkalmazva az Euler formulát és rendezve:

$$\frac{1}{2}\left[(e^{y}+e^{-y})\cos x - i\,(e^{y}-e^{-y})\sin x\right]=$$

$$= \operatorname{ch} y \cos x - i \operatorname{sh} y \sin x.$$

8. $u(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y,$ $\qquad v(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y.$

(Az előbbihez hasonlóan)

9. $u(x,y) = \cos y \operatorname{ch} x,$ $\qquad v(x,y) = \sin y \operatorname{sh} x.$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\,(e^{x+iy}+e^{-x-iy}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x}(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(e^{x}+e^{-x})\cos y + i\,(e^{x}-e^{-x})\sin y\right] \text{ stb.}$$

10. $u(x,y) = \cos y \operatorname{sh} x,$ $\qquad v(x,y) = \sin y \operatorname{ch} x.$

(Az előbbihez hasonlóan)

11. $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\qquad v(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

12. $u(x,y) = \dfrac{2x}{x^2-y^2}$ $\qquad v(x,y) = \dfrac{2y}{x^2-y^2}$

13. $w(z,\bar{z}) = \dfrac{4z}{z^2+\bar{z}^2}$ $\qquad$ 14. $w(z,\bar{z}) = \dfrac{z}{\bar{z}}$

A 13. és 14. feladat megoldásánál alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \text{és} \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

15. $$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin n\frac{x}{2} \cdot \sin (n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

16. $$\sum_{k=1}^{n} \cos k x = \frac{\sin n\frac{x}{2} \cdot \cos (n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

Utmutatás a 15. és 16. feladat megoldásához: az Euler formula értelmében

$$\cos k x + i \sin k x = e^{ikx}$$

$$s = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1}$$

$e^{i\frac{x}{2}}$ = "a" jelölést bevezetve

$$s = a^2 \frac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1} = a^2 \frac{a^n(a^n - a^{-n})}{a(a - a^{-1})} = a^{n+1} \frac{a^n - a^{-n}}{a - a^{-1}}$$

$$a - a^{-1} = e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}} = 2 i \sin \frac{x}{2}$$

$$a^n - a^{-n} = e^{in\frac{x}{2}} - e^{-in\frac{x}{2}} = 2 i \sin n\frac{x}{2}$$

$$a^{n+1} = e^{i(n+1)\frac{x}{2}} = \cos (n+1)\frac{x}{2} + i \sin (n+1)\frac{x}{2}$$

$$\text{Tehát } s = \left[\cos (n+1)\frac{x}{2} + i \sin (n+1)\frac{x}{2}\right] \frac{\sin n\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

ahonnan a valós és képzetes rész szétválasztása utján nyerjük a kivánt összegképleteket.

17. $$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{1 - r\cos\varphi}{1 + r^2 - r\cos\varphi}$$

18. $$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi}$$

Utmutatás a 17. és 18. feladat megoldásához

$$r^n \cos n\varphi + i r^n \sin n\varphi = r^n e^{in\varphi} \qquad r < 1$$

Kiszámitjuk $\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\varphi}$ konvergens végtelen mértani sor összegét, majd az összeg valós és képzetes részét szétválasztva kapjuk a kivánt összegképleteket.

19. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n!} = e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \qquad \text{legyen } z = e^{i\varphi}$$

$$\text{ekkor: } \quad e^{e^{i\varphi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n!}$$

mindkét oldalt felbontva valós és képzetes rész összegére:

$$e^{\cos\varphi + i\sin\varphi} = e^{\cos\varphi} \cdot e^{i\sin\varphi} = e^{\cos\varphi}\left[\cos(\sin\varphi) + i\sin(\sin\varphi)\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}{n!}$$

A valós részek egybevetése utján kapjuk a kivánt összegképletet.

20. Használjuk fel a 8. feladatban kapott végeredményt.

$$|\sin(x+iy)|^2 = u^2 + v^2; \text{ stb.}$$

21. $-i\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi-\vartheta}{2}$, megoldás:

$$\frac{e^{i\varphi}+e^{i\vartheta}}{e^{i\varphi}-e^{i\vartheta}} = \frac{(e^{i\varphi}+e^{i\vartheta})(e^{-i\varphi}-e^{-i\vartheta})}{(e^{i\varphi}-e^{i\vartheta})(e^{-i\varphi}-e^{-i\vartheta})} =$$

$$= \frac{e^{i(\vartheta-\varphi)}-e^{-i(\vartheta-\varphi)}}{2-\left[e^{i(\vartheta-\varphi)}+e^{-i(\vartheta-\varphi)}\right]} = \frac{2i\sin(\vartheta-\varphi)}{2-2\cos(\vartheta-\varphi)} =$$

$$= i\,\frac{\sin(\varphi-\vartheta)}{\cos(\varphi-\vartheta)-1} = i\,\frac{2\cdot\sin\frac{\varphi-\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\vartheta}{2}}{\cos^2\frac{\varphi-\vartheta}{2}-\sin^2\frac{\varphi-\vartheta}{2}-1} =$$

$$= -i\,\frac{2\sin\frac{\varphi-\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\vartheta}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi-\vartheta}{2}} = -i\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi-\vartheta}{2}$$

II.

22. Origó középpontu, 2 egység sugaru zárt körtartomány.

23. Az előbbi zárt körtartomány komplementer tartománya.

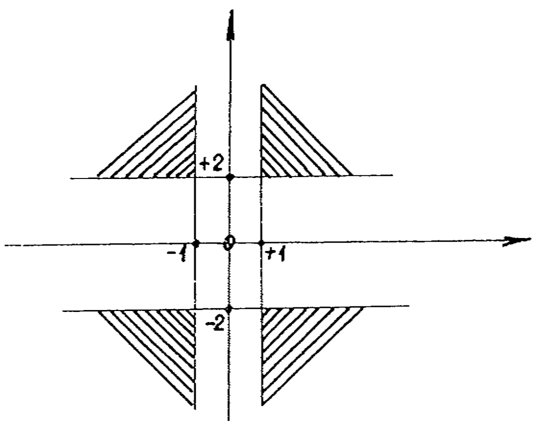
24. Az origó középpontu, 1 és 2 egység sugaru körök közti zárt körgyürü tartomány.

25. $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$, $z = \infty$ pont környezete; azaz a számsiknak tetszőlegesen nagy sugaru origó középpontu zárt körtartományon kívül eső része.

26. $|z - 1| < 1$, $z_0 = 1$ középpontu egységsugaru kör belseje.

27. $|z - (i - 1)| < 2$, $z_0 = i - 1$ középpontu két egységnyi sugaru kör belseje.

28. (28. ábra) A határoló egyenesek nem tartoznak a megoldást jelentő bevonalkázott sikrészekhez.



28. ábra

29. Az $y^2 = 1 - 2x$ parabola belseje a határvonallal együtt.

30. $x \geq 0$, a jobb oldali félsik az y tengelyt is beleértve.

31. $(x-3)^2 + y^2 > 8$; a számsik $z_0 = 3$ középpontu $2\sqrt{2}$ sugaru körön kívül eső része a határvonal nélkül.

32. $x^2 - y^2 = 0$; $y = x$, $y = -x$ egyenespár

33. $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola;

34. $y^2 - x^2 = 1$ hiperbola.

35. $x = 0$, $y = 0$,

36. $xy = \frac{1}{2}$

37. $xy = -\frac{1}{2}$

38. $z_1 = 1$ és $z_2 = -i$ pontoktól egyenlő távolságra eső pontok mértani helye, $y = -x$ egyenes.

39. Azon pontok mértani helye, amelyeknek a $z_1 = 1$ és $z_2 = -1$ fix pontoktól való távolság-összege 4 egység. (Ellipszis)

40. $|z - 1||z + 1| = \alpha$. Azon pontok mértani helye, amelyekre nézve a $z_1 = +1$ és $z_2 = -1$ fix pontoktól való távolságok szorzata állandó. (A lemniszkáta három esete).

41. $z + \bar{z} = 2c$; 42. $z - \bar{z} = 2ci$;

43. $z - \bar{z} - i(z + \bar{z}) = 0$;

44. $z - \bar{z} + i(z + \bar{z}) = 0$;

45. $z - \bar{z} + i(z + \bar{z}) = 4$;

46. $b(z - \bar{z}) + [a(z + \bar{z}) + 2c]\, i = 0$.

A 41-46. feladatok megoldásánál az $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ és $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ helyettesitést alkalmaztuk.

47. $$(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)z + (z_1 + z_2)\bar{z} + (z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1) = 0$$

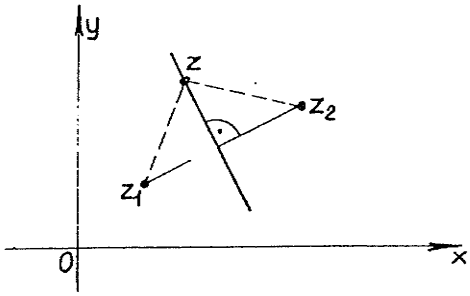
Utmutatás: azon pontok mértani helye, amelyek az adott z_1 és z_2 pontoktól egyenlő távol vannak.
(47. ábra)

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

vagy

$$(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) = (z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_2)$$

innen rendezéssel kapjuk a fenti eredményt.



47. ábra

48. $z\bar{z} = r^2$

49. $$z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = r^2$$

Utmutatás: $|z - z_0| = r$ vagy $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$ stb.

50. $2z\bar{z} + (a - bi)z + (a + bi)\bar{z} + 2c = 0$

Utmutatás: $x^2 + y^2 = z\bar{z}$, $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

helyettesités után megfelelő rendezéssel.

51. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, ellipszis.

52. $x = (a + b) \cos t$, $y = (a - b) \sin t$, ellipszis.

53. $x = e^{at} \cos bt$, $y = e^{at} \sin bt$ vagy $r = e^{at}$, $\varphi = bt$

és igy $r = e^{\frac{a}{b}\varphi}$, log spirális.

54. $x = at + b \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$

Közönséges, nyujtott, vagy hurkolt ciklois az $a = b$, $a < b$, $a > b$ eseteknek megfelelően.

55. $x = t$, $y = \dfrac{1}{t}$; $t \neq 0$ vagy $xy = 1$.

56. $x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $y = -\dfrac{2t}{1 + t^2}$;

ha $t = \infty$ akkor $x = -1$, $y = 0$.

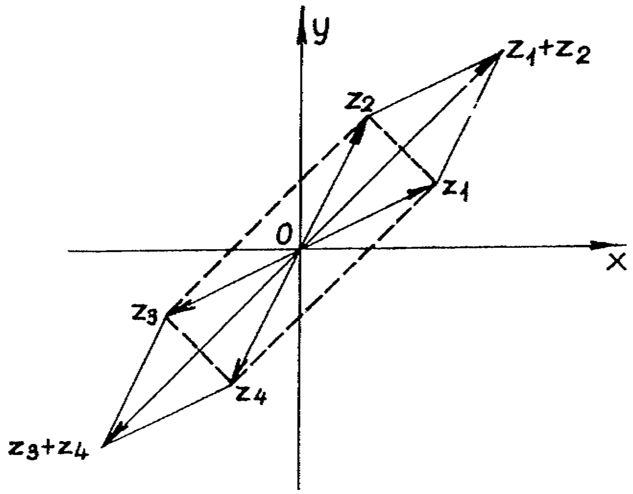
vagy a "t" paramétert kiküszöbölve: $x^2 + y^2 = 1$.

57. A z_1, z_2, z_3 komplex számoknak megfelelő vektorokat irány és nagyság szerint egymás után felmérve szabályos vektorháromszöget kapunk. Innen látható, hogy az egymást közvetlenül követő vektorok arkuszának különbsége rendre:

$$\frac{2\pi}{3}.$$

58. $z_1 + z_2 = -(z_3 + z_4)$ egyenlőségből látható, hogy a 0, z_1, z_2, $z_1 + z_2$ és a 0, z_3, z_4, $z_3 + z_4$ csucspontokkal rendelkező két rombusz

egymásnak az origóra vonatkozó tükörképe. A z_1, z_2, z_3, z_4 helyvektorok végpontjai tehát megfelelnek a feladat követelményeinek. (58. ábra)



58. ábra

III.

59. Nem. Az $y^2 = 1-2x$ parabola belseje a határvonallal együtt.

60. $0, \frac{1}{m+1}, \frac{i}{n+1}$.

61. A számsík minden helye. A racionális számok halmaza megszámlálható, azaz elemei sorozatba foglalhatók; legyen ez a sorozat: r_1, r_2, r_3, $\dots r_n, \dots$

A következő kétszeresen végtelen schéma a szóban forgó halmaz minden számát tartalmazza:

$$\begin{array}{llll}
r_1 + ir_1, & r_1 + ir_2, & \dots\dots r_1 + ir_n & \dots\dots\dots \\
r_2 + ir_1, & r_2 + ir_2, & \dots\dots r_2 + ir_n & \dots\dots\dots \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
r_n + ir_1, & r_n + ir_2, & \dots\dots r_n + ir_n & \dots\dots\dots
\end{array}$$

Azon elemek, amelyeknél az indexek összege állandó, a fenti schéma egy-egy átlójában helyezkednek el; a p-edik átló elemei:

$$r_p + ir_1, \qquad r_{p-1} + ir_2, \; \dots , \qquad r_1 + ir_p .$$

A schema számai tehát a $p = 1, 2, 3, \dots$ átlók szerint sorozatba foglalhatók.
(A megszámlálható halmaz fogalmát lásd a "Matematika alapjai" cimü I. kötetben)

62. Nem, mert az összes lehetséges arkuszok fő-értékei a valós számok $[0, 2\pi)$ alul zárt, felül nyitott intervallumának számai. A valós számok intervallumai pedig nem megszámlálható halmazok.

63. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n - i}{n + 1} = 1;$ $\qquad n > \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1$, ugyanis:

$$\left| 1 - \frac{n - i}{n + 1} \right| = \left| \frac{1 + i}{n + 1} \right| = \frac{\sqrt{2}}{n + 1} < \varepsilon \quad \text{stb.}$$

64. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 2ni}{n + i} = 2i;$ $\qquad n > \sqrt{\dfrac{9}{\varepsilon^2} - 1}$ ugyanis:

$$\left| 2i - \frac{1 + 2ni}{n + i} \right| = \frac{3}{\sqrt{n^2 + 1}} < \varepsilon \quad \text{stb.}$$

65. Nem korlátos, mert $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{2^n} = \infty$

66. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{i^n}{n}\right) = 1$

67. Ha $n = 4k$, akkor $\lim\limits_{k \to \infty} i^{4k} \left(1 + \dfrac{1}{4k}\right) = 1$

Ha $n = 4k + 1$ " $\lim\limits_{k \to \infty} i^{4k+1} \left(1 + \dfrac{1}{4k+1}\right) = i$

ha $n = 4k + 2$ " $\lim\limits_{k \to \infty} i^{4k+2} \left(1 + \dfrac{1}{4k+2}\right) = -1$

ha $n = 4k+3$ akkor $\lim\limits_{k \to \infty} i^{4k+3}\left(1+\frac{1}{4k+3}\right) = -i$

A szóban forgó sorozat korlátos, sürüsödési helyei: 1, i, -1, -i, és igy nem konvergens.

68. Konvergens, mert $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n = 0$ és igy $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$

69. Konvergens, mert $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{2})^{2n}}{3^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

és igy $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$

70. Konvergens, mert $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n = 0$ és igy $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$

71. Nem korlátos, mert $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{5})^n = \infty$

72. Konvergens, mert $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = 0$ és igy $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$

73. Konvergens, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(z_0 + \frac{1}{n} e^{in\varphi}\right) = z_0$

74. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) e^{i\frac{\pi}{n}} = 1$

75. $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = 2$, de $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{arc} z_n$ nem létezik.

A sorozat korlátos, de nem konvergens.

76. $r_n = \left[\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2}\right]^n$

$$\lim_{n\to\infty} \ln r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)$$

$\frac{0}{0}$ alakra hozva és a l' Hospital szabályt alkalmazva:

$$\lim_{n\to\infty} \ln r_n = x \qquad \text{és igy} \qquad \lim_{n\to\infty} r_n = e^x$$

Az előbbihez hasonló eljárással:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} n \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = y$$

$$\text{és igy} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

77. $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + i\frac{\pi}{2n}\right)^n = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

78. $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + i\frac{\pi}{n}\right)^n = e^{i\pi} = -1$$

79. Mértani sor; hányados: $q = \frac{i}{2}$, $|q| = \frac{1}{2}$ és igy a sor konvergens

$$\text{Összeg: } \frac{1}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{2}{2 - i}$$

80. Mértani sor; hányados: $q = \frac{1}{2}(1 + i)$, $|q| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ és igy a sor konvergens

$$\text{Összeg: } \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(1+i)} = \frac{2}{1 - i}$$

81. A sor abszolut konvergens, mert a tagok abszolut értékeiből képezett

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{sor konvergens.}$$

82. $|s_n|$ korlátosságának igazolása:

$$|s_n| = \left| e^i + e^{2i} + \ldots + e^{ni} \right| = \left| e^i \frac{e^{in} - 1}{e^i - 1} \right| \leq \frac{2}{\left| e^i - 1 \right|} = K$$

Az utmutatásban idézett tétel igazolása:
A szóban forgó sor konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele:

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| = \left| \sum_{v=n+1}^{n+p} a_v b_v \right| < \varepsilon \quad \text{hacsak } n > N(\varepsilon)$$

(p > 1, ha p = 1, akkor a feltétel csak szükséges.)
Az Abel féle parciális összegezés értelmében:

$$\sum_{v=n+1}^{n+p} a_v b_v = \sum_{v=n+1}^{n+p} s_v (b_v - b_{v+1}) - (s_n b_{n+1} - s_{n+p} b_{n+p+1})$$

$$|s_n| < K \text{ és } b_1, > b_2 > \ldots > b_n > \ldots \to 0 \text{ miatt}$$

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| < K \left| \sum_{v=n+1}^{n+p} (b_v - b_{v+1}) - b_{n+1} + b_{n+p+1} \right| < \varepsilon$$

hacsak $n > N(\varepsilon)$, ami bizonyitandó volt.

Megjegyzés: Az előbbiek alapján nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n} \quad \text{sor is konvergens, ha } \varphi \neq 2k\pi, \ (k = 0, 1, 2\ldots)$$

Ha egy komplex tagokból álló sor konvergens, akkor külön a valós részek és külön a képzetes részek sora is konvergens, és igy a szóban forgó komplex tagu sor konvergenciájából a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} \qquad (\varphi \neq 2k\pi\,, \quad k = 0, 1, \dots)$$

valós tagu Fourier sorok konvergenciája is következik.

IV.

83. $$\lim_{t \to 0} \left(t + i\,\frac{\sin t}{t}\right) = i;$$

$z(0) = 1$ értelmezéssel a függvény $t = 0$ helyen is folytonos függvénnyé kiterjeszthető.

84. Sem jobb, sem bal oldali határérték nem létezik, mert $\sin \frac{1}{t}$ függvény a $t_o = 0$ hely környezetében -1 és $+1$ között végtelen sokszor oszcillál.

85. Létezik jobb és bal oldali határérték, de ezek nem egyenlők egymással:

$$\lim_{t \to 2+0} z(t) = \infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{t \to 2-0} z(t) = \frac{1}{2}$$

A függvénynek tehát $t_o = 2$ helyen nincs határértéke.

86. $$\lim_{t \to i} \frac{it}{t^2 + 1} = -\infty$$

87. $3a^2$; $(z - a) \neq 0$ egyszerüsitéssel.

88. ∞

89, $$\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{i(z^4 - 1)} = \lim_{z \to i} \frac{1}{i(z^2 - 1)} = \frac{i}{2}$$