

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Császár Ákosné

MATEMATIKA I/1.



Műegyetemi Kiadó, 2003.

(Negyedik utánnyomás)

Azonosító: 050357

**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó**
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 33,6 (A/5) ív
Nyomta és kötötte:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 102/03

Bevezetés

A reformterv szellemében írt új matematika-jegyzet a régebbinél lényegesen nagyobb anyagot új csoportosításban foglal magában. Hogy ez a megnövekedett anyag az első tanuláskor se tűnjék senki számára áttekinthetetlen anyag-halmaznak, gépelés-technikával igyekeztünk kiemelni azokat az anyagrészeket, melyek alapvetően fontosak a továbbhaladás, az alkalmazások szempontjából. Az anyagban elmélyülni akarók számára tett megjegyzéseket, az első tanuláskor elhagyható bizonyításokat, nagyobb margóval gépeltük és baloldalt szaggatott vonással jelöltük meg. Ezen utóbbi részek kihagyása esetén is teljes egészet alkot a jegyzet.

Külön aláhúzással szerepelnek a jegyzetben azok a definíciók, amelyekkel az alapvető fogalmakat meghatározzuk, ezeket értelmszerűen mindenkinek tudnia kell. Ugyanez áll az aláhúzással kiemelt állításokra, és a fontosabb állításokat kimondó tételekre is.

A jegyzet anyagát a matematikában tanultaknak az alaptárgyak és alapozó szaktárgyakban való jobb felhasználása érdekében a régebbi jegyzethez képest átcsoportosítottuk. A fenti szempontnak sokszor alávetettük didaktikai szempontokat, az ebből eredő nehézségeken is a leglényegesebb anyagrészek kiemelésével, kihangsúlyozásával igyekeztünk segíteni.

Azokat a fontosabb tételeket, melyekre későbbi tárgyalásainkban is többször hivatkozunk, bizonyítjuk is, de minden kimondott tétel bizonyítására - a jegyzet korlátozott terjedelme miatt - nem törekedhettünk.

A jegyzetben tárgyalt több tétellel kapcsolatban felmerülhet az a kérdés, hogy a tételben kimondott állítás megfordítható-e? Hogy egy, a középiskolából ismert állításra hivatkozunk:

Tétel: minden négyszetben a szembenfekvő oldalak egyenlők egymással.

Ezen állítás nyilván nem fordítható meg, az olyan négyszögek, melyekben két-két szembenfekvő oldal megegyezik egymással, nem mind négyszögek (tetszőleges paralelogrammák is lehetnek).

Azt a tényt, hogy a fenti tételben kimondott állítás nem fordítható meg, úgy is kifejezhetjük, hogy a tételben kimondott feltétel teljesülése szükséges, de nem elégséges ahhoz, hogy egy négyszög négyszet legyen.

A Pythagoras-tétel teljesülése a pozitív a , b , c számokból álló számhármásra, vagyis az

$$a^2 + b^2 = c^2$$

feltétel, szükséges és elégséges ahhoz, hogy a és b egy derékszögű háromszög két befogójának, c pedig ugyanezen derékszögű háromszög átfogójának mérőszáma legyen. Ha ui. a és b egy derékszögű háromszög befogóinak, c pedig ugyanezen derékszögű háromszög átfogójának mérőszáma, akkor valóban

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{a feltétel szükséges}),$$

és fordítva, belátható, hogy ha $a^2 + b^2 = c^2$ (a , b , c pozitív számok), akkor a és b egy derékszögű háromszög befogóinak, c pedig ugyanezen derékszögű háromszög átfogójának mérőszáma (a feltétel elégséges).

Szükséges és elégséges feltételt kimondó tételeket másképp is meg szoktuk fogalmazni. Utóbbi példákat pl. így is megfogalmazhatjuk:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

a pozitív a , b , c számokból álló számhármásra akkor és csak akkor áll fenn, ha a és b egy derékszögű háromszög befogóinak, c pedig ugyanezen derékszögű háromszög átfogójának mérőszáma.

A tételek bizonyítása során gyakran használjuk majd az un. teljes indukciós bizonyítási eljárást, ill. alkalmazunk majd indirekt bizonyítást.

A teljes indukciós bizonyítási eljárás a következő alapgondolaton nyugszik:

Egy minden természetes k számra kimondott állítás igaz, ha az állítás $k = 1$ - re igaz, továbbá abból a feltevésből, hogy $k = n$ - re is igaz, következik az állítás $k = n + 1$ - re való teljesülése (az állítás n -ről $n+1$ - re "öröklődik").

Például 1 kisebb, mint $2^1 = 2$, 2 kisebb, mint $2^2 = 4$, 3 kisebb, mint $2^3 = 8$, 4 kisebb, mint $2^4 = 16$, ... felvetődik a kérdés, vajon minden természetes n - re igaz-e, hogy n kisebb, mint 2^n ? Ezen feltevésünk igaz voltát könnyű teljes indukcióval igazolnunk. Mint már láttuk, 1 kisebb mint 2 (az állítás $k = 1$ - re igaz); tegyük fel, hogy az állítás $k = n$ - re is igaz: n kisebb, mint 2^n . Ekkor azonban $(n+1)$ is kisebb kell, hogy legyen, mint $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, hiszen $2^{n+1} \cdot 2^n$ - nek kétszerese, s így annál legalább 1 - gyel nagyobb, tehát az n -nél 1 - gyel nagyobb $(n+1)$ - nél nyilván nagyobb (az állítás tehát $k = n+1$ - re is igaz).

Az indirekt bizonyítási eljárás lényege abban áll, hogy nem az állítás helyességét bizonyítjuk közvetlenül, hanem azt mutatjuk meg, hogy az állítás tagadása ellentmondásra vezetne. (Ezzel az eljárással bizonyítjuk pl. az 1. fejezetben azt, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám.)

1. VALÓS SZÁMOK

Előtanulmányainkban a szám fogalmát fokozatosan bővítettük. Kiindulva az un. természetes számokból (az $1, 2, 3, \dots$ számokból) a kivonás műveletével kapcsolatban megismertük a zérust és a negatív egész számokat: $0, -1, -2, \dots$. A természetes számok, a zérus és a negatív egész számok neve közösen egész szám. A természetes számokat szokás még pozitív egész számoknak is nevezni. Később ismét bővítettük a szám fogalmát, az osztás műveletével kapcsolatban, a törtek megismerésével. Ilyen törtek pl. $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{4}, \dots$. Az egész számok és tört számok közös neve racionális szám. Racionális számok tehát a $\frac{p}{q}$ alakú törtek, ahol $q \neq 0$, és p , valamint q egész szám. Végül megismertük az irracionalis számokat, ilyenek pl. $\sqrt{2}, \pi, \sin 5^\circ, \lg 2$. Az irracionális számok olyan számok, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként.

Bizonyítsuk be például, hogy $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként.

Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

ahol p és q egész szám ($q \neq 0$) és p és q - nak nincs közös osztója. Ekkor azonban

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

azaz

$$2q^2 = p^2,$$

tehát p^2 páros szám, így p -nek is párosnak kell lennie, 4 osztója tehát p^2 -nek:

$$p^2 = 4p_1^2,$$

vagyis

$$2q^2 = 4p_1^2,$$

azaz

$$q^2 = 2p_1^2.$$

Ez utóbbi összefüggés azonban azt jelentené, hogy q^2 páros, azaz q is páros, ez esetben azonban volna p és q -nak közös osztója (ti. 2) a feltevással ellentétben, így ellentmondásra jutva, állításunkat igazoltuk.

A fent felsorolt számokat közösen valós számoknak nevezzük.

A valós számok összességét (halmazát) tehát irracionális és racionális számok (ezen utóbbiakon belül természetes számok, a zérus, negatív egész számok és törtek) alkotják.

A valós számok között bizonyos műveletek vannak értelmezve, ezek az összeadás, a kivonás, a szorzás és az osztás. Ezek a műveletek a valós számok halmazában korlátlanul elvégezhetők, kivéve az osztást, amelyet nem tudunk elvégezni, ha az osztó zérus. A felsorolt négy alpművelet bizonyos közismert tulajdonságokkal rendelkezik.

Az összeadás két alapvető tulajdonsága:

$$x + y = y + x \text{ (kommutativitás),}$$

bármilyen x és y valós számokra és

$$x + (y + z) = (x + y) + z \text{ (asszociativitás),}$$

bármilyen x , y és z valós számokra.

A szorzásnak ugyanolyan két alapvető tulajdonsága van, mint az összeadásnak:

$$xy = yx \text{ (kommutativitás)}$$

és

$$x(yz) = (xy)z \text{ (asszociativitás),}$$

tetszőleges x , y és z valós számokra.

Az összeadást és a szorzást összekapcsoló fontos törvény a disztributivitás:

$$x(y + z) = xy + xz,$$

bármely x , y és z valós számok esetén.

Az előtanulmányokból ismert a valós számok tizedes tört előállítás. Erre a kérdésre később még visszatérünk.

2. A VALÓS SZÁMOK RENDEZÉSE, EGYENLŐTLENSÉGEK

Ismeretes, hogy a 0 - től különböző valós számok két osztályba sorolhatók: a pozitív és negatív számok osztályába.^x

A középiskolából ismertnek tételezzük fel a pozitív és negatív számokkal való számolás szabályait, az úgynevezett "előjelszabályokat", mint:

két pozitív szám összege pozitív szám,

két pozitív szám szorzata pozitív szám,

két negatív szám összege negatív szám,

két negatív szám szorzata pozitív szám,

pozitív és negatív szám szorzata negatív szám.

A pozitív és negatív szám fogalma lehetővé teszi, hogy a valós számokat nagyság szempontjából egymással összehasonlítsuk. Nevezetesen: azt fogjuk mondani, hogy

az y valós szám az x valós számnál nagyobb, ha az $y - x$ különbség pozitív szám.

Ezt másképpen úgy is fogjuk mondani, hogy x kisebb y -nél.

Azt a körülményt, hogy y az x -nél nagyobb, ill. x az y -nél kisebb, az $y > x$, ill. $x < y$ jelöléssel juttatjuk kifejezésre. A definícióból azonnal következik, hogy $x > 0$ akkor és csak akkor, ha x pozitív. Fordítva $x < 0$ akkor és csak akkor, ha x negatív. Éppen ezért azt, hogy x pozitív (negatív) szám, röviden az $x > 0$ ($x < 0$) írásmóddal tüntetjük fel.

Az itt elmondottakból következik, hogy a valós számok nagyság szerint rendezve vannak, azaz bármely két x és y számra az alábbi három összefüggés közül az egyik és csak az egyik fenn kell, hogy álljon:

vagy x nagyobb mint y ($x > y$),

vagy x kisebb mint y ($x < y$),

vagy x egyenlő y -nal ($x = y$).

Ezen kívül

ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$ (tranzitív tulajdonság). A $<$ reláció most felsorolt tulajdonságait szoktuk úgy összefoglalni, hogy a valós számok halmaza rendezett.

A $<$ reláció tranzitív tulajdonságát a következőképpen bizonyíthatjuk:

$x < y$ azt jelenti, hogy $x - y < 0$,

$y < z$ azt jelenti, hogy $y - z < 0$.

^x

A továbbiakban - hosszú ideig - számon mindig valós számot értünk.

Két negatív szám összege negatív, tehát

$$(x - y) + (y - z) < 0,$$

másképp írva

$$x - z < 0,$$

azaz

$$x < z,$$

amit bizonyítani akartunk.

Megjegyezzük még, hogy

$x \leq y$ azt jelenti, hogy vagy $x < y$, vagy $x = y$; eszerint az

$x \leq y$ állítás épp az $x > y$ állítás tagadását jelenti.

$x \geq 0$ az x szám nem-negatív,

$x \leq 0$ az x szám nem-pozitív voltát jelenti.

Az alábbiakban felsoroljuk azokat a sokszor felhasznált állításokat, amelyeket a valós számok halmazának rendezése mutat, s amelyek alapján az egyenlőtlenségekkel számolunk.

1^o Ha $x > y$ és $z \geq w$, akkor $x + z > y + w$.

2^o Ha $x \leq y$ és $z \leq w$, akkor $x + z \leq y + w$.

3^o Ha $x > y$ és $z > 0$, akkor $xz > yz$.

4^o Ha $x > y$ és $z < 0$, akkor $xz < yz$.

1^o bizonyítása:

$x > y$ azt jelenti, hogy $x - y > 0$,

$z \geq w$ azt jelenti, hogy $z - w \geq 0$.

Mivel egy pozitív és egy nem-negatív szám összege pozitív

$$(x - y) + (z - w) > 0,$$

azaz

$$x + z - (y + w) > 0$$

és ennek jelentése definíciónk értelmében

$$x + z > y + w,$$

amit bizonyítani akartunk.

2^o bizonyítása 1^o bizonyításához teljesen hasonló módon történik.

3^o bizonyítása:

$x > y$ azt jelenti, hogy $x - y > 0$.

Mivel állításunk értelmében $z > 0$ és két pozitív szám szorzata pozitív

$$(x - y)z > 0,$$

azaz

$$xz - yz > 0,$$

s ez definíciónk alapján azt jelenti, hogy

$$xz > yz,$$

amit bizonyítani akartunk.

4^o bizonyítása:

$x > y$ azt jelenti, hogy $x - y > 0$.

Mivel állításunk értelmében $z < 0$ és egy pozitív és egy negatív szám szorzata negatív

$$(x - y)z < 0,$$

azaz

$$xz - yz < 0,$$

s ez definíciónk alapján azt jelenti, hogy

$$xz < yz,$$

amit bizonyítani akartunk.

Az itt felsorolt 1^o - 4^o állításokat, mint az egyenlőtlenségekkel való számolás szabályait, még a következő tételekként is meg szokták fogalmazni:

I. Tétel

Az egyenlőtlenség értelme nem változik (a $<$ jel iránya nem fordul meg), ha mindkét oldalához ugyanazt a számot adjuk hozzá.

Más szavakkal

szabad egy tagot az egyenlőtlenség egyik oldaláról előjelváltással átvinni a másik oldalra.

II. Tétel

Az egyenlőtlenség értelme nem változik meg, ha mindkét oldalát ugyanazzal a pozitív számmal megszorozzuk, vagy elosztjuk.

III. Tétel

Az egyenlőtlenség értelme megváltozik, ha mindkét oldalát ugyanazzal a negatív számmal megszorozzuk, vagy elosztjuk.

A I. Tétel az 1^0 , a II. Tétel a 3^0 , a III. Tétel a 4^0 állításnak következménye, ill. más megfogalmazása.

Külön meg szokták még említeni a II. ill. III. Tételből közvetlenül adódó alábbi tételt:

IV. Tétel

Az egyenlőtlenség értelme aszerint változik, vagy nem változik meg mindkét oldal reciprok értékének képzésénél, hogy az egyenlőtlenség két oldala azonos, vagy ellentett előjeli.

Bizonyítás

Legyen

$$x < y$$

és osszuk el egyenlőtlenségünk mindkét oldalát az $xy \neq 0$ számmal.

Ha x és y azonos előjeli, akkor $xy > 0$, s így

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{x},$$

ha x és y különböző előjeli, akkor $xy < 0$, s így

$$\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$$

adódik, amit bizonyítani akartunk.

Megemlítjük még a következő tételt:

V. Tétel

Ha x és y pozitív számok, akkor az $x < y$ egyenlőtlenségből következik az $x^n < y^n$ egyenlőtlenség (n pozitív egész szám).

Bizonyítás

Tételünket teljes indukcióval bizonyítjuk.

Az V. Tétel-ben kimondott állítás $k = 1$ -re igaz,

$$(\kappa) \quad x < y,$$

tegyük fel, hogy az állítás $k = n$ -re is igaz:

$$(\kappa\kappa) \quad x^n < y^n;$$

akkor azonban mivel x és y feltevésünk értelmében pozitív, és így y^n is pozitív $(\kappa\kappa)$ -ot x -szel, (κ) -ot y^n -nal megszorozva adódik:

$$x^{n+1} < xy^n$$

és

$$xy^n < y^{n+1}$$

azaz fenti két egyenlőtlenségünkéből a tranzitív tulajdonság felhasználásával adódik:

$$x^{n+1} < y^{n+1},$$

tehát az állítás $k = n+1$, s így minden természetes számra igaz. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

A fenti tételekben foglalt műveleti szabályok alkalmazásával oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket, tehát keressük meg mindazokat a számokat, melyek a vizsgált egyenlőtlenséget kielégítik.

a.) $\frac{2x+1}{x-1} < 3.$

Két esetet kell egymástól megkülönböztetnünk:

$$1^0 \quad x - 1 > 0, \text{ azaz } x > 1,$$

$$2^0 \quad x - 1 < 0, \text{ azaz } x < 1,$$

$$2x + 1 < 3x - 3,$$

$$2x + 1 > 3x - 3,$$

$$x > 4,$$

$$x < 4,$$

a feltételben szereplő

a feltételben szereplő

$$x > 1$$

$$x < 1$$

összefüggéssel összevetve

összefüggéssel összevetve

$$x > 4$$

$$x < 1$$

adódik.

adódik.

Az egyenlőtlenség megoldása tehát

$$x < 1 \quad \text{és} \quad x > 4.$$

b.) $-\frac{3x}{x^2+2} \geq 1.$

Mivel $x^2 + 2 > 0$, írható

$$-3x \leq x^2 + 2,$$

illetve

$$x^2 + 3x + 2 \leq 0.$$

A baloldalt gyöktényezők szorzataként felírva adódik:

$$(x + 1)(x + 2) \leq 0.$$

Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $x = -1$ vagy $x = -2$. A baloldali kéttényezős szorzat akkor lesz negatív, ha a két tényező ellenkező előjelű, tehát az alábbi két eset adódhat:

1^o $x + 1 < 0$, azaz $x < -1$, és ugyanakkor

$x + 2 > 0$, azaz $x > -2$, vagyis, röviden felírva

$$-2 < x < -1;$$

2^o $x + 1 > 0$ és ugyanakkor $x + 2 < 0$, ami lehetetlen.

Egyenlőtlenségünk megoldása tehát minden olyan x szám, amelyre

$$-2 \leq x \leq -1.$$

c.) $\sqrt{x - 4} < 4.$

Egyenlőtlenségünk nyilván csak az $x \geq 4$ valós számokra van értelmezve. Mivel $\sqrt{x - 4} > 0$, az V. Tétel értelmében mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$x - 4 < 16,$$

azaz

$$x < 20.$$

Mivel azonban egyenlőtlenségünk csak az $x \geq 4$ számokra van értelmezve, megoldása tehát minden olyan x szám, melyre

$$4 \leq x < 20.$$

d.) $2 < \frac{1 - 3x}{x - 2} < 3.$

Az egyenlőtlenség értelmében $\frac{1 - 3x}{x - 2} > 0$, tehát csak két eset állhat:

vagy $1^0 1 - 3x > 0$, azaz $x < \frac{1}{3}$ és ugyanakkor

$x - 2 > 0$, azaz $x > 2$, ami lehetetlen,

vagy $2^0 1 - 3x < 0$, azaz $x > \frac{1}{3}$ és ugyanakkor

$x - 2 < 0$, azaz $x < 2$, vagyis

$$\frac{1}{3} < x < 2.$$

Mivel csak a 2^0 esetről lehet szó, azaz $x - 2 < 0$, ezen negatív tényezővel eredeti egyenlőtlenségünköt végigszorozva

$$-4 + 2x > 1 - 3x > -6 + 3x,$$

tehát egyenlőtlenségünknek 2^0 értelmében csak azon x -ek lehetnek megoldásai, melyekre egyrészt

$$\frac{1}{3} < x < 2,$$

másrészt egyidejűleg

$$-4 + 2x > 1 - 3x, \text{ azaz } 5x > 5, \text{ tehát } x > 1 \text{ és}$$

$$1 - 3x > -6 + 3x, \text{ azaz } 6x < 7, \text{ tehát } x < \frac{7}{6}.$$

Egyenlőtlenségünk megoldása tehát minden olyan x szám, amelyre

$$1 < x < \frac{7}{6}.$$

e.) Igazoljuk két pozitív x és y szám számtani és mértani közepe közt fennálló alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

(Az $x > 0$, $y > 0$ szám számtani közepe $\frac{x+y}{2}$, mértani közepe $\sqrt{xy}$.)

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve ($\sqrt{xy} > 0$):

$$xy \leq \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4}$$

illetve egyenlőtlenségünket rendezve

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0,$$

ami pedig mindig igaz, hisz

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $x = y$.

Minthogy az előbbi következtetések ellenkező irányban is elvégezhetők, az

$$(x - y)^2 \geq 0$$

egyenlőtlenségből a bizonyítandó egyenlőtlenségre jutunk.

Ha $x > 0$ és $y = \frac{1}{x}$, akkor speciálisan azt kapjuk fenti egyenlőtlenségünkből, hogy minden pozitív x számra

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

(Az egyenlőség csak az $x = 1$ esetben igaz.)

Azt a tényt, hogy milyen lényeges volt az előbbi bizonyítás során megjegyeznünk, hogy a következtetések ellenkező irányban is elvégezhetők, s hogy ezáltal igazoltuk csak maradéktalanul állításunkat, a következő egyszerű példa kapcsán láthatjuk be: milyen x -re igaz:

$$\sqrt{1 - x(2-x)} \leq 1 - x.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve az

$$1 - x(2 - x) = 1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2 \leq (1 - x)^2$$

nyilvánvaló egyenlőtlenséget kapjuk, amely minden x számra igaz. Fordítva azonban az eredeti egyenlőtlenség nem következik az utóbbiból, mert az eredeti pl. $x = 3$ esetében sem érvényes.

f.) Bizonyítsuk be, hogy a_1, b_1, a_2, b_2 tetszőleges értéke esetén:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Az egyenlőtlenség jobboldala mindig nem-negatív, a baloldal lehet negatív és zérus is. Ekkor az állítás nyilván igaz. Ha az egyenlőtlenség baloldala is pozitív, az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2) (b_1^2 + b_2^2).$$

A kijelölt műveleteket elvégezve és az egyenlőtlenséget alkalmasan rendezve

$$a_1^2 b_1^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_2^2 \leq a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2,$$

$$0 \leq a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2,$$

ill.

$$0 \leq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2,$$

s ez nyilvánvalóan érvényes egyenlőtlenség. Miután e következtetések ellenkező irányban is elvégezhetők, állításunkat az $a_1 b_1 + a_2 b_2 > 0$ esetre is bebizonyítottuk.

Okoskodásunkból az is kiolvasható, hogy az egyenlőség csak abban az esetben igaz, amikor

$$a_1 b_2 = a_2 b_1,$$

azaz, ha speciálisan $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ esetén

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

vagyis,

$$a_1 = k b_1 \text{ és } a_2 = k b_2.$$

3. ABSZOLUT ÉRTÉK

Definíció:

Az x szám abszolút értékének nevezzük azt a számot, amely egyenlő magával x - szel, ha x pozitív, vagy zérus, és $-x$ -szel egyenlő, ha x negatív.

Jelben:

$$x = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

x tehát mindig nem-negatív (pozitív, vagy zérus). A definíció következményei:

$$|x| = +\sqrt{x^2} = \sqrt{x^2},$$

$$(1) \quad -|x| \leq x \leq |x|.$$

Könnyű megmutatni, hogy egyenértékű egymással a két alábbi összefüggés:

$$(2) \quad |a| \leq b \quad (b > 0) \quad \text{és} \quad -b \leq a \leq b.$$

Ha ugyanis

$$|a| \leq b,$$

akkor az egyenlőtlenséget (-1) -gyel beszorozva

$$-|a| \geq -b,$$

és e két egyenlőtlenséget az $x = a$ esetre alkalmazott (1) összefüggéssel összekapcsolva adódik:

$$-b \leq -|a| \leq a \leq |a| \leq b,$$

vagyis valóban

$$-b \leq a \leq b.$$

Fordítva, ezen utóbbi egyenlőtlenségláncunkból

$a \geq 0$ esetén $|a| \leq b$ ($a = |a|$),

$a < 0$ esetén $-|a| \geq -b$ ($a = -|a|$)

következik, vagyis mindkét esetben az

$$|a| \leq b$$

egyenlőtlenségre jutottunk. A (2) alatti két összefüggés tehát valóban egyenértékű egymással.

Az abszolút értékre vonatkozóan fennállnak a következő tételek:

I. Tétel

Összeg abszolút értéke nem nagyobb az egyes tagok abszolút értékének összegénél.

Jelben:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_1 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_1| + \dots + |a_n|.$$

Ugyanezt rövidebben így is jelölhetjük:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Az itt bevezetett $\sum_{i=1}^n$ jel jelentése: a $\sum$ jel mögött álló kifejezésbe $i=1$, $i=2, \dots, i=n$ - et írva, az így nyert tagokat összeadva jutunk vizsgált kifejezésünk részletesen kiírt alakjára.

Bizonyítás

A tételben kimondott állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. (A teljes indukciós bizonyítási eljárással kapcsolatban lásd a bevezetést.)

Kéttagu összeg esetében igaz az állítás, hiszen (1) értelmében

$$-|a_1| \leq a_1 \leq |a_1|,$$

$$-|a_2| \leq a_2 \leq |a_2|,$$

és e két egyenlőtlenséget összeadva egymással (2.) 2^0 tulajdonság) nyerjük:

$$-(|a_1| + |a_2|) \leq a_1 + a_2 \leq (|a_1| + |a_2|),$$

amiből (2) értelmében az $a = a_1 + a_2$ jelöléssel adódik:

$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|.$$

Evvel állításunkat kéttagu összeg esetére bebizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy az állítás n tagu összeg esetében is igaz, vagyis

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|,$$

és lássuk be, hogy akkor $n+1$ tagu összegre is igaz lesz.

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^n a_i + a_{n+1},$$

és mivel kéttagu összegre már beláttuk az állítás igaz voltát, írhatjuk:

$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} a_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| + |a_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|,$$

amit bizonyítani akartunk.

II. Tétel

Különbség abszolút értéke nem kisebb a kisebbbitendő és kivonandó abszolút értéke különbségének abszolút értékénél.

Jelben:

$$|a - b| \geq ||a| - |b||.$$

Bizonyítás

Legyen

$$a - b = c, \text{ azaz } a = b + c.$$

Az I. Tétel alkalmazásával írható:

$$|a| = |b + c| \leq |b| + |c| = |b| + |a - b|,$$

azaz

$$|a| \leq |b| + |a - b|,$$

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

Ha $|a| \geq |b|$, akkor utóbbi egyenlőtlenségünk épp a bizonyítandó egyenlőtlenséget szolgáltatja. Ellentett esetben így kell tovább okoskodnunk:

Ha $|a| < |b|$, akkor $|b| - |a| > 0$, azaz utóbbi egyenlőtlenségünket a és b szerepének felcserélésével alkalmazzuk:

$$|a - b| = |b - a| \geq |b| - |a| = ||b| - |a|| = ||a| - |b||,$$

tehát ez esetben is

$$|a - b| \geq ||a| - |b||,$$

amit bizonyítani akartunk.

III. Tétel

Szorzat abszolút értéke egyenlő az egyes tényezők abszolút értékének szorzatával.

IV. Tétel

Hányados abszolút értéke megegyezik a számláló és a nevező abszolút értékének hányadosával.

Jelben:

$$|a_1 a_2 \dots a_n| = |a_1| |a_2| \dots |a_n|,$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Ezen utóbbi tételek nem szorulnak bizonyításra, a bennük foglalt állítás igaz volta, a műveletek definíciójából, közvetlenül adódik.

Egyenlőtlenségek megoldásánál gyakran felhasználjuk még az alábbi tételeket:

V. Tétel

Ha $a < b$, akkor $|a| < |b|$ esetén $a^2 < b^2$, $|a| > |b|$ esetén pedig $a^2 > b^2$.

A tétel bizonyítására itt nem térünk ki, igaz voltát csak néhány példán illusztráljuk:

- a.) $2 < 5, \quad 4 < 25,$
b.) $-2 < 5, \quad 4 < 25, \quad (\text{ti. } |-2| < 5),$
c.) $-5 < 5, \quad 25 = 25, \quad (\text{ti. } |-5| = 5),$
d.) $-6 < 5, \quad 36 > 25, \quad (\text{ti. } |-6| > 5),$
e.) $-6 < -2, \quad 36 > 4. \quad (\text{ti. } |-6| > |-2|).$

Az V. Tétel megfordításaként mondható ki a következő

VI. Tétel

Az $a^2 < b^2$ egyenlőtlenségből az $|a| < |b|$ egyenlőtlenség következik.

Pl. $x^2 < 9$ annyit jelent, hogy $|x| < 3$, azaz $-3 < x < 3$.

Az abszolút érték fogalma, és a VI. Tételben kimondott állítás felhasználásával oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\left| \frac{-1 - x^2}{8 - 2x^2} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{10}.$$

Az egyenlőtlenség baloldalán látható kifejezésben közös nevezőre hozva adódik

$$\left| \frac{-5}{2(4-x^2)} \right| < \frac{1}{10}.$$

Egyenlőtlenségünket a $10|4 - x^2| > 0$ tényezővel végigszorozva, ill. a III. és IV. Tétel alkalmazása után egyszerűsítve, írható:

$$25 < |4 - x^2|.$$

Két esetet kell megkülönböztetnünk:

1^o ha $4 - x^2 > 0$, azaz $|x| < 2$, akkor egyenlőtlenségünk
 $(|4 - x^2| = 4 - x^2)$

$$25 < 4 - x^2,$$

azaz

$$x^2 < -21,$$

ami nem állhat, vagyis az 1^o esetében nincs megoldás.

2^o ha $4 - x^2 < 0$, azaz $|x| > 2$, akkor egyenlőtlenségünk
 $(|4 - x^2| = -(4 - x^2))$

$$25 < x^2 - 4,$$

azaz

$$x^2 > 29,$$

$$|x| > \sqrt{29}.$$

Tekintettel arra, hogy a 2^0 esetben a megoldást $|x| > 2$ esetre végeztük, és $|x| > \sqrt{29}$ esetében e feltétel nyilván teljesül, megoldásként

$$|x| > \sqrt{29}$$

adódott.

Eredeti egyenlőtlenségünk megoldása tehát:

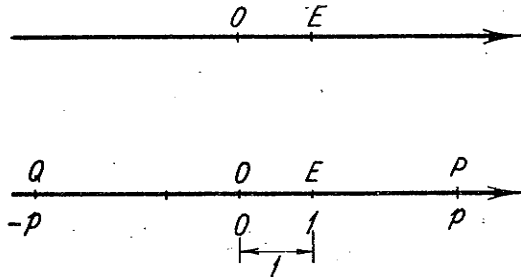
$$|x| > \sqrt{29},$$

vagyis a $\sqrt{29}$ -nél nagyobb abszolút értékű, x - ek.

4.) SZÁMEGYENES

A valós számok szemléltetése végett járjunk el a következőképpen:

Vegyünk fel egy egyenest, jelöljünk ki rajta egy O pontot és egy E pontot, az $\overline{OE}$ távolságot válasszuk távolságegységnek és tekintsük az O -ból az E felé haladó irányt pozitív haladási irányának. Ezen egyenes pontjai és a valós számok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető: az egyenes minden pontjának egy és csak egy valós szám, a pont "koordinátája", és fordítva, minden valós számnak az egyenes egy, és csak egy pontja felel meg. Ezért sokszor "az x valós számnak megfelelő P pont" helyett röviden " x pont" -ről fogunk beszélni.



1. ábra

Legkönnyebb a természetes számok képét az egyenesen meghatározni. A p természetes szám képét úgy kapjuk meg, hogy O -ból kiindulva az egységnek választott $\overline{OE}$ távolságot a pozitív haladás irányában (az 1. ábrán O -tól jobbra) p - szer felmérjük egymásután. Az így nyert P pont lesz a p szám képe, és fordítva, P - nek a p szám felel meg, P -vel, mint koordinátával egyértelműen jellemezhető.

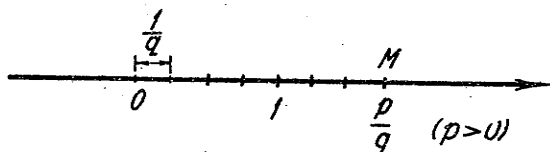
Ily módon az 1 számnak az E pontot feleltettük meg, és E koordinátája 1 .

Feleltessük meg a zérus számnak az O pontot, O koordinátája tehát a 0 szám.

A $-p < 0$ negatív egész szám képét az egyenesen úgy nyerjük, hogy az egységnek választott $\overline{OE}$ távolságot O -ból kiindulva a negatív haladás irányában (az 1. ábrán O -tól balra) p -szer felmérjük egymásután. Az így nyert Q pont $-p$ képe, és fordítva, Q koordinátája $-p$.

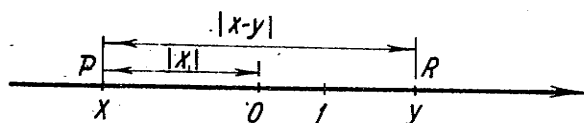
A $\frac{p}{q}$ racionális, nem-egész szám képét ($q > 0$) úgy kapjuk meg az egyenesen, hogy az O és E pontok közötti egységnyi hosszúságú szakaszt q egyenlő részre osztjuk, majd ezen osztással nyert kicsiny szakaszt mérjük fel O -ból kiindulva q -szor egymásután, $\frac{p}{q} > 0$ esetében a pozitív haladás, $\frac{p}{q} < 0$ ese-

tében a negatív haladás irányában. Így az M pontba érve, M lesz $\frac{p}{q}$ képe, míg M koordinátája $\frac{p}{q}$. (2. ábra.)



2. ábra

Az itt részletezett módon könnyen meg tudtuk adni a racionális számok képét az egyenesen. Az eddig leírtak alapján azt is könnyű belátni, hogy ha x és y racionális számok, és $x < y$, akkor az x - nek megfelelő P pontból az y számnak megfelelő R pontba P - ből pozitív irányu haladással jutunk el. Az is látható, hogy a P és R pontok egymástól mért távolságát



3. ábra

$|x - y|$, és P - nek O - től mért távolságát $|x|$ szolgáltatja (3. ábra). ($|x - y|$ - t x és y eltérésének is nevezzük.) Ennek alapján azonban látható, hogy a racionális koordinátájú pontok nem töltik ki az egyenest, hiszen ha pl. O - ből pozitív haladás irányában felmérjük az egységnyi oldalú négyzet átlóját, olyan ponthoz jutunk az egyenesen, amely nem rendelkezik racionális koordinátával, mert különben az átló hosszúsága racionális számmal volna mérhető, márpedig tudjuk, hogy nem az. Be lehet azonban látni, hogy az egyenes racionális koordinátával még nem rendelkező pontjai (egyértelműen) elláthatók irracionális számokkal mint koordinátákkal, úgy, hogy továbbra is érvényben maradjon a hozzárendelésnek az a tulajdonsága, hogy a kisebb koordinátájú pontból a nagyobb koordinátájú pontba pozitív haladási irányban jutunk el.

Ha egy egyenes pontjaihoz a most leírt módon valós számokat rendeltünk, mint koordinátákat, akkor az egyenest **számegyenesnek** nevezzük.

A valós számok helyét tehát meg tudjuk adni a számegyenesen. A velük való számolást megkönnyíti az a tény, hogy minden valós számot tetszőleges pontossággal megközelíthetünk racionális számokkal, sőt, véges tizedes törtekkel. Pl. essék az x szám a 2 és 3 egész számok közé:

$$2 < x < 3.$$

Osszuk fel az e két szám közötti szakaszt a számegyenesen 10 egyenlő részre és keressük meg, melyik két szomszédos osztópont közé esik az x szám. Legyen pl.

$$2,3 \leq x < 2,4.$$

Ha $x \neq 2,3$, eljárásunkat tovább folytatjuk: a 2,3 és 2,4 számok közötti szakaszt osztjuk fel újra 10 egyenlő részre, és megkeressük, melyik két szomszédos osztópont közé esik az x szám. Legyen pl.

$$2,36 < x < 2,37.$$

Eljárásunkat most a 2,36 és 2,37. számok közötti szakasznak 10 egyenlő részre történő osztásával folytatjuk. Az itt vázolt eljárást n - szer megismételve olyan x - et közrefogó véges tizedes törteket kapunk, melyeknek x - től való eltérése $\frac{1}{10^n}$ - nél kisebb.

Később még visszatérünk arra, hogy az itt vázolt eljárás hogyan használható fel a valós számok megadására, ill. annak igazolására, hogy a fenti módszerrel csakugyan tetszőleges pontossággal megközelíthetjük véges tizedes törtekkel az x valós számot.

5.) SZÁMRENDSZEREK

A 4.) fejezetben utaltunk arra, hogy a valós számokat közelítőleg véges tizedes törtek segítségével adhatjuk meg. Az ott közölt eljárást azért követtük (a szakaszokat azért osztottuk 10 egyenlő részre), mert az egész számok megadásához az un. tizes számrendszert használtuk.

Egy számnak a tizes számrendszerben történő megadásához 10 számjegyre:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

volt szükségünk, és azt a tényt, hogy az egyes számjegyek 10 milyen egész-kitevős hatványával szorzandók meg a számjegy helyi értékével tüntettük fel. Pl.

$2 \cdot 10^0$ röviden 2,

$1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$ röviden 14,

$3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$ röviden 3201,25.

Egy számot természetesen más számrendszerben is megadhatunk.

Pl. a kettes számrendszerben egy számot két számjegy:

0, 1

segítségével írunk fel, szintén helyi értékkel tüntetve fel, hogy a jegyet 2 milyen egész kitevős hatványával kell megszorozni. Pl.

1 = $1 \cdot 2^0$, röviden 1,

2 = $1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$, röviden 10,

3 = $1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, röviden 11,

4 = $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$, röviden 100,

5 = $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, röviden 101,

6 = $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$, röviden 110,

$$7 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0, \text{ röviden } 111,$$

$$8 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0, \text{ röviden } 1000,$$

III. pl.

$$24 = 2^4 + 2^3, \text{ röviden } 11000,$$

$$0,25 = 2^{-2}, \text{ röviden } 0,01,$$

$$135 = 2^7 + 2^2 + 2^1 + 2^0 \text{ röviden } 10000111.$$

Amennyiben a kettes számrendszert használjuk, a számok megközelítése véges un. diadikus (vagy kettedes) törtekkel történik.

A kettes számrendszert leginkább elektronikus digitális számológépeknél használják. Ezt a tényt az indokolja, hogy olyan áramköröket tervezve, melyekben csak két eset lehetséges, vagy átfolyik az áram, vagy nem folyik át (pl. egy jelfogó vagy zár, vagy bont), ezen áramkörökbe a kettes számrendszerben megadott számokat mint impulzussorozatokat be tudjuk adagolni.

Mint azonban fenti példáinkból már kitűnt, nagyobb számokat igen fáradságos kettes számrendszerben felírni. Ezért használják még digitális számológépeknél a nyolcas számrendszert, amelyben a kettes számrendszerben 3 jeggyel felírható

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

számjegyekkel dolgoznak, a helyi értéket pedig 8 hatványaival adják meg. Pl.

$$135 = 2 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^0 \text{ röviden } 207.$$

6.) SIK- ÉS TÉRBELI KOORDINÁTARENDSZEREK

PONT JELLEMZÉSE A SIKBAN ÉS A TÉRBEN

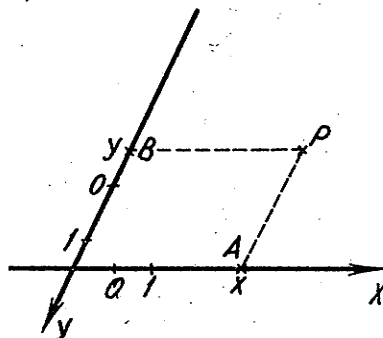
Mint az előzőekben már láttuk, a számegyenes valamennyi pontjának halmaza és a valós számok halmaza között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető: a számegyenesen egy pont helyét egyértelműen egy számmal határozzuk meg, éspedig azzal a számmal, amely megadja az illető pontnak - a választott egységben mérve a 4.) fejezetben részletezett módon előjel figyelembevételével - a kezdőponttól mért távolságát. Ezt a számot koordinátának neveztük, tehát a két halmaz között létesített kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés minden ponthoz egy számot, a pont koordinátáját, és fordítva, minden számhoz a számegyenesnek az illető számmal, mint koordinátával megadható pontját rendeli.

Sikbeli, ill. térbeli pont helyzetének egyértelmű meghatározásához egy számegyenes nem elégséges. Az alábbiakban sik- ill. térbeli pontok helyzetének meghatározására szolgáló módszereket fogunk ismertetni.

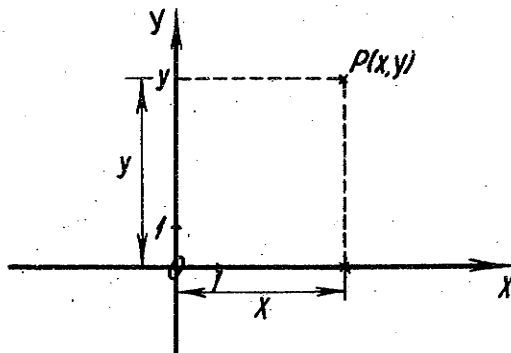
1° Sikbeli ferdeszögű és derékszögű koordinátarendszerek

Vegyük fel a síkon két nem párhuzamos számegyenest, jelöljük őket X és Y -nal. Huzzunk a síkban fekvő P pontból párhuzamosokat az X és Y számegyenessel (tengellyel). E párhuzamosok az X és Y tengelyből kimetszenek egy A ill. B pontot. Ezen pontoknak az X ill. Y számegyenesen egy-egy szám (koordináta) felel meg, jelöljük ezeket x és y -nal (4. ábra). E két számmal (koordinátával) a P pont helyzetét egyértelműen meghatároztuk.

Általában a két számegyenest, az X és Y tengelyt, egymásra merőlegesen vesszük fel, ilyenkor derékszögű koordináta-rendszerről beszélünk. Sokszor célszerű a két tengely kezdőpontját a tengelyek metszéspontjában felvenni, a tengelyeken megegyező egységeket és az 5. ábrán látható irányítást választani.



4. ábra



5. ábra

Ebben az esetben a P pont koordinátáinak abszolút értéke $|x|$ és $|y|$, a P pont Y, ill. X tengelytől való távolságát adják.

A derékszögű koordináta-rendszer tengelyei közül a rendszerint vízszintesnek választott X tengelyt abszcissza-tengelynek, a függőlegesnek választott Y tengelyt pedig ordináta-tengelynek, a P pont koordinátáit pedig abszcisszájának (x koordináta), ill. ordinátájának (y koordináta) nevezzük. A P pont koor-

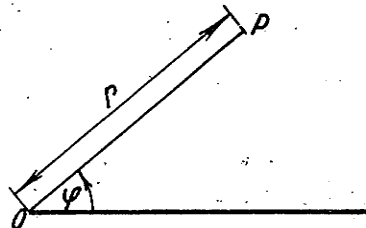
dinátáit szoktuk még (x, y) számpár alakjában is felírni, megállapodva abban, hogy a számpár első tagja mindig az abszcisszát, második tagja pedig az ordinátát jelenti.

A gyakorlatban sokszor használnak olyan derékszögű koordinátarendszereket, amelyeknél a tengelyek kezdőpontja nem esik egybe, a tengelyeken különböző egységeket (léptéket) mérnek fel, és a tengelyek irányítása sem az előbb megállapított.

2° Síkbeli polárkoordinátarendszer

Vegyük fel a síkban egy félegyenest és nevezzük pozitív forgási iránynak az óramutató járásával ellenkező irányt. A P pont helyzetét egyértelműen meghatározhatjuk azáltal is, ha megadjuk P távolságát (adott egységben mérve) a félegyenestől O pontjától, valamint az $\overline{OP}$ szakasznak a félegyenessel bezárt szögét. E szöget pozitívnak, vagy negatívnak vesszük aszerint, hogy a kiindulásul választott félegyenest az $\overline{OP}$ félegyenesbe pozitív vagy negatív (az óramutató járásával egyező) forgás viszi át. Az $\overline{OP} = r$ nem-negatív számot, valamint az előbb meghatározott φ szög (lásd 6. ábra) ivmértékét a P pont polárkoordinátáinak, r - et rádiusz-vektornak (precízen a rádiusz-vektor hossza), a φ szöget polárszögnek, a félegyenest a polárrendszer tengelyének, az O pontot a polárrendszer kezdőpontjának (pólusának), az egész rendszert pedig polárkoordinátarendszernek nevezzük.

(Emlékeztetünk itt arra, hogy egy φ szög ivmértékben, vagy abszolút mérőszámban - radiánban - kifejezett mérőszámán a középponti szöghöz az egységsugarú körben tartozó ív hosszúságának mérőszá-



6. ábra

mát értjük. A φ szög fokokban mért mérőszámának γ - nak abszolút mérőszámára való átszámítása a $\gamma : 360 = \varphi : 2\pi$ arányosság alapján:

$$\varphi = \frac{\pi}{180} \gamma \approx 0,0175 \gamma, \text{ ill. } \gamma = \frac{180}{\pi} \varphi \approx 57,3 \varphi .)$$

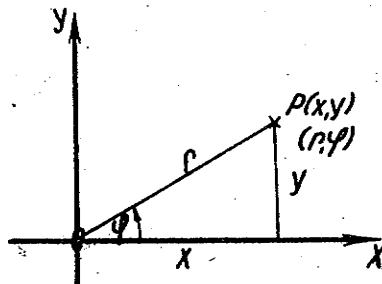
Az O kezdőpontnak (pólusnak) $r = 0$ felel meg, de egyetlen φ polárszög sem rendelhető hozzá.

A P pont polárkoordinátáit is felírhatjuk számpárba foglalva: $P(r, \varphi)$. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy míg a valós számokból álló számpárok és a derékszögű koordináták között kölcsönösen egyértelmű vonatkozás állt fenn, polárkoordináták esetében ez nem áll. Minden (r, φ) számpárnak egy és csak egy pont felel meg a síkban, amely O -tól r távolságban fekszik, és polárszöge φ , de fordítva, egy P pontnak mint polárkoordináták, több számpár is megfelel. A $P(r, \varphi)$ pontnak megfelelnek még a következő számpárok is, mint polárkoordináták:

$$(r, \varphi + 2\pi), (r, \varphi + 4\pi), \dots \text{ általában } (r, \varphi + 2k\pi), \text{ ahol}$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Gyakran szükséges egy P pont derékszögű koordinátáiról polárkoordinátáira áttérni, és viszont. Kérdés tehát, hogy számíthatók át egymásba ezek a koordináták. Ha a polárrendszert úgy vesszük fel, hogy annak tengelye a derékszögű koordinátarendszer X tengelyének pozitív felébe, a polárrendszer kezdőpontja pedig a derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjába (a két tengely közös O pontjába) essek (lásd 7. ábra), az átszámítási képletek a következők lesznek:



7. ábra

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

illetve

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pl. $P(2, \frac{\pi}{3})$ derékszögű koordinátái: $x = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1,$

$$y = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \approx 1,73.$$

$P(3, -4)$ polárkoordinátái: $r = \sqrt{9 + 16} = 5,$

$$\varphi \approx 53^\circ \approx -0,925.$$

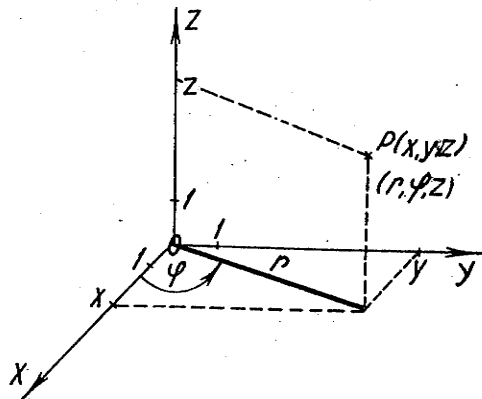
3° Térbeli derékszögű koordinátarendszer

Vegyük fel három egymásra merőleges számegyenes, jelöljük ezeket X, Y és Z -vel. a P pontból az X, Y, Z tengelyekre (számegyenesekre, vagy, ahogy nevezni szoktuk, koordinátatengelyekre) merőlegest huzva, ezek az X, Y és Z tengelyeket az A, B, C pontokban metszik. E pontok koordinátái, x, y, z egyértelműen meghatározzák a P pont helyét a térben, ezeket a P pont koordinátáinak nevezzük. Az ilyen koordinátarendszert térbeli derékszögű koordinátarendszernek nevezzük. A tengelyek O pontját metszéspontjukban (a koordinátarendszer kezdőpontjában) szoktuk felvenni, és gyakran a ten-

gelyeken egynél egységeket választunk. Jobbodrású koordinátarendszerre (jobbrendszerre) akkor jutunk, ha a derékszögű koordinátarendszer X, Y és Z tengelyének iránya megegyezik jobbkézünk egymásra merőlegesen mutató hüvelyk, mutató és középső ujjának irányával. (8. ábra.)

A P pont derékszögű koordinátáit a sorrendre tett megszorítás mellett számhármassal is szoktuk foglalni: $P(x, y, z)$.

A gyakorlatban természetesen előfordul, hogy a térbeli derékszögű koordinátarendszer tengelyeinek O pontja nem esik egybe, továbbá, hogy az egyes tengelye-



8. ábra

ken különböző egységet veszünk fel.

4° Henger-koordinátarendszer

Egy térbeli pont helyzetét azáltal is megadhatjuk, hogy megadjuk a pontnak adott síktól való előjeles távolságát és ezen síkra való merőleges vetületének a síkban felvett polárrendszerbeli polárkoordinátáit. Ezen három számadatot a

pont hengerkoordinátáinak nevezzük. Ha a sík a térbeli derékszögű koordináta-rendszer XY síkja (az X és Y tengelyeken átfektetett sík), és ebben a síkban a polárrendszer tengelyét az X tengely pozitív felében, a polárrendszer kezdő-pontját pedig a koordináta-rendszer kezdőpontjában vettük fel, akkor a térbeli P pont hengerkoordinátái r, φ, z (lásd 8. ábra). A derékszögű és hengerkoordináták egymásba való átszámítása az előbbieken nyilvánvaló:

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

$$z = z$$

illetve

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$z = z.$$

A P pont hengerkoordinátái számhármashban felírva: $P(r, \varphi, z)$. A tér pontjai és ezen hengerkoordinátákból felírt számhármashok közötti vonatkozás a polárkoordináták és síkbeli pontokéhoz hasonlóan nem kölcsönösen egyértelmű. Ennek belátása az idézethez hasonlóan történik.

5° Gömbi koordináta-rendszer (térbeli polárkoordináta-rendszer)

Vegyünk fel a térben egy derékszögű koordináta-rendszert, melynél az X, Y, Z tengelyek O kezdőpontja egybeesik. A térbeli P pont helyzetét most úgy határozhatjuk meg, hogy megadjuk az $\overline{OP} = r$ távolságot, $\overline{OP}$ - nek a Z tengellyel bezárt szögét (ϑ), valamint OP XY síkra vett vetületének az X tengely pozitív irányával bezárt szögét (φ). Az előjelet a φ szögnél ugyanugy választjuk meg, mint ahogy azt a síkbeli polárkoordináták esetében tettük. r, ϑ és φ - t P gömbi koordinátáinak nevezzük. (9. ábra.) (lásd 32. old.)

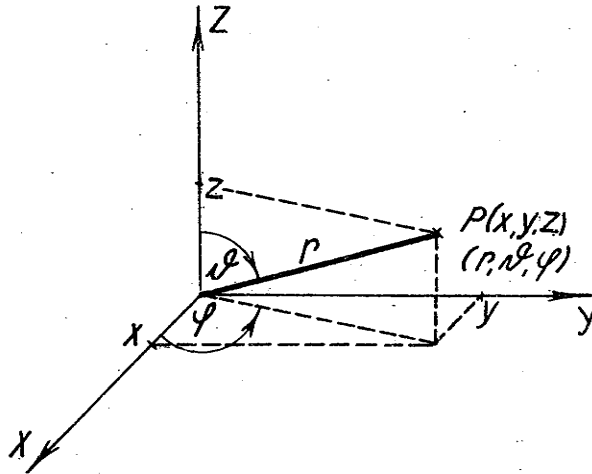
A derékszögű és gömbi koordinátákat a következőképpen számíthatjuk át kölcsönösen egymásba:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \vartheta,$$

illetve



9. ábra

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Itt is megállapodunk abban, hogy $r \geq 0$. Az O kezdőpontnak $r = 0$ felel meg, ϑ és φ értéke azonban bármi lehet. Hasonlóképp nem rendelhető egyértelműen φ érték a Z tengely pontjaihoz. Az értelmezésből folyik, hogy $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

A P pont gömbi koordinátáit, r, ϑ, φ -t ezen sorrendben számhármasba foglalhatjuk: $P(r, \vartheta, \varphi)$. A tér pontjai és ezek gömbi koordinátáiból felírt számhármassok közötti vonatkozás nem kölcsönösen egyértelmű, mert az $(r, \vartheta, \varphi + 2k\pi)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ számhármassoknak ($r \geq 0$) ugyanaz a térbeli pont felel meg.

Derékszögű és gömbi koordináták átszámítására szolgáljon az alábbi két példa:

$$\text{a.) } r = 3, \quad \vartheta = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{5\pi}{6},$$

ekkor

$$x = 3 \sin \frac{\tilde{\pi}}{3} \cos \frac{5\tilde{\pi}}{6} = -\frac{9}{4} = -2,25,$$

$$y = 3 \sin \frac{\tilde{\pi}}{3} \sin \frac{5\tilde{\pi}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,3,$$

$$z = 3 \cos \frac{\tilde{\pi}}{3} = 1,5.$$

b.) $x = 1, y = -2, z = 5,$

ekkor

$$r = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30} \approx 5,48,$$

$$\cos \vartheta = \frac{5}{\sqrt{30}}, \quad \vartheta \approx 24^\circ \approx 0,42 \quad (\text{ti } 0 \leq \vartheta \leq \pi),$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \text{innen } \varphi \approx \pm 63,4^\circ, \text{ de mivel } \sin \varphi = \frac{-2}{\sqrt{5}} < 0,$$

$$\varphi \approx -63,4^\circ \approx -1,1,$$

vagyis

$$r \approx 5,48, \quad \vartheta \approx 0,42, \quad \varphi \approx -1,1.$$

7.) VEKTOROK, MŰVELETEK VEKTOROKKAL

Az eddigiekben olyan mennyiségekkel foglalkoztunk, melyeket egyetlen adat, számértékük, teljesen meghatározott. Ilyen mennyiség a távolság, hőmérséklet, stb., ezeket skalár mennyiségeknek nevezzük.

A természetben gyakran fordulnak azonban elő olyan mennyiségek, melyeket csupán nagyságuk nem határoz meg teljesen. Pl. nem határozza meg csupán nagysága a mozgó test adott pontbeli sebességét, gyorsulását. Az ilyen mennyiségek ismeretéhez tehát nagyságukon kívül irányuk megadása is szükséges.

A következőkben a nagyság és irány által meghatározott mennyiségek egy fajtájával, a vektorokkal foglalkozunk.

Vektornak nevezzük a tér valamely A pontjából valamely B pontjába mutató irányított egyenesszakaszt.

Az egyenesszakasz hosszát azaz a vektor nagyságát másképp a vektor abszolút értékének is mondjuk, ezt egyetlen nem-negatív számmal fejezzük ki.

A vektorokat így jelöljük: $\vec{a}$, ill. az A pontból a B pontba mutató vektort: $\vec{AB}$. (A vektorokat szokás még nyomtatásban vastagon szedett betűvel, aláhúzással, ill. gót betűvel is jelölni.)

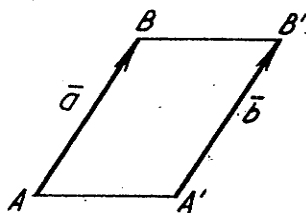
Az $\vec{a}$ vektor nagyságát (abszolút értékét) így jelöljük: $|\vec{a}|$. (Szokás még az $|\vec{a}| = a$ jelölést is használni.)

Két vektort akkor tekintünk egyenlőnek, ha nagyságuk és irányuk megegyezik, vagyis

$$\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{A'B'} \text{ esetén } \vec{a} = \vec{b},$$

ha az AA'B'B négyszög paralelogramma (lásd 10. ábra).

A műszaki alkalmazásokban gyakran szerepelnek olyan mennyiségek, melyeket egy vektorral és egy ponttal adnak meg. Pl. az erő hatását egy merev testre csak akkor tudjuk pontosan megállapítani, ha az erő irányán és nagyságán (azaz vektorán) kívül még az erő tá-



10. ábra

madási pontját is ismerjük. Az ilyen, egy vektorral és egy ponttal megadható mennyiségeket röviden kötött vektoroknak nevezik. E definíció következménye, hogy két kötött vektort csak akkor tekintenek egyenlőnek, ha azok kezdő és végpontja egyező.

Az alábbiakban csak szabad vektorokkal fogunk foglalkozni, amelyeknek egyenlőségét fent értelmeztük, s amelyek ebből folyólag önmagukkal párhuzamosan szabadon eltolhatók (innen ered elnevezésük).

Egységvektornak neveztünk minden olyan vektort, melynek nagysága (abszolút értéke) = 1. Általában így jelöljük: $\vec{e}$ ($|\vec{e}| = 1$). Az $\vec{a}$ vektorral egyirányú, egységnyi hosszúságú vektort (az $\vec{a}$ irányába mutató egységvektort) így jelöljük: $\vec{a}_e$.

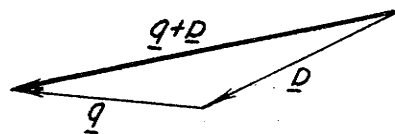
Null-vektornak, vagy zérusvektornak tekintjük azt a vektort, melynek abszolút értéke zérus. Irány ezen vektornak nem adható. Jelölése: $\vec{0}$.

Műveletek vektorokkal

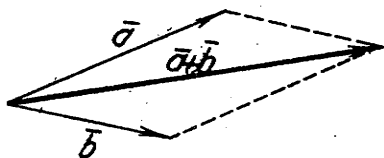
I. Összeadás

Ha két erő egyszerre hat egy pontra, akkor ezek együttes hatása olyan lesz, mintha először csak az egyik, azután pedig a másik hatott volna. Az együttes hatást kifejező erőt a két erő eredőjének, vagy összegének nevezzük. Az eredő fogalmát tetszőleges más két $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor esetére a következőképpen visszük át:

az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összegének (jelben $\vec{a} + \vec{b}$) nevezzük azt a vektort, melyet úgy képezzünk, hogy az $\vec{a}$ vektor végpontjából irány és nagyság szerint felmérjük a $\vec{b}$ vektort; az $\vec{a}$ vektor kezdőpontját a $\vec{b}$ vektor végpontjával összekötő vektor lesz az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor. (11. ábra.) Az összeadásnak ezen szabálya (az ún. poligon-szabály) nemcsak két, hanem általában akárhány, véges számú, összeadandó esetében is alkalmazható.



11. ábra



12. ábra

Az ún. paralelogramma-szabály értelmében az $\vec{a} + \vec{b}$ vektort, mint a közös kezdőpontból felmért $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor által kísért parallelogramma azon átlójával egyenlő nagyságú és az átló irányába mutató vektort kapjuk, mely $\vec{a}$ és $\vec{b}$ kezdőpontjából a parallelogramma szembenfekvő csúcsa felé mutat. (12. ábra.)

A 11. ábrából közvetlenül leolvasható az alábbi egyenlőség:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

A vektorok összeadása a következő műveleti szabályokkal rendelkezik:

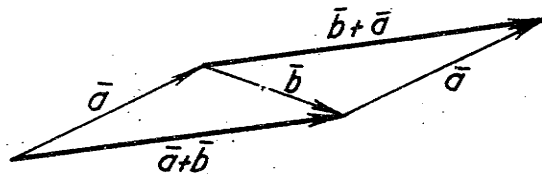
$$1^0 \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} = \vec{a} \text{ (kommutativitás), (lásd 13. ábra); (lásd 36. old.)}$$

speciálisan:

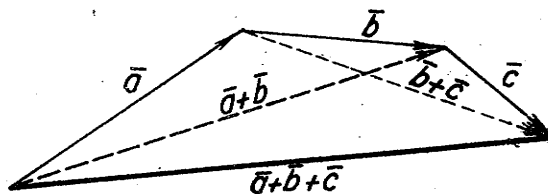
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

$$2^0 (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ (asszociativitás)}$$

(lásd 14. ábra); (lásd 36. old.).



13. ábra



14. ábra

II. Skalárral (számmal) való szorzás

Ha $\lambda > 0$, akkor a $\lambda \vec{a}$ vektoron egy $\vec{a}$ - val megegyező irányu, de $\lambda |\vec{a}|$ nagyságu vektort értünk. Egy ilyen vektor például az $\vec{a}$ irányába mutató $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_e$ egységvektor. ($\vec{a} \neq \vec{0}$).

Ha $\mu < 0$, $\mu \vec{a}$ $\vec{a}$ - val ellentett irányu, $|\mu| |\vec{a}|$ nagyságu vektort jelent. Speciálisan $\mu = -1$ esetén a $(-1) \vec{a} = -\vec{a}$ jelölést bevezetve, a $-\vec{a}$ vektor $\vec{a}$ - val egyező nagyságu, de ellentett irányu vektort jelent. (15. ábra.)

$\lambda = 0$ esetén

$$\lambda \vec{a} = 0 \vec{a} = \vec{0}.$$

Világos, hogy ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamos vektorok, és sem $\vec{a}$, sem pedig $\vec{b}$ nem zérusvektor, akkor van olyan ν , hogy

$$\vec{a} = \nu \vec{b}.$$

A skalárral való szorzás a következő műveleti szabályokkal rendelkezik:

- 1^o $(\lambda_1 \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 (\lambda_2 \vec{a}) = \lambda_2 (\lambda_1 \vec{a})$ (asszociativitás),
- 2^o $(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$ (disztributivitás),
- $\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ (disztributivitás).

III. Kivonás

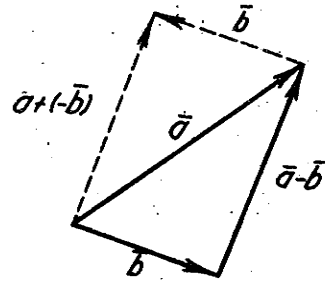
Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbségén értjük az $\vec{a}$ és $-\vec{b}$ vektorok összegét.

Mint ahogy az a 16. ábráról is leolvasható, az $\vec{a} - \vec{b}$ különbségvektor úgy szerkeszthető meg közvetlenül, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektort közös kezdőpontból mérve fel, a két vektor végpontját összekötő, a kisebbbitendő ($\vec{a}$) vektor felé irányított vektort szerkesztjük meg.

Speciálisan

$$\vec{a} - \vec{0} = \vec{a},$$

$$\vec{0} - \vec{a} = -\vec{a}.$$



16. ábra

IV. Két vektor skaláris szorzata (Belső szorzat)

Definiáljuk először, hogy mit kell két vektor által közbezárt szögön értenünk. Két vektor által közbezárt szög a két vektor félegyenese által meghatározott 180° (ill. π) - nél nem nagyobb szög.

Definíció

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatán értjük a két vektor abszolút értékének és a két vektor által közbezárt szög koszinuszának szorzatát.

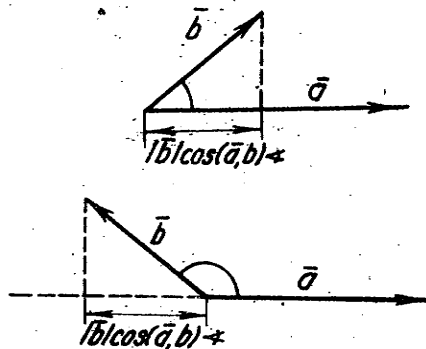
$\vec{a}$ és $\vec{b}$ skaláris szorzatának jelölésére az $\vec{a} \cdot \vec{b}$, vagy $\vec{a}\vec{b}$, vagy $(\vec{a}, \vec{b})$ jelölést használjuk.

A definíció értelmében tehát

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Speciálisan

$$\vec{0}\vec{a} = 0.$$



17. ábra

Mint a 17. ábrából látható $|\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ a $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ vektorra való előjeles vetületét, $\vec{a}\vec{b}$ tehát a $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ -ra vett előjeles vetületének $|\vec{a}|$ -kel való szorzatát jelenti. (Az előjeles vetület

$0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) < \frac{\pi}{2}$ esetében pozitív,

$\frac{\pi}{2} < (\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$ esetében negatív.) Ha $\vec{b}$

az erőt, $\vec{a}$ pedig az elmozdulás vektorát jelenti, akkor $\vec{a}\vec{b}$ az erő elmozdulás irányába eső vetületének és az elmozdulás nagyságának szorzata, azaz az erő által végzett munka mérőszáma.

A fentiekből következik, hogy $|\vec{a}| = 1$ esetén $\vec{a}\vec{b}$ a $\vec{b}$ vektornak az $\vec{a}$ vektorra való előjeles vetületét adja.

Általában, ha $\vec{b}$ $\vec{a}$ -ra való előjeles vetületét megszorozzuk az $\vec{a}$ irányába mutató $\vec{e}$ egységvektorral, akkor $\vec{b}$ - nek $\vec{a}$ - ra való vetítésekor adódó vetületvektorát nyerjük, s ez az előjeles vetület előjelének megfelelően egyező, vagy ellentett irányú $\vec{a}$ - val.

Összefoglalva tehát, az $\vec{a}$ vektor irányába mutató egységvektort röviden $\vec{e}$ - vel jelölve, a $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ - ra való előjeles vetülete:

$$v_1 = \vec{e}\vec{b},$$

míg $\vec{b}$ $\vec{a}$ - ra való vetületvektora:

$$\vec{v}_1 = (\vec{e}\vec{b})\vec{e}.$$

A skaláris szorzás műveleti szabályai:

$$1^0 \vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a} \text{ (kommutativitás)}$$

a szabály igaz voltáról közvetlen kiírással könnyű meggyőződni.

$$2^0 \lambda (\vec{a}\vec{b}) = (\lambda \vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda \vec{b}) \text{ (asszociativitás),}$$

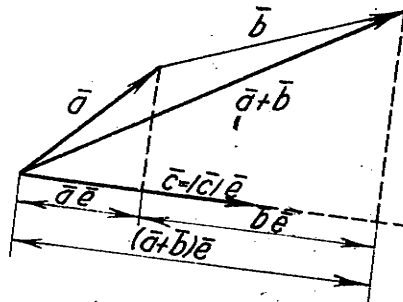
tehát számtényező a skaláris szorzat bármelyik tényezőjéből kiemelhető, mint arról a definíció alapján könnyen meggyőződhetünk.

$$3^0 (\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} \text{ (disztributivitás)}$$

Bizonyítás

$|\vec{c}|$ a bizonyítandó összefüggés jobb- és baloldalából 2^0 értelmében kiemelhető, tehát elegendő az $\vec{e} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ jelöléssel $|\vec{c}| \neq 0$ az

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{e} = \vec{a}\vec{e} + \vec{b}\vec{e}$$



összefüggést bizonyítani. Ez azonban azt fejezi ki, hogy az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor $\vec{c}$ -re való előjeles vetülete az $\vec{a}$ vektor $\vec{c}$ -re való előjeles vetületének és a $\vec{b}$ vektor $\vec{c}$ -re való előjeles vetületének összege (lásd 18. ábra), ami valóban igaz.

Megjegyezzük még, hogy a skaláris szorzás definíciójából folyik, hogy

$$\vec{a}\vec{b} = 0$$

18. ábra

nemcsak akkor állhat, ha $|\vec{a}| = 0$, vagy $|\vec{b}| = 0$, azaz ha $\vec{a}$, vagy $\vec{b}$ null-vektor, hanem akkor is, ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egymásra merőlegesek, azaz $\cos(\vec{a}, \vec{b}) \neq = \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Célszerű ezért a $\vec{0}$ vektort minden vektorra merőlegesnek tekinteni.

A skaláris szorzást a későbbiekben gyakran fogjuk két vektor merőlegességének kimutatására használni.

A skaláris szorzás definíciójából következik még, hogy

$$\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

V. Két vektor vektoriális szorzata (Külső szorzat)

Definíció

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, melynek nagysága az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok abszolút értékének és a vektorok által bezárt szög szinuszána szorzata, iránya pedig az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok síkjára merőleges és azokkal jobbrendszer alkot. (Ezen azt kell értenünk, hogy az $\vec{a}$ vektor irányába mutatva jobbkézünk hüvelykujjával, a $\vec{b}$ vektor irányába mutatva jobbkézünk mutatóujjával, e két újra merőlegesen mutató középső ujjunk az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok vektoriális szorzatának irányába fog mutatni.)

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok vektoriális szorzatát így jelöljük: $\vec{a} \times \vec{b}$ (olv. $\vec{a}$ kereszt $\vec{b}$).

Néha az $[\vec{a}, \vec{b}]$ jelölés használatos.

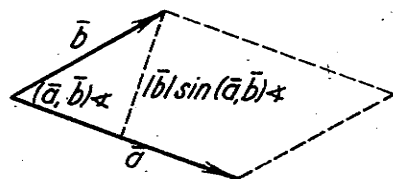
Előbb adott definíciónk értelmében:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) \neq.$$

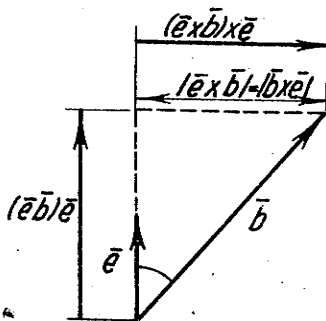
Mint a 19. ábrából látható $|\vec{a} \times \vec{b}|$ az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területének mérőszámát adja.

Speciálisan

$$\vec{0} \times \vec{b} = \vec{0}.$$



19. ábra



20. ábra

Ha a $\vec{b}$ vektor adott pontban támadó erőt jelent, $\vec{a}$ pedig egy adott P pontból az erő támadáspontjába mutató vektor (az erő karja), akkor az $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor a P pontra vonatkozó forgató nyomatékot szolgáltatja.

$|\vec{a}| = 1$ esetében az $\vec{a} = \vec{e}$ jelöléssel

$$|\vec{e} \times \vec{b}| = |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{e}, \vec{b}) \neq, (|\vec{e}| = 1),$$

azaz egy $\vec{b}$ vektornak az $\vec{e}$ egységvektorral vett vektoriális szorzatának abszolút értéke $\vec{b}$ - nek $\vec{e}$ -re merőleges vetületét adja (20. ábra); $v_2 = |\vec{e} \times \vec{b}|$.

$\vec{b}$ - nek az $\vec{e}$ egységvektorra merőleges vetület-vektora:

$$\bar{v}_2 = (\bar{e} \times \bar{b}) \times \bar{e}$$

Nyilván áll:

$$\bar{b} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2,$$

ahol

$$\bar{v}_1 = (\bar{e}\bar{b})\bar{e} \text{ (lásd IV.)}, \quad \bar{v}_2 = (\bar{e} \times \bar{b}) \times \bar{e}, \quad (20. \text{ ábra}).$$

A vektoriális szorzás műveleti szabályai:

A vektoriális szorzás nem kommutatív:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}),$$

az $\bar{a} \times \bar{b}$ és $\bar{b} \times \bar{a}$ vektorok abszolút értéke ugyanis megegyező, irányuk azonban ellenkező, mint arról a definícióból könnyen meggyőződhetünk.

$$1^0 \lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b}) \quad (\text{asszociativitás})$$

tehát számtényező a vektoriális szorzat bármelyik tényezőjéből kiemelhető. Ennek oka az, hogy a $\lambda(\bar{a} \times \bar{b})$, $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$ és $\bar{a} \times (\lambda\bar{b})$ vektorok nagysága és iránya egyező.

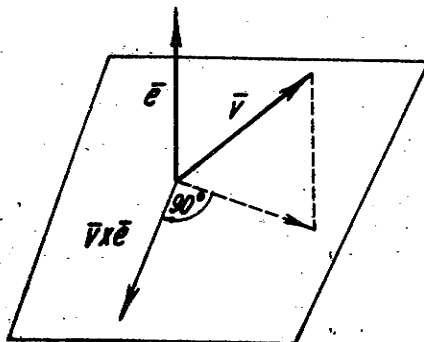
$$2^0 (\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c} \quad (\text{disztributivitás})$$

($\bar{c} = \bar{0}$ esetében a 2^0 állítás triviálisan igaz.)

Feltéhető, hogy $\bar{c}$ egységvektor, hisz 1^0 értelmében, ha nem volna az, a $|\bar{c}|$ számtényező összefüggésünk mindkét oldalából kiemelhetnénk, és mivel $|\bar{c}| \neq 0$, ezzel egyszerűsítve az

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{e} = \bar{a} \times \bar{e} + \bar{b} \times \bar{e}, \quad (|\bar{e}| = 1)$$

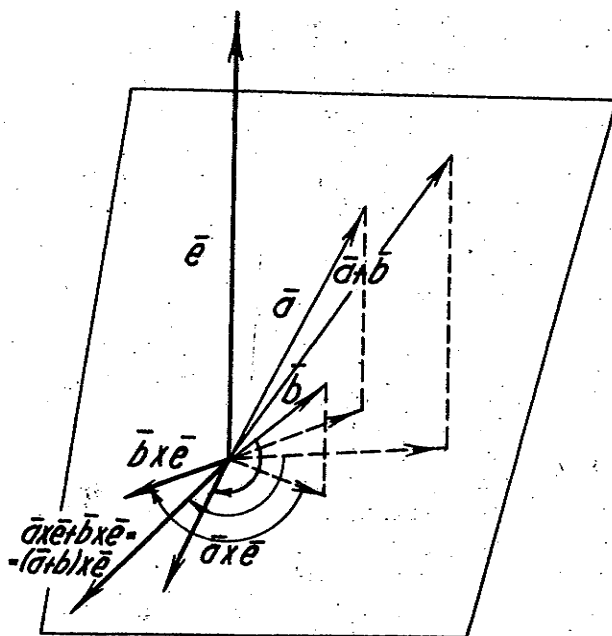
összefüggésre jutunk. Ezen utóbbi összefüggésünk bizonyításához két megjegyzésre van szükségünk:



21. ábra

a.) Valamely $\bar{v}$ vektornak az $\bar{e}$ egységvektorral alkotott $\bar{v} \times \bar{e}$ vektoriális szorzata két lépésben úgy nyerhető, hogy először $\bar{v}$ -t az $\bar{e}$ -re merőleges síkra vetítjük, majd a vetületet ebben a síkban negatív irányban (az óramutató járásával egyező irányban) derékszöggel elforgatjuk (21. ábra).

b.) Mind az egy síkra való vetítés művelete, mind pedig a derékszöggel való elforgatás művelete vektorok összegére tagonként alkalmazható (22. ábra).



22. ábra

Megjegyezzük még, hogy a vektoriális szorzás definíciójából következik, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok vektoriális szorzata null-vektort szolgáltat:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0},$$

ha $|\vec{a}| = 0$, vagy $|\vec{b}| = 0$, vagy ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamosak, azaz

$\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sin 0 = 0$. Célszerű ezért a $\vec{0}$ vektort minden vektorral párhuzamosnak tekinteni.

A vektoriális szorzat ezen tulajdonságát a későbbiekben is fel fogjuk használni két vektor párhuzamosságának kimutatására.

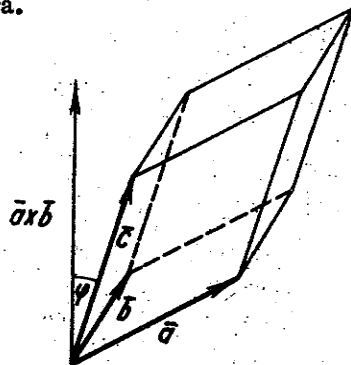
VI. Három vektor vegyes szorzata

Definíció

Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok vegyes szorzatán az $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ számot értjük.

A vegyes szorzatot így jelöljük: $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$, vagy $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

Az $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ vegyes szorzat az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok által kifeszített hasáb előjelés térfogatát szolgáltatja (23. ábra). Pozitív előjellel akkor nyerjük a hasáb térfogatát, ha $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ un. jobbrendezett alkot. Ti.



23. ábra

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi,$$

ahol $|\vec{a} \times \vec{b}|$ az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területének mérőszáma, φ pedig az $\vec{a} \times \vec{b}$ és a $\vec{c}$ vektorok által bezárt szög. Ha $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, azaz $\cos \varphi \geq 0$, mivel pedig $|\vec{c}| \cos \varphi$ a hasáb magasságát szolgáltatja, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ valóban a hasáb köbtartalmát szolgáltatja. ($\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ esetében $\cos \varphi < 0$, $|\vec{c}| \cos \varphi$ a hasáb magasságának (-1) -szere-sét, s így $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ a hasáb térfogata mérőszámának (-1) -szeresét szolgáltatja.)

A vegyes szorzat értéke nem változik, ha tényezőit ciklikusan felcseréljük. ($\vec{a}$ helyett $\vec{b}$ -t, $\vec{b}$ helyett $\vec{c}$ -t, $\vec{c}$ helyett $\vec{a}$ -t írunk):

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

Az állítás a vegyes szorzat geometriai jelentéséből következik. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ és $\vec{c}\vec{a}\vec{b}$ ugyanis ugyanannak az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok által kifeszített hasábnak a térfogatát jelenti ugyanazon előjellel, hisz ha $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ és $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ -re is áll ez.

Ezen állításból és a skaláris szorzás kommutativitásából következik, hogy

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}),$$

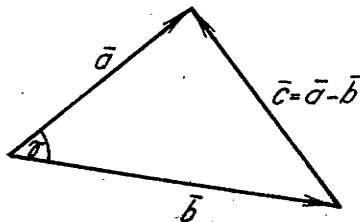
hiszen $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

A vegyes szorzás nem kommutatív, két szomszédos tényezőjének felcserélése előjelváltást eredményez (vektoriális szorzás):

A vegyes szorzás definíciójából következik, hogy ha $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ egy síkban fekszik (pontosabban, ha $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ egy síkkal párhuzamos vektorok), akkor

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0,$$

és fordítva, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ esetében $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ biztosan egy síkban fekszik (egy síkkal párhuzamos vektorok).



24. ábra

Vektorok segítségével sok elemi geometriai tételnek tudjuk egyszerű bizonyítását adni. Pl. az un. koszinusz-tételt a következőképp bizonyíthatjuk:

A 24. ábra jelöléseivel:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b},$$

felhasználva mármost, hogy $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$,

$\vec{b}\vec{b} = |\vec{b}|^2$, $\vec{c}\vec{c} = |\vec{c}|^2$ (lásd IV):

$$\begin{aligned}
 |\bar{c}|^2 &= (\bar{a} - \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 - 2 \bar{a}\bar{b} = \\
 &= |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2 |\bar{a}| |\bar{b}| \cos (\bar{a}, \bar{b}) \leq ,
 \end{aligned}$$

amit bizonyitani akartunk.

8.) VEKTOR FELBONTÁSA ÖSSZETEVŐKRE. VEKTOR MEGADÁSA KOORDINÁTAI SEGÍTSÉGÉVEL

Említettük már, hogyan lehet egy $\vec{b}$ vektort egy tetszőleges $\vec{a} \neq \vec{0}$ vektorral párhuzamos és $\vec{a}$ -ra merőleges vektor összegére felbontani. E felbontás egyértelmű volt, mégpedig

$$\vec{b} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

ahol

$$\vec{v}_1 = (\vec{e}\vec{b})\vec{e},$$

$$\vec{v}_2 = (\vec{e} \times \vec{b}) \times \vec{e};$$

$\vec{e}$ - vel az $\vec{a}$ irányába mutató egységvektort jelöltük (lásd 7.)V.)

Ha $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nem egy síkban fekvő (nem egy síkkal párhuzamos) vektorok, akkor tetszőleges $\vec{r}$ vektor egyértelműen felbontható az $\vec{a}$, $\vec{b}$, és $\vec{c}$ vektorokkal párhuzamos vektorok (un. összetevők) összegére:

$$\vec{r} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

Állításunkat egyelőre abban a speciális esetben bizonyítjuk be, amikor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ egymásra páronként merőleges egységvektorok (általánosságban a bizonyítást a 9.) fejezetben - 5^o alatt - végezzük el). Ekkor ui. ha

$$\vec{r} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$$

a jobb- és baloldalt $\vec{e}_1$, majd $\vec{e}_2$ és végül $\vec{e}_3$ - al skalárisan megszorozva

$$\vec{r}\vec{e}_1 = \alpha,$$

$$\vec{r}\vec{e}_2 = \beta,$$

$$\vec{r}\vec{e}_3 = \gamma$$

adódik, mivel feltételünk értelmében

$$\vec{e}_1\vec{e}_1 = \vec{e}_2\vec{e}_2 = \vec{e}_3\vec{e}_3 = 1,$$

$$\vec{e}_1\vec{e}_2 = \vec{e}_2\vec{e}_1 = \vec{e}_1\vec{e}_3 = \vec{e}_3\vec{e}_1 = \vec{e}_2\vec{e}_3 = \vec{e}_3\vec{e}_2 = 0.$$

Tehát, ha $\vec{r}$ felbontható a fenti módon összetevőkre, beláttuk, hogy a felbontásban szereplő állandók

$$\alpha = \vec{r} \vec{e}_1, \beta = \vec{r} \vec{e}_2, \gamma = \vec{r} \vec{e}_3.$$

Be kell azonban még látnunk, hogy $\vec{r}$ -et a fenti módon fel lehet az $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ egymásra páronként merőleges egységvektorokra bontani, azaz, ha

$$\alpha = \vec{r} \vec{e}_1, \beta = \vec{r} \vec{e}_2, \gamma = \vec{r} \vec{e}_3,$$

akkor

$$\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$$

valóban $\vec{r}$ -et állítja elő.

Képezzük ebből a célból a

$$\vec{v} = \vec{r} - \alpha \vec{e}_1 - \beta \vec{e}_2 - \gamma \vec{e}_3$$

vektort. E vektort skalárisan $\vec{e}_1$, majd $\vec{e}_2$, ill. $\vec{e}_3$ -mal szorozva

$$\vec{v} \vec{e}_1 = \vec{r} \vec{e}_1 - \alpha = 0,$$

$$\vec{v} \vec{e}_2 = \vec{r} \vec{e}_2 - \beta = 0,$$

$$\vec{v} \vec{e}_3 = \vec{r} \vec{e}_3 - \gamma = 0$$

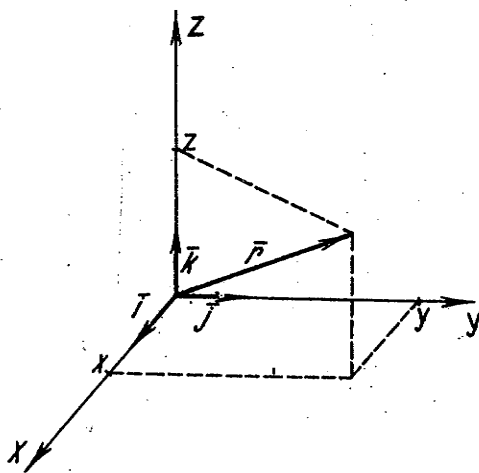
adódik, azaz $\vec{v}$ merőleges az $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ és $\vec{e}_3$ vektorokra. Az első feltétel értelmében $\vec{v}$ az $\vec{e}_2$ és $\vec{e}_3$ vektorok síkjában fekszik, a második feltétel miatt párhuzamos az $\vec{e}_3$ vektorral, s ez a harmadik feltétel miatt csak úgy lehetséges, ha $\vec{v} = \vec{0}$, azaz

$$\vec{r} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3,$$

amit bizonyítani akartunk.

A vektorokat általában számokkal célszerű jellemezni. Evégből legcélszerűbb a térben (speciálisan síkban) derékszögű koordinátarendszert felvennünk, és a koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorokat (un. alapvektorokat) definiálnunk. Az X, Y és Z tengely irányába (a jobbsodrású derékszögű koordinátarendszer tengelyeinek megfelelő irányítással) mutató egységvektorokat $\vec{i}, \vec{j}$, és $\vec{k}$ -val jelöljük. ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tehát jobbrendszert alkot.) Előbbi állításunk értelmében ezen egymásra páronként merőleges egységvektorok irányába eső összetevők összegére tetszőleges $\vec{r}$ vektor egyértelműen felbontható:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$



25. ábra

A későbbiekben sokszor fel fogjuk használni azt a tényt, hogy a tér pontjai is jellemezhetők vektorokkal, mégpedig a derékszögű koordináta-rendszer kezdő-pontjából az illető térbeli pontokhoz mutató ún. helyzetvektorokkal (rádiuszvektorokkal).

és $\vec{r}$ az (x, y, z) számhármassal egyértelműen jellemezhető. x , y és z - t $\vec{r}$ koordinátáinak nevez-zük, mert $\vec{r}$ - et önmagával párhuzamosan úgy eltolva, hogy kezdőpontja a derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontjába essék, végpontjának derékszögű koordinátái x , y és z (lásd 25. ábra) lesznek. (Az irodalomban néha x , y , z -re a koordináta elnevezés helyett a rendező elnevezés is használá-tos.) Könnyen belátható, hogy x , y , z az $\vec{r}$ vektor koordináta-tengelyekre (pontosabban az $\vec{i}$, $\vec{j}$ és $\vec{k}$ egységvektorokra) vonatkozó előjeles vetületei.

Az $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ vektorokat $\vec{r}$ összetevőinek, vagy komponen-seinek nevezzük.

9.) MŰVELETEK KOORDINÁTÁKKAL MEGADOTT VEKTOROKKAL

ALKALMAZÁSOK

Koordinátákkal megadott vektorok esetében a korábban vektorok között már definiált műveletek könnyen elvégezhetők.

I. Összeadás

II. Kivonás

Ha

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},$$

$$\vec{r}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

akkor

$$\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2 = (x_1 \pm x_2) \vec{i} + (y_1 \pm y_2) \vec{j} + (z_1 \pm z_2) \vec{k}.$$

Pl. Ha

$$\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k},$$

akkor

$$\vec{a} + \vec{b} = 8\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = -2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}.$$

III. Skalárral (számmal) való szorzás

Ha

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

akkor

$$\lambda \vec{r} = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j} + (\lambda z)\vec{k}.$$

Pl.

$$\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k},$$

$$3\vec{a} = -6\vec{i} + 12\vec{j} - 9\vec{k},$$

$$-2\vec{a} = 4\vec{i} - 8\vec{j} + 6\vec{k}.$$

IV. Skaláris szorzás

Az $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ egységvektorok bevezetésénél hangsúlyoztuk, hogy egymásra páronként merőleges egységvektorok, tehát a skaláris szorzás definíciója értelmében (7.)IV.)

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{i} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = \vec{k}\vec{i} = \vec{i}\vec{k} = 0,$$

$$\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1,$$

s így a skaláris szorzás disztributivitását felhasználva az

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$$

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

vektorok skaláris szorzata:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1\vec{r}_2 &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= x_1x_2\vec{i}\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\vec{j} + y_1z_2\vec{j}\vec{k} + \\ &\quad + z_1x_2\vec{k}\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\vec{k} = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.\end{aligned}$$

Az itt látható eredményt röviden úgy szoktuk megfogalmazni, hogy két vektor skaláris szorzatát úgy számítjuk ki, hogy a vektorok megfelelő koordinátáit összeszorozzuk és ezen szorzatokat összeadjuk.

Speciálisan

$$\begin{aligned}|\vec{r}_1|^2 &= \vec{r}_1\vec{r}_1 = x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = \\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,\end{aligned}$$

és így

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Egy vektor abszolút értékét tehát megkapjuk, ha koordinátáinak négyzetösszegéből gyököt vonunk.

Pl.

$$\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k},$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k},$$

$$\vec{a}\vec{b} = 2 - 5 - 21 = -24.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26}.$$

$$\vec{a}_e = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{4}{\sqrt{26}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{26}} \vec{j} + \frac{3}{\sqrt{26}} \vec{k}.$$

V. Vektoriális szorzás

Mivel $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ egymásra páronként merőleges, jobbrendszert alkotó egységvektorok, a vektoriális szorzás definíciójának értelmében (7.) V.)

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{j} &= -(\vec{j} \times \vec{i}) = \vec{k}, \\ \vec{j} \times \vec{k} &= -(\vec{k} \times \vec{j}) = \vec{i}, \\ \vec{k} \times \vec{i} &= -(\vec{i} \times \vec{k}) = \vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Felhasználva mármost a vektoriális szorzás disztributivitását az

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \\ \vec{r}_2 &= x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}\end{aligned}$$

vektorok vektoriális szorzata:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\ &= x_1 x_2 (\vec{i} \times \vec{i}) + x_1 y_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &\quad \vec{0} \qquad \qquad \vec{k} \qquad \qquad -\vec{j} \\ &+ y_1 x_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + y_1 z_2 (\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &\quad -\vec{k} \qquad \qquad \vec{0} \qquad \qquad \vec{i} \\ &+ z_1 x_2 (\vec{k} \times \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + z_1 z_2 (\vec{k} \times \vec{k}) = \\ &\quad \vec{j} \qquad \qquad -\vec{i} \qquad \qquad \vec{0} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}.\end{aligned}$$

A vektoriális szorzat kiszámítására szolgáló ezen szabály megjegyzése ebben a formában igen nehézkes, ezért célszerű a következő jelölések bevezetése: $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ koordinátáit foglaljuk táblázatba a következőképpen:

$$\begin{aligned}y_1 z_2 - z_1 y_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, & x_1 z_2 - z_1 x_2 &= \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Mint láthatjuk, ezen táblázatokhoz tartozó kiszámítási utasítás:
a bal felső sarokból kiinduló átlóban (az un. főátlóban) álló elemek szorzatából le kell vonni a másik átlóban (mellékátló) álló elemek szorzatát.
További célszerű jelölés:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

ahol tehát a jobboldali négyzetes táblázathoz tartozó kiszámítási utasítás:

a bal felső sarokban álló elemet + jellel véve megszorozzuk azzal a négy elemből álló négyzetes táblázattal, melyet ezen elemet ($\bar{i} - t$) tartalmazó sor és oszlop törlése után az eredeti táblázatból nyerünk; ehhez hozzáadjuk a felső sor középső eleme ($\bar{j}$) (-1) -szeresének a $\bar{j} - t$ tartalmazó sor és oszlop törlése után az eredeti táblázatból visszamaradó négyzetes táblázattal alkotott szorzatát; végül e két taghoz hozzáadjuk a jobb felső sarokban álló elem ($\bar{k}$) és ezen elemet tartalmazó sor és oszlop törlése után az eredeti táblázatból visszamaradó négyzetes táblázat szorzatát. Az itt részletezett kifejtéssel adódó (4 elemű) négyzetes táblázatok kifejtésére már az előbb adtunk utasítást.

A fentiekhez hasonló négyzetes táblázatokat determinánsoknak nevezzük, részletesebb tárgyalásukkal a 10.) fejezetben foglalkozunk.

Pl.

$$\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k},$$

$$\bar{b} = -2\bar{i} + 5\bar{j} - 6\bar{k},$$

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= (24-5)\bar{i} - (-18+2)\bar{j} + (15-8)\bar{k} = \\ &= 19\bar{i} + 16\bar{j} + 7\bar{k}. \end{aligned}$$

VI. Vegyes szorzat

A vegyes szorzat definíciója (7.) VI.) értelmében

$$\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 = \bar{r}_1 (\bar{r}_2 \times \bar{r}_3),$$

tehát az

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},$$

$$\vec{r}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k},$$

$$\vec{r}_3 = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}$$

vektorok vegyes szorzata:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_3 &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \\ &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \left\{ \vec{i} \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right\} = \\ &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

ahol a végül adódó determinánsra az itt is látható, de a vektoriális szorzatnál részletesen elmondott kifejtési szabályt alkalmazzuk.

Pl. az

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k},$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k},$$

$$\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j}$$

vektorok vegyes szorzata

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \dots = 2.$$

Alkalmazások

1^o Két vektor hajlásszögének kiszámítása

Határozzuk meg az

$$\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

és

$$\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

vektorok által bezárt szöget.

A skaláris szorzás definíciójából (7.) IV.)

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{12}{\sqrt{14} \sqrt{45}} \approx 0,478,$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \approx 61,4^\circ \approx 1,07.$$

2^o Vektor adott irányu vetületének és vetületvektorának meghatározása

a.) Határozzuk meg az $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ vektornak a $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$ vektorra való előjeles vetületét. 7.) IV. értelmében a keresett vetület

$$v_1 = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{10}{\sqrt{5}} \approx 4,47.$$

A $\vec{b}$ irányába mutató vetületvektor (lásd 7.) IV.)

$$\vec{v}_1 = v_1 \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = 4\vec{j} - 2\vec{k}.$$

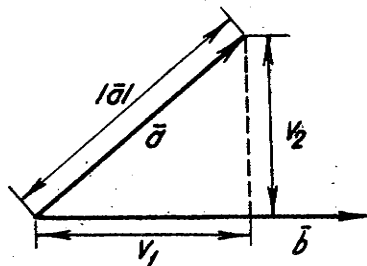
b.) Határozzuk meg az $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ vektornak a $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$ vektorra merőleges vetületét.

Feladatunkat kétféleképpen is megoldhatjuk. Előző eredményünket felhasználva Pythagoras tételét alkalmazva

$$v_2 = \sqrt{|\vec{a}|^2 - v_1^2} = \sqrt{49 - 20} \approx 5,4,$$

mivel v_2 egy olyan derékszögű háromszög befogója, melynek átfogója $|\vec{a}|$, másik befogója pedig az a.)-ban meghatározott v_1 vetület. (26. ábra.)

Közvetlenül a feladatot így oldhatjuk meg: (lásd 7.) V.)



26. ábra

$$v_2 = \left| \vec{a} \times \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right|.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 10 \vec{i} + 3 \vec{j} + 6 \vec{k},$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{100 + 9 + 36} \approx 12,04,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{5} \approx 2,24,$$

és így

$$v_2 = \frac{12,04}{2,24} \approx 5,4.$$

c.) Határozzuk meg az

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

vektorok a koordinátatengelyekkel (pontosabban az $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ egységvektorokkal) bezárt α , β , γ szögeinek koszinuszait, $\vec{r}$ ugynevezett iránykoszinuszait.

Az a.)-ban alkalmazott okoskodással

$$\cos(\vec{r}, \vec{i}) = \cos \alpha = \frac{\vec{r} \cdot \vec{i}}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos(\vec{r}, \vec{j}) = \cos \beta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{j}}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos(\vec{r}, \vec{k}) = \cos \gamma = \frac{\vec{r} \cdot \vec{k}}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Mivel azonban az $\vec{r}$ vektor irányába eső egységvektor

$$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

látható, hogy $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ nem más, mint ezen egységvektornak koordinátái:

$$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}.$$

Bármely egységvektor koordinátái tehát iránykoszinuszok, vagyis megadják a vektor $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ egységvektorokkal bezárt szögeinek koszinuszait.

3^o Területszámítás

Számítsuk ki a $P_1(5, 2, 1)$, $P_2(2, 6, 1)$, $P_3(3, 4, 5)$ csucspontu háromszög területét.

Tudjuk, hogy $|\vec{a} \times \vec{b}|$ az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területének, és így $\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$ az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által kifeszített háromszög területének mérőszámát szolgáltatja. Feladatunk megoldásához első lépésként tehát adott háromszögünk két élvektorát (a csucspontokhoz mutató 2-2 helyzetvektor különbségvektorát) kell felírunk. Az

$$\vec{r}_1 = 5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k},$$

$$\vec{r}_2 = 2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k},$$

$$\vec{r}_3 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

jelölésekkel pl. két élvektor:

$$\vec{a} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = 3\vec{i} - 4\vec{j},$$

$$\vec{b} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3 = -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k},$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 16\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$T = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{404} \approx 10,05.$$

4^o Térfogatszámítás

Számítsuk ki az

$$\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k},$$

$$\vec{b} = \vec{j} - 2\vec{k},$$

$$\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$$

nem egysíku (nem egy síkkal párhuzamos) vektorok által kifeszített hasáb térfogatának mérőszámát.

7.) VI. értelmében a hasáb előjeles térfogatát az $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ vegyes szorzat szolgáltatja.

$$\vec{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -10 + 6 - 2 = -6,$$

azaz

$$V = 6.$$

E feladatot úgy is kitűzhetjük volna, hogy a kérdéses hasáb P_1 csucsának, és ezzel szomszédos másik három csucsának P_2, P_3, P_4 -nek adtuk volna meg a koordinátáit. A hasáb élvektorait a P_1 és P_2 , ill. P_3 , ill. P_4 csucsokhoz mutató helyzetvektorok különbségvektoraiként állítottuk volna elő. Fenti példánknál pl. a csucsok:

$$P_1(1, 2, 0), \quad P_2(0, -1, 2), \quad P_3(1, 1, 2), \quad P_4(2, 4, 6).$$

Be lehet bizonyítani, hogy ugyanezen csucspontok által kifeszített tetraéder térfogata az előbb kiszámított hasáb térfogatának hatoda:

$$V_{\text{tetraéder}} = \frac{6}{6} = 1.$$

5^o Vektor felbontása három nem egysiku vektor irányába eső összetevő összegére (Reciprok vektorhármas)

Bontsuk fel az

$$\vec{r} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

vektort az

$$\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j},$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},$$

$$\vec{c} = 2\vec{j} + \vec{k}$$

nem egysiku vektorok irányába eső összetevők összegére.

A kérdést mindjárt általánosságban vetjük fel. Tegyük fel, hogy valamely $\vec{r}$ vektor felbontható $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ irányu összetevők összegére:

$$(\ast) \quad \vec{r} = a_1 \vec{a} + b_1 \vec{b} + c_1 \vec{c},$$

ahol $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nem egysiku vektorok, azaz $\vec{abc} \neq 0$ (7.) VI.). Az a_1, b_1, c_1 együtthatókat a következőképp határozhatjuk meg:

(*) mindkét oldalát skalárisan az

$$\vec{a} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{abc}}$$

vektorral beszorozva

$$\vec{r}\vec{a}' = a_1 \frac{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}} = a_1$$

adódik, hiszen $\vec{a}'$ a vektoriális szorzás definíciója értelmében a $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokra merőleges.

(*) mindkét oldalát skalárisan a

$$\vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}, \text{ ill. } \vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}$$

vektorokkal beszorozva

$$\vec{r}\vec{b}' = b_1, \text{ ill. } \vec{r}\vec{c}' = c_1$$

adódik. Az itt felírt

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}, \vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}, \vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}$$

vektorokat az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorok reciprok vektorhármának nevezzük. Ezek segítségével $\vec{r}$ (*) alatti felbontásában a szereplő együtthatók:

$$a_1 = \vec{r}\vec{a}', \quad b_1 = \vec{r}\vec{b}', \quad c_1 = \vec{r}\vec{c}'.$$

Meg kell még mutatnunk, hogy valóban felbontható $\vec{r}$ az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorok irányába eső összetevőkre.

Szorozzuk be e célból a

$$\vec{v} = \vec{r} - a_1\vec{a} - b_1\vec{b} - c_1\vec{c}$$

vektort a fent definiált $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ reciprok vektorhármak tagjaival skalárisan:

$$\vec{v}\vec{a}' = \vec{r}\vec{a}' - a_1 = 0,$$

$$\vec{v}\vec{b}' = \vec{r}\vec{b}' - b_1 = 0,$$

$$\vec{v}\vec{c}' = \vec{r}\vec{c}' - c_1 = 0$$

adódik, vagyis $\vec{v}$ merőleges kell hogy legyen $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ mindegyikére.

Ha $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ nem egysíkú, akkor ez azt jelenti, hogy $\vec{v}$ merőleges $\vec{a}'$ és $\vec{b}'$ síkjára, tehát ha $\vec{v} \neq \vec{0}$, akkor mivel $\vec{v} \vec{c}' = 0$ - re is merőleges, $\vec{c}'$ bele kell hogy essen $\vec{a}'$ és $\vec{b}'$ síkjába, ami ellentmond azon feltevésünknek, hogy $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ nem egysíkú. $\vec{v}$ tehát null-vektor, azaz

$$\vec{0} = \vec{r} - a_1\vec{a} - b_1\vec{b} - c_1\vec{c},$$

$$\vec{r} = a_1\vec{a} + b_1\vec{b} + c_1\vec{c},$$

a kívánt felbontás valóban létezik.

Meg kell még mutatnunk, hogy ha $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ nem egysiku, akkor $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$ sem lehet egysiku. Ezt indirekt uton látjuk be.

Ha $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$ valamelyike, pl. $\bar{a}' = \vec{0}$, akkor $\bar{b} \times \bar{c} = \vec{0}$ miatt, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ párhuzamos, és így $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ egysiku. Tegyük fel tehát, hogy $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$ egyike sem null-vektor. Ha közülük kettő, pl. $\bar{a}'$ és $\bar{b}'$ párhuzamos, akkor közös irányukra $\bar{a}$, $\bar{b}$, és $\bar{c}$ mindegyike merőleges, hiszen $\bar{a}'$ $\bar{b}$ -re és $\bar{c}$ -re, $\bar{b}'$ $\bar{a}$ -ra (és $\bar{c}$ -re) merőleges; így $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ekkor is egysiku. Végül ha $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$ egysiku, de nincs közöttük két párhuzamos, akkor $\bar{a}$ $\bar{b}'$ és $\bar{c}'$ síkjára, (tehát $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$ közös síkjára), $\bar{b}$ pedig $\bar{a}'$ és $\bar{c}'$ síkjára (tehát ismét az előbbi közös síkra) merőleges, úgyhogy $\bar{a}$ és $\bar{b}$ párhuzamos, $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ egysiku.

Az itt közölt okoskodást leegyszerűsített formában a vektoroknak három, egymásra páronként merőleges egységvektorra történő felbontásánál (8.) fejezet) már elmondtuk.

Példánkra visszatérve, az adott $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorok reciprok vektorhármasa, mivel

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7,$$

$$\bar{a}' = \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{7} \bar{i} - \frac{2}{7} \bar{j} + \frac{4}{7} \bar{k},$$

$$\bar{b}' = \frac{\bar{c} \times \bar{a}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7} \bar{i} + \frac{3}{7} \bar{j} - \frac{6}{7} \bar{k},$$

$$\bar{c}' = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7} \bar{i} + \frac{3}{7} \bar{j} + \frac{1}{7} \bar{k}.$$

Igy tehát az

$$\bar{r} = a_1 \bar{a} + b_1 \bar{b} + c_1 \bar{c}$$

jelöléssel a kívánt felbontás együtthatói: ($\bar{r} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$)

$$a_1 = \bar{r}\bar{a}' = \frac{29}{7}, \quad b_1 = \bar{r}\bar{b}' = -\frac{33}{7}, \quad c_1 = \bar{r}\bar{c}' = -\frac{5}{7}.$$

6.) Kifejtési tétel

Bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket:

$$(\ast) \quad (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{a}\bar{c})\bar{b} - (\bar{b}\bar{c})\bar{a},$$

ill.

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\bar{b})\bar{c}.$$

Az itt felírt összefüggést akár első, akár másodikként felírt formájában kifejtési tételnek nevezik. (Az első összefüggésből a baloldali tényezők felcserélésével és mindkét oldalnak (-1) -gyel való beszorzásával adódik, ugyanis:

$$\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{b}\bar{c})\bar{a} - (\bar{a}\bar{c})\bar{b},$$

s ezen összefüggésből betűcserével a másodikként felírt összefüggésre jutunk.)

Elegendő tehát csupán az elsőnek felírt összefüggést bizonyítanunk.

a.) Ha $\bar{a}$ és $\bar{b}$ párhuzamos, akkor $(\ast)$ biztosan fennáll, hiszen

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{0} \times \bar{c} = \bar{0},$$

és az

$$\bar{a} = a_1 \bar{e}, \quad \bar{b} = b_1 \bar{e}$$

jelöléssel

$$(\bar{a}\bar{c})\bar{b} - (\bar{b}\bar{c})\bar{a} = a_1 b_1 \{ (\bar{e}\bar{c})\bar{e} - (\bar{e}\bar{c})\bar{e} \} = a_1 b_1 \{ \bar{0} \} = \bar{0}.$$

b) Tegyük fel, hogy $\bar{a}$ és $\bar{b}$ nem párhuzamos vektorok. Rögzítsük $\bar{a}$ és $\bar{b}$ - t, és vizsgáljuk, hogy $(\ast)$ milyen $\bar{c}$ vektorokra teljesül.

Ha $\bar{c}$ - re fennáll $(\ast)$, akkor $\lambda \bar{c}$ - re is fenn kell hogy álljon (λ tetszőleges szám), hiszen

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \lambda \bar{c} = (\bar{a}(\lambda \bar{c}))\bar{b} - (\bar{b}(\lambda \bar{c}))\bar{a}$$

a helyesnek feltételezett egyenletből λ - val való szorzással adódik.

Ha $(\ast)$ a $\bar{c}_1$ és $\bar{c}_2$ vektorokra helyes, azaz

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}_1 = (\bar{a}\bar{c}_1)\bar{b} - (\bar{b}\bar{c}_1)\bar{a},$$

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}_2 = (\bar{a}\bar{c}_2)\bar{b} - (\bar{b}\bar{c}_2)\bar{a},$$

akkor a $\bar{c}_1 + \bar{c}_2$ vektorra is teljesül:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c}_1 + \bar{c}_2) = \{ \bar{a}(\bar{c}_1 + \bar{c}_2) \} \bar{b} - \{ \bar{b}(\bar{c}_1 + \bar{c}_2) \} \bar{a}.$$

hiszen előbbi két egyenletünk összeadása éppen az utóbbi egyenletre vezet.

Kimondhatjuk tehát, hogy ha (κ) három, nem egysiku (nem egy síkkal párhuzamos) $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ vektorra fennáll, akkor (κ) - nak minden $\vec{c}$ vektorra teljesülnie kell, mivel 5.) értelmében tetszőleges $\vec{c}$ vektor mindig felírható a három, nem egysiku $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ vektorokkal párhuzamos összetevők összegeként, (azaz $\lambda_1 \vec{c}_1 + \lambda_2 \vec{c}_2 + \lambda_3 \vec{c}_3$ alakban) s ezen összetevőkre az előbb elmondottak értelmében (κ) teljesül.

Elég tehát a (κ) összefüggés igaz voltát három speciális, nem egysiku vektorra igazolnunk. Legyen ez a három, nem-egysiku vektor $\vec{a}, \vec{b}$, és $\vec{a} \times \vec{b}$, tehát bizonyítandó:

$$(1) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = (\vec{a}\vec{a})\vec{b} - (\vec{b}\vec{a})\vec{a},$$

$$(2) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b} = (\vec{a}\vec{b})\vec{b} - (\vec{b}\vec{b})\vec{a},$$

$$(3) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \{ \vec{a}(\vec{a} \times \vec{b}) \} \vec{b} - \{ \vec{b}(\vec{a} \times \vec{b}) \} \vec{a}.$$

(3) nyilván igaz, hiszen a jobb- és baloldalon is $\vec{0}$ áll. (A baloldalon egy vektornak önmagával képezett vektoriális szorzata áll, a jobboldali vegyeszorzatokban pedig két-két egyenlő tényező áll.)

(1) és (2) közül elég csak (1) - t bizonyítanunk, mert (1) - ből (2) $\vec{a}$ és $\vec{b}$ szerepének felcserélése után (-1) - gyel való szorzással adódik.

(1) - et is elég arra a speciális esetre igazolnunk, amikor $\vec{a}$ helyett az $\vec{e}$ egységvektor áll:

$$(4) \quad (\vec{e} \times \vec{b}) \times \vec{e} = \vec{b} - (\vec{e}\vec{b})\vec{e},$$

hiszen $\vec{a} = \lambda \vec{e}$ esetén ebből az (1) egyenlethez jutunk, ha λ^2 - nel szorzunk. (4) - et átrendezve azonban a

$$\begin{aligned} \vec{b} &= (\vec{e}\vec{b})\vec{e} + (\vec{e} \times \vec{b}) \times \vec{e} = \\ &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{aligned}$$

összefüggésre jutottunk, ahol $\vec{v}_1$ a $\vec{b}$ vektor $\vec{e}$ - vel párhuzamos összetevőjét ($\vec{e}$ - re való vetület-vektorát), $\vec{v}_2$ pedig $\vec{b}$ $\vec{e}$ - re merőleges összetevőjét jelenti. Ezen legutóbb nyert összefüggésünk fennállásából tehát következik az (1) összefüggés igaz volta. Ezzel a kifejtési tételt bebizonyítottuk.

(Az itt közölt bizonyítást természetesen visszafelé,

a $\vec{b} = (\vec{e}\vec{b})\vec{e} + (\vec{e} \times \vec{b}) \times \vec{e}$ összefüggésből kiindulva is elmondhattuk volna.)

7° Egyenes egyenlete

(Adott görbe egyenletén olyan összefüggést értünk, amelyet a görbe pontjai, és csak ezek a pontok elégítenek ki.)

Egy egyenes egyenletét akkor a legegyszerűbb felírunk, ha az egyenesnek egy pontját (az ezen ponthoz mutató helyzetvektort) és egy, az egyenessel párhuzamos $\vec{v}$ un. irányvektort adunk meg. Ha ugyanis

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

egy, az egyenesen fekvő ponthoz mutató helyzetvektor,

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

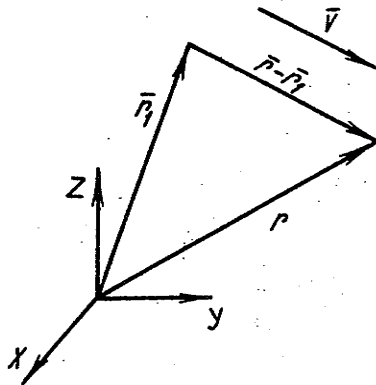
az egyenes adott (fix) pontjához mutató helyzetvektor és

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

az egyenes irányvektora, akkor az $\vec{r} - \vec{r}_1$ vektor párhuzamos $\vec{v}$ - vel (lásd 27. ábra), tehát

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda \vec{v}$$

(λ skalár állandó). (A két vektor párhuzamos voltát az $(\vec{r} - \vec{r}_1) \times \vec{v} = \vec{0}$ összefüggéssel is kifejezésre juttathattuk volna.)



27. ábra.

Az (1) képlet az egyenes vektori egyenlete. Mivel azonban, ha két vektor megegyezik egymással, akkor a megfelelő koordinátáik is meg kell, hogy egyezzenek, a szereplő vektorokat koordinátáik segítségével felírva nyerjük:

$$(2) \quad \begin{aligned} x - x_1 &= \lambda a, \\ y - y_1 &= \lambda b, \\ z - z_1 &= \lambda c, \end{aligned}$$

ill. mindhárom egyenlethől a λ skalárt kifejezve $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$ esetén:

$$(3) \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = \lambda.$$

a (2) egyenletrendszer, ill. annak (3) - ban felírt módosított alakját az egyenes paraméteres egyenletrendszerének nevezzük.

Ha a $\bar{v}$ irányvektor egységvektor, akkor - mint (1) - ből leolvasható $|\lambda|$ megadja az $\bar{r}$ helyzetvektoru változó, és $\bar{r}_1$ helyzetvektoru fix pont távolságát az egyenesen. Ha $\bar{v}$ nem egységvektor $|\lambda|$ ezzel a távolsággal arányos szám.

Két adott ponton áthaladó egyenes egyenletét úgy írjuk fel, hogy - az adott pontokba mutató helyzetvektorokat $\bar{r}_1$ és $\bar{r}_2$ - vel jelölve - $\bar{v} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ nyilván irányvektora az egyenesnek, s így egy irányvektor és egy fix pont ismeretében az előbbi módon fel tudjuk írni az egyenes egyenletét.

Pl. a $P_1(0, -2, 3)$ és $P_2(3, 4, 3)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete:

$$\bar{v} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k} - (-2\bar{j} + 3\bar{k}) = 3\bar{i} + 6\bar{j},$$

nyilván irányvektor azonban

$$\bar{v}_1 = \bar{i} + 2\bar{j}$$

is; ez utóbbival és a P_1 ponttal, mint adott ponttal tovább számolva, a keresett egyenlet:

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda \bar{v}_1,$$

vagyis

$$\begin{aligned} x &= \lambda, \\ y + 2 &= 2\lambda, \\ z - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Másképp felírva az egyenes egyenlete:

$$\begin{aligned} x &= \lambda, \\ y &= 2\lambda - 2, \\ z &= 3, \end{aligned}$$

illetve

$$x = \frac{y+2}{2}, \quad z = 3.$$

Az egyenes az XY síkkal párhuzamos $z = 3$ síkban fekszik.

Ha egy egyenes speciálisan egy koordinátasíkban fekszik, paraméteres egyenletrendszere két egyenletre redukálódik (ti. pl. az XY síkban fekvő egyenesnél a harmadik egyenlet $z = 0$).

8^o sík egyenlete

Egy sík egyenletét legegyszerűbben akkor írhatjuk fel, ha a sík egy pontjához mutató $\vec{r}_1$ helyzetvektort, és a sík egy $\vec{n}$ normálisát (a síkra merőleges vektort) ismerjük. Legyen

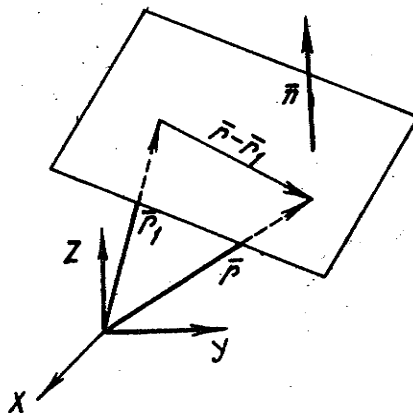
$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},$$

$$\vec{n} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k},$$

és

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

jelentsen egy, a síkban fekvő ponthoz mutató helyzetvektort. $\vec{r} - \vec{r}_1$ merőleges lesz a sík $\vec{n}$ normálisára (28. ábra), azaz



28. ábra

$$(1) \quad (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = 0.$$

(1) a sík un. vektori egyenlete. Az itt szereplő vektorokat koordinátáikkal megadva és a kijelölt műveleteket elvégezve a sík skalár egyenletére jutunk:

$$(2) \quad ax + by + cz - \underbrace{(ax_1 + by_1 + cz_1)}_d = 0.$$

Ha a sík egyenletének felírásánál szereplő $\vec{n}$ normális egységvektor, ($\vec{n} = \vec{n}_e$), akkor az (1) egyenletet a sík Hesse-féle normál-alakjának nevezzük, melyben a (2)-ben részletesen kiírt $d = \vec{r}_1 \cdot \vec{n}_e$ állandó az origónak (a derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjának) a síktól mért előjeles távolságát szolgáltatja.

Három nem egy egyenesben fekvő ponton áthaladó sík egyenletét így írjuk fel: ha a három ponthoz mutató helyzetvektor $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ és $\vec{r}_3$, akkor nyilván a sík egy normálisára jutunk, ha két-két helyzetvektor különbségvektorának vektoriális szorzatát képezzük, pl.

$$\vec{n} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1),$$

ezen $\vec{n}$ normális, és pl. a sík $\vec{r}_1$ helyzetvektoru pontjának segítségével fel tudjuk már az előbbi mintájára a sík egyenletét írni.

Egy egyenesen és egy, nem ezen egyenesen fekvő ponton áthaladó sík egyenletét a következőképpen írjuk fel:

Az adott ponthoz mutató helyzetvektor legyen $\vec{r}_1$, az egyenes irányvektora $\vec{v}$, az egyenes egy pontjához mutató helyzetvektor $\vec{r}_2$. Az $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ különbségvektor és $\vec{v}$ vektoriális szorzata nyilván merőleges lesz a síkra, vagy

$$\vec{n} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{v}$$

a sík egy normálisra. Ezen $\vec{n}$ normális és pl. az $\vec{r}_1$ helyzetvektoru pont segítségével a sík egyenletét az előbbiek mintájára fel tudjuk írni.

Két párhuzamos egyenesen átfektetett sík egyenletét mint az egyik egyenesen és a másik egyenes egy pontján átfektetett sík egyenletét írjuk fel.

Írjuk fel pl. az

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{0,5} = \frac{z}{2} \text{ és az } \frac{x+3}{3} = 2y = \frac{z-2}{2}$$

egyeneseken átfektetett sík egyenletét. A két egyenes irányvektora

$$\vec{v} = 3\vec{i} + 0,5\vec{j} + 2\vec{k},$$

az első egyenesnek egy pontja $P_1(-2, -1, 0)$, a másodiknak

$P_2(-3, 0, 2)$, tehát a sík egy normálisra

$$\vec{n} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0,5 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 8\vec{j} - 3,5\vec{k}.$$

Az $\vec{n}$ normálisú, P_1 ponton áthaladó sík egyenlete

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = x + 2 + 8(y + 1) - 3,5z = 0,$$

azaz

$$x + 8y - 3,5z + 10 = 0.$$

Két egymást metsző egyenesen átfektetett sík egyenletének felírásánál a sík normálisát a két egyenes irányvektora vektoriális szorzataként állítjuk elő, a síknak egy pontját pedig, mint a két egyenes közül bármelyiken rajtafekvő pontot adhatjuk meg. Arra a kérdésre, hogyan állapítható meg két egyenesről, hogy azok valóban metszők, tehát, hogy valóban fektethető-e át sík rajtuk, a 9^o pontban térünk ki részletesen.

9^o Metszési feladatok

a.) Két egyenes egymáshoz viszonyított helyzete: párhuzamos, kitérő és metsző. Két egymást metsző egyenes metszéspontját a következő okoskodással nyerjük:

Legyen a két egyenes egyenlete:

$$x = x_1 + \lambda a, \quad x = x_2 + \mu \alpha,$$

$$y = y_1 + \lambda b, \text{ ill. } y = y_2 + \mu \beta,$$

$$z = z_1 + \lambda c, \quad z = z_2 + \mu \gamma.$$

Ha a két egyenes egy pontban metszi egymást, akkor e pont koordinátáira

$$x_1 + \lambda a = x_2 + \mu \alpha,$$

$$y_1 + \lambda b = y_2 + \mu \beta,$$

$$z_1 + \lambda c = z_2 + \mu \gamma,$$

ami az ismeretlen λ és μ paraméterértékekre három egyenlet. Ha ezen egyenletek közül kettőt kiválasztunk, azt megoldjuk λ és μ -re és az adódó megoldás kielégíti a harmadik egyenletet is, akkor a két egyenes valóban metszi egymást, és a metszéspont koordinátáit bármelyik egyenes egyenletéből a megoldásként nyert paraméterérték behelyettesítésével nyerjük.

Pl. az

$$x = 2 + 3t,$$

$$x = 2 - u,$$

$$y = 2t, \text{ és}$$

$$y = 2 + 3u,$$

$$z = 1 - t,$$

$$z = -1,5u$$

egyeneseknek van metszéspontja, mert a

$$2 + 3t = 2 - u,$$

$$2t = 2 + 3u$$

egyenletrendszer megoldása

$$t = \frac{2}{11}, \quad u = -\frac{6}{11}$$

kielégíti az

$$1 - t = -1,5u$$

egyenletet. A metszéspont koordinátái:

$$x = 2 + \frac{6}{11} = \frac{28}{11},$$

$$y = \frac{4}{11},$$

$$z = \frac{9}{11}.$$

b.) Egyenesnek síkkal való metszéspontját (metszéspont akkor nem létezik, ha az egyenes a síkkal párhuzamos, vagyis az egyenes irányvektorának és a sík normálisának skaláris szorzata zérus) a következőképpen határozhatjuk meg:

Legyen a vizsgált sík és egyenes egyenlete

$$ax + by + cz + d = 0,$$

iii.

$$x = x_0 + \alpha t,$$

$$y = y_0 + \beta t,$$

$$z = z_0 + \gamma t.$$

Ha van metszéspont, akkor ennek x , y , z koordinátája ki kell, hogy elégítse mind a sík, mind az egyenes egyenletét, vagyis erre igaznak kell lennie az

$$a(x_0 + \alpha t) + b(y_0 + \beta t) + c(z_0 + \gamma t) + d = 0$$

összefüggésnek. Ezen utóbbi egyenletből t értékét, majd ezen t értéknek az egyenes egyenletébe való visszahelyettesítésével a metszéspont koordinátáit nyerjük.

Pl. a

$$2x - y + 3z + 4 = 0$$

egyenletű sík és az

$$x = t,$$

$$y = 1 - t,$$

$$z = 3 + 2t$$

egyenletű egyenes metszéspontjának koordinátái, mivel

$$2t - 1 + t + 9 + 6t + 4 = 0, \text{ azaz } t = -\frac{4}{3},$$

$$x = -\frac{4}{3},$$

$$y = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3},$$

$$z = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}.$$

2.) Két sík metszészvonalának egyenletét (metszészvonal akkor nem létezik, ha a két sík párhuzamos egymással, vagyis normálisaik egymás állandószo-rosai) a két sík egyenletéből:

$$ax + by + cz = d,$$

$$ex + fy + gz = h$$

az egyik ismeretlennek, mint paraméternek megválasztása után úgy nyerjük, hogy a visszamaradó, most már két ismeretlent tartalmazó két egyenletet ezekre az ismeretlenekre megoldjuk.

Pl.

$$2x - y + 3z = 0$$

és

$$x - 3y + z = 2$$

metszészvonalának egyenlete pl. $z = t$ paraméterválasztás mellett

$$2x - y = -3t,$$

$$x - 3y = 2 - t$$

- b.) Az $\vec{r}_1$ helyzetvektoru P_1 pont adott síkra való vetületét úgy határozhatjuk meg, mint a P_1 ponton áthaladó azon egyenesnek az adott síkkal való dőléspontját, amely egyenes irányvektora az adott sík normálisa.
- c.) Egy egyenest úgy vetítünk egy síkra, hogy az egyenes két pontját levetítjük a síkra, majd felírjuk a vetületpontokon áthaladó egyenes egyenletét.

11^o Távolsági feladatok

- a.) A P_1 pontnak a P_2 ponttól való távolságát a pontoknak megfelelő helyzetvektorok különbségvektorának abszolút értéke szolgáltatja:

$$d = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|.$$

- b.) Az $\vec{r}_1$ helyzetvektoru P_1 pontnak az $\vec{r}_0$ helyzetvektoru P_0 ponton átmenő $\vec{v}$ irányvektoru egyenestől való távolságát

$$d = \left| (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right|,$$

vagy

$$d = \sqrt{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^2 - \left(\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \right)^2}$$

(lásd 29. ábra) szolgáltatja.

- c.) Az $\vec{r}_1$ helyzetvektoru P_1 pontnak adott $\vec{n}$ normálisú síktól való távolságát úgy határozhatjuk meg, hogy a síkon felvéve egy $\vec{r}_0$ helyzetvektoru P_0 pontot, az $(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)$ különbségvektort vetítjük a normálisra (a különbségvektort skalárisan szorozzuk a normális egységvektorral); az így nyert szám abszolút értéke szolgáltatja a keresett távolságot.

- d.) Két párhuzamos egyenes egymástól mért távolságát úgy határozhatjuk meg, mint az egyik egyenesen felvett pontnak a másik egyenestől való távolságát.

Pl.

$$\frac{x - 2}{-2} = y = \frac{z + 3}{4}$$

és

$$-\frac{x}{2} = y - 5 = \frac{z - 1}{4}$$

távolságát megkaphatjuk, mint $P_1(2, 0, -3)$ távolságát az utóbbi egyenestől, vagyis

$$d = \left| \left\{ (2-0)\vec{i} + (0-5)\vec{j} + (-3-1)\vec{k} \right\} \times \frac{-2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{21}} \right| = \dots =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{21}} |-16\vec{i} - 8\vec{k}| = 8\sqrt{\frac{5}{21}}.$$

e.) Két kitérő egyenes egymástól való távolságát úgy kaphatjuk meg, hogy az egyik egyenesen felvett $\vec{r}_1$ helyzetvektoru, és a másik egyenesen felvett $\vec{r}_2$ helyzetvektoru pontokat összekötő $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ különbségvektort vetítjük az un. normáltranzverzális egységvektorra

$$\frac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$$

-re, ahol $\vec{v}_1$ az első, $\vec{v}_2$ pedig a második egyenes irányvektora.

f.) Egy adott síkkal párhuzamos egyenesnek a siktól való távolságát mint az egyenesen felvett pontnak a síktól mért távolságát határozzuk meg.

Pl. az

$$\frac{x-2}{3} = y = \frac{z+3}{4}$$

egyenesnek a

$$2x + 2y - 2z + 3 = 0$$

egyenletű síktól mért távolságát (az egyenes párhuzamos a síkkal, mert irányvektora $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ merőleges a sík $\vec{n} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ normálisára; $\vec{n}\vec{v} = 0$) mint az egyenes

$P_1(2, 0, -3)$ pontjának a síktól (ennek egy pontja pl.

$P_0(0, 0, \frac{3}{2})$) mért távolságát számíthatjuk ki:

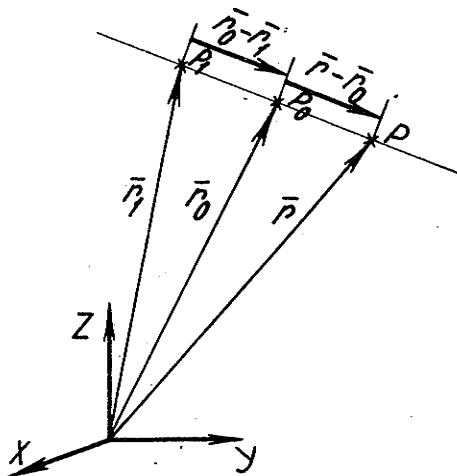
$$d = \left| \left\{ (2-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (-3-1,5)\vec{k} \right\} \frac{\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{3}} \right| = \frac{6,5}{\sqrt{3}}.$$

(A síknak nyilván $\vec{n}_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ is normálisa, célszerűbb volt ezzel számolnunk.)

g.) Két párhuzamos síknak egymástól mért távolságát mint az első sík egy pontjának a másik síktól mért távolságát határozhatjuk meg.

12^o Tükrözési feladatok

a.) Az $\vec{r}_1$ helyzetvektoru P_1 pontnak az $\vec{r}_0$ helyzetvektoru P_0 pontra vonatkozó $\vec{r}$ helyzetvektoru P tükröképét (mely a P_1 és P_0 pontokon átfek-



30. ábra

tetett egyenesen fekszik) az

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$$

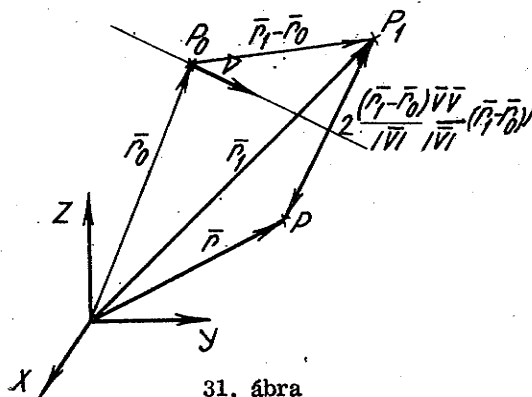
összefüggés alapján (lásd 30. ábra)

$$\vec{r} = 2\vec{r}_0 - \vec{r}_1$$

szolgáltatja.

b.) Az $\vec{r}_1$ helyzetvektoru P_1 pontnak az $\vec{r}_0$ helyzetvektoru P_0 ponton át-
haladó $\vec{v}$ irányvektoru egyenesre vonatkozó tükörképe az az $\vec{r}$ helyzetvek-
toru P pont, melyre

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + 2 \left(\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} - (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \right) \quad (\text{lásd 31. ábra}).$$



31. ábra

c.) Az $\vec{r}_1$ helyzetvektoru P_1 pontnak adott $\vec{n}$ normálisra síkra vonatkozó tükörképe azon $\vec{r}$ helyzetvektoru P pont, melyre

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - 2d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \text{ ha az } \vec{n} \text{ normálisra } \vec{n}\vec{r}_1 > 0,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + 2d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \text{ ha az } \vec{n} \text{ normálisra } \vec{n}\vec{r}_1 < 0.$$

(d itt a P_1 pontnak az adott síktól való távolságát jelenti.)

d.) Egyenesnek, ill. síknak adott síkra vonatkozó tükörképét az egyenes két, ill. a sík három pontjának tükörképén áthaladó egyenes, ill. sík egyenlete szolgáltatja.

e.) Beszélhetünk még egy egyenesnek egy vele egy síkban fekvő (tehát nem kitérő) egyenesre vonatkozó tükörképéről, melyet szintén az egyenes két pontjának a másik egyenesre való tükrözésével, ill. a tükörképpontokon áthaladó egyenes egyenletének felírásával nyerünk.

10.) DETERMINÁNSOK

Másodrendű determináns az a szám, amelyet a következő módon határoz meg két sorba, ill. két oszlopba az alábbi táblázatban elrendezett négy eleme $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(Az elem két indexe közül az első megmutatja, hányadik sorban, a második pedig, hogy hányadik oszlopban áll az elem.)

A két függőleges vonás a determináns jele. A determináns a_{11} eleméből kiinduló átlót főátlónak, az a_{12} eleméből kiindulót pedig mellékátlónak nevezve

el azt is mondhatjuk, hogy a determináns értéke egyenlő a főátlóban álló elemek szorzatának és a mellékátlóban álló elemek szorzatának különbségével.

A harmadrendű determinánsnak kilenc eleme van, melyeket három sor, ill. oszlopba rendezünk. Kiszámítására célszerű a következő szabályt alkalmazni: az első sor elemeinek előjelét sorban meghagyjuk, megváltoztatjuk, meghagyjuk, majd minden ilyen módon előjellel ellátott elemet megszorozzuk azzal a másodrendű determinánssal, melyet az eredeti determinánsból az illető elemhez tartozó sor és oszlop törlésével kapunk:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Az eredeti harmadrendű determináns kifejtésében szereplő másodrendű determinánsokat aldeterminánsoknak nevezzük.

A fenti kifejtési utasítással számítottuk ki a 8.) fejezetben két vektor vektoriális, ill. három vektor vegyes szorzatát.

A későbbiekben gyakran találkozunk majd általánosságban n - edrendű determinánsokkal. Ezen n^2 eleméből az előbbiek mintájára képezett négyzetes táblázatot fogunk érteni:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

amelyhez a fenti kiszámítási utasítás általánosításaként a következő kifejtési utasítást adjuk:

$$\begin{aligned} A = & a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \\ & + \dots + (-1)^{1+k} a_{1k} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \\ & + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2,n-1} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

vagyis itt is a felső sor elemeit $+, -, +, -, \dots$ előjelekkel látjuk el, majd megszorozzuk az első sor minden elemét a neki megfelelő aldetermináns-sal (az illető elem sorának és oszlopának törlése után A -ból visszamaradó $n-1$ -edrendű determinánssal), s végül ezen tagokat összeadjuk.

Célszerű a következő jelölést bevezetni: az a_{1k} elemnek megfelelő aldetermináns-t a $(-1)^{1+k}$ előjellel véve jelölje A_{1k} . A_{1k} - t az a_{1k} elemhez tartozó előjeles aldetermináns-nak nevezzük. E jelöléssel előbbi kifejtési utasításunk így írható:

$$A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1k}A_{1k} + \dots + a_{1n}A_{1n}, \text{ vagy rövidebben}$$

$$A = \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k}.$$

(Ez utóbbi jelölés, tudjuk, azt fejezi ki, hogy a $\sum$ jel mögött álló kifejezésbe k helyébe $1, 2, \dots, n$ - et kell írunk, majd az így nyert tagokat összeadva A értékeire jutunk.)

Ha A_n - edrendű determináns, a kifejtésben szereplő A_{1k} előjeles al-determinánsok $n-1$ - edrendű determinánsok. Ezekre a fent definiált kifejtési utasítást ismét alkalmazva, al-determinánsokként $n-2$ - edrendű determinánsokra, ezeket újból kifejtve $n-3$ - adrendű determinánsokra, az eljárást tovább folytatva végül másodrendű al-determinánsokra jutunk, melyeket már közvetlenül ki tudunk számítani.

Pl.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = +3 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \left\{ 4 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right\} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5 \left\{ 2 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - 4 \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right\} - 7 \left\{ 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= 12(2+16) - 9(5-8) + 2(2+16) - 3(-1+12) + 10(5-8) - 20(-1+12) - 14(20+4) +$$

$$+ 28(-4-6) - 21(2-15) = -347.$$

Az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determináns kifejtéséből láthatjuk, hogy a kifejtés tagjai a determináns bizonyos alkalmasan kiválasztott elemeinek szorzatai megfelelő előjelekkel ellátva:

$$A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13},$$

Be fogjuk látni, hogy az n -edrendű determináns is hasonló alakban írható, ehhez azonban még bizonyos elnevezések bevezetésére van szükség.

Állítás:

Az $1, 2, \dots, n$ különböző elemet

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

féle sorrendben írhatjuk fel. Ezeket az elrendezéseket permutációknak nevezzük. (Az itt bevezetett $n!$ - olvasd n faktoriális - jelölés 1 - től n - ig a természetes számok szorzatát jelenti.)

Állításunkat teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

Bizonyítás

$n = 2$ -re az állítás igaz, a két lehetséges elrendezés, az elemeket 1 és 2 - vel jelölve: 12 és 21 .

Tegyük fel, hogy az állítás $n-1$ - re is igaz, tehát $n-1$ különböző elemet $(n-1)!$ féleképp rendezhetünk el. Ekkor az n különböző elemet $1, 2, \dots, n$ -nel jelölve, a következőképp okoskodhatunk:

foglaljuk az n elem összes lehetséges elrendezéseit csoportokba; az első csoportba azokat az elrendezéseket soroljuk, melyeknek első eleme 1 , a másodikba azokat, melyeknek első eleme 2 , $\dots$, az n - edikbe azokat, melyeknek első eleme n . Az így nyert n darab csoport mindegyikében $(n-1)!$ számú elrendezés áll, hiszen a kiemelt első elem után $n-1$ elem maradt vissza, s ezek lehetséges elrendezéseinek száma $(n-1)!$. Így az n különböző elem elrendezéseinek (permutációinak) száma

$$P_n = n \cdot (n-1)! = n!,$$

amit bizonyítani akartunk.

Például az $1, 2, 3, 4$ elemek permutációinak száma

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

E permutációk: (a fenti bizonyításnál használt csoportosításban)

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Definíció

Az $1, 2, \dots, n$ különböző elemek egy permutációjában az inverziók számán értjük azon elempárok számát, melyekben a nagyobb elem megelőzi a kisebbet.

Pl. az

1, 3, 6, 4, 5, 2

permutáció inverzióinak száma 6, mert 4 - et és 5 - öt 6, 2 - t pedig 3, 6, 4, 5 megelőzi.

Az előbb definiált fogalmak ismeretében a következő tételt mondhatjuk ki:

Tétel

(*) Az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns az

$$\sum \epsilon_{s_1 s_2 \dots s_n} a_{s_1 1} a_{s_2 2} \dots a_{s_n n}$$

alakú szorzatok összege, ahol $s_1, s_2, \dots, s_n$ az $1, 2, \dots, n$ számok valamilyen permutációja $\epsilon = +1$ vagy -1 aszerint, hogy ezen permutációban az inverziók száma páros vagy páratlan, az összegezést pedig minden lehetséges permutáció esetére végezzük el.

Tételünket teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

Bizonyítás

Az állítás $k = 2$ esetében igaz, az 1 és 2 elem lehetséges permutációi 12 és 21, az utóbbiban egy inverzió van, vagyis

$$\epsilon' a_{11} a_{22} + \epsilon'' a_{21} a_{12} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A.$$

Tegyük fel, hogy állításunk $k = n - 1$ -re igaz. Az

$$a_{s_1 1} a_{s_2 2} \dots a_{s_{n+1} n+1}$$

szorzatokból foglaljuk külön-külön csoportba azokat, amelyekben az a_{11} , ill. $a_{12}, \dots, a_{1k}, \dots, a_{1n+1}$ elem szerepel, vagyis amelyekben $s_1 = 1$, ill.

$s_2 = 1, \dots, s_k = 1, \dots, s_{n+1} = 1$. Kiemelve ezen csoportokból a_{11} , ill.

$a_{12}, \dots, a_{1k}, \dots, a_{1, n+1}$ -et a következőképpen okoskodhatunk:

Tekintsük azt a csoportot, amelyben $s_k = 1$, amelyből tehát az a_{1k} tényezőt

emelhetjük ki. Ennek kiemelése után a többi tényezőben az

$s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_{n+1}$ indexek a $2, \dots, n+1$ számok permutációit fut-

ják végig. Az $s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_{n+1}$ permutációban fellépő inverziók

szerepelnek az $s_1, \dots, s_{k-1}, 1, s_{k+1}, \dots, s_{n+1}$ permutációban is, és az

utóbbiban fellép ezen kívül még $k-1$ inverzió, hiszen $s_1, \dots, s_{k-1}$ mindegyi-

ke megelőzi a nála kisebb 1 -et. A kiemeléssel tehát az inverziók száma

$k-1$ -gyel csökkent, vagyis páratlan k esetében páros, páros k esetében

páratlan számmal. Eszerint a_{1k} szorozója az A -ban az első sor és

k -adik oszlop törlésével előálló n -edrendű aldetermináns, megszoroz-

va $(-1)^{k+1}$ -nel, vagyis épp A_{1k} . Az

$$\sum a_{s_1 1} \dots a_{s_{n+1} n+1}$$

szorzatok összege tehát (a fenti csoportosításban)

$$a_{11} A_{11} + \dots + a_{1k} A_{1k} + \dots + a_{1, n+1} A_{1, n+1},$$

ami definíciónk értelmében épp az $n+1$ -edrendű A determináns értékét adja.

n -edrendű determinánsokra az alábbi tételeket soroljuk fel:

I. Tétel

Ha egy determináns két sorát felcseréljük, a determináns értéke (-1) -gyel szorzódik.

Bizonyítás

Arról az esetről fogunk beszélni, amikor az i -edik és k -adik sort cse-

réljük fel és $i < k$.

Előbb bebizonyított tételünk értelmében az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns értéke

$$A = \sum \varepsilon a_{s_1 1} \dots a_{s_i i} \dots a_{s_k k} \dots a_{s_n n},$$

ahol $s_1, \dots, s_i, \dots, s_k, \dots, s_n$ az $1, 2, \dots, n$ elemek permutációján fut át,

ε pedig $+1$ vagy -1 aszerint, hogy az $s_1, \dots, s_n$ permutációban az inverziók száma páros, vagy páratlan.

Ha az i -edik és k -adik sort felcseréljük, akkor

$$A' = \sum \varepsilon' a_{s_1 1} \dots a_{s_k k} \dots a_{s_i i} \dots a_{s_n n},$$

és ε' az $s_1, \dots, s_{i-1}, s_k, s_{i+1}, \dots, s_{k-1}, s_i, s_{k+1}, \dots, s_n$

permutációban levő inverziók számának páros vagy páratlan voltától függően $+1$ vagy -1 . Ebben a permutációban az s_i -től és s_k -től külön-

böző elemek egymás között ugyanannyi inverziót alkotnak, mint az $s_1, \dots, s_i, \dots, s_k, \dots, s_n$ permutációban. Az s_i és s_k elemek az s_j elemekkel ahol $j \leq i-1$, vagy $j \geq k+1$, ugyancsak megegyező számú inverziót alkotnak az említett két permutációban. Legyen most $i+1 \leq j \leq k-1$; ekkor $s_i s_j$ -vel a vizsgált két permutáció egyikében inverziót alkot,

másikában nem, s ugyanez a helyzet az s_k és s_j inverzióinak számával kapcsolatban is. Így az ilyen inverziók száma s_i és s_k felcserélésekor páros számmal változik. Végül s_i és s_k az egyik permutációban inverziót alkot, a másikban nem, úgyhogy a két permutáció inverzióinak száma páratlan számban különbözik, tehát

$$A' = -A$$

amit bizonyítani akartunk.

II. Tétel

Ha a determináns két sora megegyezik, akkor a determináns értéke zérus.

Bizonyítás

Cseréljük fel a determinánsban a két azonos sort. A I. Tétel szerint a determináns előjelet vált, viszont ugyanakkor - a felcserélt sorok azonosak lévén - nem változik, ami annyit jelent, hogy a determináns egyenlő önmaga $(-1) \cdot$ szeresével, tehát csak zérus lehet.

III. Tétel

A determináns értékét megkapjuk, ha egy tetszőleges sorának (vagy oszlopának) minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles al-determinánssal, s az így nyert szorzatokat összeadjuk.

A determináns egy eleméhez tartozó al-determinánst úgy kapjuk meg, hogy az eredeti n -edrendű determinánsból töröljük az illető elem sorát és oszlopát. Előjeles al-determinánssra úgy jutunk, ha a fenti módon nyert $n-1$ -edrendű determináns értékét, ha az az a_{ik} elemhez tartozik, $(-1)^{i+k}$ -
nal megszorozzuk

(jelölése: A_{ik}) (Az előbbiekben már bevezettük ezt a fogalmat és jelölést, de csak speciálisan a determináns első sora elemeihez tartozó előjeles al-determinánssokra.) Az itt megadott előjel-elrendezés könnyen megjegyezhető, mert sakktáblaszerűen váltakoznak az előjelek, pl. negyedrendű determináns esetében ilyen az elrendezés:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Tételünket az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns esetében így formulázhatjuk meg röviden:

$$A = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (i\text{-edik sor szerinti kifejtés, } i \text{ lehet } 1, 2, \dots, n)$$

vagy

$$A = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (k\text{-adik oszlop szerinti kifejtés, } k \text{ lehet } 1, 2, \dots, n).$$

Bizonyítás

Írjuk fel az A determinánst $(*)$ szerinti alakját:

$$A = \sum \varepsilon a_{s_1 1} \cdot \dots \cdot a_{s_n n}.$$

Tekintsük az összeg azon tagjait, amelyekben a determináns egy meghatározott eleme, mondjuk a_{ik} szerepel. Emeljük ki a_{ik} - t ezekből a tagokból; a kiemelés után megmaradó összeg minden tagja

$$\varepsilon a_{s_1 1} \cdot \dots \cdot a_{s_{k-1} k-1} \cdot a_{s_{k+1} k+1} \cdot \dots \cdot a_{s_n n}$$

alaku szorzat, ahol $s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n$ az $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ számok összes permutációját futja át. Hasonlítsuk össze az inverziók számát ebben a permutációban és az $s_1, \dots, s_{k-1}, i, s_{k+1}, \dots, s_n$ permutációban. Az i - től különböző elemek inverziói mindkét permutációban ugyanazok. Jelöljük j - vel az $s_1, \dots, s_{k-1}$ elemek közül az i - nél nagyobbak számát. Ezek i - vel j inverziót alkotnak. Az $s_1, \dots, s_{k-1}$ elemek között eszerint $k-1-j$ számú i -nél kisebb szerepel, úgyhogy az $s_{k+1}, \dots, s_n$ számok között az i - nél kisebbek száma $i-1-(k-1-j)$. Ezek i - vel $i-1-k+1+j = i-k+j$ újabb inverziót alkotnak, és az utóbbi permutációban az előbbihez képest $i-k+2j$ - vel több inverzió van, ami $i-k$ - től páros számokban különbözik. Eszerint az a_{ik} elem kiemelése után nyert tagok összege azt a determinánst adja, amely A - ból az i -edik sor és k -adik oszlop törlésével áll elő, megszorozva $(-1)^{i-k} = (-1)^{i+k}$ -val, ami azonban épp az A_{ik} előjeles aldetermináns. Befejezésül még azt kell megjegyeznünk, hogy az

$$A = \sum \varepsilon a_{s_1 1} \cdot \dots \cdot a_{s_n n}$$

alakban írja fel az A determinánst, a jobboldali összeg minden tagjában A bármely adott sorából és bármely adott oszlopából pontosan egy tényező szerepel.

IV. Tétel

A determináns értéke nem változik, ha sorait és oszlopait felcseréljük.

Bizonyítás

Állításunkat teljes indukcióval bizonyítjuk. A tétel $n = 2$ esetére igaz. Tegyük fel, hogy igaz $(n-1)$ -re is, akkor n -re (azaz n -edrendű determinánssra) így következtethetünk:

Fejtsük ki az eredeti n -edrendű D determinánst első sora, a sor- és oszlopcserével nyert új D' determinánst első oszlopa szerint. Megvizsgálva D és D' fenti módon nyert kifejtéseit, azt láthatjuk, hogy mindegyikben ugyanazok az elemek szerepelnek olyan $(n-1)$ -edrendű előjeles aldeterminánsokkal megszorozva, melyek egymástól csak sor-oszlopcserében különböznek, azaz feltevésünk értelmében megegyeznek. Ezzel állításunkat igazoltuk. E tétel következménye az alábbi

V. Tétel

A determináns soraira kimondott tételek a determináns oszlopaira is érvényesek. (Igy pl. az I. és II. Tétel.)

VI. Tétel

Ha két n -edrendű determináns ugyanazon sorának (vagy oszlopának) elemei kivételével megegyezik egymással, akkor összeadható. A két determináns összege olyan determináns alakjában írható fel, melynek az összeadandókban különböző elemeket tartalmazó sorában (oszlopában) ezen elemek összege áll, többi eleme pedig a két determináns megfelelő elemeivel megegyezik.

Ha tehát

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

és pl.

$$a_{ik} = b_{ik}, \quad i=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, n$$

(a két determináns a harmadik sorban álló elemek kivételével egyező elemekből áll), akkor

$$A + B = C = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad i=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, n,$$

$$c_{3k} = a_{3k} + b_{3k} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n).$$

(Ezt röviden úgy is kifejezhetjük, hogy a két determináns harmadik sorát összeadtuk.)

Állításunkat az A, B és A + B determináns azon sora (oszlopa) szerinti kifejtéséből, melyben A és B különböző elemeket tartalmaz (fent a harmadik sor) közvetlenül beláthatjuk.

VII. Tétel

Ha egy determináns egyik sorának (oszlopának) minden elemét ugyanazzal a számmal megszorozzuk, akkor a determináns értéke is ugyanazzal a számmal szorzódik meg. (Más szavakkal: állandó tényező a determináns egy sorának minden eleméből kiemelhető.)

Állításunkat úgy igazolhatjuk, hogy az állandóval szorzott sor szerint fejtjük ki a determinánst.

VIII. Tétel

A determináns értéke zérus, ha valamelyik sorának (oszlopának) minden eleme zérus.

Állításunk igazolására fejtjük ki a determinánst azon sora (oszlopa) szerint, melyben csupa zérus áll, így azonnal látható, hogy eredményül zérust nyerünk.

IX. Tétel

Ha egy determináns valamelyik sorának elemeit megszorozzuk a determináns egy másik sorához tartozó előjeles aldeterminánsokkal, e szorzatok összege zérust ad. (A tétel sorok helyett oszlopokra is kimondható.)

Állításunkat arra az esetre igazoljuk, amikor pl. a determináns i-edik sorának elemeit szorozzuk meg a k - adik ($i \neq k$) sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal. Ha az eredeti determináns k - adik sorát az i - edik sorral pótoljuk és a determinánst a megváltozott k - adik sora szerint fejtjük ki, nyilván ugyanerre az eredményre jutunk. E kifejtés azonban zérust ad, hiszen a determináns két sora megegyezik (II. Tétel).

X. Tétel

Két n-edrendű determinánst összeszorozhatunk egymással a következő szabály szerint:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ik} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

esetén

$$A \cdot B = C = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ik} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

ahol

$$\begin{aligned} c_{ik} &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ik}b_{kk} + \dots + a_{in}b_{nk} = \\ &= \sum_{p=1}^n a_{ip}b_{pk} \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

(A c_{ik} elemek itt részletezett kiszámítási utasítását az A determináns i-edik sora és a B determináns k-adik oszlopában álló elemek "komponálásának" is szokták nevezni.)

A tétel bizonyítását egyszerűség kedvéért harmadrendű determinánsokra végezzük el.

Bizonyítás

Legyen

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$C =$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix};$$

bizonyítandó, hogy

$$C = A \cdot B.$$

Állításunk igazolására bontsuk fel a C determinánst determinánsok összegére, úgy, hogy minden oszlopban csak egytagú kifejezések álljanak. Az egyes oszlopokból a közös $b_{11}, b_{21}, b_{31}, b_{12}, b_{22}, b_{32}, b_{13}, b_{23}, b_{33}$ tényezőket kiemelve az adódó 27 determinánsból 21-ben két-két oszlop elemei megegyeznek, így ezen determinánsok értéke zérus (II. Tétel). A visszamaradó 6 determináns:

$$\begin{aligned} & b_{11}b_{22}b_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_{11}b_{32}b_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + \\ & + b_{21}b_{12}b_{33} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + b_{21}b_{32}b_{13} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + \\ & + b_{31}b_{12}b_{23} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_{31}b_{22}b_{13} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ha e hat determinánsban megcseréljük az oszlopokat, úgy, hogy mindenütt épp A álljon elő, aszerint vált, vagy nem vált a determináns előjelet, hogy az elől álló tényezőkben a b_{lk} elemek első indexeinél az inverziók száma páratlan, vagy páros. Irhatjuk tehát:

$$C = A \sum \varepsilon b_{s_1 1} b_{s_2 2} b_{s_3 3},$$

ahol s_1, s_2, s_3 az 1, 2, 3 elemek valamilyen permutációja, ε pedig +1, vagy -1 aszerint, hogy az s_1, s_2, s_3 permutációban az inverziók száma páros, vagy páratlan. De a (X) tétel értelmében

$$\sum \varepsilon b_{s_1 1} b_{s_2 2} b_{s_3 3} = B,$$

és így

$$C = A \cdot B,$$

amit bizonyítani akartunk.

Tetszőleges n-edrendű A és B determináns esetében a tétel hasonlóképpen bizonyítható.

Pl. az

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

determinánsok esetében

$$C = A \cdot B =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) \\ -2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & -2 \cdot 0 - 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 & -2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -11 & +17 \\ 18 & 0 & -3 \\ -8 & 4 & -7 \end{vmatrix}.$$

(Eredményünk helyességéről az A, B és C determinánsok kifejtésével könnyen meggyőződhetünk.)

A determinánsok kiszámítását igen megkönnyíti az alábbi

XI. Tétel

A determináns értéke nem változik meg, ha valamelyik sorához (oszlopához) egy másik sorának (oszlopának) tetszőleges állandószerosát adjuk hozzá.

Bizonyítás

Legyen az eredeti determináns D , az új determináns, melyet azáltal nyertünk, hogy pl. a D determináns i -edik sorához hozzáadtuk a k -adik sor c -szeresét D' . A VI. Tétel értelmében

$$D' = D + A,$$

ahol az A determináns i -edik sorában a k -adik sorban álló elemek c -szerese áll. Kiemelve az i -edik sorból a c állandót a determináns két sora egyező lesz, s így a II. Tétel értelmében értéke zérus,

$$A = c \cdot 0,$$

azaz

$$D' = D,$$

amit bizonyítani akartunk.

A felsorolt tételeket a determinánsok tényleges kiszámításának megkönnyítésére akkor tudjuk jól felhasználni, ha szem előtt tartjuk, hogy olyan determinánst könnyű kiszámítani, amelynek elemei egész számok és lehetőleg kicsiny abszolút értékiek, és a determinánst olyan sora, ill. oszlopa szerint célszerű kifejtetni, melyben sok zérus áll. Ezért sokszor célszerű a VII. Tétel felhasználásával kiemeléseket végezni, vagy egy sor, ill. oszlop elemeit egy állandóval beszorozni (ekkor természetesen a determináns állandósorozásra jutunk), ill. a XI. Tétel felhasználásával a determináns egy sorában, vagy oszlopában álló zérusok számát alkalmas sor vagy oszlop-összevonással szaporítani.

Fejtsük ki példaként az alábbi ötödrendű determinánst:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

Az első oszlopban 1-es és zérus is áll. Ebbe az oszlopba "viszünk be" alkalmas összevonásokkal újabb zérusokat. Miután oszlopba akarunk zérusokat bevinni, sorokat fogunk összevonni. Vonjuk ki a második sor 4-szeresét az első, 3-szorosát a harmadik és 7-szeresét a negyedik sorból:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -14 & -17 & 11 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & -14 & -11 & 11 & 3 \\ 0 & -23 & -38 & 23 & 13 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -14 & -17 & 11 & 6 \\ -14 & -11 & 11 & 3 \\ -23 & -38 & 23 & 13 \\ 4 & 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -D'.$$

Az összevonásokkal elértük tehát, hogy D első oszlopában egy elem kivételével csupa zérus állt. Ezen oszlop szerint kifejtve D-t a negyedrendű D' determinánsra jutottunk. Ezen determináns elemei igen nagy abszolút értékek, ezért célszerű lesz a második sor (-1) -szeresét az első, (-2) -szeresét pedig a harmadik sorhoz hozzáadni:

$$D = -D' = - \begin{vmatrix} 0 & -6 & 0 & 3 \\ -14 & -11 & 11 & 3 \\ 5 & -16 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Emeljük ki az így nyert determináns első sorában a közös tényezőt (3), majd adjuk hozzá a determináns negyedik oszlopának kétszeresét a második oszlophoz:

$$D = -3 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ -14 & -11 & 11 & 3 \\ 5 & -16 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -14 & -5 & 11 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & 17 & 3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} -14 & -5 & 11 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 17 & 3 \end{vmatrix} = 3 \{ -14(-6-17) + 5(15-4) + 11(85+8) \} = 4200.$$

11.) A MÁTRIX FOGALMA; A MÁTRIXOK FONTOSABB TIPUSAI

Mátrixnak számoknak olyan n sor és m oszlopból álló táblázatát nevezzük, mellyel bizonyos - a számok, ill. vektorok között definiáltakhoz hasonló - műveleteket végezhetünk.

A mátrixokat így jelöljük:

$$(1) \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \text{ vagy rövidebben: } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \\ \\ m \end{pmatrix} n.$$

(Az utóbbi jelöléssel azt kívánjuk feltüntetni, hogy a mátrix elemei n sorból és m oszlopból álló táblázatot alkotnak.)

Szokás még nyomtatásban a mátrixokat vastagon nyomtatott nagybetűvel is jelölni.

Két mátrix akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha soraik száma, valamint oszlopaik száma egyező és a megfelelő helyeken álló elemeik egyenlők; ha tehát

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

és

$$a_{ik} = b_{ik}, \quad i=1, \dots, n; \quad k=1, \dots, m,$$

akkor

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}.$$

Pl.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ de } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Foglalkozni fogunk speciálisan csak egy sor, ill. egy oszlopból álló mátrixokkal, vagyis (1) jelöléseivel az $n = 1$, ill. $m = 1$ speciális esettel. $n = 1$, $m = 3$, ill. $m = 1$, $n = 3$ esetében pl. $\underline{A}$ megadása egy számhármass megadását jelenti. Mivel a háromdimenziós tér vektorait is egy számhármassal (rendezett számhármassal, vagyis a számhármassban megadott elemek sorrendje lényeges volt, $(1, 2, 3)$ -mal az $\underline{a} = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$, $(2, 1, 3)$ -mal a $\underline{b} = 2\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}$ ($\underline{a} \neq \underline{b}$) vektort adtuk meg) jellemezhetjük, a fogalmat általánosítva egy rendezett szám m -est m dimeziós vektornak fogunk fel. Az (1) -ből speciálisan $n = 1$ esetében adódó mátrixot sor-vektornak, az $m = 1$ esetében adódó mátrixot pedig oszlop-vektornak nevezzük és így jelöljük:

$$(2) \quad \underline{b}^x = (b_1 \dots b_m), \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

A sor- ill. oszlopvektor elnevezést még azzal is indokolhatjuk, hogy a mátrixokra később értelmezendő bizonyos műveletek ilyen mátrixokra alkalmazva a vektorokkal végzett bizonyos műveletekhez hasonló eredményt adnak.

Az (1) mátrixot sor- ill. oszlopvektorok segítségével még a következő alakban is felírhatjuk:

$$(3) \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^x \\ \vdots \\ \underline{b}_n^x \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } \underline{b}_i^x = (a_{i1} \dots a_{im}); \quad i=1, \dots, n,$$

illetve

$$(4) \quad \underline{A} = (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_m), \quad \text{ahol } \underline{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \quad k=1, \dots, m.$$

$\underline{A}$ transzponált mátrixának (jelben $\underline{A}^x$) az $\underline{A}$ mátrixból a sorok és oszlopok cseréjével előálló mátrixot nevezzük.

Ha $\underline{A}$ az (1)-ben felírt mátrix, akkor tehát

$$\underline{A}^x = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phantom{a_{11}} \\ \vdots \\ \phantom{a_{11}} \end{pmatrix}_m.$$

Speciálisan a (2) alatti $\underline{b}^x$ sorvektor felfogható a

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

oszlopvektor transzponáltjának, ez indokolja jelölését is.

Szimmetrikusnak akkor nevezzük az $\underline{A}$ mátrixot, ha elemeire fennáll az

$$a_{ik} = a_{ki}$$

összefüggés.

Azt a tényt, hogy az $\underline{A}$ mátrix szimmetrikus, még az

$$\underline{A} = \underline{A}^x$$

összefüggéssel is felírhatjuk.

Pl.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}^x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \underline{A}^x, \underline{A} \text{ szimmetrikus.}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}^x = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} \neq \underline{B}^x, \underline{B} \text{ nem szimmetrikus.}$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{C}^x = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} \text{ nem szimmetrikus.}$$

(Mivel $\underline{C}$ sorainak és oszlopainak száma nem egyező, $\underline{C}^x$ felírása nélkül is tudjuk, hogy nem lehet szimmetrikus.)

Kvadratikus mátrixnak azokat a mátrixokat nevezzük, melyek megegyező számú sorból és oszlopból állnak. Így pl. az (1)-ben felírt $\underline{A}$ mátrix $m = n$ esetben kvadratikus.

Kvadratikus mátrix rendszámának sorainak és oszlopainak megegyező számát nevezzük.

Pl. az előbb felsorolt mátrixok közül $\underline{B}$ kvadratikus, rendszáma 3, $\underline{C}$ nem kvadratikus, így rendszámáról nem beszélhetünk.

Diagonálmátrixnak olyan kvadratikus mátrixot nevezünk, melynél a mátrix elemeinek táblázatában a bal felső sarokból kiinduló átlóban (az un. főátlóban) álló elemek kivételével minden elem zérussal egyenlő. Jelölése:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle.$$

Egységmátrixnak olyan diagonálmátrixot nevezünk, melynek a főátlóban álló elemei valamennyien eggyel egyenlők. Jelölése:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Zérusmátrix minden olyan mátrix, melynek minden eleme zérus. Jelölése:

$$\underline{\underline{0}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

A minormátrixának az A mátrixból a mátrix bizonyos sorainak és oszlopainak törlése után visszamaradó mátrixot nevezzük.

A későbbi alkalmazások során fognak még ún. háromszög- és trapézmátrixok szerepelni.

Háromszögmátrixnak az olyan kvadrátikus mátrixot nevezzük, melynél a főátló alatt, vagy a főátló felett álló elemek valamennyien zérussal egyenlők, a főátlóban álló elemek azonban mind zérustól különbözők. Pl.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

háromszögmátrixok.

Használni fogjuk a következő jelölést is:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \end{array}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 5 \quad 5 \end{array}.$$

Trapézmátrixnak olyan mátrixot nevezünk, melyet háromszögmátrixból újabb sorok, vagy oszlopok hozzávételével nyerünk, és pedig a fenti A típusu háromszögmátrix esetében a mátrixot jobbról oszlopokkal, a B típusu háromszögmátrix esetében pedig alulról sorokkal bővítve. Pl.

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

trapézmátrixok. Rövidebb jelöléssel:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \end{array}, \quad \underline{\underline{D}} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 6 \quad 5 \end{array}.$$

12.) MÁTRIXOK ÖSSZEADÁSA, KIVONÁSA, SZORZÁSA

1^o Összeadás és kivonás

Két mátrixot csak akkor adhatunk össze egymással (vonhatunk ki egymásból), ha oszlopaik száma és soraik száma egyező. Az összegmátrix (különbségmátrix) elemeit ekkor az összeadandó (kivonandó) mátrixok megfelelő elemeinek összege (különbsége) szolgáltatja.

A 11.) fejezet elején felírt $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrix esetében:

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}, \text{ ahol } c_{ik} = a_{ik} + b_{ik},$$

$i=1, \dots, n; k=1, \dots, m.$

$$\underline{A} - \underline{B} = \underline{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nm} \end{pmatrix}, \text{ ahol } d_{ik} = a_{ik} - b_{ik},$$

$i=1, \dots, n; k=1, \dots, m.$

Az így értelmezett összeadás kommutatív és asszociatív:

$$\begin{aligned} \underline{A} + \underline{B} &= \underline{B} + \underline{A} \\ \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) &= (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}. \end{aligned}$$

Speciálisan

$$\underline{A} + \underline{O} = \underline{O} + \underline{A} = \underline{A},$$

Pl.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2^o Szorzás

a.) Mátrixnak számmal való szorzatát úgy kapjuk meg, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az illető számmal:

$$c \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot c = c \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{n1} & \dots & ca_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix},$$

vagyis rövidebben

$$c \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}, \text{ ahol } c_{ik} = ca_{ik}, i=1, \dots, n; k=1, \dots, m.$$

A számmal való szorzás művelete kommutatív és disztributív:

$$c\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}c,$$

$$(a+b)\underline{\underline{A}} = a\underline{\underline{A}} + b\underline{\underline{A}}.$$

$$c(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = c\underline{\underline{A}} + c\underline{\underline{B}}.$$

Pl.

$$-2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Pozitív egész c esetében a $c\underline{\underline{A}}$ szorzás visszavezethető mátrixok ismételt összeadására.

b.) Mátrixnak mátrix-szal történő szorzását csak akkor definiáljuk, ha az első tényező-mátrix oszlopainak száma a második tényező-mátrix sorainak számával egyező.

Ha tehát alkalmas jelöléssel

$$(1) \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} a_{11}^x \\ \vdots \\ a_{n1}^x \\ \vdots \\ a_{n1}^x \end{pmatrix},$$

$$(2) \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phantom{b_{11}} \\ \phantom{b_{11}} \\ \phantom{b_{11}} \\ \phantom{b_{11}} \\ \phantom{b_{11}} \end{pmatrix}_p \quad m = (b_1 \dots b_p),$$

akkor

$$(3) \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} a_1^x b_1 & a_1^x b_2 & \dots & a_1^x b_p \\ a_2^x b_1 & a_2^x b_2 & \dots & a_2^x b_p \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n^x b_1 & a_n^x b_2 & \dots & a_n^x b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phantom{c_{11}} \\ \phantom{c_{11}} \\ \phantom{c_{11}} \\ \phantom{c_{11}} \\ \phantom{c_{11}} \end{pmatrix}_p \quad n,$$

ahol

$$(4) \quad c_{ik} = a_i^x b_k = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{im} b_{mk}.$$

A (4) alatti szorzatot, az a_i^x sorvektor és b_k oszlopvektor szorzatát az $m = 3$ esetre (vagyis a háromdimenziós tér vektoraira) nyert skaláris szorzás kiszámítási szabályának alkalmas általánosításaként az

a_i^x sorvektor és b_k oszlopvektor, ezen szám m -esekkel megadott m -dimenziós vektorok, skaláris szorzatának is nevezzük. A (3) szorzat-mátrix elemei ilyen szorzatokként adódnak.

(A 10. fejezetben említett elnevezéssel azt is mondhatjuk, hogy a $\underline{\underline{C}}$ szorzat-mátrix i -edik sorában és k -adik oszlopában álló c_{ik} elemet az $\underline{\underline{A}}$ mátrix i -edik sorában és a $\underline{\underline{B}}$ mátrix k -adik oszlopában álló elemek "komponálása" révén nyerhetjük.)

A mátrixok szorzását speciálisan oszlop- ill. sorvektorok esetében alkalmazva adódik:

$$\begin{aligned} a^x b &= (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m = \\ &= \sum_{j=1}^m a_j b_j, \end{aligned}$$

mig

$$\underline{ab}^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_m \end{pmatrix}.$$

Az $\underline{a}^* \underline{b}$ és a hasonlóképp képezhető $\underline{b}^* \underline{a}$ szorzatot skaláris szorzatnak, az $\underline{ab}^*$ és a hasonlóképp képezhető $\underline{ba}^*$ szorzatot diadikus szorzatnak, vagy diádnak nevezzük.

A fent (1) és (2) -ben megadott $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixok szorzata m darab diád összegeként is megadható. Az ott alkalmazott jelölésekkel ugyanis

$$\begin{aligned} \underline{AB} &= (\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \dots \ \underline{a}_m) \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{pmatrix} = \underline{a}_1 b_1^* + \underline{a}_2 b_2^* + \dots + \underline{a}_m b_m^* = \\ &= \sum_{j=1}^m \underline{a}_j b_j^*, \end{aligned}$$

ahol

$$\underline{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad b_j^* = (b_{j1} \ b_{j2} \ \dots \ b_{jp}); \quad j=1, \dots, m.$$

A mátrixok szorzása általában nem kommutatív. Azonban, ha $\underline{E}$ n - edrendű egységmátrix, $\underline{O}$ n - edrendű zérusmátrix, $\underline{A}$ n - edrendű (kvadratikus) mátrix, akkor

$$\underline{EA} = \underline{AE} = \underline{A},$$

$$\underline{OA} = \underline{AO} = \underline{O}.$$

A fenti azonosságok indokolják az egységmátrix ill. zérusmátrix elnevezést. Igaz továbbá az alábbi összefüggés:

$$\underline{a}^* \underline{b} = \underline{b}^* \underline{a},$$

és könnyű belátni, hogy

$$\underline{ab}^{\mathbf{K}} = (\underline{ba}^{\mathbf{K}})^{\mathbf{K}},$$

vagyis az utóbbi esetben a kommutativitás szabálya csak akkor áll fenn, ha $\underline{ba}^{\mathbf{K}}$ szimmetrikus mátrix.

További speciális esetként megemlítjük, hogy az n -edrendű $\langle c, c, \dots, c \rangle$ diagonálmátrix és az n -edrendű (kvadratikus) $\underline{A}$ mátrix szorzása szintén kommutatív és az $\underline{A}$ mátrix c -szeresét szolgáltatja. Ugyanis

$$\langle c, c, \dots, c \rangle \underline{A} = (c\underline{E})\underline{A} = c(\underline{E}\underline{A}) = c\underline{A},$$

$$\underline{A} \langle c, c, \dots, c \rangle = \underline{A}(c\underline{E}) = (\underline{A}\underline{E})c = \underline{A}c = c\underline{A}.$$

Mint említettük, a mátrixok szorzása általában nem kommutatív. Ha azonban egy $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixra

$$\underline{AB} = \underline{BA},$$

akkor az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixot felcserélhetőnek mondjuk.

A mátrixok szorzása asszociatív és disztributív:

$$(\underline{AB})\underline{C} = \underline{A}(\underline{BC}),$$

$$\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{AB} + \underline{AC},$$

feltéve, hogy az itt szereplő szorzatok értelmezettek.

Pl.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

esetén a következő kéttényezős szorzatokat képezhetjük:

$$\underline{AB} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ -2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\underline{BA} = \begin{pmatrix} 3-2 & 6+1 & 9+4 \\ 4-4 & 8+2 & 12+8 \\ 0+2 & 0-1 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 0 & 10 & 20 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\underline{AC} = \begin{pmatrix} 1+8-3 & 2+10+6 & 3+0+3 \\ -2+4-4 & -4+5+8 & -6+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 18 & 6 \\ -2 & 9 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{CB}} = \begin{pmatrix} 3+8+0 & 1+4-3 \\ 12+20+0 & 4+10+0 \\ -3+8+0 & -1+4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 32 & 14 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

3° A kvadratikus $\underline{\underline{A}}$ mátrix pozitív egész kitevős hatványát a mátrixok előbb ismerttetett szorzási szabályából nyerhetjük:

$$\underline{\underline{A}}^n = \overset{1}{\underline{\underline{A}}} \overset{2}{\underline{\underline{A}}} \dots \overset{n}{\underline{\underline{A}}}.$$

Speciálisan az $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ diagonálmátrix esetében könnyen belátható, hogy

$$(\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle)^n = \langle a_1^n, a_2^n, \dots, a_m^n \rangle.$$

Pl.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

esetében

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

13.) KVADRATIKUS MÁTRIX DETERMINÁNSA ÉS RECIPROKA

Egy kvadratikus $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsán az $\underline{\underline{A}}$ mátrix elemeiből képezett determinánst értjük. Jelben

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

esetében $\underline{\underline{A}}$ determinánsa

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Az itt bevezetett fogalom segítségével könnyen felírhatjuk a 10.) fejezetben kimondott X. tétel (a determinánsok un. szorzástétele) állítását:

$$\det \underline{\underline{A}} \cdot \det \underline{\underline{B}} = \det (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}),$$

ahol $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ tetszőleges kvadratikus n -edrendű mátrixok.)

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot szingulárisnak nevezzük, ha

$$\det \underline{\underline{A}} = 0.$$

A mátrixszámítás legegyszerűbb alkalmazásainál is szükséges már egy újabb művelet, a mátrix-szal történő "osztás" műveletének definíciója. Vizsgáljuk ui. az x_1, x_2, x_3, x_4 ismeretlenekre nézve lineáris (elsőfoku) egyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\
 & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\
 & a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4.
 \end{aligned}$$

(a_{ik} , $i, k=1, 2, 3, 4$; b_i , $i=1, 2, 3, 4$ állandók).

Az (1) egyenletrendszert mátrixok segítségével a következő rövid mátrix-egyenlet alakjában írhatjuk fel:

$$(2) \quad \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}},$$

ahol

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Az (1) egyenletrendszer, ill. a (2) mátrix-egyenlet megoldására jutunk, ha (2)-ből az $\underline{\underline{x}}$ oszlopvektort ki tudjuk fejezni. Ehhez azonban szükséges már az $\underline{\underline{A}}$ mátrix-szal való "osztás" műveletének definíciója. Pontosabban szólva, egy olyan $\underline{\underline{X}}$ mátrixot keresünk, amelyre

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}},$$

mert ezen $\underline{\underline{X}}$ mátrix-szal a (2) mátrixegyenletet beszorozva (mivel $\underline{\underline{E}}\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}}$)

$$(3) \quad \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{X}}\underline{\underline{b}}$$

adódik, s ezzel feladatunkat megoldottuk. (Közvetlenül természetesen (2) megoldására jutunk, ha azonban (3) - ban a jobb és baloldalon álló oszlopvektorok egyenlőségét részletesen kiírjuk; mivel $\underline{\underline{x}}$ elemei x_1, x_2, x_3, x_4 , épp (1) megoldására jutunk.)

Az itt felvetett problémához hasonló problémával már találkoztunk. Az a szám reciproka az a x szám volt, amelyre

$$ax = xa = 1;$$

ilyen x létezik, ha

$$a \neq 0.$$

Mátrixok esetében a reciprokok $\underline{\underline{X}}$ mátrix létezéséhez az

$$\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{0}}$$

kikötésnél erősebb kikötést kell tennünk. Ha ui.

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}},$$

akkor a determinánsok szorzástétele értelmében (10.) fejezet X. Tétel)

$$\det(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}}) = \det(\underline{\underline{X}}\underline{\underline{A}}) = \det \underline{\underline{E}},$$

azaz

$$\det \underline{\underline{A}} \cdot \det \underline{\underline{X}} = \det \underline{\underline{X}} \cdot \det \underline{\underline{A}} = 1,$$

és ez csak akkor állhat, ha

$$\det \underline{\underline{A}} \neq 0.$$

Megfordítva,

ha $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$, akkor az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak van reciproka, és csak egy reciproka van, melyet $\underline{\underline{A}}^{-1}$ - nel jelölünk. Állításunk a szinguláris mátrixok fogalmának segítségével úgy is megfogalmazható, hogy nem-szinguláris $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak van egy és csakis egy reciproka.

Tegyük fel ui., hogy $\underline{\underline{X}}$ és $\underline{\underline{Y}}$ is reciproka $\underline{\underline{A}}$ - nak, azaz

$$\underline{\underline{X}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}}$$

és

$$\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{E}};$$

ez annyit jelent, hogy

$$\underline{\underline{X}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Y}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}.$$

Ezen utóbbi egyenlőség-láncunkat szorozzuk be jobbról $\underline{\underline{X}}$ - szel:

$$\underline{\underline{X}}(\underline{\underline{X}}\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{Y}}(\underline{\underline{X}}\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{E}}\underline{\underline{X}}$$

adódik ekkor a mátrix-szorzás asszociativitásának felhasználásával. Mivel azonban az $\underline{\underline{X}}$ mátrix az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak reciprokmátrixa ($\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}}$), legutóbb nyert egyenlőségünkéből

$$\underline{\underline{X}}\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{Y}}\underline{\underline{E}},$$

azaz

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{Y}}$$

adódik, vagyis $\underline{A}$ két reciprok-mátrixa - ha egyáltalán van ilyen mátrix - szükségképpen megegyezik egymással. Egyértelműen bevezethető tehát az $\underline{A}$ nem-szinguláris mátrix ($\det \underline{A} \neq 0$) reciprokáinak jelölésére (feltéve, hogy létezik) az

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1}$$

jelölés.

Annak belátására, hogy $\det \underline{A} \neq 0$ esetében $\underline{A}^{-1}$ valóban létezik, képezzük először adott nem-szinguláris mátrixunk transzponáltját, $\underline{A}^x$ - ot, majd pótoljuk ezen mátrix minden elemét a $\det \underline{A}^x$ determinánsban neki megfelelő előjeles aldeterminánssal. Az így nyert mátrixot $\underline{A}$ adjungált mátrixának nevezzük és így jelöljük: $\text{adj } \underline{A}$.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

esetében

$$\text{adj } \underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Az $\underline{A}$ mátrix reciproka:

$$(4) \quad \underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} \text{adj } \underline{A}.$$

Könnyen belátható, hogy a (4) - ben felírt $\underline{A}^{-1}$ mátrixra

$$\underline{A}^{-1} \underline{A} = \underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{E}.$$

Az $\underline{A} \cdot \text{adj } \underline{A}$, ill. $\text{adj } \underline{A} \cdot \underline{A}$ szorzat-mátrix képzésénél ugyanis a főátlóban álló elemek $\det \underline{A}$ egyes sorok, ill. oszlopok szerinti kifejtései, s így $\det \underline{A}$ értéket adják. (10.) fejezet III. Tétel. Azon elemek, melyek nem a főátlóban állnak, $\det \underline{A}$ egy sorában ill. oszlopában álló elemeknek egy másik sorhoz, ill. oszlophoz tartozó előjeles aldeterminánssal való szorzatainak összegeként adódnak, s mint ilyenek a 10.) fejezet IX. Tétele értelmében zérussal egyenlők. A mátrixok számmal való szorzási szabálya értelmében azonban ($\det \underline{A} \neq 0$)

$$\frac{1}{\det \underline{A}} \underline{A} \cdot \text{adj } \underline{A} = \frac{1}{\det \underline{A}} \text{adj } \underline{A} \cdot \underline{A} =$$

$$= \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} \det \underline{\underline{A}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det \underline{\underline{A}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det \underline{\underline{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{E}},$$

amit bizonyítani akartunk.

Könnyű belátni, hogy $(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$.

Kiindulásul szolgáló problémánkra visszatérve az (1) lineáris egyenlet-rendszernek megfelelő - (2) - ben felírt -

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}}$$

mátrixegyenlet megoldása nem-szinguláris $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetében

$$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{b}} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \text{adj } \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{b}},$$

illetve részletesebben felírva:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 + A_{41}b_4 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 + A_{42}b_4 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 + A_{43}b_4 \\ A_{14}b_1 + A_{24}b_2 + A_{34}b_3 + A_{44}b_4 \end{pmatrix},$$

vagyis

$$x_1 = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 + A_{41}b_4) =$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{A_1}{\det \underline{\underline{A}}} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 + A_{42}b_4) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 + A_{42}b_4) =$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{A_2}{\det \underline{\underline{A}}} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} (A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 + A_{43}b_4) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} (A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 + A_{43}b_4) =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\det \underline{\underline{A}}} = \frac{A_3}{\det \underline{\underline{A}}}$$

$$x_4 = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} (A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + A_4 b_4) =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}{\det \underline{\underline{A}}} = \frac{A_4}{\det \underline{\underline{A}}}$$

A lineáris egyenletrendszer $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$ esetre szóló megoldása az itt részletesen felírt ún. Cramer-féle szabály értelmében a következő: az x_1, x_2, x_3, x_4 ismeretlenek értékét úgy kapjuk meg, hogy a $\det \underline{\underline{A}}$ determináns első, második, harmadik, negyedik oszlopában álló elemeket a $\underline{b}$ oszlopvektor elemeivel pótolva, az így adódó A_1, A_2, A_3, A_4 determinánst elosztjuk a $\det \underline{\underline{A}}$ determinánssal. ($\underline{\underline{A}}$ és $\underline{b}$ részletesen kiírt alakját lásd (2) - ben.)

Általános esetben az n ismeretlenes lineáris egyenletrendszerek megoldására a 16.) fejezetben még visszatérünk.

A fent részletesen lefárgált speciális esetre oldjuk meg a következő példát:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 3, \\-x + 2y &= 6, \\y + 3z &= 9.\end{aligned}$$

Egyenletrendszerünket

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{w}} = \underline{\underline{b}}$$

alakban írhatjuk, ahol

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{w}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0, \quad \underline{\underline{A}}^H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

mivel $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$, van $\underline{\underline{A}}$ - nak reciproka:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \dots =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix},$$

és így

$$\underline{w} = \underline{A}^{-1} \underline{b},$$

illetve részletes kiírással:

$$x = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 - 2 \cdot 9}{3} = -6,$$

$$y = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 6 - 1 \cdot 9}{3} = 0,$$

$$z = \frac{-1 \cdot 3 - 1 \cdot 6 + 4 \cdot 9}{9} = 3.$$

(A Cramer-szabály alkalmazása főleg sok-ismeretlenes lineáris egyenletrendszerek megoldásánál célszerű.)

14.) A MÁTRIX RANGJA. MÁTRIX DIADIKUS FELBONTÁSA

Definíció:

valamely $\underline{A}$ (nem szükségképpen kvadrátikus) mátrix rangszámának $\underline{A}$ legmagasabb rendű kvadrátikus nem-eltűnő (zérustól különböző értékű) determinánsu minormátrixának rendszámát nevezzük.

Ha $\underline{A}$ kvadrátikus és $\det \underline{A} \neq 0$, akkor $\underline{A}$ rangszáma és rendszáma megegyezik.

Pl.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

esetén $\underline{A}$ rendszáma 3, rangszáma 2, mert

$$\det \underline{A} = 0,$$

de pl.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0;$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

rangszáma 3, mert pl.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0.$$

A 12.) fejezetben a mátrixok szorzásának definíciójánál megemlítettük, hogy a szorzat-mátrix diádok összegeként is felírható. Általánosabban, bármely

$$\underline{A} \neq \underline{0}$$

mátrix felírható diádok összegeként. Ennek (a mátrix un. diadikus felbontásának) egy módja a következő:

Mivel kikötésünk értelmében $\underline{A} \neq \underline{0}$, kell, hogy legyen az $\underline{A}$ mátrixban zérustól különböző elem, legyen egy ilyen az i - edik sor és j - edik oszlop a_{ij} eleme. Képezzük a következő különbséget:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} - \frac{1}{a_{ij}} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} (a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{im}) = \\ &= \underline{A} - \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & \dots & 1 & \dots & \frac{a_{im}}{a_{ij}} \end{pmatrix} = \\ &= \underline{A} - \underline{u}_1 \underline{v}_1^H = \underline{A}^{(1)}. \end{aligned}$$

Az $\underline{A}^{(1)}$ mátrix i -edik sorában és j -edik oszlopában nyilván csupa 0 áll. Ha $\underline{A}^{(1)} \neq \underline{0}$, kell, hogy legyen zérustól különböző eleme, legyen ez b_{pk} , ekkor

$$1) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & 0 & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & 0 & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} - \frac{1}{b_{pk}} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} (b_{p1} \dots b_{pk} \dots b_{pm}) =$$

$$= \underline{\underline{A}}^{(1)} - \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b_{p1}}{b_{pk}} & \dots & 1 & \dots & \frac{b_{pm}}{b_{pk}} \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{A}}^{(1)} - u_2 v_2^x = \underline{\underline{A}}^{(2)}.$$

Az itt két lépésben ismertetett eljárást mindaddig folytatva, míg végül csupa 0 elemből álló $\underline{\underline{A}}^{(r)}$ mátrixra jutunk, írhatjuk:

$$\left(\dots \left\{ \underbrace{\left[\underbrace{(\underline{\underline{A}} - u_1 v_1^x)}_{\underline{\underline{A}}^{(1)}} - u_2 v_2^x \right]}_{\underline{\underline{A}}^{(2)}} - u_3 v_3^x \right\} - \dots \right) - u_r v_r^x = 0,$$

azaz

$$\underline{\underline{A}} = u_1 v_1^x + u_2 v_2^x + \dots + u_r v_r^x,$$

ami épp $\underline{\underline{A}}$ egy keresett diadikus felbontása. E diadikus felbontást könnyű két mátrix szorzataként is felírni:

$$\underline{\underline{A}} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r) \begin{pmatrix} v_1^x \\ v_2^x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_r^x \end{pmatrix}.$$

Nyilván végtelen sokféleképpen lehet az $\underline{\underline{A}}$ mátrix diadikus felbontását elvégezni. Ha pl. a fenti felbontásban az u_r oszlopvektort két oszlopvektor összegeként állítjuk elő, $\underline{\underline{A}}$ egy másik diadikus felbontására jutunk.

Végezzük el az alábbiakban az $\underline{\underline{A}}$ mátrix diadikus felbontását:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (3 \ 1 \ 2) &= \underline{\underline{A}} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}^{(1)}, \\
\underline{\underline{A}}^{(1)} - \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} (0 \ 1 \ -2) &= \underline{\underline{A}}^{(1)} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}^{(2)}.
\end{aligned}$$

De

$$\underline{\underline{A}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1),$$

és így

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} (0 \ 1 \ -2) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1).$$

Más alakban felírva:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{U}}_1 \underline{\underline{V}}_1$$

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix egy másik felbontása:

$$\underline{\underline{A}} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} (3 \ 1 \ 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}^{(1)'},$$

$$\underline{\underline{A}}^{(1)'} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{5}{2} \ \frac{5}{2} \ 0 \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0),$$

vagyis

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \left(\frac{3}{2} \ \frac{1}{2} \ 1 \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{V}}_2', \end{aligned}$$

míg az $\underline{\underline{A}}$ mátrix egy további diadikus felbontása:

$$\underline{\underline{A}} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ -1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}^{(1)''},$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}^{(1)''} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ -2) &= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1), \end{aligned}$$

és így

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ -1) + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ -2) + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{U}_3 \underline{V}_3.$$

Megvizsgálva az $\underline{A}$ mátrix ezen három diadikus felbontását azt látjuk, hogy $\underline{U}_1$, $\underline{V}_1$, $\underline{V}_3$ trapézmátrix, a másik három adódó mátrix nem trapézmátrix, de $\underline{U}_2$ és $\underline{U}_3$ alkalmas sorcserével, $\underline{V}_2$ alkalmas oszlopzcserével trapézmátrix-szá rendezhető át. Általában ha $\underline{A}$ diadikus felbontása révén

$$\underline{A} = \underline{U}\underline{V}$$

adódik, $\underline{V}$ trapézmátrix lesz, ha $\underline{A}$ diadikus felbontásában először az első, majd a második, harmadik, ... oszlop elemeiből írva fel a diádok első tényezőjét adódik $\underline{A}^{(1)}$, $\underline{A}^{(2)}$, ...

Ha $\underline{U}$ és $\underline{V}$ nem trapézmátrix, alkalmas sorcserével, ill. oszlopzcserével trapézmátrix-szá alakítható át. Az ilyen mátrixokat általánosított trapézmátrixok-nak nevezzük.

Az alábbiakban be fogjuk látni, hogy az

$$\underline{A} = \underline{U}\underline{V}$$

felbontásban a $\underline{V}$ mátrix két oszlopának cseréje $\underline{A}$ ugyanazon két oszlopának, $\underline{U}$ két sorának cseréje $\underline{A}$ ugyanazon két sorának cseréjét vonja maga után, és, hogy ezen sor-, ill. oszlopzcseréjénél előálló új mátrixok rangja az eredeti mátrixok rangjával megegyező.

Legyen ui.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$$

és $i < k \leq m$; -az $\underline{A}$ mátrixot szorozzuk meg jobbról egy olyan m - edrendű kvadratikus $\underline{P}_{ik}$ mátrix-szal, amely az m - edrendű egység mátrixból az i - edik és k - adik sor cseréjével állt elő:

$$\underline{A}\underline{P}_{ik} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{km} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{il} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kl} & \dots & a_{km} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} ;$$

mivel

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{P}}_{ik} = (\underline{\underline{U}} \underline{\underline{V}}) \underline{\underline{P}}_{ik} = \underline{\underline{U}} (\underline{\underline{V}} \underline{\underline{P}}_{ik}),$$

látható, hogy a $\underline{\underline{P}}_{ik}$ mátrix-szal történő jobbról való szorzással az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{V}}$ mátrixban is felcserélődött az i -edik és k -adik oszlop.

Teljesen hasonlóan látható be, hogy az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{U}}$ mátrixban a j -edik és p -edik sor cseréjét ($j < p \leq n$) az n -edrendű egységmátrixból a j -edik és p -edik oszlop cseréje révén előálló $\underline{\underline{P}}'_{jp}$ mátrix-szal balról történő szorzással érhetjük el $(\underline{\underline{P}}'_{jp} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}'_{jp} (\underline{\underline{U}} \underline{\underline{V}}) = (\underline{\underline{P}}'_{jp} \underline{\underline{U}}) \underline{\underline{V}})$.

Be kell még látnunk, hogy a $\underline{\underline{P}}_{ik}$, ill. $\underline{\underline{P}}'_{jp}$ mátrixokkal való szorzás az $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{V}}$ mátrixok rangján nem változtat. Ez az állítás azonnal következik abból a tényből, hogy a fejezet elején megadott definíció értelmében pl. $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{P}}_{ik}$ legmagasabb rendű nem-szinguláris kvadratikus minormátrixai egymástól legfeljebb az i -edik és k -adik oszlop sorrendjében térnek el, tehát determinánsaik azonosak, és így rangszámuk is azonos.

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix rangszámát azonban nemcsak a fejezet elején elmondott definíció alapján állapíthatjuk meg. Igaz ui. az alábbi tétel:

Egy tetszőleges $\underline{\underline{A}}$ mátrix rangja megegyezik az $\underline{\underline{A}}$ diadikus felbontásához szükséges diádok minimális számával. (A diadikus felbontásra kidolgozott példában követett módszer éppen minimális felbontást adott meg.)

Bizonyítás. Bontsuk fel a vizsgált $\underline{\underline{A}}$ mátrixot a fent részletezett módon diádok összegére:

$$(\kappa) \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{u}}_1 \underline{\underline{v}}_1^{\kappa} + \underline{\underline{u}}_2 \underline{\underline{v}}_2^{\kappa} + \dots + \underline{\underline{u}}_r \underline{\underline{v}}_r^{\kappa} = (\underline{\underline{u}}_1 \dots \underline{\underline{u}}_r) \begin{pmatrix} \underline{\underline{v}}_1^{\kappa} \\ \underline{\underline{v}}_2^{\kappa} \\ \vdots \\ \underline{\underline{v}}_r^{\kappa} \end{pmatrix} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{V}}.$$

Először azt bizonyítjuk be, hogy $\underline{\underline{A}}$ rangja legalább r .

Amennyiben $\underline{U}$ és $\underline{V}$ trapézmátrix, a 11.) fejezetben elmondott definíció értelmében mindkettő rangja r , így az $\underline{U}$ mátrix első r sorából és $\underline{V}$ első r oszlopából képezhető minor-mátrixok szorzataként $\underline{A}$ - nak egy r - edrendű el nem tűnő determinánsu minormátrixát nyerjük. (Ezen szorzatmátrix determinánsa a determinánsok szorzástétele értelmében a két minormátrix determinánsának szorzataként nyerhető, s minthogy ezek nem tűnnek el, a szorzat-mátrix determinánsa is zérustól különböző.) $\underline{A}$ rangja tehát nem lehet r - nél kisebb. Ha a fenti

$$\underline{A} = \underline{U}\underline{V}$$

alaku felbontásban $\underline{U}$ és $\underline{V}$ csak általánosított trapézmátrix volna, akkor az előbbieket értelmében $\underline{A}$ - ban és $\underline{U}$ - ban alkalmas sorcserét, $\underline{A}$ - ban és $\underline{V}$ - ben megfelelő oszlopserét hajtva végre - amely cserék a szereplő mátrixok rangszámát nem változtatják meg - az adódó

$$\underline{A}' = \underline{U}'\underline{V}' = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} r \\ r \end{array}$$

mátrixokra végezzük el a fenti okoskodást, és így adódik, hogy $\underline{A}'$ rangja - amely $\underline{A}$ rangjával megegyezik - nem lehet r - nél kisebb.

Bebizonyítjuk, hogy $\underline{A}$ rangja r - nél nagyobb sem lehet. Ennek bizonyítása a következő segédítelen nyugszik:

k diád összegének rangja legfeljebb k .

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Egy diád rangja nyilván ≤ 1 . Bizonyítjuk, hogy ha k diád összegének rangja legfeljebb k , akkor $k+1$ diád összegének rangja ennél legfeljebb eggyel lehet nagyobb, vagyis $\leq k+1$.

Jelölje a k darab diád összegét $\underline{A}$, ekkor a $k+1$ diád összege

$$\underline{A} + \underline{u}_{k+1}\underline{v}_{k+1}^x = \underline{B}.$$

Tekintsük $\underline{B}$ $k+2$ - edrendű minormátrixainak determinánsát. E determinánsok elemei összegek, vagyis a determinánsok további determinánsok összegeire bonthatók. Ezen utóbbi felbontásban a következő esetek lehetségesek:

1^o egyik oszlopban sincs az $\underline{u}_{k+1}\underline{v}_{k+1}^x$ diádnak eleme, tehát a $k+2$ - edrendű determináns $\underline{A}$ elemeiből áll és így, mivel feltevésünk értelmében $\underline{A}$ rangja $\leq k$, $k+2$ - edrendű determinánsunk zérussal egyenlő;

2^o egyik oszlopban az $\underline{u}_{k+1}\underline{v}_{k+1}^x$ diád elemei állnak; $k+2$ - edrendű determinánsunkat ezen oszlop szerint kifejtve az adódó $k+1$ - edrendű al-determinánsok, mivel $\underline{A}$ elemeiből állnak csak és $\underline{A}$ rangja $\leq k$, szintén zérussal egyenlők, így tehát $k+2$ - edrendű determinánsunk is zérus;

3° ha a $k+2$ - edrendű determinánsnak legalább két oszlopában $u_{k+1}^x v_{k+1}^x$ elemei állnak, akkor $k+2$ - edrendű determinánsunk két oszlopa egymás állandószorosa, és így értéke zérussal egyenlő.

Ezzel segédállításunkat bebizonyítottuk, mert beláttuk, hogy $\underline{B}$ - nek nincs olyan $k+2$ - edrendű minormátrixa, melynek determinánsa nem tűnik el, és így $\underline{B}$ rangja $\leq k+1$.

Tételünk bizonyításának elején beláttuk már, hogy

$$(**) \quad \underline{A} \text{ rangja} \geq r.$$

Segédállításunk értelmében, minthogy $\underline{A}$ - nak egy

$$\underline{A} = u_1 v_1^x + \dots + u_r v_r^x$$

alaku diadikus felbontásából indultunk ki ($\underline{A}$ - t r diád összegére bontottuk)

$$(*) \quad \underline{A} \text{ rangja} \leq r,$$

vagyis szükségképpen $(**)$ és $(*)$ értelmében

$$\underline{A} \text{ rangja} = r.$$

Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

15.) LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGŐSÉGÉNEK VIZSGÁLATA

A 13.) fejezetben a reciprok-mátrix fogalmának bevezetésénél foglalkoztunk más speciális lineáris egyenletrendszerek megoldásával. Az itt letárgyalt esetet általánosságban így fogalmazhatjuk meg:

az $x_1, x_2, \dots, x_m$ ismeretlenekre felírt

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mk}x_k + \dots + a_{mm}x_m &= b_m, \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer, ill. az

$$(2) \quad \underline{A}\underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet megoldása - amennyiben $\underline{A}$ nem-szinguláris mátrix, vagyis $\det \underline{A} \neq 0$ -

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b},$$

ahol

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} \text{adj } \underline{A},$$

vagy részletesen kiírva

$$x_k = \frac{1}{\det \underline{A}} (A_{1k}b_1 + \dots + A_{mk}b_m) = \frac{A_k}{\det \underline{A}}, \quad k=1, \dots, m,$$

ahol A_k - val azt a determinánst jelöltük, amely $\det \underline{A}$ - ből úgy állt elő, hogy a k - adik oszlopban álló elemeket a $\underline{b}$ oszlopvektor elemeivel helyettesítettük.

Ezen megoldást szolgáltató szabályt Cramer-szabálynak neveztük.

Arról, hogy a Cramer-szabály által szolgáltatott

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$$

oszlopvektor valóban megoldás, a (2) egyenletbe való visszahelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk:

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{A}(\underline{A}^{-1}\underline{b}) = (\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1})\underline{b} = \underline{E}\underline{b} = \underline{b},$$

a mátrix-szorzás asszociativitásának felhasználásával.

Olyan lineáris egyenletrendszereket tehát, melyeknél az ismeretlenek és az egyenletek száma megegyező (tehát $\underline{A}$ kvadratus mátrix, a (2) - ben alkalmazott jelölésekkel), és $\det \underline{A} \neq 0$ (az $\underline{A}$ mátrix nem szinguláris) a Cramer-szabály segítségével meg tudunk oldani.

Az alábbiakban általánosabban, először az

$$(3) \quad \underline{A}\underline{x} = 0,$$

majd az

$$(4) \quad \underline{A}\underline{x} = \underline{b}$$

mátrixegyenlet megoldásával fogunk foglalkozni, ahol

$$(5) \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

vagyis nem kötjük ki, hogy az $\underline{A}$ mátrix kvadratus legyen.

A (3) mátrixegyenlet részletes kiírásával az

$$(6) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m &= 0, \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, \dots, x_m$ ismeretlenekre nézve un. homogén lineáris egyenletrendszerre jutunk, (3) megoldásai tehát a (6) egyenletrendszer megoldásait is szolgáltatják. (A (6) lineáris egyenletrendszert azért nevezzük homogénnak, mert nem tartalmaz olyan tagot, melyben valamelyik ismeretlen ne szerepelne.)

Nemcsak a (6) egyenletrendszer megoldásainak keresése során juthatunk el azonban a (3) mátrixegyenletre.

Az

$$(7) \quad \underline{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \quad i=1, 2, \dots, m$$

oszlopvektorokat (mivel megadásukhoz egy szám n -es volt szükséges) n -dimenziós vektoroknak fogtuk fel. (Lásd 11.) fejezet.) Ezen vektorokból és az $x_1, x_2, \dots, x_m$ számokból képezett

$$(8) \quad \underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_m x_m$$

un. lineáris kombináció segítségével vizsgálhatjuk az $\underline{a}_i$ ($i=1, \dots, m$) vektorok lineáris függőségét. Ha ugyanis a (8) alatti lineáris kombinációra

$$(9) \quad \underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_m x_m = 0$$

csak akkor áll, ha

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0,$$

akkor az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ vektorokat lineárisan függetleneknek mondjuk.

Ha (9) pl. $x_1 \neq 0$ esetében is fennáll, akkor (9) - ből

$$\underline{a}_1 = -\frac{x_2}{x_1} \underline{a}_2 - \dots - \frac{x_m}{x_1} \underline{a}_m,$$

vagyis $\underline{a}_1$ előállítható az $\underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ vektorok lineáris kifejezéseként, lineárisan függ az $\underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ vektoroktól.

A (9) alatti egyenlet vizsgálata azonban épp a (3) mátrixegyenlet vizsgálatára vezethető vissza, hiszen (9) részletes kiírásával a (6) egyenletrendszerre jutunk, ami tömören írva (3) - mal azonos. (A (3) - beli $\underline{A}$ mátrix ekkor a lineáris függőség szempontjából vizsgált $\underline{a}_i$ vektorok koordinátáiból képezett un. koordináta-mátrix.)

Foglalkozunk tehát az alábbiakban az

$$\underline{A} \underline{x} = 0$$

mátrixegyenlet megoldásának vizsgálatával.

$\underline{A}$ - ban alkalmas sor- és oszlopcserével (ami a (6) egyenletrendszer egyenleteinek cseréjével, ill. ismeretlenek átnevezésével megoldható feladat) elérhetjük, hogy $\underline{A}$ diadikus felbontásában

$$\underline{A} = \underline{u}_1 \underline{v}_1^x + \dots + \underline{u}_r \underline{v}_r^x = (\underline{u}_1 \dots \underline{u}_r) \begin{pmatrix} \underline{v}_1^x \\ \vdots \\ \underline{v}_r^x \end{pmatrix} = \underline{U} \underline{V}$$

adódjék, ahol $\underline{A}$ rangja r , $\underline{U}$ és $\underline{V}$ r - edrangú trapéz - mátrixok:

$$\underline{U} = \begin{matrix} & n & \\ \begin{matrix} \diagup & & \diagdown \\ & r & \end{matrix} & \end{matrix}, \quad \underline{V} = \begin{matrix} m & \\ \begin{matrix} \diagdown & & \diagup \\ & r & \end{matrix} & \end{matrix},$$

ill. esetleg általánosított trapézmátrixok (lásd 14.) fejezet).

$\underline{U}$ trapézmátrix ill. általánosított trapézmátrix voltából következik, hogy az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r$ vektorok lineárisan függetlenek, és így

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{U} (\underline{V} \underline{x}) = \underline{u}_1 (\underline{v}_1^x \underline{x}) + \dots + \underline{u}_r (\underline{v}_r^x \underline{x}) = 0$$

csak akkor állhat, ha

$$\underline{v}_1^x \underline{x} = \underline{v}_2^x \underline{x} = \dots = \underline{v}_r^x \underline{x} = 0,$$

tehát másképp

$$\underline{A} \underline{x} = 0$$

ból

$$\underline{V} \underline{x} = 0$$

következik.

Másrészt

$$\underline{V} \underline{x} = 0$$

esetén nyilván

$$\underline{A} \underline{x} = 0$$

áll.

A (3) mátrixegyenlet vizsgálata tehát visszavezethető a

(10)

$$\underline{V} \underline{x} = 0$$

mátrixegyenlet vizsgálatára, melynek részletesen kiírva a következő lineáris egyenletrendszer felel meg:

$$\begin{aligned}
 v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \dots + v_{1r}x_r + \dots + v_{1m}x_m &= 0, \\
 v_{22}x_2 + \dots + v_{2r}x_r + \dots + v_{2m}x_m &= 0, \\
 &\vdots \\
 v_{rr}x_r + \dots + v_{rm}x_m &= 0,
 \end{aligned}$$

(11)

$$(v_{ii} \neq 0, i=1, 2, \dots, r).$$

Az alábbiakban három esetet különböztetünk meg:

1^o $r = m$, tehát az $\underline{A}$ ill. $\underline{V}$ mátrix rangja megegyezik (6) - ban a lineáris egyenletrendszer ismeretlenek számával, ill. (9) - ben a lineáris függőség szempontjából vizsgált vektorok számával. $\underline{V}$ ekkor háromszögmátrix és (11) - ből adódóan:

$$v_{rr}x_r = 0, \text{ azaz } x_r = 0 \quad (v_{rr} \neq 0),$$

$$v_{r-1,r-1}x_{r-1} + v_{r-1,r}x_r = 0, \text{ azaz } x_{r-1} = -\frac{v_{r-1,r}}{v_{r-1,r-1}}x_r = 0,$$

azaz

$$x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0.$$

A (6) lineáris egyenletrendszer tehát csak az un. triviális $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ megoldással bír, a (9) - ben szereplő $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ vektorok pedig lineárisan függetlenek.

2^o $r < m$. Ekkor (11) - ben $m-r$ számú ismeretlen: $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m$ tetszőlegesen választható, ezekből az $x_r, x_{r-1}, \dots, x_1$ ismeretlenek (11) - ből rendre kiszámíthatók:

$$x_r = -\frac{1}{v_{rr}}(v_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + v_{r,m}x_m) =$$

$$= b_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + b_{r,m}x_m,$$

$$x_{r-1} = -\frac{1}{v_{r-1,r-1}}(v_{r-1,r}x_r + v_{r-1,r+1}x_{r+1} + \dots + v_{r-1,m}x_m) =$$

$$= b_{r-1,r+1}x_{r+1} + \dots + b_{r-1,m}x_m$$

(12)

$$x_1 = b_{1,r+1} x_{r+1} + \dots + b_{1,m} x_m.$$

Ha tehát (6) - ban $\underline{A}$ rangja, r kisebb, mint az ismeretlenek száma, m , (6) megoldását egy $m-r$ paramétertől függő sokaságként nyerjük. Más szavakkal, ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ vektorok koordináta-mátrixának rangja r , kisebb, mint a vektorok száma, m , akkor az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ vektorok közt r számú lineárisan független van, a többi $m-r$ vektor pedig ezek lineáris kombinációjaként állítható elő. Ha ui.

$$c_1 \underline{a}_1 + \dots + c_r \underline{a}_r = 0,$$

akkor

$$x_1 = c_1,$$

$$x_2 = c_2,$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x_r = c_r,$$

$$x_{r+1} = \dots = x_m = 0$$

megoldása a (6) egyenletrendszernek, és a fenti képletek alapján

$$x_{r+1} = \dots = x_m = 0 \text{ miatt}$$

$$c_1 = \dots = c_r = 0,$$

vagyis $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r$ lineárisan függetlenek.

Másrészt az $x_{r+1}, \dots, x_m$ paraméterek speciális választásával nyerjük:

$$x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = \dots = x_m = 0 \text{ esetén}$$

$$0 = \underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_r x_r + \underline{a}_{r+1},$$

azaz

$$-\underline{a}_{r+1} = \underline{a}_1 b_{1,r+1} + \underline{a}_2 b_{2,r+1} + \dots + \underline{a}_r b_{r,r+1};$$

hasonlóképp adódik

$$x_{r+2} = 1, \quad x_{r+1} = x_{r+3} = \dots = x_m = 0 \text{ esetén}$$

$$0 = \underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_r x_r + \underline{a}_{r+2},$$

azaz

$$-a_{r+2} = a_1 b_{1,r+2} + a_2 b_{2,r+2} + \dots + a_r b_{r,r+2};$$

·
·
·

végül

$$x_m = 1, x_{r+1} = \dots = x_{m-1} = 0 \text{ esetén}$$

$$-a_m = a_1 b_{1,m} + a_2 b_{2,m} + \dots + a_r b_{r,m};$$

vagyis az $a_{r+1}, \dots, a_m$ vektorok mindegyike lineáris kombinációja az

$a_1, a_2, \dots, a_r$ vektoroknak.

3^o $m > n$ esetben, amikor is szükségképpen $m > r$, a 2^o eset áll fenn. Ha tehát (6) - ban az ismeretlenek száma meghaladja az egyenletek számát, a lineáris egyenletrendszer megoldása egy $m-r$ paramétertől függő sokaságként adódik (r az $\underline{A}$ mátrix rangja). Másrészt (9) - ben, ha a lineáris függőség szempontjából vizsgált vektorok száma azok dimenziójának számát meghaladja, akkor ezek a vektorok nem lehetnek lineárisan függetlenek. 2^o értelmében azonban az m vektor közül r számú lineárisan független lesz (r a vizsgált vektorok koordinátamátrixának rangszáma), a többi $m-r$ vektor ezek lineáris kombinációjaként adható meg. Kimondhatjuk tehát, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorok koordinátamátrixának rangja egyenlő az $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorok közül kiválasztható lineárisan független vektorok maximális számával.

Az

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1,$$

·
·
·

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n$$

lineáris inhomogén egyenletrendszer megoldásának vizsgálatát az előbb tárgyalt homogén egyenletrendszerek megoldására vezethetjük vissza a következő módon:

Fenti egyenletrendszerünk mátrixegyenlet alakjában is felírható:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b},$$

illetve

$$\underline{A} \underline{x} - \underline{b} = 0,$$

kicsit részletesebben kiírva:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m - b = 0,$$

ahol

$$\underline{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (k=1, 2, \dots, m).$$

Bevezetve tehát az

$$\underline{\underline{A}}_b = (\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \dots \ \underline{a}_m \ \underline{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

un. bővített mátrix jelölést (e mátrixot úgy nyerjük, hogy az $\underline{A}$ mátrix elemeihez a $\underline{b}$ oszlopvektor elemeit hozzácsatoljuk az utolsó oszlop elemeiként), továbbá

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \end{pmatrix} \text{ mellett az } \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \end{pmatrix}$$

jelölést, az

$$(13) \quad \underline{\underline{A}}_b \underline{y} = 0$$

egyenlet megoldásai

$$x_{m+1} = -1$$

paraméterválasztás esetén

$$(14) \quad \underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{b}$$

megoldásait szolgáltatják.

Felmerül mármost a kérdés, mikor van (14) - nek megoldása, más szóval, mikor van (13) - nak olyan megoldása, amelyben $x_{m+1} = -1$. (1) - et

$$\underline{a}_1 x_1 + \dots + \underline{a}_m x_m = \underline{b}$$

alakban írva, a kérdést úgy is megfogalmazhatjuk, hogy mikor lesz $\underline{b}$ lineáris kombinációja az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ vektoroknak. Ennek feltétele az, hogy $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{A}}_b$ rangja megegyezzen.

Legyen ugyanis $\underline{\underline{A}}_b$ rangja r és ez egyezzen meg $\underline{\underline{A}}$ rangjával, ekkor az $\underline{\underline{A}}_b$ mátrix utolsó oszlopában álló $\underline{b}$ oszlopvektor az előző oszlopokban

áll $\underline{a}_1$ oszlopvektorok lineáris kombinációja. Kiválasztva ugyanis ezen $\underline{a}_1$ oszlopvektorok közül r lineárisan független vektort, ezek és $\underline{b}$ már nem lesznek lineárisan függetlenek ($\underline{A}_b$ rangja ui. r), vagyis a kiválasztott r számú lineárisan független $\underline{a}_1$ vektorból képezett lineáris $\sum c_i \underline{a}_i$ kombinációra

$$\sum c_i \underline{a}_i + c \underline{b} = 0$$

$c \neq 0$ mellett is fennáll, azaz

$$\underline{b} = -\frac{1}{c} \sum c_i \underline{a}_i,$$

$\underline{b}$ az $\underline{a}_1$ vektorok lineáris kombinációja.

Fordítva, ha $\underline{A}$ rangja r és az $\underline{A}_b$ mátrix utolsó oszlopában álló $\underline{b}$ oszlopvektor az előző oszlopokban álló $\underline{a}_1$ vektorok lineáris kombinációja, akkor $\underline{A}_b$ rangja is r , azaz bárhogyan választunk is ki $\underline{A}_b$ -ből $r+1$ oszlopvektort, azok nem lehetnek lineárisan függetlenek. Ha ugyanis az $\underline{A}_b$ mátrixból $r+1$ oszlopvektort választunk ki, melyek között $\underline{b}$ nem szerepel, akkor ezen kiválasztott oszlopvektorok $\underline{A}$ -nak is oszlopvektorai, s mivel $\underline{A}$ rangja r , nem lehetnek lineárisan függetlenek. Ebből rögtön következik, hogy ha veszünk az $\underline{a}_1$ vektorok közül r lineárisan függetlent, akkor minden további $\underline{a}_i$ ezeknek lineáris kombinációja. Ha mármost kiválasztjuk $\underline{b} - t$ és $\underline{A}$ -nak r további oszlopvektorát, akkor vagy az utóbbiak nem lineárisan függetlenek, s így ezek és $\underline{b}$ még kevésbé, vagy az utóbbiak, mondjuk $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ lineárisan függetlenek. De $\underline{b}$ lineáris kombinációja az $\underline{a}_i$ -knek, s ezek mindegyike (mint fent megjegyeztük) az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ vektoroknak, úgyhogy az utóbbiaknak $\underline{b}$ is lineáris kombinációja, úgyhogy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r, \underline{b}$ együttesen nem függetlenek lineárisan, amint állítottuk.

Összehasonlítva egymással az

$$(15) \quad \underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

inhomogén és a neki megfelelő

$$(16) \quad \underline{A} \underline{x} = 0$$

homogén egyenlet megoldásait, előző eredményünk még így is megfogalmazható:

Amennyiben a $\underline{b}$ elemeivel bővített $\underline{A}$ mátrix (az $\underline{A}_b$ bővített mátrix) rangja megegyezik $\underline{A}$ rangjával, van (15) - nek megoldása, és ez (vagy esetleg ezek) (16) megoldásából (megoldásaiból) a következőképp adódik (adódnak):

$$(17) \quad \underline{x} = \underline{x}_h + \underline{\xi},$$

ahol $\underline{\xi}$ (15) - nek megoldása: $\underline{A} \underline{\xi} = \underline{b}$.

Valóban, $\underline{x}$ megoldása (15) - nek:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{A} (\underline{x}_h + \underline{\xi}) = \underline{A} \underline{x}_h + \underline{A} \underline{\xi} = 0 + \underline{A} \underline{\xi} = \underline{b},$$

és másrészt $\underline{x} - \underline{\xi} = \underline{x}_h$ megoldása (16) - nak:

$$\underline{A} (\underline{x} - \underline{\xi}) = \underline{A} \underline{x} - \underline{A} \underline{\xi} = \underline{b} - \underline{b} = 0,$$

ha $\underline{x}$ és $\underline{\xi}$ (15) - nek megoldásai.

Ha továbbá $\underline{A}$ és $\underline{A}_b$ egyező rangszáma megegyezik (15), ill. (16) ismeretleinek számával, (16) csak a triviális megoldással, és így (15) csak a Cramer-szabály által szolgáltatott egyetlen $\underline{\xi}$ megoldással bír.

Ha $\underline{A}$ rangja, r kisebb, mint (15), ill. (16) ismeretleinek száma, m , akkor (16) megoldása $m-r$ paramétertől függő sokaság, s ugyanez áll (17) értelmében (15) megoldásaira is, hacsak (15) - nek van egyáltalán megoldása.

Megjegyezzük még, hogy $\underline{A}_b$ rangja nyilván nem lehet kisebb $\underline{A}$ rangszámánál, de legfeljebb a (15) - beli $\underline{x}$ oszlopvektor dimenziószámánál (a részletesen kiírt egyenletrendszer ismeretleinek számánál) eggyel lehet nagyobb. Eredményeinket a következő táblázatba foglalhatjuk össze:

Ha $\underline{A}$ rangja = r , $\underline{A}_b$ rangja = p , $\underline{x}$ dimenziója = m , akkor

	$\underline{A} \underline{x} = 0$ megoldásai:	$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ $\underline{A}_b \underline{y} = 0$ megoldásai:
$r=p=m$ esetén	triviális $\underline{x} = 0$,	1 megoldás (Cramer-szabály) $\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$
$r=p < m$ esetén	$m-r$ paramétertől függő sokaság	$m-r$ paramétertől függő sokaság
$r < p \leq m+1$		nincs megoldás

Oldjuk meg pl. az alábbi egyenletrendszereket:

$$1^o \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0,$$

$$x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0,$$

$$x_1 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0.$$

Az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

jelöléssel egyenletrendszerünknek az

$$\underline{A} \underline{x} = 0$$

mátrixegyenlet felel meg. $\underline{A}$ diadikus felbontása:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 3 \ -1 \ 3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{A}^{(1)},$$

$$\underline{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ -7 \ 2 \ -8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & 12 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{A}^{(2)},$$

$$\underline{\underline{A}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1 \ -\frac{1}{2} \ \frac{5}{4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \frac{1}{2}) ,$$

tehát

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 3 \ -1 \ 3) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ -7 \ 2 \ -8) +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1 \ -\frac{1}{2} \ \frac{5}{4}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \frac{1}{2}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -12 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{V}} .$$

Az

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} = 0$$

mátrixegyenlet megoldásait (ilyen végtelen sok lesz, minthogy $\underline{A}$ diadikus felbontásból kiolvashatóan $\underline{A}$ rangja $r = 4$, az öt ismeretlen közül az egyik paraméternek vezethető be, a megoldás egyparaméteres seregként adódik) a

$$\underline{V} \underline{x} = 0$$

egyenlet megoldásaiként kereshetjük. Ezen mátrixegyenletnek az alábbi lineáris egyenletrendszer felel meg:

$$x_1 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0,$$

$$x_2 - 7x_3 + 2x_4 - 8x_5 = 0,$$

$$x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{4}x_5 = 0,$$

$$x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 0,$$

azaz egy megoldásrendszer:

$$x_5 = t,$$

$$x_4 = -\frac{t}{2},$$

$$x_3 = -\frac{t}{4} - \frac{5}{4}t = -\frac{3}{2}t,$$

$$x_2 = -\frac{21}{2}t + t + 8t = -\frac{3}{2}t,$$

$$x_1 = \frac{9}{2}t - \frac{t}{2} - 3t = t.$$

$$2^0 \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_2 - x_3 + 3x_4 = 0.$$

Könnyű számolással belátható, hogy az ismeretlenek együtthatóiból képezett $\underline{A}$ mátrix nem szinguláris ($\det \underline{A} \neq 0$), így $\underline{A}$ rangszáma $r = 4$ az ismeretlenek számával megegyezik, tehát csak a triviális megoldás:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

létezik.

$$3^0 \quad -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 3,$$

$$x_1 - x_3 + 2x_4 = 3,$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -5,$$

$$-2x_2 - 2x_3 = 1.$$

Az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}_b = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{y}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jelöléssel egyenletrendszerünk megoldását az

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}}, \quad \text{ill.} \quad \underline{\underline{A}}_b \underline{\underline{y}} = 0$$

mátrixegyenlet $x_5 = -1$ paraméterértékhez tartozó megoldása szolgáltatja.

$\underline{\underline{A}}_b$ diadikus felbontása révén nyerjük pl.:

$$\underline{\underline{A}}_b = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{13}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{V}},$$

vagyis a

$$\underline{\underline{V}} \underline{\underline{y}} = 0$$

mátrixegyenlet részletes kiírásával:

$$x_1 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0,$$

$$x_2 - 2x_3 + \frac{13}{2}x_4 + 6x_5 = 0,$$

$$x_3 - \frac{7}{3}x_4 - \frac{7}{3}x_5 = 0,$$

$$x_4 + x_5 = 0.$$

Az $x_5 = -1$ paraméterválasztás mellett eredeti inhomogén egyenletrendszerünk megoldása:

$$x_4 = 1,$$

$$x_3 = 0,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2},$$

$$x_1 = 1.$$

$$4^0 x_1 - x_2 + 2x_3 = 1,$$

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2,$$

$$3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -5.$$

Az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \underline{\underline{A}}_b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -5 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

jelöléssel egyenletrendszerünk megoldását az

$$\underline{\underline{A}}_b \underline{y} = 0$$

mátrixegyenlet $x_5 = -1$ paraméterértékhez tartozó megoldása szolgáltatja.

$\underline{\underline{A}}_b$ egy diadikus felbontása segítségével írható:

$$\underline{\underline{A}}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{V}}.$$

$\underline{\underline{V}}$ nem adódott trapézmátrixnak. Ahhoz, hogy $\underline{\underline{V}}$ - ben a harmadik és negyedik oszlopot felcseréljük (ezen csere után az adódó mátrix már trapézmátrix lesz), $\underline{\underline{A}}$ - ban is fel kell e két oszlopot cserélnünk, ami formálisan az x_3 és x_4 ismeretlenek felcserélését jelenti. Az

$$x_3 = u, \quad x_4 = w$$

jelöléssel tehát, megoldandó egyenletrendszerünk:

$$x_1 - x_2 + 2u = 1,$$

$$2x_1 - x_2 + 2w + 5u = 2,$$

$$3x_1 - 3x_2 + 2w + 6u = 7,$$

$$x_1 - 2x_2 - 5w + u = -5,$$

a megfelelő $\underline{\underline{A}}'_b$ mátrix diadikus felbontása segítségével írható:

$$\underline{\underline{A}}'_b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & 1 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{U' V'}}$$

$\underline{\underline{A'}}$ rangja tehát $r = 3$, az $x_5 = -1$ paraméterválasztás mellett is még egy paramétertől függő sokaság szolgáltatja egyenletrendszerünk megoldását. A

$$\underline{\underline{V'}} \underline{\underline{y}} = 0$$

mátrixegyenlet részletes kiírásával nyerjük:

$$x_1 - x_2 + 2u + x_5 = 0,$$

$$x_2 + 2w + u = 0,$$

$$w + 2x_5 = 0,$$

s így az $x_5 = -1$, $u = x_3 = t$ paraméterválasztás mellett eredeti egyenletrendszerünk megoldása:

$$w = x_4 = 2,$$

$$u = x_3 = t,$$

$$x_2 = -4 - t,$$

$$x_1 = -3 - 3t.$$

16.) LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ

Az előző fejezetben az

$$(1) \quad \underline{\underline{A}} \underline{r} = \underline{r}'$$

tipusu mátrixegyenletek tárgyalásával foglalkoztunk és megemlítettük, hogy többféle probléma vizsgálata vezet ilyen mátrixegyenlet megoldására.

Az (1) mátrixegyenletnek még az alábbi értelmezést is adhatjuk:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \underline{r}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$$

egy utasítást fejez ki: az $\underline{\underline{A}}$ mátrix-szal való szorzás az $\underline{r}$ vektort az $\underline{r}'$ vektorba viszi át, az $\underline{r}$ vektornak az $\underline{r}'$ ún. képvektort felelteti meg. Az olyan utasítást, amellyel bizonyos elemek mindegyikéhez egy összesség egy-egy elemét rendeljük hozzá, transzformációnak nevezzük. Ha a transzformáció különböző elemekhez különböző elemeket (kép-elemeket) rendel, megfordíthatónak (invertálhatónak) mondjuk. E tulajdonság ugyanis azt jelenti, hogy lehet találni egy olyan másik transzformációt, mely a képelemekhez az eredeti elemeket rendeli. Pl. az

$$\underline{\underline{A}} \underline{r} = \underline{r}'$$

transzformáció, ha $\underline{\underline{A}}$ nem-szinguláris mátrix, megfordítható, az a transzformáció, mely az $\underline{r}'$ kép-vektoroknak az eredeti $\underline{r}$ vektorokat felelteti meg,

$$\underline{r} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{r}'$$

Általában transzformációk összetételén azt értjük, hogy valamely elemet egy adott transzformációval meghatározott kép-elembe, majd ezt egy újabb transzformációval újabb kép-elembe visszük át. Az (1) típusú transzformációk esetében a transzformációk összetétele igen egyszerűen megoldható feladat, hiszen

$$\underline{r}' = \underline{A} \underline{r}, \quad \underline{r}'' = \underline{B} \underline{r}'$$

$$\underline{r}'' = \underline{B} (\underline{A} \underline{r}) = (\underline{BA}) \underline{r}$$

a mátrix-szorzás asszociatív-szabálya értelmében. A transzformációk összetétele tehát a megfelelő mátrixok szorzásával egyetlen lépésben megoldható feladat.

Ha $\underline{A}$ nem-szinguláris

$$\underline{r}' = \underline{A} \underline{r}, \quad \underline{r}'' = \underline{A}^{-1} \underline{r}'$$

esetében

$$\underline{r}'' = \underline{A}^{-1} (\underline{A} \underline{r}) = (\underline{A}^{-1} \underline{A}) \underline{r} = \underline{r}.$$

Az (1) transzformáció a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\text{I. } \underline{A} (c\underline{r}) = c (\underline{A} \underline{r}) = c \underline{r}', \quad c \text{ szám,}$$

$$\text{II. } \underline{A} (\underline{r}_1 + \underline{r}_2) = \underline{A} \underline{r}_1 + \underline{A} \underline{r}_2.$$

E két tulajdonságot foglaljuk egy össze, hogy a transzformáció homogén lineáris.

Az alábbiakban részletesebben először a kétdimenziós tér homogén lineáris transzformációival foglalkozunk. E transzformációk röviden az

$$\underline{r}' = \underline{A} \underline{r}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \underline{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

alakban, részletesebben kiírva (a kijelölt szorzásokat elvégezve)

$$(2) \quad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}$$

alakban adhatók meg.

Bebizonyítjuk, hogy e transzformáció egyenest egyenesbe, párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe, vagyis háromszögeket háromszögekbe, paralelogrammákat paralelogrammákba visz át, az eredeti és a kép-háromszög területe pedig arányos egymással.

I. Tétel

A (2) homogén lineáris transzformáció egyenest egyenesbe, a PQ egyenesdarabot pedig a P'Q' egyenesdarabba viszi át, ahol P ill. Q képe P' ill. Q'.

Valóban, valamely egyenes egyenlete paraméteresen

$$(3) \quad \underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{a} t$$

alakban írható, ahol t a valós számokon fut végig, a $t = t_1$ és $t = t_2$ paraméterű P és Q pontok által meghatározott PQ egyenesdarab pontjai pedig (3)-ból akkor adódnak, ha t értéke t_1 -től t_2 -ig fut. Innen

$$(4) \quad \underline{r}' = \underline{A}\underline{r} = \underline{A}(\underline{r}_0 + \underline{a} t) = \underline{A}\underline{r}_0 + (\underline{A}\underline{a}) t = \underline{r}'_0 + \underline{a}' t,$$

és itt t értékét az összes valós számokon, ill. a t_1 és t_2 közötti valós számokon végigfuttatva egyenes, ill. a P pont P' képe és a Q pont Q' képe által meghatározott $P'Q'$ egyenesdarab egyenletét nyerjük. Az $\underline{a}' = \underline{A}\underline{a} = \underline{0}$ esetben az egyenes ill. az egyenesdarab ponttá fajul, ez azonban csak szinguláris $\underline{A}$ esetén állhat elő.

II. Tétel

A (2) homogén lineáris transzformáció párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe visz át.

Csakugyan, két párhuzamos egyenes egyenletét a (3) alakban ugyanazzal az $\underline{a}$ vektorral lehet felírni, akkor pedig a (4) - ben szereplő $\underline{a}' = \underline{A}\underline{a}$ vektorok is megegyeznek s ezért a kép-egyenesek is párhuzamosak.

III. Tétel

Ha a P_0, P_1, P_2 pontok képe a (2) homogén lineáris transzformációnál rendre P'_0, P'_1, P'_2 , akkor a $P_0P_1P_2$ háromszög képe a $P'_0P'_1P'_2$ háromszög, s ezeknek t ill. t' területe között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$t' = |\det \underline{A}| \cdot t.$$

Csakugyan, a $P_0P_1P_2$ háromszög ama P_0P szakaszok egyesítése, amelyekben P a P_1P_2 szakaszt futja be. Az I. Tétel szerint e háromszög képe a P'_0P szakaszok egyesítése, ahol P' a P_1P_2 szakasz képét, azaz a $P'_1P'_2$ szakaszt futja be; ez azonban éppen a $P'_0P'_1P'_2$ háromszög. Az állítás második része a következőképpen látható be.

A $P'_0(x'_0, y'_0), P'_1(x'_1, y'_1), P'_2(x'_2, y'_2)$ csúcspontu háromszög területe

$$t' = \frac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} (x'_0 - x'_2)I + (y'_0 - y'_2)J \\ (x'_1 - x'_2)I + (y'_1 - y'_2)J \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} I & J & \bar{k} \\ x'_0 - x'_2 & y'_0 - y'_2 & 0 \\ x'_1 - x'_2 & y'_1 - y'_2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x'_0 - x'_2 & y'_0 - y'_2 \\ x'_1 - x'_2 & y'_1 - y'_2 \end{vmatrix} \right|$$

A (2) összefüggés alapján írhatjuk azonban, ha P'_0, P'_1, P'_2 a P_0, P_1, P_2 pontok kép-pontjai:

$$t' = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} a_{11}(x'_0 - x'_2) + a_{12}(y'_0 - y'_2) & a_{21}(x'_0 - x'_2) + a_{22}(y'_0 - y'_2) \\ a_{11}(x'_1 - x'_2) + a_{12}(y'_1 - y'_2) & a_{21}(x'_1 - x'_2) + a_{22}(y'_1 - y'_2) \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x'_0 - x'_2 & y'_0 - y'_2 \\ x'_1 - x'_2 & y'_1 - y'_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} t \left| \det \underline{A} \right|,$$

ahol a $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ csúcspontu háromszög területét jeöltük t -vel.

Ezzel a homogén lineáris síkbeli (kétdimenziós) transzformációkra vonatkozó állításainkat igazoltuk.

Az általános kétdimenziós lineáris transzformációk

$$\underline{r}' = \underline{A} \underline{r} + \underline{b}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \underline{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

ill. részletesebben felírva az

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2$$

alakban adhatók meg. E transzformáció nem homogén.

Speciálisan $\underline{A} = \underline{E}$ esetében e transzformáció az

$$\underline{r}' = \underline{r} + \underline{b}$$

iii.

$$x' = x + b_1,$$

$$y' = y + b_2$$

eltolásba (tranzlációba) megy át. E transzformációnál minden $P(x, y)$ pont b_1 -gyel nagyobb abszcisszájú és b_2 -vel nagyobb ordinátájú $P'(x', y')$ pontba tolik el, innen nyerte a transzformáció elnevezését. Pl. az

$$x' = x - 3,$$

$$y' = y + 2$$

transzformációval az

$$x^2 + y^2 = 1$$

$P(0, 0)$ középpontú egységgör a $P'(-3, 2)$ középpontú

$$(x' + 3)^2 + (y' - 2)^2 = 1$$

körvonalba megy át.

Az általános

$$\underline{r}' = \underline{A} \underline{r} + \underline{b}$$

lineáris transzformáció mindig összetehető egy eltolásból és egy

$$\underline{r}' = \underline{A} \underline{r}$$

homogén lineáris transzformációból. Valóban

$$\underline{r}' = \underline{E} (\underline{A} \underline{r}) + \underline{b},$$

és ha $\underline{A}$ nem szinguláris írható még:

$$\underline{r}' = \underline{A} (\underline{E} \underline{r} + \underline{A}^{-1} \underline{b}).$$

Az

$$\underline{r}' = \underline{A} \underline{r}$$

homogén lineáris transzformációk további speciális transzformációk összegére bonthatók fel. Ezen speciális homogén lineáris transzformációk a nyújtás és forgatás. (Az állítást itt nem bizonyítjuk.)

1^o Nyújtás

Az

$$\underline{r}' = \underline{A} \underline{r}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \underline{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

homogén lineáris transzformáció, mely a kijelölt szorzások elvégzése után az

$$x' = ax,$$

$$y' = by$$

alakban is írható, a sík minden $P(x, y)$ pontjának az a - szoros abszcisszával és b - szoros ordinátával rendelkező $P'(x', y')$ pontot felelteti meg. A transzformáció az X tengely egységpontját az $(a, 0)$, az Y tengely egységpontját a $(0, b)$ pontba viszi át. Pl. az

$$x^2 + y^2 = 1$$

egységkörvonalat az

$$\underline{r}' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

transzformáció az

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

ellipszisbe, ill. $a=b$ esetében az a sugarú körbe viszi át.

2^o Forgatás

Az

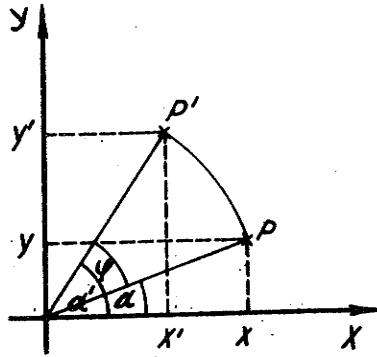
$$\underline{r}' = \underline{A} \underline{r}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \underline{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

illetve részletesebben kiírva

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi,$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

homogén lineáris transzformáció a sík $P(x, y)$ pontjának azt a $P'(x', y')$ pontot felelteti meg, melyet úgy nyerhetünk, hogy a derékszögű koordinátarendszer O középpontja, mint fixpont körül az OP szakaszt pozitív irányban φ szöggel el-



32. ábra

forgatjuk (lásd 32. ábra). Ha ui. P és P' derékszögi koordinátáit polárkoordinátáikkal fejezzük ki,

$$x' = r' \cos \alpha', \quad y' = r' \sin \alpha',$$

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha$$

adódik, és felhasználva az

$$r = r', \quad \alpha' = \alpha + \varphi$$

összefüggéseket, írhatjuk:

$$\begin{aligned} x' &= r \cos (\alpha + \varphi) = r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi = \\ &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= r \sin (\alpha + \varphi) = r \cos \alpha \sin \varphi + r \sin \alpha \cos \varphi = \\ &= x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{aligned}$$

és ezzel épp fenti transzformáció-formuláinkra jutottunk.

Pl. az

$$x^2 - y^2 = a^2$$

egyenlőszáru hiperbolát 45° - kal pozitív irányban elforgatva az elforgatott görbe egyenlete, mivel a transzformációs képletek:

$$x' = x \cos \frac{\pi}{4} - y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}},$$

$$y' = x \sin \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{4} = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}},$$

azaz

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}},$$

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(-\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2,$$

illetve a négyzetreemelést és összevonásokat elvégezve

$$2x'y' = a^2,$$

vagy másképp írva

$$y' = \frac{a^2}{ax'}.$$

17.) MÁTRIX SAJÁTÉRTÉKEI ÉS SAJÁTVEKTORAI

Egy speciális lineáris transzformációkra vonatkozó kérdéssel foglalkozunk az alábbiakban. Adott $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrixhoz olyan λ konstansokat és $\underline{x}$ oszlopvektorokat keresünk ugyanis, melyekre

$$(1) \quad \underline{\underline{A}} \underline{x} = \lambda \underline{x},$$

vagyis amely $\underline{x}$ vektorokat az adott $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátmagukkal "arányos", " $\underline{x}$ -szel párhuzamos" vektorokba viszi át.

$\underline{\underline{A}}$ - ról kikötjük, hogy kvadratikus legyen, vagyis (1) még a következő alakban is írható:

$$(2) \quad (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \underline{x} = 0,$$

ahol

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{E}} \text{ n-edrendű egységmátrix.}$$

A (2) - ben megadott mátrixegyenletnek részletes kiírással az

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0,$$

...

$$a_{n1}x_1 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0$$

lineáris egyenletrendszer felel meg, melynek akkor van triviális

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \text{ ill. } \underline{x} = 0$$

megoldástól eltérő megoldása, ha

$$(3) \quad \det (\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

A (2) - ben felírt $\underline{A} - \lambda \underline{E}$ mátrixot $\underline{A}$ karakterisztikus mátrixának, ennek (3) alatt felírt determinánsát karakterisztikus determinánsnak, míg a (3) - ban felírt λ -ban n - edfoku algebrai egyenletet karakterisztikus egyenletnek nevezzük. Ezen egyenlet λ_i megoldásait az $\underline{A}$ mátrix sajátértékeinek (más elnevezéssel karakterisztikus értékeinek), míg (2) ezen λ_i - k mellett nyert $\underline{x}_i$ megoldásait $\underline{A}$ sajátvektorainak nevezzük. Csak ezen sajátvektorokra, illetve ezek lineáris kombinációira áll, hogy az adott $\underline{A}$ mátrix-szal való transzformáltjakkal arányosak:

$$(4) \quad \underline{A} \underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i.$$

(Szokás még az (1) ill. (2) egyenletet az $\underline{A}$ mátrix sajátérték egyenletének is nevezni.)

Ha $\underline{A}$ n - edrendű, akkor a (3) karakterisztikus egyenletnek legfeljebb n megoldása van. Ha $\underline{A}$ rangja kisebb n - nél, $\lambda = 0$ biztosan megoldja a karakterisztikus egyenletet.

A λ_i sajátértékekhez tartozó $\underline{x}_i$ sajátvektorokat természetesen csak egy állandó szorzótól eltekintve szolgáltatja (4) megoldása.

Például:

1^o Az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

azaz

$$10 - 7\lambda + \lambda^2 - 4 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

A $\lambda_1 = 6$ sajátértékhez tartozó

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$$

sajátvektor koordinátáira az

iii. $\underline{A} \underline{x}_1 = \lambda_1 \underline{x}_1$,

$$(\underline{A} - \lambda_1 \underline{E}) \underline{x}_1 = 0$$

mátrixegyenlet, vagy részletesen kiírva az

$$(5-6) x_{11} + 4 x_{21} = 0,$$

$$x_{11} + (2-6)x_{21} = 0,$$

egyenletrendszer írható fel. E két egyenlet bármelyikéből adódik:

$$x_{11} = 4 x_{21},$$

tehát pl. egy sajátvektor:

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó

$$\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$$

sajátvektor koordinátáira a fentihez hasonlóan adódik:

$$(5-1) x_{12} + 4 x_{22} = 0,$$

$$x_{12} + (2-1)x_{22} = 0,$$

azaz

$$x_{12} = -x_{22},$$

tehát pl.

$$\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sajátvektor. Könnyű belátni, hogy $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ lineárisan független (koordináta-determinánsuk zérustól különböző).

2^o A

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

azaz

$$5 - 6\lambda + \lambda^2 + 4 = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

$\underline{\underline{B}}$ két sajátértéke tehát megegyezik. Ezen közös $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sajátvektor koordinátáira a

$$\underline{\underline{B}} \underline{x} = 3 \underline{x}$$

mátrixegyenletből a következő egyenletrendszer adódik:

$$(5-3) x_1 + 4 x_2 = 0,$$

$$-x_1 + (1-3) x_2 = 0,$$

vagyis

$$x_1 = -2x_2,$$

tehát pl.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sajátvektor a B mátrix egyetlen, a kétszeres $\lambda = 3$ sajátértékhez egy állandó szorzótól eltekintve egyértelműen meghatározott sajátvektor.

3^o A

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix karakterisztikus egyenlete

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

azaz

$$\begin{aligned} & (-2-\lambda)(-\lambda + \lambda^2 - 12) - 2(-2\lambda - 6) - 3(4 + 1 - \lambda) = \\ & = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0. \end{aligned}$$

E harmadfokú egyenlet megoldásai:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 5.$$

A $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ un. kétszeres sajátértékhez tartozó

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}$$

sajátvektor (sajátvektorok) koordinátáira az alábbi egyenletet nyerjük:

$$(-2+3)x_{11} + 2x_{21} - 3x_{31} = 0,$$

$$2x_{11} + (1+3)x_{21} - 6x_{31} = 0,$$

$$-x_{11} - 2x_{21} + 3x_{31} = 0.$$

Láthatóan a három egyenlet nem független (az elsőből a második és harmadik egyenlet +2, ill. (-1) - gyel való szorzással adódik), így x_{21} és x_{31} - et paraméternek választva, adódik:

$$x_{31} = u,$$

$$x_{21} = v,$$

$$x_{11} = 3u - 2v,$$

tehát két sajátvektor pl.

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

E két sajátvektor nyilván lineárisan független és minden $c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2$ alakban előállítható vektor - amely $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ - től már nem független lineárisan - szintén $\underline{C} \lambda = -3$ sajátértékhez tartozó sajátvektora.

A $\lambda = 5$ sajátértékhez adódó

$$\underline{x}_3 = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}$$

sajátvektor koordinátáira adódik:

$$(-2-5)x_{13} + 2x_{23} - 3x_{33} = 0,$$

$$2x_{13} + (1-5)x_{23} - 6x_{33} = 0,$$

$$-x_{13} - 2x_{23} - 5x_{33} = 0.$$

Az együtthatómátrix diadikus felbontása:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 32 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

vagyis

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ 2 & -8 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

s így fenti egyenletünk megoldásai az alábbi egyenletet is kielégítik:

$$x_{13} + 2x_{23} + 5x_{33} = 0,$$

$$x_{23} + 2x_{33} = 0.$$

Keresett megoldásrendszerünk tehát

$$\begin{aligned}x_{33} &= t, \\x_{23} &= -2t, \\x_{13} &= 4t - 5t = -t.\end{aligned}$$

Egy, a $\lambda = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektor tehát pl.

$$\underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Könnyen belátható, hogy annak ellenére, hogy a harmadrendű $\underline{C}$ -mátrix két sajátértéke egyező, (a $\lambda = -3$ sajátérték kétszeres), $\underline{C}$ ezen sajátértékekhez tartozó $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ sajátvektorai lineárisan függetlenek, azaz

$$(5) \quad c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2 + c_3 \underline{x}_3 = 0$$

csak úgy állhat, ha

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Valóban a sajátvektorok koordinátamátrixának determinánsa

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 3 + 1 = 8 \neq 0$$

és így a c_1 , c_2 , c_3 ismeretlenekre felírt (5) egyenletrendszer csak a triviális megoldással bírhat, amivel állításunkat igazoltuk.

Bizonyítás nélkül megemlítettünk még egy, az alkalmazások szempontjából igen fontos tételt.

Tétel

Bármely szimmetrikus n - edrendű $\underline{A}$ mátrixnak van n egymásra páronként merőleges sajátvektora.

(Az $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_k$ sajátvektor merőleges egymásra, ha $\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_k = 0$. E definíció háromdimenziós vektorok esetében épp azt fejezi ki, hogy a két vektor skaláris szorzata eltűnik, ami a háromdimenziós térben a merőlegesség kimutatására szolgált.)

18.) A HALMAZELMÉLET ALAPFOGALMAI

Halmaznak nevezzük valamilyen módon meghatározott dolgok, objektumok összességét.

Halmazt alkotnak például:

- 1^o a valós számok,
- 2^o a racionális számok,
- 3^o a természetes számok,
- 4^o a páros számok,
- 5^o a 4 - nél kisebb valós számok,
- 6^o az 1, 2, 3 szám,
- 7^o a 0 szám,
- 8^o egy adott sík pontjai,
- 9^o a háromdimenziós tér pontjai,
- 10^o a háromdimenziós tér vektorai,
- 11^o egy térben tartózkodó emberek,
- 12^o egy termen kívül Budapesten tartózkodó emberek,
- 13^o az irracionális számok,
- 14^o a páratlan számok.

Azokat a dolgokat, objektumokat, melyek a halmazhoz tartoznak, a halmaz elemeinek nevezzük.

Két halmazt akkor mondunk egyenlőnek, ha az egyik ugyanazokat az elemeket tartalmazza, mint a másik.

A halmazok elemeit általában kis betűvel jelöljük, a halmazok jelölésére pedig általában nagy betűket használunk.

Azt a tényt, hogy x elemé a P halmaznak (x hozzátartozik P - hez), így jelöljük:

$$x \in P.$$

Az $\in$ jelet a hozzátartozás jelének nevezzük.

Azt a tényt, hogy x nem elemé R - nek (x nem tartozik R - hez), így jelöljük:

$$x \notin R.$$

Pl. a racionális számok halmazát R - rel jelölve

$$\frac{3}{4} \in \mathbb{R},$$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{R};$$

Az XY sík pontjainak halmazát P - vel, a háromdimenziós tér pontjainak halmazát V - vel jelölve a $P_1(1, 2, 0)$ és $P_2(1, 2, 3)$ pontokra

$$P_1 \in P,$$

$$P_1 \in V,$$

$$P_2 \notin P,$$

$$P_2 \in V.$$

Egy halmazt úgy adhatunk meg, hogy megadjuk azt a tulajdonságot, amivel az illető halmaz elemei és csakis ezek az elemek rendelkeznek. Pl. az 5° alatt felsorolt P_5 halmaz (a 4 - nél kisebb x számok halmaza) így adható meg:

$$P_5 = \{x : x < 4\}.$$

Néha fel tudjuk sorolni a halmaz elemeit, pl. a 6° , ill. 7° alatti P_6 ill. P_7 halmaz

$$P_6 = \{1, 2, 3\}, \text{ vagy röviden } \{1, 2, 3\}$$

ill.

$$P_7 = \{0\}, \text{ vagy röviden } \{0\}.$$

Tartalmazás

Legyen A és B két halmaz. Ha A minden eleme B - nek is eleme, akkor azt mondjuk, hogy A benne foglaltatik B - ben, A B - nek részhalmaza és így jelöljük:

$$A \subset B, \text{ vagy } B \supset A$$

$A \subset$ jelet a tartalmazás jelének nevezzük.

A halmazok közé soroljuk az olyan halmazt, melynek egyetlen eleme sincsen. Ezt üres halmaznak nevezzük és 0 - val jelöljük.

Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

Tétel

$$A \subset B \text{ és } B \subset A,$$

akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$A = B.$$

Tétel. A tartalmazás relációja tranzitív, vagyis ha

$$A \subset B \text{ és } B \subset C ,$$

akkor

$$A \subset C .$$

E tételek evidensek.

Pl. az $1^0 - 12^0$ alatt felsorolt halmazokat rendre $P_1 - P_{12}$ - vel jelölve

$$P_3 \subset P_2, P_2 \subset P_1, \text{ tehát } P_3 \subset P_1,$$

amint az közvetlenül is belátható,

$$P_4 \subset P_2, P_4 \subset P_1,$$

$$P_5 \subset P_1,$$

$$P_6 \subset P_5, P_6 \subset P_3, P_6 \subset P_2, P_6 \subset P_1,$$

$$P_7 \subset P_5, P_7 \subset P_4, P_7 \subset P_2, P_7 \subset P_1,$$

$$P_8 \subset P_9.$$

Egyesítés

Legyen A és B két halmaz. Az A és B halmazok összes elemeiből együttevée alkotott halmazt az A és B halmazok egyesített halmazának vagy röviden egyesítésének nevezzük és így jelöljük:

$$A \cup B .$$

Az $\cup$ jelet az egyesítés jelének nevezzük. (Az irodalomban néha az $\cup$ jel helyett a + jelet is használják.)

Az előbb bevezetett jelölésekkel az $1^0 - 14^0$ alatt felsorolt $P_1 - P_{14}$ halmazokra

$$P_{13} \cup P_2 = P_1,$$

vagy pl.

$$\{1, 2, 4\} \cup \{3, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

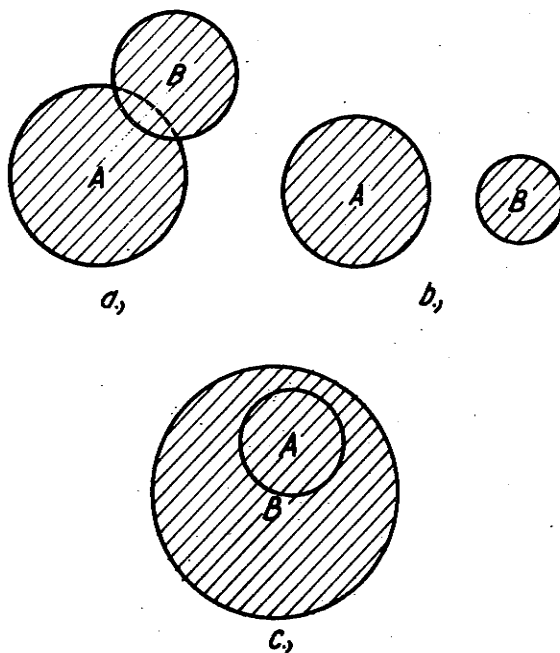
Nyilvánvaló, hogy ha $A \subset B$, akkor $A \cup B = B$. E tényből következik, hogy bármely R halmazra

$$O \cup R = R$$

(O az üres halmaz).

A fentihez hasonlóan értelmezhetjük az $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok egyesített halmazát, mint azon elemek halmazát, amelyek az $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok közül legalább az egyikben benne vannak. Ebben az esetben az egyesített halmazt így jelöljük:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \text{ vagy } \bigcup_{i=1}^n A_i.$$



33. ábra

A 33. ábrán a síkbeli A és B ponthalmazok egyesített halmazát vonalkázással tüntettük fel.

Közös rész (metszet)

Legyen A és B két halmaz. A két halmaz összes közös elemét A és B közös részének (metszetének) nevezzük és így jelöljük:

$$A \cap B.$$

(Az irodalomban néha a $\cap$ jel helyett a $.$ jelet is használják.)

Ha az A és B halmaznak egyetlen közös elem sincsen, vagyis ha a két halmaz közös része az üres halmaz,

$$A \cap B = \emptyset,$$

akkor A és B - t diszjunkt halmazoknak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy

$$\text{ha } A \subset B, \text{ akkor } A \cap B = A,$$

vagyis speciálisan az $\emptyset$ üres halmaz esetében (minden B halmazra $\emptyset \subset B$)

$$\emptyset \cap B = \emptyset.$$

Pl.

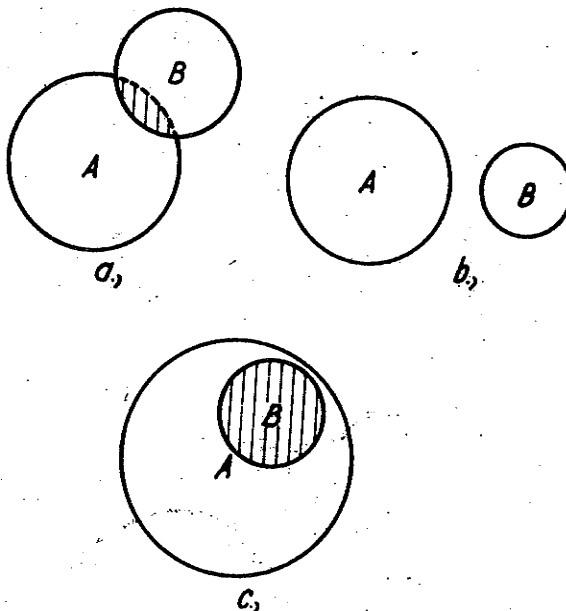
$$\{3, 4, 6\} \cap \{2, 4, 5\} = \{4\}; \quad \{-1, -2, -3\} \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$$

$$\{x: |x| < 4\} \cap \{x: x < 3\} = \{x: -4 < x < 3\}.$$

A fentihez hasonlóan értelmezhetjük az $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok közös részét, mint azon elemek halmazát, amelyek az $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok mindegyikéhez hozzátartoznak. E halmazt így jelöljük:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, \text{ vagy } \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

A 34. ábrán a síkbeli A és B pontthalmazok közös részét vonalkázással tüntettük fel.

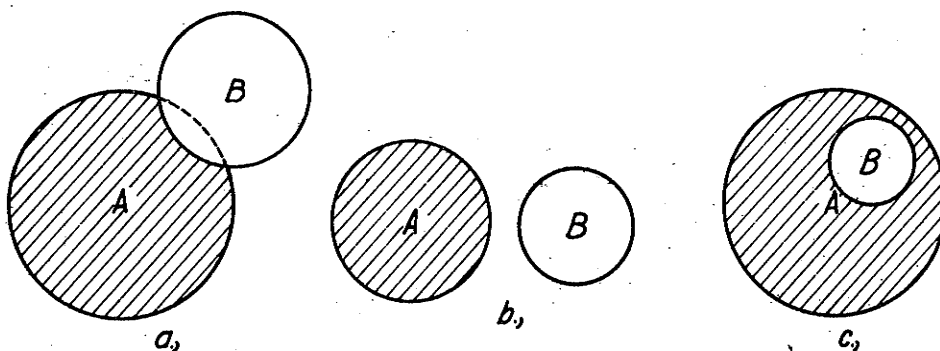


34. ábra

Kivonás

Legyen A és B két halmaz. E két halmaz különbségén (jelben $A - B$) azon elemek halmazát értjük, melyek A - nak elemei, de nem elemei B - nek.

A 35. ábrán a síkbeli A és B pontthalmazok $A - B$ különbségét vonalkézással tüntettük fel.



35. ábra

Mint a 35. ábrából is leolvasható, általában

$$(A - B) \cup B = A \cup B,$$

és a számok köréből jól ismert

$$(A - B) \cup B = A$$

összefüggés csak akkor áll, ha

$$B \subset A.$$

Műveleti szabályok, nevezetes összefüggések

Az előbb definiált alapl műveletek a következő műveleti szabályoknak tesznek eleget:

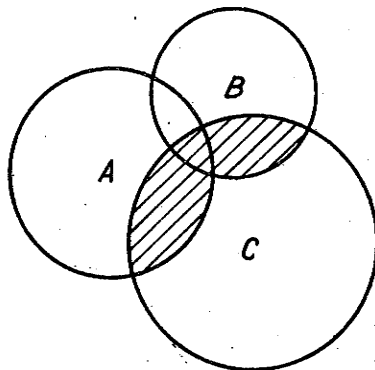
$$A \cup B = B \cup A \text{ (kommutatív szabály),}$$

$$A \cap B = B \cap A \text{ (kommutatív szabály),}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \text{ (asszociatív szabály),}$$

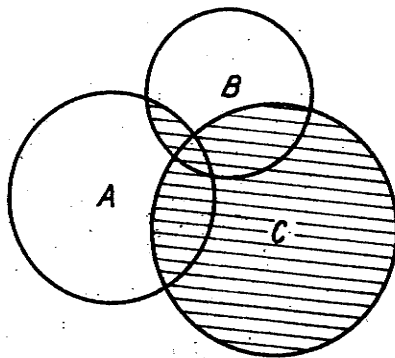
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \text{ (asszociatív szabály),}$$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (disztributív szabály),
(lásd 36. ábra),



36. ábra

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (disztributív szabály),
(lásd 37. ábra),



37. ábra

általában

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap C = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap C),$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cup C = \bigcap_{i=1}^n (A_i \cup C).$$

Igaz továbbá az alábbi néhány összefüggés:

$$(A - B) \cap C = (A \cap C) - B = (A \cap C) \cap (B - B),$$

$$A - B = A \cap (B - B),$$

$$A = (A \cap B) \cup (A - B),$$

$$X - \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n (X - A_i),$$

$$X - \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (X - A_i).$$

(Az utóbbi két összefüggésben láthatjuk, hogy az egyikről a másikra úgy térhetünk át, hogy az $\cup$ és $\cap$ jeleket formálisan felcseréljük egymással. Az ilyen összefüggéseket duális összefüggéseknek nevezzük. Ilyenekre a fentiek között több példát is találhatunk.)

A felsorolt összefüggések igaz volta síkbeli pontthalmazokon történő szemléltetéssel könnyen belátható, bizonyításuk az alpműveletek definíciójából és a felsorolt műveleti szabályokból adódik.

19.) PONTALMAZOK. KÖRNYEZET

1^o Lineáris pontthalmazok

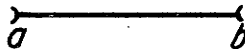
(Pontthalmazok az egyenesen, intervallumok.)

Tanulmányainkban gyakran fogunk valós számokból álló halmazokkal, vagyis - mivel a valós számok és a számegyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető - az egyenes bizonyos pontjainak halmazaival foglalkozni. Az alábbi elnevezéseket és jelöléseket használjuk:

Legyen a és b két szám, és $a < b$.

1. Az a és b számok között levő összes x szám halmazát (vagyis az $a < x < b$ egyenlőtlenséggel jellemzett x számok halmazát) nyílt intervallumnak nevezzük és így jelöljük:

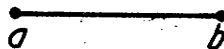
(a, b) .



38. ábra

2. Az a és b számok között levő összes x szám halmazát az a és b számot is beleértve (vagyis az $a \leq x \leq b$ egyenlőtlenséggel jellemzett x számok halmazát) zárt intervallumnak nevezzük és így jelöljük:

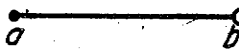
$[a, b]$.



39. ábra

3. Azoknak az x számoknak a halmazát, melyek az $a \leq x < b$ egyenlőtlenséget elégítik ki balról, félig zárt intervallumnak nevezzük és így jelöljük:

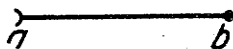
$[a, b)$.



40. ábra

4. Azoknak az x számoknak a halmazát, melyek az $a < x \leq b$ egyenlőtlenséget elégítik ki jobbról, félig zárt intervallumnak nevezzük és így jelöljük:

$$(a, b] .$$



41. ábra

Az 1.-4.-ben értelmezett intervallumok korlátos intervallumok. Az a és b pontokat az intervallum végpontjainak nevezzük.

Ha $a = b$, akkor a 18.) fejezetben bevezetett jelölésekkel

$$[a, a] = \{a\}, \quad (a, a) = \emptyset, \quad [a, a) = (a, a] = \emptyset.$$

5. Azoknak az x számoknak a halmazát, amelyek nagyobbak mint a (vagyis amelyek kielégítik az $a < x$ egyenlőtlenséget) így jelöljük:

$$(a, +\infty),$$



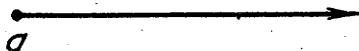
42. ábra

és $(a, +\infty)$ nyílt intervallumnak nevezzük.

6. Az $a \leq x$ számok halmazát így jelöljük:

$$[a, +\infty),$$

és $[a, +\infty)$ zárt intervallumnak nevezzük.



43. ábra

7. Az $x < b$ számok halmazát így jelöljük:

$$(-\infty, b),$$

és $(-\infty, b)$ nyílt intervallumnak nevezzük.



44. ábra

8. Az $x \leq b$ számok halmazát így jelöljük:

$$(-\infty, b],$$

és $(-\infty, b]$ zárt intervallumnak nevezzük.



45. ábra

9. A valós számok halmazát (azon x számok halmazát, melyekre $-\infty < x < +\infty$; más szavakkal a számegyenes pontjainak halmazát) így jelöljük:

$$(-\infty, +\infty)$$

és $(-\infty, +\infty)$ intervallumnak nevezzük.

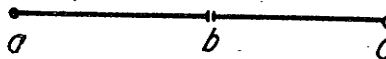


46. ábra

Az 5.-9. alatt értelmezett intervallumok nem korlátos intervallumok.

Nyilvánvaló, hogy ha két intervallumnak van legalább egy közös pontja, akkor a két intervallum közös része ugyancsak intervallum; ha két intervallumnak egyetlen közös pontja sincsen, akkor közös része az üres halmaz, a két intervallumot pedig diszjunktnak mondjuk.

Két, vagy több korlátos, vagy nem korlátos intervallum egyesítése általában már nem intervallum. A 47. ábrán az



47. ábra

$$[a, b) \cup (b, c)$$

halmaz elemeit szemléltettük. Ezen egyesített halmazhoz a b pont nem tartozik hozzá, mivel b sem az $[a, b)$, sem a (b, c) intervallumhoz nem tartozik. A 48. ábrán az

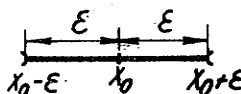
$$(a, b] \cup (c, +\infty)$$



48. ábra

halmaz elemeit szemléltettük. Ezen egyesített halmazhoz pl. b hozzátartozik, mivel az $(a, b]$ intervallumnak eleme.

Az x_0 pont ε sugaru környezetének a számegyenesen az x_0 koordinátájú ponttól ε -nál kisebb távolságban fekvő pontok, vagyis az $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ intervallumba eső számok halmazát nevezzük. Más szavakkal x_0 ε sugaru környezete az



49. ábra

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

nyílt intervallum, ill. azon x számok halmaza, melyekre $|x - x_0| < \varepsilon$:

$$\{x : |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Például az $x_0 = 3$ szám $\varepsilon = 0,1 = 10^{-1}$ sugaru környezete a

$$(2,9, 3,1)$$

intervallum, ill. az

$$\{x : |x - 3| < 10^{-1}\}$$

halmaz. Az $x_0 = -2$ szám $\varepsilon = 0,001 = 10^{-3}$ sugaru környezete a

$$(-2,001, -1,999)$$

intervallum, ill. az

$$\{x : |x + 2| < 10^{-3}\}$$

halmaz.

2^o Síkbeli pontthalmazok

Tekintsük az X, Y koordinátatengelyek által kifeszített XY sík bizonyos pontjainak halmazát. Ilyen halmazok pl.

1. a $P(0, 0)$ körüli egységsugaru körlemez belsejébe eső pontok halmaza:

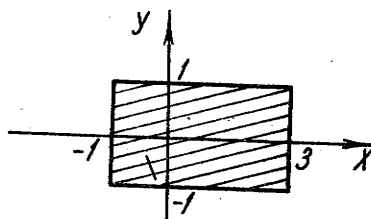
$$\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

2. A $P(0, 0)$ körüli egységsugaru körlemez belsejébe vagy magára a körvonalra eső pontok halmaza:

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

3. Az 50. ábrán látható négyszögtartományba eső pontok halmaza:

$$\{(x, y) : -1 < x < 3, \quad -1 < y < 1\}.$$



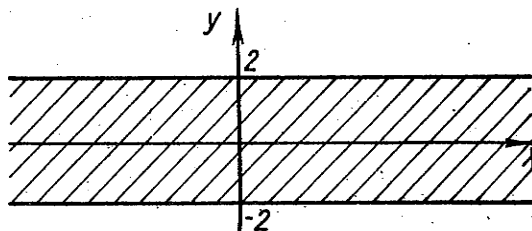
50. ábra

4. A 2 - nél nem kisebb abszcisszájú pontok halmaza:

$$\{(x, y) : x \geq 2\}.$$

5. Az 51. ábrán látható sáv belsejébe eső pontok halmaza:

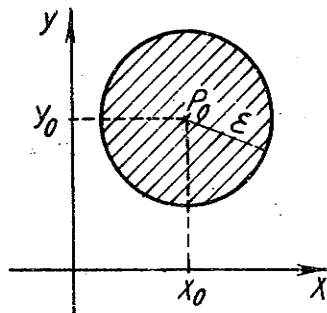
$$\{(x, y) : |y| < 2\}.$$



51. ábra

A $P_0(x_0, y_0)$ pont ε sugaru környezetén a P_0 pont körüli ε sugaru körlemez belsejébe eső pontok halmazát értjük, tehát azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek P_0 - től ε - nál kisebb távolságra fekszenek. Jelben

$$\{(x, y) : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon\}.$$



52. ábra

A P_0 pont helyzetvektorát $\vec{r}_0$ - lal, a változó pont helyzetvektorát $\vec{r}$ - rel jelölve a P_0 pont ϵ sugaru környezetét úgy is definiálhatjuk, mint azon $\vec{r}$ helyzetvektoru P pontok halmazát, amelyekre $|\vec{r} - \vec{r}_0| < \epsilon$.

3^o Térbeli pontthalmazok

Vegyük fel a térben egy XYZ derékszögű koordinátarendszert. E koordinátarendszer segítségével könnyen fel tudjuk írni pl. a tér 1. - 4. - ben definiált tulajdonságokkal rendelkező pontjainak halmazát:

1. Az $O(0, 0, 0)$ pont körüli egységsugaru gömb belsejébe eső pontok halmaza:

$$\{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 1\}.$$

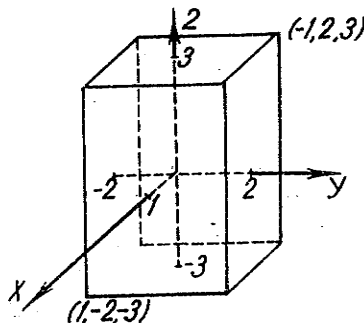
2. Az XYZ derékszögű koordinátarendszerben az XY sík felett elhelyezkedő pontok halmaza:

$$\{(x, y, z) : z > 0\}.$$

3. Az 53. ábrán látható hasáb felületén elhelyezkedő pontok halmaza:

$$\{(x, y, z) : |x| = 1, |y| = 2, |z| = 3\}.$$

4. Az 53. ábrán látható hasáb belsejébe eső pontok kivételével a tér összes többi pontjának halmaza:



53. ábra

$$\{(x, y, z): |x| \geq 1, |y| \geq 2, |z| \geq 3\}.$$

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$, ill. $\vec{r}_0$ helyzetvektoru pont ε sugaru környezetén azoknak az $\vec{r}$ helyzetvektoru P pontoknak halmazát értjük, amelyek a P_0 pont körüli ε sugaru gömb belsejébe esnek,

$$\{(x, y, z): \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \varepsilon\},$$

amely pontokra tehát $|\vec{r} - \vec{r}_0| < \varepsilon$.

20.) SZÁMHALMAZOKRA VONATKOZÓ ALAPVETŐ TÉTELEK

Definíció

Tekintsünk egy számhalmazt. E számhalmazt felülről korláatosnak mondjuk, ha van olyan szám, melynél nagyobb szám nincsen a számhalmazban. Az ilyen számot a számhalmaz felső korlátjának nevezzük. Alulról korláatosnak akkor mondjuk a számhalmazt, ha van olyan szám, melynél kisebb szám nincsen a számhalmazban. Az ilyen számot a számhalmaz alsó korlátjának nevezzük. Az alulról és felülről korláatos számhalmazt röviden korláatosnak mondjuk.

Korláatos számhalmazok pl. az

$$\begin{aligned} \{x : |x| < 2\}, \\ \{x : -1 \leq x < 3\}, \\ \{x : 2 < x \leq 4\}, \\ \{x : |x| \leq 2\} \end{aligned}$$

halmazok, míg pl. az

$$\{x : x < 2\}$$

halmaz felülről korláatos, az

$$\{x : x > -3\}$$

halmaz alulról korláatos.

I. Alaptétel

A természetes számok halmaza felülről nem korláatos.

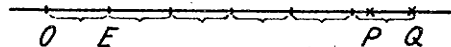
(Tehát bármely valós a számhoz található olyan n természetes szám, amelyre $n > a$.)

E tételt a valós számok és a számegyenes pontjai közt fennálló kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés felhasználásával még így is megfogalmazhatjuk:

Legyen OE az egység a számegyenes, OP pedig tetszőleges szakasz. Mindig található olyan n természetes szám, amelyre

$$n \cdot \overline{OE} > \overline{OP},$$

azaz bármilyen messze legyen is a P pont az 0 ponttól jobbra a számegyenesen, ha az egyenesre egymásután elég sokszor felmérjük 0 -ból kiindulva az OE szakaszt, olyan Q ponthoz jutunk, amely a P ponttól jobbra esik, úgyhogy



54. ábra

$$\overline{OQ} > \overline{OP} .$$

Ha ui. az OP szakasz mérőszáma a tetszőleges a valós szám, az OQ szakaszé az n természetes szám, fenti egyenlőtlenségünk értelmében a tetszőleges a valós számhoz mindig található olyan n természetes szám, hogy fennálljon

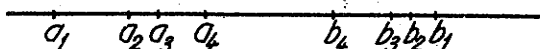
$$n > a .$$

II. Alaptétel

Ha minden n természetes számnak megfeleltetünk egy $[a_n, b_n]$ zárt intervallumot oly módon, hogy

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots ,$$

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots ,$$



55. ábra

(vagyis az intervallumok "egymásba vannak skatulyázva" - 55. ábra -), akkor van olyan valós szám, amely az $[a_n, b_n]$ intervallumok mindegyikéhez hozzátartozik.

Ezen két alaptételt mint a valós számoknak, ill. a számegyenes pontjainak szemléletünkkel és tapasztalatunkkal egyező tulajdonságát alaptételként fogadjuk el.

Definíció

Egy számhalmaz legkisebb felső korlátját felső határnak, legnagyobb alsó korlátját alsó határnak nevezzük.

Pl. a természetes számok reciprok értékeinek halmaza (az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ elemek halmaza) nyilván alulról korlátos; e halmaz alsó korlátja bármely negatív szám, - de alsó korlát már a 0 szám is. A 0 számnál nagyobb alsó korlátja nincsen azonban már e számhalmaznak, mert ha a alsó korlát és

fennállna minden elég nagy n -re a $0 < a \leq \frac{1}{n}$ összefüggés, akkor ebből az $n \geq \frac{1}{a}$ összefüggés következne, vagyis az I. alaptétellel ellentétben a természetes számok halmaza felülről korlátos volna. Ellentmondásra jutva, beláttuk tehát, hogy a 0 szám a természetes számok reciprok értékeiből álló halmaz legnagyobb alsó korlátja, a számhalmaz alsó határa.

Az $\frac{1}{2^n}$ alakú számok (n természetes szám) alulról szintén korlátosak, alsó határuk a 0 szám. Ti. - mint a bevezetőben beláttuk -

$$2^n > n,$$

azaz

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n},$$

s így ha volna az $\frac{1}{2^n}$ alakú számoknak 0-nál nagyobb a alsó korlátja, akkor $a > 0$ az $\frac{1}{n}$ alakú számoknak is alsó korlátja volna, holott ezeknek alsó határa - mint az előbb beláttuk - a 0 szám.

Alapvető jelentőségű az alábbi tétel:

Felülről korlátos nem üres számhalmaznak mindig van felső határa, alulról korlátos nem üres számhalmaznak mindig van alsó határa.

Bizonyítás

Elég a felülről korlátos nem üres számhalmazokra vonatkozó állítást bebizonyítani, hiszen az alulról korlátos nem üres halmazokra vonatkozó állítás igazolása ehhez teljesen hasonlóan történik.

Legyen tehát b_0 a számhalmaznak egy felső korlátja, a_0 pedig olyan szám, amely nem felső korlát. Osszuk az $[a_0, b_0]$ intervallumot két egyenlő részre és jelöljük $[a_1, b_1]$ - gyel a keletkező két intervallum közül azt, amelynek egyik végpontja felső korlát, másik pedig nem felső korlát. Folytatva ezt az eljárást, az

$$[a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

intervallumokat nyerjük, melyekben a_n nem felső korlát, b_n azonban felső korlát, és

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Az $[a_n, b_n]$ zárt intervallumok azonban "egymásba vannak skatulyázva", tehát a II. alaptétel szerint van olyan F szám, melyre

$$a_n \leq F \leq b_n$$

minden n -re fennáll. Megmutatjuk, hogy F a vizsgált számhalmaz felső határa.

F felső korlátja a számhalmaznak. Ha ui. x a számhalmazhoz tartozik, akkor, mivel b_n felső korlát,

$$x \leq b_n,$$

azaz

$$x - F \leq b_n - F \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n},$$

és így

$$\frac{x - F}{b_0 - a_0} \leq \frac{1}{2^n},$$

$\frac{x - F}{b_0 - a_0}$ alsó korlátja tenát az $\frac{1}{2^n}$ alakú számok halmazának. E számhalmaznak azonban 0 az alsó határa, tehát

$$\frac{x - F}{b_0 - a_0} \geq 0,$$

és így

$$x - F \geq 0,$$

$$x \geq F.$$

F -nél nagyobb elem nincs tehát az eredetileg vizsgált számhalmazban, tehát F tényleg felső korlátja a számhalmaznak.

F azonban a számhalmaz legkisebb felső korlátja. Ha ui. F' is felső korlát, akkor, mivel a_n a konstrukció értelmében nem felső korlát,

$$a_n < F',$$

így

$$F - a_n > F - F',$$

vagyis

$$F - a_n \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

következményeként

$$\frac{F - F'}{b_0 - a_0} < \frac{1}{2^n}$$

minden n természetes számra. Ebből azonban a már alkalmazott okoskodással

$$F - F' \leq 0,$$

azaz

$$F \leq F'$$

adódik, tehát valóban F a legkisebb felső korlát.

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Világos, hogy egy számhalmaznak egynél több felső határa, ill. alsó határa nem lehet, és így tételünk értelmében felülről korlátos számhalmaznak pontosan egy felső határa, alulról korlátosnak pedig pontosan egy alsó határa van (feltéve, hogy nem üres).

Az ezen fejezet elején kimondott két alaptétel segítségével könnyű bebizonyítani az alábbi állításokat:

1. Minden (a, b) intervallumban van racionális szám.

Bizonyítás. Az I. alaptétel értelmében mindig megadható olyan n természetes szám, hogy

$$n > \frac{1}{b - a};$$

és olyan q és $-p$ természetes szám, melyre

$$q > nb,$$

$$-p > -na.$$

Ekkor

$$\frac{p}{n} < a < b < \frac{q}{n},$$

p - től egyesével q - ig haladva vizsgáljuk a

$$\frac{p+1}{n}, \frac{p+2}{n}, \dots, \frac{q}{n}, \dots$$

tehát $\frac{r}{n}$ alaku racionális számokat (r egész szám).

Ha az $\frac{r}{n}$ alaku számok egyike sem esnék (a, b) - be, akkor volna olyan r , hogy

$$\frac{r}{n} \leq a, \frac{r+1}{n} \geq b,$$

azaz

$$b - a \leq \frac{r+1}{n} - \frac{r}{n} = \frac{1}{n},$$

ami ellentmond a bizonyításunk elején tett

$$n > \frac{1}{b - a}$$

feltételnek. Ellentmondásra jutva kimondhatjuk tehát, hogy kell olyan r egész számnak lenni, melyre

$$a < \frac{r}{n} < b,$$

az (a, b) intervallumban van tehát racionális szám.

2. Minden (a, b) intervallumban végtelen sok racionális szám van. (Minden n természetes számhoz megadható tehát az (a, b) intervallumban n -nél több racionális szám.)

Bizonyítás

Bontsuk fel az (a, b) intervallumot az

$$a + \frac{k}{n+1} (b-a), \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

osztópontokkal $n+1$ részre. Az így nyert

$$\left(a + \frac{k-1}{n+1} (b-a), a + \frac{k}{n+1} (b-a)\right) \quad (k=1, 2, \dots, n+1)$$

intervallumok mindegyikében az 1. állítás értelmében van racionális szám, az (a, b) intervallumban tehát legalább $n+1$ racionális szám van, amivel a fent tett megjegyzés értelmében állításunkat igazoltuk.

21.) SZÁMSOROZATOK

1^o A számsorozat fogalma; konvergens számsorozatok

Ha egy mérlegre mérés céljából valamilyen tömeget helyezünk, a mérleg mutatója valamely egyensúlyi helyzet körül csillapított lengéseket végez. Irjuk fel a mutató állását (negatív előjellel a jobb felé, pozitívvval a bal felé történő kilengéseket ellátva):

$$(1) \quad 5, \quad -4,09, \quad 3,35, \quad -2,74, \quad 2,25, \quad -1,84, \quad \dots$$

Ilyen módon a számoknak egy - elvben - végtelen egymásutánját, un. számsorozatot nyerünk. Felmerül az a kérdés, van-e olyan szám, melytől a fenti sorozat "elég távoli" számai tetszőlegesen kevésbé különböznek, amelyet "a számsorozat elemei minden határon túl megközelítenek", amely számtól való eltérése a számsorozat elég távoli elemeinek "tetszőlegesen kicsi". Ez azért fontos, mert ha ilyen szám van, akkor az ennek megfelelő mutatóállás szolgáltatja a mérleg nyugalmi helyzetét, s ezen mutatóállás segítségével tudjuk - korlátozott pontossággal - a mérleg serpenyőiben levő tömegeket összehasonlítani.

Irjuk fel egymás után a természetes számokat:

$$(2) \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \dots, \quad n, \quad \dots$$

A 20.) fejezetben megadott I. alaptétel értelmében a (2) számsorozat egyre növekvő számai felülről nem korlátosak, a számsorozat elég távoli számai akármilyen nagy valós számnál is nagyobbak lesznek, nincsen olyan szám, amit a (2) számsorozat számai minden határon túl megközelítenének.

Ha azonban a (2) számsorozatban szereplő természetes számok reciprok értékeit irjuk egymás után:

$$(3) \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n}, \quad \dots$$

olyan számsorozatot nyerünk, melynek számai minden határon túl megközelítik a 0 számot.

A (3) - ban felírt számsorozat jó példát ad annak megvilágítására, mit értünk azon, hogy egy számsorozat tagjai minden határon túl megközelítenek egy meghatározott számot. Az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

sorozat tagjai például mindig jobban megközelítik a -3 - as számot is, a sorozat tagjai egyre kevesebbel térnek el -3 - től, de azért mindig 3 egységnél nagyobb távolságra maradnak tőle, tehát nem közelítik meg a -3 - at minden határon túl. A 0 számot azonban minden határon túl megközelítik.

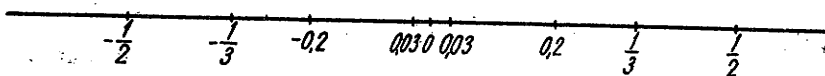
Az

$$(4) \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

számsorozat tagjai szintén a 0 számot közelítik meg minden határon túl, és ugyanez áll az

$$(5) \quad \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 2, -0, 2, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 0,3, -0,03, 0, \dots$$

$$\dots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{n}{10^{n-1}}, -\frac{n}{10^{n-1}}, 0, \dots$$



56. ábra

számsorozat tagjaira is. Az (5) számsorozat tagjai - mint azt az első néhány tagnak a számegyenesen való ábrázolásával az 56. ábrán fel is tüntettük - néha épp egyenlők 0 - val, a tagok néha jobbról, néha balról közelítik meg a 0 számot, néha az egyik tag távolabb esik 0 - től, mint az előtte álló (pl. $\frac{1}{3}$ és $0,2$), de igaz az, hogy az (5) számsorozat elég távoli tagjai tetszőlegesen kevéssel térnek már el a 0 számtól, vagyis minden határon túl megközelítik azt. (Az itt felsorolt tulajdonságok miatt az (5) számsorozat az (1) számsorozatra emlékeztet.)

Az

$$(6) \quad 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

számsorozat képzési szabálya is könnyen leolvasható. Látható, hogy nincsen olyan szám, amelyhez a sorozat tagjai minden határon túl közelednének.

Az

$$(7) \quad 1, -1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{3}, -3, \dots, \frac{1}{n}, -n, \dots$$

számsorozat esetében sem adható meg olyan szám, amelyhez a sorozat tagjai minden határon túl közelednének.

Ha létezik olyan szám, amelyet a sorozat tagjai minden határon túl megközelítenek, akkor a számsorozatot konvergensnek, ezt a számot pedig a sorozat határértékének (limeszének) nevezzük. Ellenkező esetben, ha tehát nincs olyan szám, amelyhez a sorozat tagjai minden határon túl közelednek, a sorozatot divergensnek mondjuk.

Az előbb felírt számsorozatok közül tehát az

(1) számsorozat konvergens, határértéke a nyugalmi helyzetnek megfelelő mutatóállás, a

- (2) számsorozat divergens, a
- (3) számsorozat konvergens, határértéke : 0, a
- (4) számsorozat konvergens, határértéke : 0, az
- (5) számsorozat konvergens, határértéke : 0, a
- (6) számsorozat divergens, a
- (7) számsorozat divergens.

Általánosságban számsorozatot nyertünk, ha minden természetes számhoz egy-egy - nem szükségképpen különböző - számot rendelünk, és ezeket a számokat a megfelelő természetes számok sorrendjében egymás után írjuk. Ezért egy számsorozat tagjait az ábécé ugyanazon betűjével szoktuk jelölni, s e betűhöz indexként a természetes számokat írjuk, vagyis pl. az

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

számsorozat n-edik tagja (az n természetes számhoz rendelt szám) a_n .

Egy számsorozatot a legegyszerűbben úgy adhatunk meg, ha képlettel adjuk meg azt az utasítást, amellyel az n természetes számhoz az a_n tagot hozzárendeljük, pl.

$$\text{a (2) számsorozatnál} \quad a_n = n \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\text{a (3) számsorozatnál} \quad a_n = \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\text{a (4) számsorozatnál} \quad a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n=1, 2, \dots),$$

vagy pedig annyi tagot írunk ki a számsorozatból, amelyből a számsorozat tagjainak képzési szabálya nyilvánvalóvá válik. Lehet természetesen más módon is definiálni egy adott számsorozatot, például fizikai mérés révén, mint azt az (1) számsorozatnál tettük.

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

számsorozat konvergens és határértéke (limesze) az A szám - jelben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \text{ vagy } a_n \rightarrow A, \text{ ha } n \rightarrow \infty$$

- ha akármilyen kicsiny $\varepsilon > 0$ számhoz mindig található olyan N szám, hogy a számsorozat N - nél nagyobb indexű tagjai már mind belesznek a A szám ε sugarú környezetébe (vagyis A - tól ε -nál kevesebbel térnek el). Ezt formulával így tudjuk felírni:

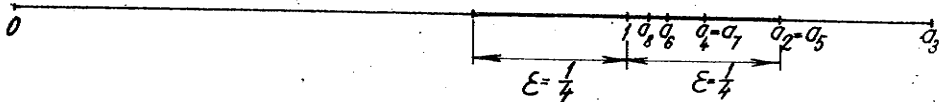
$$|a_n - A| < \varepsilon, \text{ valahányszor } n > N.$$

Természetesen a N szám (un. küszöbindex) megadása függ a tetszőlegesen kicsiny ε szám (un. hibakorlát, hiszen ε mutatja meg, hogy legfeljebb mennyivel tér el a A - tól) megválasztásától. Ezt a tényt legegyszerűbben egy példával világíthatjuk meg.

Tekintsük a következő számsorozatot:

$$a_1 = 1 + 1; a_2 = 1 + \frac{1}{4}, a_3 = 1 + \frac{1}{2}, a_4 = 1 + \frac{1}{8},$$

$$a_5 = 1 + \frac{1}{4}, a_6 = 1 + \frac{1}{16}, a_7 = 1 + \frac{1}{8}, a_8 = 1 + \frac{1}{32}, \dots$$



57. ábra

E sorozat tagjai az 1 - hez tartanak. E határértéket pl. $\varepsilon = \frac{1}{4}$ - nél kisebb hibával a_4, a_6, a_7, a_8 , és minden ennél nagyobb indexű tagja megközelíti, tehát a számsorozat tagjai a hatodik tagtól kezdve mind megközelítik az 1 számot $\varepsilon = \frac{1}{4}$ - nél kisebb hibával:

$$|a_n - 1| < \frac{1}{4}, \text{ valahányszor } n > 5.$$

$\varepsilon = 10^{-3}$ - nál kisebb hibával - a számsorozat elég sok tagjának kiírása után könnyű erről meggyőződni - a huszadik tagtól kezdve közelíti meg a számsorozat valamennyi további tagja az 1 számot:

$$|a_n - 1| < 10^{-3}, \text{ valahányszor } n > 19.$$

A (3) számsorozat esetében

$$a_n = \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = 0,$$

a számsorozat tagjai az $A = 0$ határértéket $\varepsilon = 10^{-1}$ - nál kisebb hibával a 11.-edik, $\varepsilon = 10^{-2}$ - nál kisebb hibával a 101-edik, $\varepsilon = 10^{-k}$ - nál kisebb hibával a $10^k + 1$ - dik tagtól kezdve közelítik meg:

$$|a_n - A| = \left| \frac{1}{n} \right| < 10^{-1}, \text{ valahányszor } n > 10,$$

$\varepsilon = 10^{-1}$ esetében tehát a küszöbindex $N = 10$,

$$|a_n - A| = \left| \frac{1}{n} \right| < 10^{-2}, \text{ valahányszor } n > 100,$$

$\varepsilon = 10^{-2}$ esetében tehát a küszöbindex $N = 100$,

$$|a_n - A| = \left| \frac{1}{n} \right| < 10^{-k}, \text{ valahányszor } n > 10^k,$$

$\varepsilon = 10^{-k}$ (k pozitív egész szám) esetében tehát a küszöbindex $N = 10^k$.

A számsorozat határértékének definíciójából következik az alábbi tétel:

I. Tétel

Az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

számsorozat konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele, hogy - a számsorozat határértékét A - val jelölve - tetszőlegesen kicsiny pozitív ε mellett véges sok kivétellel a számsorozat minden tagja beleessen az A határérték ε sugarú környezetébe.

A feltétel valóban szükséges, mert ha számsorozatunk konvergens, akkor tetszőlegesen kicsiny pozitív ε esetében megadható egy olyan N küszöbindex, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$, valahányszor $n > N$. N - nál kisebb indexű tagja ellenben csak véges sok (ti. legfeljebb $N-1$) van a számsorozatnak.

Megfordítva, ha adott $\varepsilon > 0$ mellett a sorozatnak csak véges számú tagja nem esik $A \pm \varepsilon$ sugarú környezetébe, és N e véges sok tag mindegyikének indexénél nagyobb, akkor $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

II. Tétel

Minden konvergens számsorozat korlátos. (Azon, hogy a számsorozat korlátos, azt kell érteni, hogy a számsorozat tagjaiból mint elemekből álló számhalmaz korlátos.)

Ha ui. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és $\varepsilon > 0$ valamely adott szám, akkor a sorozatnak csak véges sok tagja esik az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumon kívül. E véges sok tag és $A + \varepsilon$ közül a legnagyobb felső, a véges sok tag és $A - \varepsilon$ közül a legkisebb alsó korlát a sorozat számára.

Ha egy számsorozat bizonyos tagjait elhagyjuk, de úgy, hogy még mindig végtelen sok tag maradjon, s a megmaradó tagokat az eredeti sorrendben egymás után írjuk, az eredeti számsorozatnak egy részsorozatát nyerjük. Az e fejezet elején felsorolt számsorozatok közül pl. a (3) számsorozatnak a (4) számsorozat részsorozata.

Általánosságban az

$$(8) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

számsorozat egy részsorozatát így jelöljük:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_r}, \dots$$

$(n_1, n_2, \dots, n_r, \dots)$ a természetes számok egy részsorozata és $n_1 < n_2 < \dots$.

III. Tétel

Minden konvergens sorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet.
Tegyük fel, hogy a (8) számsorozat konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A^*$$

és a tételben kimondott állítással ellentétben

$$A \neq A^*.$$

Ekkor azonban a (8) számsorozat tagjai - véges sok tag kivételével - mind A -nak, mind A^* -nak bizonyos környezetébe esnének. Ez azonban lehetetlen, mert ha

$$|A^* - A| = \varepsilon$$

(lásd 58. ábra), akkor hibakorlátnak pl.

az $\frac{\varepsilon}{3}$ számot írva elő A és A^* $\frac{\varepsilon}{3}$

sugaru környezetébe is bele kell, hogy essenek (8) elég távoli tagjai. E két környezetnek nincs közös pontja, ez tehát lehetetlen.



58. ábra

IV. Tétel

Minden konvergens számsorozat részsorozatai is konvergensnek és az eredeti számsorozatával egyező határértékhez tartanak.

Ha ui.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

konvergens számsorozat és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A,$$

továbbá

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_r}, \dots$$

az előbbi számsorozatnak egy részsorozata $(n_1, n_2, \dots$ a természetes számok sorozatának részsorozata és $n_1 < n_2 < \dots$), akkor az eredeti számsorozat konvergenciája miatt az A határértéknek tetszőlegesen kicsiny ε sugarú környezetén kívül az eredeti

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sorozatnak csak véges sok tagja fekszik; ez azonban más szóval azt jelenti, hogy A ezen tetszőleges ε sugarú környezetén kívül az

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_r}, \dots$$

részsorozatnak is csak véges sok tagja fekszik, vagyis az I. tétel értelmében e részsorozatnak is A a határértéke. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Annak eldöntésére, hogy egy sorozat konvergens-e és mi a határértéke, általános módszer nincsen, ennek eldöntésére minden számsorozatnál külön vizsgálatot kell folytatni. A konvergens számsorozatok azonban a következő általános tulajdonságokkal rendelkeznek, melyek a fenti probléma megoldását segítik elő:

a.) Egy konvergens számsorozat határértéke független a sorozat tagjainak sorrendjétől.

b.) Egy konvergens számsorozat határértéke nem változik, ha a sorozatba véges számú tagot belktatunk, vagy benne véges számú tagot megváltoztatunk.

c.) Egy konvergens számsorozat határértéke nem változik, ha a sorozat minden tagját véges sokszor megismételjük.

d.) Ha

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

és

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

konvergens számsorozatok és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B,$$

akkor az

$$(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), \dots, (a_n + b_n), \dots,$$

$$(a_1 - b_1), (a_2 - b_2), \dots, (a_n - b_n), \dots,$$

$$(a_1 b_1), (a_2 b_2), \dots, (a_n b_n), \dots$$

sorozatok is konvergensek és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB,$$

továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \neq 0$$

esetében az

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

számsorozat is konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

E képletek röviden szólva azt mutatják, hogy a határátmenet műveletét a négy alpművelettel sorrendre nézve fel lehet cserélni, feltéve, hogy a határátmenet elvégzésekor az esetleges szereplő törtek egyikének nevezője sem válik zérussá.

e.) Ha az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

és a

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

számsorozatok ugyanahhoz a határértékhez tartanak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A,$$

akkor az

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

számsorozat is konvergens és határértéke A.

f.) Ha az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

számsorozat konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

továbbá a

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

számsorozat korlátos, akkor az

$$(a_1 b_1), (a_2 b_2), \dots, (a_n b_n), \dots$$

számsorozat konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0.$$

g.) Ha az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

és a

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

számsorozat konvergens és

$$a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

továbbá

$$a_n \leq b_n,$$

akkor

$$A \leq B.$$

Az a.), b.), c.) tulajdonságok az I. Tételből azonnal következnek.

A d.) - ben kimondott tulajdonságokat így bizonyíthatjuk:

1. Az összegre vonatkozó állítás igazolása:

Irjuk elő a tetszőlegesen kicsiny pozitív ε számot. Válasszuk meg n_1 - et és n_2 - t úgy, hogy fennálljon

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ha } n > n_1,$$

és

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ha } n > n_2.$$

A két egyenlőtlenséget összeadva

$$|a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ ha } n > n_0,$$

ahol n_0 jelenti az n_1 és n_2 számok közül a nagyobbikat. Alkalmazva az összeg abszolút értékére vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon,$$

$$\text{ha } n > n_0,$$

ez pedig ε tetszőlegesség volta miatt azt mutatja, hogy

$$a_n + b_n \rightarrow A + B.$$

2. A különbségre vonatkozó állítás folyamánya az összegre vonatkozóan és a következő megjegyzésnek:

$$\text{ha } b_n \rightarrow B, \text{ akkor } cb_n \rightarrow cB \text{ } n \rightarrow \infty \text{ esetén.}$$

($c = 0$ esetén nyilván igaz utóbbi állításunk, $c \neq 0$ esetén pedig az N küszöbindexet úgy választva, hogy $n > N$ esetén

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

legyen, ugyanezen n -ekre

$$|c| |b_n - B| = |cb_n - cB| < \varepsilon.)$$

$c = -1$ esetén tehát

$$\text{ha } b_n \rightarrow B, \text{ akkor } -b_n \rightarrow -B,$$

az összegre vonatkozó állításunkat most már az $a_n \rightarrow A$, $-b_n \rightarrow -B$ esetre alkalmazva kapjuk, hogy

$$|(a_n - b_n) - (A - B)| < \varepsilon, \text{ ha } n > N$$

ami a kívánt állítást adja.

3. A szorzatra vonatkozó állítás az előzők felhasználásával a következőképp látható be:

legyen $a_n - A = \alpha_n$, $b_n - B = \beta_n$,
akkor

$$a_n b_n = (A + \alpha_n) (B + \beta_n) = AB + \alpha_n B + A \beta_n + \alpha_n \beta_n.$$

Itt az előbbiek szerint

$$\alpha_n \rightarrow 0, \beta_n \rightarrow 0, \alpha_n B \rightarrow 0, A \beta_n \rightarrow 0,$$

és $\alpha_n \beta_n$ is tart 0 - hoz, mert ha n olyan nagy, hogy

$$|\alpha_n| < \varepsilon \text{ és } |\beta_n| < 1,$$

akkor

$$|\alpha_n \beta_n| < \varepsilon.$$

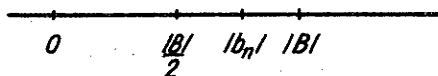
Igy tehát valóban

$$a_n b_n \rightarrow AB + 0 + 0 + 0 = AB.$$

4. A hányadosra vonatkozó szabály igazolására elég megmutatni, hogy $b_n \rightarrow B \neq 0$ esetében

$$\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{B},$$

hiszen erre az általános eset a szorzásra vonatkozó szabály alapján visszavezethető.



59. ábra

Ha n olyan nagy, hogy

$$|b_n| > \frac{|B|}{2}$$

és

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon B^2}{2},$$

akkor

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - b_n|}{|b_n B|} < \frac{\frac{\varepsilon B^2}{2}}{|B| \frac{|B|}{2}} = \varepsilon,$$

ami az állítást adja.

Végül is a szorzásra vonatkozó szabályt az $a_n \rightarrow A$ és $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{B}$ esetre alkalmazva kapjuk, hogy

$$a_n \frac{1}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} \rightarrow A \frac{1}{B} = \frac{A}{B}, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Számítsuk ki pl. annak a számsorozatnak a határértékét, melynek n -edik tagja

$$a_n = \frac{3n+1}{2n+5} \quad (n=1, 2, \dots).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{1}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{5}{n})} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}.$$

Határozzuk meg, hogy hányadik tagtól kezdve közelítik meg a számsorozat tagjai a fent kiszámított határértéket

$$\varepsilon = 10^{-2}.$$

-nál kisebb hibával. Feladatunk értelmében meg kell oldanunk a

$$\left| \frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2} \right| < 10^{-2}$$

egyenlőtlenséget (az egyenlőtlenségnek csak pozitív egész megoldásait keressük). Közös nevezőre való hozás után, felhasználva, hogy n pozitív egész szám, azaz $(2n+5) > 0$, adódik:

$$\frac{13}{2(2n+5)} < \frac{1}{100},$$

illetve

$$2n+5 > 650,$$

tehát végeredményben

$$n > 322,5.$$

A sorozat tagjai tehát a 323 - dik tagtól kezdve az előírt pontossággal (10^{-2} pontossággal) közelítik meg a határértéket.

e.) - ben megfogalmazott állításunkat így igazolhatjuk: a tett feltevések mellett tetszőlegesen kicsiny pozitív ε esetén megválasztható egy N_1 és egy N_2

küszöbindex úgy, hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon, \text{ valahányszor } n > N_1,$$

és

$$|b_n - A| < \varepsilon, \text{ valahányszor } n > N_2.$$

Ekkor azonban $2N_1$ és $2N_2$ közül a nagyobbat N - nel jelölve az

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

számsorozat N - nél nagyobb indexű elemei is bele kell, hogy essenek már mind az A szám ε sugarú környezetébe, amivel állításunkat igazoltuk.

Az f.) - ben kimondott állítás értelmében tetszőlegesen kicsiny pozitív ε_1 -hez megadható egy olyan N küszöbindex, hogy

$$|a_n| < \varepsilon_1, \text{ valahányszor } n > N.$$

Mivel azonban a tett feltevés miatt van olyan $K > 0$, hogy

$$|b_n| \leq K,$$

és így az $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{K}$ jelöléssel ($K \neq 0$)

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon,$$

vagyis

$$a_n b_n \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

amit bizonyítani akartunk.

Mivel minden konvergens számsorozat korlátos, (lásd II. tétel) az f.)-ben kimondott állítás tetszőleges konvergens

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

számsorozat esetében is igaz.

A g.)- ben kimondott állítást indirekt módon a legegyszerűbb bebizonyítani. Tegyük tehát fel az állítással ellentétben, hogy a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ határértékre ($a_n \leq b_n$)

$$A > B \dots$$

Ekkor kell azonban, hogy legyen egy olyan C szám, melyre

$$B < C < A,$$

s mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, elég nagy n -ekre már

$$(K) \quad C < a_n,$$

ill. mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ elég nagy n -ekre

$$(KK) \quad b_n < C$$

(K) és (KK) értelmében ekkor azonban

$$b_n < C < a_n,$$

vagyis

$$b_n < a_n$$

a tett feltevessel ellentétben. Ellentmondásra jutva, a g.)-ben kimondott állítást igazoltuk.

2^o Divergens számsorozatok

Tekintsük az

$$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$$

sorozatot. Látjuk, nem létezik olyan érték, melyet a sorozat tetszőleges pontossággal megközelítene, mert elég távoli tagjai tetszőlegesen nagy számnál is nagyobbak. Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy a sorozat "plusz végtelenhez tart".

Hasonló okoskodással mondható, hogy a

$$-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$$

sorozat "minusz végtelenhez tart" (a számsorozat elég távoli tagjai akármilyen nagy abszolút értékű negatív számnál is kisebbek lesznek).

Definíció:

Akkor mondjuk, hogy az

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sorozat plusz végtelenhez tart, ha bármely P számhoz található olyan N küszöbindex, hogy

$$a_n > P, \text{ ha } n > N.$$

(A N küszöbindex megválasztása függ természetesen P megadásától.)

Akkor mondjuk, hogy a

$$(2) \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

sorozat minusz végtelenhez tart, ha bármely M számhoz található olyan N külszöbindex, hogy

$$b_n < M, \text{ ha } n > N.$$

(A N külszöbindex megválasztása függ természetesen M megadásától.)

Azt, hogy az (1) sorozat plusz végtelenhez tart, így jelöljük:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \text{ vagy } a_n \rightarrow +\infty, \text{ ha } n \rightarrow \infty;$$

míg azt, hogy a (2) sorozat minusz végtelenhez tart, így jelöljük:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty, \text{ vagy } b_n \rightarrow -\infty, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

E jelölést már használtuk konvergens sorozatok határértékének jelölésénél ($n \rightarrow \infty$ azt jelzi, hogy a határértékhez akkor közeledünk, ill. az (1) és (2) sorozatoknál a sorozat tagjai akkor lesznek bármely számnál nagyobbak ill. kisebbek, ha az n index a (pozitív egész számokon át) végtelenhez tart. Az utóbbi megjegyzés miatt volt felesleges itt az $n \rightarrow \infty$ jelölés helyett a precízebb $n \rightarrow +\infty$ jelölést használnunk).

Az (1), ill. (2) típusú speciális divergens sorozatokra igazak az alábbi állítások:

a.) Ha az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sorozatra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

és a

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

sorozat alulról korlátos, akkor az

$$(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), \dots, (a_n + b_n), \dots$$

sorozat "plusz végtelenhez tart".

b.) Ha az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sorozat "plusz végtelenhez tart", akkor a sorozat alulról korlátos.

c.) Ha az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sorozat "plusz végtelenhez tart" és a

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

sorozat tagjaira fennáll:

$$b_n \geq p > 0,$$

akkor az

$$a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n, \dots$$

sorozat a "plusz végtelenhez tart".

d.) Ha az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sorozat "plusz végtelenhez tart", akkor az

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$$

sorozat zérushoz tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

e.) Ha a

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

számsorozat 0 - hoz tart, és $b_n > 0$, akkor az

$$\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots, \frac{1}{b_n}, \dots$$

számsorozat "plusz végtelenhez tart".

f.) Ha az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sorozat "plusz végtelenhez (minusz végtelenhez) tart", akkor a

$$-a_1, -a_2, \dots, -a_n, \dots$$

sorozat "minusz végtelenhez (plusz végtelenhez tart)".

Ezen állításból folyik, hogy a plusz végtelenhez tartó sorozatokra kimondott a.)-d.) állítások megfelelői minusz végtelenhez tartó sorozatokra fennállnak.

Az itt felsorolt állítások a "plusz végtelenhez tartó", ill. "minusz végtelenhez tartó" sorozatok definíciójából közvetlenül adódnak.

A legtöbb divergens számsorozat nem tartozik azonban a fent felsorolt (1) ill. (2) speciális típusba. Nincs határértéke pl. a

$$-1, 2, -3, 4, -5, \dots$$

sorozatnak, mert tagjainak abszolút értéke minden határon túl nő; viszont azt sem mondhatjuk, hogy a sorozat plusz végtelenhez, vagy minusz végtelenhez tart. Az

$$(3) \quad 1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

vagy az

$$(4) \quad 1, -\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{3}, 3, \dots$$

számsorozatok szintén divergensek, nincsen olyan szám, melyet a számsorozat elég távoli elemei tetszőlegesen kicsiny hibával megközelítenének, viszont a sorozatok plusz végtelenhez, vagy minusz végtelenhez sem tartanak, hiszen a (3) számsorozat tagjai korlátosak, a (4) számsorozat páros indexű tagjai pedig 0 - hoz tartanak.

Például a

$$\frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{9}{6}, \frac{16}{7}, \dots, \frac{n^2}{n+3}, \dots$$

számsorozat plusz végtelenhez tart, mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = +\infty \text{ a d.) állítás értelmében.}$$

Állapítsuk meg, hányadik tagtól kezdve lesznek a számsorozat tagjai nagyobbak 10^2 - nél, vagyis milyen n - ekre lesz

$$\frac{n^2}{n+3} > 10^2.$$

Egyenlőtlenségünket átrendezve kapjuk:

$$n^2 - 100n - 300 > 0.$$

A baloldali kifejezést gyöktényezőz alakban felírva (az $n^2 - 100n - 300 = 0$ egyenlet gyökei $n_{1,2} = 50 \pm 5\sqrt{112}$)

$$(n - 50 - 5\sqrt{112})(n - 50 + 5\sqrt{112}) > 0,$$

tehát egyenlőtlenségünk biztosan kielégül már, ha

$$n > 50 + 5\sqrt{112},$$

illetve, mivel $\sqrt{112} < 12$, ha

$$n > 50 + 5 \cdot 12 = 110.$$

Nem nehéz azt sem kimutatni, hogy általánosságban

$$\frac{n^2}{n+3} > P$$

ha már

$$n > \frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} + 3P}.$$

3^o Monoton sorozatok

Mivel a konvergens számsorozatoknak mind az elmélet, mind a gyakorlat szempontjából különleges fontossága van, az alábbiakban olyan feltételeket keressünk, melyeknek segítségével könnyen eldönthetjük, hogy a vizsgált sorozat konvergens-e avagy divergens (az ilyen feltételt konvergenca-kritériumnak nevezzük). A konvergenca kimutatására természetesen maga a konvergens számsorozatokra adott definíció is alkalmas, ennek azonban az a hátránya, hogy felhasználja a sorozat limeszének számértékét, amit pedig általában nem ismerünk előre.

Könnyű konvergenca-kritériumot adni az un. monoton sorozatokra.

Definíció

Az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

számsorozatot, ha

$$(1) \quad a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$$

monoton fogyónak, ha

$$(2) \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

monoton növekedőnek nevezzük.

Ha (1), ill. (2) - ben az egyenlőségi jeleket kizárjuk, akkor a sorozatot szigorúan monoton fogyónak, ill. szigorúan monoton növekedőnek nevezzük.

Tétel

Monoton növekedő sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha felülről korlátos és konvergencia esetén határértéke megegyezik a sorozat elemeiből alkotott halmaz felső határával.

Természetesen hasonló tétel mondható ki monoton fogyó sorozatokról az alsó határral kapcsolatban.

Azt, hogy a tételben kimondott feltétel, a sorozat korlátossága a konvergenciának szükséges feltétele, tehát más szavakkal, hogy egy sorozat csak úgy lehet konvergens, ha korlátos, az 1^o II. tételben már bebizonyítottuk.

Bizonyítanunk kell még, hogy a tételben kimondott feltétel a sorozat konvergenciájának elégleges feltétele, tehát más szavakkal, hogy ha egy monoton növekedő sorozat korlátos, akkor mindig konvergens is, és határértéke a sorozat tagjaiból álló halmaz felső határa. Ezen felső határt az a_n ($n=1, 2, \dots$) sorozat esetében A - val jelölve azt kell bizonyítanunk, hogy

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots, \quad a_n \leq K \quad (n=1, 2, \dots)$$

esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

Mivel a feltevés értelmében A felső határ, tehát egyszersmind felső korlát is:

$$a_n \leq A \text{ minden } n \text{ - re.}$$

Ha ε tetszőleges pozitív számot jelent, akkor azonban $A - \varepsilon$ már nem felső korlátja a (3) sorozatnak, hiszen az A felső határ a legkisebb felső korlát, és így alkalmas N indexre

$$a_N > A - \varepsilon.$$

De ekkor a sorozat monoton növekedő volta miatt $n > N$ esetén mindig fennáll

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \text{ vagyis } |a_n - A| < \varepsilon,$$

amivel az a_n $n = 1, 2, \dots$ számsorozat A limeszhez való konvergenciáját be is bizonyítottuk.

Ha egy monoton sorozat nem korlátos, akkor a következő állítás mondható ki:

Monoton növekedő, felülről nem korlátos sorozat plusz végtelenhez tart.
Monoton fogyó, alulról nem korlátos sorozat mínusz végtelenhez tart.

Vizsgáljuk meg azt a sorozatot, melynek n - edik tagja

$$a_n = x^n \text{ (} x \text{ rögzített szám, } n=1, 2, 3, \dots \text{)}.$$

E sorozat, x értékétől függően, különbözőképpen viselkedik. Mivel

$$(3) \quad a_{n+1} = x a_n,$$

konvergencia esetében A - val jelölve a sorozat határértékét, a (3) összefüggés értelmében az A határértékre a következő egyenlet adódik:

$$A = x A,$$

vagyis

$$(x-1) A = 0,$$

és így konvergencia esetében $x \neq 1$ mellett a sorozat határértéke csak

$$A = 0$$

lehet.

Ha $x > 1$, akkor a sorozat monoton növekedő, de $A = 0$ - hoz nem konvergálhat, tehát nem lehet konvergens, így plusz végtelenhez tart.

Ha $x = 1$, akkor triviális módon $x^n \rightarrow 1$.

Ha $0 \leq x < 1$, akkor a sorozat monoton fogyó és alulról korlátos ($x^n \geq 0$, 0 tehát biztosan alsó korlát), tehát konvergens, és a fenti okoskodás értelmében határértéke $A = 0$.

Ha $-1 < x < 0$, akkor $|a_n| = |x|^n$, úgyhogy akkor is $x^n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

Ha végül $x \leq -1$, akkor a sorozatnak nincs határértéke, de nem tart sem plusz sem mínusz végtelenhez.

Eredményeinket összefoglalva írhatjuk

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } x > 1, \\ 1, & \text{ha } x = 1, \\ 0, & \text{ha } -1 < x < 1, \text{ azaz } |x| < 1, \\ \text{nem létezik,} & \text{ha } x \leq -1. \end{cases}$$

Vizsgáljuk meg az alábbi számsorozat konvergenciáját, és amennyiben konvergens, számítsuk ki határértékét:

$$a_1 = 4, \quad a_2 = \frac{4^2 + 5}{6} = \frac{21}{6}, \quad \dots, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 5}{6}, \quad \dots$$

A sorozat monoton fogyó; ezt teljes indukcióval bizonyítjuk:

$$4 \geq a_1 > a_2,$$

és ha feltesszük, hogy

$$a_{n-1} > a_n,$$

akkor e feltételből már következik, hogy

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 5}{6} > \frac{a_n^2 + 5}{6} = a_{n+1},$$

amivel a sorozat monoton fogyó voltát bebizonyítottuk. Mivel azonban a sorozat minden tagja pozitív, azért a sorozat alulról korlátos is, tehát az ezen fejezet elején kimondott tétel értelmében konvergens:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

Ez azonban azt jelenti, hogy a sorozat definíciójában szereplő

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 5}{6}$$

összefüggésből $n \rightarrow \infty$ esetén az

$$A = \frac{A^2 + 5}{6}$$

egyenlőség adódik. Ebből azonban

$$A^2 - 6A + 5 = 0, \text{ ill. } A = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}.$$

Mivel azonban a sorozat elemeire $a_n \leq 4$ ($n=1, 2, \dots$), t.i. $a_1 \leq 4$ és a sorozat monoton fogyó, azért egyszersmind az A határértékre is

$$A \leq 4,$$

s így sorozatunk határértéke csak

$$A = 1$$

lehet.

4^o A Cauchy-féle konvergenciakritérium

Tétel

Az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha bármely pozitív ε számhoz talál-
ható olyan N index, hogy

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \text{ ha } n > N, m > N.$$

Más szavakkal, a fenti sorozat akkor konvergens, ha elég távoli tagjai egymást tetszőlegesen kicsiny hibával megközelítik. Az itt megfogalmazott konvergenciakritériumot nevezik Cauchy-féle konvergenciakritériumnak. Jelentősége abban áll, hogy lehetővé teszi egy sorozat konvergens voltának megállapítását anélkül, hogy a sorozat határértékét ismernők.

Mielőtt a tételt bebizonyítanánk, két segédteételt mondunk ki, és bizonyítunk be:

1. Segédteétel:

Minden számsorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás

Tekintsük az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sorozatot. Nevezzük ebben az a_1 tagot csucsnak, ha utána már nincsen nála nagyobb tag a sorozatban. Ha a sorozatban végtelen sok csucs van, akkor ezek monoton fogyó részsorozatot alkotnak, ha pedig csak véges számú csucs van, akkor így okoskodunk: legyen a_{s_1} olyan tag, mely a legutolsó

csucs után következik, ezután kell, hogy található legyen nála nagyobb a_{s_2} tag a sorozatban, ezután ismét egy az a_{s_2} tagnál nagyobb a_{s_3} tag, és így tovább. Az

$$a_{s_1}, a_{s_2}, a_{s_3}, \dots$$

tagok egy monoton növekedő részsorozatot alkotnak. A fenti okoskodással tehát vagy egy monoton fogyó, vagy egy monoton növekedő részsorozatot mindig ki tudunk választani a számsorozatból, amivel állításunkat igazoltuk.

2. Segédttétel

Korlátos számsorozatnak van konvergens részsorozata.
(E tételt Bolzano-Weierstrass tételnek nevezik.)

Bizonyítás

Ha

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

egy korlátos számsorozat, akkor az 1. segédttétel értelmében van monoton részsorozata, ez persze szintén korlátos, tehát a 3^o - ban kimondott tétel értelmében konvergens.

Ezek után rátérünk a Cauchy-féle konvergenciakritérium bizonyítására.
Bizonyítás. A Cauchy-féle konvergenciakritérium szükséges feltétele az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

számsorozat konvergenciájának, más szavakkal, ha a fenti sorozat konvergens, akkor kielégíti a Cauchy-féle konvergenciakritériumot.

Irjuk ugyanis elő a pozitív ε hibakorlátot, és válasszuk meg a N küszöb-indexet úgy, hogy $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A)$

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ valahányszor } n > N,$$

$$|a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ valahányszor } m > N.$$

Ekkor azonban valahányszor $n > N$, $m > N$ fennáll:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \\ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

amivel a feltétel szükséges voltát bebizonyítottuk. A Cauchy-féle konvergenciakritérium azonban elégséges feltételt is ad a konvergenciára, azaz ha az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sorozat kielégíti a Cauchy-féle konvergenciakritériumot, vagyis az adott $\varepsilon > 0$ -hoz alkalmasan választott N mellett

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \text{ valahányszor } n > N, \quad m > N,$$

akkor konvergens.

Először azt mutatjuk meg, hogy ebben az esetben a sorozat korlátos. Határozzuk meg ugyanis az ε pozitív számhoz a N indexet, akkor $n > N$ esetén

$$a_N - \varepsilon < a_n < a_N + \varepsilon.$$

Ha tehát K - val jelöljük az $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|,$

$|a_N - \varepsilon|, |a_N + \varepsilon|$ számok legnagyobbikát, akkor $|a_n| \leq K$ minden n - re (az $(a_N - \varepsilon, a_N + \varepsilon)$ intervallumon kívül ui. a sorozatnak csak az $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$ tagja - tehát véges sok tagja - eshet). A sorozat tehát valóban korlátos.

Mivel a sorozat korlátos, a 2. segédétel értelmében kiválasztható belőle egy konvergens részsorozat:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_r}, \dots$$

Jelöljük e konvergens részsorozat határértékét A - val. Azt állítjuk, hogy az egész sorozat is ehhez a határértékhez tart. Adjuk meg ui. a pozitív ε számot, és válasszuk meg a N indexet úgy, hogy $n > N, m > N$ esetén az

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

egyenlőtlenség fennálljon. Válasszuk meg továbbá az n_r indexet oly nagyra, hogy $n_r > N$ legyen és

$$|a_{n_r} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

fennálljon (ez az $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ részsorozat konvergenciája miatt megtehető). Legyen $n > n_r$ (ekkor egyuttal $n > N$), tehát

$$\begin{aligned} |a_n - A| &= |(a_n - a_{n_r}) + (a_{n_r} - A)| \leq |a_n - a_{n_r}| + |a_{n_r} - A| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

s ezzel az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

számsorozat konvergenciáját, s így a Cauchy-feltétel elégséges voltát bizonyítottuk.

A Cauchy-féle konvergenciakritérium segítségével könnyű bebizonyítani az alábbi sorozatok konvergenciáját ill. divergenciáját:

a.) Egy sorozat n - edik tagja

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

E sorozat konvergens, mert kielégíti a Cauchy-féle feltételt:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \dots \pm \frac{1}{m} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \dots \pm \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

ez pedig tetszőlegesen kicsi, ha n elég nagy. (A becslésnél felhasználtuk, hogy a zárójelben álló kifejezések mind pozitívak, és az abszolút érték jelén belül álló kifejezés utolsó tagja a zárójelzés után vagy $-(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m})$, vagy $-\frac{1}{m}$, ha tehát $\frac{1}{n+1}$ -ből ezeket a pozitív számokat levonjuk,

$\frac{1}{n+1}$ -nél kisebb pozitív kifejezést nyerünk. Alkalmas zárójelzéssel könnyű belátni, hogy $a_n - a_m$ pozitív: $a_n - a_m = (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + (\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}) + \dots + M$,

ahol minden zárójelben pozitív szám áll, és M vagy $+(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m})$, vagy $+\frac{1}{m}$, tehát $M > 0$. Mivel tehát beláttuk, hogy az abszolút érték jelén belül álló kifejezés pozitív, és $\frac{1}{n+1}$ -nél kisebb, fenti becslésünk valóban helyes volt.)

b.) Egy sorozat n - edik tagja

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad (n=1, 2, \dots).$$

E sorozat divergens, mert nem elégíti ki a Cauchy-féle feltételt: legyen u .

$\epsilon = \frac{1}{2}$, akkor bármilyen nagy is N ,

$$b_{2N} - b_N = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} > N \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

(Az összeg u . N tagból áll és $\frac{1}{2N}$ a legkisebb tagja.)

c.) Egy sorozat n -edik

$$c_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n.$$

E sorozat x különböző értékei mellett különféleképpen viselkedik. A könnyen igazolható

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (x \neq 1)$$

egyenlőség szerint

$$c_n = \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} x^{n+1}.$$

A sorozat nyilván csak úgy konvergálhat, ha x^{n+1} - nek véges határértéke van, ami $-1 < x < 1$, (másképp $|x| < 1$) esetén következik be. Ekkor $x^{n+1} \rightarrow 0$, tehát

$$c_n \rightarrow \frac{1}{1 - x}.$$

Ha $x = 1$ $c_n = n+1$, és így a vizsgált sorozat

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

nyilván divergens (plusz végtelenhez tart); ha $x = -1$, akkor $c_n = 0$, ha n páratlan és $c_n = 1$, ha n páros, azaz a vizsgált sorozat

$$0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

nyilván divergens. $x > 1$ esetén a sorozat monoton növekvő, de felülről nem korlátos, tehát plusz végtelenhez tartó divergens sorozat, míg $x < -1$ esetén a sorozat szomszédos tagjainak különbsége

$$c_{n+1} - c_n = x^n$$

nem tart zérushoz, s így a Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján a sorozat divergens.

Eredményeinket összefoglalva:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + \dots + x^n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } x \geq 1, \\ \frac{1}{1-x}, & \text{ha } -1 < x < 1 \quad (|x| < 1), \\ \text{nem létezik,} & \text{ha } x \leq -1. \end{cases}$$

d) Említettük már, hogy minden valós szám tetszés szerinti pontossággal megközelíthető véges tizedestörtek segítségével, és vázoltuk is (4.) fejezet), hogy ez hogyan történhet. Az előzőekben bevezetett fogalmak és tételek segítségével ezt most pontosabban is megfogalmazhatjuk.

Legyen x pozitív szám. Jelöljük a -val és $a+1$ -gyel azt a két szomszédos egész számot, amelyek közé x esik, vagyis legyen

$$a \leq x < a+1.$$

Az $[a, a+1)$ intervallumot osszuk 10 egyenlő részre, essék x a, a_1 és $a, a_1 + 0,1$ közé:

$$a, a_1 \leq x < a, a_1 + 0,1.$$

Az eljárást folytatva, a következő egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} a, a_1 a_2 &\leq x < a, a_1 a_2 + 0,01, \\ &\vdots \\ a, a_1 a_2 \dots a_n &\leq x < a, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

Tekintsük az előbbi egyenlőtlenségek baloldalán álló véges tizedestörtek sorozatát:

$$b_0 = a, \quad b_1 = a, a_1, \quad b_2 = a, a_1 a_2, \dots, \quad b_n = a, a_1 a_2 \dots a_n, \dots$$

Ez a számsorozat nyilván az x határértékhez tart, hiszen a fenti egyenlőtlenségek szerint $|b_n - x| < \frac{1}{10^n}$, és tudjuk, hogy $\frac{1}{10^n} = (0,1)^n \rightarrow 0$, (3^0 - ban

általánosságban tárgyaltuk az $a_n = x^n$ ($n=1, 2, \dots$) sorozatot), ezzel együtt tehát $|b_n - x|$ tetszőlegesen kis pozitív ε -nál kisebbé válik, ha n elég nagy.

A $b_0, b_1, b_2, \dots$ számsorozat tagjait az

$$a, a_1 a_2 a_3 \dots$$

un. végtelen tizedestört közelítő törtjeinek nevezzük.

Előfordulhat az is (mint pl. az $x = \frac{1}{4} = 0,25$ szám esetében), hogy valamilyen indextől kezdve $a_n = 0$, ilyenkor is beszélhetünk azonban formálisan végtelen tizedestörtről (az előbbi példában a $0,25000\dots$ végtelen tizedestörtről).

Az előzők alapján megállapíthatjuk tehát, hogy

bármely x pozitív számhoz található olyan $a, a_1 a_2 \dots$ végtelen tizedestört,

amelynek közelítő törtjei x - hez tartó számsorozatot alkotnak; ilyenkor azt mondjuk, hogy az x számot előállítja az $a, a_1 a_2 \dots$ végtelen tizedestört, jelben:

$$x = a, a_1 a_2 \dots$$

Pl. $x = \frac{1}{3}$ esetében $a = 0, a_1 = 3, a_2 = 3, \dots, a_n = 3, \dots$ úgyhogy

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots$$

Ha x negatív szám, akkor a $-x$ számot állítjuk elő végtelen tizedestörttel, legyen pl.

$$-x = a, a_1 a_2 \dots,$$

és ekkor

$$x = -a, a_1 a_2 \dots$$

Az utóbbi egyenlőség tehát azt jelenti, hogy a jobboldalon álló végtelen tizedestört közelítő törtjeinek $(-1) \cdot$ szeresei tartanak x - hez.

Kitűnik a fentiekből az is, hogy bármely valós szám tetszőleges pontossággal megközelíthető véges tizedestörtek segítségével (ti. végtelen tizedestört alakjának elég nagy indexű közelítő törtjeivel). Ezt a tényt úgy is ki szoktuk fejezni, hogy a véges tizedestörtek halmaza mindenütt sűrű a számegyenesen. (20.) fejezet 2. eredménye ezzel a kifejezésmóddal élve úgy is megfogalmazható, hogy a racionális számok halmaza mindenütt sűrű a számegyenesen, mostani eredményünk azonban ennél többet mond.

Megfordítva, tekintsünk egy $a, a_1 a_2 \dots$ végtelen tizedestörtet, amelyben tehát a nem-negatív egész szám, a többi a_n pedig a $0, 1, 2, \dots, 9$ számjegyek valamelyike lehet. Világos, hogy e végtelen tizedestört közelítő törtjeinek

$$b_0 = a, b_1 = a, a_1, b_2 = a, a_1 a_2, \dots, b_n = a, a_1 a_2 \dots a_n, \dots$$

sorozata monoton növekedő és felülről korlátos (egy felső korlát pl. $a+1$). A 3^0 - ban kimondott tétel értelmében tehát ez a sorozat konvergens, határértékét x - szel jelölve, eszerint

$$x = a, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

vagyis tehát minden végtelen tizedestört előállít egy valós számot.

Ismeretes, hogy ha x pozitív racionális szám, $x = \frac{p}{q}$ (p és q egész szám), akkor p - nek q - val való osztását a szokásos módon elvégezve vagy véges tizedestörthöz; vagy szakaszos végtelen tizedestörthöz jutunk, amelyben tehát bizonyos indextől kezdve egy véges számú jegyből álló csoport (az ún. szakasz) ismétlődik. Pl.

$$\frac{3}{22} = 0,1363636\dots$$

Megfordítva, megmutatjuk, hogy ha x szakaszos végtelen tizedestörttel állítható elő, akkor x racionális szám.

Valóban, legyen az $a, a_1 a_2 \dots$ végtelen tizedestörtben a szakaszos rész első jegye a_k és legyen a szakasz p - jegyű. Ez tehát azt jelenti, hogy

$$a_k = a_{k+p} = a_{k+2p} = \dots,$$

$$a_{k+1} = a_{k+1+p} = a_{k+1+2p} = \dots,$$

.

.

.

$$a_{k+p-1} = a_{k+p-1+p} = a_{k+p-1+2p} = \dots$$

Ekkor tehát a közelítő véges tizedestörtek szokásos jelölésével

$$b_{k+p-1} = b_{k-1} + \frac{a_k}{10^k} + \dots + \frac{a_{k+p-1}}{10^{k+p-1}},$$

$$b_{k+2p-1} = b_{k+p-1} + \left(\frac{a_{k+p}}{10^{k+p}} + \dots + \frac{a_{k+2p-1}}{10^{k+2p-1}} \right) =$$

$$= b_{k+p-1} + \frac{1}{10^p} \left(\frac{a_k}{10^k} + \dots + \frac{a_{k+p-1}}{10^{k+p-1}} \right).$$

.

.

.

Bevezetve tehát a

$$q = \frac{a_k}{10^k} + \dots + \frac{a_{k+p-1}}{10^{k+p-1}}$$

jelölést, írható

$$b_{k+p-1} = b_{k-1} + q,$$

$$b_{k+2p-1} = b_{k-1} + q + \frac{1}{10^p} q,$$

.

.

.

$$b_{k+np-1} = b_{k-1} + q + \frac{1}{10^p} q + \dots + \frac{1}{10^{np}} q,$$

Tudjuk azonban, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{10^p} + \dots + \frac{1}{10^{np}} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^p}} = S$$

(lásd a c.) feladatot), úgyhogy a közelítő törtek sorozatának

$b_{k+p-1}, b_{k+2p-1}, \dots, b_{k+np-1}, \dots$ részsorozata az

$$x = b_{k-1} + q S$$

határértékhez tart. Tudva, hogy a közelítő törtek sorozata konvergens, ez lesz a végtelen tizedes tört által előállított valós szám, és világos, hogy b_{k-1}, q és S racionális, tehát x is racionális.

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy a véges tizedestörten előállítható számok kétféleképpen is előállíthatók végtelen tizedestörten, ti. a véges tizedestört alak után csupa 0 - t írva, és a véges tizedestört utolsó 0 - től különböző jegyét eggyel csökkentve és utána csupa 9 - t írva. Minden más esetben viszont a végtelen tizedestört előállítás csak egyféleképpen lehetséges.

$$\text{Pl. } 0,25000\dots = \frac{25}{100} = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} 0,24999\dots &= 0,24 + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{10^5} + \dots = \\ &= 0,24 + \frac{9}{1000} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) = \\ &= 0,24 + \frac{9}{1000} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \\ &= 0,24 + \frac{9}{1000} \frac{10}{9} = \\ &= 0,24 + \frac{1}{100} = 0,25 = \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0,1363636\dots &= 0,1 + \frac{36}{10^3} + \frac{36}{10^5} + \frac{36}{10^7} + \dots = \\
&= 0,1 + \frac{36}{10^3} \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots\right) = \\
&= 0,1 + \frac{36}{10^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \\
&= 0,1 + \frac{36}{10^3} \frac{10^2}{99} = 0,1 + \frac{36}{990} = \\
&= \frac{99 + 36}{990} = \frac{135}{990} = \frac{3}{22}.
\end{aligned}$$

22.) A FÜGGVÉNY FOGALMA ÉS ÁBRÁZOLÁSA

A természettudományok célja a természet jelenségei közötti összefüggések megállapítása. Ez végső fokon azt jelenti, hogy meg kell állapítani többek közt azt, hogy ha a kísérleti körülmények egyikét megváltoztatjuk, ettől hogyan függ a jelenség lefolyása. Így például a fizikából közismert gáztörvény arra ad feleletet, hogy ha megváltoztatjuk a gáz térfogatát, ezzel egyidőben hogyan változik annak nyomása, ha a hőmérséklet nem változik. Vagy pedig az elektromos rezgőkörök elméletéből közismert Thomson-képlet megmondja, hogyan függ a rezgőkörben keletkező elektromos rezgés frekvenciája a rezgőkör kapacitásától és önindukciós együtthatójától. További példák: a kör területe függ a kör sugarától, a szabadon eső test által megtett ut függ az esés idejétől, a vezetőben folyó áram munkája függ az áram intenzitásától, feszültségétől és a munkavégzés idejétől, stb.

A változó mennyiségek közül azokat, melyeknek értékét (bizonyos határok között) önkényesen változtathatjuk, független változóknak, a tőlük függő mennyiséget függő változónak nevezzük. Persze az, hogy mi egy változót adott esetben független változónak tekintünk, elsősorban a kísérleti vagy természeti adottságoktól függ. Az áram munkájának vizsgálatánál független változóként említettük az áram intenzitását, mert leginkább ennek tetszőleges változtatása lehetséges, ellentétben a munkával. A függő és független változó (esetleg változók) kapcsolata a függvény. Pontosabban a következő definíciót adhatjuk meg:

Azt mondjuk, hogy y az x - nek függvénye, ha x minden szóbajövő értékéhez y - nak meghatározott értéke tartozik.

A függvény tehát - a legegyszerűbb esetben - két változó mennyiség közötti törvényszerűséget fejezi ki. A fent példaként említett függvények között szerepeltek olyanok, amelyekben a függő változó értéke csak egy független változó értékétől függött (a kör területe a sugártól, a szabadon eső test utja az időtől), az ilyen függvényeket egyváltozós függvényeknek nevezzük. Ezzel szemben vannak olyan függvények, melyeknél a függő változó értéke több független változó értékétől függ (pl. az áram munkája az áramintenzitáson kívül a feszültségtől és a munkavégzés idejétől is függ), az ilyen függvényeket többváltozós függvényeknek nevezzük. Mi most először csak az egyváltozós függvényekkel, azok vizsgálatával fogunk foglalkozni.

Azt, hogy az y változó az x változónak függvénye, így jelöljük:

$$y = f(x), \quad y = g(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = y(x), \quad \dots$$

E jelölésnél x jelenti a független, y pedig a függő változót.

A független változót szokás még argumentumnak is nevezni. x szóba jövő értékei, vagyis x azon értékei, melyekhez y - nak meghatározott értékeit rendeltük hozzá, a függvény értelmezési tartományát, y megfelelő értékei pedig a függvény értékkészletét alkotják. y - nak azt az értékét, melyet az $y = f(x)$ függvénykapcsolattal az $x = a$ értékhez rendeltünk hozzá, $f(a)$ - val jelöljük, és az $y = f(x)$ függvény $x = a$ helyen felvett értékének, a függvény helyettesítési értékének nevezzük.

A függvény definícióját a fenténél sokkal általánosabban is megadhatjuk:

A függvény olyan utasítás, amellyel egy P halmaz bizonyos P_1 részhalmazának minden eleméhez egy R halmaz meghatározott elemét rendeljük hozzá. Az utóbbi elemek halmazát R_1 - gyel jelölve ($R_1 \subset R$), P_1 - et függvényünk értelmezési tartományának, R_1 - et függvényünk értékkészletének nevezzük.

Fenti definíciókat úgy is értelmezhetjük, hogy a függvény-utasítás olyan transzformáció, amellyel a P_1 halmaz elemeit az R_1 halmaz elemeibe transzformáljuk át, P_1 - et R_1 - re (vagy R - be) képezzük le.

Mind az értelmezési tartomány P_1 , mind az értékkészlet R_1 halmaza lehet:

- a valós számok halmaza,
- a síkbeli pontok, vagy a síkvektorok halmaza,
- a háromdimenziós térbeli pontok, vagy vektorok halmaza,
- az n - dimenziós vektorok halmaza,

.

.

ill. ezen halmazok valamilyen részhalmaza.

Mi most először - mint azt fent már említettük - azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor az értelmezési tartomány P_1 és az értékkészlet R_1 halmaza is a valós számok halmaza, ill. annak valamilyen

részhalmaza. Függvényen tehát egyelőre csak valós egyváltozós függvényt fogunk érteni, melyre a fenti általános definíció alkalmazásával a következő definíció adható meg:

A valós egyváltozós függvény olyan utasítás, mely a valós számok bizonyos P_1 részhalmazának elemeihez a valós számok meghatározott R_1 részhalmazának elemeit rendeli hozzá. (P_1 változó elemét x - szel, R_1 x - hez rendelt elemét y - nal jelölve e definíció az ezen fejezet elején megadott definícióba megy át.)

A függvény megadása, vagyis a függő változó értékeinek a független változó értékeihez való hozzárendelése többféleképpen történhet. Megadhatunk egy függvényt képlettel, pl.

$$f(x) = x^2,$$

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

$$y = 3x - 1,$$

$$y = x^2 - 3x - 2,$$

$$g(x) = \sqrt{x} \quad (\sqrt{x} \text{ jelenti az } x \text{ számból}$$

vont pozitív négyzetgyököt);

(ha a függvény képlettel történő megadásánál nem teszünk utalást az értelmezési tartományra, akkor ez azt jelenti, hogy a függvényt minden szóba jövő x -re, a "lehető legnagyobb" értelmezési tartományban vizsgáljuk), utasítással, pl.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

(e függvényt röviden így is jelöljük: $(f(x) = \text{sg } x - \text{olv.: szignum } x -)$),

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

(e függvényt röviden - a már korábban bevezetett jelöléssel - így is felírhatjuk: $y = |x| - \text{olv.: } x \text{ abszolút értéke} -$),

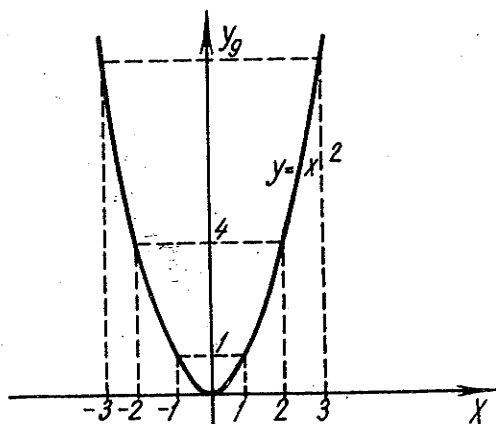
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 1, & \text{ha } x \text{ irracionális;} \end{cases}$$

táblázattal (főképp kísérleteknél szokták a kísérleti eredményeket táblázatok formájában összefoglalni), pl. egy rézrud r elektromos ellenállásának a t hőmérséklettől való függését vizsgálva, kísérletileg a következő táblázat adódik:

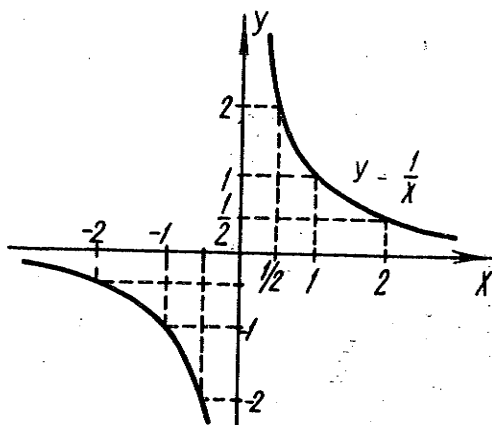
t	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0
r	76,30	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10

Gyakrabban használt - egyébként - képlettel vagy más előírással is megadható-függvényeknek - táblázattal történő megadását is szoktuk használni (pl. logaritmus-táblázatok), mert táblázat segítségével a független változó bizonyos, a táblázatban szereplő, értékeihez tartozó függvényértékeket gyorsan meg lehet így határozni. Hátránya azonban a táblázattal történő függvény-megadásnak, hogy általában nem tartalmazhatja az összes, számolásunkhoz szükséges, független változó értékhez tartozó függvényértéket.

Valamely egyváltozós függvény geometriai szemléltetése, ábrázolása úgy történik, hogy a síkban felveszünk egy derékszögű koordinátarendszert, s tekintjük a sík azon pontjainak összességét, amelyeknek abszcisszái a független változó egyes szöbajövő értékei, ordinátái pedig a megfelelő függvényértékek. A sík e pontjainak összességét nevezzük a szóban forgó $f(x)$ függvény képének, görbéjének, grafikonjának, jóllehet gyakran nem hasonlít ahhoz, amit a közönséges életben görbének nevezünk. Világos, hogy az $f(x)$ függvény görbéjének egyenlete $y = f(x)$. Az előbbi képlettel megadott függvények görbéi:



60. ábra
értelmezési tartomány $(-\infty, +\infty)$,
értékkészlet: $[0, +\infty)$,



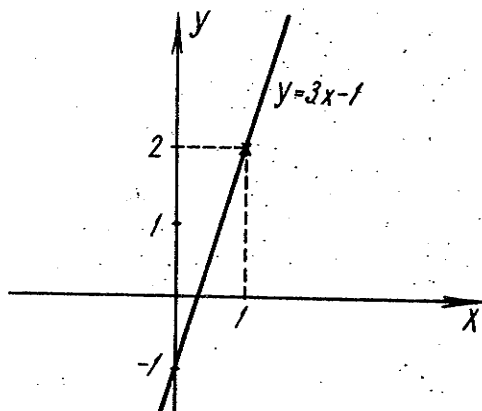
61. ábra

értelmezési tartomány:

$(-\infty, 0)$ és $(0, +\infty)$,

értékkészlet:

$(-\infty, 0)$ és $(0, +\infty)$



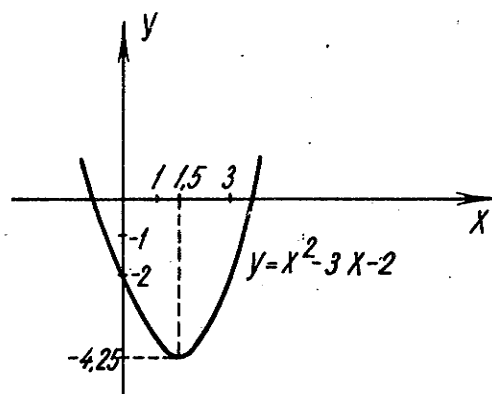
62. ábra

értelmezési tartomány

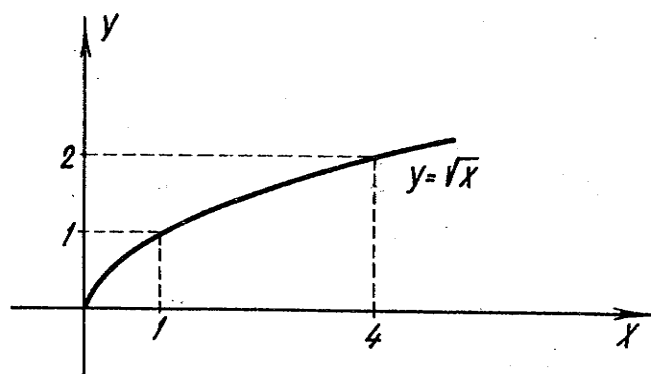
$(-\infty, +\infty)$,

értékkészlet:

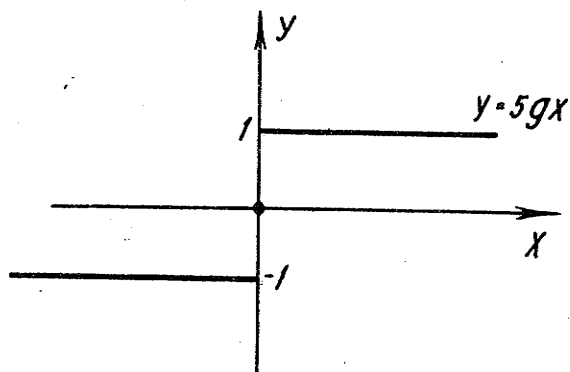
$(-\infty, +\infty)$,



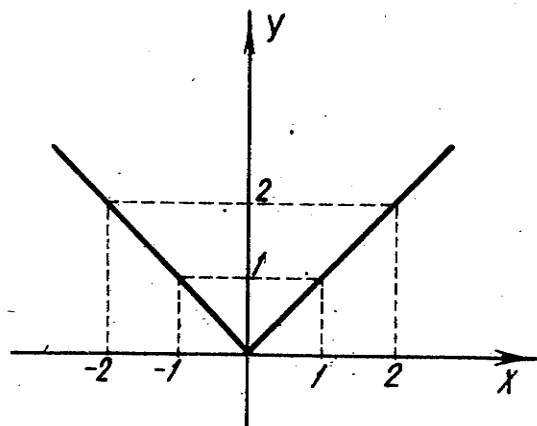
63. ábra
 értelmezési tartomány:
 $(-\infty, +\infty)$,
 értékkészlet:
 $[-4,25, +\infty)$,



64. ábra
 értelmezési tartomány:
 $[0, +\infty)$,
 értékkészlet:
 $[0, +\infty)$,



65. ábra
értelmezési tartomány:
 $(-\infty, +\infty)$,
értékkészlet:
 $\{-1, 0, 1\}$,



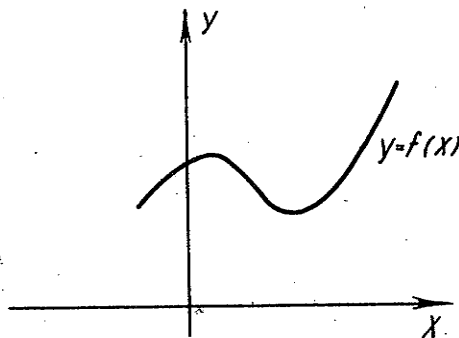
66. ábra
értelmezési tartomány:
 $(-\infty, +\infty)$,
értékkészlet:
 $[0, +\infty)$.

Természetesen megadhatunk egy függvényt grafikonja segítségével is. Pl. adott helyen a légnyomásnak az időtől való függését alkalmas automatikus regisztráló műszer segítségével a barométer tüje által felrajzolt görbe (grafikon) mutatja.

Egy függvény ábrázolásánál sokszor lehet egyszerű okoskodással leegyszerűsíteni a grafikon felrajzolásánál fellépő problémákat.

Ha az

$$(1) \quad y = f(x)$$

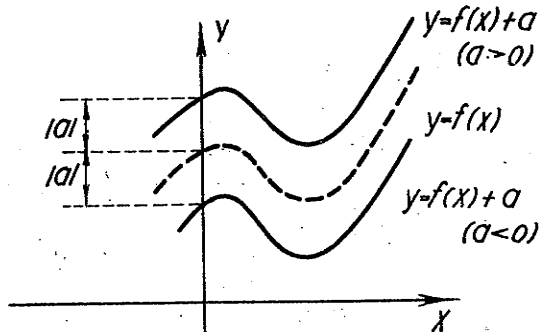


67. ábra

függvény görbéje ismert (67. ábra), akkor ennek segítségével könnyen megrajzolhatjuk az

$$(2) \quad y = f(x) + a$$

függvény görbét, hiszen (1) - gyel összehasonlítva, ugyanazon x abszciszszához (2) - nél $a > 0$ esetén a - vel nagyobb $a < 0$ esetén a - val kisebb ordináta tartozik; megállapodunk abban, hogy ezt a jövőben mindig úgy mondjuk, hogy (2)-ben ugyanazon x - hez (1) - gyel összehasonlítva " a - val nagyobb" ordináta tartozik (ahol tehát $a < 0$ esetén az " a - val nagyobb" ordináta tulajdonképpen kisebb ordinátát jelent). (2) grafikonját tehát megkapjuk, ha (1) görbét a egységgel felfelé toljuk (ez a "felfelé" történő eltolás $a < 0$ esetén valószínűleg lefelé történő eltolást jelent). (68. ábra).



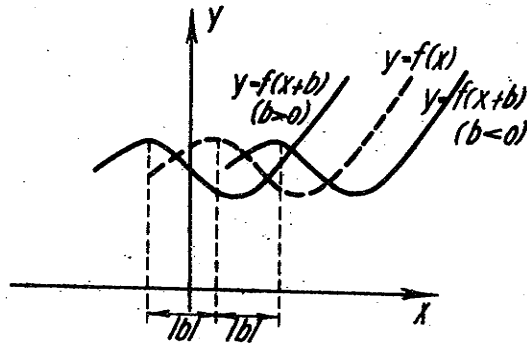
68. ábra

Az

(3)

$$y = f(x + b)$$

függvény görbáját így származtathatjuk (1) görbájéből: (3) - ban az $x-b$ abszcisszához rendelt függvényérték egyezik meg (1) - ben az x abszcisszához rendelt függvényértékkel, vagyis (3) grafikonját megkapjuk, ha (1) görbáját b egységgel balra toljuk el (ez a "balra" történő eltolás $b < 0$ esetében valóban jobbra történő eltolást jelent) (69. ábra).



69. ábra

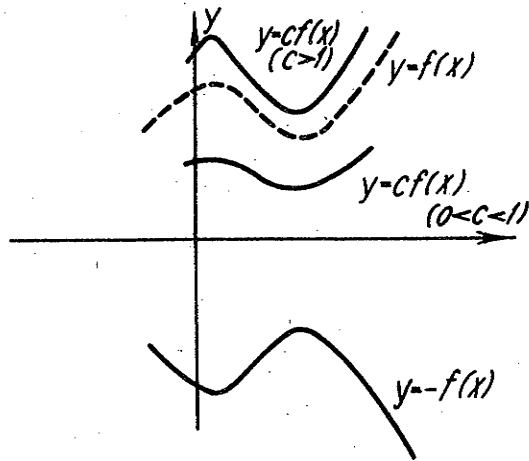
Az itt használt "felfelé", "lefelé", "jobbra", "balra" kifejezések a koordináta-rendszernek arra az elhelyezésére vonatkoznak, amikor függőleges síkban (pl. táblán) az ordináta-tengelyt függőlegesen felfelé, az abszcissza-tengelyt vízszintesen jobbra irányítjuk. Megjegyezzésszerűen használjuk azonban ugyanezeket az elnevezéseket a koordináta-rendszer bármilyen elhelyezése esetén is. Eszerint pl. a "vízszintesen balra" kifejezést a függvényábrázolással kapcsolatban mindig úgy kell érteni, hogy "az abszcissza-tengellyel párhuzamosan, a csökkenő abszcisszák irányában".

Az

(4)

$$y = c f(x)$$

függvény görbáját így származtathatjuk (1) görbájéből: (1) - gyel összehasonlítva (4) - ben ugyanazon x abszcisszához c - szeres ordinátaérték tartozik; (speciálisan $c = -1$ esetén ugyanazon abszcisszához az (1) - ben hozzárendelt ordináta (-1) - szeresét rendeltük (4) - ben). (4) grafikonját (1) grafikonjából tehát annak függőleges irányban történő c - szeres megnyújtásával (ez a "megnyújtás" $0 < c < 1$ esetén valóban összenyomást jelent) $c = -1$ esetében speciálisan az abszcissza-tengelyre való tükrözéssel, nyerjük (70. ábra) (lásd 210. old.)



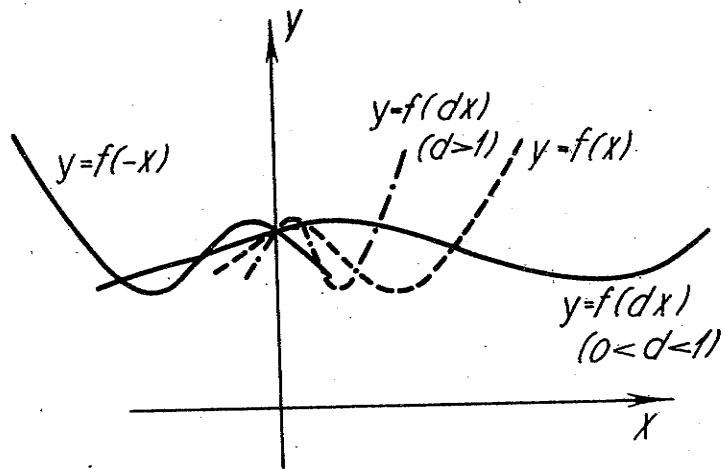
70. ábra

Az

(5)

$$y = f(dx)$$

függvény görbáját így származtathatjuk (1) görbájéből: (5) - ben az x abszcisszához rendelt függvényérték (1) - ben a dx abszcisszához rendelt függvényértékkel egyezik meg. (5) görbéje tehát (1) görbájéből vízszintes irányu $\frac{1}{d}$ - szeres nyújtással (ez a "nyújtás". $0 < d < 1$ esetén valójában összenyomást jelent), $d = -1$ esetén pedig az ordinátatengelyre történő tükrözéssel áll elő (71. ábra).



71. ábra

Teljes általánosságban

$$y = c f(dx + b) + a$$

görbét (1) görbéből úgy állíthatjuk elő, hogy először a görbét vízszintes irányban b egységgel balra, eltoljuk, majd függőleges irányban c - szerez nyújtást, vízszintes irányban $\frac{1}{d}$ - szerez nyújtást hajtunk végre, majd az így nyert görbét függőleges irányban a egységgel felfelé eltoljuk. (Vigyázzunk a lépések sorrendjére!)

Pl. $y = x^2$ görbéből ezzel a módszerrel $y = x^2 - 3x - 2$ görbét a következőképpen rajzolhatjuk meg:

$$y = x^2 - 3x - 2 = (x - 1,5)^2 - 4,25,$$

tehát $y = x^2$ görbét $-1,5$ - del balra, majd $-4,25$ - del felfelé eltolva az $y = x^2 - 3x - 2$ függvény képére jutunk. (Ezen ábrázolási módból azonnal adódik, hogy $y = x^2 - 3x - 2$ értékkészlete: $[-4,25, +\infty)$.)

A képlettel megadható függvényeket megadhatjuk explicit és implicit alakban. Explicit alakban történő megadáson az értendő, hogy az x független változó és y függő változó közötti kapcsolat az y - ra megoldott egyenlettel van megadva. Pl. $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, stb. Implicit alakban történő megadáson az értendő, hogy megadunk a két változó, y és x között egy egyenletet, amely azonban nincs y - ra megoldva, és egy adott x - hez azt az y - t rendeljük hozzá, amely x - szel együtt az egyenletet kielégíti. Ezzel a megadással kapcsolatban több bonyolult probléma lép fel, amelyekkel itt nem foglalkozunk. Pl. $x = 3xy + 1$, vagy $y = x \sin y$, stb. Az itt felsorolt implicit alakban megadott függvények közül az első megadható explicit alakban is (explicit alakra hozható): $y = \frac{x - 1}{3x}$, a másodikat azonban nem tudjuk explicit alakra hozni, az x és y között fennálló kapcsolatból nem tudjuk x - et kifejezni.

23.) RACIONÁLIS FÜGGVÉNYEK

I. Racionális egészfüggvények

Definíció

Az olyan függvényeket, melyek

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

alakban írhatók fel, ahol $a_0, a_1, \dots, a_n$ állandók, polinomoknak, vagy racionális egészfüggvényeknek nevezzük.

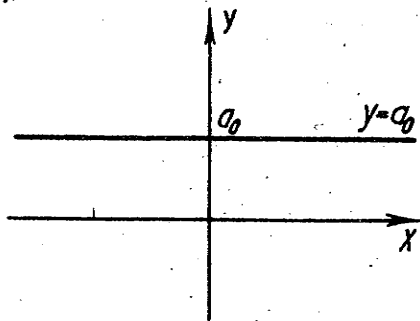
Könnyű belátni, hogy minden függvény, amely x -ből és állandókból véges számú összeadással és szorzással felépíthető, polinom. x legmagasabb előforduló hatványának kitevőjét a polinom fokszámának nevezzük. Egy polinomot legfeljebb n -edfokúnak mondunk, ha fokszáma $\leq n$.

Ha $f(x)$ fokszáma n , $g(x)$ fokszáma pedig m és $n \geq m$, akkor $f(x) \pm g(x)$ fokszáma $\leq n$, $f(x) \cdot g(x)$ fokszáma pedig $n + m$. Az (1) - ben szereplő $a_0, a_1, \dots, a_n$ mennyiségeket az $f(x)$ polinom együtthatóinak nevezzük.

1^0 0 - adfoku polinom

$$(2) \quad f(x) = a_0, \quad (a_0 \neq 0)$$

(a_0 állandó). Gőrbéje vízszintes (a derékszögű koordináta-rendszer X tengelyével párhuzamos) egyenes. (2) értelmezési tartománya: $(-\infty, +\infty)$, értékkészlete: $\{a_0\}$ (72. ábra).



72. ábra

2^o Az
(3)

$$f(x) = a_1 x + a_0, \quad (a_1 \neq 0)$$

függvény (elsőfoku polinom) értelmezési tartománya: $(-\infty, +\infty)$, értékkészlete: $(-\infty, +\infty)$. (3) görbéje - az analitikus geometriából ismert módon - ferde (sem az X, sem az Y koordinátatengellyel nem párhuzamos) egyenes.

A (3) - ből speciálisan $a_0 = 0$ esetében adódó

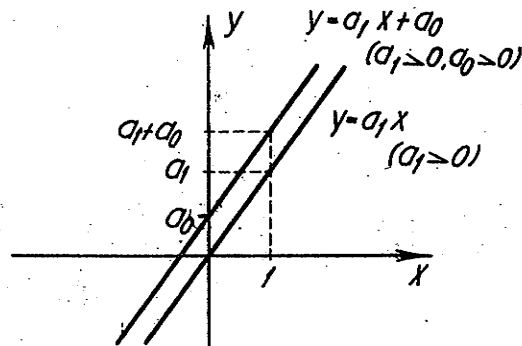
(4)
$$f(x) = a_1 x$$

elsőfoku polinom az egyenes arányosság matematikai kifejezése (ti. (4) - ből az $y = f(x)$ jelöléssel $y = a_1 x$ adódik, ami azt fejezi ki, hogy y egyenesen arányos x - szel.

Ha (3) - ban az $a_1 \neq 0$ megszorítást elejtjük, az

$$f(x) = a_1 x + a_0$$

legfeljebb elsőfoku polinomot - mivel a képe mindig egyenes - lineáris függvénynek is szoktuk nevezni.



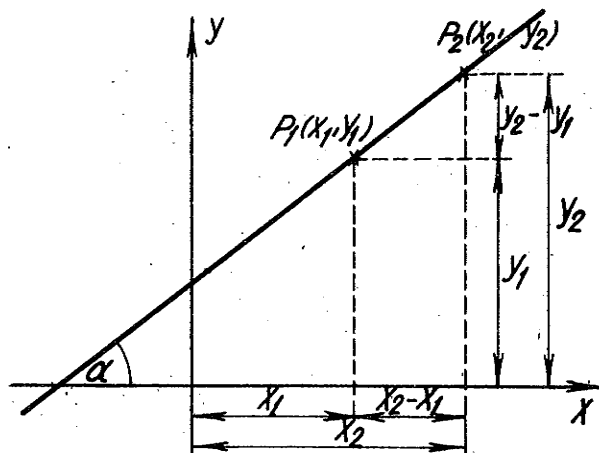
73. ábra

Idézzünk itt néhány - az analitikus geometriából már korábban ismert - eredményt:

A $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontokban áthaladó egyenes egyenlete ($x_1 \neq x_2$):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1),$$

és itt $(x - x_1)$ együtthatója jelenti az egyenes X tengely pozitív irányával bezárt α szögének tangensét, az un. iránytangensét:



74. ábra

$$\operatorname{tg} \alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ebből adódik, hogy a $P_1(x_1, y_1)$ ponton áthaladó m iránytangensű egyenes egyenlete:

$$y - y_1 = m (x - x_1).$$

Speciálisan az Y tengelyt a b koordinátájú pontban metsző (vagyis a $(0, b)$ ponton áthaladó) $m = a$ iránytangensű egyenes egyenlete:

$$y = ax + b.$$

$b = 0$ esetén ez az egyenes a koordinátarendszer kezdőpontján halad át.

(A 9.) fejezet 7^o pontjában levezettük az egyenes vektori egyenletét, ill. paraméteres egyenletrendszerét; mint ott is utaltunk rá, az X és Y koordinátatengelyek síkjában ezen egyenletrendszer két egyenlethől áll csak:

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \lambda a, \\ y - y_1 &= \lambda b, \end{aligned} \quad (\kappa)$$

ahol (x_1, y_1) az egyenes fix pontjának, a és b pedig az egyenes irányvektorának koordinátái, tehát - mint ahogy azt a 74. ábrából is könnyen leolvashatjuk -

$$a = x_2 - x_1, \quad b = y_2 - y_1,$$

ha az (x_2, y_2) pont is rajta fekszik az egyenesen. Ennek figyelembevételével (π) első egyenletéből a λ paramétert kifejezve és azt (π) második egyenletébe behelyettesítve, a két ponton átmenő egyenes jól ismert egyenletére jutunk.)

3^o Az

$$(5) \quad f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (a_2 \neq 0)$$

másodfoku polinom szemléltetésének problémája - mint arra a 22.) fejezetben már utaltunk - az

$$(6) \quad f(x) = x^2$$

függvény szemléltetésére vezethető vissza. (6) képe - mint az az analitikus geometriából ismert - parabola, melynek tengelye az Y tengely. (6) értelmezési tartománya $(-\infty, +\infty)$, értékkészlete a $[0, +\infty)$ intervallum (60. ábra).

$$(7) \quad f(x) = -x^2$$

képe nyilván szintén parabola ((6) képéből az X tengelyre való tükrözéssel nyerhető (7) görbéje), és könnyen belátható, hogy

$$(8) \quad f(x) = ax^2$$

képe is parabola.

(8)-at ui. az $y = f(x)$ jelöléssel így is felírhatjuk:

$$y = \frac{1}{a} \left(\frac{x}{\frac{1}{a}} \right)^2$$

s innen látható, hogy (8) grafikonját $a > 0$ esetében (6), $a < 0$ esetében (7) képéből vízszintes és függőleges irányu $\frac{1}{a}$ -szoros nyújtással nyerhetjük. Ha ellenben egy görbét vízszintes és függőleges irányban is ugyanolyan mértékben megnyújtunk, nagyítást, ill. esetleg kicsinyítést végzünk, melynek során tehát görbénk változatlanul parabola marad.

Mivel (5) görbéje $y = a_2 x^2$ görbéjéből eltolással származtatható, szintén parabola. Az eltolás nagyságát meghatározhatjuk, ha az $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ polinomot egy elsőfoku polinom négyzetének és egy állandónak összegévé alakítjuk át (un. teljes négyzetté való átalakítás):

$$\begin{aligned}
 y &= a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_2 \left(x^2 + \frac{a_1}{a_2} x \right) + a_0 = \\
 &= a_2 \left(x + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2} + a_0 = \\
 &= a_2 \left(x + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 + \frac{4a_0 a_2 - a_1^2}{4a_2}.
 \end{aligned}$$

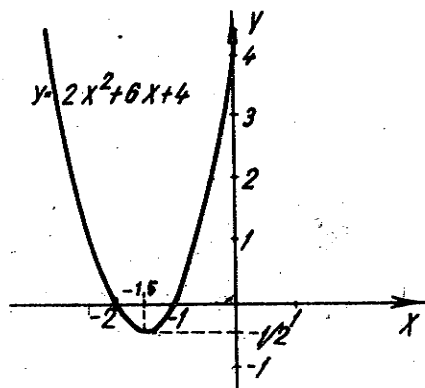
$y = a_2 x^2$ görbájéből (5) görbét tehát vízszintes irányu $\frac{a_1}{2a_2}$ nagyságu balra történő és $\frac{4a_0 a_2 - a_1^2}{4a_2}$ nagyságu függőleges irányu felfelé történő eltolással nyerhetjük. Pl.

$$y = 2x^2 + 6x + 4$$

még így is írható:

$$\begin{aligned}
 y &= 2(x^2 + 3x) + 4 = \\
 &= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 4 = \\
 &= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

s így függvényünk görbéje $y = 2x^2$ görbájéből vízszintes irányu $\frac{3}{2}$ nagyságu balra és függőleges irányu $\frac{1}{2}$ nagyságu lefelé történő eltolással nyerhető (75. ábra).

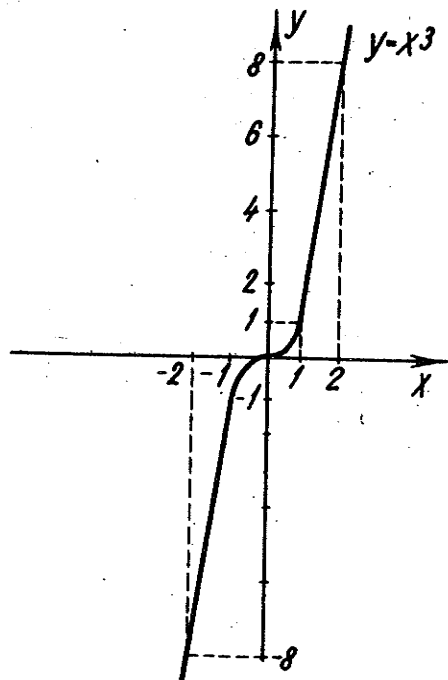


75. ábra

4^o A harmadfoku polinomok közül speciálisan csak az

$$y = x^3$$

függvénnyel foglalkozunk most. E függvény értelmezési tartománya a $(-\infty, +\infty)$, értékkészlete pedig ugyiszintén a $(-\infty, +\infty)$ intervallum. Szokás a függvény képét (76. ábra) harmadfoku parabolának is nevezni.

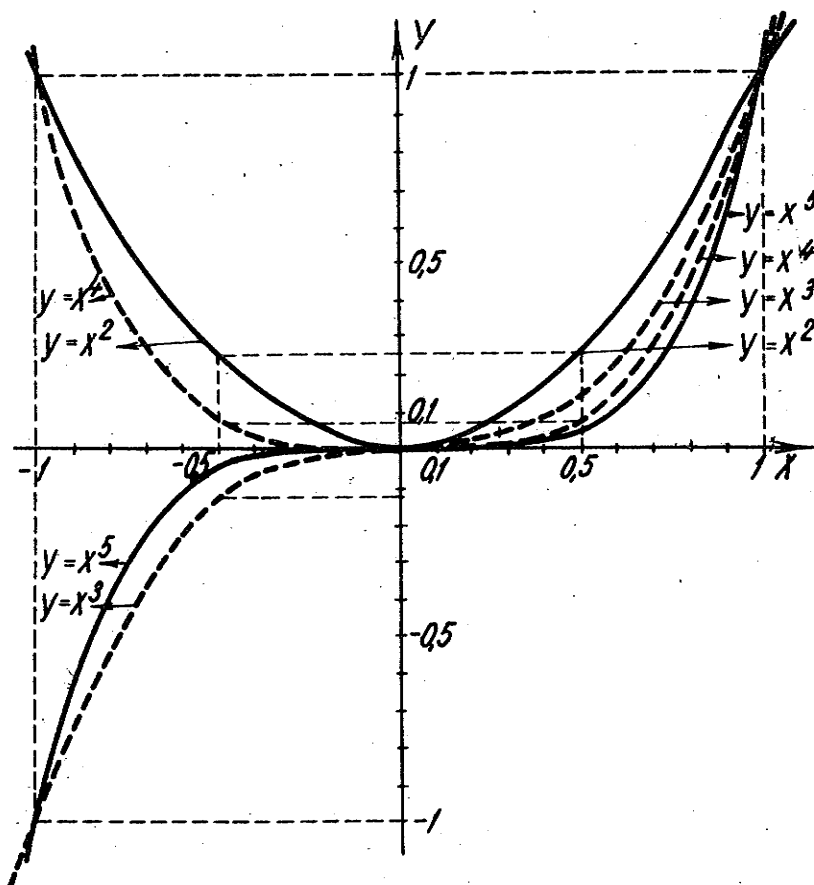


76. ábra

5^o Általánosságban az

(9) $y = x^n \quad (n=2, 3, 4, \dots)$

speciális n - edfoku polinom képe páros n esetén $y = x^2$, páratlan n esetén $y = x^3$ görbéjéhez hasonló menetű. Az n - edfoku polinomok görbéit ($n=2, 3, 4, \dots$) n -edfoku paraboláknak is szokták nevezni, röviden parabolának a másodfoku parabolát nevezve. A 77. ábrán az $y = x^n$ n -edfoku parabolákat $n=2, 3, 4, 5$ esetében rajzoltuk fel.



77. ábra

II. Racionális törtfüggvények

Az olyan függvényeket, amelyek két polinom hányadosaként írhatók fel:

$$(10) \quad f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m}$$

racionális függvényeknek nevezzük. Ha (10) - ben a nevező állandó, (10) racionális egészfüggvény, ha nem ez az eset áll fenn, racionális törtfüggvény. A racionális függvények tehát speciális esetként a racionális egészfüggvényeket is magukban foglalják. A racionális függvények nincsenek értelmezve azokon a helyeken, ahol nevezőjük 0.

Az alábbiakban csak néhány speciális racionális törtfüggvénnyel fogunk foglalkozni.

1^o Lineáris törtfüggvénynek nevezzük két elsőfoku polinom hányadosát:

$$(11) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Ez a függvény minden x - re értelmezve van, kivéve az

$$x = -\frac{d}{c}$$

helyet, ahol a nevező eltűnik.

(11) - ben az a, b, c, d állandókról feltesszük, hogy

$$c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0.$$

Ellenkező esetben ui. - mint később majd belátjuk - (11) lineáris függvény volna.

Foglalkozunk először a (11) - ből $a = d = 0, \frac{b}{c} = A$ jelöléssel speciálisan adódó

$$(12) \quad y = \frac{A}{x}$$

függvénnyel. (E függvény a fordított arányosság matematikai kifejezése.)

Az $y = \frac{1}{x}$ függvényt már ábráztuk, ennek képe egyenlőszáru hiperbola, amelynek aszimptotái a derékszögű XY koordinátarendszer tengelyei (61. ábra). Mivel $A > 0$ esetén (12) még így is írható:

$$y = \sqrt{A} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{A}}}{\frac{x}{\sqrt{A}}} \right)$$

tehát látható, hogy (12) görbéje $y = \frac{1}{x}$ görbéjéből $A > 1$ esetén $\sqrt{A}$ - szoros nagyítással vízszintes és függőleges irányban történő $\sqrt{A}$ - szoros nyújtással), ill. $0 < A < 1$ esetén $\sqrt{A}$ - szoros kicsinyítéssel (vízszintes és függőlegesirányu $\sqrt{A}$ - szoros összenyomással) áll elő, tehát szintén hiperbola. ($A < 0$ esetén a $-A = B$ jelöléssel $\sqrt{B}$ - szoros nagyítással, ill. kicsinyítéssel $y = -\frac{1}{x}$ görbéjéből tudjuk $y = \frac{A}{x} = -\frac{B}{x}$ görbét előállítani.)

Tudva mármost, hogy az $y = \frac{A}{x}$ függvény képe hiperbola, egyszerű átalakítással belátható, hogy az a, b, c, d -re tett kikötések mellett (11) képe is hiperbola. Elosztva ui. (11) - ben a számlálót a nevezővel, ill. egyszerű kiemeléseket végezve írhatjuk:

$$(13) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2 \left(x + \frac{d}{c}\right)},$$

tehát a

$$A = \frac{bc - ad}{2c}$$

jelöléssel (11), ill. (13) görbét az $y = \frac{A}{x}$ hiperbolából vízszintes irányu $\frac{d}{c}$ nagyságu balra történő és függőleges irányu $\frac{a}{c}$ nagyságu felfelé történő eltolással nyerhetjük, tehát hiperbolát nyerünk.

(13) -ből az is látható, miért kellett az a, b, c, d együtthatókra $a \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ kikötést tennünk. Ha ui. $c = 0$, (13) -ből

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d},$$

míg, ha $ad - bc = 0$, akkor

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c},$$

tehát mindkét esetben y egy lineáris függvénnyel egyezik meg az $x = -\frac{d}{c}$ hely kivételével.

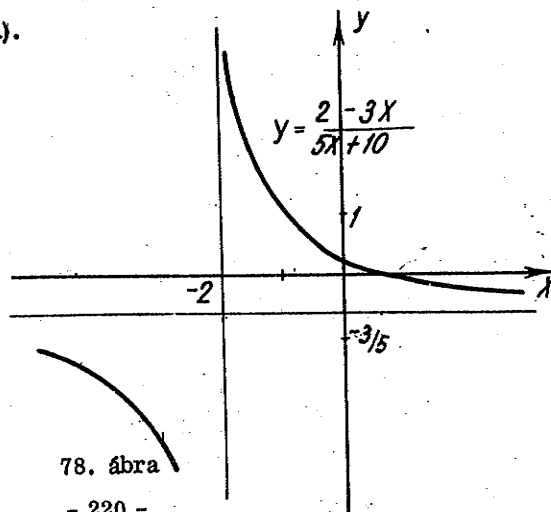
Ábrázoljuk pl. az

$$y = \frac{2 - 3x}{5x + 10}$$

függvényt. A függvény nincs értelmezve az $x = -2$ helyen, értelmezési tartománya tehát a $(-\infty, -2)$ és $(-2, +\infty)$ intervallum. Az előbb alkalmazott okoskodással függvényünk a következő alakban is felírható:

$$y = \frac{-3x + 2}{5x + 10} = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5(x+2)},$$

és így képe az $y = \frac{8}{5x}$ hiperbolából balra 2 egységgel és lefelé $\frac{3}{5}$ egységgel történő eltolással adódik (78. ábra).

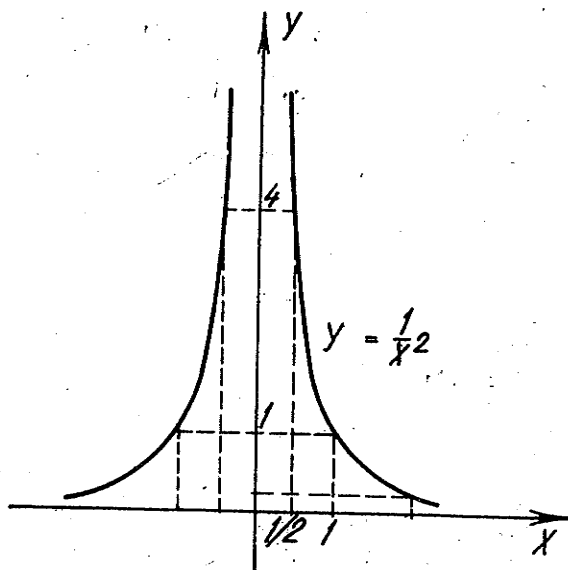


78. ábra

2^o További speciális racionális törtfüggvényként foglalkozunk röviden az.

$$y = \frac{1}{x^2}$$

függvénnyel. E függvény az $x = 0$ hely kivételével minden x - re értelmezve van, értékkészlete pedig a $(0, +\infty)$ intervallum. (79. ábra.)



79. ábra

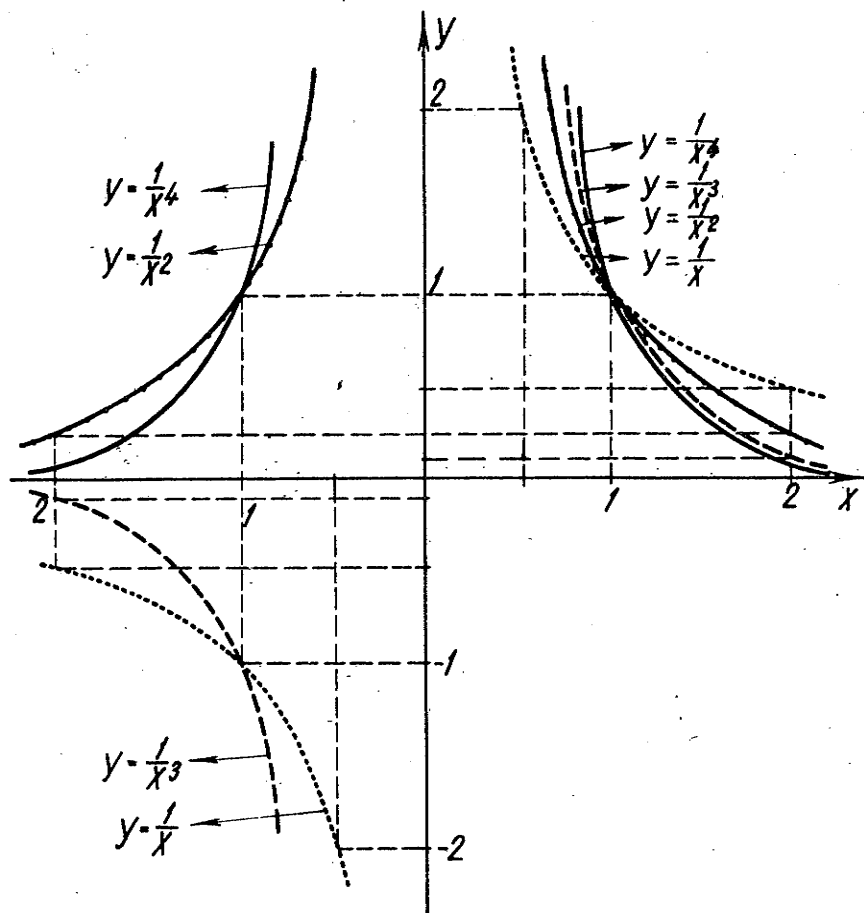
3^o Általánosságban az

$$(14) \quad y = \frac{1}{x^n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

függvények görbél páratlan n esetén az $y = \frac{1}{x}$, páros n esetén az $y = \frac{1}{x^2}$

függvény görbéjéhez hasonló menetűek.

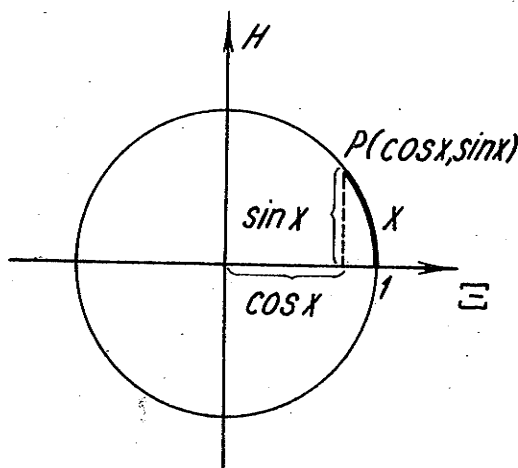
Közös tulajdonsága a (14) függvényeknek, hogy $x = 0$ kivételével minden x - re értelmezve vannak, a függvények értékkészlete azonban attól függően, hogy n páratlan vagy páros, a $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, vagy a $(0, +\infty)$ intervallum. A 80. ábrán $n=1, 2, 3, 4$ esetében rajzoltuk meg (14) képét. (lásd 222. old.)



80. ábra

24.) TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

Az eddig tárgyalt függvényeket valamilyen képlettel definiáltuk. Ebben a fejezetben a függvények egy nevezetes osztályával - az un. trigonometrikus függvényekkel - fogunk foglalkozni, melyeket nem képlettel, hanem geometriai úton értelmeztünk.



81. ábra

Vegyünk fel a síkban egy derékszögű koordinátarendszert. Rajzoljunk a koordinátarendszer kezdőpontja körül egységnyi sugárral kört (81. ábra). E körnek a x tengellyel való metszéspontjából kiindulva mérjük fel a kör kerületére x "irányított" távolságot, azaz ha x pozitív, mérjük fel az x távolságot az óramutató járásával ellenkező (un. pozitív) irányban, ha x negatív, mérjük fel az x távolságot az óramutató járásával megegyező (negatív) irányban. Az így nyert P pont abszcisszáját jelöljük $\cos x$ - szel, ordinátáját pedig $\sin x$ - szel. Ezen abszcisszáknak és ordinátáknak a szokásos módon előjelet tulajdonítunk, amiből következik, hogy ha az x ívnek megfelelő középponti szög (ennek nagysága radiánban mérve szintén x) hegyesszög, akkor szinusza és koszinusza is pozitív, ha azonban az x mérőszámu szög tompaszög, akkor szinusza pozitív, koszinusza negatív, stb.

Az egységkörre (pontosabban az egységnyi sugarú körvonalra) az $(x + 2\pi)$ távolságot felmérve - mivel 2π épp az egységkör kerületének hossza - ugyanarra a pontra jutunk az egységkörön, mintha x -et mértünk volna fel. Ezért

$$(1) \quad \cos(x + 2n\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2n\pi) = \sin x$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ezt a tulajdonságot úgy szokás kifejezni, hogy $\cos x$ és $\sin x$ 2π szerint periodikus függvények.

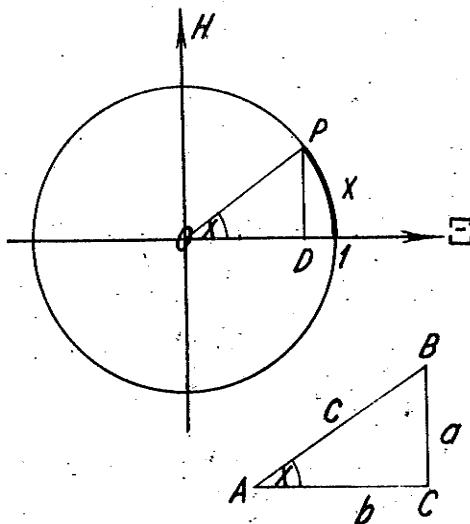
Ha x helyett $(x + \pi)$ -t mérjük fel, akkor az egységkörnek éppen átelles pontjára jutunk, ezért

$$(2) \quad \cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \sin(x + \pi) = -\sin x.$$

Hasonlóképp látható be, hogy

$$(3) \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Ha x hegyesszög, akkor rajzolhatunk olyan ABC derékszögű háromszöget, melynek egyik, A-nál lévő szöge éppen x . Az ABC és (a trigonometrikus függvények definíciójánál szereplő) OPD háromszögek hasonlósága miatt (82. ábra)



82. ábra

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}},$$

felhasználva tehát a már bevezetett

$$\overline{DP} = \sin x, \quad \overline{OD} = \cos x$$

jelöléseket, mivel $\overline{OP} = 1$, adódik, hogy

$$\sin x = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}.$$

Hasonlóképpen nyerjük:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

azaz

$$\cos x = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}.$$

Ez a két képlet azt jelenti, hogy egy derékszögű háromszögben $\sin x$ az x hegyesszöggel szembenfekvő befogó és az átfogó hányadosaként, $\cos x$ pedig az x hegyesszög mellett fekvő befogó és az átfogó hányadosaként számítható ki. Szokás ilyen módon is definiálni a $\sin x$ és $\cos x$ függvényeket, ez a definíció azonban csak hegyesszögekre

($0 < x < \frac{\pi}{2}$) definiálja a két függvényt, szemben az egységkörben való ábrázolásból nyert általános definícióval, amely x minden értéke mellett értelmezi az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ függvényeket.

Az egységkörben való értelmezésből következnek a $\sin x$ és $\cos x$ függvények között fennálló alábbi összefüggések:

Minthogy $\cos x$ és $\sin x$ a $\xi^2 + \eta^2 = 1$ egyenletű egységkörvonal egy pontjának koordinátái, azért

$$(4) \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

(Négyzetes összefüggés.)

Egyszerű okoskodással igazolhatók az ún. addíciós képletek:

$$(5) \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$(6) \quad \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$

$$(7) \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$(8) \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

(5), ill. (7) -ből (3) figyelembevételével azonnal adódik (6), ill. (8).)
 (5), ill. (7) -ben $x = y - t$ írva adódik:

$$(9) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$(10) \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Összevonva egymással a (4) és (10) képleteket 2-vel való osztás után a következő újabb összefüggésekre jutunk:

$$(11) \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$(12) \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Összeadva egymással az (5) és (6), ill. a (7) és (8), ill. kivonva (8) -ből a (7) képletet 2 - vel való osztás után a következő összefüggéseket nyerjük:

$$(13) \quad \sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin (x+y) + \sin (x-y)),$$

$$(14) \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos (x+y) + \cos (x-y)),$$

$$(15) \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos (x-y) - \cos (x+y)).$$

Az (5) - (15) összefüggéseket mind az (5) és (7) összefüggésből vezettük le. Elég azonban csak a (8) összefüggést igazolnunk, mert ebből (3) miatt (7), ebből pedig (5) már következik, hiszen a $\sin x$ és $\cos x$ függvények definíciója értelmében

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x, \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x,$$

azaz ha (8) fennáll

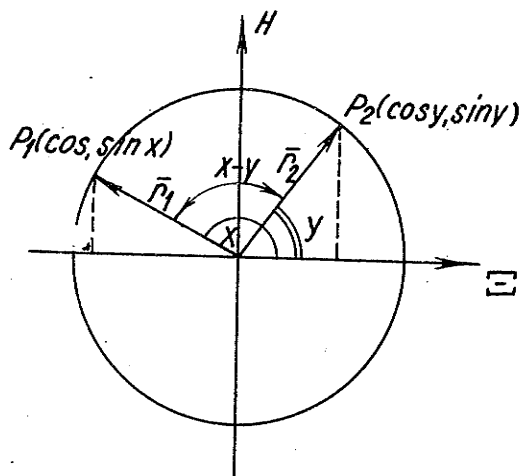
$$\begin{aligned} \sin (x + y) &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x - y \right) = \cos \left(\left(\frac{\pi}{2} - x \right) - y \right) = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos y + \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin y = \\ &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \end{aligned}$$

azaz (5) is igaz.

A (8) összefüggés igaz voltát vektorok segítségével bizonyítjuk:

$\cos (x - y)$ az

$$\vec{r}_1 = \vec{i} \cos x + \vec{j} \sin x,$$



83. ábra

és az

$$\vec{r}_2 = \vec{r} \cos y + \vec{j} \sin y$$

vektorok által bezárt szög koszinuszát jelenti (a 83. ábrán az $x > y$ esetet rajzoltuk fel), s így az $\vec{r}_1$ és $\vec{r}_2$ vektorok (e vektorok egységvektorok) segítségével könnyen kiszámítható (9.) fejezet 1^o):

$$\cos(x - y) = \vec{r}_1 \vec{r}_2 = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

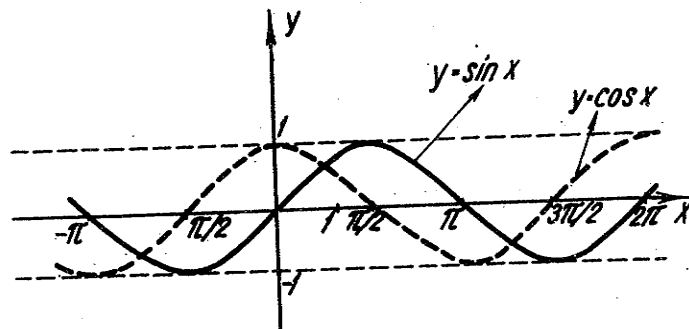
amit bizonyítani akartunk.

Ábrázoljuk ezek után az XY derékszögű koordinátarendszerben az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ függvényt. (Az X tengelyre mérjük fel az x szöget radiánban, az Y tengelyre pedig a megfelelő $\sin x$, ill. $\cos x$ értéket.) Az ábrázoláshoz megjegyezzük, hogy az értelmezésből folyik, hogy

$$|\sin x| \leq 1, \quad \text{ill.} \quad |\cos x| \leq 1,$$

tehát az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ függvények értelmezési tartománya a $(-\infty, +\infty)$, értékészlete pedig a $[-1, 1]$ intervallum. Néhány gyakran előforduló szám szinusza és koszinusza:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



84. ábra

(84. ábra). Az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ függvények menetének részletes vizsgálatára még visszatérünk.

A gyakorlatban sokszor használatos $\operatorname{tg} x$ függvényt a következőképp definiáljuk:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

$\operatorname{tg} x$ nincs értelmezve azokra az x értékekre, melyekre $\cos x = 0$, azaz $\frac{\pi}{2}$ páratlanszámú többszöröseire ($x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\operatorname{tg} x$ értelmezési tartománya tehát az egész számegyenes az $x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$ helyek kivételével.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ - re szorítkozva hasonlóképp látható be, mint azt a $\sin x$ és $\cos x$ függvények esetében tettük, hogy egy derékszögű háromszögben, melynek x hegyesszöge, $\operatorname{tg} x$ jelenti az x szöggel szembenfekvő befogó és az x szög mellett fekvő befogó hányadosát.

$y = \operatorname{tg} x$ π szerint periodikus függvény:

$$(16) \quad \operatorname{tg}(x + n\pi) = \operatorname{tg} x, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Valóban; (2) felhasználásával:

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Igaz továbbá:

$$(17) \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$

hiszen

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

(3) értelmében.

Többször fel fogjuk még használni a (4) négyzetes összefüggésből $\cos^2 x$ - szel való osztás révén előálló

$$(18) \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

összefüggést.

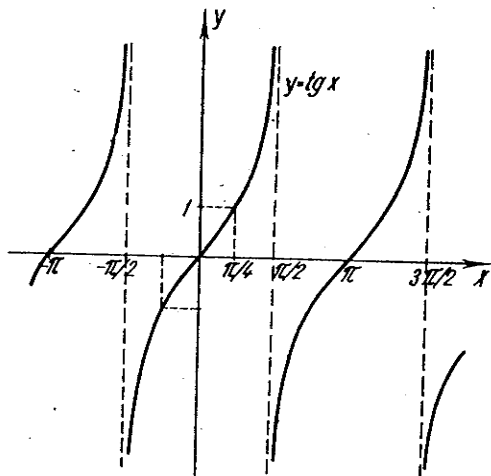
A $\operatorname{tg} x$ függvény reciprok értékét a $\operatorname{ctg} x$ jellel szokás jelölni, vagyis

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ez a szögfüggvény mindenütt értelmezve van, kivéve az $x = k\pi$ helyeket ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ahol $\operatorname{tg} x = 0$, ill. $\sin x = 0$. A $\operatorname{ctg} x$ függvény is π szerint periodikus.

Néhány gyakrabban előforduló szám tangense és kotangense:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nincs értelmezve	0	nincs értelmezve	0
ctg x	nincs értelmezve	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nincs értelmezve	0	nincs értelmezve



85. ábra

Az $y = \text{tg } x$ függvényt a 85. ábrán szemléltettük, a függvény menetének részletes vizsgálatára még visszatérünk.

A trigonometrikus függvényeknek sok fontos alkalmazása van a matematikában, a természettudományokban és a technikában. Szinte minden olyan problémánál, ahol periodikus jelenségekről van szó, előfordulnak.

A periodikus jelenségek közül legegyszerűbbek a harmonikus rezgések. Ezekben valamely mennyiség - például a rezgő pont távolsága az egyensúlyi helyzettől - a következő törvény szerint függ a t időtől:

$$(19) \quad y = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Az A állandót a rezgés amplitudójának nevezzük. $A - t$ mindig pozitívnak tekinthetjük, mert ha negatív lenne, akkor a rezgést az $y = -A \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi)$ összefüggéssel jellemeznénk. A adja azt a legnagyobb kitérést, melyet y elérhet, hiszen

$$|y| = |A \sin(\omega t + \varphi_0)| = |A| \underbrace{|\sin(\omega t + \varphi_0)|}_{\leq 1} \leq |A|.$$

$A - t$ szokás még a rezgés tágasságának is nevezni. (19) - ben a szinuszfüggvény argumentumát, $(\omega t + \varphi_0) - t$ a rezgés fázisának nevezzük, φ_0 értékét pedig, mely a fázis kezdeti, $t = 0$ - beli értéke, kezdeti fázisnak.

$\frac{\omega}{2\pi}$ neve: rezgésszám, vagy frekvencia, $\omega - t$ körfrekvenciának nevezzük.

A rezgésszám elnevezést az a kapcsolat indokolja, amely ω és a (19) függvény T periodusa (a rezgés periodusa) közt fennáll. Világos ugyanis, hogy függvényünk periodusa

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

hiszen

$$\begin{aligned} y(t + T) &= A \sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi_0\right] = \\ &= A \sin\left[\omega t + \varphi_0 + 2\pi\right] = \\ &= A \sin(\omega t + \varphi_0) = y(t), \end{aligned}$$

a szinuszfüggvény periodicitása miatt.

Az előbbiek értelmében tehát

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T},$$

s így az $\frac{\omega}{2\pi}$ hányados azt mutatja, hogy hány periodus jut az időegységre, azaz

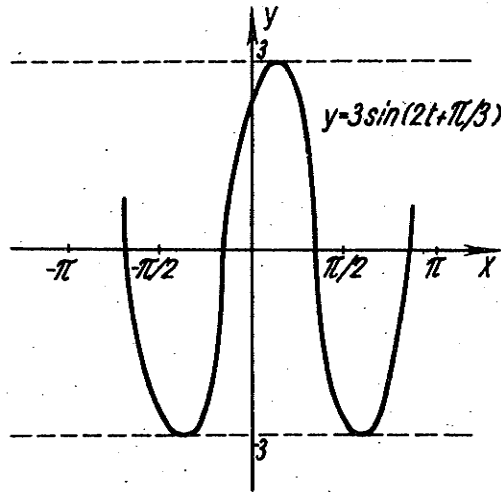
az időegység alatt az adott periódusu rezgés hányszor ismétlődik, tehát a rezgésszámot adja meg.

Ábrázoljuk pl. az $A = 3$ amplitúdójú, π periódusu, $\frac{\pi}{3}$ kezdőfázisu harmonikus rezgést leíró

$$(20) \quad y = 3 \sin \left(2t + \frac{\pi}{3} \right)$$

függvényt (ha a periódus $T = \pi$, akkor az ω körfrekvencia $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$).

(20) képét $y = \sin t$ görbéjéből $\frac{\pi}{3}$ - dal történő balra-tolással vízszintes irányú kétszeres összenyomással és 3 - szoros függőleges irányú nyújtással nyerjük (lásd 86. ábra).



86. ábra

Gyakran fordul elő harmonikus rezgések összege, azaz ilyen alaku függvény:

$$y = A_1 \sin (\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin (\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + A_n \sin (\omega_n t + \varphi_n).$$

Végezzon ugyanis egy pont $y_1 = A_1 \sin (\omega_1 t + \varphi_1)$ képlettel megadott harmonikus rezgést és hason rá még egy erő, amely a mozdulatlan pontot $y_2 = A_2 \sin (\omega_2 t + \varphi_2)$ alaku harmonikus rezgésre kényszerítené. Hogy meghatározassuk az összefüggést a pont y eredő kitérése és a t idő között, azaz,

hogy meghatározzuk az eredő mozgást, "szuperponálnunk" kell az összetevő rezgéseket:

$$y = y_1 + y_2 .$$

Általában

$$(21) \quad y = A_1 \sin (\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin (\omega_2 t + \varphi_2)$$

nem egyszerű harmonikus rezgés egyenlete, azaz nem $A \sin (\omega t + \varphi)$ alakú függvény. Mindig periodikus függvény azonban, ha a két összetevő rezgés periódusának viszonya racionális számmal adható meg, azaz

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_1}}{\frac{2\pi}{\omega_2}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{p}{q} ,$$

ahol p és q egész számok, és p és q legnagyobb közös osztója 1. Ekkor az eredő függvény periódusa:

$$T = T_1 q = T_2 p = \frac{2\pi \omega}{\omega_1 \omega_2} ,$$

ahol $\omega = \omega_1 p = \omega_2 q$ az eredő mozgás körfrekvenciája.

Pl. az

$$y_1 = 2 \sin 2x \quad \text{és} \quad y_2 = \sin \left(3x + \frac{\pi}{2} \right)$$

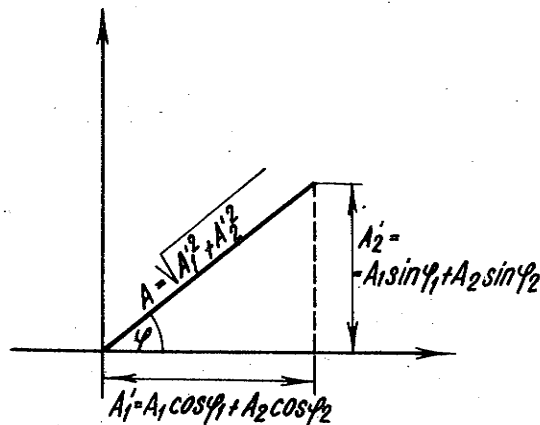
képlettel megadott harmonikus rezgések periódusának viszonya racionális $\left(\frac{3}{2} \right)$, így ezek összetételével adódó összetett harmonikus rezgés:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \sin 2x + \sin \left(3x + \frac{\pi}{2} \right)$$

periódikus, periódusa 2π .

Ha az összetevő rezgések frekvenciái (tehát az összetevő rezgéseket leíró függvények periódusai) megegyeznek, azaz a (21) - ben használt jelöléssel $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, akkor összegük nemcsak periódikus, hanem szinusz-függvény lesz, eredő rezgésünk tehát harmonikus, melynek körfrekvenciája ω , kezdőfázisa és amplitúdója pedig könnyen kiszámítható. Valóban az (5) addíciós képlet alkalmazásával:

$$\begin{aligned}
 y &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \\
 &= \underbrace{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)}_{A'_1} \sin \omega t + \underbrace{(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)}_{A'_2} \cos \omega t. \\
 &= A'_1 \sin \omega t + A'_2 \cos \omega t.
 \end{aligned}$$



87. ábra

Ha a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben az (A'_1, A'_2) pont polárszögét φ -vel jelöljük (87. ábra), akkor

$$\cos \varphi = \frac{A'_1}{\sqrt{(A'_1)^2 + (A'_2)^2}}, \text{ illetve } A'_1 = \sqrt{(A'_1)^2 + (A'_2)^2} \cos \varphi,$$

$$\sin \varphi = \frac{A'_2}{\sqrt{(A'_1)^2 + (A'_2)^2}}, \text{ illetve } A'_2 = \sqrt{(A'_1)^2 + (A'_2)^2} \sin \varphi.$$

Felhasználva ezeket az összefüggéseket és kiemelve a közös

$$A = \sqrt{(A'_1)^2 + (A'_2)^2}$$

tényezőt, nyerjük:

$$\begin{aligned}
 y &= A (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) = \\
 &= A \sin(\omega t + \varphi),
 \end{aligned}$$

ahol

$$A = \sqrt{(A'_1)^2 + (A'_2)^2} = \dots = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

az (A'_1, A'_2) pont polársugara, az eredő rezgés amplitudóját, míg φ , az (A'_1, A'_2) pont polárszöge, az eredő rezgés kezdeti fázisát adja meg:

$$\sin \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A}, \quad \cos \varphi = \frac{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}{A}.$$

Pl. az

$$y_1 = 2 \sin 2x, \text{ és } y_2 = 3 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

függvényekkel leírt harmonikus rezgőmozgások eredője

$$\begin{aligned} y &= 2 \sin 2x + 3 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= \left(2 + 3 \cos \frac{\pi}{3}\right) \sin 2x - 3 \sin \frac{\pi}{3} \cos 2x = \\ &= 3,5 \sin 2x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos 2x \approx 4,36 \sin (2x - 0,64). \end{aligned}$$

Ha az egyes harmonikus rezgőmozgások periódusának viszonya nem racionális, akkor az eredő összetett harmonikus rezgés még periódikus sem lesz.

25.) PERIODIKUS FÜGGVÉNY; PÁROS FÜGGVÉNY; PÁRATLAN FÜGGVÉNY; MONOTON FÜGGVÉNY; ÖSSZETETT FÜGGVÉNY; INVERZ FÜGGVÉNY

1^o Periodikus függvény

Definíció

Az $f(x)$ függvény periodikus és periódusa p , ha

$$(1) \quad f(x+np) = f(x), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

minden, a függvény értelmezési tartományába eső x helyre. Periodusnak azt a legkisebb p számot nevezzük, melyre (1) fennáll.

Pl. az

$$y = \sin x, \quad y = \cos x$$

függvény 2π szerint, az

$$y = \operatorname{tg} x$$

π szerint periodikus;

$$y = \cos \frac{x}{2}$$

periódusa 4π ,

$$y = |\sin x|$$

periódusa π .

A periodikus függvényeket általában nem teljes értelmezési tartományukban, hanem, amennyiben a periódus p , valamely $[x, x+p)$ intervallumban tesszük vizsgálat tárgyává.

2^o Páros és páratlan függvény

Definíció

Az $f(x)$ függvény páros, ha az értelmezési tartományába eső x helyekre

$$f(x) = f(-x).$$

Az $f(x)$ függvény páratlan, ha az értelmezési tartományába eső x helyekre

$$f(x) = -f(-x).$$

A definíció következménye, hogy egy páros $f(x)$ függvény görbéje az XY derékszögű koordináta-rendszer Y tengelyére, egy páratlan függvény görbéje pedig a koordináta-rendszer origójára nézve tükrös. (Páros függvény görbét az Y tengelyre, páratlan függvény görbét a koordináta-rendszer O kezdőpontjára tükrözve, az eredeti görbét kapjuk meg.)

Páros függvény például:

$$y = x^2, \quad y = x^4, \quad y = x^{2n} \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{1}{x^4}, \quad y = \frac{1}{x^{2n}} \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$y = \cos x, \quad y = |\sin x|, \quad y = |x|.$$

Páratlan függvény például:

$$y = x, \quad y = x^3, \quad y = x^{2n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{x^3}, \quad y = \frac{1}{x^{2n+1}} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$y = \sin x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{sg} x.$$

Valóban, pl.

$$y = \frac{1}{x^{2n}}$$

páros, mert

$$\frac{1}{(-x)^{2n}} = \frac{1}{(-1)^{2n} x^{2n}} = \frac{1}{x^{2n}}, \quad (n=1, 2, \dots),$$

és

$$y = \frac{1}{x^{2n+1}}$$

páratlan, mert

$$\frac{1}{(-x)^{2n+1}} = \frac{1}{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}} = -\frac{1}{x^{2n+1}}.$$

Páros, ill. páratlan függvényt elég csak $x > 0$ esetén vizsgálni, ebből már kiolvasható a függvény viselkedése $x < 0$ esetére.

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy a legtöbb függvény sem nem páros, sem nem páratlan, hogy csak egy példát említsünk:

$$y = x + 1$$

sem nem páros, sem nem páratlan függvény.

3^o Monoton függvény

Definíció

Az $f(x)$ függvény egy tetszőleges intervallumban monoton növekvő, ha az intervallum tetszőleges két x_1 és x_2 helyére $x_1 < x_2$ esetén mindig fennáll:

$$(1) \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Ha (1) - ben csak a $<$ jel áll, $f(x)$ - et szigorúan monoton növekedőnek mondjuk a vizsgált intervallumban.

Az $f(x)$ függvény egy tetszőleges intervallumban monoton fogyó, ha az intervallum tetszőleges két x_1 és x_2 helyére $x_1 < x_2$ esetén mindig fennáll:

$$(2) \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Ha (2) - ben csak a $>$ jel áll, $f(x)$ - et szigorúan monoton fogyónak mondjuk a vizsgált intervallumban.

Az előzőekben felsorolt függvények közül pl.

$y = x^2$ szigorúan monoton növekedő a $(0, +\infty)$ intervallumban,
szigorúan monoton fogyó, a $(-\infty, 0)$ intervallumban,

$y = x^3$ szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban,

$y = \operatorname{sgn} x$ monoton növekedő a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban,

$y = \sin x$ szigorúan monoton növekedő a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumban,

szigorúan monoton fogyó a $(\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})$ intervallumban,

$y = \cos x$ szigorúan monoton növekedő a $(-\pi, 0)$ intervallumban,
szigorúan monoton fogyó a $(0, \pi)$ intervallumban,

$y = \operatorname{tg} x$ szigorúan monoton növekedő a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumban.

Például az $y = \cos x$ függvényre tett monotonitási megállapításokat így bizonyíthatjuk:

$y = \cos x$ páros, elég tehát azt bizonyítanunk, hogy a $(0, \pi)$ inter-

vallumban szigoruan monoton fogyó, hiszen az

$$f(-x) = f(x)$$

összefüggésből következik ekkor már, hogy a $(-\pi, 0)$ intervallumban szigoruan monoton növekedő.

Legyen tehát

$$(3) \quad 0 < x_1 < x_2 < \pi;$$

tetszőleges (3) - nak eleget tevő x_1 és x_2 - re a 24.) fejezet (15) képletét alkalmazva írhatjuk:

$$(4) \quad \cos x_2 - \cos x_1 = 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} < 0,$$

hiszen $0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi$, $-\pi < \frac{x_1 - x_2}{2} < 0$, s így a $\sin x$ függvény előjelviszonyait figyelembe véve (4) - ben a jobboldalon az első tényező pozitív, a második pedig negatív. Ez azonban azt jelenti, hogy

$$\cos x_2 < \cos x_1,$$

tetszőleges $0 < x_1 < x_2 < \pi$ -re, tehát $\cos x$ szigoruan monoton fogyó $(0, \pi)$ - ben, amit bizonyítani akartunk.

4^o Összetett függvény

Gyakran fordul elő az az eset, hogy y valamely u változó függvényeként van megadva:

$$y = f(u),$$

az u változó pedig valamilyen x változónak a függvénye:

$$u = g(x).$$

Ekkor végeredményben y az x változó függvénye, mégpedig olyan függvénye, mely az u változó közvetítésével van megadva. Valóban, ha az $u = g(x)$ függvény értékészlete az $y = f(u)$ függvény értelmezési tartományába esik, akkor x minden szóbajövő értékéhez egy u , ehhez pedig y - nak egy meghatározott értéke tartozik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy y az x változónak összetett függvénye.

Az összetett függvényt többféleképpen is jelölhetjük: vagy röviden

$$y = f(g(x)),$$

vagy részletesebben kiírva:

$$y = f(u), \text{ ahol } u = g(x).$$

Összetett függvényre már az eddigiekben is láttunk tulajdonképpen példát:

$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ (harmonikus rezgőmozgás képlete), itt y a t változónak összetett függvénye, részletesebben kiírva:

$$y = A \sin u, \text{ ahol } u = \omega t + \varphi_0.$$

Más összetett függvény például:

$$y = \sin x^2, \text{ ill. részletesen kiírva: } y = \sin u, \quad u = x^2,$$

$$y = \sin^2 x, \text{ ill. részletesen kiírva: } y = u^2, \quad u = \sin x.$$

Tétel

Ha az $u = g(x)$ függvény az (a, b) intervallumban, $y = f(u)$ pedig a megfelelő $(g(a), g(b))$, ill. $(g(b), g(a))$ intervallumban monoton, akkor az $y = f(g(x))$ összetett függvény is monoton (a, b) -ben, és pedig monoton növekvő, ha $f(u)$ és $g(x)$ ugyanazon értelemben monoton (pl. mindkettő monoton fogyó), és monoton fogyó, ha $f(u)$ és $g(x)$ ellenkező értelemben monoton (pl. $f(u)$ monoton növekedő, $g(x)$ monoton fogyó).

A tétel igaz volta a monoton függvény definíciójából közvetlenül adódik.

5^o Inverz függvény

Legyen y az x függvényeként megadva:

$$(5) \quad y = f(x).$$

Amennyiben a függvény különböző x értékeknek különböző y értékeket feleltet meg, (ez bekövetkezik pl. ha $f(x)$ szigorúan monoton növekedő, vagy fogyó), y -t is tekinthetjük független változónak, s ekkor x lesz az y -nak függvénye:

$$(6) \quad x = \varphi(y).$$

Ha meg akarjuk határozni ez utóbbi függvényt, ill. függő változójára (x) kifejezve, explicit alakban akarjuk megadni, ki kell fejeznünk az (5) összefüggésből x -et y segítségével (más szavakkal, meg kell oldanunk az (5) egyenletet x -re, mint ismeretlenre). Általában y -nak x -től való függését más f függvény fejezi ki, mint amilyen φ függvény x -nek y -től való függését.

Az f és φ függvényeket egymás inverzének nevezzük. Ilyen inverz függvények pl.

$$y = x^3 \quad \text{és} \quad x = \sqrt[3]{y},$$

$$y = \frac{2}{x} + 1 \quad \text{és} \quad x = \frac{2}{y-1}.$$

Ha ezen függvényeket ugyanazon XY derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk, az inverz függvények görbéi láthatóan egybeesnek, csupán egyszer az X, máskor az Y tengely a független változó tengelye.

Miután megszokottabb a független változó jelölésére x -et, a függő változó jelölésére pedig y -t használni, a fenti példákban is az $y = x^3$, ill. $y = \frac{2}{x} + 1$ inverz függvényében y helyett x -et és x helyett y -t írva nyerjük:

$$y = x^3 \quad \text{inverze} \quad y = \sqrt[3]{x},$$

$$y = \frac{2}{x} + 1 \quad \text{inverze} \quad y = \frac{2}{x-1},$$

ill. általánosságban

$$y = f(x) \quad \text{inverze} \quad y = \varphi(x), \quad \text{ahol} \quad f(\varphi(x)) = x.$$

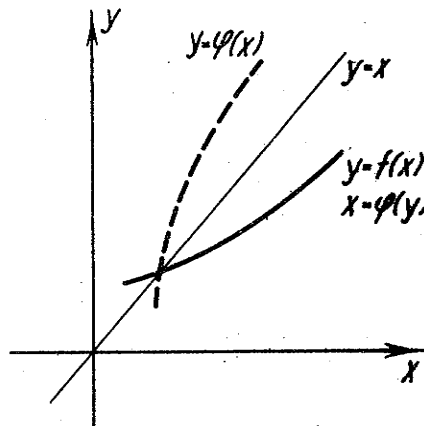
Általában valamely $y = f(x)$ függvény inverz függvényét úgy kapjuk meg, hogy a függvénykapcsolatban y -t tekintjük független, x -et pedig függő változónak. Ha sikerül az $y = f(x)$ függvénykapcsolatból x -et kifejezni, úgy az adódó $x = \varphi(y)$ függvény az inverz függvény explicit alakja (különbön csak implicit alakban tudjuk az inverz függvényt megadni). Akár explicit, akár implicit alakban van azonban az inverz függvény megadva, betűcserét szoktunk még végrehajtani, hogy az inverz függvényben is a függő és független változókat a szokásos y és x betűkkel jelölhessük. Így adódott általánosságban, hogy $y = f(x)$ inverze $y = \varphi(x)$, ahol $f(\varphi(x)) = x$. Az itt ismertetett eljárás a geometria nyelvén azt jelenti, hogy az inverz függvény képét az eredeti függvény grafikonjából az $y = x$ egyenesre való tükrözéssel nyerjük, mert az (x, y) és (y, x) pontok egymásnak az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükrörképei. (88. ábra.)

Ha az itt ismertetett eljárást formálisan az $y = x^2$ függvényre alkalmazzánk, inverz függvényként ($y = x^2$ -ből $x = \pm\sqrt{y}$)

(7)

$$y = \pm\sqrt{x}$$

adódna. Ez a függvény eltér az eddig tárgyalt függvényektől, amennyiben a függő változó egy meghatározott értékéhez általában két meghatározott függvényértéket rendel. Ez a tény abból következik, hogy $y = x^2$ ($-\infty, +\infty$) -ben nem monoton, ($-\infty, 0$) -ben monoton fogyó, $(0, +\infty)$ -ben monoton növekvő, páros függvény lévén azonban, általában két-két különböző (egymástól csak előjelben különböző) abszcisszához ugyanazt a függvényértéket rendel.



88. ábra

Általában az olyan függvényeket, amelyek a független változó egy értékéhez több meghatározott függvényértéket rendelnek, többértékű függvényeknek nevezzük. (7) tehát kétértékű függvény.

Függvény alatt a továbbiakban is mindig egyértékű függvényt fogunk érteni, vagyis olyan utasítást, mely a független változó szóbajövő értékeihez egy-egy meghatározott függvényértéket rendel. Amennyiben vizsgálataink esetleg többértékű függvényekhez vezetnének, a többértékű függvény egy egyértékű "ágát" választjuk ki, s a továbbiakban majd csak ezzel az "ággal" számolunk. Pl. az $y = \pm \sqrt{x}$ függvéynél az $y = +\sqrt{x} = \sqrt{x}$ egyértékű ággal számolunk.

Könnnyen belátható, hogy az

$$y = x^n \quad (x > 0) \text{ függvény inverze } y = \sqrt[n]{x}, \quad n=1, 2, \dots$$

$$y = \frac{1}{x^n} \quad (x > 0) \text{ függvény inverze } y = \sqrt[n]{\frac{1}{x}}, \quad n=1, 2, \dots$$

Meg kívánjuk még jegyezni, hogy páratlan függvény inverze is páratlan, páros függvény inverze azonban sem nem páros, sem nem páratlan.

26.) FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

1^o Tekintsük az

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$$

racionális függvényt. Az $x = 1$ helyen e függvény nincs értelmezve, mert nevezője e helyen 0. Mégis tapasztalható valami szabályosság a függvény viselkedésében az $x = 1$ hely közelében: egy-két próbálgatás meggyőz arról, hogy mennél közelebb választjuk $x -$ et az 1 értékhez, annál közelebb esik $f(x)$ értéke 2 - höz:

$$f(3) = 10, \quad f(2) = 5, \quad f(0) = 1, \quad f(0,5) = 1,25,$$

$$f(0,9) = 1,81, \quad f(1,1) = 2,21, \quad f(0,95) = 1,9025,$$

$$f(0,98) = 1,9604, \quad f(0,999) = 1,998001, \dots$$

Be lehet bizonyítani, hogy ha $x -$ et minden határon túl közelítjük 1 - hez, $f(x)$ minden határon túl megközelíti 2 - t. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ határértéke az 1 helyen 2 .

Definíció

Azt mondjuk, hogy $f(x)$ - nek az a helyen a határértéke A , ha bármely pozitív ε -hoz létezik olyan pozitív δ , hogy

$$(1) \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

E definíció annak az állításnak precíz megfogalmazása, hogy az a helyhez elég közeli $a -$ től különböző x helyeken $f(x)$ tetszőlegesen kevéssel tér el az A értéktől. Látható, hogy a definícióban magán az $x = a$ helyen felvett függvényérték nem szerepel, itt $f(x) -$ nek nem is kell értelmezve lennie. Benne foglaltatik azonban a definícióban, hogy $f(x)$ az $a -$ hoz elég közeli, $a -$ től különböző helyeken értelmezve van.

A 19.) fejezetben bevezettük a környezet fogalmát. Speciálisan lineáris pontthalmazok esetében a számegyenesen fekvő x_0 pont ε sugaru környezetén a számegyenesen az $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ intervallumba eső számok halmazát értettük. (1) - ben két környezet is szerepel, az A szám tetszőleges ε sugaru kör-

nyezete az a szám megfelelő δ sugaru környezete. A környezet fogalmának segítségével így adhatjuk meg a függvény határértékének definícióját:

(2) Definíció

Ha $y = f(x)$ értelmezve van az a hely egy környezetében (az a helyet kivéve) és A - nak minden V környezetéhez található a - nak olyan U környezete, hogy ha

$$x \in U \ (x \neq a), \text{ akkor } y = f(x) \in V,$$

akkor $f(x)$ határértéke az a helyen létezik és A - val egyenlő.

Akár első, akár második formájában megadott definíciónak geometriai átfogalmazás is adható. Ha ugyanis felrajzoljuk az $y = f(x)$ függvény görbét, a definíció értelmében tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ esetében a görbe pontjai az

$$A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$$

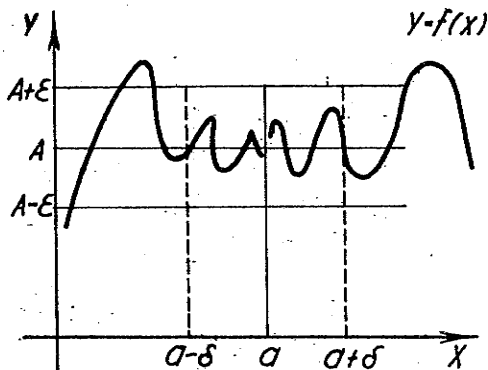
sávba ($A \pm \varepsilon$ sugaru V környezetébe) esnek, valahányszor a megfelelő abszcisszaértékek az a helynek alkalmas $\delta = \delta(\varepsilon)$ sugaru U környezetében, azaz az

$$(a - \delta, a + \delta)$$

intervallumban fekszenek ($x \neq a$), másképp felírva, ha

$$0 < |x - a| < \delta.$$

(89. ábra)



89. ábra

Példaként határozzuk meg, hogy az $x = 1$ hely milyen δ sugaru környezetébe eső x - ekre közelíti meg az

$$(3) \quad f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$$

függvény a 2 értéket

$$\varepsilon = 10^{-2}$$

- nál kisebb hibával.

Miután a határérték definíciójának értelmében kiköthetjük, hogy $x \neq 1$, egyszerűsíthetünk tehát (3) - ban $(x-1)$ -gyel, s így feladatunk megoldása az alábbi egyenlőtlenség megoldására vezet:

$$|(x^2 + 1) - 2| < 10^{-2}$$

a.) $x > 1$ esetében $x^2 - 1 > 0$, tehát egyenlőtlenségünk:

$$x^2 - 1 < 0,01, \text{ azaz } x < \sqrt{1,01}.$$

b.) $0 < x < 1$ esetében $x^2 - 1 < 0$, azaz egyenlőtlenségünk:

$$1 - x^2 < 0,01, \text{ tehát } x > \sqrt{0,99}.$$

(Az egyenlőtlenség megoldásánál az $x < 0$ esetet nem vizsgáltuk, miután vizsgálataink most az $x = 1$ hely közeli - kicsiny sugaru - környezetekre vonatkoznak.) Arra az eredményre jutottunk tehát, hogy

$$|(x^2 + 1) - 2| < 10^{-2},$$

ha

$$\sqrt{0,99} < x < \sqrt{1,01}.$$

Miután azonban az 1 helyhez $\sqrt{0,99}$ és $\sqrt{1,01}$ közül az utóbbi áll közelebb, mondható, hogy az $x = 1$ hely

$$\delta = \sqrt{1,01} - 1 \approx 0,00499$$

sugaru környezetében igaz, hogy:

$$|f(x) - 2| < 10^{-2}.$$

A függvény határértékének most bevezetett fogalma visszavezethető a sorozat határértékének ismert fogalmára a következő tétel segítségével:

Ahhoz, hogy $f(x)$ határértéke az a helyen A legyen, szükséges és elégséges, hogy valahányszor egy $x_1, x_2, \dots$ sorozatra $x_n \rightarrow a$, ($x_n \neq a$), mindannyiszor bizonyos n -től kezdve $f(x_n)$ létezzék és $f(x_n) \rightarrow A$ fennálljon.

Bizonyítás

A tételben kimondott feltétel szükséges. Valóban, ha adott pozitív ε -hoz megválasztható olyan δ , hogy

$$(4) \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ valahányszor } 0 < |x - a| < \delta,$$

és $x_n \rightarrow a$ ($x_n \neq a$), akkor van olyan N index, hogy

$$0 < |x_n - a| < \delta, \text{ valahányszor } n > N.$$

Ekkor azonban (4) értelmében

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon, \quad n > N \text{ esetén,}$$

s így valóban $x_n \rightarrow a$, ($x_n \neq a$), maga után vonja az

$$f(x_n) \rightarrow A$$

relációt.

A tételben kimondott feltétel azonban elégséges is. Ha ui. megfordítva $x_n \rightarrow a$ ($x_n \neq a$) mindig maga után vonja az $f(x_n) \rightarrow A$ relációt, akkor $f(x)$ határértéke az a helyen csak A lehet.

Tegyük fel ugyanis ezzel ellentétben, hogy alkalmas pozitív ε -hoz nem lehetne találni olyan megfelelő δ -t, hogy (4) kielégüljön, vagyis vannak olyan x_n helyek, melyekre

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ fennáll, de } |f(x_n) - A| \geq \varepsilon \quad (n=1, 2, \dots).$$

Ez azonban azt jelentené, hogy ezek az x_n -ek olyan a -hoz konvergáló abszcissza-sorozatokat alkotnak, amely abszcisszákhöz tartozó függvényértékek sorozatára $f(x_n) \rightarrow A$ nem áll, a tételben kimondott állítással ellentétben. Elmentmondásra jutva tehát, a tételben kimondott állítás megfordítása is igaz, a tételben kimondott feltétel valóban elégséges is.

E tételre emlékeztető módon azt a körülményt, hogy $f(x)$ határértéke az a helyen A így jelöljük:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \text{vagy} \quad f(x) \rightarrow A, \quad \text{ha} \quad x \rightarrow a.$$

²⁰ A számsorozatok határértékére vonatkozó tételekből (21.) fejezet, 1^o d.)) azonnal következnek a következő állítások:

Ha $x \rightarrow a$ esetén $f(x) \rightarrow A$, $g(x) \rightarrow B$, akkor

$$f(x) + g(x) \rightarrow A + B,$$

$$f(x) - g(x) \rightarrow A - B,$$

$$f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B,$$

és $B \neq 0$ esetén

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}.$$

Előző tételünk értelmében ui. bármely $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ a - hoz konvergáló abszcissza-sorozathoz az $f(x)$ és $g(x)$ függvények megfelelő helyettesítési értékeinek A , ill. B - hez konvergáló sorozata tartozik:

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots \rightarrow A,$$

$$g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n), \dots \rightarrow B.$$

Ez utóbbi két számsorozatra azonban már a 21.) fejezetben bebizonyított tételek értelmében áll, hogy

$$f(x_n) + g(x_n) \rightarrow A + B, \quad f(x_n) - g(x_n) \rightarrow A - B, \quad f(x_n) \cdot g(x_n) \rightarrow A \cdot B$$

és $B \neq 0$ esetén

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{A}{B}$$

ami - előbbi tételünk értelmében - állításunk igaz voltát mutatja.

3° Az $y = \operatorname{sg} x$ függvény esetében az $x = 0$ helyen nem beszélhetünk a függvény határértékéről, mivel az $x = 0$ környezetébe tartozó x - ekhez tartozó függvényértékek semmilyen A értéknek nem esnek tetszőlegesen kicsiny ε sugarú környezetébe, hiszen a függvényértékek -1 , vagy $+1$ - gyel egyenlők aszerint, hogy $x < 0$, vagy $x > 0$. Az $y = \operatorname{sg} x$ függvénynek általánosabb határértékéről beszélhetünk azonban az $x = 0$ helyen. Ha ui. kikötjük, hogy $x = 0$ -nak csak un. jobboldali környezeteibe, azaz $[0, \delta)$ ($\delta > 0$) intervallumba eső $x \neq 0$ értékekhez tartozó függvényértékeket vizsgálunk, ezen függvényértékek $+1$ - hez tartanak (ti. $x > 0$ esetén $|\operatorname{sg} x - 1| = |1 - 1| = 0$, s így nyilván tetszőleges $\varepsilon > 0$ - ra, $|\operatorname{sg} x - 1| < \varepsilon$, ha $0 < x < \delta$). Hasonlóképpen beszélhetünk $y = \operatorname{sg} x$ határértékéről az $x = 0$ helyen, ha kikötjük, hogy speciálisan legyen $x < 0$, vagyis $x = 0$ - nak csak un. baloldali környezeteibe, azaz $(-\delta, 0]$ ($\delta > 0$) intervallumokba eső $x \neq 0$ értékekhez tartozó függvényértékeket vizsgálunk. Ezen függvényértékek -1 - hez tartanak (ti. $x < 0$ esetén $|\operatorname{sg} x - (-1)| = |-1 + 1| = 0$, s így nyilván $|\operatorname{sg} x - (-1)| = |\operatorname{sg} x + 1| < \varepsilon$ tetszőleges $\varepsilon > 0$ - ra, ha $-\delta < x < 0$).

Általánosságban a következő definíciót adhatjuk meg:

Az $f(x)$ függvénynek az a helyen jobboldali határértéke A , ha bármely pozitív ε - hoz található oly pozitív δ , hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < x - a < \delta.$$

Az $f(x)$ függvénynek az a helyen baloldali határértéke A , ha bármely pozitív ε - hoz található oly pozitív δ , hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } -\delta < x - a < 0, \text{ (vagy } 0 < a - x < \delta \text{)}.$$

Azt, hogy $f(x)$ - nek az a helyen jobboldali határértéke A , így jelöljük:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A, \text{ vagy } f(x) \rightarrow A, \text{ ha } x \rightarrow a+0;$$

míg azt, hogy $f(x)$ - nek az a helyen baloldali határértéke A , így jelöljük:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A, \text{ vagy } f(x) \rightarrow A, \text{ ha } x \rightarrow a-0.$$

Az $f(x)$ függvény a helyen vett jobb- ill. baloldali határértékét szokás még $f(a+0)$, ill. $f(a-0)$ - val is jelölni. Speciálisan a $0+0$ jelölés helyett a $+0$, a $0-0$ jelölés helyett a -0 jelölést is használjuk. Pl.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{sg} x = \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sg} x = +1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{sg} x = \lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sg} x = -1.$$

Természetesen a jobb-, ill. baloldali határérték definícióját is megadhatjuk az 1^o második definíciójában megadott módon. Az a helyhez tartozó jobboldali határérték esetében ez pl. a következő:

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$, ha tetszőleges x_n ahzcisszasorozatra, melyre $x_n \rightarrow a$ és $x_n > a$, bizonyos indextől kezdve léteznek az $f(x_n)$ függvényértékek és $f(x_n) \rightarrow A$.

Az utóbbi definíció segítségével könnyű bebizonyítani alábbi állításunkat:

Az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen akkor és csakis akkor van határértéke, ha van jobb- és baloldali határértéke és ezek megegyeznek egymással.

Mivel pl. az $y = \operatorname{sg} x$ függvény jobb- és baloldali határértéke a 0 helyen nem egyezik meg egymással, nincs a függvénynek határértéke a 0 helyen.

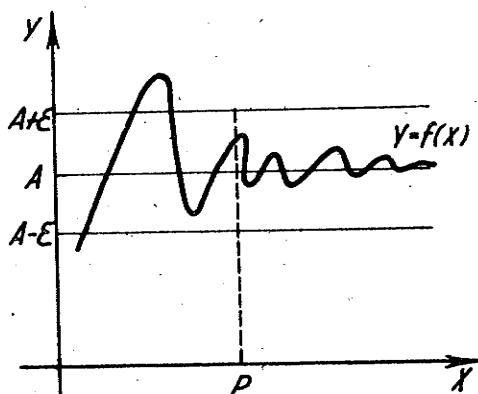
4° Beszélhetünk egy függvénynek a $+\infty$ -ben, ill. a $-\infty$ -ben vett határértékéről is. A $+\infty$ -ben vett határérték definíciója a következő:

Az $f(x)$ függvénynek a $+\infty$ -ben a határértéke A , ha bármely pozitív ε -hoz található olyan P , hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha csak } x > P.$$

$+\infty$ környezeteinek a $(P, +\infty)$ intervallumokat nevezve, definíciónk úgy is megfogalmazható, hogy amennyiben A -nak minden V környezetéhez található $+\infty$ -nek olyan U környezete, hogy ha $x \in U$ (azaz ha $x > P$), akkor $f(x) \in V$ (azaz $|f(x) - A| < \varepsilon$), azt mondjuk, hogy $f(x)$ -nek a $+\infty$ -ben a határértéke A .

Ezen utóbbi definíciónkat geometriailag könnyű szemléltetni: akármilyen keskenynek is adjuk meg az $y = A + \varepsilon$ és $y = A - \varepsilon$ egyenesek által határolt sávot, van olyan P szám, hogy az $y = f(x)$ görbe P -nél nagyobb abszcisszákhöz tartozó minden pontja az adott sáv belsejébe esik (90. ábra).



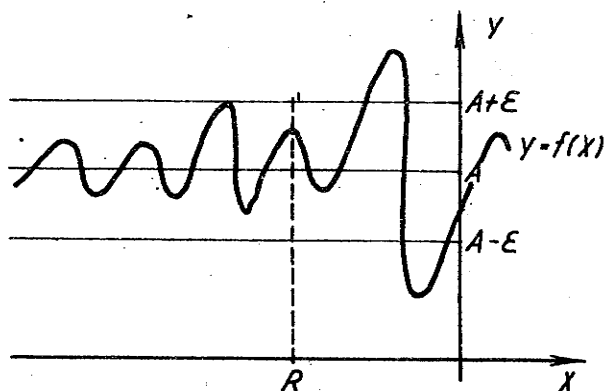
90. ábra

Az $f(x)$ függvénynek a $-\infty$ -ben a határértéke A , ha bármely pozitív ε -hoz található olyan R , hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha csak } x < R.$$

$-\infty$ környezeteinek a $(-\infty, R)$ intervallumokat nevezve, definíciónk azt mondja ki, hogy A -nak minden V környezetéhez található $-\infty$ -nek olyan U környezete, hogy ha $x \in U$, (azaz $x < R$), akkor $f(x) \in V$ ($|f(x) - A| < \varepsilon$).

Ezen definíció geometriai szemléltetését a 91. ábrán adtuk meg.



91. ábra

Azt, hogy $y = f(x)$ határértéke $+\infty$ - ben, ill. $-\infty$ - ben A , így jelölhetjük:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \text{ vagy } f(x) \rightarrow A, \text{ ha } x \rightarrow +\infty,$$

ill.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \text{ vagy } f(x) \rightarrow A, \text{ ha } x \rightarrow -\infty.$$

Pl.

$$y = \frac{2 - 3x}{5x + 10}$$

függvény esetében

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3x}{5x + 10} = -\frac{3}{5} \quad (\text{lásd 78. ábra})$$

és ugyanez a határérték adódik $x \rightarrow -\infty$ esetében is. Igazoljuk az (5) alatti állítást. Meg kell tehát nézni, milyen x - ekre lesz

$$\left| \frac{2 - 3x}{5x + 10} - \left(-\frac{3}{5}\right) \right| < \varepsilon.$$

Közös nevezőre hozás után, felhasználva, hogy nagy x - ekre $5x + 10 > 0$, s így $|5x + 10| = 5x + 10$, adódik:

$$\left| \frac{8}{5x + 10} \right| < \varepsilon,$$

és innen x - et kifejezve

$$x > \frac{8}{5\varepsilon} - 2.$$

Ha tehát $\varepsilon = 10^{-1}$,

$$\left| \frac{2-3x}{5x+10} - \left(-\frac{3}{5}\right) \right| < 10^{-1}, \text{ ha } x > \frac{80}{5} - 2 = 14,$$

ha $\varepsilon = 10^{-3}$

$$\left| \frac{2-3x}{5x+10} - \left(-\frac{3}{5}\right) \right| < 10^{-3}, \text{ ha } x > \frac{8000}{5} - 2 = 1598.$$

^{5°} Könnyen érthető az előzők alapján annak definíciója, hogy egy $f(x)$ függvénynek az a helyen $+\infty$, vagy $-\infty$ a határértéke. Itt a jelenthet egy véges értékét, de $+\infty$ -t, vagy $-\infty$ -t is. Például

Az $f(x)$ függvény határértéke a véges a helyen $+\infty$, ha bármely P számhoz található olyan pozitív δ , hogy

$$f(x) > P, \text{ ha csak } 0 < |x - a| < \delta.$$

E határértékre a következő jelölést vezetjük be:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

Beszélhetünk persze egyoldali végtelen határértékről is. Pl.

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény baloldali határértéke az a helyen $-\infty$, ha bármely R számhoz található olyan pozitív δ , hogy

$$f(x) < R, \text{ ha csak } 0 < a - x < \delta.$$

Ekkor a határértéket így jelöljük:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty.$$

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvénynek a $-\infty$ -ben a határértéke $+\infty$, ha bármely P számhoz található olyan R szám, hogy

$$f(x) > P, \text{ ha csak } x < R.$$

A végesben vett véges, végesben vett egyoldali véges, $+\infty$, ill. $-\infty$ -ben vett véges, vagy végtelen határértékre közös definíció adható a környezet fogalmának alkalmas általánosításával. Ezért az összes lehetséges határértékek definíciójának felsorolása helyett a környezet fogalmának - az előbbiekben már érintett - általánosításával foglalkozunk.

A végesben fekvő a hely környezete alatt az $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervallumokat értettük ($\varepsilon > 0$);

$a+0$ környezetei (a jobboldali környezetei) az $[a, a+\delta)$ intervallumok ($\delta > 0$),

$a-0$ környezetei (a baloldali környezetei) az $(a-\delta, a]$ intervallumok ($\delta > 0$)

$+\infty$ környezetei a $(P, +\infty)$ intervallumok,

$-\infty$ környezetei a $(-\infty, R)$ intervallumok.

Legyen mármost $\alpha = a, a+0, a-0, +\infty$, vagy $-\infty$,

$\beta = A, +\infty$, vagy $-\infty$.

Definíció

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$, ha f értelmezve van α -nak egy környezetében

($\alpha - t$ kivéve), és β minden V környezetéhez található α -nak olyan U környezete, hogy ha $x \in U$ ($x \neq \alpha$), akkor $f(x) \in V$.

Az itt elmondott definíció teljesülésének szükséges és elégséges feltétele a következő:

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$ akkor és csakis akkor áll, ha tetszőleges abszcisszasorozat

esetén, melyre $x_n \rightarrow \alpha$, $x_n \neq \alpha$ bizonyos indextől kezdve $f(x)$ értelmezési tartományához tartozik és $f(x_n) \rightarrow \beta$. (Itt $x_n \rightarrow a+0$ azt jelenti, hogy $x_n \rightarrow a$ és $x_n > a$, $x_n \rightarrow a-0$ jelentése pedig $x_n \rightarrow a$ és $x_n < a$.)

6° Határértékek kiszámításánál sokszor fel fogjuk használni az összetett függvény határértékének kiszámítására szolgáló alábbi fontos tételt:

Ha $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$, $\lim_{u \rightarrow \beta} g(u) = \gamma$ ($\alpha = a, a+0, a-0,$

$+\infty, -\infty, \beta, \gamma = A, +\infty, -\infty$) és α környezetében $x \neq \alpha$ esetén $f(x) \neq \beta$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(f(x)) = \gamma$$

Tételünket még egy kicsit tovább általánosíthatjuk, ha ui. - a fenti jelölésekkel - β véges, és $\lim_{u \rightarrow \beta} g(u) = \gamma$, akkor még kikötve, hogy α környezetében

$x \neq \alpha$ esetén, ha $u \rightarrow \beta+0$, $f(x) > \beta$, ill. ha $u \rightarrow \beta-0$, $f(x) < \beta$ akkor fennáll:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(f(x)) = \gamma.$$

Racionális függvények $+\infty$, ill. $-\infty$ helyen vett határértékének kiszámításánál jól használható az alábbi tétel:

Racionális függvény $+\infty$, ill. $-\infty$ helyen vett határértékének meghatározásánál a számlálónak és nevezőnek csupán legmagasabbfokú tagjait kell figyelembe venni.

Egyszerű átalakítással ugyanis:

$$\frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \cdot \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m} \frac{1}{x} + \dots + \frac{b_0}{b_m} \frac{1}{x^m}}$$

Ha $x \rightarrow +\infty$, vagy $x \rightarrow -\infty$, akkor a jobboldali második tényező 1 - hez tart, és így az egész függvény határértéke csakugyan megegyezik az

$$\frac{a_n x^n}{b_m x^m} \text{ hányados határértékével.}$$

Pl.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{3x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{3x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x^3} = 0.$$

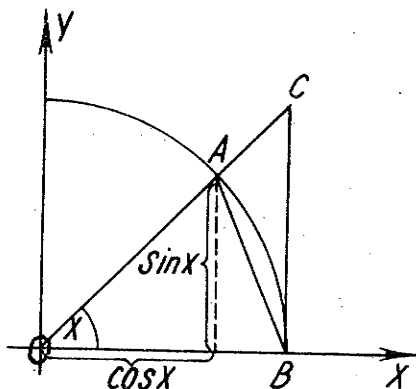
7^o Igen sok határérték-számítási feladatnál, levezetésnél használjuk fel az alábbi nevezetes határértéket:

(6)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Először azt fogjuk bebizonyítani, hogy az $y = \frac{\sin x}{x}$ függvénynek jobboldali határértéke a 0 helyen 1.

Tegyük tehát fel, hogy $x > 0$, vagyis x a pozitív számokon át tart 0 -hoz.

Legyen már $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ekkor a trigonometrikus függvények definíciójából folyólag a 92. ábra jelöléseivel az OAB háromszög, az OAB körívk és OCB háromszög területének összehasonlításával adódik ($\overline{OB} = 1$):



92. ábra

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} < \frac{1 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot \cos x}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sin x}$$

Ezen egyenlőtlenség-láncot $\frac{2}{\sin x} > 0$ - val végigszorozva adódik:

(7)

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Meg kell vizsgálnunk a $\lim_{x \rightarrow +0} \cos x$ határértéket.

Mivel $0 < x < \frac{\pi}{2}$ kiindulásul szolgáló egyenlőtlenségünk így módosítható:

$$0 < \sin x < x,$$

vagyis $x \rightarrow +0$ esetén $\sin x \rightarrow 0$. Mivel azonban

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

(24.) fejezet (12)) $x \rightarrow +0$ esetén

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \rightarrow 0$$

adódik, vagyis

$$1 - \cos x \rightarrow 0, \text{ ha } x \rightarrow +0,$$

és így $\cos x \rightarrow 1$, ill.

$$\frac{1}{\cos x} \rightarrow 1, \text{ ha } x \rightarrow +0.$$

(7) -ből tehát láthatjuk, hogy $x \rightarrow +0$ esetében $\frac{x}{\sin x}$ értékét, 1 -hez tartozó korlát közé szorítottuk, így tehát $\frac{x}{\sin x}$ határértéke $x \rightarrow +0$ esetében szintén csak 1 lehet. Felhasználva a törzfüggvény határértékének kiszámítására vonatkozó szabályt, adódik, hogy egyszersmind

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Mivel azonban $y = \frac{\sin x}{x}$ páros függvény ($\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$) a 0 helyhez tartozó baloldali határértéke is csak 1 lehet:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

s így az $x=0$ helyhez tartozó határérték a megegyező jobb- és baloldali határértékekkel egyenlő:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

amit igazolni akartunk.

Ezen eredményünket, továbbá az összetett függvény határértékének kiszámítására szolgáló tételt felhasználva könnyen adódnak az alábbi határértékek:

$$a.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$b.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\sin 3x}{3x}}{2 \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{2}.$$

$$c.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cos 4x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin x}{x}} = 4 \cdot \frac{1}{1} = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos 4x} = 4 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 4.$$

27.) FOLYTONOS FÜGGVÉNY

Ha valamely fizikai vizsgálat során számítást végzünk, akkor a számítás alapjául szolgáló kiindulási adatok rendszerint mérés eredményei, és így a valódi értékektől többé-kevésbé eltérnek. A számítás elvégzésére elvi alapot az a feltevés ad, hogy ha a kiindulási adatok kevéssel térnek el a tényleges értékektől, akkor a számítás eredménye is kevéssel fog eltérni a keresett mennyiség valódi értékétől, és pedig mennél pontosabbak a kiindulási adatok, annál pontosabb lesz az eredmény.

Pl. az $y = 3x + 4$ függvénynek az $x = \sqrt{2}$ helyen felvett értékét úgy próbálhatjuk kiszámítani, hogy az $x = 1,4$, $x = 1,41$, $x = 1,414$, ... értékeket helyettesítjük be a függvénykapcsolatba és azzal a feltevessel élünk, hogy a kapott függvényértékek: $y = 8,2$, $y = 8,23$, $y = 8,242$, ... minden határon túl megközelítik az $x = \sqrt{2}$ helyen felvett függvényértéket.

E feltevés a legegyszerűbb esetben - amikor egyetlen kiindulási adat szerepel - pontosan megfogalmazva annyit jelent, hogy ha a kiindulási adatot x - szel, a számításnak ettől függő eredményét $f(x)$ - szel jelöljük, akkor az $f(x)$ függvény olyan tulajdonságu legyen, hogy ha x elég közel van a kiindulási adat valódi b értékéhez, akkor $f(x)$ is tetszőlegesen közel legyen a valódi $f(b)$ értékhez. Az e tulajdonsággal rendelkező függvényt nevezik folytonosnak.

Definíció

Az $f(x)$ függvényt folytonosnak mondjuk a b helyen, ha bármely pozitív ε - hoz található olyan pozitív δ , hogy fennálljon

$$|f(x) - f(b)| < \varepsilon, \text{ ha } |x - b| < \delta.$$

Világos, hogy fenti definícióinkat még így is megfogalmazhatjuk (a fenti definícióval ekvivalens az alábbi definíció):

Az $f(x)$ függvény folytonos a b helyen, ha ott van határértéke és ez megegyezik az $f(b)$ függvényértékkel.

Részletesebben kiírva, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $f(x)$ függvény az $x = b$ helyen folytonos legyen az, hogy

- 1.) $f(b)$ létezzék,
- 2.) $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ létezzék,

$$3.) f(b) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) \text{ legyen.}$$

E definícióból és a határértékre vonatkozó tételekből rögtön következnek az alábbi tételek:

I. Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonosak a b helyen, akkor ugyanitt

$$f(x) + g(x); \quad f(x) - g(x); \quad f(x) \cdot g(x);$$

és $g(b) \neq 0$ esetén

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

is folytonosak.

II. Ha az $u = g(x)$ függvény értékkészlete az $y = f(u)$ függvény értelmezési tartományába esik, $g(x)$ a b helyen, $f(u)$ pedig a $g(b)$ helyen folytonos, akkor az $f(g(x))$ összetett függvény is folytonos a b helyen.

Ha ui. $x_1, x_2, \dots$ olyan tetszőleges abszcisszasorozat, melyre $x_n \rightarrow b$, akkor a $g(x)$ függvény b - beli folytonossága miatt $g(x_n) \rightarrow g(b)$, tehát az $f(u)$ függvény $g(b)$ - beli folytonossága miatt $f(g(x_n)) \rightarrow f(g(b))$, amit a tételben állítottunk.

Minthogy az $f(x) = \text{állandó}$ és $f(x) = x$ függvények nyilván folytonosak, azért a polinomok mindenütt folytonosak, a racionális függvények pedig csak ott nem folytonosak, ahol nevezőjük 0 , tehát ahol nincsenek értelmezve.

Könnyen bizonyítható a trigonometrikus függvények folytonossága is. Bizonyítsuk be, hogy $y = \sin x$ tetszőleges x helyen folytonos (az összetett függvények folytonosságára vonatkozó tétel felhasználásával, mivel $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, ebből már az $y = \cos x$ függvény, ill. a racionális függvények folytonosságának felhasználásával az $y = \operatorname{tg} x$ függvény folytonossága következik.).

Bizonyítandó tehát, hogy bármely x - re, tetszőleges $\varepsilon > 0$ - ra

$$|\sin(x+h) - \sin x| < \varepsilon,$$

valahányszor $|(x+h) - x| = |h|$ már elég kicsi: $|h| < \delta$.

Az előző fejezetben a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határérték kiszámításánál szerepelt a következő összefüggés:

$$0 < \sin x < x,$$

amiből $x \rightarrow +0$ esetében adódott, hogy $\lim_{x \rightarrow +0} \sin x = 0$, ill. az $y = \sin x$ függvény páratlansága miatt $\lim_{x \rightarrow -0} \sin x = -0 = 0$, s így mondhatjuk: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. Mivel

azonban $\sin(0) = 0$, eredményünket így foglalhatjuk össze:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0,$$

vagyis az $y = \sin x$ függvény az $x = 0$ helyen folytonos.

Ezt felhasználva a 24.) fejezet (13) összefüggését alkalmazva adódik:

$$(*) \quad |\sin(x+h) - \sin x| = 2 \left| \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \right| \left| \sin \frac{h}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{h}{2} \right|,$$

($\cos(x + \frac{h}{2})$ értéke -1 és $+1$ között változik), és mivel $\sin \frac{h}{2}$ értéke az $y = \sin x$ függvény $x = 0$ pontbeli folytonossága miatt tetszőlegesen kicsinnyé tehető, ha h már elég kicsiny, vagyis pl. tetszőlegesen $\varepsilon > 0$ - ra

$$\left| \sin \frac{h}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ha } |h| < \delta,$$

(*) értelmében

$$|\sin(x+h) - \sin x| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ ha } |h| < \delta,$$

amit bizonyítani akartunk.

Definíció

Az $f(x)$ függvényt a b helyen jobbról folytonosnak nevezzük, ha $f(x)$ - nek van a b helyen jobboldali határértéke és ez megegyezik az $f(b)$ függvényértékkel.

Az $f(x)$ függvényt a b helyen balról folytonosnak nevezzük, ha $f(x)$ - nek van a b helyen baloldali határértéke és ez megegyezik az $f(b)$ függvényértékkel.

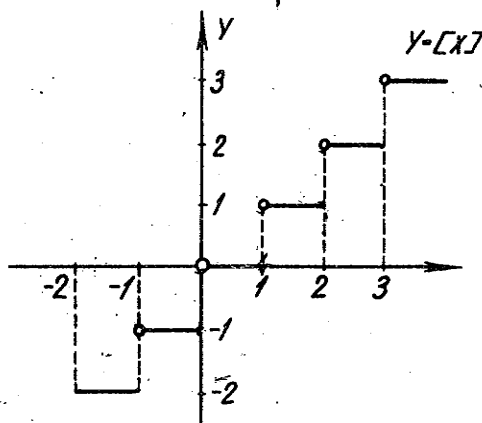
Pl. az $y = \operatorname{sg} x$ (65. ábra) függvény az $x = 0$ helyen sem jobbról, sem balról nem folytonos, mert van ugyan jobb- és baloldali határértéke ($+1$, ill. -1) de ezek közül egyik sem egyezik meg a $\operatorname{sg} 0 = 0$ függvényértékkel.

Ha az $y = f(x)$ függvény x - hez mint $f(x)$ függvényértéket azt a legnagyobb egész számot rendeli, mely nem nagyobb, mint x (e függvényt így is szokás jelölni: $y = [x]$), ez a függvény az egész abszcisszáju helyeken jobbról folytonos, balról azonban nem folytonos (lásd 93. ábra). (lásd 258. old.)

Ha egy $f(x)$ függvény az $x = b$ helyen jobbról és balról is folytonos, akkor nyilván folytonos.

Ha $f(x)$ a b helyen nem folytonos, akkor szakadásosnak nevezzük. A szakadás leggyakoribb esete, mikor $f(x)$ - nek van a b helyen véges határértéke, de az nem egyenlő $f(b)$ - vel, esetleg a b helyen $f(x)$ nincs is értelmezve. Ez esetben azt mondjuk, hogy $f(x)$ b - beli szakadása megszüntethető, mert ha a b helyen $f(x)$ értelmezését megváltoztatjuk, vagy alkalmasan kiegészítjük (ugy, hogy $f(b)$ egyenlő legyen $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ - vel), akkor $f(x)$ a b helyen folytonossá válik.

$x \rightarrow b$



93. ábra

Pl. az

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x-1}$$

függvénynek az $x = 1$ helyen megszüntethető a szakadása, mert $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x-1)$ folytán $x \neq 1$ esetén $f(x) = x^2 + 1$, a függvénynek tehát az $x = 1$ helyen van határértéke ($\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$), úgyhogy a függvény értelmezését az

$f(1) = 2$ megállapodással kiterjesztve:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x-1}, & \text{ha } x \neq 1, \\ 2, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

folytonos lesz az $x = 1$ helyen. Ezzel a módosítással az $f(x)$ függvényből az $x = 1$ helyen is folytonos $g(x)$ függvényt állítottuk elő, és nyilván

$$f(x) = g(x) \quad (\text{ha } x \neq 1).$$

Ugyancsak egyszerű esete a szakadásnak, ha $f(x)$ - nek a b helyen van véges jobb- és baloldali határértéke, de ezek különböznek egymástól. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ -nek a b helyen ugrása van, Pl.

az $y = \operatorname{sg} x$ függvénynek (65. ábra) az $x = 0$ helyen ugrása van; mert:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sg} x = +1, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sg} x = -1 \neq +1,$$

Az $y = [x]$ függvénynek minden egész számú helyen ugrása van, mert pl. az $x = 2$ helyen

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} [x] = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1 \neq 2,$$

tehát van a függvénynek véges jobb- és baloldali határértéke és e két határé. is különböző.

Tétel

Monoton függvénynek más szakadása, mint ugrása, nem lehet.

Bizonyítás

Legyen $f(x)$ az (a, b) intervallumban pl. monoton növekedő, és $x_0 \in (a, b)$. Ekkor az $a < x < x_0$ helyeken felvett $f(x)$ függvényértékek halmaza felülről korlátos, egy felső korlátja mindenesetre $f(x_0)$. E számhalmaz felső határát A -val jelölve bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan x_1 , hogy $a < x_1 < x_0$ és $f(x_1) > A - \varepsilon$, s akkor $x_1 < x < x_0$ esetén $A - \varepsilon < f(x) \leq A$. Eszerint $A = f(x_0 - 0)$. Ugyanígy látható be, hogy $f(x_0 + 0)$ is létezik és egyenlő az (x_0, b) intervallumban felvett függvényértékek halmazának alsó határával, s hogy ennek a számhalmaznak egy alsó korlátja $f(x_0)$. Így $f(x_0 - 0)$ és $f(x_0 + 0)$ létezik és véges, továbbá $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$. Ebből az állítás rögtön adódik.

Hasonló a bizonyítás monoton fogyó függvény esetén.

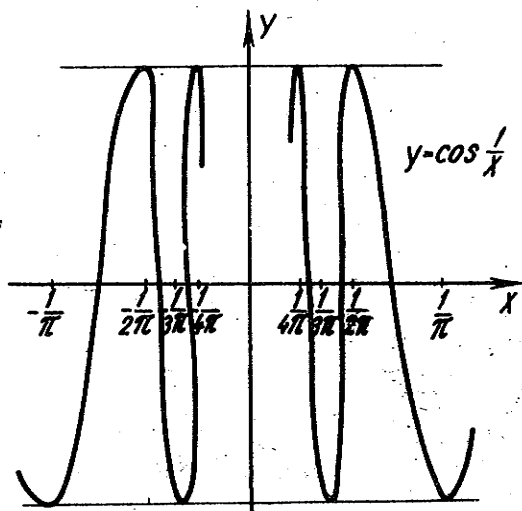
Az itt végzett okoskodás mintájára látható be a következő tétel is:

Ha $f(x)$ (a, b) -ben monoton növekvő (fogyó), akkor létezik $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ és

egyenlő $-\infty$ -nel ($+\infty$ -nel) vagy $f(x)$ (a, b) -beli értékkészletének alsó (felső) határával aszerint, hogy ez az értékkészlet alulról (felülről) nem korlátos vagy korlátos; ugyanígy $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ egyenlő $+\infty$ -nel ($-\infty$ -nel)

vagy $f(x)$ (a, b) -beli értékkészletének felső (alsó) határával aszerint, hogy ez az értékkészlet felülről (alulról) nem korlátos vagy korlátos.

Ismét másjellelű szakadása van pl. az $y = \frac{1}{x}$, vagy az $y = \frac{1}{2}$ függvénynek az $x = 0$ helyen. Vagy pl. az $y = \cos \frac{1}{x}$ függvényt vizsgálva az $x = 0$ hely környezetében, mivel az $x = \frac{1}{2k\pi}$ helyeken $+1$, az $x = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ helyeken -1 értéket vesz fel ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), látható, hogy a függvénynek az $x = 0$ helyen nincsen sem jobb-, sem baloldali határértéke. (94. ábra).



94. ábra

Definíció

Az $f(x)$ függvény az (a, b) nyílt intervallumban folytonos, ha annak minden pontjában folytonos.

Az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos, ha az (a, b) nyílt intervallumban folytonos, az a helyen pedig jobbról, a b helyen pedig balról folytonos.

Ha az a helynek van olyan $(a - \delta, a + \delta)$ környezete, hogy $f(x)$ e környezet minden helyén folytonos, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ az a hely környezetében folytonos.

Abból, hogy egy függvény az a helyen folytonos, még nem következik, hogy a szóbanforgó függvény az a hely környezetében is folytonos. Pl. az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális szám,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális szám} \end{cases}$$

függvény a 0 helyen folytonos, de bármely 0 -tól különböző helyen szakadásos. Ha ui. bármely 0 -hoz konvergáló abcisszasorozatot tekintünk, a megfelelő függvényértékek sorozata is 0 -hoz, $f(x)$ $x = 0$ helyhez tartozó helyettesítési értékéhez konvergál; $f(x)$ a 0 helyen valóban folytonos. Bármely más $a \neq 0$ helyre azonban, ha speciálisan a racionális számokból álló abcisszasorozattal tartunk a -hoz, a megfelelő függvényértékek sorozata a -hoz, míg speciálisan irracionális számokból álló abszcisszasorozattal tartva a -hoz, a megfelelő függvényértékek sorozata -a -hoz konvergál, így tehát $f(x)$ -nek nincs az $a \neq 0$ helyen határértéke, tehát ott nem is folytonos. Mivel tehát $f(x)$ csak a 0 helyen folytonos, 0 környezetében már nem folytonos.

A folytonos függvények alaptulajdonságait az alábbi tételekben foglalhatjuk össze:

Bolzano tétele

Ha $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumban, akkor itt felvesz minden, az $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket.

Bizonyítás

Legyen c egy, az $f(a)$ és $f(b)$ függvényértékek közé eső érték és tegyük fel, hogy például

$$f(a) < c < f(b).$$

Vizsgáljuk most az $[a, b]$ intervallum azon x helyeinek halmazát, amely x helyeken

$$f(x) < c$$

(ilyen x hely például az a hely).

Ezen x helyek halmaza felülről korlátos (b biztosan egy felső korlát), a 20.) fejezetben kimondott tétel alapján van tehát felső határa. Jelöljük ezt x_0 -al. Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$f(x_0) = c,$$

tehát meg tudunk adni olyan x_0 helyet $[a, b]$ -ben, ahol a függvény épp a c értéket veszi fel, amivel a Bolzano-tételt be is bizonyítottuk.

Ha $f(x_0) < c$ állna, akkor x_0 -tól jobbra is volnának c -nél kisebb függvényértékkel bíró helyek, mivel $f(x)$ $[a, b]$ -ben, és így az x_0 helyen is folytonos, ami ellentmond annak, hogy x_0 azoknak az x helyeknek felső

határa, amelyeken $f(x) < c$. Ha azt tesszük fel, hogy $f(x_0) > c$, akkor x_0 egy egész környezetében is fenn kellene, hogy álljon az $f(x) > c$ egyenlőtlenség, tehát azon x -ek halmazának, melyekre $f(x) < c$, volna x_0 -nál kisebb felső korlátja, s mivel x_0 ezen x -ek halmazának felső határa volt, ez lehetetlen. Így tehát csak

$$f(x_0) = c$$

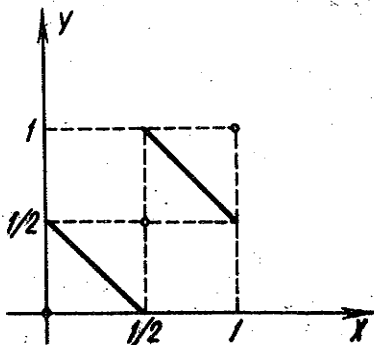
állhat, amivel bizonyításunkat be is fejeztük.

A Bolzano-tételnek egyszerű következménye, hogy ha valamely $[a, b]$ intervallumban folytonos függvénynek az a és b helyeken felvett értékei ellenkező előjelű számok, akkor legalább egy olyan $a < x < b$ helynek kell lennie, ahol $f(x) = 0$.

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy a tétel megfordítása nem igaz. Abból, hogy $f(x)$ $[a, b]$ -ben minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti függvényértéket felvesz, általában még nem következik, hogy a függvény folytonos $[a, b]$ -ben. Pl. értelmezzük $[0, 1]$ -ben az $f(x)$ függvényt a következőképpen:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0, \\ \frac{1}{2} - x, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2} - x, & \text{ha } \frac{1}{2} < x < 1, \\ 1, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

(95. ábra) Ez a függvény minden a 0 és 1 közé eső értéket felvesz a $[0, 1]$ intervallumban, de a 0, $\frac{1}{2}$ és 1 helyeken nem folytonos.

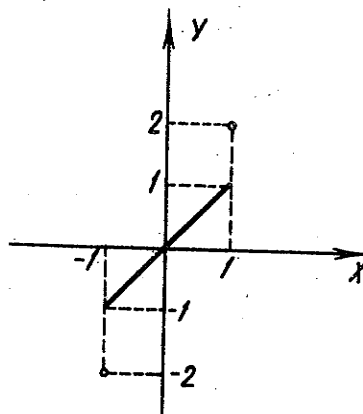


95. ábra

Ha az $f(x)$ függvény az (a, b) (nyílt) intervallumban folytonos csak, a Bolzano tétel állítása általában már nem igaz. Pl. az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ 2, & \text{ha } x = 1, \\ -2, & \text{ha } x = -1 \end{cases}$$

függvény, amely $[-1, 1]$ -ben nem folytonos, csak $(-1, 1)$ -ben folytonos, nem teljesíti a Bolzano tétel állítását.



96. ábra

Weierstrass tétele

Ha $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumban, akkor van itt olyan α ill. β hely, hogy $f(\alpha)$ az egész $[a, b]$ intervallumban a legnagyobb, $f(\beta)$ az egész $[a, b]$ intervallumban a legkisebb függvényérték.

Bizonyítás

Először bebizonyítjuk, hogy a tett feltevések mellett $f(x)$ korlátos $[a, b]$ -ben.

Ha ui. $f(x)$ $[a, b]$ -beli értékkészlete pl. felülről nem volna korlátos, akkor volnának $[a, b]$ -ben olyan $x_1, x_2, \dots$ helyek, melyeken $f(x_1) > 1$, $f(x_2) > 2$,

$\dots$, $f(x_n) > n$, $\dots$ fennállna; mivel azonban az $x_1, x_2, \dots$ számsorozat

korlátos, a Bolzano-Weierstrass-tétel (lásd 21.) fejezet) szerint kiválasztható belőle egy konvergens részsorozat:

$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots \rightarrow x_0$, és ez az x_0 pont nyilván az $[a, b]$ intervallumhoz tar-

tozik, tehát x_0 -ban $f(x)$ folytonos, ami ellentmond annak, hogy $x_{n_k} \rightarrow x_0$ és

$f(x_{n_k}) \rightarrow +\infty$. $f(x)$ tehát tényleges korlátos.

Mivel $f(x)$ $[a, b]$ -ben korlátos, beszélhetünk $[a, b]$ -beli értékkészletének A alsó és F felső határáról. Megmutatjuk, hogy van $[a, b]$ -ben olyan α , ill. β hely, hogy $f(\alpha) = F$ és $f(\beta) = A$. Ha ui. pl. az F értéket nem venné fel $f(x)$ $[a, b]$ -ben, akkor az $\frac{1}{F - f(x)}$ nem-negatív függvény $[a, b]$ -ben folytonos, és tételünk már bebizonyított része értelmében korlátos volna: $\frac{1}{F - f(x)} < K$. Ebből azonban $F - f(x) > \frac{1}{K}$ következne, tehát F -nél kisebb felső korlátja is volna $f(x)$ $[a, b]$ -beli értékkészletének, ami ellentmond feltevésünknek, így tehát állításunkat igazoltuk.

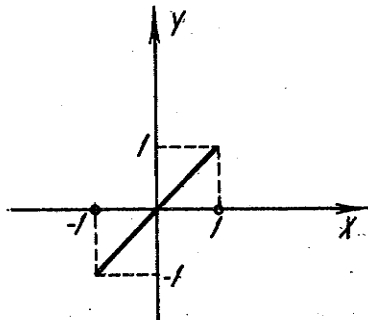
Weierstrass tételét röviden még úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $[a, b]$ -ben folytonos $f(x)$ függvény $[a, b]$ -beli értékei között van egy maximális és egy minimális. (Arra, hogy hol, és hány helyen veszi fel ezeket az értékeket a függvény, a tétel nem ad választ.)

A Weierstrass-tétel állítása az (a, b) (nyílt) intervallumban folytonos $f(x)$ függvényre általában már nem igaz.

Pl. az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{ha } x = 1, \\ 0, & \text{ha } x = -1 \end{cases}$$

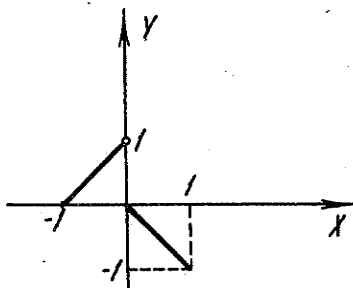
függvény (97. ábra) a tétel állítását nem teljesíti.



97. ábra

A $(0, +\infty)$ intervallumban folytonos $y = \frac{1}{x}$ függvény sem veszi fel sehol sem $(0, +\infty)$ -ben legnagyobb, ill. legkisebb értékét.

Ugyanakkor bizonyos esetekben szakadós függvénynek is lehet legnagyobb, ill. legkisebb értéke valamely zárt intervallumban. Pl. az



98. ábra

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ha } -1 \leq x \leq 0, \\ -x, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

függvény szakadásos a $[-1, 1]$ intervallumban, és mégis $f(0) = 1$, ill. $f(1) = -1$ $[-1, 1]$ - beli legnagyobb, ill. legkisebb értéke.

Az a körülmény, hogy $f(x)$ (a, b) - ben folytonos, azt jelenti, hogy (a, b) minden pontjában folytonos, vagyis ezen intervallum bármely x_0 helyére vonatkozóan minden pozitív ε - hoz található olyan megfelelő $\delta > 0$, hogy

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ ha csak } |x - x_0| < \delta.$$

(a, b) különböző pontjaihoz ugyanazon ε mellett azonban nyilvánvalóan általában különböző δ értékek tartoznak.

Be fogjuk bizonyítani, hogy ha $f(x)$ az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos, akkor adott $\varepsilon > 0$ -hoz megválasztható egy olyan közös $\delta > 0$ szám, amely az intervallum minden pontjára nézve megfelelő. Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy zárt intervallumban folytonos függvény ott egyenletesen folytonos. Pontosabban igaz az alábbi tétel:

Ha $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumban, akkor bármely pozitív ε -hoz található olyan pozitív δ , hogy ha α és β $[a, b]$ - be esnek és $|\alpha - \beta| < \delta$, akkor $|f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon$.

Bizonyítás

Tegyük fel a tétel állításával ellentétben, hogy alkalmas $\varepsilon > 0$ - hoz nem lehet a tételnek megfelelő δ -t találni, tehát vannak $[a, b]$ -ben olyan $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \dots \alpha_n, \beta_n; \dots$ pontpárok, amelyekre

$$|\alpha_1 - \beta_1| < 1 \text{ és } |f(\alpha_1) - f(\beta_1)| \geq \varepsilon,$$

$$|\alpha_2 - \beta_2| < \frac{1}{2} \text{ és } |f(\alpha_2) - f(\beta_2)| \geq \varepsilon,$$

$$|\alpha_n - \beta_n| < \frac{1}{n} \text{ és } |f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq \varepsilon.$$

Az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ számsorozat korlátos, tehát van konvergens részsorozata (Bolzano-Weierstrass tétel, 21.) fejezet): $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \dots, \alpha_{n_k}, \dots \rightarrow \alpha$ és α is $[a, b]$ -ben van. Az $|\alpha_n - \beta_n| < \frac{1}{n}$ egyenlőtlenséget azonban így is felírhatjuk:

$$\alpha_n - \frac{1}{n} < \beta_n < \alpha_n + \frac{1}{n},$$

vagyis a 21.) fejezet 1^o g.) - ben bebizonyítottak értelmében $\beta_{n_k} \rightarrow \alpha$,
ugyhogy $f(x)$ α -beli folytonossága miatt

$$f(\alpha_{n_k}) \rightarrow f(\alpha), f(\beta_{n_k}) \rightarrow f(\alpha),$$

ami ellentmond az

$$|f(\alpha_{n_k}) - f(\beta_{n_k})| \geq \varepsilon$$

feltevésnek. Ellentmondásra jutva, állításunkat igazoltuk.

Könnyű példát mutatni arra, hogy ezen utóbbi tétel sem érvényes nyílt intervallum esetén. Pl. az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény a $(0, 1)$ nyílt intervallumban folytonos. E függvényre

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = \left| \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} \right|.$$

Adjuk meg az $\varepsilon > 0$ számot, és legyen $\alpha = \frac{\varepsilon}{n}$, $\beta = \frac{\varepsilon}{n+1}$. Ekkor

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = \frac{\left| \frac{\varepsilon}{n} - \frac{\varepsilon}{n+1} \right|}{\frac{\varepsilon^2}{n(n+1)}} = \frac{1}{\varepsilon} > 1 > \varepsilon, \text{ ha csak } \varepsilon < 1.$$

Tehát, ha n elég nagy, a 0 hely bármely környezetében van két olyan egymáshoz tetszőlegesen közel fekvő α és β hely, hogy az $|f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon$ egyenlőtlenség nem érvényes.

A Bolzano-tétel felhasználásával könnyen igazolhatjuk az alábbi tételt:

Ha $y = f(x)$ egy (tetszőleges típusu) I intervallumban folytonos és szigorúan monoton, akkor értékkészlete egy J intervallum, és $x = \varphi(y)$ inverz függvénye a J intervallumban folytonos és (az $f(x)$ -ével azonos értelemben) szigorúan monoton függvény.

Bizonyítás

Legyen pl. $f(x)$ I -ben szigorúan monoton növekvő. Ha $f(x)$ I -ben korlátos, legyen értékkészletének alsó és felső határa m ill. M . Ekkor $m < y < M$ esetén van I -ben olyan x_1 és x_2 hely, hogy $f(x_1) < y < f(x_2)$, és Bolzano tétele szerint (amely $f(x)$ feltételezett folytonossága miatt alkalmazható) x_1 és x_2 között, tehát ugyancsak I -ben olyan x hely is, ahol $f(x) = y$.

Igy $f(x)$ értékkészlete tartalmazza a (m, M) intervallumot, s ezenfelül ennek egyik vagy mindkét végpontját is tartalmazhatja, m -nél kisebb vagy M -nél nagyobb értéket azonban m és M értelmezése szerint nem. Így ez az értékkészlet egy m és M végpontu (nyílt, vagy félig zárt, vagy zárt) intervallum. Hasonlóan adódik, hogy ha $f(x)$ I -ben alulról korlátos, felülről nem, akkor értékkészlete az $(m, +\infty)$ vagy az $[m, +\infty)$ intervallum, ahol m ismét az értékkészlet alsó határa. Felülről korlátos, alulról nem korlátos $f(x)$ esetén az értékkészlet $(-\infty, M)$ vagy $(-\infty, M]$ típusu intervallum, sem alulról, sem felülről nem korlátos $f(x)$ esetén pedig $(-\infty, +\infty)$.

Jelöljük J -vel az $f(x)$ I -beli értékkészletét alkotó intervallumot. $f(x)$ szigorú monotonitása miatt I különböző helyein különböző értékeket vesz fel, úgyhogy létezik a J -ben értelmezett $x = \varphi(y)$ inverz függvény. Ez is szigorúan monoton növekvő, hiszen ha $y_1 \in J$, $y_2 \in J$, $y_1 < y_2$, akkor $x_1 = \varphi(y_1) < \varphi(y_2) = x_2$, mert $x_1 \geq x_2$ esetén $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ adódnék. De $\varphi(y)$ monotonitásából már következik folytonossága is. Valóban, ha $\varphi(y)$ nem volna J -ben mindenütt folytonos, akkor valahol ugrása volna, és az ugrás helyén vett bal- és jobboldali határértéke közötti intervallum számai (legfeljebb egy kivétellel) nem tartoznának értékkészletéhez, holott $\varphi(y)$ értékkészlete J -ben az $f(x)$ függvény I értelmezési tartományával azonos, vagyis egy intervallummal, amelyből egyetlen közbeeső hely sem maradhat ki.

28.) DIFFERENCIÁLHÁNYADOS

Tekintsünk egy egyenes pályán mozgó pontot. Ha a pont mozgása egyenletes, azaz ha egyenlő időtartamok alatt egyenlő utakat tesz meg, akkor sebességét úgy kaphatjuk meg, hogy bizonyos t időtartam alatt megtett útjának s mérőszámát elosztjuk az időtartam hosszának mérőszámával:

$$c = \frac{s}{t}.$$

Általában azonban a mozgások nem egyenletesek. Meg szeretnők például állapítani, milyen sebességgel fut a 100 m - es síkfutás valamelyik versenyzője a cél előtt 10 m - rel. Evégből járjunk el a következőképp:

Állítsunk fel több megfigyelőt a versenypálya mellett azzal a megbízással, hogy stopperórájukkal állapítsák meg pontosan, melyik pillanatban haladt el előttük a versenyző. A megfigyelőket a jövőben röviden $M_0, M_1, M_2, \dots$ - vel fogjuk jelölni, a stopperórájuk által jelzett időt pedig $t_0, t_1, t_2, \dots$ - vel. Megállapodunk abban, hogy a távolságot mindig méterben, az időt pedig másodpercben mérjük.

Álljon M_0 a P pontban a cél előtt 10 m - rel (azaz a rajttól 90 m - re), s jelezze órája a $t_0 = 13,8$ időt; álljon M_1 a cél előtt 20 m - rel (tehát a rajttól 80 m - re), s jelezze órája a $t_1 = 12,4$ időt. Nyilván a

$$\frac{80 - 90}{12,4 - 13,8} = \frac{10}{1,4} \approx 7,14$$

hányados nem adja meg pontosan a versenyző sebességét a P pontban, hiszen az utolsó méterek befutása alatt nyilván gyorsított. Ez az érték csak közelítő, átlag-sebességnek tekinthető az M_0 és M_1 megfigyelők közötti szakaszon.

Nyilván pontosabban kapjuk meg a kiszámítandó sebesség értékét, ha az M_0 és a cél előtt 3 m - re felállított M_2 megfigyelő adatait vesszük figyelembe. Legyen $t_2 = 14,6$, ekkor

$$\frac{97 - 90}{14,6 - 13,8} = \frac{7}{0,8} = 8,75.$$

Ha M_0 és M_3 (a cél előtt 7 m - rel álló megfigyelő) adatait vesszük figye-

lembe ($t_3 = 14, 2$), akkor a

$$\frac{93 - 90}{14,2 - 13,8} = \frac{3}{0,4} = 7,5$$

P pontbeli közelítő sebességértéket kapjuk.

Nyilván annál pontosabban kapjuk meg a versenyző P pontbeli sebességének értékét, minél közelebb hozzuk az M_0 megfigyelőhöz a másik megfigyelőt.

A P pontbeli sebességet nyilván az M_0 és M_1 , M_0 és M_2 , M_0 és M_3 , ... megfigyelők mérési adataiból nyert közelítő sebességértékek

$$7,15, \quad 8,75; \quad 7,5, \quad \dots$$

sorozatának határértéke fogja megadni.

Pontosabban megfogalmazva: ha az egyes megfigyelők által jelzett időt $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ - nel, a rajttól az egyes megfigyelőkhöz terjedő utat (mivel az ut az idő függvénye: $s = s(t)$) $s(t_0), s(t_1), s(t_2), \dots, s(t_n), \dots$ - nel jelöljük, akkor a P pontbeli közelítő sebességértékek

$$\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}, \quad \frac{s(t_2) - s(t_0)}{t_2 - t_0}, \quad \dots, \quad \frac{s(t_n) - s(t_0)}{t_n - t_0}, \quad \dots$$

sorozatának határértéke, midőn $t_n \rightarrow t_0$ szolgáltatja a P pontbeli sebességet. Jelben:

$$[v]_P = \lim_{t_n \rightarrow t_0} \frac{s(t_n) - s(t_0)}{t_n - t_0}.$$

Természetesen a megfigyelőknek minden határon túl egymáshoz való közelítése a gyakorlatban nem végezhető el. Elvben azonban egymáshoz tetszőleges közel álló megfigyelőket is elképzelhetünk és gondolatban beszélhetünk a $t_n \rightarrow t_0$ határátmenetről.

Tekintsünk egy másik példát. Változó intenzitású áram feltölt egy kondenzátort. Minden t időpillanatban meg tudjuk mondani, mennyi elektromos töltést szállított az áram addig a kondenzátorba. Ki akarjuk számítani, hogy adott t_0 pillanatban mekkora az áram intenzitása.

Egyenáram intenzitását megkaphatjuk, ha valamely időtartam alatt szállított elektromos töltés mérőszámát elosztjuk az időtartam hosszával. Jelöljük a t_n időpillanatig szállított töltések nagyságát $q(t_n)$ - nel. Ha tehát a $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$ - nel jelölünk bizonyos, a t_0 pillanathoz közel fekvő pillanatokot, a

$$\frac{q(t_1) - q(t_0)}{t_1 - t_0}, \quad \frac{q(t_2) - q(t_0)}{t_2 - t_0}, \dots, \frac{q(t_n) - q(t_0)}{t_n - t_0}, \dots$$

hányadosok, melyek - mivel az áram intenzitása változó - közelítőleg adják csak meg az áram t_0 pillanatbeli intenzitását, $t_n \rightarrow t_0$ esetén határértékben szolgáltatják majd a t_0 pillanatbeli áramintenzitás pontos értékét:

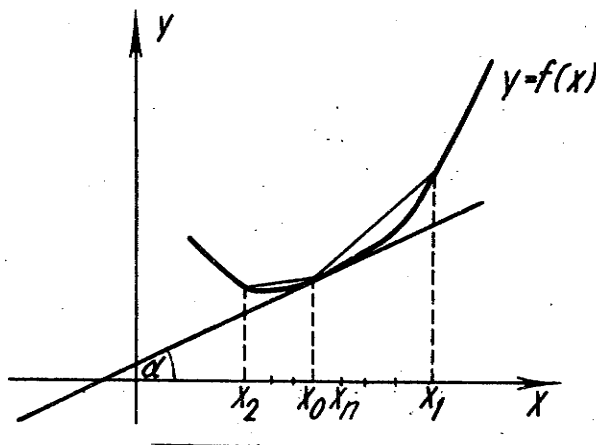
$$i(t_0) = \lim_{t_n \rightarrow t_0} \frac{q(t_n) - q(t_0)}{t_n - t_0}.$$

Utolsó példaként határozzuk meg az $y = f(x)$ függvény görbéjének meredekségét az $x = x_0$ abszcisszájú pontban. (A függvény görbéjének meredeksége az $x = x_0$ abszcisszájú P pontban a függvény görbéjéhez a P pontban húzott érintő meredeksége.)

Az x_0 és x_1 , x_0 és x_2 , ..., x_0 és x_n , ... abszcisszájú pontokhoz tartozó szelő meredeksége:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}, \dots, \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}, \dots$$

A 99. ábrán ábrázolt függvény esetében azt látjuk, hogy $x_n \rightarrow x_0$ esetében a



99. ábra

szelők egyre inkább megközelítik az $y = f(x)$ függvény $x = x_0$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőt, s így a keresett érintő meredeksége:

$$\operatorname{tg} \alpha = m = \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}.$$

A fenti gondolatmenetek közös matematikai tartalma a következő:

Ha $f(x)$ az a hely környezetében értelmezett függvény, akkor $f(x)$ változásának gyorsaságát az a -és x értékek közötti intervallumban az

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

hányados méri. Ha e hányadosnak $x \rightarrow a$ esetén véges határértéke van, akkor ezt tekintjük a függvény a pont körüli változásának gyorsaságát kifejező számnak. E határértéket nevezzük az $f(x)$ függvény a pontbeli differenciáhányadosának.

Definíció

Az $f(x)$ függvény az a pontban differenciálható, ha létezik a

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$

véges határérték. Ezt a határértéket az $f(x)$ függvény a - bel differenciáhányadosának, vagy deriváltjának nevezzük.

Amint azt a legutoljára említett példánál láthattuk, az $f(x)$ függvény a - bel differenciáhányadosának geometriai jelentése az $f(x)$ függvény görbéjéhez az $x = a$ abszcisszájú pontban húzott érintő meredeksége.

Szokás még az

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

un. különbségi hányadost, vagy differenciáhányadost másképp is jelölni. Ha ui. az $x - a$ különbséget h - val jelöljük, akkor - mivel az $x \rightarrow a$ határátmenetnek a $h \rightarrow 0$ határátmenet felel meg, - fenti különbségi hányadosunk, ill. annak $h \rightarrow 0$ esetében adódó határértéke, az $x = a$ helyhez tartozó differenciáhányados így is írható:

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Amennyiben a különbségi hányadosnak csak jobboldali határértéke (1) - ben az $x \rightarrow a+0$, (2) - ben a $h \rightarrow +0$ esetében adódó határérték) létezik, ezt $f(x)$ a

helyhez tartozó jobboldali deriváltjának, míg a különbségi hányados baloldali határértékét (1)-ben az $x \rightarrow a-0$, (2) - ben a $h \rightarrow -0$ esetben adódó határérték) $f(x)$ a helyhez tartozó baloldali deriváltjának nevezik. Ha egy $f(x)$ függvény az a helyen jobbról és balról is differenciálható, és jobb- és baloldali deriváltja megegyezik egymással, akkor $f(x)$ az a helyen differenciálható, és differenciálhányadosa a jobb- és baloldali differenciálhányados egyező értéke. Nem ez a helyzet a következő példában: az $y = |x|$ függvénynek ui. az $x = 0$ helyhez tartozó különbségi hányadosa

$$\frac{|0 + h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

és ennek jobb- ill. baloldali határértéke $h \rightarrow +0$, ill. $h \rightarrow -0$ esetén:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} 1 = 1,$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (-1) = -1.$$

Mivel a jobb- és baloldali differenciálhányados nem egyező, $y = |x|$ az $x = 0$ helyen jobb- ill. baloldaltól differenciálható, a közönséges értelemben azonban nem differenciálható.

A differenciálhányados(derivált) jelölésére többféle jelölés használatos. Az $f(x)$ függvény a - beli deriváltját jelölhetjük a függvény jele mellé illesztett vesszővel, vagy föléje tett ponttal:

$$f'(a), \dot{f}(a).$$

E jelölésben az a hely feltüntetése el is hagyható, ha ez nem okoz félreértést: $f', \dot{f}$. Egy további jelöléssel feltüntethetjük, hogy a derivált képzésénél x - et tekintettük független változónak:

$$\frac{d f(x)}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx} f(x).$$

(Ez utóbbi jelölés emlékeztet egy, a különbségi hányados (2) - ben bevezetett jelölésből könnyen adódó másik jelölésére. Ha ui. a független változó h megváltozását Δx - szel, az $f(x)$ függvény ezen független változó megváltozáshoz tartozó megváltozását Δy - nal jelöljük ($\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$) (2) - t így is felírhatjuk:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx},$$

és ha itt azt is fel akarjuk tüntetni, hogy a határérték az a helyen vett differenciálhányados, a következő jelölést használhatjuk:

$$\left[\frac{d f(x)}{dx} \right]_{x=a}$$

A differenciálhányados képzésének műveletét differenciálásnak, vagy deriválásnak nevezik.

Pl. az $f(x)$ = állandó függvény mindenütt differenciálható, deriváltja (változási sebessége) mindenütt 0.

Az $f(x) = x$ függvény is mindenütt deriválható, deriváltja mindenütt 1. Bármely x helyen ugyanis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1.$$

Tétel

$f(x)$ akkor és csakis akkor differenciálható az a helyen ha az $a + h$ és a helyhez tartozó megváltozása a következő alakban írható fel:

$$(*) \quad f(a + h) - f(a) = A h + \varepsilon h,$$

ahol A a h - től függetlenül állandó, és $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$. Az A állandó ekkor $f(x)$ a - beli differenciálhányadosa:

$$A = f'(a).$$

(A tételben kimondott szükséges és elégséges feltétel az $f(x)$ függvény differenciálhatóságának egy másik, elsőnek adott definíciókkal ekvivalens, definíciójának is felfogható.)

Megjegyezzük még, hogy a tételben szereplő $(*)$ összefüggést még a következő jelöléssel is felírhatjuk:

$$f(a + h) - f(a) = A h + o(h),$$

ahol $o(h)$ (olvasd: kis ordó h) olyan kifejezést jelent, mely h - val osztva is 0 - hoz tart. E jelöléssel valóban lerövidíthettük volna a tétel szövegét, a tétel kimondásában mégis azért nem használtuk, mert általában $o(v) = u$ azt jelenti, hogy $\frac{u}{v} \rightarrow 0$, de a jelöléssel azt, hogy milyen esetben tart $\frac{u}{v}$

0 - hoz, nem tudjuk feltüntetni.

Bizonyítás

A tételben kimondott feltétel szükséges, hiszen ha $f(x)$ az a helyen differenciálható, akkor

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a),$$

ami másképp így is írható:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon,$$

ahol $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$. Utóbbi eredményünkben h - val átszorozva adódik a differenciálhatóságra a tételben kimondott feltétel:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a) h + \varepsilon h,$$

ahol $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$.

A tételben kimondott feltétel azonban elégséges is. Ha ui.

$$f(a+h) - f(a) = A h + \varepsilon h, \text{ és } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ ha } h \rightarrow 0,$$

összefüggésünket $h \neq 0$ - val végigosztva

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A + \varepsilon$$

adódik, s innen $h \rightarrow 0$ esetén, mivel ekkor $\varepsilon \rightarrow 0$ adódik:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A = f'(a),$$

amivel a feltétel elégséges voltát is bebizonyítottuk.

E tétel felhasználásával könnyen igazolhatjuk alábbi állításunkat:

Ha $f(x)$ differenciálható az a helyen, akkor ott folytonos is.

Ha ui. $f(x)$ az a helyen differenciálható, akkor

$$|f(a+h) - f(a)| = |f'(a)h + \varepsilon h| < \eta,$$

ha $|h|$ már elég kicsiny, ami η tetszőleges volta miatt épp azt jelenti, hogy $f(x)$ az a helyen folytonos.

Állításunk nem fordítható meg: abból, hogy egy függvény egy pontban folytonos, még nem következik, hogy ott differenciálható is. Példa erre a korábban már említett $y = |x|$ függvény, amely az $x = 0$ helyen folytonos, de nem differenciálható.

29.) DIFFERENCIÁLÁSI SZABÁLYOK

1^o Az $f(x) = x^n$ függvény (n pozitív egész szám) deriváltja:

$$f'(x) = n x^{n-1}.$$

Képezzük ui. az x és $x+h$ helyekhez tartozó különbségi hányadost:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Alkalmazzuk a számlálóra az

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + \\ &\quad + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

azonosságot:

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{h[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} = \\ &= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}. \end{aligned}$$

Ha most $h \rightarrow 0$, akkor az itt látható tagok mindegyike x^{n-1} -hez tart, s mivel n tag áll itt, azért

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1}.$$

2^o Ha $f(x)$ differenciálható és c állandó, akkor $c f(x)$ is differenciálható, és

$$[c \cdot f(x)]' = c f'(x).$$

Állításunkat könnyű igazolni, ui.

$$[c \cdot f(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c f(x+h) - c f(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c f'(x).$$

E szabályt röviden így fogalmazhatjuk meg: állandó szorzó a deriválásnál változatlan marad.

3^o Ha f(x) és g(x) differenciálhatók, akkor f(x) + g(x) is differenciálható, és

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

Ti.

$$\begin{aligned} [f(x) + g(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= f'(x) + g'(x), \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk. E szabály röviden így fogalmazható meg: összeget tagonként szabad differenciálni.

E szabály természetesen nemcsak kettő, hanem akárhány (véges sok) összeadandóra is fennáll.

Az 1^o, 2^o, 3^o szabályok felhasználásával, továbbá a 28.) fejezetben levezetett

$$x' = 1, \quad c' = 0$$

differenciálhányadosok segítségével minden polinom deriváltja kiszámítható.

Pl.

$$(3x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1)' = 12x^3 - 6x^2 - 8x + 5.$$

4^o Ha u(x) és v(x) differenciálhatók, akkor u(x) · v(x) is differenciálható, és

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Képezzük ui. az u(x) · v(x) függvény különbségi hányadosát:

$$\begin{aligned} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h} + \\ &+ \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} u(x). \end{aligned}$$

Ha most $h \rightarrow 0$, akkor

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \rightarrow u'(x), \quad v(x+h) \rightarrow v(x)$$

(mivel $v(x)$ differenciálható, tehát folytonos is az x helyen),

$$\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \rightarrow v'(x),$$

ugyhogy

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \rightarrow u'(x)v(x) + v'(x)u(x),$$

ha $h \rightarrow 0$, amit bizonyítani akartunk.

A szorzat most igazolt differenciálási szabályát könnyen megjegyezhetjük a független változó kiírása nélküli alakban:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Többszorzós szorzat differenciálási szabálya a két tényezős szorzat differenciálási szabályából már következik. Pl. háromtényezős szorzat esetén:

$$\begin{aligned} (u \cdot v \cdot w)' &= (u \cdot v)' w + (u \cdot v) w' = \\ &= u' v w + u v' w + u v w'. \end{aligned}$$

^{5°} Ha $u(x)$ és $v(x)$ differenciálhatók és $v(x) \neq 0$, akkor $\frac{u(x)}{v(x)}$ is differenciálható, és pedig

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}.$$

Először is megmutatjuk, hogy

$$\left[\frac{1}{v(x)} \right]' = - \frac{v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Képezzük ui. a különbségi hányadost:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)} \right) &= \frac{1}{h} \frac{v(x) - v(x+h)}{v(x+h) \cdot v(x)} = \\ &= - \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \frac{1}{v(x+h) \cdot v(x)}. \end{aligned}$$

Ha most $h \rightarrow 0$, akkor

$$\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \rightarrow v'(x), \quad v(x+h) \rightarrow v(x),$$

ugyhogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)} \right) = - \frac{v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Az itt bebizonyított differenciálási szabályból a szorzat differenciálási szabályának alkalmazásával azonnal adódik már a tört differenciálási szabálya:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' &= \left(u(x) \cdot \frac{1}{v(x)} \right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \left(\frac{1}{v(x)} \right)' = \\ &= \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}. \end{aligned}$$

A hányados differenciális szabálya könnyen megjegyezhető a következő alakban:

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Az eddig felsorolt differenciálási szabályok segítségével most már minden racionális függvény deriváltja kiszámítható. Látható, hogy a racionális függvények mindenütt differenciálhatók, ahol egyáltalán értelmezve vannak, tehát ahol nevezőjük nem tűnik el.

P1.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{3x^2 + 2} \right)' &= \frac{(2x - 6)(3x^2 + 2) - (x^2 - 6x + 5) 6x}{(3x^2 + 2)^2} = \\ &= \frac{6x^3 - 18x^2 + 4x - 12 - 6x^3 + 36x^2 - 30x}{(3x^2 + 2)^2} = \\ &= \frac{18x^2 - 26x - 12}{(3x^2 + 2)^2}. \end{aligned}$$

Speciálisan az $y = \frac{1}{x^n}$ függvény deriváltja:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n \frac{1}{x^{n+1}}.$$

E képlet könnyen megjegyezhető, ha visszaemlékezünk arra, hogy $\frac{1}{x^n}$ negatív kitevőjű hatvány alakjában is felírható: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$. Ekkor tl. fent az adódott, hogy a hatvány 1^0 - ben megismert differenciálási szabálya érvényes marad negatív kitevőjű hatványra is:

$$(x^{-n})' = -n x^{-n-1}.$$

Pl.

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

$$6^0 \quad y = \sin x \quad \text{differenciálhányadosa: } y' = \cos x,$$

$$y = \cos x \quad \text{differenciálhányadosa: } y' = -\sin x,$$

$$y = \operatorname{tg} x \quad \text{differenciálhányadosa: } y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$y = \operatorname{ctg} x \quad \text{differenciálhányadosa: } y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

a.) $y = \sin x$ és $x+h$ helyekhez tartozó különbségi hányadosát felírva, és azt a 24.) fejezet (5) addíciós képletével átalakítva adódik:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\ &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}. \end{aligned}$$

Ha most $h \rightarrow 0$, akkor mivel $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ (26.) fejezet 7^o a.)), az

első tag $\sin x \cdot 0 = 0$ - hoz, a második tag pedig mivel $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

(26.) fejezet 7^o), $\cos x \cdot 1 = \cos x$ - hez tart. Végeredményben tehát

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

b.) $y = \cos x$. Képezzük az x és $x+h$ helyekhez tartozó különbségi hányadost és alkalmazzuk annak átalakítására a 24.) fejezet (7) addíciós képletét:

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \\ &= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}.\end{aligned}$$

Ha most $h \rightarrow 0$, akkor mivel $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ és

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \text{ adódik:}$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

c.) $y = \operatorname{tg} x$. A tört differenciálási szabályát alkalmazva:

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

d.) $y = \operatorname{ctg} x$. A tört differenciálási szabályát alkalmazva:

$$\begin{aligned}(\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Gyakorlásul számítsuk ki az alábbi függvények differenciálhányadosát:

$$(x \cdot \sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x.$$

$$\left(\frac{\cos x}{x} \right)' = \frac{-\sin x \cdot x - \cos x \cdot 1}{x^2} = -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}.$$

^{7°} Ha $u(x)$ differenciálható az a helyen és $f(u)$ differenciálható az $u(a)$ helyen, akkor az $f(u(x))$ összetett függvény is differenciálható az a helyen és

$$\left[\frac{d f(u(x))}{dx} \right]_{x=a} = \left[\frac{d f(u)}{du} \right]_{u=u(a)} \cdot \left[\frac{d u(x)}{dx} \right]_{x=a}.$$

Vezessük be ui. az

$$u(a) = b$$

jelölést. Minthogy a feltevés szerint $f(u)$ differenciálható a b helyen, azért $u \rightarrow b$ esetén

$$\frac{f(u) - f(b)}{u - b} \rightarrow f'(b),$$

azaz

$$\frac{f(u) - f(b)}{u - b} - f'(b) \rightarrow 0, \text{ ha } u \rightarrow b.$$

Bevezetve tehát még az

$$(*) \quad \frac{f(u) - f(b)}{u - b} - f'(b) = g(u)$$

jelölést, $g(u) \rightarrow 0$, ha $u \rightarrow b$.

A $g(u)$ függvényt eddig csak $u \neq b$ esetre értelmeztük: állapodjunk meg abban, hogy

$$g(b) = 0.$$

Ezen megállapodással elértük, hogy $g(u)$ az $u = b$ helyen folytonossá vált (határértéke megegyezik helyettesítési értékével).

(*) -ből, $u \neq b$ esetén $(u - b)$ -vel szorozva adódik:

$$f(u) - f(b) = g(u)(u - b) + f'(b)(u - b),$$

és ez még $u = b$ esetén is érvényes.

Képezzük most az $f(u(x))$ függvénynek az a és x helyekhez tartozó különbségi hányadosát; az utóbbi képlet alapján ez így írható:

$$\begin{aligned} \frac{f(u(x)) - f(u(a))}{x - a} &= \frac{g(u(x))(u(x) - u(a)) + f'(b)(u(x) - u(a))}{x - a} = \\ &= g(u(x)) \frac{u(x) - u(a)}{x - a} + f'(b) \frac{u(x) - u(a)}{x - a}. \end{aligned}$$

Ha $x \rightarrow a$, akkor $\frac{u(x) - u(a)}{x - a} \rightarrow u'(a)$, továbbá $u(x) \rightarrow u(a) = b$ folytán $g(u(x)) \rightarrow g(b) = 0$, hiszen $g(u)$ a b helyen folytonos, és így

$$\frac{f(u(x)) - f(u(a))}{x - a} \rightarrow 0 \cdot u'(a) + f'(b) \cdot u'(a) = f'(b) \cdot u'(a),$$

vagyis $f(u(x))$ differenciálható az $x = a$ helyen és deriváltja:

$$f'(b) \cdot u'(a) = \left[\frac{df(u)}{du} \right]_{u=b} \cdot \left[\frac{du(x)}{dx} \right]_{x=a} = \left[\frac{df(u)}{du} \right]_{u=u(a)} \cdot \left[\frac{du(x)}{dx} \right]_{x=a}$$

A most bebizonyított tétel kevésbé precíz, de könnyebben megjegyezhető formában így írható:

$$\frac{d f(u(x))}{dx} = \frac{d f(u)}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx}$$

vagy még rövidebben:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$$

E differenciálási szabályt röviden láncszabálynak nevezik.

Számítsuk ki gyakorlásul az alábbi függvények differenciálhányadosát:

a.) $y = (x^2 - 2x + 3)^8$

Részletesebben kiírva:

$$y = u^8, \text{ ahol } u = x^2 - 2x + 3.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 8u^7 (2x - 2) = 8(x^2 - 2x + 3)^7 (2x - 2).$$

b.) $y = \sin 4x$, ill. $y = \sin u$, ahol $u = 4x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 4 = \cos 4x \cdot 4 = 4 \cos 4x.$$

c.) $y = \cos^2 x$, ill. $y = u^2$, ahol $u = \cos x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 2u (-\sin x) = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x.$$

d.) $y = \sin t^3$, ill. $y = \sin u$, ahol $u = t^3$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dt} = \cos u \cdot 3t^2 = 3t^2 \cos t^3.$$

e.) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{s}$, ill. $y = \operatorname{tg} u$, ahol $u = \frac{1}{s}$.

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{du} \frac{du}{ds} = \frac{1}{\cos^2 u} \left(-\frac{1}{s^2} \right) = -\frac{1}{s^2 \cos^2 \frac{1}{s}}.$$

$$f.) y = x^4 \sin \frac{1}{x^4}.$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 \sin \frac{1}{x^4} + x^4 \left(\sin \frac{1}{x^4} \right)';$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$t = \sin \frac{1}{x^4}, \text{ ill. } t = \sin u, \text{ ahol } u = \frac{1}{x^4},$$

$$\frac{dt}{dx} = \left(\sin \frac{1}{x^4} \right)' = \frac{dt}{du} \frac{du}{dx} = \cos u \left(-4x^{-5} \right) = -\frac{4}{x^5} \cos \frac{1}{x^4}.$$

és így

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4x^3 \sin \frac{1}{x^4} + x^4 \left(-4 \frac{1}{x^5} \right) \cos \frac{1}{x^4} = \\ &= 4x^3 \sin \frac{1}{x^4} - \frac{4}{x} \cos \frac{1}{x^4}. \end{aligned}$$

$$g.) y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x}.$$

A függvény nincs értelmezve ott, ahol $\cos 2x = 0$, azaz az $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ helyeken ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). A 24.) fejezet (10) formuláját felhasználva az $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ helyeken függvényünk a következő egyszerűbb alakban írható fel:

$$y = \frac{1}{\cos x - \sin x},$$

deriváltja tehát:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\cos x - \sin x)'}{(\cos x - \sin x)^2} = \frac{\sin x + \cos x}{(\cos x - \sin x)^2}.$$

$$h.) y = \frac{\operatorname{tg} x^2}{\sin^3 x}.$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(\operatorname{tg} x^2)' \sin^3 x - \operatorname{tg} x^2 (\sin^3 x)'}{\sin^6 x} = \\ &= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} 2x \sin^3 x - \operatorname{tg} x^2 3 \sin^2 x \cos x}{\sin^6 x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2x \sin x - 1,5 \sin 2x^2 \cos x}{\cos^2 x \sin^4 x}.$$

8° Ha $y = f(x)$ szigorúan monoton, folytonos függvény, $x = \varphi(y)$ pedig $f(x)$ inverz függvénye, akkor feltéve, hogy $f(x)$ differenciálható az a helyen és $f'(a) \neq 0$, az $x = \varphi(y)$ inverz függvény is differenciálható az $\alpha = f(a)$ helyen és

$$\varphi'(\alpha) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Legyen ugyanis y egy α közelében levő érték. Az $x = \varphi(y)$ függvény különbségi hányadosa:

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(\alpha)}{y - \alpha} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}.$$

(Az itt felírt különbségi hányados nevezője biztosan nem tűnik el, ha már x elég közel van a -hoz, hiszen mivel $f'(a) \neq 0$, az a -hoz elég közeli x helyekre $y - \alpha = f(x) - f(a) \neq 0$.)

Képezzük az itt felírt különbségi hányados határértékét $y \rightarrow \alpha$ esetén.

$\varphi(y)$ folytonossága miatt (lásd 27.) fejezet) ekkor $x = \varphi(y) \rightarrow \varphi(\alpha) = a$, tehát $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(a) \neq 0$, és így

$$\varphi'(\alpha) = \lim_{y \rightarrow \alpha} \frac{\varphi(y) - \varphi(\alpha)}{y - \alpha} = \frac{1}{f'(a)},$$

amit bizonyítani akartunk.

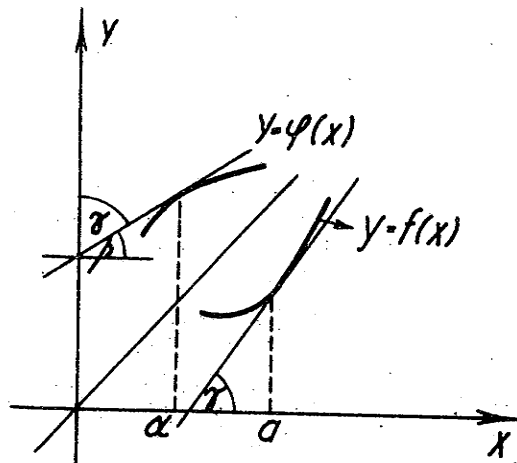
Tekintettel arra, hogy az $f'(a)$ differenciálhányados geometriai jelentése az $y = f(x)$ függvény görbéjéhez az a abszcisszájú pontban húzott érintő meredeksége (iránytangense), az inverz függvény differenciálási szabályából látható, hogy $y = f(x)$ inverzéhez (melynek görbét az $y = f(x)$ függvény görbéjéből az $y = x$ egyenesre való tükrözéssel nyertük) az $\alpha = f(a)$ abszcisszájú pontban húzott érintő meredeksége $\varphi'(\alpha) = \frac{1}{f'(a)}$. Az érintőknek az X tengely pozitív irányával bezárt szögét tehát γ ill. β -val jelölve:

$$\operatorname{tg} \gamma = f'(a), \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} = \operatorname{ctg} \gamma,$$

tehát

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma + k\pi,$$

vagyis γ és β egymás pótszögei (lásd 100. ábra).



100. ábra

Az inverz függvény differenciálási szabályának segítségével meghatározható pl. az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény deriváltja. E függvényt úgy nyertük, mint az $y = x^n$ függvény inverzét ($n=1, 2, \dots$) (25.) fejezet). Minthogy $(x^n)' = n x^{n-1}$ és ez nem 0, ha $x \neq 0$, azért az $x = \sqrt[n]{y}$ függvény deriváltja az $y = x^n$ helyen $y \neq 0$ esetén

$$\frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n (\sqrt[n]{y})^{n-1}}.$$

A most talált látszólag bonyolult szabály könnyen megjegyezhető, ha az $\sqrt[n]{y}$ gyökös kifejezést törtkitevőjű hatvány alakjában írjuk:

$$\sqrt[n]{y} = (y)^{\frac{1}{n}},$$

és így

$$\frac{d y^{\frac{1}{n}}}{d y} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \left(\sqrt[n]{y} \right)^{1-n} = \frac{1}{n} \frac{1}{(\sqrt[n]{y})^{n-1}}.$$

Az itt talált differenciálási szabályból az összetett függvény differenciálási szabályának felhasználásával azonnal következik, hogy az $y = x^n$ függvényre $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ esetre talált differenciálási szabály tetszőleges törtkitevő esetében is érvényes, vagyis

$$y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} \text{ differenciálhányadosa}$$

$$y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q} - 1} \quad . \quad (p \text{ és } q \text{ egész számok.})$$

Az $u = \sqrt[q]{x}$ jelöléssel ugyanis vizsgált függvényünk:

$$y = u^p, \text{ ahol } u = x^{\frac{1}{q}},$$

és így

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sqrt[q]{x^p} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = p u^{p-1} \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q} - 1} = \\ &= \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q}} x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-q}{q}} = \\ &= \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q} - 1}. \end{aligned}$$

A megismert szabályok segítségével kiszámíthatjuk például minden olyan függvény deriváltját, amely x -ből és állandókból a négy alapművelet és gyökvonások segítségével áll elő. Pl.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 3x}{\sqrt[3]{x^3 - 2x}} \right)' &= \left(\frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - 3x}{(x^3 - 2x)^{\frac{1}{3}}} \right)' = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 3 \right) (x^3 - 2x)^{\frac{1}{3}} - \left((x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - 3x \right) \frac{1}{3} (x^3 - 2x)^{-\frac{2}{3}} (3x^2 - 2)}{\left(\sqrt[3]{x^3 - 2x} \right)^2} = \\ &= \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 3 \right) \sqrt[3]{x^3 - 2x} - \frac{1}{3} \left(\sqrt{x^2 + 1} - 3x \right) \frac{3x^2 - 2}{\left(\sqrt[3]{x^3 - 2x} \right)^2}}{\left(\sqrt[3]{x^3 - 2x} \right)^2} \end{aligned}$$

További példák:

$$a.) y = \cos \sqrt{x^2 + 4},$$

$$y' = -\sin \sqrt{x^2 + 4} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x =$$

$$= -\frac{x \sin \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

$$b.) y = \sin \sqrt[3]{x^2},$$

$$y' = \cos \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2 \cos \sqrt[3]{x^2}}{3 \sqrt[3]{x}}.$$

$$c.) y = \sqrt{\operatorname{tg} x},$$

$$y' = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2 \sqrt{\operatorname{tg} x} \cos^2 x}.$$

30.) A DIFFERENCIÁL FOGALMA

A 28.) fejezetben kimondottuk, hogy ha egy $f(x)$ függvény az a helyen differenciálható, akkor az $a + \Delta x$ és az a helyhez tartozó megváltozása:

$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ a következő alakban írható fel:

$$(1) \quad \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = A \Delta x + \varepsilon \Delta x,$$

ahol $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $\Delta x \rightarrow 0$, az A állandó pedig az $f(x)$ függvény a -beli differenciálhányadosa, (1) tehát még másképp az

$$(2) \quad \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a) \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

alakban is felírható.

A Δf függvényt megváltozás tehát két részből tevődik össze, a (2) jobb oldalán álló két tagból, melyek közül a második ($\varepsilon \Delta x$) az elsőhöz ($f'(a) \Delta x$) képest igen kicsiny, hiszen a másodikban Δx -szel együtt ε is zérushoz tart, az elsőben pedig csak Δx . A (2) összefüggés jobb oldalán álló első tagot:

$$f'(a) \Delta x -$$

-et a Δf függvényt megváltozás főrészének, $f(x)$ a helyhez tartozó differenciáljának nevezzük és így jelöljük:

$$(3) \quad df = f'(a) \Delta x.$$

Tekintettel arra, hogy az $y = x$ függvény esetében bármely a helyen

$$\Delta y = (a + \Delta x) - a = \Delta x,$$

és így a $dy = dx$ differenciál megegyezik a $\Delta y = \Delta x$ függvényt megváltozással

$$\Delta x = dx,$$

a (3) összefüggést más alakban felírva $f(x)$ a helyhez tartozó differenciálja:

$$(4) \quad df = f'(a) dx.$$

Az előbbieket összefoglalva tehát
valamely differenciálható $f(x)$ függvény a helyhez tartozó differenciálja a

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a) \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

függvényt megváltozás főrésze:

$$df = f'(a) \Delta x = f'(a) dx,$$

vagyis a differenciálható $f(x)$ függvény differenciálja arányos a független változó differenciáljával, és az arányossági tényező éppen a differenciálhányados.

A differenciált függvényt megváltozás, ill. függvényérték közelítő kiszámítására használhatjuk.

Pl. valamilyen mérésnél a pontos x_0 érték helyett az $x_0 + \Delta x$ mérési eredményre jutottunk. A mérési eredményekkel tovább számolva (a mérési eredményt az $f(x)$ függvénybe behelyettesítve), kérdezzük, milyen hibát okoz számolásunk végeredményében a mérésnél elkövetett pontatlanság.

A keresett abszolút hiba:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

ennek közelítő értéke:

$$df = f'(x_0) \Delta x,$$

míg a százalékos (relatív) hiba

$$\frac{\Delta f}{f(x_0)} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)},$$

és ennek közelítő értéke

$$\frac{df}{f(x_0)}.$$

A függvényérték differenciál segítségével történő közelítő kiszámítására példaként határozzuk meg $\sqrt{4,01}$ közelítő értékét.

Az $y = \sqrt{x}$ függvény $x = 4$ és $x = 4,01$ helyekhez tartozó megváltozása:

$$\Delta y = \sqrt{4,01} - \sqrt{4} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)_{x=4} 0,01 + \varepsilon 0,01 = \frac{1}{4} 0,01 + \varepsilon 0,01,$$

az $x = 4$ helyhez tartozó differenciál - ezen megváltozás főrésze -

$$dy = \frac{0,01}{4}$$

vagyis ($\Delta y \approx dy$)

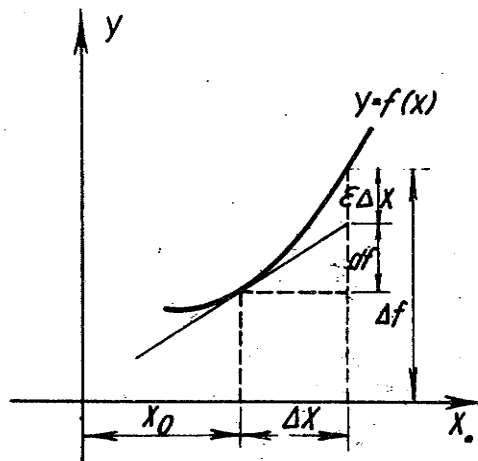
$$\sqrt{4,01} - \sqrt{4} \approx \frac{0,01}{4}, \text{ azaz } \sqrt{4,01} \approx \sqrt{4} + \frac{0,01}{4} = 2,0025.$$

Vizsgáljuk meg végezetül a differenciál fogalmának szemléletes geometriai tartalmát.

Tekintsük az $y = f(x)$ függvény megváltozását:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Megrajzolva az $y = f(x)$ függvény görbét azt láthatjuk, hogy ez a megváltozás két részből áll: az egyik az x_0 pontban a görbéhez húzott érintőig terjedő szakasz, a másik az érintő és a görbe közötti rész (lásd 101. ábra). Az első az



101. ábra

érintő iránytangensének a Δx távolsággal (az ábránkon megrajzolt háromszög befogója) való szorzata, ez tehát $df = f'(x_0) \Delta x$ nagyságu. A második, vagyis az érintő és a görbe közötti rész, (ϵ) alapján $\epsilon \Delta x$ nagyságu, vagyis $\Delta x \rightarrow 0$

esetén igen erősen tart 0 - hoz (még Δx - szel osztva is $\rightarrow 0$.)

Itteni fejtegetéseinkből az a szemléletes tény következik, hogy bármely differenciálható függvény görbéje valamely x hely környezetében alig tér el az egyenestől, (ti. érintőjétől), vagy másképp fogalmazva: valamely differenciálható függvény egy x hely környezetében majdnem lineáris.

31.) TAYLOR-FORMULA. BINOMIÁLIS TÉTEL

Ha az $f(x)$ függvény differenciálható az a hely egy környezetében, s $f'(x)$ differenciálható az a helyen, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ az a helyen kétszer differenciálható, s $f'(x)$ a - belüli deriváltját $f(x)$ a - belüli második deriváltjának nevezzük. Hasonlóan értelmezzük a háromszor, négyszer, ..., n - szer való differenciálhatóságot és a harmadik, negyedik, ... n - edik deriváltat. $f(x)$ második, harmadik, ..., n-edik deriváltjának jelölései:

$$\begin{aligned} f''(x), & \quad f''(x), \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \\ f'''(x) = f^{(3)}(x), & \quad \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, \quad \frac{d^3 f}{dx^3}, \\ & \quad \vdots \\ f^{(n)}(x), & \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad \frac{d^n f}{dx^n}. \end{aligned}$$

Mint tudjuk, racionális függvény deriváltja ismét racionális függvény, amelynek nevezője ugyanott lesz 0, ahol az eredeti függvénynek a nevezője. Ebből következik, hogy a racionális függvények, ahol nevezőjük nem 0, ott akárhányszor deriválhatók, deriváltjaik ismét racionális függvények. Speciálisan egy n - edfoku polinom deriváltja (n-1) - edfoku polinom, így n - edik deriváltja állandó és az (n+1) - ediktől kezdve minden további deriváltja azonosan zérus.

Legyen $f(x)$ egy n - edfoku polinom:

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Irjunk (1) - ben x helyébe $[(x-a) + a]$ - t és a keletkező $[(x-a) + a]^k$ hatványokban kiírva a k tényezőt, végezzük el a többtaguak szorzását. Pl.

$$[(x-a) + a]^2 = [(x-a) + a] [(x-a) + a] = (x-a)^2 + 2a(x-a) + a^2,$$

$$[(x-a) + a]^3 = (x-a)^3 + 3a(x-a)^2 + 3a^2(x-a) + a^3.$$

Ezt az átalakítást minden tagban elvégezve és $(x-a)$ egyenlő kitevőjű hatványait összegyűjtve az $f(x)$ polinomot $(x-a)$ hatványai szerint átrendezett alakban kapjuk meg:

$$(2) \quad f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n.$$

A (2) - ben szereplő b_k ($k=0, 1, 2, \dots, n$) együtthatók megkaphatók az $f(x)$ polinom a helyen vett magasabbrendű deriváltjainak segítségével. Ha $f(x)$ n-edfokú polinom, akkor

$$(3) \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

A (3) azonosságot Taylor-formulának nevezik.

(2) -ből a Taylor-formulát a következőképp állíthatjuk elő:

(2) -ből az $x = a$ helyettesítéssel

$$f(a) = b_0$$

adódik. A (2) polinomot deriválva

$$(4) \quad f'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \dots + nb_n(x-a)^{n-1}$$

adódik, ahová $x = a$ - t helyettesítve nyerjük:

$$f'(a) = b_1$$

(4) - t ismét deriválva ((2) második deriváltját képezve)

$$f''(x) = 2b_2 + \dots + n(n-1)b_n(x-a)^{n-2}$$

adódik ahová $x = a$ - t helyettesítve, nyerjük:

$$f''(a) = 2b_2, \text{ azaz } b_2 = \frac{f''(a)}{2!}.$$

Hasonlóan tovább számolva, (2) k - adik deriváltjának ($k < n$)

$$f^{(k)}(x) = k!b_k + (k-1)k \dots 2b_{k+1}(x-a) + \dots +$$

$$+ n(n-1) \dots (n-k+1)(x-a)^{n-k} b_n(x-a)^{nk}$$

adódik, tehát az $x = a$ helyettesítéssel nyerjük:

$$f^{(k)}(a) = k! b_k, \text{ azaz } b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

míg végül (2) -ből n - szeri deriválással

$$f^{(n)}(x) = n! b_n,$$

azaz

$$f^{(n)}(a) = n! b_n, \text{ és így } b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

adódik. Ezzel beláttuk, hogy $f(x)$ $(x-a)$ hatványai szerint haladó átrendezésének

együtthatói valóban a (3) - ban felírt $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ ($k=1, 2, \dots, n$) együtthatók.

Ha még megállapodunk abban, hogy $0! = 1$, $f^{(0)}(x) = f(x)$, tekintettel arra, hogy $(x-a)^0 = 1$, és $1! = 1$, a (3) polinomot a következő rövid alakban is felírhatjuk:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

(a $\sum$ jel jelentését lásd 3.) fejezet I. Tétel).

Pl. az $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x$ polinom $(x-2)$ hatványai szerint rendezett alakja, mivel

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x,$$

$$f(2) = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 4 + 2 = 2;$$

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 1,$$

$$f'(2) = 6 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 1 = 9,$$

$$f''(x) = 12x - 8,$$

$$f''(2) = 12 \cdot 2 - 8 = 16,$$

$$f^{(3)}(x) = 12,$$

$$f^{(3)}(2) = 12,$$

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!} (x-2) + \frac{f''(2)}{2!} (x-2)^2 + \frac{f^{(3)}(2)}{3!} (x-2)^3 =$$

$$= 2 + 9(x-2) + 8(x-2)^2 + 2(x-2)^3.$$

További érdekes tételre jutunk, ha a Taylor-formulát az

$$f(x) = (x+b)^n$$

függvényre alkalmazzuk az $a = 0$ helyen.

$f(x)$ nyilván n - edfoku polinom, vagyis

$$(x+b)^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Mivel $(x+b)^n$ k -adik deriváltja:

$$\left((x+b)^n \right)^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1)(x+b)^{n-k};$$

azért

$$f^{(k)}(0) = n(n-1) \dots (n-k+1) b^{n-k},$$

és így

$$(x+b)^n = b^n + \frac{n}{1!} b^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2!} b^{n-2} x^2 + \dots + \\ + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} b^{n-k} x^k + \dots + \frac{n(n-1) \dots 1}{n!} b^0 x^n.$$

Vezessük be a következő rövidítő jelölést:

$$\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

(olvasd: n alatt a k) és állapotjunk meg abban, hogy $\binom{n}{0} = 1$. Ekkor előbb talált képletünk, melynek segítségével az $f(x) = (x+b)^n$ polinomot x hatványai szerint átrendezett alakban írtuk fel, így is jelölhető:

$$(x+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k b^{n-k}.$$

Az $x = a$ jelölést mellett képletünk ilyen alakot ölt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Ezt a képletet nevezik binomiális tételnek. Az $\binom{n}{k}$ együtthatókat binomiális együtthatóknak nevezik.

A binomiális együtthatók a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

$$1^{\circ} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}, \text{ és így}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

$$2^{\circ} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

1° - ben megadott képletünk részletes kiírás után $(n-k)!$ - sal való egyszerűsítéssel az $\binom{n}{k}$ kifejezésre korábban megadott képletbe megy át; a binomiális együtthatók 1° - ben megadott alakjából pedig az $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ összefüggés azonnal adódik. A 2° összefüggést is könnyű részletes kiírással igazolni:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \frac{k+1+n-k}{k+1} = \\ &= \frac{(n+1)n(n-1) \dots (n-k+1)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

(ti. $(n+1)-(k+1)+1 = n-k+1$).

A 2° összefüggésből kiolvasható, hogy ha a binomiális együtthatókat háromszögalaku táblázatba rendezzük, amelynek n - edik sorában a k - adik elem $\binom{n}{k}$, akkor a táblázat bármely eleme egyenlő a felette álló sor két szomszédos elemének összegével. Ennek a szabálynak az alapján a táblázat, amelyet Pascal-féle háromszögnek neveznek, sorról-sorra haladva könnyen elkészíthető:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Például:

$$\begin{aligned}
 12^6 &= (10+2)^6 = 10^6 + \binom{6}{1} 10^5 \cdot 2 + \binom{6}{2} 10^4 \cdot 2^2 + \binom{6}{3} 10^3 \cdot 2^3 + \\
 &+ \binom{6}{4} 10^2 \cdot 2^4 + \binom{6}{5} 10 \cdot 2^5 + \binom{6}{6} 2^6 = \\
 &= 1000000 \\
 &+ 1200000 \\
 &+ 600000 \\
 &+ 160000 \\
 &+ 24000 \\
 &+ 1920 \\
 &+ 64 \\
 &\hline
 &2985984.
 \end{aligned}$$

A binomiális együtthatók segítségével egyszerű képletet adhatunk az $u(x)v(x)$ szorzat magasabb rendű deriváltjainak kiszámítására:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}$$

(Leibniz-szabály). $(u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$, mint ahogy abban már korábban megállapodtunk.) A fenti képletet teljes indukcióval lehet egyszerűen igazolni. A bizonyításra itt nem térünk ki.

Pl.

$$\begin{aligned}
 (x^2 \sqrt{x+1})^{(3)} &= (x^2)^{(3)} \sqrt{x+1} + 3 (x^2)'' (\sqrt{x+1})' + \\
 &+ 3 (x^2)' (\sqrt{x+1})'' + x^2 (\sqrt{x+1})^{(3)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + 3.2 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 3.2 x \frac{-1}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}} + \\
&\quad + x^2 \frac{3}{8(x+1)^{\frac{5}{2}}} = \\
&= \frac{3}{\sqrt{x+1}} - \frac{3x}{2\sqrt{(x+1)^3}} + \frac{3x^2}{8\sqrt{(x+1)^5}}.
\end{aligned}$$

A binomiális tétel alkalmazásával bebizonyítható, hogy az

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

számsorozat konvergens.

Bizonyítás

Először bebizonyítjuk, hogy a pozitív tagu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ számsorozat ($n=1, 2, \dots$) monoton-növekedő.

A binomiális tétel felhasználásával ui.

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \\
&\quad + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \\
&\quad + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} + \dots + \\
&\quad + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} \frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Ha n növekszik, akkor a_n - ben minden összeadandó (az első kettő kivételével) növekszik, az összeg általános tagja ui.

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

n növekedésével nagyobb lesz, és ezenkívül újabb pozitív összeadandók lépnek fel. Tehát a_n monoton növekedő számsorozat.

Bebizonyítjuk, hogy az a_n számsorozat felülről korlátos. Ha un. a_n legutoljára nyert alakjában minden egyes zárójeles kifejezést 1 - gyel helyettesítünk a_n - nél nagyobb kifejezést nyerünk:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

(A további becslések során felhasználtuk a teljes indukcióval is könnyen igazolható $n! > 2^{n-1}$ ($n=3, 4, \dots$) egyenlőtlenséget, továbbá az ismert

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

azonosságot.)

Bebizonyítottuk tehát, hogy az a_n számsorozat monoton növekvő, és mivel $a_n < 3$ ($n=1, 2, \dots$) felülről korlátos, tehát konvergens. (Lásd 21) fejezet 3^o.)

32.) A DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEI

I. Rolle-tétel

Ha $f(x)$ az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos és annak belsejében differenciálható, továbbá

$$f(a) = f(b) = 0,$$

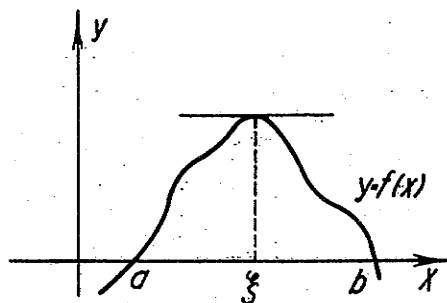
akkor van a és b között olyan ξ hely, melyre fennáll:

$$f'(\xi) = 0.$$

A tétel tartalma geometriai nyelven igen egyszerűen kifejezhető: a mondott feltételek mellett van a és b között olyan ξ hely, amelyben az $y = f(x)$ függvény görbéjének érintője vízszintes.

Bizonyítás

Ha $f(x) = 0$, az egész $[a, b]$ intervallumban, akkor bármely a és b közötti ξ megfelel a tételben mondottaknak. Ha $f(x)$ nem azonos 0, akkor felvesz vagy pozitív, vagy negatív értékeket, pl. felvesz pozitív értékeket (lásd 102. ábra). Weierstrass tétele szerint (27.) fejezet) felvesz azonban $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumban egy maximális $f(\xi)$ értéket: $f(\xi) > 0$, és így ξ nem lehet sem a - val,



102. ábra

sem b - vel egyenlő: $a < \xi < b$. A feltevés szerint $f'(\xi)$ létezik, és minthogy

$$\xi < x \text{ esetén } \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0,$$

$$\xi > x \text{ esetén } \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0,$$

azért a fenti különbségi hányadosok határértéke $x \rightarrow \xi$ esetén ≤ 0 , és ≥ 0 egyszerre csak úgy lehet, ha

$$f'(\xi) = 0,$$

amint azt állítottuk.

Teljesen hasonlóan végezhető el a tétel bizonyítása abban az esetben, ha $f(x)$ negatív értékeket is vesz fel $[a, b]$ -ben.

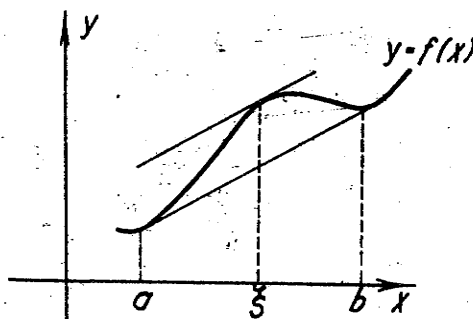
II. Langrange-féle középértéktétel

Ha $f(x)$ az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos és annak belsejében differenciálható függvény, akkor van a és b között olyan ξ hely, melyre fennáll

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

$$a < \xi < b.$$

A tétel tartalma geometriai nyelven kifejezve: a mondott feltételek mellett van a és b között olyan ξ hely, amelyhez tartozó érintője az $y = f(x)$ függvény görbéjének párhuzamos a görbe a és b abszcisszáju pontjait összekötő húrral. (103. ábra)



103. ábra

Az előbb bebizonyított Rolle-tétel a Lagrange-féle középértéktételnek az a speciális esete, amikor

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Bizonyítás

A Lagrange-féle középértéktétel bizonyításához tekintsük a következő függvényt:

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

($y = h(x)$ az $y = f(x)$ függvény görbéjének a és b abszcisszájú pontjait összekötő hur egyenlete.)

A

$$g(x) = f(x) - h(x)$$

függvényre

$$g(a) = g(b) = 0,$$

ezért $g(x)$ - re alkalmazható a Rolle-féle tétel. Kell tehát lennie a és b között olyan ξ helynek, ahol

$$g'(\xi) = 0.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy ezen a ξ helyen

$$g'(\xi) = f'(\xi) - h'(\xi) = 0,$$

azaz

$$f'(\xi) = h'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (a < \xi < b),$$

amit bizonyítani akartunk.

III. Cauchy-féle középértéktétel

Ha $f(x)$ és $g(x)$ az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos és annak belsőjében differenciálható függvények, ha továbbá $[a, b]$ belsőjében $g'(x) \neq 0$, akkor van a és b között olyan ξ hely, melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a < \xi < b).$$

Bizonyítás

Tekintsük a

(x)

$$h(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

segédfüggvényt, amelyben λ - t úgy választjuk meg, hogy $h(a) = h(b)$ legyen. Ez megtehető, mert ehhez a

$$h(b) - h(a) = f(b) - f(a) + \lambda(g(b) - g(a)) = 0$$

egyenletet kell λ - ra megoldanunk, ami lehetséges, hiszen $g(b) - g(a) \neq 0$ (különben ui. a Rolle-tétel értelmében valahol $[a, b]$ belsőjében $g'(x) = 0$ volna). Legyen tehát (π) - ban

$$\lambda = - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Ezen λ érték mellett alkalmazzuk a (π) - ban bevezetett $h(x)$ segédfüggvényre a Lagrange-féle középértéktételt: ennek értelmében kell, hogy legyen a és b között olyan ξ hely, ahol

$$h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0,$$

azaz

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \quad a < \xi < b,$$

amit bizonyítanunk kellett.

33.) FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT

1^o. A 25.) fejezetben megadtuk egy tetszőleges I intervallumban monoton (növekedő, ill. fogyó) és szigorúan monoton függvény definícióját. Az alábbiakban kimondott tétel arra ad választ, hogyan ismerhető fel egy differenciálható függvény monoton volta deriváltjának előjeléből:

Tétel

Ha $f(x)$ az I intervallumban differenciálható, akkor ahhoz, hogy $f(x)$ I -ben monoton növekvő (fogyó) legyen, szükséges és elégséges, hogy $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) fennálljon.

Bizonyítás

Hogy a tételben kimondott feltétel szükséges, az világos, hiszen monoton növekvő függvény esetében I tetszőleges két helyére felírt különbségi hányadosa mindig ≥ 0 (monoton fogyó függvény esetében ≤ 0), s így a határértékként adódó differenciálhányados is csak ≥ 0 (≤ 0) lehet.

A tételben kimondott feltétel elégséges voltát így láthatjuk be:

Legyen pl. $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$. Ha $\alpha \in I$, $\beta \in I$ és $\alpha < \beta$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint α és β között kell, hogy legyen olyan ξ hely, melyre

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi) (\beta - \alpha) \geq 0 \quad (\alpha < \xi < \beta),$$

ugyhogy $f(\beta) \geq f(\alpha)$ ($\alpha < \beta$), ami épp azt fejezi ki, hogy $f(x)$ tényleg monoton növekvő. Hasonlóképp látható be $f'(x) \leq 0$ esetén, hogy $f(x)$ tényleg monoton fogyó.

Megjegyzendő, hogy ha I -ben $f'(x) \geq 0$ és véges számú hely kivételével $f'(x) > 0$, akkor $f(x)$ I -ben szigorúan monoton növekvő.

Állításunkat könnyű igazolni. Ellenkező esetben ugyanis $f(x)$ egy egész intervallumban állandó volna, s így $f'(x)$ végtelen sok helyen volna 0.

Hasonlóan látható be, hogy ha I -ben $f'(x) \leq 0$ és véges számú hely kivételével $f'(x) < 0$, akkor $f(x)$ I -ben szigorúan monoton fogyó.

Pl. a.) $y = x^2$, $y' = 2x$, tehát mivel

$(-\infty, 0)$ - ben $y' < 0$, y itt monoton fogyó, és

$(0, +\infty)$ - ben $y' > 0$, y itt monoton növekvő.

(Pontosabban még azt is mondhatjuk, hogy $y = x^2$ $(-\infty, 0)$ - ben szigoruan monoton fogyó, $(0, +\infty)$ - ben szigoruan monoton növekvő.)

b.) $y = x^3$, $y' = 3x^2$,

$(-\infty, +\infty)$ - ben $y' \geq 0$, sőt, az $x = 0$ hely kivételével $y' > 0$, tehát y $(-\infty, +\infty)$ - ben szigoruan monoton növekedő.

c.) $y = \sin x$, $y' = \cos x$.

Egy periódust vizsgálva, $0 \leq x \leq 2\pi$ esetén

$[0, \frac{\pi}{2}]$ és $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ - ben $y' \geq 0$, sőt az $x = \frac{\pi}{2}$ és $x = \frac{3\pi}{2}$

hely kivételével $y' > 0$, y szigoruan monoton növekedő,

$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ - ben $y' \leq 0$, sőt az intervallum két végpontja kivételével $y' < 0$, y szigoruan monoton fogyó.

d.) $y = \cos x$, $y' = -\sin x$.

Egy periódust vizsgálva, $0 \leq x \leq 2\pi$ esetén

$[0, \pi]$ - ben $y' \leq 0$, sőt az intervallum két végpontja kivételével $y' < 0$, y szigoruan monoton fogyó,

$[\pi, 2\pi]$ - ben $y' \geq 0$, sőt az intervallum két végpontja kivételével $y' > 0$, y szigoruan monoton növekedő.

e.) $y = \operatorname{tg} x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

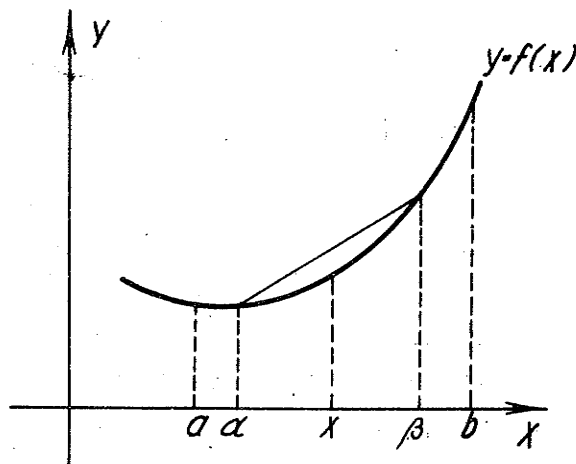
Egy periódust vizsgálva, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ esetén

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ - ben $y' > 0$, y szigoruan monoton növekedő.

2^o Az $y = f(x)$ függvény görbájének alaki viszonyaira nézve az alábbiak mondhatók:

Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény az I intervallumban alulról nézve konvex (domboru), ha bármely $\alpha \in I$, $\beta \in I$, $\alpha < \beta$ esetén az $y = f(x)$ görbe pontjai az (α, β) intervallumban legfeljebb akkora ordinátájuk, mint az α és β abszcisszáju görbepontokat összekötő hur megfelelő pontjai ($y = f(x)$ görbéje (α, β) - ben a fent definiált hur alatt vagy a huron halad).



104. ábra

Akkor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény az I intervallumban alulról nézve konkáv (homorú), ha bármely $\alpha \in I$, $\beta \in I$, $(\alpha < \beta)$ esetén az $y = f(x)$ görbe pontjai az (α, β) intervallumban legalább akkora ordinátájúak, mint az α és β abszcisszájú görbepontokat összekötő hur megfelelő pontjai ($y = f(x)$ görbéje (α, β) - ban a fent definiált hur felett, vagy a huron halad.)

Ha az $y = f(x)$ görbe pontjainak ordinátái határozottan kisebbek (nagyobbak) mint a kérdéses hur pontjainak ordinátái, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ szigorúan konkáv (konkáv).

Tétel

Ha $f(x)$ az I intervallumban differenciálható, akkor ahhoz, hogy konkáv (konkáv) legyen, szükséges és elégséges, hogy $f'(x)$ I -ben monoton növekvő (fogyó) legyen, míg ahhoz, hogy $f(x)$ szigorúan konkáv (konkáv) legyen, szükséges és elégséges, hogy $f'(x)$ szigorúan monoton növekvő (fogyó) legyen.

A bizonyítást csak konkáv (konkáv) $f(x)$ esetére végezzük el.

Bizonyítás

Tegyük fel először, hogy $f(x)$ I -ben konkáv. Akkor $\alpha \in I$, $\beta \in I$, $x \in I$ esetén, amennyiben $\alpha < x < \beta$ (lásd 104. ábra)

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta}.$$

Ha mármost $x \rightarrow \alpha$, akkor

$$f'(\alpha) \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

ha $x \rightarrow \beta$, akkor

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq f'(\beta)$$

adódik, vagyis két részlet-eredményünket összekapcsolva

$$f'(\alpha) \leq f'(\beta),$$

azaz $f'(x)$ monoton növekedő.

Ha megfordítva, $f'(x)$ monoton növekedő I -ben, akkor $\alpha \in I$, $\beta \in I$, $x \in I$, $\alpha < x < \beta$ esetén

$$(x) \quad \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta},$$

mert a Lagrange-féle középértéktétel szerint (α, x) -ben kell, hogy legyen olyan ξ , (x, β) -ban pedig olyan η hely, hogy

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\xi) \quad (\alpha < \xi < x), \text{ ill.}$$

$$f'(\eta) = \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \quad (x < \eta < \beta),$$

és mivel $\xi < \eta$, $f'(x)$ feltételezett monoton növekedő volta miatt $f'(\xi) \leq f'(\eta)$, azaz

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} = f'(\eta),$$

amint állítottuk. (x) -ből azonban már következik, hogy (lásd 104. ábra)

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

azaz, hogy az $y = f(x)$ görbe x abszcisszájú pontja az α és β abszcisszájú görbepontokat összekötő hur alatt, vagy legfeljebb rajta fekszik, ami épp azt jelenti, hogy $f(x)$ konvex.

Hasonló az okoskodás I -ben konkáv $f(x)$ függvény esetében.

A bizonyítás során talált

$$f'(\alpha) \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq f'(\beta) \quad (\alpha < \beta)$$

egyenlőtlenség azt mutatja, hogy differentiálható konvex függvény görbéje az érintő felett, vagy legalábbis rajta halad. Hasonlóképpen az I - ben konkáv függvényre nézve végezve el az okoskodást nyerjük, hogy differentiálható konkáv függvény görbéje az érintő alatt, vagy legalábbis rajta halad. (Szigoruan konvex (konkáv) függvény görbéje az érintő felett (alatt) halad.)

Az itt elmondott tulajdonságot szokás a konvexitás, ill. konkavitás definíciójaként is kimondani.

Most bizonyított tételünket a monoton függvényekre vonatkozó - e fejezet elején bebizonyított - tétellel összekapcsolva a következő tételt mondhatjuk ki:

Ha $f(x)$ valamely I intervallumban kétszer differentiálható, akkor ahhoz, hogy itt konvex (konkáv) legyen, szükséges és elégséges, hogy $x \in I$ esetén $f''(x) \geq 0$, ($f''(x) \leq 0$) fennálljon.

Ha ezen egyenlőtlenségben véges számú $x \in I$ hely kivételével a $>$ jel ($<$ jel) érvényes, akkor $f(x)$ I - ben szigoruan konvex (konkáv).

Például:

a.) $y = x^2$, $y' = 2x$, $y'' = 2$, s mivel $-\infty < x < +\infty$ esetén $y'' > 0$, $y = x^2$ $(-\infty, +\infty)$ - ben konvex.

b.) $y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$.

Ha $-\infty < x < 0$, akkor $y'' < 0$, a függvény konkáv,
ha $0 < x < +\infty$, akkor $y'' > 0$, a függvény konvex.

c.) $y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$.

Egy periódust vizsgálva, ha

$0 < x < \pi$, akkor $y'' < 0$, a függvény konkáv, ha

$\pi < x < 2\pi$, akkor $y'' > 0$, a függvény konvex.

d.) $y = \cos x$, $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$.

Egy periódust vizsgálva, ha

$0 < x < \frac{\pi}{2}$, ill. ha $3\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$, akkor $y'' < 0$, a függvény konkáv, ha

$\frac{\pi}{2} < x < 3\frac{\pi}{2}$, akkor $y'' > 0$, a függvény konvex.

e.) $y = \operatorname{tg} x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

Egy periódust vizsgálva, ha

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$, akkor $y'' < 0$, a függvény konkáv, ha

$0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor $y'' > 0$, a függvény konvex.

3^o Definíció

Az $f(x)$ függvényt az a helyen növekedőnek (fogyónak) mondjuk, ha van olyan pozitív δ , hogy

$$a - \delta < x_1 < a < x_2 < a + \delta$$

esetén

$$f(x_1) < f(a) < f(x_2)$$

$$(f(x_1) > f(a) > f(x_2)).$$

(E fogalom élesen megkülönböztetendő a valamely intervallumban monoton növekedő, vagy fogyó függvény fogalmától!)

Tétel

Ha $f(x)$ az a helyen növekvő (fogyó) és differenciálható, akkor $f'(a) \geq 0$ ($f'(a) \leq 0$). Ha $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), akkor $f(x)$ az a helyen növekvő (fogyó).

A tétel igaz volta a differenciálhányados értelmezéséből azonnal következik.

Pl. $y = \sin x$ az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen, mivel $\cos \frac{\pi}{4} > 0$ növekvő,

$y = x^2$ az $x = 0,001$ helyen, mivel $2 \cdot 0,001 > 0$ növekvő,

$y = x^2$ az $x = -10^{-6}$ helyen, mivel $2 \cdot (-10^{-6}) < 0$ fogyó.

4^o Definíció

Azt mondjuk, hogy $f(x)$ - nek az a helyen helyi (lokális) maximuma van, ha van olyan pozitív δ , hogy

$$a - \delta < x < a + \delta$$

esetén

$$f(x) \leq f(a).$$

Azt mondjuk, hogy $f(x)$ - nek az a helyen helyi (lokális) minimuma van, ha van olyan pozitív δ , hogy

$$a - \delta < x < a + \delta$$

esetén

$$f(x) \geq f(a).$$

Tétel

Ha $f(x)$ az a helyen differenciálható és ott helyi szélsőértéke van, akkor

$$f'(a) = 0.$$

Tételünk értelmében tehát $f'(a) = 0$ szükséges feltétel arra nézve, hogy $f(x)$ - nek az a helyen szélsőértéke legyen.

A tételt igen könnyű bizonyítani: ha ül. $f'(a) \neq 0$ állna, akkor $f(x)$ az a helyen növekvő vagy fogyó volna, és így a - hoz tetszőleges közeli helyeken felvenne $f(a)$ - nál kisebb és nagyobb értékeket egyaránt, s így nem volna $f(x)$ - nek az a helyen helyi szélsőértéke.

Azt a tényt, hogy a fenti tételben kimondott feltétel nem elégséges a helyi szélsőérték létezéséhez pl. az $y = x^3$ függvény vizsgálatával könnyű belátnunk. E függvény $(-\infty, +\infty)$ - ben szigorúan monoton növekedő, tehát sehol sincsen lokális szélsőértéke, annak ellenére, hogy $y'(0) = [3x^2]_{x=0} = 0$.

A helyi szélsőérték létezését biztosító elégséges feltételeket az alábbi tételben mondhatunk ki:

I. Ha $f(x)$ az a hely környezetében differenciálható, $f'(a) = 0$ és $f'(x)$ az a helyen növekvő (fogyó), akkor $f(x)$ - nek az a helyen lokális minimuma (maximuma) van.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy pl. $f'(x)$ növekvő az a helyen. Akkor alkalmas pozitív δ - ra

$$a < x \leq a + \delta$$

esetén

$$f'(x) > f'(a) = 0,$$

míg

$$a - \delta \leq x < a$$

esetén

$$f'(x) < f'(a) = 0.$$

Igy $f(x)$ az $[a, a + \delta]$ intervallumban monoton növekvő, az $[a - \delta, a]$ intervallumban monoton fogyó. Ezért

$$a - \delta \leq x \leq a + \delta$$

esetén

$$f(x) \geq f(a),$$

tehát $f(x)$ - nek az a helyen lokális minimuma van (pontosabban az is kiderül, hogy $a - \delta \leq x \leq a + \delta$ esetén $x \neq a$ mellett határozottan $f(x) > f(a)$).

Hasonlóan látható be a tétel állítása akkor, ha $f'(x)$ fogyó az a helyen.

Könnyen igazolható az alábbi állítás:

Ha $f(x)$ az a hely környezetében differenciálható, $f'(a) = 0$ és alkalmas pozitív δ -ra $a - \delta \leq x \leq a + \delta$, $x \neq a$ esetén $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), akkor $f(x)$ - nek az a helyen nincs szélsőértéke.

Állításunk nyilván igaz, hiszen, ha $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) az $[a - \delta, a + \delta]$ intervallumban ($x \neq a$), akkor $f(x)$ $[a - \delta, a + \delta]$ - ban szigorúan monoton növekvő (fogyó), s így valóban nem lehet helyi szélsőértéke.

A fenti megállapításokat a következő tételben foglalhatjuk össze:

II. Ha $f'(x)$ az a hely környezetében állandó előjelű, akkor $f(x)$ - nek nincs szélsőértéke az a helyen, ha pedig $f'(x)$ az a helyen előjelet vált, akkor $f(x)$ - nek lokális minimuma, vagy maximuma van az a helyen aszerint, hogy $f'(x)$ növekedő, vagy fogyó az a helyen.

Mivel egy függvény előjelváltását nem mindig könnyű megállapítani, azért sokszor jobban használható a szélsőérték létezésére elégséges feltételt biztosító következő tétel:

III. Ha $f(x)$ az a helyen r - szer differenciálható ($r \geq 2$) és $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(r-1)}(a) = 0$, $f^{(r)}(a) \neq 0$, akkor $f(x)$ - nek az a helyen szélsőértéke van, vagy nincs szélsőértéke aszerint, hogy r páros, vagy páratlan szám; a szélsőérték minimum vagy maximum aszerint, hogy $f^{(r)}(a) > 0$, vagy $f^{(r)}(a) < 0$.

Bizonyítás

Tegyük fel pl. hogy $f^{(r)}(a) > 0$. Akkor $f^{(r-1)}(x)$ növekvő az a helyen, s minthogy $f^{(r-1)}(a) = 0$, azért $f^{(r-2)}(a) = 0$ miatt az a helyhez közeli $x \neq a$ mellett $f^{(r-2)}(x) > 0$. Ez annyit jelent, hogy alkalmas pozitív δ -ra $f^{(r-3)}(x)$ szigorúan monoton növekvő az $[a - \delta, a + \delta]$ intervallumban, és így $f^{(r-3)}(a) = 0$ folytán $f^{(r-4)}(x)$ - nek az a helyen lokális minimuma van. Hasonlóan következve tovább páros r esetén az adódik, hogy $f(x)$ - nek az a helyen lokális minimuma van, páratlan r esetén pedig az adódik, hogy $f(x)$ az $[a - \delta, a + \delta]$ intervallumban szigorúan monoton növekvő, tehát nincs szélsőértéke az a helyen.

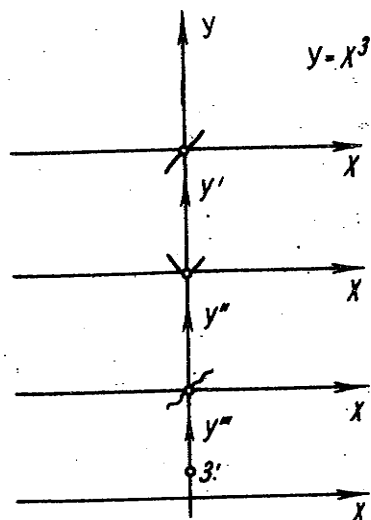
Hasonló az okoskodás $f^{(r)}(a) < 0$ esetén.

A fenti okoskodás egyes lépéseit rajzban az $y = x^3$ és $y = x^4$ függvény esetében (az $x = 0$ helyen) a 105. és 106. ábrák mutatják. (lásd 312. old.)

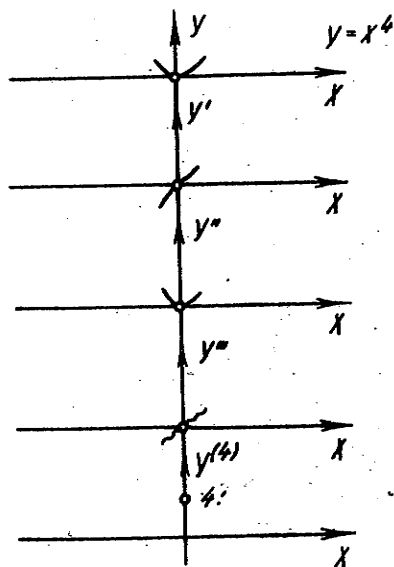
A lokális maximum (minimum) fogalmától meg kell különböztetni $f(x)$ valamely I intervallumbeli maximális (minimális) függvényértékének fogalmát.

Definíció

$y = f(x)$ valamely I intervallumbeli maximális (minimális) függvényértéke az I intervallumban felvett lokális maximumok (minimumok), és amennyiben I zárt vagy félig zárt I végpontjaiban vagy szöbajövő végpontjában felvett függvényértékek, közül a legnagyobb (legkisebb).



105. ábra



106. ábra

Pl.

a.) $y = \sin x$ ($y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$).

Az $x = \frac{\tilde{\pi}}{2} + 2k\tilde{\pi}$ helyeken ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) $y' = 0$, $y'' < 0$, a függvénynek

likális maximuma van,

az $x = 3 \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ helyeken ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) $y' = 0$, $y'' > 0$

a függvénynek lokális minimuma van.

b.) $y = \cos x$ ($y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$).

Az $x = 2k\pi$ helyeken ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) $y' = 0$, $y'' < 0$,

a függvénynek lokális maximuma van,

az $x = (2k+1)\pi$ helyeken ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) $y' = 0$, $y'' > 0$,

a függvénynek lokális minimuma van.

c.) $y = x^{2k}$, ($k=1, 2, \dots$), $y' = 2kx^{2k-1}$, ..., $y^{(2k)} = (2k)!$

Az $x = 0$ helyen $y = y' = 0$. Az első el nem tűnő derivált a $2k$ -edik, s mivel ez párosadik és $(2k)! > 0$, a függvénynek az $x = 0$ helyen lokális minimuma van.

d.) $y = x^{2k+1}$, ($k=1, 2, \dots$), $y' = (2k+1)x^{2k}$, ..., $y^{(2k+1)} = (2k+1)!$

Az $x = 0$ helyen $y = y' = 0$, az első el nem tűnő derivált a $(2k+1)$ -edik, s mivel $(2k+1)$ páratlan szám, a függvénynek az $x = 0$ helyen nincs szélsőértéke.

5^o Definíció

Azon pontokat, melyek $f(x)$ - nek egy konvex és egy konkáv szakaszát választják el egymástól, inflexiós pontoknak nevezzük.

Ha $f(x)$ az a inflexiós pont környezetében differenciálható, akkor - definíciónk értelmében - az a hely az $f'(x)$ derivált egy monoton növekvő és monoton fogyó szakaszát választja el egymástól, úgyhogy az a helyen $f'(x)$ - nek lokális szélsőértéke van. Következésképpen a következő tételt mondhatjuk ki:

Ha $f(x)$ az a helyen kétszer differenciálható és $f(x)$ -nek a inflexiós pontja, akkor $f''(a) = 0$.

Tételünk értelmében tehát $f''(a) = 0$ szükséges feltétel arra nézve, hogy $f(x)$ - nek az a hely inflexiós pontja legyen.

A szélsőértékekre vonatkozó elégséges feltételeket biztosító tételekhez teljesen hasonló módon bizonyíthatók az alábbi tételek:

I. Ha $f''(x)$ az a helyen 0, és a környezetében állandó előjellű, akkor $f(x)$ - nek az a helyen nincs inflexiós pontja; ha $f''(x)$ az a helyen előjelet váltva lesz 0, akkor $f(x)$ - nek a - ban inflexiós pontja van.

II. Ha $f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(r-1)}(a) = 0$, $f^{(r)}(a) \neq 0$, akkor $f(x)$ - nek az a helyen inflexiós pontja van, vagy nincs inflexiós pontja aszerint, hogy r páratlan, vagy páros.

Pl.

$$a.) y = x^{2k+1} \quad (k=1, 2, \dots), \quad y' = (2k+1)x^{2k},$$

$$y'' = (2k+1)2kx^{2k-1}, \dots, y^{(2k+1)} = (2k+1)!$$

Az $x = 0$ helyen $y'' = 0$ és mivel az első el nem tűnő derivált páratlanodik, az $x = 0$ hely inflexiós pont.

$$b.) y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x.$$

Az $x = k\pi$ helyeken ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) $y'' = 0$, de $y''' \neq 0$, tehát e helyek inflexiós pontok.

$$c.) y = \cos x, \quad y' = -\sin x, \quad y'' = -\cos x, \quad y''' = \sin x.$$

Az $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ helyeken ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) $y'' = 0$, de $y''' \neq 0$, tehát e helyek inflexiós pontok.

$$d.) y = \tan x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}, \quad y''' = \frac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

Az $x = k\pi$ helyeken ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) $y'' = 0$, $y''' \neq 0$, tehát e helyek inflexiós pontok.

$$b.) y = x^4, \quad y' = 4x^3, \quad y'' = 12x^2, \quad y''' = 24x, \quad y^{(4)} = 24.$$

Az $x = 0$ helyen $y'' = 0$, mégis itt inflexió, mert az első el nem tűnő derivált a negyedik, tehát párosadik.

6^o Összefoglalva eddigi eredményeinket, valamely függvény vizsgálatán monoton növekvő és fogyó szakaszainak, lokális szélsőértékeinek, konvex és konkáv szakaszainak, inflexiós pontjainak, stb. felkutatását, és ezek alapján a görbe alakjának megállapítását értjük. Az előbbieket szerint e feladatot differenciálható függvény esetében a függvény első és második deriváltjának előjelviszonyait vizsgálva oldhatjuk meg. Gyakorlatilag legfontosabb az első és második derivált zérushelyeinek felkutatása, mert ha a deriváltak folytonosak, akkor két szomszédos zérushely közötti intervallumban nyilván állandó előjelűek. Gyakran csak a függvény szélsőértékei érdekelnek, ilyenkor sokszor egyszerűbb az első derivált előjelváltásának megvizsgálása helyett az első derivált zérushelyein a magasabbrendű deriváltak előjelét megvizsgálni (4^o III tétel).

Példák függvények vizsgálatára:

$$a.) f(x) = (x-1)^3(x-2)^6.$$

Először kiszámítjuk $f'(x)$ és $f''(x)$ - et:

$$f'(x) = 3(x-1)^2(x-2)^6 + (x-1)^3 6(x-2)^5 =$$

$$= (x-1)^2(x-2)^5(9x-12).$$

$$f''(x) = 2(x-1)(x-2)^5(9x-12) + (x-1)^2 5(x-2)^4(9x-12) +$$

$$+ (x-1)^2(x-2)^5 9 = \dots =$$

$$= 6(x-1)(x-2)^4(12x^2 - 32x + 21)$$

Ezután megkeressük $f'(x)$ és $f''(x)$ zérushelyeit:

$$f'(x) = 0, \text{ ha } x = 1, x = 2, x = \frac{4}{3},$$

$$f''(x) = 0, \text{ ha } x = 1, x = 2, x = \frac{3}{2}, x = \frac{7}{6}$$

(az utóbbi két gyököt az $12x^2 - 32x + 21 = 0$ egyenlet megoldásaként kaptuk).

$f'(x)$ és $f''(x)$ - nek a fenti zérushelyek által meghatározott intervallumokban az előjelét legkönnyebben az alábbi táblázat alapján állapíthatjuk meg:

	$(-\infty, 1)$	$(1, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, 2)$	$(2, +\infty)$
$(x-1)^2$	+	+	+	+
$(x-2)^5$	-	-	-	+
$(9x-12)$	-	-	+	+
$f'(x)$	+	+	-	+

	$(-\infty, 1)$	$(1, \frac{7}{6})$	$(\frac{7}{6}, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, 2)$	$(2, +\infty)$
$(x-1)$	-	+	+	+	+
$(x-2)^4$	+	+	+	+	+
$(12x^2 - 32x + 21)$	+	+	-	+	+
$f''(x)$	-	+	-	+	+

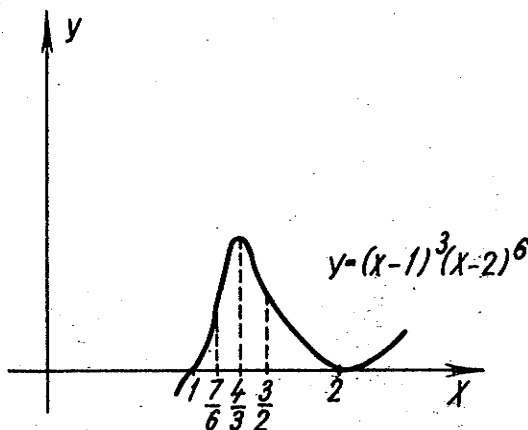
($y = 12x^2 - 32x + 21$ előjelviszonyait legkönnyebben úgy állapíthatjuk meg, hogy mivel $y'' = 24 > 0$, ábrázolva alulról konvex parabolaívet nyerünk, mely az abszcisszatengelyt az $x = \frac{7}{6}$ és $x = \frac{3}{2}$ pontokban metszi, és így nyilván e két metszéspont között negatív, különben pozitív értékeket vesz fel).

A talált adatok alapján az $f(x)$ függvény menetéről a következő táblázatot állíthatjuk össze:

$-\infty < x < 1$	$1 < x < \frac{7}{6}$	$\frac{7}{6} < x < \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x < 2$	$2 < x < +\infty$
monoton növekvő		monoton fogyó		monoton növekvő	
konkáv	konvex	konkáv	konvex		

az $x = \frac{4}{3}$ helyen lokális maximuma, az $x = 2$ helyen lokális minimuma van a függvénynek, $x = 1$, $x = \frac{7}{6}$, $x = \frac{3}{2}$ inflexiós pont.

A függvény vázlatos ábrázolása a 107. ábrán látható.



107. ábra

$$b.) f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 3}$$

E függvény minden valós x -re értelmezve van, mert nevezőjének nincs valós zérushelye ($x^2 - 3x + 3 = 0$ diszkriminánsa $9 - 12 = -3 < 0$), $x \rightarrow +\infty$ és $x \rightarrow -\infty$ esetén $f(x) \rightarrow 0$, egyébként $f(x) > 0$.

$$f'(x) = \frac{-2x+3}{(x^2-3x+3)^2},$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-3x+3)^2 - (-2x+3)2(x^2-3x+3)(2x-3)}{(x^2-3x+3)^4} = \dots =$$

$$= \frac{6x^2-18x+12}{(x^2-3x+3)^3}.$$

$f'(x)$ és $f''(x)$ nevezője mindig pozitív, így előjelviszonyaik csupán számlálójuk előjelviszonyaitól függenek. Mármost

$$-2x+3 = 0, \text{ ha } x = \frac{3}{2},$$

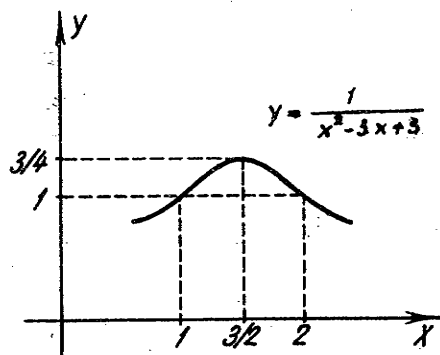
$$x < \frac{3}{2} \text{ esetén } -2x+3 > 0,$$

$$x > \frac{3}{2} \text{ esetén } -2x+3 < 0.$$

Mivel $y = 6x^2 - 18x + 12$ alulról konvex parabola ($y'' = 12 > 0$), mely az X tengelyt az $x = 1$ és $x = 2$ pontokban metszi, $f''(x) < 0$, ha $1 < x < 2$, különben pedig $f''(x) > 0$. A függvény menetéről tehát az alábbi táblázat készíthető el:

	$(-\infty, 1)$	$(1, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	-	-
$f''(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	mon. növ. konvex	mon. növ. konkáv	mon. fogyó konkáv	mon. fogyó konvex

Az $x = 1$ és $x = 2$ inflexiós pont, itt $f(x)$ értéke: 1 az $x = \frac{3}{2}$ helyen $f(x)$ - nek maximuma van, a maximális függvényérték: $\frac{4}{3}$. (108. ábra, lásd 318. old.)



108. ábra

c.) A már korábban tárgyalt

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0)$$

lineáris törtfüggvény menetét a következőképpen vizsgálhatjuk meg:

$f(x)$ nincs értelmezve az $x = -\frac{d}{c}$ helyen. Ha $x \rightarrow +\infty$ vagy $x \rightarrow -\infty$, akkor $f(x) \rightarrow \frac{a}{c}$.

$$f'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2},$$

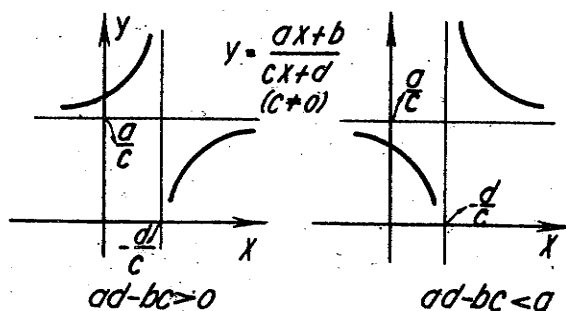
tehát $f'(x)$ előjele megegyezik $ad-bc$ előjelével.

$$f''(x) = \frac{-2c(ad-bc)}{(cx+d)^3},$$

$f''(x)$ előjele megegyezik $-c(ad-bc)$ $(cx+d)$ előjelével. Mivel azonban $-c(cx+d)$ előjele $x > -\frac{d}{c}$ esetén negatív, $x < -\frac{d}{c}$ esetén pozitív, a függvény menetéről a következő két táblázat készíthető:

	$ad-bc > 0$			$ad-bc < 0$		
	$-\infty < x < -\frac{d}{c}$	$x = -\frac{d}{c}$	$-\frac{d}{c} < x < +\infty$	$-\infty < x < -\frac{d}{c}$	$x = -\frac{d}{c}$	$-\frac{d}{c} < x < +\infty$
$f'(x)$	+		+	-		-
$f''(x)$	+		-	-		+
$f(x)$	mon. nov konvex	nincs ért.	mon. növ. konkáv	mon. fogyó konkáv	nincs ért.	mon. fogyó konvex

Könnyű belátni, hogy az $x = -\frac{d}{c}$ helyen $f(x)$ jobboldali határértéke $ad-bc > 0$ esetén $-\infty$, $ad-bc < 0$ esetén pedig $+\infty$ és hogy e pontban a baloldali határértéke ellenkező előjelű végtelen, mint a jobboldali. Mindezt figyelembe véve a görbe képe a 109. ábrán látható.

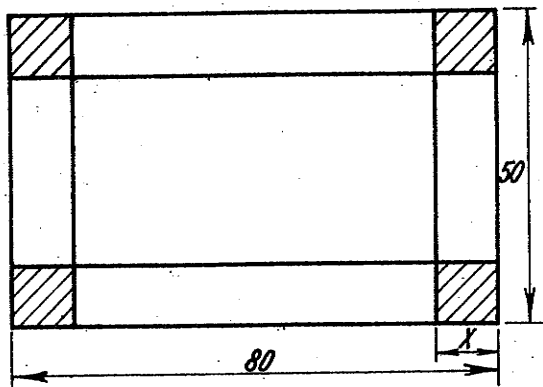


109. ábra

Könnyű megmutatni, hogy az $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$, $ad-bc \neq 0$) görbe egyenlőoldalu hiperbola, melynek aszimptotái az $x = -\frac{d}{c}$ és $y = \frac{a}{c}$ egyenesek. Erre a kérdésre később még visszatérünk.

d.) 50 cm x 80 cm nagyságú bádoglemezből felül nyitott viztartályt akarunk készíteni, úgy, hogy négy sarkából négy négyzetet kivágunk és a kapott négy téglalapot felhajtjuk. Készíthető-e ez a viztartály 20 literesre? (110. ábra.) (320.o.)

Távolságegységnek a dm - t választva, jelöljük x - szel a levágott négyzetek élhosszát, K - val a tartály köbtartalmát. Az a kérdés, hogy K maximális értéke eléri-e a 20 dm^3 -t?



110. ábra

$$K = x(5-2x)(8-2x), \quad (\text{nyilván } 0 \leq x \leq 2,5)$$

$$\begin{aligned} K' &= (5-2x)(8-2x) + x(-2)(8-2x) + x(5-2x)(-2) = \dots = \\ &= 4(3x^2 - 13x + 10). \end{aligned}$$

$$K' = 0, \text{ ha } x = \frac{13 \pm \sqrt{169-120}}{6} = \frac{13 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{10}{3} \\ 1 \end{cases}$$

Ezen értékek közül nyilván csak $x = 1$ jön számításba, mert $x = \frac{10}{3}$ esetén $8 > 2x > 5$, úgyhogy $K < 0$ adódik. $x = 1$ csakugyan lokális maximumot szolgáltat, mert

$$K''(x) = 4(6x-13)$$

folytán

$$K''(1) = -28 < 0.$$

Mivel pedig

$$K(1) = 18,$$

tehát a tartály maximális köbtartalma 18 liter ($x=0$, ill. $x=2,5$ esetén $K=0$), 20 literes tartály nem készíthető.

e.) Egy 4 m szélességű torony alján 2 m magas ajtó van. Bevihető-e a toronyba 8 m hosszú létra?

Számítsuk ki, hogy abban a helyzetben, amikor a létra egyik vége a talajon fekszik, másik vége pedig a torony átellenes falához ér (lásd 111. ábra) milyen magasan van a létrának az ajtó síkjába eső pontja. A létra bevihető a toronyba, ha ez a h -val jelölt magasság nem haladja meg a 2 m-t, miközben a létra

talajon fekvő végpontjának a torony átellenes falától mért x távolsága 8 - től 4 - ig változik.

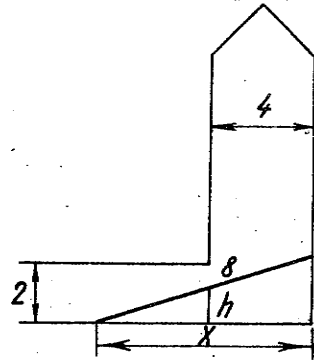
Mint hogy a 111. ábrából leolvashatóan

$$\frac{h}{x-4} = \frac{\sqrt{8^2 - x^2}}{x},$$

azaz

$$h = \left(1 - \frac{4}{x}\right) \sqrt{64 - x^2},$$

azért $x = 4$ és $x = 8$ esetén $h = 0$, $4 < x < 8$ esetén pedig $h > 0$, és így h a $[4, 8]$ intervallumban felvett legnagyobb értékét az intervallum belsejében veszi fel. Ezen a helyen



111. ábra

$$\frac{dh}{dx} = \frac{4}{x^2} \sqrt{64 - x^2} + \left(1 - \frac{4}{x}\right) \frac{-x}{\sqrt{64 - x^2}} = 0,$$

vagyis

$$4(64 - x^2) - x^2(x - 4) = 0,$$

$$x^3 = 256.$$

$$x \approx 6,35.$$

Ebből

$$h \approx \left(1 - \frac{4}{6,35}\right) \sqrt{64 - 6,35^2} \approx 0,37 \sqrt{23,7} \approx 1,8,$$

a létra tehát bevihető a toronyba.

7^o Mint ahogy azt az előbbi függvényvizsgálatoknál láthattuk, fontos a függvény menetének jellemzéséhez tudni, hogyan változik a függvény $x \rightarrow \infty$ esetén.

Az alábbiakban azzal a kérdéssel fogunk foglalkozni, mikor adható meg egy $y = Ax + B$ egyenletű egyenes, melyre, és a vizsgált $f(x)$ függvényre

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (Ax + B)) = 0,$$

Ha ilyen lineáris függvény létezik, akkor azt az $y = f(x)$ görbe aszimptotájának nevezzük. Az aszimptota létezésének és meghatározásának problémája olyan A és B számok létezésének és meghatározásának a kérdésére egyszerűsödik, amelyre (*) fennáll.

(*) -ből adódik, hogy ez esetben

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x}\right)\right) = 0,$$

ami csak úgy állhat, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x} \right) = 0,$$

azaz

$$(KK) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

A véges $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ határérték létezése azonban az aszimptota létezésének csak szükséges, de nem elégséges feltétele. $f(x)$ görbéjének akkor lesz aszimptotája, ha még (K) -ből adódóan -

$$(KKK) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = B.$$

Nyilván, ha a (KKK) - gal jelölt egyenlőség fennáll valamilyen A - ra, akkor szükségképpen fennáll a (KK) - gal jelölt egyenlőség is. A megfordított megfontolás azonban nem áll: a (KK) - gal jelölt egyenlőség teljesülhet, de ugyanakkor lehetséges, hogy (KKK) nem ad véges határértéket; ekkor tehát $f(x)$ görbéjének nincs aszimptotája.

Ahhoz tehát, hogy $f(x)$ görbéjének legyen aszimptotája, szükséges és elégséges, hogy a (KK) és (KKK) véges határérték létezzék; az itt adódó A és B számokkal felírt

$$y = Ax + B$$

lineáris függvény lesz a

$$y = f(x)$$

görbe aszimptotája.

Előfordul azonban az az eset is, hogy pl.

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = +\infty,$$

és

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\infty.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ görbéjének az

$$x = 2$$

egyenes aszimptotája.

Általában az $f(x)$ görbének aszimptotája az

$$x = a$$

egyenes, ha $f(x)$ -nek az a helyen jobb- és baloldali határértéke $+\infty$ vagy $-\infty$.

Pl.

$$y = \frac{1}{x}$$

aszimptotái

$$y = 0 \text{ és } x = 0,$$

mert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - 0 \right) = 0,$$

és

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Hasonlóan látható be, hogy

$$y = \frac{1}{x^2}$$

aszimptotái

$$y = 0 \text{ és } x = 0.$$

Pl. az $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$, $ad-bc \neq 0$) lineáris törtfüggvény esetében

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax+b}{cx+d}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx^2+dx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}}{c + \frac{d}{x}} = 0 = A,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+b}{cx+d} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} = \frac{a}{c} = B,$$

vagyis a függvény görbéjének van aszimptotája és ennek egyenlete

$$y = \frac{a}{c},$$

Az $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$, $ad-bc \neq 0$) függvény görbéjének másik aszimptotája

$$x = -\frac{d}{c},$$

mert

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c} + 0} \frac{ax+b}{cx+d} = -\infty, \text{ ha } ad-bc > 0$$

és

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c} - 0} \frac{ax+b}{cx+d} = +\infty, \text{ ha } ad-bc > 0$$

($ad-bc < 0$ esetében épp fordítva, az $x = -\frac{d}{c}$ helyen jobboldali határértékként $+\infty$, baloldali határértékként pedig $-\infty$ adódik.)

34.) A L' HOSPITAL-SZABÁLY

Ismert határértékű függvényekből racionális műveletekkel felépített függvények határértékének kiszámítása általában alkatelemenkénti határátmenettel végezhető el. Pl.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)} = \frac{4}{5}.$$

Nem tudunk azonban az alkatelemek határértékének ismeretében az összetett kifejezés határértékére következtetni azokban az esetekben, amikor az alkatelemenkénti határátmenet a $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ kifejezések valamelyikére vezet. Pl. az $\frac{x}{x}$, $\frac{2x}{x}$, $\frac{x}{2}$, $\frac{x^3}{x}$ kifejezések mindegyikében a számláló és

nevező határértéke $x \rightarrow +\infty$ esetén $+\infty$: ennek ellenére az első kifejezés határértéke $x \rightarrow +\infty$ esetében 1, a másodiké 2, a harmadiké 0, a negyediké $+\infty$. Ügyeskedéssel több esetben meghatároztuk az ilyen típusú határértékeket is, sok esetben azonban az ún. l'Hospital-szabály alkalmazható a határérték kiszámítására. E szabály így hangzik:

Legyen a valamely véges érték, vagy $+\infty$, vagy $-\infty$ az $f(x)$ és $g(x)$ függvények pedig legyenek a valamelyik oldali környezetében differenciálhatók, ugyanitt legyen $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$. Ha továbbá

$$\text{vagy } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

$$\text{vagy } \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty,$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

amennyiben az egyenlőség jobboldalán látható határérték létezik; a határértékek mindenütt az a hely megfelelő oldaláról való közeledés mellett értendők.

Bizonyítás

Legyen

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

ahol L lehet véges érték, vagy $+\infty$, vagy $-\infty$. Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Legyen

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

tetszőleges, a megfelelő oldalról a -hoz tartó sorozat. Be kell látnunk, hogy

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow L.$$

Ebből a célból készítsünk először is egy $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ sorozatot olyan módon, hogy ez is a megfelelő oldalról a -hoz tartson és emellett

$$\frac{f(\alpha_n)}{g(\alpha_n)} \rightarrow 0, \quad \frac{g(\alpha_n)}{g(x_n)} \rightarrow 0$$

fennálljon. Ilyen sorozatot a következőképpen nyerhetünk:

Ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

akkor legyen α_1 az $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sorozatnak egy olyan távoli tagja, melyre

$$\left| \frac{f(\alpha_1)}{g(\alpha_1)} \right| < 1, \quad \left| \frac{g(\alpha_1)}{g(x_1)} \right| < 1;$$

α_2 legyen ugyanezen sorozatnak egy olyan α_1 után álló tagja, melyre

$$\left| \frac{f(\alpha_2)}{g(\alpha_2)} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{g(\alpha_2)}{g(x_2)} \right| < \frac{1}{2},$$

s általában α_n legyen az $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sorozatnak egy α_{n-1} után következő olyan távoli tagja, melyre

$$\left| \frac{f(\alpha_n)}{g(x_n)} \right| < \frac{1}{n}, \quad \left| \frac{g(\alpha_n)}{g(x_n)} \right| < \frac{1}{n}.$$

Az így választott $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sorozat nyilván megfelel a célnak.

Ha viszont

$$\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty,$$

akkor jelentsen p_1 olyan nagy indexet, hogy $n \geq p_1$ esetén

$$\left| \frac{f(x_1)}{g(x_n)} \right| < 1, \quad \left| \frac{g(x_1)}{g(x_n)} \right| < 1$$

legyen; p_2 jelentsen azután olyan p_1 - nél nagyobb indexet, hogy $n \geq p_2$ esetén

$$\left| \frac{f(x_2)}{g(x_n)} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{g(x_2)}{g(x_n)} \right| < \frac{1}{2},$$

legyen; általában p_k jelentsen olyan p_{k-1} - nél nagyobb indexet, hogy $n \geq p_k$ esetén

$$\left| \frac{f(x_k)}{g(x_n)} \right| < \frac{1}{k}, \quad \left| \frac{g(x_k)}{g(x_n)} \right| < \frac{1}{k}$$

fennálljon. Ha most megállapodunk abban, hogy

$$p_1 \leq n < p_2 \text{ esetén } \alpha_n = x_1,$$

$$p_2 \leq n < p_3 \text{ esetén } \alpha_n = x_2,$$

.

.

$$p_k \leq n < p_{k+1} \text{ esetén } \alpha_n = x_k$$

legyen, akkor az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ sorozat ismét a kívánt tulajdonságu.

Mármost

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} &= \frac{f(x_n) - f(\alpha_n)}{g(x_n)} + \frac{f(\alpha_n)}{g(x_n)} = \\ &= \frac{f(x_n) - f(\alpha_n)}{g(x_n) - g(\alpha_n)} \frac{g(x_n) - g(\alpha_n)}{g(x_n)} + \frac{f(\alpha_n)}{g(x_n)} = \\ &= \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \left(1 - \frac{g(\alpha_n)}{g(x_n)}\right) + \frac{f(\alpha_n)}{g(x_n)} ;\end{aligned}$$

A Cauchy-féle középértéktétel (31.) fejezet III.) szerint, ahol tehát ξ_n az x_n és α_n közé esik, tehát a megfelelő oldalról $\xi_n \rightarrow a$. Ha tehát $n \rightarrow \infty$, akkor

$$\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \rightarrow L, \quad \frac{g(\alpha_n)}{g(x_n)} \rightarrow 0, \quad \frac{f(\alpha_n)}{g(x_n)} \rightarrow 0,$$

tehát

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow L(1 - 0) + 0 = L$$

(és ez akkor is igaz, ha $L = \pm \infty$). Ezzel állításunkat igazoltuk.

A $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra vezető határértékek kiszámítására az előbbi szabályt közvetlenül használhatjuk. Pl.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = ?$$

A számláló és nevező határértéke az $x = 1$ helyen 0, tehát a l'Hospital-szabály alkalmazásával a keresett határérték:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{1} = -1.$$

Szintén $\frac{0}{0}$ alakra vezető határérték szerepel a következő példában

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{2x - 4}.$$

A l'Hospital-szabály alkalmazása után azt látjuk, hogy a nyert tört számlálójának határértéke 1, a nevezőé 0, tehát könnyen látható módon a tört jobboldali határértéke $+\infty$, a baloldali pedig $-\infty$. Eredetileg vizsgált függvényünknek nincs tehát határértéke, jobb- ill. baloldali határértéke azonban létezik és ez $+\infty$, ill. $-\infty$.

A

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$$

határérték meghatározására, ahol

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$$

a kifejezést

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, \quad \text{vagy} \quad \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

alakban írjuk és az előző szabályt alkalmazzuk.

Végül

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$$

meghatározására, ahol

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

bevezetjük az

$$u(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad v(x) = \frac{1}{g(x)}$$

függvényeket. Ekkor

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{u(x)} - \frac{1}{v(x)} = \frac{v(x) - u(x)}{u(x)v(x)}$$

és itt a számláló és nevező 0 - hoz tart, tehát ismét az eredeti szabályt alkalmazhatjuk.

Pl.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \sin x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x}$$

és mivel a tört számlálójára $x \rightarrow 0$ esetén -1 - hez, nevezője pedig a pozitív számokon át 0 - hoz tart, a keresett határérték $-\infty$.

35 .) A TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZ FÜGGVÉNYEI

(Ciklometrikus függvények)

1^c Az $y = \sin x$ függvény folytonos és szigorúan monoton növekvő a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

intervallumban, amint azt korábban beláttuk. Beszélhetünk tehát inverz függvényéről. Ezen inverz függvény (a szokásos jelöléssel, vagyis a független változót x -szel, a függő változót y -nal jelölve):

$$x = \sin y ,$$

ill. explicit alakban így jelöljük:

$$y = \text{Arc sin } x .$$

Arc sin x tehát az a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közötti szám, melynek szinusza x -szel egyenlő.

Képezhetjük az $y = \sin x$ függvénynek valamely más monotonitási intervallumban, pl. a $(\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})$ intervallumban az inverzét. Ily módon a $\sin x$ függvénynek további inverz függvényeire jutunk. Ezeknek összességét jelöljük az $\text{arc sin } x$ jellel:

$\text{arc sin } x$ tehát azon számok bármelyikét jelenti, melyeknek szinusza x .

Ilyen szám végtelen sok van; $\text{arc sin } x$ végtelen sokértékű függvény. Azon értékét, mely $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között fekszik, $\text{arc sin } x$ főértékének nevezzük, és ezt $\text{Arc sin } x$ -szel jelöljük.

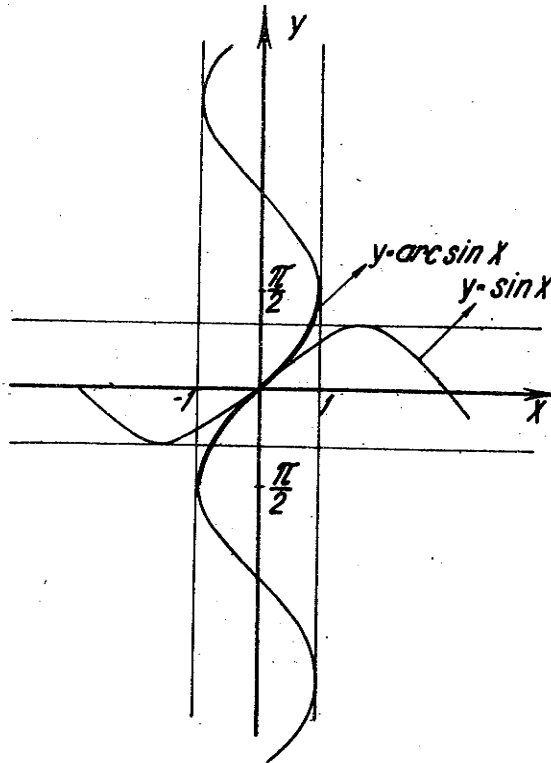
Az $\text{arc sin } x$ függvény csak a $[-1, 1]$ intervallumban van értelmezve, mert $\sin x$ csak -1 és 1 közötti értékeket vesz fel.

A

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \text{és} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

képletek alapján $\text{arc sin } x$ valamennyi értékét megkaphatjuk a főértékből a következő módon:

$$\text{arc sin } x = \begin{cases} \text{Arc sin } x + 2k\pi & (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ (\pi - \text{Arc sin } x) + 2k\pi & (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases}$$



112. ábra

Arc $\sin x$ görbéje $\sin x$ görbájéből az $y = x$ egyenesre való tükrözéssel adódik. A 112. ábrán vastagon kihuzott rész ábrázolja a főértéket.

Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban csak a főértékkel számolunk és egyszerűség kedvéért a főértéket jelöljük $\arcsin x$ - szel.

$\arcsin x$ páratlan függvény, szigorúan monoton növekedő és folytonos (27.) fejezet).

^{2°} A $\sin x$ függvényhez hasonlóan képezhetjük az $y = \cos x$ függvény inverzét, az $x = \cos y$ függvényt, melyet explicit megadás esetén így jelölünk:

$$y = \arccos x.$$

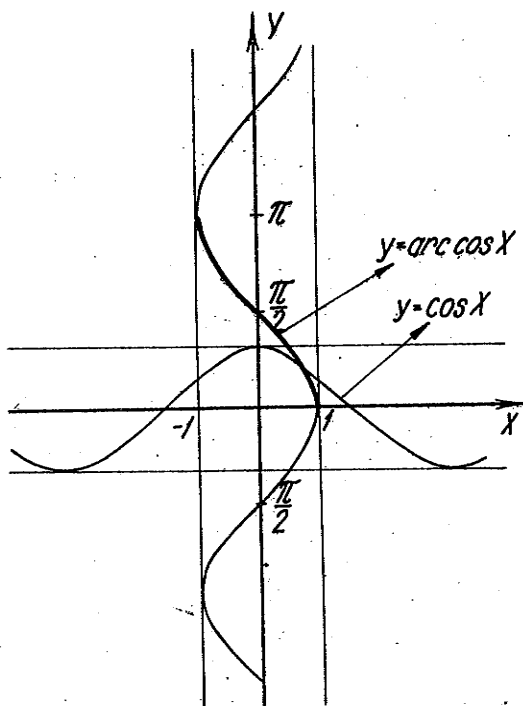
$\arccos x$ jelenti azon számok bármelyikét, melyeknek koszinusza x - szel egyenlő. Ezek közül azt, amely 0 és π között fekszik, $\arccos x$ főértékének nevezzük és (átmenetileg) $\arccos x$ -szel jelöljük.

Az $\arccos x$ főértékből, $\arccos x$ valamennyi értéke megkapható az

$$\arccos x = \begin{cases} \text{Arc cos } x + 2k\pi, & (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ -\text{Arc cos } x + 2k\pi, & (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

képletek segítségével.

$\arccos x$ is a $[-1, 1]$ intervallumban van értelmezve, görbéje az $y = \cos x$ görbéből az $y = x$ egyenesre való tükrözéssel kapható.



113. ábra

Itt is megállapodunk abban, hogy a továbbiakban csak a főértékkel számolunk (a 113. ábrán vastagon kihuzott rész ábrázolja a főértéket) és az egyszerűség kedvéért ezen főértéket jelöljük $\arccos x$ - szel.

$\arccos x$ sem nem páros, sem nem páratlan függvény, szigorúan monoton fogyó és folytonos (27.) fejezet).

3° Az előbbiekhöz hasonlóan az $y = \text{tg } x$ függvény inverzét

$$x = \text{tg } y, \text{ ill. } y = \arctg x -$$

- szel jelöljük.

arc tg x alatt értjük azon számok bármelyikét, amelyeknek tangense x - szel egyenlő. Ezek közül a főérték az, amely $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között fekszik, ennek jelölésére (átmenetileg) az Arc tg x jelet használjuk.

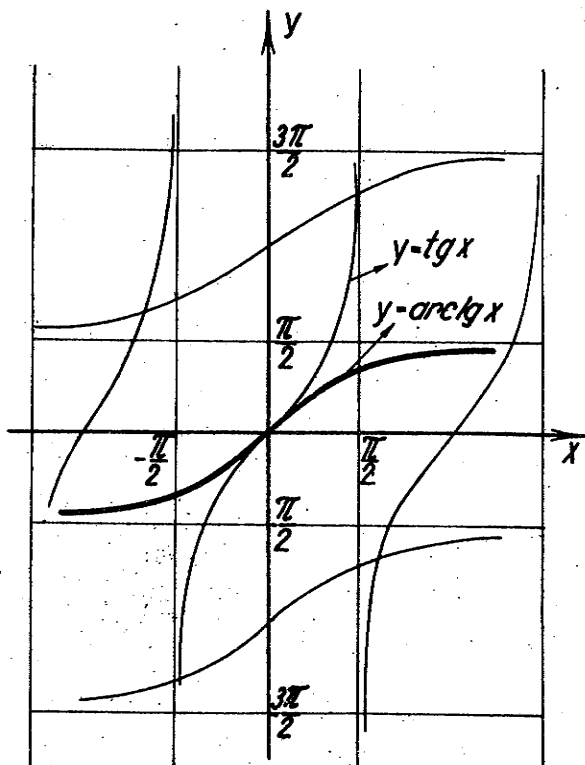
A főértékből arc tg x összes értéke megkapható az

$$\text{arc tg } x = \text{Arc tg } x + k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

képlet segítségével.

arc tg x minden x - re értelmezve van, mert tg x minden értéket felvesz. Görbéjét az $y = \text{tg } x$ görbéből az $y = x$ egyenesre való tükrözéssel nyerjük.

Itt is megállapodunk abban, hogy a továbbiakban csak a főértékkel számolunk (a 114. ábrán vastagon kihuzott rész), és egyszerűség kedvéért ezt jelöljük arc tg x - szel.



114. ábra

arc tg x páratlan függvény, szigorúan monoton növekedő és folytonos (27.) fejezet).

Az előbbieket mintájára értelmezhetnénk az $\arctg x$ függvényt, mint az $y = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ függvény inverzét, mivel azonban a gyakorlatban ez a függvény nem is szerepel, itt nem foglalkozunk vele.

4^o A ciklometrikus függvények differenciálhányadosait az inverz függvény differenciálási szabályának segítségével számíthatjuk ki.

a.) $y = \arcsin x$, vagyis $x = \sin y$.

$$\frac{dx}{dy} = \cos y, \text{ és így } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y},$$

és mivel $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ (a négyzetgyökök itt pozitív előjellel veendő, mert a főértékről lévén szó $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, és ekkor $\cos y \geq 0$)
nyerjük:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Tehát

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

b.) Hasonló számítással nyerjük $y = \arccos x$ differenciálhányadosát:

$y = \arccos x$, azaz $x = \cos y$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(a főértékről lévén szó ul. $0 \leq y \leq \pi$, tehát $\sin y \geq 0$, a négyzetgyököket pozitív előjellel kell vennünk), azaz

$$\frac{d \arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

c.) $y = \operatorname{arctg} x$, azaz $x = \operatorname{tg} y$ esetén

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

vagyis

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Például:

$$1.) y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$2.) y = \operatorname{arc} \sin (2x-1),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \quad 2.$$

$$3.) y = \operatorname{arc} \cos \sqrt{x^2+4},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^2+4)}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.$$

$$4.) y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{x^2+1}.$$

36.) AZ EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY ÉS A LOGARTIMUS

1° Az exponenciális függvény fogalmára a hatványozás fogalmának általánosítása vezet.

Legyen a pozitív szám, de $a \neq 1$. Az a^x hatványnak közvetlen értelmet adhatunk, ha x pozitív egész szám. Ekkor

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_x$$

Az így értelmezett a^x függvény kielégíti az

$$(1) \quad a^{x+y} = a^x a^y,$$

$$(2) \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

egyenlőségeket.

Értelmet adunk az a^x hatványnak akkor is, ha x zérus, vagy negatív egész szám:

$$a^0 = 1, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

és ezután (1) és (2) már bármely egész x és y kitevőre igaznak bizonyult.

Értelmet adunk az a^x hatványnak akkor is, ha x tetszőleges racionális

szám: $x = \frac{p}{q}$ (p és q egész szám, $q > 0$), akkor

$$a^x = \sqrt[q]{a^p}.$$

Kimutatható, hogy bárhogyan is írjuk fel az előbbi módon az x racionális számot két egész szám hányadosaként, a^x -re mindig ugyanaz az érték adódik. (1) és (2) pedig tetszőleges racionális kitevő esetében is fennáll.

Értelmet akarunk adni az a^x hatványnak akkor is, ha x bármilyen valós számot jelent. E célból közelítsük meg az x számot a racionális x_n számokból álló számsorozattal; a megfelelő $a^{x_1}, a^{x_2}, \dots, a^{x_n}, \dots$ sorozat határértékét - amennyiben létezik, és értéke csak x -től függ, és független az x -hez tartó $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sorozat speciális megválasztásától - tekintjük majd a^x értékének.

Ahhoz, hogy be tudjuk bizonyítani, hogy a fent részletezett módon a^x tetszőleges valós x -re egyértelműen értelmezhető, és az így értelmezett a^x függvény (1) és (2) - t kielégíti, először a következő két állítást kell igazolnunk:

a.) Racionális x -re az a^x függvény $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekvő, $a < 1$ esetén szigorúan monoton fogyó.

b.) Ha $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ racionális számok és $x_n \rightarrow 0$, akkor

$$a^{x_n} \rightarrow 1.$$

Az a.) állítás nyilvánvaló, hiszen $x > y$ esetén, mivel $a^y = a^x a^{y-x}$, ha $a > 1$, akkor $a^{y-x} > 1$, és így

$a^y > a^x$,
míg ha $a < 1$, akkor $a^{y-x} < 1$, és így
 $a^y < a^x$.

b.) igazolását az $a > 1$ esetre végezzük el. ($a < 1$ esetén a bizonyítás hasonlóképpen történik.)

Mivel a^x monoton növekvő, elég azt igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{a^{2^n}} \rightarrow 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Ha ugyanis ez igaz, akkor egyszersmind

$$\frac{1}{a^{2^n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{2^n}}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

és ha $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tetszőleges racionális számokból álló 0-hoz tartozó számsorozat, melyre tehát bizonyos k indextől kezdve szükségképpen

$$-\frac{1}{2^n} < x_k < \frac{1}{2^n},$$

akkor

$$\frac{-1}{2^n} < a^{x_k} < \frac{1}{2^n},$$

tehát $n \rightarrow \infty$ esetében kell, hogy egyszersmind $a^{x_k} \rightarrow 1$, ami a b.) állítást adja.

Az

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

számsorozat azonban konvergens, mert monoton fogyó és alulról korlátos ($1 < a_n$); jelöljük a határértékét A - val. Mivel

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \left(\frac{1}{2^n} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a_n},$$

azért az A határérték a következő egyenletet kell, hogy kielégítse:

$$A = \sqrt{A}, \text{ ill. } A^2 = A.$$

Ezen egyenlet megoldásai:

$$A_1 = 0, A_2 = 1.$$

Mivel a vizsgált számsorozat tagjai mind 1 - nél nagyobbak, azért A_1 nem lehet a határérték, vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = A_2 = 1,$$

amit igazolnunk kellett.

Legyen most már x tetszőleges valós szám és jelentse

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

racióális számoknak egy növekvő sorozatát, mely x - hez tart. Az

$$\frac{x_1}{a^1}, \frac{x_2}{a^2}, \dots, \frac{x_n}{a^n}, \dots$$

számok sorozata a_n - ra való tekintettel ugyancsak monoton növekedő sorozat, és korlátos is, mert ha y tetszőleges x - nél nagyobb racionális

szám, akkor az a^n számsorozat elemei $a^{\frac{x_1}{a^1}}$ és a^y között maradnak:

$$a^{\frac{x_1}{a^1}} \leq a^{\frac{x_n}{a^n}} < a^y$$

Az a^n számsorozatnak van tehát határértéke. Ki kell még mutatnunk, hogy ez a határérték független az x -hez tartó x_n sorozat (x_n racionális szám) választásától.

Legyen

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots$$

egy másik, tetszőleges, x -hez konvergáló racionális számokból álló számsorozat. Mivel

$$(x) \quad a^n = a^n \cdot a^{x'_n - x_n}$$

és b.) értelmében, ha $(x'_n - x_n) \rightarrow 0$, akkor $a^{x'_n - x_n} \rightarrow 1$, az $a^{x'_n}$ és a^{x_n} számsorozat határértéke a (x) összefüggés miatt meg kell, hogy egyezzen, amivel az a^{x_n} számsorozat határértékének az x_n sorozat speciális választásától való függetlenségét bebizonyítottuk.

Beláttuk tehát, hogy tetszőleges racionális számokból álló, és a valós x számhoz tartó x_n sorozat esetén az

a^{x_n} számsorozat konvergens, határértéke csak x -től függ, és így ezt a határértéket tekinthetjük a^x értékének.

Könnyű belátni, hogy a^x tetszőleges valós x -re is szigorúan monoton növekvő, ha $a > 1$, ill. szigorúan monoton fogyó, ha $0 < a < 1$, és elegendő tesz az (1) összefüggésnek.

Tétel

Az a^x függvény minden x -re folytonos.

Bizonyítás

Az $x = 0$ helyen való folytonosság a b.) állítás bizonyításánál követett gondolatmenettel látható be ($a \neq 1$). Formulában felírva ez azt jelenti, hogy tetszőleges pozitív ε -hoz található olyan

$$\delta < 0, \text{ hogy } |a^h - a^0| = |a^h - 1| < \varepsilon, \text{ ha } |h| < \delta.$$

Tetszőleges x helyre azonban szintén igaz, hogy $\varepsilon = \frac{\eta}{a^x}$ mellett

$$|a^{x+h} - a^x| = a^x |a^h - 1| < a^x \varepsilon = \eta, \text{ ha } |h| < \delta,$$

amivel a tételben állított folytonosságot be is bizonyítottuk.

Tétel

a^x konvex függvény.

Bizonyítás

Be akarjuk látni, hogy a^x görbéje a tetszőleges x és y abszcisszáértékek közötti intervallumban az x és y abszcisszájú görbepontokat összekötő húr alatt fekszik. Legyen $x < y$, akkor az $[x, y]$ intervallum felezőpontjához,

az $\frac{x+y}{2}$ abszcisszához tartozó görbepont ordinátája

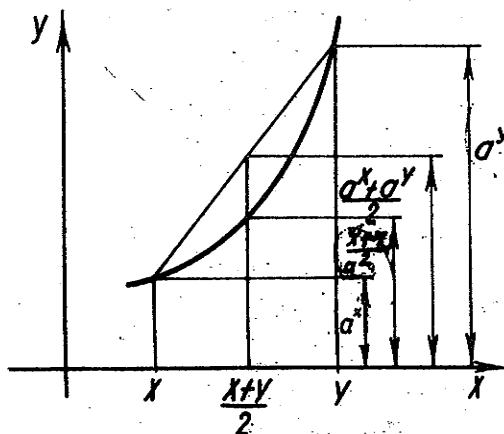
$$a^{\frac{x+y}{2}} = \sqrt{a^x a^y}$$

nyilván kisebb, mint a húr megfelelő pontjának ordinátája:

$$\frac{a^x + a^y}{2}$$

a számtani és geometriai közép ismert egyenlőtlensége értelmében:

$$\sqrt{a^x a^y} < \frac{a^x + a^y}{2}$$



115. ábra

Ezt az okoskodást az $[x, \frac{x+y}{2}]$ és $[\frac{x+y}{2}, y]$ szakaszokra alkalmazva nyerjük, hogy ezek felezőpontjaiban is alatta fekszik a görbe az e szakaszbeli huroknak, tehát még inkább az $[x, y]$ szakaszbeli hurnak. Az így kezelt négy szakasszal folytatva az okoskodást, egyre több pontra adódik, hogy ott a görbe az $[x, y]$ szakaszbeli húr alatt fekszik. Tekintettel arra,

hogy n ilyen lépés után az ilyen módon nyert szomszédos abszcisszák távolsága $\frac{y-x}{2^n}$, azért az a^x függvény folytonosságát felhasználva, határátmenettel adódik, hogy minden (x, y) szakaszbeli pontra igaz az állításunk.

Tétel

a^x differentiálható az $x = 0$ helyen.

Bizonyítás

Az a^x függvény x és 0 helyekhez tartozó különbségi hányadosa:

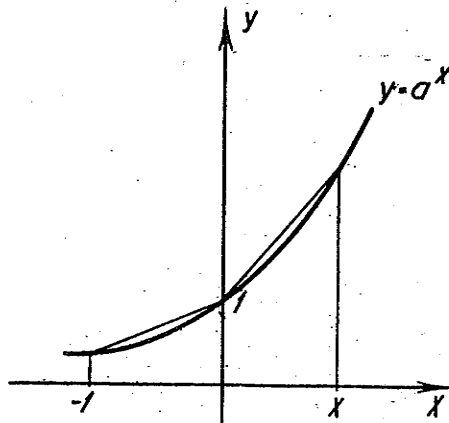
$$\frac{a^x - a^0}{x - 0} = \frac{a^x - 1}{x}$$

az a^x függvény konvex volta miatt $x > 0$ esetén monoton növekvő, és ha x jobbról 0 felé tart ($x \rightarrow +0$), nagyobb marad mint pl.

$$\frac{a^{-1} - 1}{-1}$$

(az $y = a^x$ görbe $x = -1$ és $x = 0$ abszcisszájú pontjait összekötő húr meredeksége) (lásd 116. ábra). Kell tehát, hogy a fenti különbségi hányadosnak $x \rightarrow +0$ esetén véges (jobboldali) határértéke legyen, azaz létezik

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{a^h - 1}{h} = C_a.$$



116. ábra

A véges C_a érték az a^x függvény $x=0$ helyhez tartozó jobboldali differenciálhányadosa. A fentiből az is kitűnik, hogy ha $a > 1$, akkor $C_a > 0$.

Belátjuk még, hogy a baloldali differenciálhányados is létezik az $x = 0$ helyen és ez is C_a -val egyenlő.

Ha ui. $h > 0$ és $h \rightarrow 0$, akkor

$$\frac{a^{-h} - 1}{-h} = \frac{a^h a^{-h} - a^h}{-h a^h} = \frac{1 - a^h}{-h} \cdot \frac{1}{a^h} = \frac{a^h - 1}{h} \cdot \frac{1}{a^h}$$

és itt $\frac{1}{a^h} \rightarrow \frac{1}{a^0} = 1$, ha $h \rightarrow 0$, vagyis

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{a^{-h} - 1}{-h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{a^h - 1}{h} \cdot \frac{1}{a^h} = C_a \cdot 1 = C_a.$$

Mivel arra az eredményre jutottunk, hogy a^x az $x = 0$ helyen jobbról és balról is differenciálható, jobb- és baloldali deriváltja megegyezik (mindkettő C_a -val egyenlő), bebizonyítottuk, hogy a^x differenciálható az $x = 0$ helyen, és

$$\left[\frac{da^x}{dx} \right]_{x=0} = C_a.$$

C_a pontos értékét még nem ismerjük, meghatározásáról még e fejezet során szó lesz.

A most bizonyított tételből azonnal következik a következő tétel:

a^x minden x helyen differenciálható.

Tekintsük ui. az x és $x+h$ helyhez tartozó különbségi hányadost:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{(x+h) - x} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \rightarrow a^x \cdot C_a, \text{ ha } h \rightarrow 0,$$

mint azt az előbb bebizonyítottuk. Kimondhatjuk tehát, hogy tetszőleges x helyen

$$\frac{da^x}{dx} = C_a \cdot a^x,$$

vagyis az a^x függvény differenciálhányadosa az a^x függvényértékkel arányos. Ezen tulajdonsága miatt van olyan nagy szerepe az a^x függvénynek a természeti folyamatok leírásánál.

Összefoglalva eddigi eredményeinket a következőket mondhatjuk:

Megismertük az a^x függvényt, melyet - mivel benne az x független változó a kitevő (exponens) alakjában szerepel - a alapu exponenciális függvénynek nevezünk.

Az a^x függvénynek a következő alapvető tulajdonságai vannak:

$$a^{x+y} = a^x a^y,$$

$$(a^x)^y = a^{xy},$$

$$\frac{da^x}{dx} = C_a a^x$$

Értelmet adhatunk még az 1^x kifejezésnek is; legyen

$$1^x = 1.$$

A fenti alaptulajdonságok minden a^x függvényre ($a > 0$) érvényben maradnak, speciálisan 1^x esetén $C_1 = 0$.

(A másodiknak felsorolt összefüggés pozitív egész y esetén nyilván igaz; egyéb y - okra az összefüggés érvényességét olyan kiterjesztéssel láthatjuk be, mint ahogyan a hatvány fogalmát lépésenként általánosítottuk.)

Láttuk, hogy az 1^x függvény esetében a deriváltban szereplő C_1 együttható: $C_1 = 0$. Azon célból, hogy beláthassuk, hogy van olyan exponenciális függvény, melynél ez az arányossági tényező éppen 1, a következő tételt fogjuk bebizonyítani:

Tétel

Ha a befutja a pozitív számok összességét, akkor az a^x függvény differenciálási képletében szereplő C_a szám minden valós értéket felvesz.

Bizonyítás

Legyen c tetszőleges valós szám. Azt állítjuk, hogy az

$$a = 2^{\frac{c}{C_2}}$$

számhoz éppen $C_a = c$ tartozik. Valóban

$$C_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{c}{C_2} h}{\left(2^{\frac{c}{C_2} h}\right) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{ch}{C_2}}{2^{\frac{ch}{C_2}} - 1} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{ch}{C_2}}{\frac{2^{\frac{ch}{C_2}} - 1}{\frac{c}{C_2} h}} \cdot \frac{c}{C_2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2^u - 1}{u} \cdot \frac{c}{C_2} = C_2 \frac{c}{C_2} = c,$$

amint azt állítottuk.

A tételben kimondottak értelmében van olyan a alapszám, amelyhez a^x differenciálhányadosában mint C_a együtttható éppen $\frac{1}{C_2}$ tartozik: ilyen az előbbi tétel

bizonyítása során követett számításban felírt $2^{\frac{1}{C_2}}$. Ezt az alapszámot e - vel szokás jelölni, értéke később megismerendő számításokból 2,718...-nak adódik.

Mint az előbbi eredményekből adódik, az e alapú exponenciális függvény a legegyszerűbb valamennyi exponenciális függvény között, mert differenciálhányadosa saját maga:

$$\frac{d e^x}{dx} = e^x.$$

2° Legyen $a > 1$. Ha $x \rightarrow +\infty$, akkor $a^x \rightarrow +\infty$, ha pedig $x \rightarrow -\infty$, akkor $a^x \rightarrow 0$. Állításunk a^x monoton volta miatt abból következik, hogy e relációk igazak, ha x egész számokon át tart $+\infty$ - hez, ill. $-\infty$ -hez. Minthogy a^x folytonos függvény, két tetszőleges függvényérték közti bármely értéket felvesz, pontosabban, mivel a^x szigorúan monoton, azért minden pozitív értéket felvesz, de csakis egy helyen veszi azt fel.

A fentiek értelmében beszélhetünk tehát a^x inverz függvényéről ($a > 0$, de $a \neq 1$). Ezt a függvényt a alapú logaritmusnak nevezzük és így jelöljük:

$$y = {}^a \log x \quad (\text{implicit alakban: } x = a^y).$$

${}^a \log x$ az a kitevő, melyre az a alapot emelünk kell, hogy eredményül x - et kapjuk:

$$a^{{}^a \log x} = x.$$

Az $y = {}^a \log x$ függvény csak pozitív x - ékre van értelmezve, mert $y = a^x$ csak pozitív értékeket vesz fel. $y = {}^a \log x$ szigorúan monoton ($a \neq 1$ esetén) és folytonos (lásd a 27.) fejezetben kimondott tételt).

Az $y = e^x$ függvény inverzét röviden így jelöljük:

$$y = {}^e \log x = \ln x,$$

és természetes logaritmusnak nevezzük.

Az $y = 10^x$ függvény inverzeként adódó $y = {}^{10} \log x$ függvényre (10 - es alapu logaritmus) is bevezetünk egy rövidítő jelölést:

$$y = {}^{10} \log x = \lg x.$$

Az ${}^a \log x$ függvény a következő fontos összefüggéseknek tesz eleget:

$$a.) \quad {}^a \log(xy) = {}^a \log x + {}^a \log y, \quad (x > 0, y > 0),$$

$$b.) \quad {}^a \log \frac{x}{y} = {}^a \log x - {}^a \log y, \quad (x > 0, y > 0),$$

$$c.) \quad {}^a \log x^y = y \cdot {}^a \log x; \quad (x > 0),$$

sokszor használjuk még a különböző alapu logaritmusok átszámítására vonatkozó alábbi összefüggést:

$$d.) \quad {}^a \log x = \frac{{}^b \log x}{{}^b \log a}$$

(az összefüggést leggyakrabban $b = 10$, ill. $b = e$ esetében használjuk, tehát különböző alapu logaritmusokat 10-es alapu, vagy természetes logaritmusra számítunk át).

Az a.), b.), c.) összefüggést szavakban így fejezhetjük ki:

Szorzat logaritmusa egyenlő a tényezők logaritmusának összegével; tört logaritmusa egyenlő a számláló és nevező logaritmusának különbségével; hatvány logaritmusa egyenlő a kitevőnek és az alap logaritmusának szorzatával.

Az a.) és a b.) összefüggést így igazolhatjuk:

Legyen

$${}^a \log x = \xi, \quad {}^a \log y = \eta, \quad \text{vagyis}$$

$$x = a^\xi, \quad y = a^\eta;$$

akkor azonban

$$xy = a^\xi a^\eta = a^{\xi+\eta}, \quad \text{vagyis } \xi + \eta = {}^a \log(xy),$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a^\xi}{a^\eta} = a^{\xi-\eta}, \quad \text{vagyis } \xi - \eta = {}^a \log \frac{x}{y},$$

amint azt állítottuk.

A c.) összefüggést így bizonyíthatjuk:
legyen

$${}_a \log x = \xi, \text{ vagyis } a^\xi = x,$$

akkor

$$x^y = (a^\xi)^y = a^{\xi y}, \text{ vagyis } \xi y = {}_a \log x^y,$$

amint azt állítottuk.

a d.) összefüggés igaz voltát az

$${}_a \log x = \xi, \text{ vagyis } a^\xi = x$$

jelölés bevezetésével így láthatjuk be:

$${}_b \log x = {}_b \log a^\xi = \xi {}_b \log a = {}_a \log x {}_b \log a,$$

vagyis

$${}_b \log x = {}_a \log x {}_b \log a,$$

amint azt állítottuk.

Az a.) ill. b) összefüggésben felírt tulajdonságok indokolják, hogy miért használják numerikus számításokban a 10-es alapu logaritmust. Egy szám 10-szeresének, ill. 10-ed részének 10-es alapu logaritmusai a szám logaritmusánál 1-gyel nagyobb, ill. 1-gyel kisebb a fenti összefüggések értelmében. Elméleti vizsgálatokban azonban szinte kizárólag a természetes logaritmus szerepel, ezért ha röviden logaritmusról beszélünk, mindig a természetes logaritmusra gondolunk.

$y = \ln x$ differenciálhányadosát az inverz függvény differenciálási szabálya alapján számíthatjuk ki. Ha

$$y = \ln x, \text{ akkor } x = e^y, \text{ vagyis}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

tehát

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

E képletből könnyen adódik már az $y = {}_a \log x$ függvény differenciálhányadosa:

$$\frac{d^a \log x}{dx} = \frac{d \frac{\ln x}{\ln a}}{dx} = \frac{1}{\ln a} \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

a d.) összefüggést felhasználásával.

Az $y = \ln x$ függvény differenciálhányadosának segítségével megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

ahol e a természetes logaritmus alapszáma és n tetszőlegesen tart $+\infty$ -hez, vagy $-\infty$ -hez. (A 31.) fejezetben már beszéltünk arról, hogy speciálisan, ha n pozitív egész számokon át tart a végtelenhez,

$\lim_n a_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ létezik és véges)

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 1}{\frac{1}{n} - 0}$$

tekintve, hogy $e^0 = 1$ folytán $\ln 1 = 0$. Az átalakítással nyert kifejezés azonban az $\ln x$ függvény $x = 1$ és $x = 1 + \frac{1}{n}$ helyekhez tartozó különbségi hányadosa; ha $n \rightarrow \infty$, akkor $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, és a fenti különbségi hányados $\ln x$ $x = 1$ helyen vett deriváltjához tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left[\frac{d \ln x}{dx} \right]_{x=1} = \left(\frac{1}{x} \right)_{x=1} = 1.$$

Igy tehát

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow e^1 = e,$$

amint azt állítottuk. Megjegyezzük még, hogy ezzel a határértékkel, mivel az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ számsorozat igen lassan konvergál, e -t nem célszerű közelítőleg kiszámítani. Gyakorlatilag is alkalmas eljárást e kiszámítására később fogunk ismertetni.

Az

$$a^x = e^{x \ln a}$$

képlet segítségével megadhatjuk végül az a^x függvény differenciálási képletében szereplő C_a szám pontos jelentését. A közvetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva ui.

$$\frac{d a^x}{dx} = \frac{d e^{x \ln a}}{dx} = e^{x \ln a} \cdot \ln a,$$

és így $C_a = \ln a$.

Külön megemlítjük még, hogy a 10-es alapú logaritmus természetes logaritmusra való átszámításánál szereplő állandó közelítő értéke:

$$\ln 10 \approx 2,3$$

ennek reciproka

$$\frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343,$$

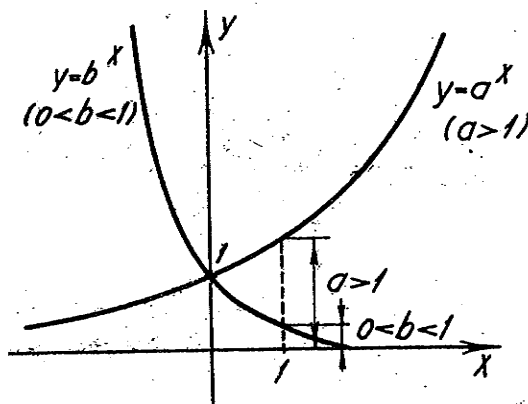
és így

$$\frac{d 10^{\log x}}{dx} = \frac{d \lg x}{dx} = \frac{d \frac{\ln x}{\ln 10}}{dx} = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x} \approx 0,4343 \frac{1}{x}.$$

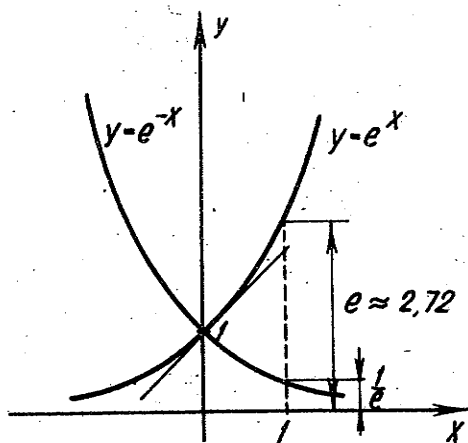
Az eddigiek alapján most már megrajzolhatjuk az exponenciális és logaritmus függvények görbéit:

$y = a^x$ értelmezési tartománya a $(-\infty, +\infty)$, értékkészlete az $(0, +\infty)$ intervallum, konvex, $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekedő, $0 < a < 1$ esetén szigorúan monoton fogyó, $a > 1$ esetén $x \rightarrow -\infty$, $0 < a < 1$ esetén $x \rightarrow +\infty$ esetben $a^x \rightarrow 0$. Speciálisan az $y = e^x$ függvény görbéjének az $x = 0$ abszcisszájú pontban 45° -os érintője van ($(e^x)'_{x=0} = e^0 = 1$) (lásd 117. és 118. ábra).

Megemlítjük még, hogy ha $0 < a < 1$, akkor az $a = \frac{1}{b} = b^{-1}$ ($b > 1$) jelöléssel az $y = a^x$ függvényt gyakran az $y = b^{-x}$ alakban is felírjuk. Speciálisan $e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ görbéje a 118. ábrán látható.



117. ábra



118. ábra

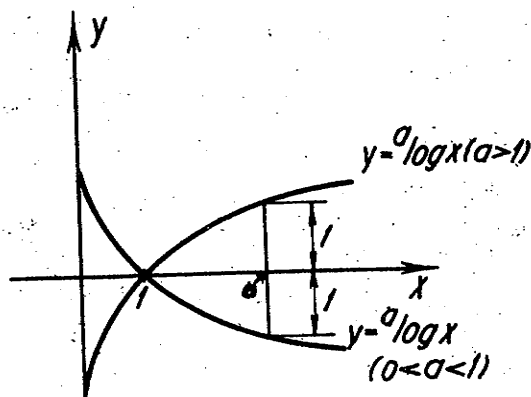
$y = {}^a\log x$ az $y = a^x$ függvény inverze, értelmezési tartománya tehát a $(0+\infty)$, értékkészlete pedig a $(-\infty, +\infty)$ intervallum. Mivel

$$y' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad x > 0,$$

adódik, hogy a függvény $a > 1$ esetén (ekkor $\ln a > 0$) szigorúan monoton növekedő, $0 < a < 1$ esetén (ekkor $\ln a < 0$) szigorúan monoton fogyó.

$$y'' = - \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x^2},$$

tehát ${}^a\log x$ $a > 1$ esetén (ekkor $y'' < 0$) alulról konkáv, $0 < a < 1$ esetén (ekkor $y'' > 0$) alulról konvex. (lásd 119. ábra.)

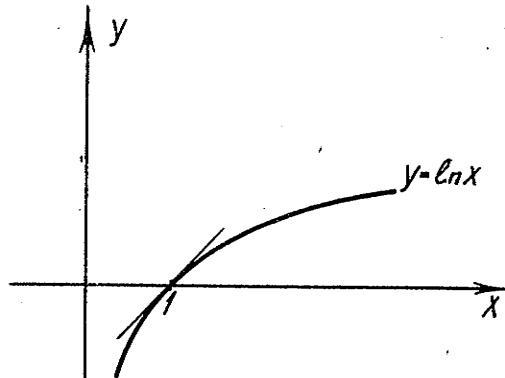


119. ábra

Speciálisan az $y = \ln x$ függvény görbéjének az $x = 1$ abszcisszájú pontban 45° -os érintője van, mert

$$(\ln x)'_{x=1} = \left(\frac{1}{x}\right)_{x=1} = 1.$$

(120. ábra.)



120. ábra

3^o Az exponenciális és logaritmus függvények segítségével vizsgáljuk meg az általánosított hatványfüggvényt. Ezen a pozitív x -ekre értelmezett x^μ függvényt értjük, ahol μ tetszőleges valós szám.

Az $y = x^\mu$ függvény differenciálhányadosát a következőképp számíthatjuk ki:

$$\frac{d x^\mu}{dx} = \frac{d e^{\mu \ln x}}{dx} = e^{\mu \ln x} \frac{\mu}{x} = x^\mu \frac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1}$$

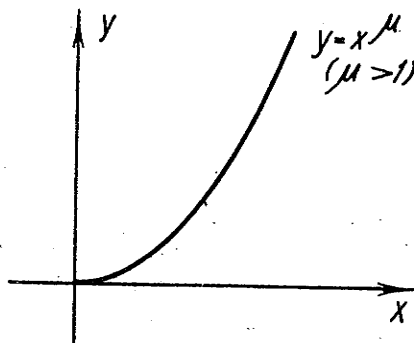
Látjuk tehát, hogy a hatványfüggvény racionális kitevőjű hatványokra érvényes differenciálási szabálya az általánosított hatványfüggvényre is érvényes:

$$\frac{d x^\mu}{dx} = \mu x^{\mu-1}.$$

Az $y = x^\mu$ értelmezési tartománya - mint fent már említettük - a $(0, +\infty)$ intervallum. A függvény görbéjének menetét $y = x^\mu$ első és második deriváltjának előjelviszonyaiból állapíthatjuk meg.

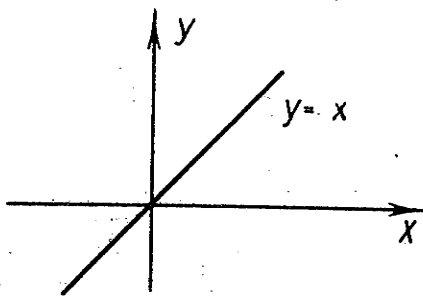
$$\begin{aligned} y &= x^\mu = e^{\mu \ln x}, \\ y' &= \mu x^{\mu-1} = \mu e^{(\mu-1) \ln x}, \\ y'' &= \mu(\mu-1)x^{\mu-2} = \mu(\mu-1)e^{(\mu-2) \ln x}. \end{aligned}$$

a.) Ha $\mu > 1$, akkor $y' > 0$, $y'' > 0$; a függvény szigorúan monoton növekvő és konvex. Ha $x \rightarrow +\infty$, akkor $\ln x \rightarrow +\infty$ folytán $x^\mu = e^{\mu \ln x} \rightarrow +\infty$, ha pedig $x \rightarrow +0$, akkor $\ln x \rightarrow -\infty$, $\mu \ln x \rightarrow -\infty$, $(\mu-1)\ln x \rightarrow -\infty$, és így $x^\mu \rightarrow 0$, $y' \rightarrow 0$ (lásd 121. ábra).



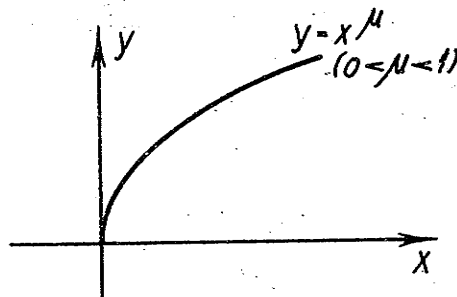
121. ábra

b.) Ha $\mu = 1$, akkor $x^\mu = x$ a függvény görbéje 45° alatt emelkedő, a koordinátarendszer kezdőpontján áthaladó egyenes (122. ábra).



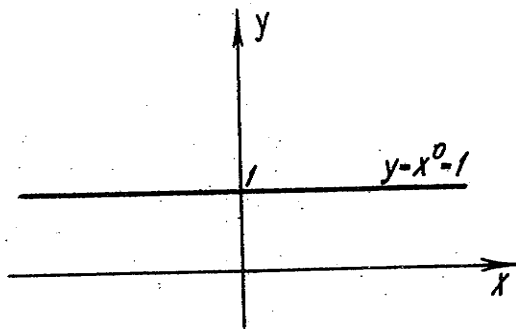
122. ábra

c.) Ha $0 < \mu < 1$, akkor $y' > 0$, de $\mu(\mu-1) < 0$ miatt $y'' < 0$, vagyis a függvény szigorúan monoton növekvő, de konkáv. Ha $x \rightarrow +\infty$ akkor $y \rightarrow +\infty$, de ha $x \rightarrow +0$, akkor $\mu \ln x \rightarrow -\infty$, $\mu(\mu-1)\ln x \rightarrow +\infty$, úgyhogy $y \rightarrow 0$, $y' \rightarrow +\infty$. A függvény görbéje a 123. ábrán látható. (lásd 352. old.)



123. ábra

d.) Ha $\mu = 0$, akkor $x^\mu = 1$, úgyhogy a függvény görbéje az x tengellyel párhuzamos, a $(0, 1)$ ponton áthaladó egyenes. (124. ábra)

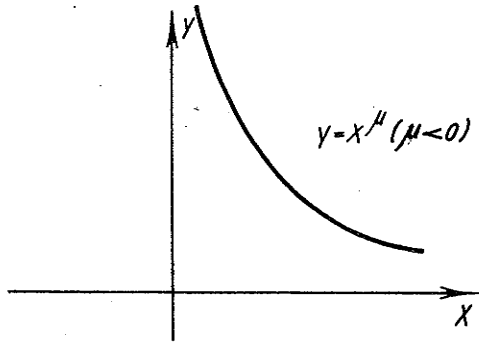


124. ábra

e.) Ha $\mu < 0$, akkor $y' < 0$, $y'' > 0$, vagyis a függvény szigorúan monoton fogyó, konvex. $x \rightarrow +\infty$ esetén $x^\mu \rightarrow 0$, $x \rightarrow +0$ esetén $x^\mu \rightarrow +\infty$. A függvény görbéje a 125. ábrán látható.

3^o Láttuk, hogy ha $\mu > 0$, akkor $x^\mu \rightarrow +\infty$, ha $x \rightarrow +\infty$. Ugyancsak $+\infty$ -hez tart $x \rightarrow +\infty$ esetén az $e^{\alpha x}$ függvény is, feltéve, hogy $\alpha > 0$. (Ekkor ui. $x \rightarrow +\infty$ esetén $\alpha x \rightarrow +\infty$.) Megmutatjuk, hogy $\alpha > 0$ mellett $e^{\alpha x}$ erősebben tart végtelenhez, mint x^μ , azaz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\mu} = +\infty.$$



125. ábra

Alkalmazzuk e célból az $\frac{x^\mu}{e^{\alpha x}}$ törtre $x \rightarrow +\infty$ mellett a l' Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{e^{\alpha x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^{\mu-1}}{\alpha e^{\alpha x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu(\mu-1)x^{\mu-2}}{\alpha^2 e^{\alpha x}} = \dots$$

A nevező határértéke mindig $+\infty$ marad, a számlálósé mindaddig $+\infty$, amíg benne x kitevője pozitív, véges számú lépés után azonban x kitevője ≤ 0 lesz, s ekkor a számlálónak véges a határértéke, a végtelenhez tartó nevezővel osztva tehát a tört határértéke 0 lesz, amint állítottuk.

Ebből már következik, de közvetlenül is könnyen belátható, hogy $\mu > 0$ esetén x^μ erősebben tart végtelenhez, mint $\ln x$, azaz $\frac{\ln x}{x^\mu} \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow +\infty$. A l' Hospital szabályt alkalmazva ui.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\mu} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu x^\mu} = 0.$$

Végül, szintén a l' Hospital szabály segítségével látható be, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x^\mu \ln x) = 0, \text{ ha } \mu > 0.$$

Ti.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} (x^\mu \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\mu}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\mu x^{-\mu}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{-x^\mu}{\mu} \right) = 0. \end{aligned}$$

37.) HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INVERZEK

^{1°} A koszinusz hiperbolikus és szinusz hiperbolikus függvényeket a következőképp értelmezzük:

$$(1) \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

A függvények koszinusz ill. szinusz elnevezésüket onnan nyerték, hogy - mint látni fogjuk - sok hasonlóságot mutatnak a közöséges koszinusz és szinusz függvényekkel, míg hiperbolikus elnevezésük arra céloz, hogy a $\square$ H sík ($\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$) koordinátájú pontja rajta fekszik a $\xi^2 - \eta^2 = 1$ egyenletű hiperbolán:

$$(2) \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

A (2) képlet egyszerűen igazolható:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

Az (1) - ben felírt értelmezésből azonnal következik, hogy $\operatorname{ch} x$ páros, $\operatorname{sh} x$ pedig páratlan függvény:

$$(3) \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x.$$

A $\operatorname{ch} x$ és $\operatorname{sh} x$ függvények addíciós képletei emlékeztetnek a $\cos x$ és $\sin x$ függvények megfelelő képleteire:

$$(4) \quad \operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$(5) \quad \operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$(6) \quad \operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$(7) \quad \operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Ezeket az összefüggéseket az (1) - ben megadott exponenciális alakban történő felírással könnyű igazolni. Pl. (4) így igazolható:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} + e^{-x-y}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \\ &= \operatorname{sh}(x + y). \end{aligned}$$

(4) ill. (6) -ból $x = y$ esetén adódik:

$$(8) \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$(9) \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

A (9) összefüggést a (2) összefüggéssel összevonva adódik:

$$(10) \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$$

$$(11) \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}.$$

A $\operatorname{ch} x$ és $\operatorname{sh} x$ függvények differenciálhányadosa az (1) - ben megadott értelmezésből azonnal következik:

$$(12) \quad \frac{d \operatorname{ch} x}{dx} = \operatorname{sh} x, \quad \frac{d \operatorname{sh} x}{dx} = \operatorname{ch} x.$$

Az $y = \operatorname{ch} x$ görbét láncgörbének szokás nevezni, mert két pontján függesztett és csak saját súlya által terhelt nyújthatatlan fonálnak ez az egyensúlyi helyzete.

Tekintettel arra, hogy a fenti differenciálási szabály alkalmazásával:

$$\frac{d^2 \operatorname{ch} x}{dx^2} = \frac{d \operatorname{sh} x}{dx} = \operatorname{ch} x, \quad \frac{d^2 \operatorname{sh} x}{dx^2} = \frac{d \operatorname{ch} x}{dx} = \operatorname{sh} x,$$

az $y = \operatorname{ch} x$ és $y = \operatorname{sh} x$ függvények görbájének menetéről a következőket mondhatjuk:

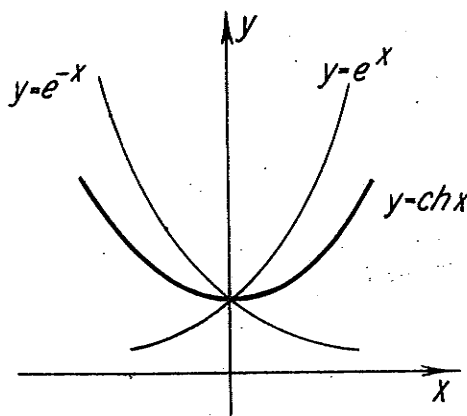
$(\operatorname{ch} x)' < 0$, ha $x < 0$, ekkor tehát $\operatorname{ch} x$ szigorúan monoton fogyó,

$(\operatorname{ch} x)' > 0$, ha $x > 0$, ekkor tehát $\operatorname{ch} x$ szigorúan monoton növekedő,

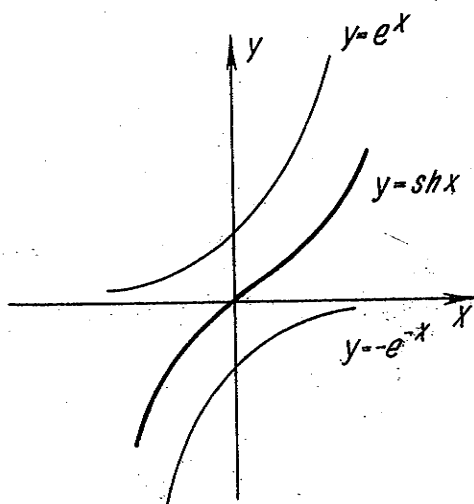
$(\operatorname{ch} x)'' > 0$, minden x - re, tehát $\operatorname{ch} x$ alulról konvex,

$(\operatorname{sh} x)' > 0$ minden x - re, tehát $\operatorname{sh} x$ szigoruan monoton növekedő,
 $(\operatorname{sh} x)' < 0$, ha $x < 0$, ekkor tehát $\operatorname{sh} x$ alulról konkáv,
 $(\operatorname{sh} x)' > 0$, ha $x > 0$, ekkor tehát $\operatorname{sh} x$ alulról konvex.

Az $y = \operatorname{ch} x$ és $y = \operatorname{sh} x$ függvények görbéi a 126. és 127. ábrán láthatók.



126. ábra



127. ábra

A tangens hiperbolikus és kotangens hiperbolikus függvények értelmezése a $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ függvények mintájára történik:

$$(13) \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

A $\operatorname{th} x$ függvény minden x -re értelmezve van ($\operatorname{ch} x \neq 0$), a $\operatorname{cth} x$ függvény nincs azonban értelmezve az $x = 0$ helyen, mert itt $\operatorname{sh} x = 0$. Mindkét függvény páratlan:

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x, \quad \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x.$$

E függvények differenciálhányadosa a tört differenciálási szabályának alkalmazásával könnyen adódik:

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{th} x}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \\ \frac{d \operatorname{cth} x}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{d^2 \operatorname{th} x}{dx^2} = -2 \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x},$$

az $y = \operatorname{th} x$ görbe menetéről a következőket mondhatjuk:

$y' > 0$, $\operatorname{th} x$ tehát szigorúan monoton növekedő;

$y'' > 0$, ha $x < 0$, ekkor tehát $\operatorname{th} x$ alulról konvex,

$y'' < 0$, ha $x > 0$, ekkor tehát $\operatorname{th} x$ alulról konkáv.

Belátjuk még, hogy ha $x \rightarrow +\infty$, akkor $\operatorname{th} x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

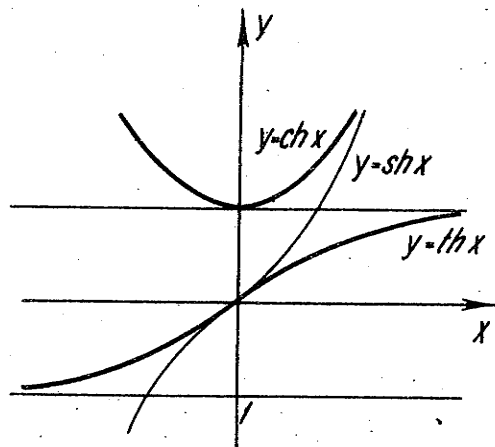
A függvény görbéje a 128. ábrán látható (lásd 358. old.)

2° Mivel $y = \operatorname{sh} x$ szigorúan monoton növekvő és folytonos függvény (1) - ben ui. két folytonos függvény összegeként értelmeztük), van egyértékű inverze. Ezt área szinuszhiperbolikus függvénynek nevezzük és így jelöljük:

$$y = \operatorname{ar} \operatorname{sh} x \quad (\text{implicit alakban: } x = \operatorname{sh} y).$$

Részletesen kiírva tehát

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$



128. ábra

vagyis egyenlőségünket $2 \cdot e^y$ -al beszorozva:

$$2xe^y = (e^y)^2 - 1,$$

ill.

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0.$$

E másodfoku egyenletet megoldva írhatjuk:

$$e^y = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Mivel azonban $|x| < \sqrt{x^2 + 1}$, és $e^y > 0$, formulánkban a négyzetgyököknek csupán pozitív előjele jöhet szóba, vagyis

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1},$$

és innen

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Az ar sh x függvényt tehát még így is megadhatjuk:

$$y = \operatorname{ar sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

A függvény deriváltját közvetlenül, a láncszabály alkalmazásával is megkaphatjuk, célszerűbb azonban az inverz függvény differenciálási szabályát alkalmazni:

$$y = \operatorname{ar sh} x, \text{ azaz } x = \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(A négyzetgyököknek azért vettük csak a + előjelét, mert $\operatorname{ch} y > 0$).

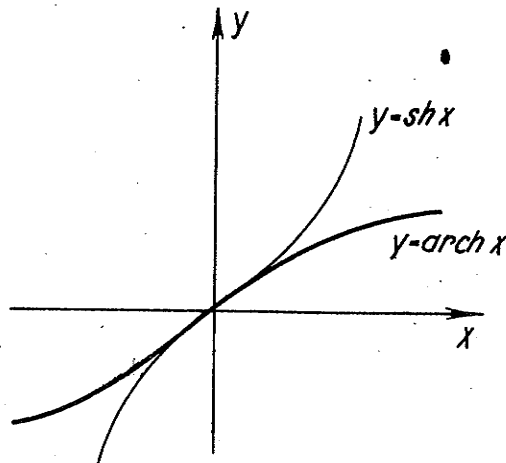
$$\frac{d^2 \operatorname{ar sh} x}{dx^2} = \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}},$$

tehát mivel $(\operatorname{ar sh} x)' > 0$ minden x -re, $\operatorname{ar sh} x$ szigorúan monoton növekedő, és

$(\operatorname{ar sh} x)'' > 0$, ha $x < 0$ folytán $x < 0$ - ra konvex, ill.

$(\operatorname{ar sh} x)'' < 0$, ha $x > 0$ folytán $x > 0$ - ra konkáv az

$\operatorname{ar sh} x$ görbéje (lásd 129. ábra).



129. ábra

$x > 0$ esetén $\operatorname{ch} x$ is szigorúan monoton növekvő, folytonos függvény, az inverz függvényt átmenetileg $\operatorname{Ar ch} x$ - szel jelöljük.

$y = \operatorname{Ar ch} x$ jelentése: $x = \operatorname{ch} y$, $y > 0$.

Ha $x < 0$ esetén is képezzük $\operatorname{ch} x$ inverzét, az így nyert függvényt az előbbivel közösen az $\operatorname{ar ch} x$ jellel jelöljük. $y = \operatorname{ar ch} x$ tehát kétértékű függvény, főértéke: $\operatorname{Ar ch} x > 0$, másik értéke ennek (-1) - szerese. $\operatorname{ar ch} x$ csak $x \geq 1$ esetén van értelmezve, mert $\operatorname{ch} x \geq 1$ - nél kisebb értékeket nem vesz fel.

Az előzőkhöz hasonlóan vezethetjük le $y = \operatorname{ar ch} x$ logaritmikus alakját:

$$y = \operatorname{ar ch} x \text{ jelentése: } x = \operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2},$$

azaz

$$2x(e^y) = (e^y)^2 + 1,$$

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) + 1 = 0,$$

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

$$y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}).$$

(Ha csak a főértékről beszélünk, a gyöknek a pozitív előjelét kell csak venni.)

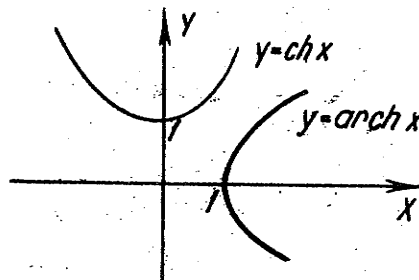
$y = \operatorname{ar ch} x$ differenciálhányadosa az inverz függvény differenciálási szabályát alkalmazva:

$$y = \operatorname{ar ch} x, \quad x = \operatorname{ch} y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\pm \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\pm \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mp \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}.$$

Csupán a főértékre szorítkozva tehát $y = \operatorname{Ar ch} x$ szigorúan monoton növekedő ($y' > 0$) és alulról konkáv ($y'' < 0$). (lásd 130. ábra.)



130. ábra

A továbbiakban, ha az $\operatorname{ar} \operatorname{ch} x$ függvényről beszélünk, ezen mindig a főértéket értjük, és az egyszerűség kedvéért ezt jelöljük $\operatorname{ar} \operatorname{ch} x$ -szel. Ennek deriváltja tehát: ($y > 0$)

$$\frac{d \operatorname{ar} \operatorname{ch} x}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{+\sqrt{x^2-1}}.$$

Az $y = \operatorname{th} x$ függvény szigorúan monoton növekedő és folytonos, van tehát egyértékű inverze, amit így jelölünk:

$$y = \operatorname{ar} \operatorname{th} x \quad (\text{implicit alakban } x = \operatorname{th} y).$$

Az $\operatorname{ar} \operatorname{th} x$ függvény csak a $(-1, 1)$ intervallumban van értelmezve, mert $\operatorname{th} x$ csak -1 és 1 közötti értékeket vesz fel. A függvény logaritmikus alakjára a következőképpen juthatunk el:

$$y = \operatorname{ar} \operatorname{th} x \text{ jelentése } x = \operatorname{th} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}},$$

azaz $(e^y + e^{-y})$ -al egyenlőségünket végigszorozva

$$e^y x + e^{-y} x = e^y - e^{-y},$$

$$e^y (x-1) = -e^{-y} (x+1),$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x},$$

$$2y = \ln \frac{1+x}{1-x},$$

azaz

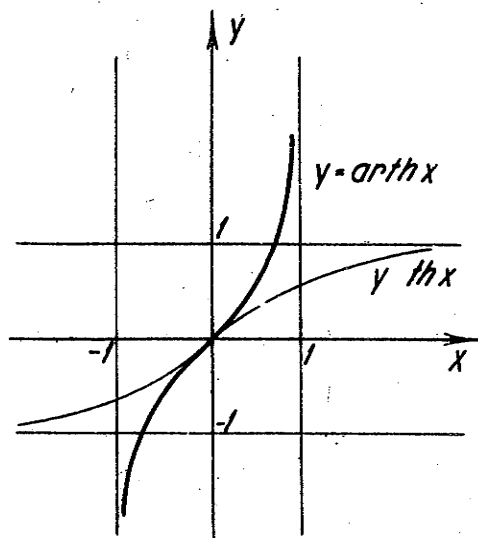
$$y = \operatorname{ar} \operatorname{th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Számítsuk ki az $y = \operatorname{ar} \operatorname{th} x$ függvény deriváltját közvetlenül ezen logaritmikus alak segítségével:

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{ar} \operatorname{th} x}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Mivel pedig

$$\frac{d^2 \operatorname{ar} \operatorname{th} x}{dx^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2},$$



131. ábra

az $y = \operatorname{arth} x$ függvény $y' > 0$ folytán szigorúan monoton növekedő (az értelmezési tartomány a $(-1, 1)$ intervallum), és mivel $y'' < 0$, ha $x < 0$, $-1 < x < 0$ esetén konkáv, ill. $y'' > 0$ folytán, ha $0 < x < 1$, ezen x -ekre konvex. (A függvény grafikonját lásd a 131. ábrán.)

38.) A DIFFERENCIÁLÁSI SZABÁLYOK RÖVID ÖSSZEFOGLALÁSA

y	y'
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$a^{\log x}$	$\frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$
x^μ	$\mu x^{\mu-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{ar} \operatorname{sh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{ar} \operatorname{ch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ar} \operatorname{th} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

A fenti képletekhez még az alábbi szabályok járulnak:

Ha $u(x)$, $v(x)$ differenciálhatók, akkor

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x),$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}, \quad (v(x) \neq 0)$$

és végül a lányszabály, melynek értelmében ha $u(x)$ az $x=a$ helyen és $f(u)$ az $u=u(a)$ helyen differenciálható, akkor

$$\left[\frac{d f(u(x))}{dx} \right]_{x=a} = \left[\frac{d f(u)}{du} \right]_{u=u(a)} \cdot \left[\frac{d u(x)}{dx} \right]_{x=a}.$$

(Az inverz függvény differenciálási szabályát csak az alapfüggvények differenciálhányadosának levezetésénél használjuk, így itt nem szükséges már felsorolnunk.)

39.) A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS NÉHÁNY GEOMETRIAI ALKALMAZÁSA

GRAFIKUS DIFFERENCIÁLÁS

1^o Mint a differenciálhányados fogalmának bevezetéséül szolgáló példák egyikében láthattuk (28.) fejezet), az $y = f(x)$ függvény a pontban vett differenciálhányadosának, $f'(a)$ - nak geometriai jelentése az $y = f(x)$ függvény görbéjéhez az $x = a$ abszcisszájú pontban húzott érintő meredeksége. Pl.

Határozzuk meg az

$$y = x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$

függvény görbéjéhez az $x = 1$ abszcisszájú pontban húzott érintő egyenletét.

Mivel

$$y' = 3x^2 + 6x - 3,$$

$$[y']_{x=1} = 3 + 6 - 3 = 6,$$

$$[y]_{x=1} = 1 + 3 - 3 + 2 = 3,$$

az $(1, 3)$ ponton áthaladó és $m = 6$ iránytangensű egyenes (a keresett érintő) egyenlete:

$$y - 3 = 6(x - 1),$$

vagyis

$$y = 6x - 3.$$

2^o A görbék "hajlítottságának", "görbültségének" mértékét jellemző "görbületét" vizsgálva, először a görbék érintkezésének fogalmát kell értelmeznünk.

Tegyük fel, hogy a vizsgált görbe egyenlete $y = f(x)$ akárhányszor differenciálható függvényvel van megadva.

Általában azt mondjuk, hogy az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ függvények görbéi az $M_0(x_0, y_0)$ pontban nullarendben érintkeznek, ha az említett pontban metszik egymást, azaz, ha

$$y_0 = f(x_0) = g(x_0).$$

Az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ függvények görbéinek az $M_0(x_0, y_0)$ pontban elsőrendű érintkezésük van, ha

$$f(x_0) = g(x_0) \text{ és } f'(x_0) = g'(x_0).$$

Általában az $y = f(x)$ és $y = g(x)$ függvények görbéi az $M_0(x_0, y_0)$ pontban k - adrendben érintkeznek, ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények megfelelő deriváltjai a k - adíkgig bezárólag az $M_0(x_0, y_0)$ pontban megegyeznek egymással, azaz

$$f(x_0) = g(x_0); \quad f'(x_0) = g'(x_0); \quad \dots; \quad f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0).$$

A vizsgált görbéknek az $M_0(x_0, y_0)$ pontbeli érintkezése azt jelenti tehát, hogy ezek a görbék az M_0 pont 0 kis környezetében rendkívül közel vannak egymáshoz, minél magasabb rendű az érintkezés, annál szorosabban simulnak egymáshoz.

Nyilvánvaló, hogy az az egyenes, amely adott $M_0(x_0, y_0)$ pontban a legjobban simul az $y = f(x)$ függvény görbéjéhez (azzal elsőrendben érintkezik), az $f(x)$ függvény görbéjéhez az M_0 pontban húzott érintő, melynek egyenlete:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Az $y = f(x)$ függvényhez az $x = x_0$ helyen felírt k - adfokú

$$y = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

polinom az $y = f(x)$ függvény görbéjét az $M_0(x_0, y_0)$ pontban k - adrendben érinti. Speciálisan pl. $k = 2$ esetében az

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0) (x - x_0)^2$$

parabola másodrendben érinti $y = f(x)$ görbéjét az M_0 pontban. Nyilvánvaló, hogy a görbe alakjára vonatkozó, hasonló pontosságu ismeretünk még szemléletesebb lesz, ha a görbét a parabolánál jobban ismert és egyszerűbb görbével, mégpedig körrel hasonlítjuk össze. Tegyük fel, hogy valamely kör a vizsgált M_0 pontban másodrendben érintkezik az $y = f(x)$ függvény görbéjével.

Bebizonyítjuk, hogy az a kikötés, hogy $y = f(x)$ M_0 - ban másodrendben érintkezzék valamely körrel, egyértelműen meghatározza a kört, feltéve, hogy $f''(x_0) \neq 0$.

Keressük tehát azt az

$$(1) \quad (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

egyenletű kört, amely az $y = f(x)$ függvény görbéjével az $M_0(x_0, y_0)$ pontban másodrendben érintkezik, vagyis a feltétel értelmében:

$$\begin{aligned}
 y_{\text{kör}} &= f(x_0) = y_0, \\
 (x) \quad y'_{\text{kör}} &= f'(x_0) = y'_0, \\
 y''_{\text{kör}} &= f''(x_0) = y''_0.
 \end{aligned}$$

A kör egyenletéből $y - t$ kifejezve, majd az így adódó $y(x) - t$ -t (1) - be visszahelyettesítve azonosságra jutunk, melynek jobb- és baloldalát akárhányszor deriválva, a megfelelő deriváltak egyenlők egymással, vagyis a láncszabály alkalmazásával és 2 - vel egyszerűsítve adódik:

$$(2) \quad (x-u) + (y_{\text{kör}} - v)y'_{\text{kör}} = 0,$$

$$(3) \quad 1 + (y'_{\text{kör}})^2 + (y_{\text{kör}} - v)y''_{\text{kör}} = 0.$$

Behelyettesítve mármost (1), (2) és (3) - ba a (x) feltételeket nyerjük:

$$(x_0 - u)^2 + (y_0 - v)^2 - r^2 = 0,$$

$$(x_0 - u) + (y_0 - v)y'_0 = 0,$$

$$1 + (y'_0)^2 + (y_0 - v)y''_0 = 0.$$

E három egyenletből a három ismeretlen, u , v , és r egyértelműen meghatározható. Kifejezve ugyanis a harmadik egyenletből $(y_0 - v) - t$ (ez megtehető, mert feltevésünk értelmében $y''_0 \neq 0$) és behelyettesítve a második egyenletbe, megkapjuk $(x_0 - u)$ értékét. $(x_0 - u)$ és $(y_0 - v)$ ismeretében az első egyenletből r értékét határozhatjuk meg:

$$x_0 - u = y'_0 \frac{1 + y_0'^2}{y''_0},$$

$$y_0 - v = - \frac{1 + y_0'^2}{y''_0},$$

$$r^2 = \frac{(1 + y_0'^2)^2}{y''_0^2}.$$

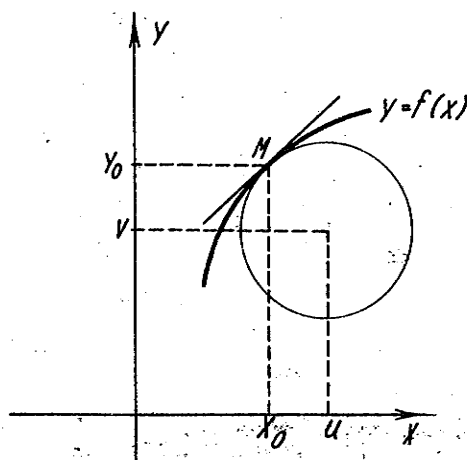
és innen

$$u = x_0 - y_0' \frac{1+y_0'^2}{y_0''},$$

$$v = y_0 + \frac{1+y_0'^2}{y_0''},$$

$$r = \frac{\sqrt{(1+y_0'^2)^3}}{y_0''}.$$

A fenti adatokkal egyértelműen meghatározott kört, az $y = f(x)$ görbe $M_0(x_0, y_0)$ pontbeli simuló körének nevezzük. Nyilván ezen körnek és az $y = f(x)$ görbének az M_0 pontban közös érintője van (132. ábra).



132. ábra

A simuló kör segítségével képet alkothatunk a görbe alakjáról az M_0 pont környezetében. Abból a célból, hogy a görbe alakját numerikus adattal is jellemezhesük, új fogalmat vezetünk be, a görbe M_0 pontbeli "görbületét", mint a "görbületség" mértékének a fogalmát.

Egy görbe M_0 pontbeli "görbületén" az adott görbe M_0 pontbeli simuló körének görbületét értjük. A kör görbületét sugarának reciprokéval definiáljuk:

$$K = \frac{1}{r}.$$

A simuló kör sugarára előbb nyert képlet értelmében az $y = f(x)$ görbe $M_0(x_0, y_0)$ pontbeli görbületét a következő képlet szolgáltatja:

$$K = \frac{y_0''}{\sqrt{(1+y_0'^2)^3}}.$$

Később meg fogjuk adni a görbületnek egy másik, az ittenivel ekvivalens, de a gyakorlatban többnyire jobban használható definícióját.

Például az $y = x^3$ görbe görbülete az $x = 1$ pontban:

$$K = \left(\frac{6x}{\sqrt{(1+9x^4)^3}} \right)_{x=1} = \frac{6}{\sqrt{10^3}} \approx 0,19.$$

3^o Grafikus differenciálás

A műszaki gyakorlatban előforduló függvényeket gyakran grafikus uton, vagy táblázattal adják meg. Ha ezeket a függvényeket a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk, görbét kapunk. Ez a görbe írja le közelítőleg a szóban forgó természeti folyamatot. Ha a folyamat lefolyásának sebességét akarjuk meghatározni - ami gyakran igen fontos - akkor ennek az empirikus (tapasztalati) uton nyert függvénynek kell a differenciálhányadosát meghatároznunk. Ha azonban függvényünk nem foglalható képletbe, nem alkalmazhatjuk rá a szokásos matematikai módszereket. Ennek ellenére a differenciálhányados közelítő pontossággal való meghatározását elég könnyen el tudjuk végezni. A követendő módszer azon alapszik, hogy a differenciálhányados geometriai jelentése a függvényt jellemző görbe érintőjének iránytangense. Ha tehát valamely empirikusan nyert grafikonból akarjuk a differenciálhányadost meghatározni, nem kell egyebet tennünk, mint megrajzolni a görbe érintőjét és lemérni annak iránytangensét a vizsgált helyen. Az áttekinthetőség és a pontosság növelése érdekében célszerű a következőképp eljárunk:

Az X tengelyre merőleges egyenest (Y tengelyt) célszerű úgy rajzolni, hogy az ábra áttekinthetőségét ne zavarja. Ebben az XY koordináta-rendszerben - a tengelyeken egyenlő léptékeket választva - az $A(-1, 0)$ ponton keresztül a szóban forgó érintővel párhuzamosot húzunk. E párhuzamosnak az Y tengellyel való metszéspontját B-vel jelölve, mivel $\overline{AO}=1$, és így

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{AO}} = \overline{BO},$$

(lásd 133. ábra), $\overline{BO}$ a keresett iránytangens, ill. a keresett differenciálhányados nagysága.

40.) EGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSA

Egyenleten

$$(1) \quad f(x) = 0$$

alaku egyenlőséget értünk, ahol $f(x)$ adott függvény.

Ha $f(x)$ n - edfoku polinom, akkor az (1) egyenletet n - edfoku algebrai egyenletnek nevezzük. Ha $f(x)$ az x független változóból és állandókból az alapműveletek és gyökvonások segítségével állt elő, akkor az (1) egyenletet irracionális egyenletnek nevezzük, egyéb $f(x)$ esetében (1) transzcendens egyenlet.

Pl.

$$3x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 = 0 \quad \text{negyedfoku algebrai egyenlet,}$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x^3 + x = 0 \quad \text{irracionális egyenlet,}$$

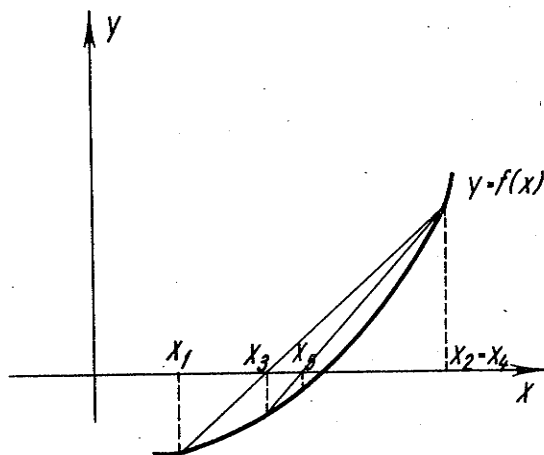
$$e^x + x = 0 \quad \text{transzcendens egyenlet.}$$

Az $f(x) = 0$ egyenletet megoldani annyit tesz, mint megkeresni azokat az x értékeket, melyekre $f(x) = 0$, vagyis amelyek az (1) egyenletet kielégítik. Az ilyen x értékek az egyenlet megoldásai, vagy gyökei.

Az első és másodfoku algebrai egyenletek megoldása az ismert képletek segítségével nem okoz nehézséget. A harmad- és negyedfoku algebrai egyenletek megoldására is ismeretesek képletek, melyek az egyenlet együtthatóiból az alapműveletek és gyökvonások véges számú alkalmazásával az egyenlet gyökeit megadják, ezek a képletek azonban lényegesen bonyolultabbak, mint a másodfoku egyenlet megoldását szolgáltató képlet. Ötödfoku, vagy ennél magasabbfoku algebrai egyenletre azonban ilyen megoldó képlet nem adható meg. Az ilyen egyenletek, és általában az irracionális és transzcendens egyenletek megoldásait csak közelítő pontossággal tudjuk előállítani, és a fent említett képletek bonyolult volta miatt, általában már harmad- és negyedfoku algebrai egyenletek megoldásánál is az alább ismertetendő közelítő megoldási módszereket szoktuk használni.

¹° A hurmmódszer (más elnevezéssel regula falsi) alapgondolata, hogy ha x_1 és x_2 két olyan érték, melyekre az (1) egyenlet baloldalán álló $f(x)$ függvény ellenkező előjelű, akkor az $y = f(x)$ görbének az x_1 és x_2 abszcisszáju

pontjain áthaladó hurja (az $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$) pontokon áthaladó egyenes) az X tengelyt olyan pontban metszi, amely az (1) egyenlet gyökeihez közel fekszik. E metszéspont abszcisszáját x_3 -al jelölve, eljárásunkat úgy folytatjuk, hogy az $(x_3, f(x_3))$ pontot a kiindulásul szolgáló x_1 és x_2 abszcisszájú pontok közül azzal párosítjuk (ennek abszcisszáját majd x_4 -gyel jelöljük), melyben az $f(x)$ függvény értéke az $f(x_3)$ értéktől előjelben különbözik. A második lépésben e két ponton áthaladó hur X tengellyel való metszéspontját számítjuk ki, ezt x_5 -tel jelöljük és így folytatjuk eljárásunkat az előbbi mintájára. (Lásd 134. ábra.)



134. ábra

Könnyű belátni, hogy az $(x_n, f(x_n))$, $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ pontokon áthaladó hur egyenlete:

$$y = f(x_n) + \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} (x - x_n),$$

míg e hur X tengellyel való metszéspontja:

$$x = x_{n+2} = x_n - \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} f(x_n) \quad (n=1, 2, \dots).$$

Ismételten alkalmazva az eljárást, rendszerint a két kiválasztott abszcisszához tartozó függvényérték közül az egyik abszolút értékben lényegesen kisebb lesz a másikonál. Ekkor megkísérelhetjük a megfelelő abszcisszát egy másik, a keresett gyökhelyhez közelebb fekvővel helyettesíteni.

Például az

$$f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

egyenlet megoldásánál könnyen kiszámítható, hogy

$$f(0) = -2, \quad f(1) = +2,$$

tehát a hurmódszert

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

választás mellett alkalmazhatjuk. Számításainkat célszerű az alábbi táblázatban elrendezni:

x_n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	$\frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} f(x_n)$	x_{n+2}
0	1	-2	2	-0,5	0,5
0,5	1	-0,875	2	-0,152	0,652
0,652	0,8	-0,29	0,5	-0,054	0,706
0,706	0,8	-0,03	0,5	-0,005	0,711

A számítást logarléccel végeztük. A második lépésben kapott $x_5 = 0,652$ abszcissza behelyettesítésével $f(x_5) = -0,29$ adódott, ami lényegesen kisebb abszolút értékű, mint az $x_2 = x_4 = 1$ helyhez tartozó $f(1) = 2$ helyettesítési érték. Ezért x_6 -nak 1 helyett 0,8-at választottunk, melyre $f(0,8) = 0,5$ még mindig pozitív, de abszolút értéke kevesebbel különbözik $f(0,652) = -0,29$ -től. Számításunk utolsó értékeként adódó $x = 0,711$ értéket függvényünkbe behelyettesítve adódik:

$$f(0,711) \approx 0,$$

logarléc pontossággal, így tehát logarléccel számolva a gyökmeghatározás tovább már nem finomítható. A további gyökök közelítő értékét úgy határozhatjuk meg, hogy $f(x)$ -et $(x-0,711)$ -gyel osztva (hiszen $f(x)$ osztható kell, hogy legyen e gyöktényezővel, mivel $f(0,711) = 0$) a visszamaradó

$$(x) \quad 3x^2 + 1,133x + 2,806 = 0$$

másodfoku egyenletet megoldjuk. Mivel (x) diszkriminánsa negatív, egyenletünknek egyetlen valós megoldása:

$$x \approx 0,711.$$

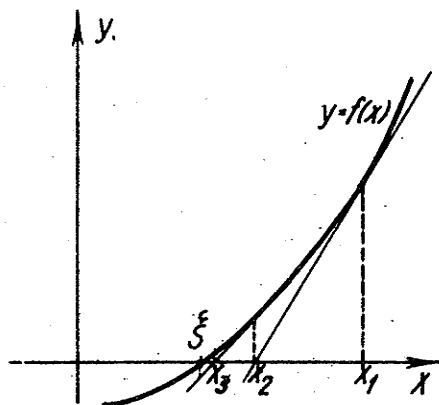
2° Az érintőmódszer (vagy Newton-módszer) alkalmazásánál az $f(x) = 0$ egyenlet gyökének egy közelítő x_1 értékéből indulunk ki, és egy további közelítő értéket az $y = f(x)$ görbe x_1 abszcisszájú pontjában húzott érintőnek az X tengellyel való metszéspontjával kapunk. Mivel az $y = f(x)$ görbe x_1 abszcisszájú pontjához illeszkedő érintő egyenlete:

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1),$$

ezen egyenesnek pedig az X tengellyel való metszéspontja:

$$x = x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

ezen $x = x_2$ érték segítségével az előbb részletezett módon határozhatjuk meg (az x_2 abszcisszájú pontban illeszkedő érintő X tengellyel való metszéspontjaként) keresett gyökünket még jobban megközelítő x_3 értéket, stb. (Lásd 135. ábra.) Az így talált $x_1, x_2, \dots$ értékekről a következő tétel mondható ki:



135. ábra

Ha ξ gyöke az $f(x) = 0$ egyenletnek és a ξ és x_1 abszcisszáék közötti szakaszon $f''(x) \neq 0$, $f'(x) \neq 0$, továbbá $f(x_1)$ és $f'(x_1)$ megegyező előjellűek, és $f''(x)$ folytonos, akkor az érintőmódszerrel kapott $x_1, x_2, \dots$ értékek sorozata a ξ gyökhöz konvergál.

Bizonyítás

Mint hogy a folytonos $f''(x)$ függvény ξ és x_1 között nem tűnik el, azért itt állandó előjelű. Ugyanez mondható $f'(x)$ -ről is.

Legyen pl. $f''(x_1) > 0$, $f'(x_1) > 0$, és a feltevés szerint egyszersmind $f(x_1) > 0$. Ekkor az $y = f(x)$ görbe a $\xi \leq x \leq x_1$ szakaszon konvex és növekvő, mint ahogy azt a 135. ábrán felrajzoltuk. Az ábráról az is leolvasható, hogy

$$\xi < x_2 < x_1 \quad \text{és} \quad \xi < x_3 < x_2,$$

vagyis az $x_1, x_2, \dots$ sorozat monoton csökkenő, és mivel e sorozat tagjai ξ -nél nagyobbak maradnak, a sorozat korlátos, vagyis véges határértékhez tart:

$$x_n \rightarrow x_0 \geq \xi.$$

Mivel azonban a sorozat képzési törvénye szerint

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

és $n \rightarrow \infty$ esetében $x_{n+1} \rightarrow x_0$, $x_n \rightarrow x_0$, és a feltételezett folytonosság miatt $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, $f'(x_n) \rightarrow f'(x_0)$,

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n)(x_n - x_{n+1}) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Mivel azonban ξ és x_1 között $f(x)$ - feltevésünk értelmében - pozitív, és $\xi \leq x_0 < x_1$, $f(x_0) = 0$ csak úgy állhat, ha $\xi = x_0$, amivel igazoltuk, hogy

$$x_n \rightarrow \xi, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Természetesen hasonló az okoskodás, ha $f''(x)$ és $f'(x)$ előjele a többi három lehetséges kombinációt mutatja.

A gyakorlat szempontjából azt kell megjegyeznünk, hogy fent bebizonyított tételünk értelmében az érintőmódszernél a kiinduló x_1 értéket úgy kell megválasztani, hogy $f(x_1)$ és $f''(x_1)$ előjele megegyezzek.

Példaként oldjuk meg az

$$e^x + x = 0$$

transzcendens egyenletet.

Az $f(x) = e^x + x$ jelöléssel azonnal adódik, hogy

$$f(0) = 1,$$

$$f(-1) = e^{-1} - 1 < 0,$$

tehát -1 és 0 között van az egyenletnek gyöke. Több gyöke az egyenletnek nem is lehet, mert $f(x)$ monoton növekvő $(-\infty, +\infty)$ -ben ($f'(x) = e^x + 1 > 0$), így legfeljebb egy helyen veheti fel a zérus értéket. Minthogy $f''(x) = e^x > 0$, azért kiinduló értéknek $x_1 = 0$ -t választjuk. A számítást alkalmasan rendezve:

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	2	0,5	-0,5
-0,5	0,106	1,606	0,066	-0,566
-0,566	0,002	1,568	0,001	-0,567.

Az $x_4 \doteq -0,567$ érték logarléccel történő számolásnál már tovább nem finomítható.

3^o Az iteráció, vagy szukcesszív approximáció (sorozatos közelítések) néven ismert közelítő eljárás olyan egyenletek megoldására használható, melyek

$$x = g(x)$$

alakban írhatók.

Ha x_1 az egyenlet gyökének egy közelítő értéke, akkor második közelítő értékül az

$$x_2 = g(x_1)$$

értéket, majd harmadik közelítő értékül az

$$x_3 = g(x_2),$$

stb. értéket választjuk.

Igaz a következő tétel:

Ha ξ az $x = g(x)$ egyenletnek gyöke, továbbá a $\xi - \delta$ és $\xi + \delta$ ($\delta > 0$) közötti szakaszon $|g'(x)| \leq q < 1$ és $\xi - \delta \leq x_1 \leq \xi + \delta$, akkor az iterációval nyert $x_1, x_2, \dots$ értékek sorozata ξ -hez konvergál.

Bizonyítás

Minthogy

$$\xi = g(\xi),$$

azért

$$x_2 - \xi = g(x_1) - g(\xi) = (x_1 - \xi)g'(\eta_1),$$

ahol η_1 a ξ és x_1 számok közé esik. Ezért

$$|g'(\eta_1)| \leq q,$$

tehát

$$|x_2 - \xi| \leq q |x_1 - \xi|,$$

vagyis még inkább áll:

$$|x_2 - \xi| < |x_1 - \xi| \leq \delta,$$

tehát x_2 is beleesik a $\xi - \delta$ és $\xi + \delta$ közötti szakaszba. Az előbbi okoskodás tehát x_1 helyett x_2 -vel is elvégezhető, amikor is

$$|x_3 - \xi| \leq q |x_2 - \xi| \leq q^2 |x_1 - \xi|,$$

és hasonló okoskodással tovább folytatva, általában

$$|x_n - \xi| \leq q^{n-1} |x_1 - \xi|$$

adódik. Minthogy $0 < q < 1$, azért $q^{n-1} \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, és így annál inkább

$$|x_n - \xi| \rightarrow 0, \text{ azaz } x_n \rightarrow \xi, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

amit bizonyítani akartunk.

A tétel értelmében az $x = g(x)$ egyenletnek az iterációs módszerrel olyan ξ gyökeit tudjuk meghatározni, - megközelíteni -, melyekre $|g'(\xi)| < 1$, és ekkor csak az x_1 kezdő-értéket kell ξ -hez elég közel választanunk, hogy a fenti tétel kikötései teljesüljenek.

Oldjuk meg például a

$$2x = \cos x$$

transzcendens egyenletet. Egyenletünket az

$$x = \frac{1}{2} \cos x$$

alakban írva, előbbi jelöléseinkkel:

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos x, \quad g'(x) = -\frac{1}{2} \sin x,$$

vagyis

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

minden x - re, tehát x_1 bárhogyan megválasztható, az iteráció mindig konvergálni fog. Legyen pl.

$$x_1 = 0.$$

Ekkor a számítás:

x_n	$(x_n)^0$	$\cos x$	$\frac{1}{2} \cos x$
0	0^0	1	0,5
0,5	$28,6^0$	0,878	0,439
0,439	$25,2^0$	0,905	0,453
0,453	$26,0^0$	0,899	0,450
0,450	$25,8^0$	0,900	0,450.

Látható, hogy logarléc pontossággal

$$x = 0,450.$$

Megjegyezzük még, hogy ha az

$$x' = g(x)$$

egyenlet egy ξ gyökének közelében $|g'(x)| > 1$, tehát ezen gyök meghatározására az iterációs módszer nem alkalmazható, akkor a $g(x)$ függvény inverzét $\varphi(x)$ - szel jelölve, eredeti egyenletünk helyett az

$$x = \varphi(x)$$

egyenletet oldjuk meg. ξ ennek is gyöke lesz, és most már ξ közelében $|\varphi'(x)| < 1$, tehát ez utóbbi egyenlet ezen gyökének meghatározására alkalmazható az iterációs módszer.

IRODALOMJEGYZÉK

- 1.) A.F. Bermant: Matematikai analízis I-II.
- 2.) Nicolae Dinculeanu: A matematikai analízis elemei.
- 3.) Fihthyengolc: Kursz differencialnovo i integralnovo iszcsisizlenyija.
- 4.) Gantmaher: Tyeorija matric.
- 5.) M.K. Grebencsa - Sz.I. Novoszelov: Matematikai analízis I., II.
- 6.) Hajós György: Bevezetés a geometriába.
- 7.) Lovass-Nagy Viktor: Mátrixszámítás.
- 8.) Pach Zs. Pálné - Frey Tamás: Vektor- és tenzoranalízis.
- 9.) Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei.
- 10.) Szele Tibor: Bevezetés az algebrába.
11. V.I. Szmírnov: Kursz vizszej matyematyiki I-V.
12. Zurmüll: Matrizenarstellung für Ingenieure.

TARTALOMJEGYZÉK

	Oldal
Bevezetés	3
1.) Valós számok	5
2.) A valós számok rendezése. Egyenlőtlenségek	7
3.) Abszolút érték	16
4.) Számegyenes	22
5.) Számrendszerek	25
6.) Sík- és térbeli koordináta-rendszerek. Pont jellemzése a sík- ban és a térben	27
7.) Vektorok, műveletek vektorokkal	34
8.) Vektor felbontása összetevőkre. Vektor megadása koordinátái segítségével	44
9.) Műveletek koordinátákkal megadott vektorokkal. Alkalmazások	47
10.) Determinánsok	72
11.) A mátrix fogalma; a mátrixok fontosabb típusai	88
12.) Mátrixok összeadása, kivonása, szorzása	93
13.) Kvadratikus mátrix determinánsa és reciproka	99
14.) A mátrix rangja. Mátrixdiadikus felbontása	108
15.) Lineáris egyenletrendszerek megoldása. Vektorok lineáris függőségének vizsgálata	117
16.) Lineáris transzformáció	134
17.) Mátrix sajátértékei és sajátvektorai	142
18.) A halmazelmélet alapfogalmai	149
19.) Ponthalmazok. Környezet	157
20.) Számhalmazokra vonatkozó alapvető tételek	164
21.) Számsorozatok	170
22.) A függvény fogalma és ábrázolása	201
23.) Racionális függvények	212
24.) Trigonometrikus függvények	223
25.) Periodikus függvény; páros függvény; páratlan függvény; monoton függvény; összetett függvény; inverz függvény	235
26.) Függvény határértéke	242
27.) Folytonos függvény	255
28.) Differenciálhányados	268
29.) Differenciálási szabályok	275
30.) A differenciál fogalma	288

	Oldal
31.) Taylor-formula. Binomiális tétel.....	292
32.) A differenciálszámítás középértéktételei	300
33.) Függvényvizsgálat.....	304
34.) A l' Hospital-szabály	325
35.) A trigonometrikus függvények inverz függvényei. (Ciklometri- kus függvények).....	330
36.) Az exponenciális függvény és a logaritmus.....	336
37.) Hiperbolikus függvények és inverzeik	354
38.) A differenciálási szabályok rövid összefoglalása	363
39.) A differenciálhányados néhány geometriai alkalmazása. Grafi- kus differenciálás.....	365
40.) Egyenletek közelítő megoldása.....	371

Kedves Jegyzetfelhasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői díjazást kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*.

A jegyzet címe: **MATEMATIKA I/1.**

A jegyzet szerzője: **Császár Ákosné**

A jegyzet azonosítója: **050357**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75%):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

