

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS  
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Császár Ákosné

**MATEMATIKA**  
**I/3.**



**Műegyetemi Kiadó, 2001.**

Azonosító: **050494**

**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**

**Természettudományi Karának**

megrendelése alapján kiadja a

**Műegyetemi Kiadó**

Felelős vezető: Veress János

Terjedelem: 39,2 (A/5) ív

Nyomta és kötötte:

**Műegyetemi Nyomda**

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 0015/01

## VEKTORANALIZIS

### 1. Vektor-vektorfüggvény divergenciája

a) Jelentsenek  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$  a  $P$  pontot belsejükben vagy határukon tartalmazó zárt felületeket; tegyük fel, hogy e felületek mérhető felszínűek és irányíthatók, az általuk bezárt térrész mérhető térfogatu, és hogy a fenti sorozat tagjai a  $P$  pontra rázsugorodnak. Ezen pontosabban azt kell értenünk, hogy az  $F_n$  felületek pontjainak  $P$ -től való távolsága is zérushoz tart.

Legyen a  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$  vektor-vektorfüggvény folytonos a fent definiált  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$  felületeken. Ekkor beszélhetünk  $\vec{v}(\vec{r})$   $F_n$  felületekre vonatkozó skalárértékű felületmenti integráljáról kifelé mutató felületi normális mellett (lásd Matematika I/2. jegyzet 50. fejezetet). Az  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$  felületek által bezárt térrész térfogatát  $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ -nel jelölve az

$$\frac{\iint_{F_1} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}}{V_1}, \frac{\iint_{F_2} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}}{V_2}, \dots, \frac{\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}}{V_n}, \dots$$

sorozat határértékét - amennyiben ez létezik, véges, és a felületsorozat választásától független - a  $\vec{v}(\vec{r})$  vektor-vektorfüggvény  $P$  pontbeli divergenciájának nevezzük és így jelöljük:

$$(1) \quad \left[ \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) \right]_{(P)} = \lim \frac{\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}}{V_n}$$

( $F_n$  zárt felület,  $V_n$  az  $F_n$  által bezárt térrész térfogatának mérőszáma, a felületmenti integrált kifelé mutató felületi normálissal kell számítani, a  $\lim$  jel pedig azt fejezi ki, hogy az  $F_1, \dots, F_n, \dots$  felületek a  $P$  pontra zsugorodnak rá).

Az (1) definíciót  $\text{div } \vec{v}$  Ignatowsky-féle definíciójának szokás nevezni. E definíció a felvett koordináta-rendszer-től független, ún. koordinátainvariáns definíció.

Felvetődik a kérdés, hogy milyen elégséges feltétel adható meg arra nézve, hogy az (1) definícióban szereplő határérték létezzen. Belátható, hogy ha  $\vec{v}(\vec{r}) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ , és  $X, Y, Z$  parciális deriváltjai folytonosak a  $P$  pont környezetében, akkor az (1) határérték létezik. Erre a kérdésre később még visszatérünk.

Az (1) határérték elnevezését könnyen indokolhatjuk abban a speciális esetben, amikor  $\vec{v}(\vec{r})$  áramló összenyomhatatlan folyadék sebességi vektore. Ekkor ugyanis - amint arról a Matematika I/2. jegyzet 50. fejezetében részletesen beszéltünk -  $\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}$  az  $F_n$  felületen az időegység

alatt átáramlott folyadék térfogatának mérőszámát, illetve, mivel a felületmenti integrált kifelé mutató felületi normálissal számítottuk, az  $F_n$  felületen az időegység alatt kilépő és belépő folyadék-térfogat különbségének mérőszámát adja meg.

Ez az érték csak akkor lesz zérustól különböző, ha az áramlási térben elhelyezkedő zárt  $F_n$  felület belsejében források, ill. nyelők (ezek helyett a továbbiakban szintén forrást - negatív forrást - mondunk majd) vannak. Az  $F_n$  felületre vonatkozó skalárértékű felületmenti integrál tehát  $F_n$  belsejében a forráserősséget méri. Ezt a mérőszámot az  $F_n$  felület által bezárt térrész  $V_n$  térfogatának mérőszámával osztva, a nyert

$$\frac{\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}}{V_n}$$

hányados az  $F_n$  felület által határolt térrészben az átlagos forráserősségsűrűséget (forráserősűrűséget), e hányadosok (1) definícióban szereplő határértéke pedig a  $P$  pontbeli forráserősségsűrűséget méri.

Ezek szerint  $[\text{div } \vec{v}(\vec{r})]_{(P)}$  a folyadék  $P$  pontbeli szétáramlásáról ad nekünk képet, ez indokolja a divergencia elnevezést.

Ha  $\vec{v}(\vec{r})$  elektromágneses erőter, akkor (1)-ben a számlálóban álló integrál a fluxus, a hányados tehát az átlagos fluxussűrűség, határértékben tehát  $\text{div } \vec{v}$  a  $P$  pontbeli fluxussűrűséget szolgáltatja.

Ha egy térrészben  $\text{div } \vec{v} \equiv 0$ , akkor ez azt jelenti, hogy nincsenek források a térben. Röviden az ilyen tereket forrásmentes tereknek nevez-



zük. Hasonló okoskodással adódik az (1) definícióból, hogy  $\operatorname{div} \vec{v} \equiv c$  azt jelenti, hogy a források egyenletesen vannak a térben eloszolva.

b) Legyen

$$\vec{v} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

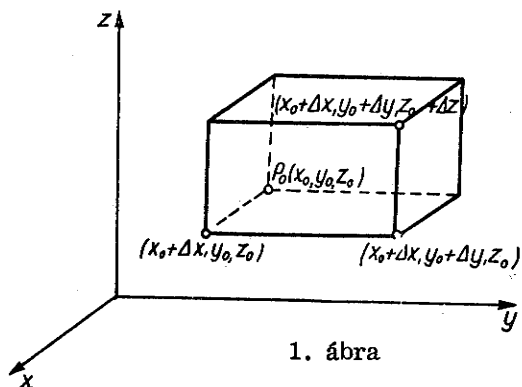
a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  pont  $H$  környezetében értelmezett vektor-vektorfüggvény.

Tegyük fel, hogy  $H - n$   $\vec{v}$  koordinátái, valamint ezeknek parciális deriváltjai folytonosak.

Legyen

$$K = \left\{ (x, y, z) : x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, \quad y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y, \quad z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z \right\},$$

és  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  legyenek oly kicsinyek, hogy már  $K \subset H$ . Ezen kikötés mellett  $[\operatorname{div} \vec{v}]_{(P_0)}$  létezik előbbi megjegyzésünk értelmében.



### Tétel

Az előbbi feltételek mellett

$$\vec{v}(\vec{r}) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

divergenciája

$$\operatorname{div} (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

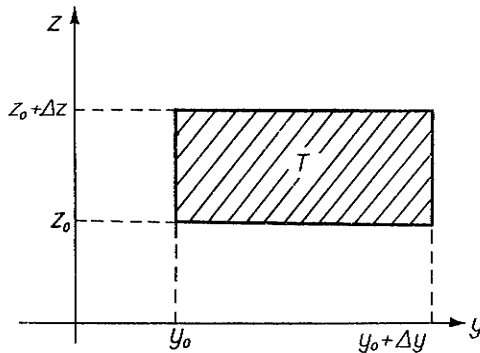
## Bizonyítás

A  $K$  halmaz  $F$  határa az  $XYZ$  derékszögű koordinátarendszer koordinátasíkjával párhuzamos oldalú egyenes hasáb felület. Számítsuk ki ezen  $F$  zárt felületre kifelé mutató felületi normális mellett a koordinátáinak parciális deriváltjaival együtt folytonosnak feltételezett  $\vec{v}(\vec{r})$  vektortér skálárértékű felületmenti integrálját.

$$\iint_F \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f} = \iint_F X \vec{i} \, d\vec{f} + \iint_F Y \vec{j} \, d\vec{f} + \iint_F Z \vec{k} \, d\vec{f}.$$

Az  $X \vec{i}$  vektortér  $F$  felületre vonatkozó felületmenti integrálja a hasáb  $+\vec{k}$ ,  $-\vec{k}$ ,  $+\vec{j}$ ,  $-\vec{j}$  normálisú lapjaira (ezek egyenlete  $z = z_0 + \Delta z$ ,  $z = z_0$ ,  $y = y_0 + \Delta y$ ,  $y = y_0$ ) zérus, a  $+\vec{i}$  ill.  $-\vec{i}$  normálisú  $x = x_0 + \Delta x$ , ill.  $x = x_0$  egyenletű lapokra vonatkozó felületmenti integrált  $y$  és  $z$ -t vezetve be paraméternek az  $YZ$  paramétersík  $T$  tartományára (2. ábra) vonatkozó kettős integrállá átalakítva:

$$\begin{aligned} \iint_F X \vec{i} \, d\vec{f} &= \iint_T X(x_0 + \Delta x, y, z) \vec{i} \vec{i} \, dy \, dz + \iint_T X(x_0, y, z) \vec{i} (-\vec{i}) \, dy \, dz = \\ &= \iint_T \{ X(x_0 + \Delta x, y, z) - X(x_0, y, z) \} \, dy \, dz. \end{aligned}$$



2. ábra

Integrálandó függvényünkre a Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva (ez a fent tett kikötések, vagyis a  $K$  halmazon  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  parciális deriváltjainak létezése és  $\vec{v}(\vec{r})$  folytonossága mellett megtehető)

$$\{ X(x_0 + \Delta x, y, z) - X(x_0, y, z) \} = \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y, z) \Delta x, \text{ ahol } 0 \leq \vartheta_1 \leq 1,$$

vagyis

$$\begin{aligned} \iint_F X \bar{1} \, d\bar{f} &= \dots = \iiint_T \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^\ell \Delta x, y, z) \Delta x \right\} dy \, dz = \\ &= \int_{z=z_0}^{z_0+\Delta z} \left( \int_{y=y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^\ell \Delta x, y, z) \Delta x \, dy \right) dz. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk először a belső integrálra az integrálszámítás középértéktételét (az integrálandó függvény feltételezett  $K$ -beli folytonossága miatt ez megtehető):

$$\begin{aligned} \int_{y=y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^\ell \Delta x, y, z) \Delta x \, dy &= \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^\ell \Delta x, y_0 + \nu_2^\ell \Delta y, z) \Delta x \, \Delta y, \\ (0 \leq \nu_2^\ell \leq 1). \end{aligned}$$

Hasonlóképpen a még visszamaradó  $z$  szerinti integrálban az integrálszámítás középértéktételét alkalmazva adódik:

$$\begin{aligned} \iint_F X \bar{1} \, d\bar{f} &= \dots = \int_{z=z_0}^{z_0+\Delta z} \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^\ell \Delta x, y_0 + \nu_2^\ell \Delta y, z) \Delta x \, \Delta y \right\} dz = \\ (2) \quad &= \frac{\partial X}{\partial x} (x_0 + \nu_1^\ell \Delta x, y_0 + \nu_2^\ell \Delta y, z_0 + \nu_3^\ell \Delta z) \Delta x \, \Delta y \, \Delta z, \quad (0 \leq \nu_3^\ell \leq 1). \end{aligned}$$

Teljesen hasonló okoskodással nyerhető, hogy

$$(3) \quad \iint_F Y \bar{j} \, d\bar{f} = \frac{\partial Y}{\partial y} (x_0 + \nu_4^\ell \Delta x, y_0 + \nu_5^\ell \Delta y, z_0 + \nu_6^\ell \Delta z) \Delta x \, \Delta y \, \Delta z, \text{ ahol } \nu_4^\ell, \nu_5^\ell, \nu_6^\ell$$

0 és 1 közötti számok,

$$(4) \iint_F Z \bar{k} \, d\bar{f} = \frac{\partial Z}{\partial z} (x_0 + v_7 \Delta x, y_0 + v_8 \Delta y, z_0 + v_9 \Delta z) \Delta x \Delta y \Delta z, \text{ ahol } v_7, v_8, v_9$$

0 és 1 közötti számok.

(2), (3), (4) argumentumát röviden  $P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$  -vel jelölve ( $P' \in K$ ,  $P'' \in K$ ,  $P''' \in K$ ), mivel a vizsgált hasáb térfogata  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , a következő eredményre jutottunk:

$$\frac{\iint_F \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f}}{V} = \frac{\left\{ \frac{\partial X}{\partial x} (P') + \frac{\partial Y}{\partial y} (P'') + \frac{\partial Z}{\partial z} (P''') \right\} \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} =$$

$$= \frac{\partial X}{\partial x} (P') + \frac{\partial Y}{\partial y} (P'') + \frac{\partial Z}{\partial z} (P''').$$

Ha az  $F$  felületek rázsugorodnak a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  pontra, akkor ezen speciális derékszögű hasáb-felületekből álló sorozat esetére a  $\bar{v}(\bar{r})$  vektorvektorfüggvény koordinátáinak parciális deriváltjaira tett folytonossági kikötések mellett

$$(5) \quad \left[ \operatorname{div} (X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}) \right]_{(P_0)} = \lim \frac{1}{V} \iint_F \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f} =$$

$$= \lim \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} (P') + \frac{\partial Y}{\partial y} (P'') + \frac{\partial Z}{\partial z} (P''') \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right\}_{(P_0)}.$$

Pl. a  $(0, 0, 0)$  pontban elhelyezett egységnyi pontszerű töltés elektrosztatikus terét előállító

$$\bar{E} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \bar{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \bar{k}$$

vektortér divergenciája  $((x, y, z) \neq (0, 0, 0))$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{E} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} = \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3 - 3x^2 \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \dots + \dots = \\ &= \frac{x^2+y^2+z^2 - 3x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{5/2}} + \dots + \dots = \\ &= \frac{y^2+z^2-2x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{5/2}} + \frac{z^2+x^2-2y^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{5/2}} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{5/2}} = 0, \end{aligned}$$

vagyis ez az elektrosztatikus tér divergenciamentes. (A számítások során az  $y$  és  $z$  szerinti parciális deriváltat, mivel a vektortér  $x$ ,  $y$  és  $z$ -ben szimmetrikus, az  $x$  szerinti parciális deriváltból ciklikus cserével írtuk fel.)

Egy vektortér divergenciájának kiszámítására szolgáló képletünket - (5) - könnyen megjegyezhetjük, ha bevezetünk egy szimbolikus vektort, a  $\nabla$  jellel jelölt és nablának nevezett operátort:

$$(6) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}.$$

E vektornak önmagában nincs értelme (ezért is neveztük szimbolikus vektornak), csupán az bír értelemmel, hogy  $\nabla$ -t, mint operátort, utasítást, egy skalár, vagy vektorfüggvényre alkalmazzuk:

$$(7) \quad \nabla \cdot \bar{v} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) (X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div} \bar{v},$$

A már korábban definiált grad  $u$  vektor is előállítható  $u$ -ból a  $\nabla$  vektor alkalmazásával:

$$(8) \quad \nabla u = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} = \operatorname{grad} u.$$

c) Egyszerű számolással igazolhatók az alábbi összefüggések:

$$(9) \quad \operatorname{div} (\bar{v}_1(\bar{r}) + \bar{v}_2(\bar{r})) = \operatorname{div} \bar{v}_1(\bar{r}) + \operatorname{div} \bar{v}_2(\bar{r}),$$

$$(10) \quad \operatorname{div} (\bar{u}(\bar{r}) \cdot \bar{v}(\bar{r})) = \bar{v}(\bar{r}) \operatorname{grad} u(\bar{r}) + u(\bar{r}) \operatorname{div} \bar{v}(\bar{r}).$$

Magukat a képleteket a  $\nabla$  szimbolikával (a bal oldalon álló vektorfüggvényekre a  $\nabla$  vektort formálisan alkalmazva) célszerű megjegyezni, ez a gondolatmenet azonban nem igazolása a fenti összefüggéseknek.

Például (10) esetében  $\bar{v} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$  mellett

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (u(\bar{r}) \cdot \bar{v}(\bar{r})) &= \frac{\partial uX}{\partial x} + \frac{\partial uY}{\partial y} + \frac{\partial uZ}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} X + \frac{\partial u}{\partial y} Y + \frac{\partial u}{\partial z} Z + u \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = \\ &= \operatorname{grad} u \cdot \bar{v} + u \operatorname{div} \bar{v}. \end{aligned}$$

A  $\nabla$  operátor segítségével ez így írható fel:

$$\nabla (u \cdot \bar{v}) = (\nabla u) \bar{v} + u (\nabla \bar{v}),$$

s ebből kiolvasható az a más esetekben is helyesnek bizonyuló szabály, hogy a  $\nabla$  operátort egy szorzatra úgy kell alkalmazni, mint a differenciálás műveleti jelét, azaz minden tényezőre külön alkalmazzuk a többi változatlanul hagyása mellett, és az adódó tagokat összeadjuk.

A vektor-vektorfüggvények tárgyalásánál említettük, hogy külön tárgyalást érdemelnek azok a vektorterek, amelyek egy skalártér gradienseként származtathatók. (Az ilyen vektorterekről beláttuk, hogy alkalmas tartományban futó zárt görbe menti integráljuk mindig zérus, Matematika I/2. jegyzet 49. fejezet.) Ha  $\bar{v} = \operatorname{grad} u$ , akkor  $\operatorname{div} \bar{v}$  a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} u &= \operatorname{div} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Amennyiben tehát egy  $\bar{v}$  vektortér potenciális ( $\bar{v} = -\operatorname{grad} \phi$ ,  $\phi = -u$ ), akkor

$$\operatorname{div} \vec{v} = \varphi(x, y, z),$$

esetében a vektortér potenciálja a

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \phi) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \varphi(x, y, z)$$

parciális differenciálegyenletnek tesz eleget. Ezt a parciális differenciálegyenletet  $\varphi \equiv 0$  esetén Laplace-, egyébként Poisson-egyenletnek nevezik. Ezen nevezetes parciális differenciálegyenleteket még a következő rövid alakban szokás felírni. A  $\nabla$  operátor kétszer egymás után történő alkalmazásával adódó  $\nabla^2$  operátort  $\Delta$ -val jelölve (a  $\Delta$  operátort Laplace-operátornak szokás nevezni):

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

és így a Laplace-, ill. Poisson-egyenlet a következőképpen írható fel:

$$-\Delta \phi = 0,$$

ill.

$$-\Delta \phi = \varphi(x, y, z).$$

E parciális differenciálegyenletek megoldási módszereire később térünk ki.

## 2. Gauss-Osztrogradszkij-tétel, síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tétel, Green-tétel

a) A Gauss-osztrogradszkij-tétel a következő fontos állítást mondja ki:

Legyen  $\vec{v}(\vec{r})$  folytonos a mérhető felszínű, irányítható zárt  $F$  felületen, valamint az  $F$  felület által bezárt mérhető térfogatu térrészben; ugyanitt legyenek  $\vec{v}(\vec{r})$  koordinátáinak parciális deriváltjai is folytonosak. Ekkor

$$(1) \quad \iint_F \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy \, dz,$$

ahol a felületmenti integrált kifelé mutató normálissal kell számítani.

A Gauss-Osztrogradszkij tétel tehát zárt felületre vonatkozó felületmenti integrált alakít át a felület által bezárt térrészre vonatkozó hármas integrállá.

### Bizonyítás

A Gauss-Osztrogradszkij-tételt abban a speciális esetben fogjuk bebizonyítani, amikor az (1) -ben szereplő  $V$  tartomány mindhárom koordinátasík felől nézve normáltartomány. Ezen kívül  $\vec{v}(\vec{r})$ , ill.  $F$  -re a tétel kimondásában szereplő feltételek teljesülését természetesen megköveteljük.

Mivel

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V \operatorname{div} (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} \, dx \, dy \, dz + \iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y} \, dx \, dy \, dz + \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} \, dx \, dy \, dz, \end{aligned}$$

a tételt bebizonyítottuk, ha e három hármas integrált megfelelő három felületi integrállá tudjuk átalakítani. Az átalakítást mi a felbontásban szereplő harmadik integrálra végezzük el, a másik kettő átalakítása teljesen hasonló lépésekben történik.

Az átalakítás első lépéseként végezzük el a  $z$  változó szerinti integrálást. Mivel feltevésünk értelmében  $V$  az  $XY$  síkra nézve normáltartomány, a két határoló felület egyenletét  $z = F_1(x, y)$ , ill.  $z = F_2(x, y)$

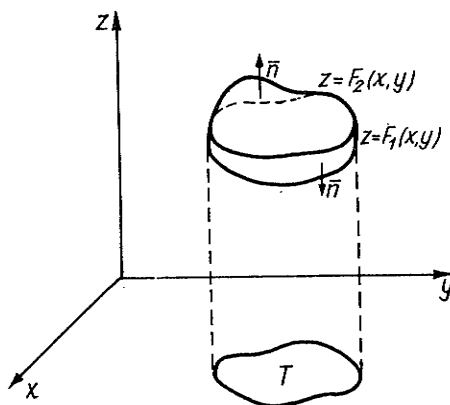
alakban megadva, az  $XY$  sík megfelelő tartományát  $T$  -vel jelölve (3. ábra) adódik:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} \, dx \, dy \, dz &= \iint_T \left( \int_{z=F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} \frac{\partial Z}{\partial z} \, dz \right) dx \, dy = \\ &= \iint_T [Z(x, y, z)]_{z=F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} dx \, dy = \\ &= \iint_T Z(x, y, F_2(x, y)) dx \, dy + \iint_T -Z(x, y, F_1(x, y)) dx \, dy. \end{aligned}$$



E két kettős integrál közül az első felfogható a  $\vec{v} = Z\vec{k}$  vektortér  $F_2$  felület menti integráljának felfelé mutató felületi normális mellett, az  $XY$  paramétersíkban kettős integrállá átalakított formában. Második integrálunk ugyanakkor úgy tekinthető, mint a  $\vec{v} = Z\vec{k}$  vektortér  $F_1$  felület

menti, lefelé irányított felületi normálissal számított integráljának kettős integrállá alakított formája, azaz



3. ábra

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = \dots = \iint_{F_2} Z\vec{k} d\vec{f} + \iint_{F_1} Z\vec{k} d\vec{f}.$$

De másrészt az  $F$  felület az  $F_1$  és  $F_2$  felületdarabon kívül csak egy, a  $Z$  tengellyel párhuzamos alkotóju hengerfelületből állhat, s mivel ezen hengerfelület normálisára a  $\vec{v} = Z\vec{k}$  vektortér vektorai merőlegesek, e hengerfelületre  $Z\vec{k}$  felületmenti integrálja zérus. Irhatjuk tehát, hogy

$$\iint_{F_1} Z\vec{k} d\vec{f} + \iint_{F_2} Z\vec{k} d\vec{f} = \iint_F Z\vec{k} d\vec{f},$$

vagyis

$$(K) \quad \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = \iint_F Z\vec{k} d\vec{f}.$$

Teljesen hasonlóan adódik:

$$(KK) \quad \iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz = \iint_F X\vec{i} d\vec{f},$$

$$(KKK) \quad \iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy dz = \iint_F Y\vec{j} d\vec{f},$$

ahol az adódó felületmenti integrálokat kifelé mutató felületi normálissal kell számítani. A  $(\mathbf{x})$ ,  $(\mathbf{xx})$  és  $(\mathbf{x} \mathbf{x})$  összefüggések összeadásával adódik, hogy

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} \, dx \, dy \, dz + \iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y} \, dx \, dy \, dz + \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iint_F X \bar{\mathbf{i}} \, d\bar{\mathbf{f}} + \iint_F Y \bar{\mathbf{j}} \, d\bar{\mathbf{f}} + \iint_F Z \bar{\mathbf{k}} \, d\bar{\mathbf{f}} = \\ &= \iint_F \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}}) \, d\bar{\mathbf{f}}, \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

A most tárgyalt speciális esetből következtethetünk a Gauss-Osztrogradszkij-tétel érvényességére minden olyan  $V$  térrész esetében is, amely az itteni típusú térrészekből rakható össze úgy, hogy az egymással fedésbe kerülő felületrészekben a felületi normálisok irányításai ellentétesek legyenek. A gyakorlatban csak ilyen térrészekkel dolgozunk.

Az előző fejezetben egy elégséges feltételt adtunk arra nézve, hogy egy  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}})$  vektortér divergenciája a  $P$  pontban létezzék. Azt mondtuk, hogy ha  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}})$  koordinátáinak parciális deriváltjai folytonosak a  $P$  pontra rázsugorodó zárt  $F_1, \dots, F_n, \dots$  felület által határolt térrészekben, akkor az (1) definícióban szereplő hányadosok sorozatának van határértéke, ezt a határértéket  $[\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}]_{(P)}$ -vel jelöltük.

Valóban, jelentse  $F_n$  a  $P$  pontra rázsugorodó zárt felületsorozat egy tagját,  $K_n$  az  $F_n$  felület által bezárt térrészt,  $V_n$  pedig ezen térrész térfogatának mérőszámát. Mivel  $P \in K_n$ , a tett folytonossági kikötések mellett  $(\xi, \eta, \zeta) \in K_n$  esetén

$$\left[ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(\xi, \eta, \zeta)} = \left[ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(P)} + \eta(\xi, \eta, \zeta),$$

ahol  $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow P$  esetén  $\eta \rightarrow 0$ .

Mivel azonban  $\left[ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(P)}$  állandó, a Gauss-Osztrogradszkij-tétel értelmében írhatjuk:

$$\begin{aligned}
\iint_{F_n} (X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}) d\bar{f} &= \iiint_{K_n} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \\
&= \left[ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(P)} \iiint_{K_n} dx dy dz + H_n = \\
&= \left[ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(P)} \cdot V_n + H_n,
\end{aligned}$$

ahol

$$H_n = \iiint_{K_n} \gamma dx dy dz.$$

Tetszőleges  $\varepsilon > 0$  mellett

$$|H_n| \leq \varepsilon V_n,$$

mihelyt  $K_n$  beleesik  $P$ -nek olyan környezetébe, amelyben  $|\gamma| < \varepsilon$ .

Átosztva  $V_n \neq 0$ -val, adódik:

$$(2) \quad \left[ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(P)} = \frac{1}{V_n} \iint_{F_n} (X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}) d\bar{f} - \frac{H}{V_n}.$$

Ha mármost az  $F_n$  felületeknek  $P$  pontra rázsugorodó sorozatát tekint-

jük, az ezeknek megfelelő  $\frac{1}{V_n} \iint_{F_n} (X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}) d\bar{f}$  sorozatok biz-

tosan konvergensek, és határértékük  $\left[ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{(P)}$ , hiszen

a tett kikötések mellett  $\left| \frac{H}{V_n} \right| \rightarrow 0$ , s így a (2) összefüggésből az állítás adódik.

A Gauss-Osztrogradszkij-tétel segítségével könnyen belátható, hogy a  $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{r}$  vektortérnek bármely mérhető felszínű, irányítható zárt  $F$  felületre vonatkozó felületmenti integrálja kifelé irányított felületi normális

mellett az  $F$  felület által bezárt  $K$  térrész térfogatának háromszorosával egyenlő.

Ugyanis

$$\operatorname{div} \vec{r} = \operatorname{div} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 1 + 1 + 1 = 3 ,$$

és így a Gauss-Osztrogradszkij-tétel értelmében

$$\iint_F \vec{r} d\vec{f} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{r} dx dy dz = 3 \iiint_K dx dy dz = 3 V .$$

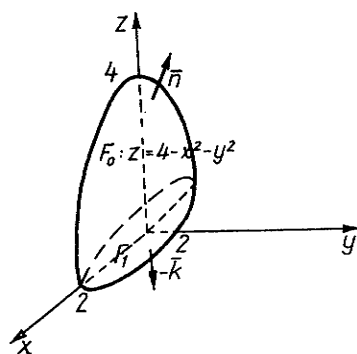
Ha pl.  $F$  egy  $R = 2$  sugaru gömbfelület, akkor

$$\iint_F \vec{r} d\vec{f} = 3 \frac{4 \cdot 2^3 \tilde{h}}{3} = 32 \tilde{h} .$$

Néha nyílt felületekre vonatkozó felületmenti integrálok kiszámítására is alkalmazhatjuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt. Ha ugyanis a nyílt felületet alkalmas felülettel (leginkább síkkal) kiegészítve zárt felületet nyerünk, erre alkalmazhatjuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt, eredeti felületünkre az integrál értékét pedig úgy nyerjük, hogy az átalakítással nyert hármas integrál értékéből levonjuk a kiegészítő felületre (síkra) vonatkozó felületmenti integrál értékét.

Pl. számítsuk ki a

$$\vec{v} = (x-y)\vec{i} + yz\vec{j} + (x^2-yz)\vec{k}$$



4. ábra

vektorfüggvény felületmenti integrálját az  $F_0: z = -x^2 - y^2 + 4$  felület  $z > 0$  részére felfelé mutató felületi normális mellett. Az  $F_0$  felületet az  $XY$  síkban fekvő  $F_1$  síklemezzel ( $F_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$ ) kiegészítve zárt felületre jutunk (4. ábra), vagyis a Gauss-Osztrogradszkij-tételt alkalmazva

$$\iint_{F_0} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{f} + \iint_{F_1} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{f} =$$

$$= \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} dx dy dz, \text{ illetve}$$

$$\iint_{F_0} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f} = \iiint_V \operatorname{div} \bar{v} dx dy dz - \iint_{F_1} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f}$$

ahol  $F_0$ -t felfelé mutató,  $F_1$ -et lefelé mutató normálissal kell vennünk, ekkor ugyanis az  $F_0 + F_1$  felület normálisa éppen a Gauss-Osztrogradskij tétel követelményeinek megfelelően kifelé mutató normális lesz.

Hármas integrálunkat hengerkoordinátás transzformációval célszerű kiszámítani, mivel pedig  $F_1$  az XY síkban fekszik, s így pontjaiban  $z = 0$ , továbbá  $F_1$  normálisa  $-\bar{k}$ , adódik:

$$\begin{aligned} \iint_{F_0} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f} &= \iiint_V (1+z-y) dx dy dz - \iint_{F_1} [(x-y)\bar{i} + x^2\bar{k}] (-\bar{k}) dx dy = \\ &= \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left( \int_{z=0}^{-r^2+4} (1+z-r\sin\varphi) r dz \right) d\varphi dr - \iint_{F_1} (-x^2) dx dy = \\ &= \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3 \cos^2\varphi d\varphi dr = \\ &= \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left( (r-r^2\sin\varphi)(-r^2+4) + \frac{(-r^2+4)^2}{2} r \right) d\varphi dr + \\ &+ \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3 \cos^2\varphi d\varphi dr = \\ &= 2\pi \int_{r=0}^2 \left( -r^3 + 4r + \frac{r^5}{2} - 4r^3 + 8r + \frac{r^3}{2} \right) dr = \\ &= 2\pi \left[ 12 \frac{r^2}{2} - \frac{9}{2} \frac{r^4}{4} + \frac{1}{2} \frac{r^6}{6} \right]_{r=0}^2 = 2\pi \left( 24 - 18 + \frac{16}{3} \right) = \frac{34}{3} 2\pi \approx 71. \end{aligned}$$

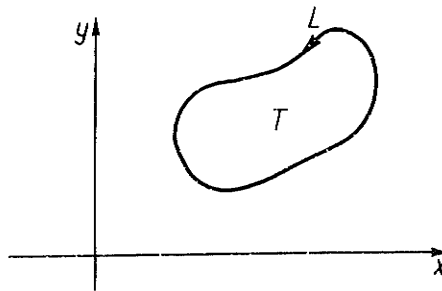
(A számolás során felhasználtuk, hogy mivel  $F_1$  épp az XY paraméter-síkban fekvő síklap, a felületi integrált kettős integrállá átalakítva az integrációs tartomány is  $F_1$  lesz; ezen integrált polárkoordinátás transzformációval számítva ki, mivel  $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$  és  $\cos 2\varphi$ , ill.  $\sin\varphi$ -nek  $[0, 2\pi]$ -ben vett integrálja zérus, a kettős integrálok számítása során az őket szorzóként tartalmazó tagok kiesnek.)

b) Az un. síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tétel a következő állítást mondja ki:

Legyen  $T$  mérhető területű tartomány, ennek  $L$  határgörbéje szakaszonként folytonosan differenciálható paraméteres előállítású, a  $p(x, y)$  és  $q(x, y)$  függvények  $T$ -ben és  $T$ -nek  $L$  határán,  $p(x, y)$  és  $q(x, y)$  parciális deriváltjai pedig  $T$ -ben folytonosak. Ekkor

$$\iint_T \left( \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial q(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \int_L (-q(x, y) dx + p(x, y) dy),$$

ahol az  $L$  görbén pozitív irányu befutással kell integrálnunk.

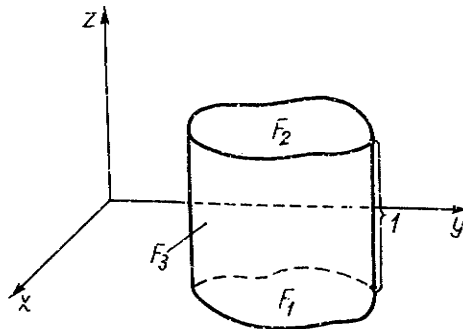


5. ábra

### Bizonyítás

Tételünket az általános Gauss-Osztrogradszkij-tételből abban a speciális esetben nyerjük, ha azt a

$$\vec{v} = p(x, y) \vec{i} + q(x, y) \vec{j}$$



vektortérre és olyan  $V$  térrészre alkalmazzuk, amely a  $T$  tartomány fölé emelt, a  $Z$  tengellyel párhuzamos alkotóju egységyi magasságú henger (6. ábra). Ekkor ugyanis egyrészt (először a  $z$  szerinti integrálást végezve el)

6. ábra

$$\begin{aligned}
\iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy \, dz &= \iint_T \left( \int_{z=0}^1 \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dz \right) dx \, dy = \\
&= \iint_T \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) z \right]_{z=0}^1 dx \, dy = \\
&= \iint_T \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx \, dy.
\end{aligned}$$

Másrészt, az általános Gauss-Osztrogradszkij-tételben szereplő felületmenti integrált (kifelé mutató felületi normálissal) átalakítva, a 6. ábrán látható módon az  $F$  henger alaplajját  $F_1$ -gyel, fedőlapját  $F_2$ -vel, palástját pedig  $F_3$ -mal jelölve

$$\begin{aligned}
\iint_F \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f} &= \iint_F (p\vec{i} + q\vec{j}) \, d\vec{f} = \iint_{F_1} (p\vec{i} + q\vec{j}) \, d\vec{f} = \iint_{F_2} (p\vec{i} + q\vec{j}) \, d\vec{f} + \\
&+ \iint_{F_3} (p\vec{i} + q\vec{j}) \, d\vec{f} = \iint_{F_3} (p\vec{i} + q\vec{j}) \, d\vec{f},
\end{aligned}$$

mivel az  $F_1$ , ill.  $F_2$  felületek kifelé mutató normálisa  $\vec{k}$ , ill.  $-\vec{k}$  irányába mutat, így e felületmenti integrálok kétfős integrállá történő átalakításánál az integranduszok zérusnak adódnak.

A visszamaradó  $F_3$  felületre vonatkozó felületmenti integrált az  $L$  görbe menti integrállá fogjuk átalakítani. Az  $F_3$  palást egyenletét az

$$\vec{r}(t, v) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + v\vec{k}, \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad 0 \leq v \leq 1$$

paraméteres alakban adhatjuk meg, ahol

$$\begin{aligned}
x &= x(t), \\
y &= y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,
\end{aligned}$$

az  $L$  görbe paraméteres egyenletrendszeré. Mivel

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot{y} \bar{i} - \dot{x} \bar{j}$$

(a  $t$  paraméter szerinti deriváltat jelöltük ponttal), és ha az  $L$  görbét pozitívan járjuk körül, azaz ha  $T$  balkéz felé esik, akkor ez valóban a feltevésnek megfelelően a térrészből kifelé mutató normálisirányításnak megfelelő, nyerjük:

$$\begin{aligned} \iint_{F_3} (p\bar{i} + q\bar{j}) d\bar{f} &= \iint_{T'} [p(x(t), y(t))\bar{i} + q(x(t), y(t))\bar{j}] (\dot{y}\bar{i} - \dot{x}\bar{j}) dt dv = \\ &= \int_{t=\alpha}^{\beta} \int_{v=0}^1 [p(x(t), y(t)) \dot{y} - q(x(t), y(t)) \dot{x}] dv dt = \\ &= \int_{t=\alpha}^{\beta} \left[ (p(x(t), y(t)) \dot{y} - q(x(t), y(t)) \dot{x}) v \right]_{v=0}^1 dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (-q(x(t), y(t)) \dot{x} + p(x(t), y(t)) \dot{y}) dt. \end{aligned}$$

Ez utóbbi integrálunk azonban nem más, mint a  $\bar{v} = -q\bar{i} + p\bar{j}$  vektortér  $L$  görbe menti integráljának közönséges integrállá átalakított formája, azaz

$$\iint_{F_3} (p\bar{i} + q\bar{j}) d\bar{f} = \dots = \int_L (-q\bar{i} + p\bar{j}) d\bar{r} = \int_L -q(x, y) dx + p(x, y) dy.$$

Egyrészt tehát azt az eredményt nyertük, hogy

$$\begin{aligned} (3) \quad \iiint_V \operatorname{div} \bar{v} dx dy dz &= \iiint_V \operatorname{div} (p\bar{i} + q\bar{j}) dx dy dz = \\ &= \iint_T \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$



másrészt

$$(4) \quad \iint_F \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f} = \iint_F (p\vec{i} + q\vec{j}) \, d\vec{f} = \\ = \int_L -q(x, y) \, dx + p(x, y) \, dy,$$

azaz az általános Gauss-Osztrogradszkij-tétel értelmében (3) és (4) baloldalainak fennálló egyenlőségéből következik, hogy

$$\iint_T \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_L -q \, dx + p \, dy,$$

amit bizonyítani akartunk.

A síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tételt a

$$p(x, y) = x, \quad q(x, y) = y$$

függvényekre alkalmazva a mérhető területű  $T$  tartomány területét szolgáltató újabb képletre juthatunk (a terület ugyanis nyilván egyenlő

$$\iint_T 1 \, dx \, dy \text{ értékével}).$$

Mivel  $\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 1 + 1 = 2$ , a  $T$  tartomány területét  $t$ -vel jelölve

$$\iint_T \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx \, dy = 2 \iint_T dx \, dy = 2t = \int_L -y \, dx + x \, dy,$$

azaz

$$t = \frac{1}{2} \int_L -y \, dx + x \, dy.$$

c) Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt a

$$\vec{v} = U \operatorname{grad} V = U \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + U \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + U \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

vektor-vektorfüggvényre. Legyenek tehát  $U$  elsőrendű és  $V$  másodrendű parciális deriváltjai folytonosak a vizsgált mérhető felszínű, zárt  $F$  felületen és az általa bezárt  $K$  térrészben. Ekkor

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \bar{v} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} + U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \\ &= U \Delta V + \operatorname{grad} U \operatorname{grad} V.\end{aligned}$$

Az  $F$  felületre (kifelé mutató felületi normális mellett) és az  $F$  felület által bezárt  $K$  térrészre a Gauss-Osztrogradszkij-tételt alkalmazva adódik:

$$\begin{aligned}\iiint_K \operatorname{div} \bar{v} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_K (U \Delta V + \operatorname{grad} U \operatorname{grad} V) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iint_F \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f} = \iint_F v_n \, df = \iint_F \bar{v} \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \, df = \\ &= \iint_F U \operatorname{grad} V \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \, df = \iint_F U \frac{\partial V}{\partial n} \, df,\end{aligned}$$

(az átalakítások során  $\bar{v}(\bar{r}) \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$  normálissal vett felületmenti integrálját átalakítottuk  $\bar{v} \bar{n}$  irányu vetületének  $v_n = \bar{v} \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$ -nak felszín szerinti integráljává, majd felhasználtuk azt a tényt, hogy valamely  $V(x, y, z)$  skalár-tér  $\bar{n}$  irányu deriváltját  $\frac{\partial V}{\partial n}$ -et  $\operatorname{grad} V$  és az  $\bar{n}$  irányu egységvektor skaláris szorzata szolgáltatja), azaz

$$(5) \quad \iiint_K (U \Delta V + \operatorname{grad} U \operatorname{grad} V) \, dx \, dy \, dz = \iint_F U \frac{\partial V}{\partial n} \, df.$$

Az (5) összefüggést szokás Green-tételnek nevezni.

A Green-tételnek egy másik, szimmetrikus alakját az (5) összefüggésből a következő gondolatmenettel nyerhetjük:

Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt speciálisan a

$$\bar{v} = V \operatorname{grad} U$$

vektor-vektorfüggvényre. Ekkor az (5) -ből  $U$  és  $V$  szerepcseréjével adódó

$$(6) \quad \iiint_K (V \Delta U + \text{grad } U \text{ grad } V) dx dy dz = \iint_F V \frac{\partial U}{\partial n} df$$

összefüggésre jutunk. (5) -ből kivonva (6) -ot adódik:

$$(7) \quad \iiint_K (U \Delta V - V \Delta U) dx dy dz = \iint_F (U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}) df.$$

A (7) összefüggést szokás szimmetrikus Green-tételnek nevezni. (E tétel-nél tehát  $U$  és  $V$  másodrendű parciális deriváltjainak folytonosságát kell kikötnünk a vizsgált  $F$  felületen és az általa bezárt  $K$  térrészben.

Ez a tétel főleg az un. potenciálméleti vizsgálatokban játszik fontos szerepet.

Ha ugyanis a vizsgált vektortér potenciálos ( $\vec{v} = -\text{grad } \varphi$ ) és ismerjük a vektortér divergenciáját ( $\text{div } \vec{v} = g$ ), akkor mivel  $\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi$ , a vektortér  $\varphi$  potenciálja a

$$-\Delta \varphi = g$$

Poisson-egyenlet megoldásaként adódik.

Számítsuk ki először e Poisson-egyenlet megoldását alkalmas végesben fekvő  $V$  térrészben.

Jelöljük  $x, y, z$  -vel azon  $P$  pont koordinátáit, melyben a  $\varphi$  potenciált keressük,  $\xi, \eta, \zeta$  -vel pedig a változó (futó) pont koordinátáit. Tegyük fel, hogy a  $P$  pont a  $V$  térrésznek a belsejében fekszik; vegyünk fel a  $P$  pont mint középpont körül egy kicsiny  $r_0$  sugaru gömbfelületet, melyet  $F_0$  -lal, az általa határolt zárt térrészt  $V_0$  -lal jelöljük. E  $V_0$  térrészt  $V$  -ből elhagyva, a visszamaradó  $V - V_0$  térrészre, valamint a  $V$  -t határoló  $F$  felületre és  $V_0$  -át határoló  $F_0$  felületre (ezek határolják  $V - V_0$  -át), az ismeretlen  $\varphi$  potenciálfüggvényre és a

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} = \frac{1}{r}$$

függvényre írjuk fel a szimmetrikus Green-tételt (7). Mivel a  $V - V_0$  térrész minden pontjában  $\psi$  értelmezve van és

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} = \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{x-\xi}{r^3} + \frac{\partial}{\partial\eta} \frac{y-\eta}{r^3} + \frac{\partial}{\partial\zeta} \frac{z-\zeta}{r^3} = \\ &= \frac{2(\xi-x)^2 - (\eta-y)^2 - (\zeta-z)^2}{r^5} + \frac{2(\eta-y)^2 - (\xi-x)^2 - (\zeta-z)^2}{r^5} + \\ &+ \frac{2(\zeta-z)^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}{r^5} = 0,\end{aligned}$$

(7) értelmében

$$\begin{aligned}\iiint_{V-V_0} -\frac{1}{r} \Delta\varphi \, d\xi \, d\eta \, d\zeta &= \iint_F \left( \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df + \iint_{F_0} \left( \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) df - \\ (8) \quad &- \iint_{F_0} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df,\end{aligned}$$

ahol a jobb oldalon szereplő két utolsó felületmenti integrálban a zárt felületből kifelé irányított normális radiális, a  $V_0$  gömb középpontja felé irányított normálist jelent.

Vizsgáljuk meg a fenti integrálok határértékét, ha az  $F_0$  gömbfelület a  $P$  pontra rázsugorodik, vagyis, ha  $r_0 \rightarrow 0$ .  $\varphi$  és  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  folytonossága esetén e függvények  $V$ -ben korlátosak, azaz

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| < K, \quad \varphi(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(x, y, z) + \varepsilon'$$

és így

$$\left| \iint_{F_0} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} df \right| \leq \frac{1}{r_0} K \iint_{F_0} df = \frac{1}{r_0} K \cdot 4r_0^2 \tilde{\mu} = 4\tilde{\mu} K r_0 \rightarrow 0,$$

ha  $r_0 \rightarrow 0$ . Teljesen hasonlóképpen, mivel

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \text{grad } \frac{1}{r} \cdot \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = -\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3} \cdot \left( -\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} \right)$$

$(\vec{r} = (\xi - x)\vec{i} + (\eta - y)\vec{j} + (\zeta - z)\vec{k})$ , az  $F_0$  gömbfelület  $P(x, y, z)$  pont felé irányított normálisa tehát  $\vec{n} = -\vec{r}$

$$\begin{aligned} \iint_{F_0} \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} df &= \iint \varphi \frac{1}{r_0^2} df = \\ &= \iint_{F_0} \varphi(P) \frac{1}{r_0^2} df + \iint \varepsilon' \frac{1}{r_0^2} df = \varphi(P) \frac{1}{r_0^2} 4r_0^2 \pi + H, \end{aligned}$$

ahol  $H \rightarrow 0$ , ha  $r_0 \rightarrow 0$ , mivel  $\varphi$  feltételezett folytonossága miatt tetszőlegesen kicsiny  $\varepsilon_1 > 0$  mellett  $|\varepsilon'(\xi, \eta, \zeta)| < \varepsilon_1$ , ha már  $r_0$  elég kicsiny (vagyis  $(\xi, \eta, \zeta)$  már elég közel fekszik  $(x, y, z)$ -hez), ekkor pedig

$$|H| = \left| \iint_{F_0} \varepsilon' \frac{1}{r_0^2} df \right| < \varepsilon_1 \frac{1}{r_0^2} 4r_0^2 \pi = 4\pi \varepsilon_1,$$

ami épp az állítást adja.

Mivel tehát  $r_0 \rightarrow 0$  esetén (8) jobboldala - és így a baloldala is - véges határértékhez tart, konvergens az

$$\iiint_V -\frac{1}{r} \Delta \varphi d\xi d\eta d\zeta$$

improprius integrál, és

$$(9) \quad \iiint_V -\frac{1}{r} \Delta \varphi d\xi d\eta d\zeta = \iint_F \left( \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df + 4\pi \varphi(P).$$

Belátható, hogy ha a  $P$  pont a  $V$  térrészt határoló  $F$  felületen fekszik, akkor hasonló okoskodással

$$\iiint_V -\frac{1}{r} \Delta \varphi d\xi d\eta d\zeta = \iint_F \left( \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df + 2\pi \varphi(P),$$

illetve ha  $P$  a  $V$  térrészen kívül fekszik

$$\iiint_V -\frac{1}{r} \Delta \varphi d\xi d\eta d\zeta = \iint_F \left( \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df$$

adódik.

Ha a vizsgált  $\varphi$  potenciál mármint a  $-\Delta \varphi = g$  Poisson-egyenletnek tesz eleget, a (9) összefüggés ennek figyelembevételével  $\varphi(P)$ -t a következőképpen adja meg:

$$(10) \quad \varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{g}{r} d\xi d\eta d\zeta - \frac{1}{4\pi} \iint_F \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} df + \frac{1}{4\pi} \iint_F \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} df.$$

(E képletben az első integrál térbeli eloszlás, a második  $\varphi$  nyomatékú kettős réteg, a harmadik pedig  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  felületi sűrűségű egyszerű réteg potenciálját szolgáltatja.)

Ha  $V$  az egész teret jelenti és az első és másodrendű parciálisai-val együtt folytonosnak feltételezett  $\varphi$  potenciál  $r \rightarrow \infty$  esetén 0-hoz tart ( $\varphi = o(1)$ ),  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  pedig  $r$ -rel szorozva is 0-hoz tart  $r \rightarrow \infty$  esetén ( $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = o(\frac{1}{r})$ ), akkor a (10) képlet jobboldalán álló két utolsó integrál  $r \rightarrow \infty$  esetén 0-hoz tart, s így a  $\varphi$  potenciál értékét a következő hármas integrál szolgáltatja:

$$(11) \quad \varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{g(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} d\xi d\eta d\zeta.$$

Ha ui. pl.  $F$   $R$  sugaru gömbfelület, akkor

$$\left| \iint_F \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} df \right| = \left| \iint_F \varphi \frac{1}{R^2} df \right| < o(1) \frac{4R^2 \pi}{R^2} = 4\pi o(1),$$

$$\left| \iint_F \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} df \right| = \left| \iint_F \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} df \right| < \frac{1}{R} o\left(\frac{1}{R}\right) 4R^2 \pi = 4\pi \frac{o\left(\frac{1}{R}\right)}{\frac{1}{R}}$$

ahol a Matematika I/1. jegyzet 28. fejezetében foglalt definíció értelmében eredményeink épp azt fejezik ki, hogy a fenti integrálok abszolút értéke  $R \rightarrow \infty$  esetében 0-hoz tart.

Belátható, hogy a  $g(x, y, z)$  függvényre tett megfelelő megszorítások mellett a (11) -gyel definiált függvény valóban megoldása a

$$\Delta \varphi = -g$$

Poisson-egyenletnek.

### 3. Vektor-vektorfüggvény rotációja. Vektorpotenciál

a) Jelentsenek  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$  a  $P$  pontot belsejükben vagy határukon tartalmazó zárt felületeket; tegyük fel, hogy e felületek mérhető felszíniük és irányíthatók, az általuk bezárt térrészek mérhető térfogatuak, és hogy a fenti sorozat tagjai a  $P$  pontra zsugorodnak rá.

Legyen a  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$  vektor-vektorfüggvény folytonos az  $F_1, F_2, \dots, \dots, F_n, \dots$  felületeken. A felületek által bezárt térrészek térfogatát  $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$  -nel jelölve kifelé irányított felületi normális mellett

$$\frac{- \iiint_{F_1} \vec{v} \times d\vec{f}}{V_1}, \quad \frac{- \iiint_{F_2} \vec{v} \times d\vec{f}}{V_2}, \quad \dots, \quad \frac{- \iiint_{F_n} \vec{v} \times d\vec{f}}{V_n}, \quad \dots$$

sorozat határértékét - amennyiben ez létezik, véges, és a felosztássorozat választásától független - a  $\vec{v}(\vec{r})$  vektor-vektorfüggvény  $P$  pontbeli rotációjának nevezzük és így jelöljük:

$$(1) \quad [\text{rot } \vec{v}(\vec{r})]_{(P)} = \lim \frac{- \iiint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \times d\vec{f}}{V_n}.$$

(A  $\vec{v}(\vec{r})$  függvényre és az  $F_n$  felületekre tett feltevések mellett az (1) definícióban szereplő vektorértékű felületmenti integrálok (lásd Matematika I/2. jegyzet 50. fejezet) léteznek.)

Az (1) definíciót  $\text{rot } \vec{v}$  Ignatowsky-féle definíciójának szokás nevezni. E definíció koordinátainvariáns, vagyis a felvett koordinátarendszertől független.

Belátható, hogy ha  $\vec{v}(\vec{r})$  parciális deriváltjai is folytonosak a  $P$  pont környezetében, akkor az (1) határérték létezik. Erre a kérdésre később még visszatérünk.

b) Legyen

$$\vec{v} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

a  $P(x_0, y_0, z_0)$  pont  $H$  környezetében értelmezett és koordinátáinak elsőrendű parciális deriváltjaival folytonos függvény. Legyen a

$$K = \left\{ (x, y, z): x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y, z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z \right\}$$

halmaz  $H$ -nak részalmaza:  $K \subset H$ .

### Tétel

$$\vec{v}(\vec{r}) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \text{ rotációja}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k},$$

ill. az 1. fejezetben bevezetett szimbolikus  $\nabla$  vektor segítségével felírva:

$$(2) \quad \text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

### Bizonyítás

Speciálisan az előbb definiált  $K$  halmazt határoló hasábfelületre, ill. ilyenek  $P \in K$ -ra rázsugorodó sorozatára fogjuk felírni  $\vec{v}(\vec{r})$  vektorértékű felületmenti integrálját, majd meghatározni az (1) definícióban szereplő határértéket. Amennyiben a definícióban szereplő határérték létezik, speciális felületekből álló sorozatunk esetében az adódó határérték csak az (1) definícióban szereplővel egyezhet meg.

A (7) ábrából látható, hogy

$$F_1 = \{ (x, y, z): x = x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y, z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z \}, F_1 \text{ normálisa } +\vec{i},$$

$$F_4 = \{ (x, y, z): x = x_0, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y, z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z \}, F_4 \text{ normálisa } -\vec{i},$$



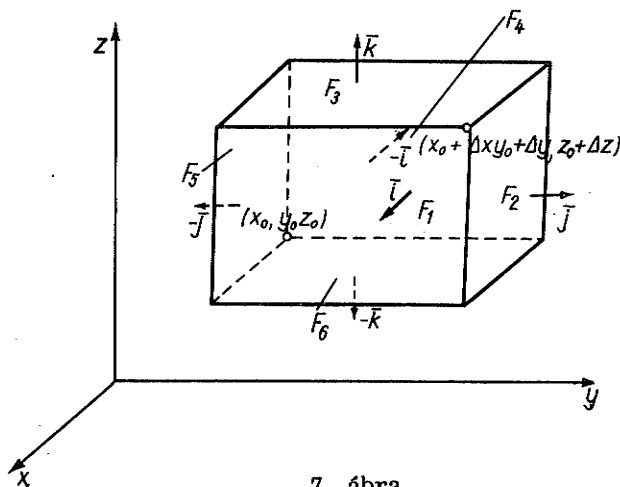
$F_2 = \{(x, y, z): y=y_0+\Delta y, x_0 \leq x \leq x_0+\Delta x, z_0 \leq z \leq z_0+\Delta z\}$ ,  $F_2$  normálisa  $+\vec{j}$ ,

$F_5 = \{(x, y, z): y=y_0, x_0 \leq x \leq x_0+\Delta x, z_0 \leq z \leq z_0+\Delta z\}$ ,  $F_5$  normálisa  $-\vec{j}$ ,

$F_3 = \{(x, y, z): z=z_0+\Delta z, x_0 \leq x \leq x_0+\Delta x, y_0 \leq y \leq y_0+\Delta y\}$ ,  $F_3$  normálisa  $+\vec{k}$ ,

$F_6 = \{(x, y, z): z=z_0, x_0 \leq x \leq x_0+\Delta x, y_0 \leq y \leq y_0+\Delta y\}$ ,  $F_6$  normálisa  $-\vec{k}$ .

E normális-irányításokkal az  $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6$  felületből kifelé irányított normálist kaptunk.

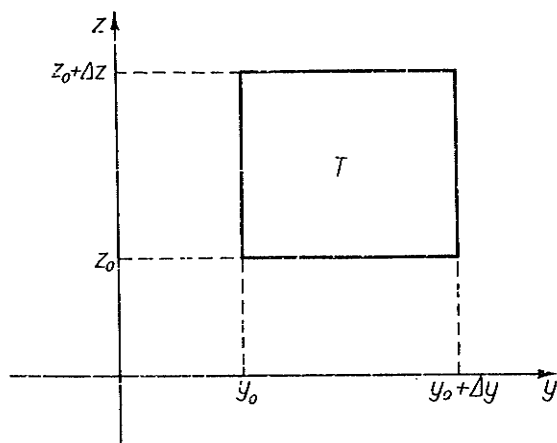


7. ábra

Számítsuk ki az  $F_1$  és  $F_4$  felületekre vonatkozó vektorértékű felületmenti integrálok összegét:

$$\begin{aligned}
 & - \iint_{F_1} \vec{v} \times d\vec{f} - \iint_{F_4} \vec{v} \times d\vec{f} = - \iint_T \vec{v}(x=x_0+\Delta x, y, z) \times \vec{i} dy dz + \\
 & + \iint_T \vec{v}(x=x_0, y, z) \times \vec{i} dy dz,
 \end{aligned}$$

ahol  $T$ -vel az  $YZ$  sík 8. ábrán látható tartományát jelöltük. Tekintettel arra, hogy



8. ábra

$$\bar{v} \times \bar{i} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X & Y & Z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = Z \bar{j} - Y \bar{k},$$

az  $F_1$  és  $F_4$  lapokra vonatkozó felületmenti integrálok összege

$$\begin{aligned} - \iint_{F_1} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_4} \bar{v} \times d\bar{f} &= \iint_T - (Z(x_0 + \Delta x, y, z) - Z(x_0, y, z)) \bar{j} dy dz + \\ &+ \iint_T (Y(x_0 + \Delta x, y, z) - Y(x_0, y, z)) \bar{k} dy dz. \end{aligned}$$

A két kettős integrálban szereplő függvényekre a Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva (ez a tett kikötések mellett -  $Z$  és  $Y$  parciális deriváltjainak létezése,  $Z$  és  $Y$  folytonossága - megtehető)

$$Z(x_0 + \Delta x, y, z) - Z(x_0, y, z) = \frac{\partial Z}{\partial x} (x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y, z) \Delta x, \quad 0 \leq \vartheta_1 \leq 1,$$

$$Y(x_0 + \Delta x, y, z) - Y(x_0, y, z) = \frac{\partial Y}{\partial y} (x_0 + \vartheta_2 \Delta x, y, z) \Delta x, \quad 0 \leq \vartheta_2 \leq 1,$$

adódik!

$$\begin{aligned}
-\iint_{F_1} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_4} \bar{v} \times d\bar{f} &= \iint_T \left[ -\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{(x_0 + v_1^{\ell} \Delta x, y, z)} \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{(x_0 + v_2^{\ell} \Delta x, y, z)} \bar{k} \right] \Delta x dy dz = \\
&= \int_{z=z_0}^{z_0 + \Delta z} \left( \int_{y=y_0}^{y_0 + \Delta y} \left[ \dots \right] \Delta x dy \right) dz.
\end{aligned}$$

Először a belső, majd a külső integrálra az integrálszámítás középérték-tételét alkalmazva

$$\begin{aligned}
-\iint_{F_1} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_4} \bar{v} \times d\bar{f} &= \int_{z=z_0}^{z_0 + \Delta z} \left\{ -\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{(x_0 + v_1^{\ell} \Delta x, y_0 + v_3^{\ell} \Delta y, z)} \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{(x_0 + v_2^{\ell} \Delta x, y_0 + v_4^{\ell} \Delta y, z)} \bar{k} \right\} \Delta x \Delta y dz = \\
&= \left\{ -\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{(x_0 + v_1^{\ell} \Delta x, y_0 + v_3^{\ell} \Delta y, z_0 + v_5^{\ell} \Delta z)} \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{(x_0 + v_2^{\ell} \Delta x, y_0 + v_4^{\ell} \Delta y, z_0 + v_6^{\ell} \Delta z)} \bar{k} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z = \\
&= \left\{ -\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{(P_1)} \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{(P_2)} \bar{k} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z
\end{aligned}$$

( $v_1^{\ell}$  és  $v_2^{\ell}$ -höz hasonlóan  $v_3^{\ell}, v_4^{\ell}, v_5^{\ell}, v_6^{\ell}$  értéke is 0 és 1 között fekszik).

Teljesen hasonlóan adódik:

$$\begin{aligned}
-\iint_{F_2} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_5} \bar{v} \times d\bar{f} &= \left\{ -\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{(P_3)} \bar{k} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{(P_4)} \bar{i} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z, \\
-\iint_{F_3} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_6} \bar{v} \times d\bar{f} &= \left\{ -\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{(P_5)} \bar{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)_{(P_6)} \bar{j} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z,
\end{aligned}$$

ahol  $P_3, P_4, P_5, P_6 \in K$ .

Az (1) definícióban szereplő integrál:

$$\begin{aligned}
\frac{-\iint_F \bar{v} \times d\bar{f}}{V} &= \frac{-\iint_{F_1} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_4} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_2} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_5} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_3} \bar{v} \times d\bar{f} - \iint_{F_6} \bar{v} \times d\bar{f}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \\
&= -\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{(P_1)} \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{(P_2)} \bar{k} - \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{(P_3)} \bar{k} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{(P_4)} \bar{i} - \\
&\quad - \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)_{(P_5)} \bar{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)_{(P_6)} \bar{j}.
\end{aligned}$$

A tett folytonossági kikötések mellett, ha az  $F$  felületek a  $P$  pontra rázsugorodnak, azaz  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \rightarrow P$  a fenti parciális deriváltak e deriváltak  $P$ -ben felvett helyettesítési értékéhez konvergálnak, azaz

$$\begin{aligned}
[\text{rot } \bar{v}]_{(P)} &= \lim \frac{-\iint_F \bar{v} \times d\bar{f}}{V} = \\
&= \left[ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \bar{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \bar{k} \right]_{(P)},
\end{aligned}$$

amint állítottuk.

Az  $\bar{e}$  egységvektorral megadott tengely körül  $\omega$  szögsebességgel forgó merev test sebességi vektorterét a

$$\bar{v} = \omega (\bar{e} \times \bar{r}) = \bar{c} \times \bar{r}$$

vektortér állítja elő, ahol a

$$\bar{c} = \omega \bar{e}$$

vektort, vagyis a forgástengely irányába mutató és a forgás szögsebességének mérőszámával egyenlő nagyságú vektort a szögsebesség vektorának neveztük (Matematika I/2. jegyzet 48. fejezet).

Számítsuk ki e vektortér rotációját.

$$\vec{v} = \vec{c} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(c_2 z - c_3 y) - \vec{j}(c_1 z - c_3 x) + \vec{k}(c_1 y - c_2 x),$$

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_2 z - c_3 y & c_3 x - c_1 z & c_1 y - c_2 z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(c_1 + c_1) - \vec{j}(-c_2 - c_2) + \vec{k}(c_3 + c_3) = 2\vec{c}.$$

Azt látjuk tehát, hogy  $\text{rot } \vec{v}$  a szögsebesség vektorának kétszeresét szolgáltatja. A  $\text{rot } \vec{v}$  vektor tehát ekkor a vizsgált test forgómozgásáról ad képet, ez indokolja elnevezését.

Természetesen beszélhetünk olyan vektorterek rotációjáról is, ahol a  $\text{rot } \vec{v}$  vektor nem bír e geometriai jelentéssel.

Az egységnyi pontszerű töltés elektrosztatikus terét előállító

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

függvény rotációja

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}\left(-\frac{3zy}{|\vec{r}|^5} + \frac{3yz}{|\vec{r}|^5}\right) - \vec{j}\left(-\frac{3zx}{|\vec{r}|^5} + \frac{3xz}{|\vec{r}|^5}\right) + \vec{k}\left(-\frac{3xy}{|\vec{r}|^5} + \frac{3yx}{|\vec{r}|^5}\right) = 0. \end{aligned}$$

Általában, ha egy vektortér egy skalártér gradienseként állítható elő, akkor feltéve e skalártér másodrendű parciális deriváltjainak folytonos-

ságát, a vektortér mindig rotációmentes (azaz rotációja 0-val egyenlő).

$$\begin{aligned} \text{rot grad } u &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \bar{i} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) - \bar{j} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) + \\ &+ \bar{k} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Az itt közölt állítás a vizsgált térrészre tett bizonyos kikötések mellett meg is fordítható. Alkalmas térrészben rotációmentes vektortér skalártér gradienseként állítható elő (potenciálos). Ezen állítás pontosabb megfogalmazására és igazolására a következő fejezetben térünk ki.

c) Könnyen igazolhatók az alábbi összefüggések:

$$\text{rot } (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \text{rot } \bar{v}_1 + \text{rot } \bar{v}_2,$$

$$\text{rot } (c\bar{v}) = c \text{ rot } \bar{v},$$

ha  $\bar{v}$  kétszer differenciálható:

$$\text{div rot } \bar{v} = 0,$$

és

$$\text{rot rot } \bar{v} = \text{grad div } \bar{v} - (\Delta X \bar{i} + \Delta Y \bar{j} + \Delta Z \bar{k}),$$

ahol  $\bar{v} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$ , és az utóbbi zárójeles kifejezést szokás még röviden  $\Delta \bar{v}$ -vel is jelölni.

Mivel fenti harmadik összefüggésünk értelmében  $\text{div rot } \bar{v} = 0$ , felmerül az a kérdés, hogy lehet-e a divergenciamentes vektortereket egy másik vektortér rotációjaként előállítani. Tehát

$$\text{div } \bar{V} = 0 \quad \text{esetében igaz-e, hogy} \quad \bar{V} = \text{rot } \bar{v}$$

Az ilyen  $\vec{v}$  vektortér a divergenciamentes  $\vec{V}$  vektortér vektorpotenciáljának nevezik.

Adott divergenciamentes vektortérhez általában lehet divergenciamentes vektorpotenciált találni. Ha ugyanis

$$\vec{V} = \text{rot } \vec{v} \quad \text{és} \quad \text{div } \vec{v} = 0,$$

akkor  $\vec{V}$  rotációjának ismeretében a vektorpotenciál koordinátáinak meghatározásához egy-egy Poisson-egyenletet kell megoldanunk (akárcsak az előző fejezetben részletezett módon a potenciálos - tehát rotációmentes - vektortér divergenciájának ismeretében a potenciál - pontosabban skalárpotenciál - meghatározásánál).

Legyen ugyanis

$$\text{rot } \vec{V} = p(x, y, z) \vec{i} + q(x, y, z) \vec{j} + s(x, y, z) \vec{k}.$$

Ekkor

$$p\vec{i} + q\vec{j} + s\vec{k} = \text{rot rot } \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \Delta \vec{v} = - \Delta \vec{v} =$$

$$= - \Delta X \vec{i} - \Delta Y \vec{j} - \Delta Z \vec{k},$$

azaz a vektorpotenciál koordinátái a következő egyenleteket kell hogy kielégítsék:

$$\Delta X = - p(x, y, z),$$

$$\Delta Y = - q(x, y, z),$$

$$\Delta Z = - s(x, y, z).$$

Ezen egyenleteket az egész térben  $X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial n}, \frac{\partial Y}{\partial n}, \frac{\partial Z}{\partial n}$ -re tett alkalmas kikötések mellett megoldva, hasonló gondolatmenettel, mint amivel a 2. fejezet (11) képletére jutottunk adódik:

$$X(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{p(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Y(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{q(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$z(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{s(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} d\xi d\eta d\zeta,$$

illetve eredményeinket összefoglalva:

$$(3) \quad \bar{v}(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \operatorname{rot} \bar{v}(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

és ezzel speciális esetben a vektorpotenciál meghatározására szolgáló integrálra jutottunk.

d) Tegyük fel, hogy a  $\bar{v}(\bar{r}) = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$  vektor-vektorfüggvény koordinátáinak parciális deriváltjai is folytonosak a zárt  $F$  felületen és az általa határolt  $V$  térrészben,  $F$ -en pedig csupán  $\bar{v}(\bar{r})$  folytonos. Legyen  $F$  mérhető felszíni és irányítható,  $V$  mérhető térfogatu; jelentsen  $\bar{n} = n_1\bar{i} + n_2\bar{j} + n_3\bar{k}$  a zárt  $V$  térrészből kifelé irányított normális egységvektort. A tett feltevések mellett mármost a következő integráltétel mondható ki:

$$(4) \quad -\iint_F \bar{v}(\bar{r}) \times d\bar{f} = \iint_F d\bar{f} \times \bar{v}(\bar{r}) = \iiint_V \operatorname{rot} \bar{v} dx dy dz.$$

### Bizonyítás

A vizsgált vektorértékű felületmenti integrál átalakítható a  $\bar{v}(\bar{r})$  vektortér  $\bar{n}$  felületi normális egységvektorral vett vektoriális szorzatának felszín szerinti integráljává (lásd a vektorértékű felületmenti integrál definícióját: Matematika I/2. jegyzet 50. fejezet):

$$\begin{aligned} -\iint_F \bar{v}(\bar{r}) \times d\bar{f} &= \iint_F d\bar{f} \times \bar{v}(\bar{r}) = \iint_F \bar{n} \times \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f} = \\ &= \left( \iint_F (Zn_2 - Yn_3) d\bar{f} \right) \bar{i} + \left( \iint_F (Xn_3 - Zn_1) d\bar{f} \right) \bar{j} + \left( \iint_F (Yn_1 - Xn_2) d\bar{f} \right) \bar{k}. \end{aligned}$$



Az egyes zárójelekben álló felszín szerinti integrálok azonban úgy is felfoghatók, mint a  $(Z\bar{j} - Y\bar{k})$ ,  $(X\bar{k} - Z\bar{i})$ ,  $(Y\bar{i} - X\bar{j})$  vektorfüggvények skálárértékű felületmenti integráljai, tehát:

$$-\iint_F \bar{v} \times d\bar{f} = \left( \iiint_F (Z\bar{j} - Y\bar{k}) d\bar{f} \right) \bar{i} + \left( \iiint_F (X\bar{k} - Z\bar{i}) d\bar{f} \right) \bar{j} + \left( \iiint_F (Y\bar{i} - X\bar{j}) d\bar{f} \right) \bar{k}.$$

Az itt szereplő integrálok mindegyikére a Gauss-Osztrogradszkij-tételt alkalmazva (2. fejezet) adódik:

$$\begin{aligned} -\iint_F \bar{v} \times d\bar{f} &= \left( \iiint_V \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dx dy dz \right) \bar{i} + \left( \iiint_V \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dx dy dz \right) \bar{j} + \\ &+ \left( \iiint_V \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy dz \right) \bar{k} = \iiint_V \text{rot } \bar{v} \, dx \, dy \, dz, \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

A (4) tétel értelmében könnyen beláthatjuk, hogy  $\bar{v}(\bar{r})$ -re, ill. a  $\bar{v}(\bar{r})$  vektortér koordinátáinak parciális deriváltjaira tett folytonossági kikötések mellett a  $[\text{rot } \bar{v}]_{(P)}$  vektor definíciójában (1) szereplő határérték valóban létezik. Ha ugyanis  $F_n$  a  $P$  pontot belsejében tartalmazó zárt felület, amely a  $P$  pontra rázsugorodó  $F_1, F_2, \dots$  felületsorozatnak már elég távoli tagja, akkor  $\text{rot } \bar{v}$  feltételezett folytonossága miatt az  $F_n$  felülettel határolt  $K_n$  térrészben

$$\text{rot } \bar{v} = [\text{rot } \bar{v}]_{(P)} + \eta, \quad \text{ahol a } P \text{ pontban } \lim \eta = 0.$$

A (4) tétel alkalmazásával azonban

$$\begin{aligned} -\iint_{F_n} \bar{v}(\bar{r}) \times d\bar{f} &= \iiint_{K_n} \text{rot } \bar{v} \, dx \, dy \, dz = \\ &= [\text{rot } \bar{v}]_{(P)} \iiint_{K_n} dx \, dy \, dz + H = \end{aligned}$$

$$= \left[ \text{rot } \bar{v} \right]_{(P)} \cdot V_n + H,$$

ahol  $V_n$ -nel jelöltük az  $F_n$  felület által bezárt  $K_n$  térrész térfogatának mérőszámát és adott  $\varepsilon > 0$  mellett

$$|H| = \left| \iiint_{K_n} \eta \, dx \, dy \, dz \right| < \varepsilon \cdot V_n, \text{ ha } K_n \text{ a } P \text{ pont alkalmas kör-}$$

nyezetébe esik.

Eredményünket átrendezve írhatjuk tehát:

$$(5) \quad \left[ \text{rot } \bar{v} \right]_{(P)} = \frac{1}{V_n} \iint_{F_n} d\bar{f} \times \bar{v} - \frac{H}{V_n}.$$

Ha mármost az  $F_n$  felületek a  $P$  pontra rázsugorodnak, akkor a fentiek értelmében  $\left| \frac{H}{V_n} \right| \rightarrow 0$ , vagyis az (5) jobboldalán álló integrálok konvergens vektorsorozatot alkotnak, amint azt állítottuk.

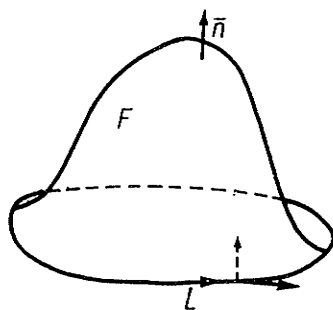
#### 4. Stokes tétele. Potenciálkeresés

##### a) Stokes tétele

Ha  $\bar{v}(\bar{r})$  és koordinátáinak parciális deriváltjai folytonosak a mérhető felszínű, irányítható  $F$  felületdarabon és annak rektifikálható  $L$  görbével megadott határán, akkor

$$(1) \quad \iint_F \text{rot } \bar{v} \, d\bar{f} = \int_L \bar{v} \, d\bar{r},$$

ahol az  $L$  görbe befutásának irányát és az  $F$  felület felületi normálisának irányát úgy hangoljuk össze, hogy az  $L$  görbe befutási irányába mutató érintővektor, az erre merőleges, a felület belseje felé mutató vektor, és a felületi normális jobbrendszert alkosson.



9. ábra

### Bizonyítás

Miután  $\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$  esetében

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot } X \vec{i} + \text{rot } Y \vec{j} + \text{rot } Z \vec{k},$$

és így

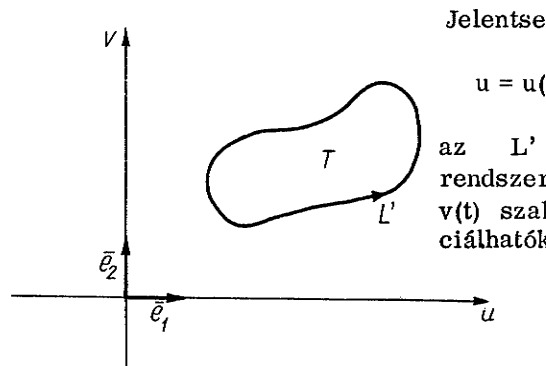
$$\begin{aligned} \iint_F \text{rot } \vec{v} \, d\vec{f} &= \iint_F \text{rot } X \vec{i} \, d\vec{f} + \iint_F \text{rot } Y \vec{j} \, d\vec{f} + \iint_F \text{rot } Z \vec{k} \, d\vec{f}, \\ \int_L \vec{v} \, d\vec{r} &= \int_L X \vec{i} \, d\vec{r} + \int_L Y \vec{j} \, d\vec{r} + \int_L Z \vec{k} \, d\vec{r}, \end{aligned}$$

az alábbiakban csak a

$$\iint_F \text{rot } X \vec{i} \, d\vec{f} = \int_L X \vec{i} \, d\vec{r}$$

összefüggést fogjuk bizonyítani, a két másik megfelelő összefüggés bizonyítása teljesen hasonló, ezen összefüggések igaz voltából pedig a Stokes-tétel következik.

A tétel bizonyításának egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy az  $F$  felület egyenletét  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  alakban adhatjuk meg, az  $F$  felületnek feleljen meg az  $UV$  paramétersík  $T$  tartománya. Legyen  $T$  normáltartomány,  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  koordinátáinak pedig  $u$  és  $v$  szerinti második parciális deriváltjai is legyenek folytonosak  $T$  belsejében és  $T$ -nek  $L'$  határán.



Jelentse

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

az  $L'$  görbe paraméteres egyenletrendszerét és tegyük fel, hogy  $u(t)$  és  $v(t)$  szakaszonként folytonosan differenciálhatók, ha  $\alpha \leq t \leq \beta$ .

10. ábra

Mivel

$$\text{rot } X \bar{i} = \nabla \times X \bar{i} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial z} \bar{j} - \frac{\partial X}{\partial y} \bar{k}$$

és a tétel szövegének megfelelően irányított felületi normális:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \bar{k},$$

$\text{rot } X \bar{i}$  felületmenti integrálja így alakítható át kettős integrállá:

$$\begin{aligned} \iint_T \text{rot } X \bar{i} \, d\bar{f} &= \iint_T \left( \frac{\partial X}{\partial z} \bar{j} - \frac{\partial X}{\partial y} \bar{k} \right) \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right) du \, dv = \\ &= \iint_T \left( \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du \, dv. \end{aligned}$$

A továbbiakban az  $\iint_L X \bar{I} d\bar{r}$  görbementi integrált alakítjuk át több lépésben kettős integrállá, amely integrálnak legutóbb nyert kettős integrálunkkal való azonosságát kimutatva állításunkat igazoltuk.

Miután az  $L$  görbe egyenlete

$$\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

adódik:

$$\begin{aligned} \int_L X \bar{I} d\bar{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} X(\bar{r}(u(t), v(t))) \bar{I} \dot{\bar{r}}(u(t), v(t)) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} X(\bar{r}(u(t), v(t))) \bar{I} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} X(\bar{r}(u(t), v(t))) \bar{I} \left( \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \bar{j} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \bar{k} \right) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( X(\bar{r}(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + X(\bar{r}(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt. \end{aligned}$$

A legutóbb nyert integrál azonban úgy is felfogható, mint a

$$\bar{v} = X \frac{\partial x}{\partial u} \bar{e}_1 + X \frac{\partial x}{\partial v} \bar{e}_2$$

vektortérnek ( $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$ ) a paraméterértékek síkjában fekvő  $T$  tartomány  $L'$  határgörbéjére vonatkozó görbementi integrálja, a  $t$  paraméter szerinti közösítéses integrállá átalakított formája:

$$\int_L X \bar{I} d\bar{r} = \dots = \int_{L'} X \frac{\partial x}{\partial u} du + X \frac{\partial x}{\partial v} dv.$$

Alkalmazzuk erre a görbementi integrálra a síkbeli Gauss-Csztrogradszkij-tételt (2. fejezet b)):

$$\begin{aligned}
\int_{L'} X \frac{\partial x}{\partial u} du + X \frac{\partial x}{\partial v} dv &= \iint_T \left( \frac{\partial \left( X \frac{\partial x}{\partial v} \right)}{\partial u} - \frac{\partial \left( X \frac{\partial x}{\partial u} \right)}{\partial v} \right) du dv = \\
&= \iint_T \left( \left( \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \right. \\
&\quad - \left( \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + X \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \Big) du dv = \\
&= \iint_T \left( \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) du dv
\end{aligned}$$

mivel feltevésünk értelmében

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}.$$

Mint látható, integrálunk a felületmenti integrál átalakításával nyert ket-  
tős integrállal megegyezik, és ezzel állításunkat igazoltuk.

b) Jelentsenek speciálisan  $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots$  a  $P$  ponton áthaladó  
síkfelületeket, melyeknek határgörbéje  $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$ . Tegyük fel,  
hogy az  $F_k$  felületek, ill. az  $L_k$  görbék a  $P$  pontra rázsugorodó soro-  
zatot alkotnak, vagyis az  $L_k$  görbe pontjainak  $P$ -től mért távolsága  $0$ -  
-hoz tart.

Mivel valamely vektortérnek adott  $\bar{n}$  normálisú síklapra vonatkozó  
skalárértékű felületmenti integrálja ugy is felfogható, mint a vektortér  $\bar{n}$   
irányu vetületének ugyanazon síklapra vonatkozó felszín szerinti integrál-  
ja, (Matematika I/2. jegyzet 50. fejezet), rot  $\bar{v}$  folytonosságának felté-  
telezése mellett, ha az  $F_k$  síklap, ill. annak  $L_k$  határgörbéje már bele-  
esik a  $P$  pont elég kicsiny környezetébe, írható:

$$\begin{aligned} \iint_{F_k} \text{rot } \bar{v} \, d\bar{f} &= \iint_{F_k} (\text{rot } \bar{v})_n \, df = \left[ (\text{rot } \bar{v})_n \right]_{(P)} \iint_{F_k} df + H = \\ &= \left[ (\text{rot } \bar{v})_n \right]_{(P)} f_k + H, \end{aligned}$$

ahol  $f_k$ -val az  $F_k$  síklap területének (felszínének) mérőszámát jelöltük, és

$$(\text{rot } \bar{v})_n = \left[ (\text{rot } \bar{v})_n \right]_{(P)} + \eta,$$

ahol  $(x, y, z) \rightarrow P$  esetében  $\eta \rightarrow 0$ .  $H$ -ra tehát a következő becslés adható: adott  $\varepsilon > 0$  mellett

$$H = \left| \iint_{F_k} \eta(x, y, z) \, df \right| \leq \varepsilon f_k,$$

és előbb nyert összefüggésünkben még  $\left| \frac{H}{f_k} \right|$  is tetszőlegesen kicsinnyé tehető, ha  $F_k$  a  $P$  pont alkalmas környezetébe esik.

A Stokes tétel értelmében azonban

$$\iint_{F_n} \text{rot } \bar{v} \, d\bar{f} = \int_{L_n} \bar{v} \, d\bar{r},$$

azaz

$$\left[ (\text{rot } \bar{v})_n \right]_{(P)} f_n + H = \int_{L_n} \bar{v} \, d\bar{r},$$

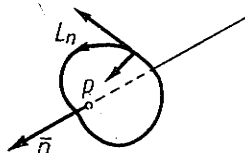
vagyis

$$\left[ (\text{rot } \bar{v})_n \right]_{(P)} = \frac{\int_{L_n} \bar{v} \, d\bar{r}}{f_n} - \frac{H}{f_n},$$

ahol  $\frac{H}{f_n}$  tetszőlegesen kicsiny. Ezt másképp úgy is írhatjuk, hogy

$$(2) \quad \left[ (\operatorname{rot} \vec{v})_n \right]_{(P)} = \lim_{L_n} \frac{\int_{L_n} \vec{v} d\vec{r}}{f_n}$$

ahol az  $L_n$  határgörbéjü  $\vec{n}$  normálisú síklap felszíne  $f_n$ , az  $L_n$  görbe befutási irányába mutató érintővektor, az erre merőleges, a zárt  $L_n$  görbe



11. ábra

belseje felé mutató vektor és  $\vec{n}$  jobbrendszeri alkotót, a lim pedig azt jelenti, hogy  $\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}$  irányú vetületének  $P$  pontbeli értékét a jobboldalon álló hányadosok  $P$ -re rázsugorodó  $L_n$  görbékre vonatkozó sorozatának határértéke szolgáltatja. A (2) képletet  $\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}$  irányú komponensét megadó Ignatowsky-féle formulának nevezik. A (2) -ben szereplő határérték  $\vec{v}$ -re,  $F_n$ -re,  $L_n$ -re a

Stokes-tétel kimondásakor tett feltevések mellett - az előbbi okoskodás értelmében - létezik.

Ez utóbbi előállításból is levezethetők  $\operatorname{rot} \vec{v}$  derékszögű koordinátáinak értékei, feltéve, hogy  $\vec{v}(\vec{r})$ -re, az  $L_n$  görbékre, valamint az általuk bezárt  $\vec{n}$  normálisú síklapokra a Stokes-tétel kimondásakor tett feltevések teljesülnek.

Számítsuk ki a (2) határérték értékét speciálisan a  $P$  pontra rázsugorodó  $A_n B_n C_n$  háromszögek sorozatára, ahol ezen háromszög-lapok normális egységvektora

$$(x) \quad \vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k},$$

és a háromszög csucspontjai

$$A_n(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n), \quad B_n(x_n, y_n + \Delta y_n, z_n), \quad C_n(x_n, y_n, z_n + \Delta z_n).$$

Jelöljük az  $A_n B_n C_n$  háromszög területét a kívánt befutási irányban  $L_n$ -nel. A háromszöget az  $x = x_n$ ,  $y = y_n$ ,  $z = z_n$  síkra levetítve, a vetület-háromszögek csucspontjai, ill. kerületük a 12. ábrán jelzett befutási iránnyal:

$$0_n(x_n, y_n, z_n), \quad B_n(x_n, y_n + \Delta y_n, z_n), \quad C_n(x_n, y_n, z_n + \Delta z_n); \quad L_{n1},$$



$$0_n(x_n, y_n, z_n), \quad C_n(x_n, y_n, z_n + \Delta z_n), \quad A_n(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n); \quad L_{n_2},$$

$$0_n(x_n, y_n, z_n), \quad A_n(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n), \quad B_n(x_n, y_n + \Delta y_n, z_n); \quad L_{n_3}.$$

Nyilvánvalóan fennáll:

$$\int_{L_n} \bar{v} d\vec{r} = \int_{L_{n_1}} \bar{v} d\vec{r} + \int_{L_{n_2}} \bar{v} d\vec{r} + \int_{L_{n_3}} \bar{v} d\vec{r},$$

mivel a jobboldalon szereplő integrálokban az  $A_n B_n$ ,  $B_n C_n$ ,  $C_n A_n$  éleken kívül szereplő  $0_n A_n$ ,  $0_n B_n$ ,  $0_n C_n$  éleket kétszer, ellentétes irányítással futjuk be, s így az ezen élek menti integrálok az összevonás során kiesnek.

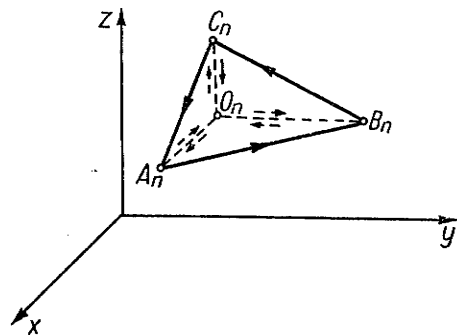
$$\bar{v} = X \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k}$$

esetében mármint a síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tételt alkalmazva (2. fejezet) a  $\bar{v}$  koordinátáira tett folytonossági kikötések mellett

$$\int_{L_n} \bar{v} d\vec{r} = \int_{L_n} (Y dy + Z dz) = \iint_{T_n} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz \approx \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right)_{(P)} t_{n_1}$$

(az  $L_{n_1}$  görbe ugyanis az  $YZ$  síkkal párhuzamos  $x = x_n$  egyenletű síkban fekszik). Hasonlóképpen írható

$$\int_{L_{n_2}} \bar{v} d\vec{r} = \int_{L_{n_2}} (Z dz + X dx) = \iint_{T_{n_2}} \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dx dz \approx \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{(P)} t_{n_2},$$

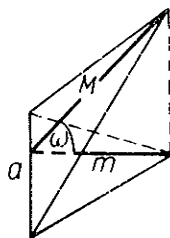


12. ábra

$$\int_{L_{n_3}} \bar{v} d\vec{r} = \int_{L_{n_3}} X dx + Y dy = \iint_{T_{n_3}} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy \approx \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)_{(P)} t_{n_3},$$

ahol  $T_{n_1}$ ,  $T_{n_2}$ ,  $T_{n_3}$  -mal az  $L_{n_1}$ ,  $L_{n_2}$ ,  $L_{n_3}$  görbe által bezárt tartományt, e háromszögek területét pedig  $t_{n_1}$ ,  $t_{n_2}$ ,  $t_{n_3}$  -mal jelöltük. E háromszögek az  $A_n B_n C_n \Delta$  vetületei, az  $x = x_n$ ,  $y = y_n$ ,  $z = z_n$  síkra. Könnyen belátható, hogy a  $T$  területű háromszög és annak  $t$  területű vetület-háromszöge esetében fennáll a

$$t = T \cos \omega$$



összefüggés, ahol  $\omega$  a két háromszög síkja által bezárt szög. (A 13. ábráról leolvasható, hogy ha az eredeti és a vetület-háromszögnek egy közös éle van - ami most vizsgált feladatunknál fennáll - a háromszögek magasságaira fennáll

$$m = M \cos \omega,$$

azaz

13. ábra

$$t = \frac{am}{2} = \frac{aM \cos \omega}{2} = T \cos \omega.)$$

Ennek figyelembevételével az  $A_n B_n C_n$  háromszög területét  $f_n$  -nel jelölve, mivel (\*) értelmében e háromszöglapnak a vetület-háromszögek síkjával bezárt szögei  $\alpha$ ,  $\beta$  ill.  $\gamma$ , adódik:

$$\int_{L_n} \bar{v} d\vec{r} \approx \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) f_n \cos \alpha + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) f_n \cos \beta + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) f_n \cos \gamma \right] \quad (1')$$

azaz

$$\frac{\int_{L_n} \bar{v}(\vec{r}) d\vec{r}}{f_n} \approx \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] \quad (1'')$$

ahol a közelítéseknek elkövetett hibák 0-hoz tartanak, ha az  $L_n$  görbék a  $P$  pontra rázsugorítjuk.

Ha a vizsgált  $A_n B_n C_n$  háromszög speciálisan az  $x = x_n$  síkban fekszik, akkor e sík normális egységvektora

$$\bar{n} = \bar{i}$$

lévén  $(\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{L_n} \frac{\int \bar{v} d\bar{r}}{f_n} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right),$$

ha az  $A_n B_n C_n \Delta$  az  $y = y_n$  síkban fekszik

$$\bar{n} = \bar{j},$$

$$\lim_{L_n} \frac{\int \bar{v} d\bar{r}}{f_n} = \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right),$$

ha pedig az  $A_n B_n C_n \Delta$  a  $z = z_n$  síkban fekszik

$$\bar{n} = \bar{k},$$

$$\lim_{L_n} \frac{\int \bar{v} d\bar{r}}{f_n} = \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)$$

és ezen  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  vektorokra vett felületekből felírt

$$\bar{a} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \bar{k}$$

vektornak  $\bar{n} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$  irányu vetülete valóban

$$\bar{a}\bar{n} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos \gamma =$$

$$= \lim_{L_n} \frac{\int \bar{v} d\bar{r}}{f_n},$$

vagyis  $\bar{a}$  a (2)-ben megadott rot  $\bar{v}$  vektorral egyenlő.

c) Mint már említettük, ha a  $\vec{v}(\vec{r})$  vektortérnek van potenciálja, akkor

$$\vec{v} = \text{grad } u = - \text{grad } \phi ,$$

és amennyiben  $\vec{v}$  koordinátáinak parciális deriváltjai is folytonosak a tér vizsgált tartományában, ott

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot grad } u = \text{rot}(-\text{grad } \phi) = \vec{0} ,$$

azaz e térrészben  $\vec{v}$  rotációmentes.

Szintén említettük már, hogy ez az állítás bizonyos mértékig meg is fordítható, ill. pontosabban a következő mondható:

Tegyük fel, hogy a  $\vec{v}(\vec{r})$  vektortér rotációmentes a térnek egy bizonyos  $V$  részében. A Matematika I/2. jegyzet 49. fejezetében elmondottak értelmében tudjuk, hogy a vektortérnek a  $V$  térrészben van potenciálja, ha a kérdéses térrészben futó bármely zárt  $L$  görbe mentén

$$\int_L \vec{v} d\vec{r} = 0.$$

Ha mármost a kérdéses térrészben fekvő bármely zárt  $L$  görbéhez sikerül olyan  $F$  felületet találni, amely mentén felületmenti integrál számítható, ugyancsak a kérdéses  $V$  térrészben fekszik, s határa éppen az  $L$  görbe, akkor az  $L$  görbére és az  $F$  felületre alkalmazhatjuk a Stokes-tételt:

$$\int_L \vec{v} d\vec{r} = \iint_F \text{rot } \vec{v} d\vec{f} = \iint_F \vec{0} d\vec{f} = 0,$$

ebben az esetben van tehát a vektortérnek potenciálja.

Előbbi okoskodásunk jogosultsága a  $V$  térrésznek azon tisztán geometriai természetű tulajdonságán mulik, hogy lehet-e benne minden zárt  $L$  görbéhez a kívánt tulajdonságú felületet találni. Minthogy a görbementi integrál tetszőleges pontossággal megközelíthető a görbébe beirt törtvonal menti integrállal, azért megelégedhetünk itt avval is, hogy minden zárt görbe helyett minden zárt törtvonalhoz lehessen megfelelő irányítható poliéderfelületet találni. Az ilyen tulajdonságú térrészekre a következő elnevezést vezetjük be:

### Definíció

Az olyan  $V$  térrészt, amelyben minden benne futó törtvonalhoz található olyan benne fekvő irányítható poliéderfelület, amelynek az adott törtvonal a határgörbéje, egyszeresen összefüggő térrésznek nevezik.

Ilyen egyszeresen összefüggő térrész például egy gömb belseje, vagy általánosabban minden konvex térrész.

### Definíció

Egy  $K$  térrész konvex, ha bármely két pontjával együtt az azokat összekötő egyenesszakasz pontjait is tartalmazza.

Az az állítás, hogy minden konvex térrész egyszeresen összefüggő, nyilvánvaló, mert ha  $P_0, P_1, \dots, P_n$  a konvex térrész pontjai, és ha  $O$  a

konvex térrész egy további pontja, akkor az  $OP_0P_1, OP_1P_2, \dots,$

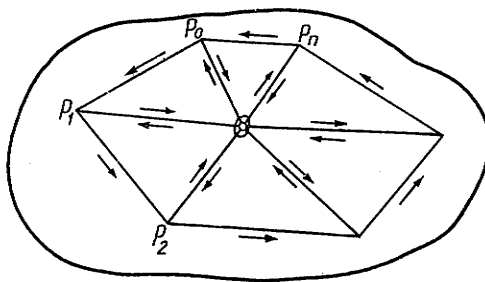
$OP_nP_0$  háromszöglapok egy, a

konvex térrészben fekvő irányítható poliéderfelületet adnak meg, amelynek a  $P_0P_1 \dots P_nP_0$

törtvonal a határgörbéje.

A fenti definíciók értelmében az egész tér egyszeresen összefüggő. Az egész tér egy pontjának elhagyása után is egyszeresen összefüggő marad.

Nem egyszeresen összefüggő pl. a térből egy egyenes pontjainak elhagyása után visszamaradó térrész (az egyenest "megkerülő" törtvonalakhoz nem lehet megfelelő felületet találni).



14. ábra

Az egyszeresen összefüggő térrészek a következőképp is jellemezhetők:

egyszeresen összefüggő a tartomány (térrész, vagy speciálisan síkrész), ha a tartományban haladó minden zárt görbét a tartományon belül egy pontra lehet összehuzni. Pl. az  $\vec{r} = (3 + 2 \cos t) \cos v \vec{i} + (3 + 2 \cos t) \sin v \vec{j} + 2 \sin t \vec{k}$  torusfelület által határolt végesben fekvő tartomány nem egyszeresen összefüggő, mert pl. az  $\vec{r} = 3 \cos v \vec{i} + 3 \sin v \vec{j}$  körvonalat nem lehet a toruson belül egy pontra összehuzni.

Előbbi okoskodásaink eredményét tehát a következő tételben foglalhatjuk össze:

Valamely egyszeresen összefüggő  $V$  térrészben a folytonosan differenciálható  $\vec{v}(\vec{r})$  vektor-vektorfüggvénynek akkor és csak akkor van potenciálja, ha ott rotációmentes.

Amennyiben e feltétel teljesül, akkor a potenciált a

$$\phi(\vec{r}) = -u(\vec{r}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{r}} \vec{v} d\vec{r} + c$$

képlet szolgáltatja (a vonalmenti integrálásnál az integrálás utja az egyszeresen összefüggő  $V$  térrészben az  $\vec{a}$  helyzetvektoru ponttól az  $\vec{r}$  helyzetvektoru pontig futó tetszőleges görbe).

Ha az a térrész, amelyben  $\vec{v}$  rotációmentes, nem egyszeresen összefüggő, akkor e térrészben általában nem lehet  $\vec{v}$ -hez potenciált találni (erre a kérdésre alább még visszatérünk). Ha a kérdéses térrésznek valamely egyszeresen összefüggő részére szorítkozunk, pl. egy pontja körül felvett elég kicsiny sugaru gömb belsejére, akkor abban már van a vektor-ternek potenciálja.

Pl. az

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

elektrosztatikus tér az egész térből a  $P(0,0,0)$  pont kirekesztésével nyert egyszeresen összefüggő tartományban rotációmentes, van tehát potenciálja, és e potenciál - amint azt a Matematika I/2. jegyzet 49. fejezetében ki is számítottuk -

$$\phi = \frac{1}{|\vec{r}|}.$$

Egy végtelen hosszú vezető mágneses terét - a vezetőt a  $Z$  tengelybe helyezve - a

$$\vec{H} = \frac{-y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j}$$

vektortér állítja elő. E vektortér csak az egész térnek a  $Z$  tengely pontjainak elhagyása után visszamaradó részében (ez már nem egyszeresen összefüggő tartomány) van értelmezve. Az  $x > 0$  térrész azonban már konvex (tehát egyszeresen összefüggő), itt már van potenciálja a vektortérnek, mégpedig

$$\phi = - \int_{(1,0)}^{(x,y)} \bar{H} d\bar{r} = - \int_{y=0}^y \frac{x}{x^2+y^2} dy = - \frac{1}{x} \int_{y=0}^y \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} dy =$$

$$= - \arctg \frac{y}{x}.$$

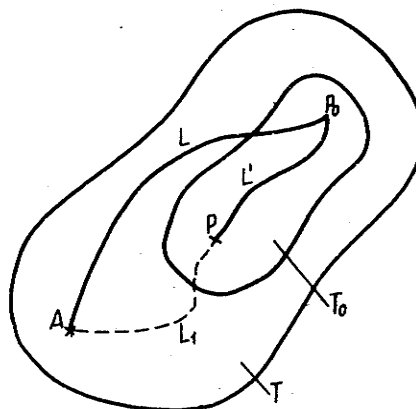
A  $\phi$  potenciálfüggvény az  $x < 0$  térrészben is potenciálfüggvénye  $\bar{H}$ -nak, az  $x = 0$  síkban azonban elveszti értelmét. Az  $x = 0$  síkban is van azonban potenciál (az  $y = 0$  egyenes kivételével) mégpedig  $\arctg \frac{x}{y}$ , ez viszont az  $y = 0$  síkban nincs értelmezve. Olyan függvényt, amely a  $Z$  tengely pontjai kivételével mindenütt potenciálja a megadott vektortérnek, nem sikerül találnunk, legalábbis ha egyértékű függvényekhez ragaszkodunk.

Legyen  $T$  nem egyszeresen összefüggő tartomány, és legyen a  $T$ -ben folytonosan differenciálható  $\bar{v}(\bar{r})$  vektor-vektorfüggvény rotációmentes. Általában nem állíthatjuk ekkor, hogy  $\bar{v}$   $T$ -ben futó zárt görbe mentén vett integrálja mindig 0. A  $T$ -ben fekvő  $\bar{a}$  és  $\bar{r}$  helyzetvektoru pontokat (jelöljük ezeket  $A$  és  $P$ -vel, (15. ábra)) összekötő különböző görbék mentén tehát különböző lehet

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{r}} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r}$$

értéke. Ha egy  $u(\bar{r}) = -\phi(\bar{r})$  függvényt az

$$u(\bar{r}) = \int_{\bar{a}}^{\bar{r}} \bar{v}(\bar{r}) d\bar{r} = -\phi(\bar{r})$$



15. ábra

egyenlőséggel akarunk értelmezni, akkor ezzel az utasítással a  $P$  ponthoz általában végtelen sok értéket rendelünk hozzá. A következő megfontolással azonban ezt a többértékű függvényt (ill. ennek  $(-1)$ -szeresét) bizonyos tágabb értelemben a  $\bar{v}(\bar{r})$  vektorfüggvény potenciál-függvényének tekinthetjük.

Tekintsük  $T$ -nek valamely egyszeresen összefüggő  $T_0$  résztartományát (pl. egy  $T$ -ben fekvő gömb belsejét). Szemeljünk ki  $T_0$ -nak egy  $\vec{r}_0$  helyzetvektoru  $P_0$  pontját s kössük össze az  $A$  és  $P_0$  pontot a  $T_0$  tartományon belül valamilyen  $L$  görbével.  $L'$ -vel jelölve egy tetszőleges,  $P_0$ -ból  $P$ -be vezető és a  $T_0 \subset T$  egyszeresen összefüggő tartományból ki nem lépő görbét, legyen

$$f_L(\vec{r}) = \int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} + \int_{L'} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Nyilvánvaló, hogy  $f_L(\vec{r})$  értéke  $L'$  megválasztásától már nem függ, hiszen  $T_0$  egyszeresen összefüggő volta miatt minden  $T_0$ -ban fekvő és  $P_0$ -ból  $P$ -be vezető görbe mentén ugyanakkora  $\vec{v}(\vec{r})$  vonalmenti integráljának értéke.

$f_L(\vec{r})$  nyilván a többértékű  $-\phi(\vec{r})$  függvény egyik lehetséges értékét (ágát) szolgáltatja. Megfordítva, kimutatható, hogy  $-\phi(\vec{r})$  minden lehetséges értéke megkapható ezen a módon az  $L$  görbe alkalmas megválasztásával. Ha ui.  $L_1$  egy másik  $T$ -beli  $A$ -ból  $P$ -be vezető görbe, akkor  $-\phi(\vec{r})$  azon értéke, amely az  $L_1$  menti integrálással adódik, egyenlő az

$$L = L_1 + (-L')$$

választásnak megfelelő  $f_L(\vec{r})$  értékkel, ahol  $L'$  ismét tetszőleges,  $T_0$ -n belül  $P_0$ -ból  $P$ -be vezető görbe. Tehát  $-\phi(\vec{r})$  értékei a  $T_0$  tartományban egyértékű ágakba rendezhetők; minden  $A$ -ból  $P_0$ -ba vezető  $T$ -beli  $L$  görbének megfelel egy ilyen egyértékű  $f_L(\vec{r})$  ág, de különböző  $L$  görbék szolgáltathatnak azonos ágakat.

Minden egyes  $-f_L(\vec{r})$  ág potenciálfüggvénye a  $\vec{v}(\vec{r})$  vektorfüggvénynek a  $T_0$  résztartományban, hiszen az  $f_L(\vec{r})$  függvényt definiáló kifejezés első tagja  $P$  helyzetvektorától,  $\vec{r}$ -től független állandó, a második tag pedig a  $T_0$  tartományban egyértékű

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{P_0}^P \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}$$



integrállal azonos, amely itt  $\bar{v}$  potenciálfüggvényének  $(-1)$ -szeresét szolgáltatja. Ebből következik, hogy

a  $-\phi(\bar{r})$  többértékű potenciálfüggvény egyes  $-f_L(\bar{r})$  ágai  $T_0$ -ban csak egy állandóban különbözhetnek egymástól.

Például az előbb már vizsgált

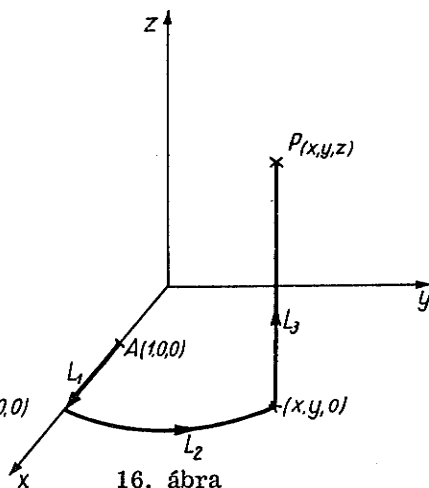
$$\bar{H} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \bar{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \bar{j}$$

vektortér a térből a  $Z$  tengely pontjainak elhagyása után visszamaradó már nem egyszeresen összefüggő  $T$  térrészben van értelmezve. Mivel a vektortér rotációmentes  $T$ -ben, de  $T$  nem egyszeresen összefüggő, csak többértékű potenciálfüggvény létezését állíthatjuk.

Valóban, az  $A = (1, 0, 0)$ ,  $P = (x, y, z)$  választással,  $A$ -ból  $P$ -be az  $L_1 + L_2 + L_3$  görbe mentén haladva, ahol  $L_1$  az  $X$  tengelynek  $(1, 0, 0)$  és

$(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, 0)$  közötti szakasza,  $L_2$  az  $XY$  sík origó körüli  $\sqrt{x^2 + y^2}$  sugaru körének a  $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, 0)$  ponttól az  $(x, y, 0)$  pontig terjedő íve,  $L_3$  pedig az  $(x, y, 0)$  és  $(x, y, z)$

pontot összekötő egyenestszakasz, akkor



16. ábra

$$\int_{L_1} \bar{H} d\bar{r} = 0, \quad (\text{mert } L_1 \text{-en } y = 0),$$

$$\int_{L_3} \bar{H} d\bar{r} = 0, \quad (\text{mert } L_3 \text{ egyenlete } \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + t\bar{k}, \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{k}}, \text{ és így } \bar{H}(\bar{r}(t)) \dot{\bar{r}}(t) = 0),$$

mivel pedig  $L_2$  egyenlete:

$$\vec{r} = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j}, \quad (0 \leq t \leq \varphi),$$

ahol  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi$  pedig az  $(x, y)$  pont polárszöge

$$\begin{aligned} \int_{L_2} \bar{H} d\vec{r} &= \int_{t=0}^{\varphi} \left( \frac{-R \sin t}{R^2} \vec{i} + \frac{R \cos t}{R^2} \vec{j} \right) (-R \sin t \vec{i} + R \cos t \vec{j}) dt = \\ &= \int_{t=0}^{\varphi} dt = \varphi. \end{aligned}$$

Aszerint, hogy  $\varphi$  a lehetséges, egymástól  $2\pi$  egész számú többszöröseiben különböző értékek közül melyikkel egyenlő az

$$\int_a^{\vec{r}} \bar{H}(\vec{r}) d\vec{r} = \varphi$$

integrál végtelen sok különböző értéket vehet fel.

Az  $x > 0$  féltérben pl. a  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  választás mellett  $\varphi = \text{Arc tg } \frac{y}{x}$  (Arc tg  $\frac{y}{x}$  -szel az arc tg függvény főértékét jelöljük), vagyis a keresett potenciál egyértékű ágaként

$$- \text{Arc tg } \frac{y}{x}$$

adódott. Könnyen belátható, hogy  $\text{grad}(-\text{Arc tg } \frac{y}{x}) = \bar{H}$ .

d) Előbbi eredményeink felhasználásával megoldható most már a következő feladat:

valamely  $T$  síkrészben meg vannak adva a folytonos parciálisokkal rendelkező  $p(x, y)$  és  $q(x, y)$  függvények. Kérdés, van-e  $T$ -ben olyan  $u(x, y)$  függvény, melyre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q(x, y),$$

és ha van, hogyan határozható meg? (Kétváltozós kvadratura feladat.)

Jelöljük  $V$ -vel a  $T$  fölé emelt hengerszerű térrészt (17. ábra). Legyen  $T$  egyszeresen összefüggő, (ekkor a  $V$  térrész is egyszeresen összefüggő lesz). Minthogy a  $V$  térrészben a

$$\vec{v} = p\vec{i} + q\vec{j}$$

vektortér abban az esetben rotációmentes, ha  $T$ -ben

$$(\kappa) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$(\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \vec{k} \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)),$$

azért egyszeresen összefüggő  $T$  esetén a  $(\kappa)$  összefüggés fennállásából következik, hogy  $V$ -ben van olyan  $u(x, y, z)$  függvény, melyre

$$\text{grad } u = \vec{v},$$

azaz

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

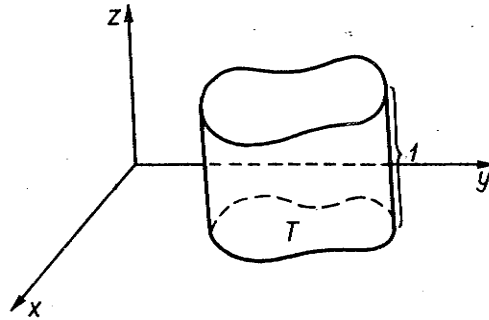
hiszen a tett feltevések mellett az rotációmentes tér potenciálos,  $u(x, y, z)$ -vel pedig a potenciál  $(-1)$ -szeresét jelöltük. A fenti harmadik egyenlőség miatt azonban  $u$  nem függ  $z$ -től, azaz  $u = u(x, y)$ . Ez a függvény feladatunk megoldása. Ha viszont van a feladatnak megoldása, akkor  $-u(x, y)$  nyilván az egész  $V$  térrészben potenciálja  $\vec{v}(\vec{r})$ -nek, s azért teljesül a  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$  reláció. Vagyis ahhoz, hogy az egyszeresen összefüggő  $T$  síkrészben folytonos parciálisokkal rendelkező  $p(x, y)$  és  $q(x, y)$  függvényekhez található legyen olyan  $u(x, y)$  függvény, amelyre  $T$ -ben mindenütt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q(x, y)$$

érvényes, szükséges és elégséges, hogy  $T$ -ben fennálljon a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

kapcsolat. Ha ez teljesül, akkor



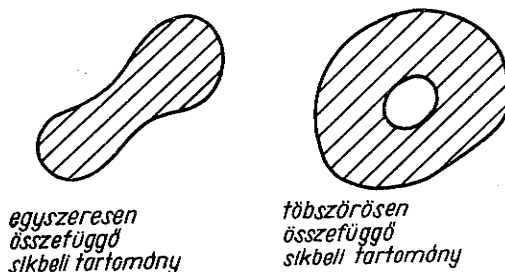
17. ábra

$$u(x, y) = \int_{\vec{a}}^{\vec{r}} \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \int_{(\alpha, \beta)}^{(x, y)} p(x, y) \, dx + q(x, y) \, dy + C,$$

ahol  $\vec{a} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$  a  $T$  síkrész tetszőleges rögzített pontja, az integrál az  $(\alpha, \beta)$  és  $(x, y)$  pontokat összekötő tetszőszerinti  $T$ -ben haladó görbe mentén vehető.

Az egyszeresen összefüggő síkbeli tartománynak még a következő jellemzései is megadhatók:

Egy korlátos síkbeli tartomány egyszeresen összefüggő, ha határa egy darabból áll. Ha egy síkbeli tartomány határa több különálló darabból áll, akkor többszörösen összefüggő.



18. ábra

Pl. egy önmagát nem metsző zárt görbe belsejéből álló síkbeli tartomány egyszeresen összefüggő.

Egyszeresen összefüggő egy síkbeli tartomány, ha minden benne futó egyszerű zárt görbével (Jordan-görbével) együtt a görbe belsejében fekvő pontokat is tartalmazza.

e) Az előző fejezetben említettük, hogy a rotációmentes vektorterek egy skalárpotenciálból (annak negatív gradienseként), a divergenciamentes vektorterek pedig alkalmas differenciálhatósági kikötések mellett egy vektorpotenciálból (annak rotációjaként) származtathatók. Egy tetszőleges vektortérre a következőt mondhatjuk ki:

Tetszőleges folytonosan differenciálható  $\vec{v}(\vec{r})$  vektortér felbontható egy  $\vec{v}_1$  divergenciamentes és egy  $\vec{v}_2$  rotációmentes vektortér összegére.

Legyen ugyanis pl.

$$\operatorname{div} \bar{v} = g, \quad \operatorname{rot} \bar{v} = \bar{a},$$

akkor, ha

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$$

és

$$(*) \quad \operatorname{rot} \bar{v}_2 = 0, \quad \operatorname{div} \bar{v}_2 = g$$

akkor a

$$\bar{v}_1 = \bar{v} - \bar{v}_2$$

vektortér divergenciamentes lesz, rotációja pedig megegyezik  $\bar{v}$  rotációjával:

$$\operatorname{div} \bar{v}_1 = \operatorname{div} (\bar{v} - \bar{v}_2) = \operatorname{div} \bar{v} - \operatorname{div} \bar{v}_2 = g - g = 0,$$

$$\operatorname{rot} \bar{v}_1 = \operatorname{rot} (\bar{v} - \bar{v}_2) = \operatorname{rot} \bar{v} - \operatorname{rot} \bar{v}_2 = \bar{a} - 0 = \bar{a}.$$

Az  $(*)$  tulajdonsággal rendelkező vektorteret úgy állíthatjuk elő, hogy a  $-\Delta \phi = g$  Poisson-egyenlet megoldásaként előállítjuk potenciálfüggvényét, majd  $\bar{v}_2$ -t ennek negatív gradienseként.

f) A Matematika I/2. jegyzet 48. fejezetében megadtuk a deriválttenzor definícióját. A  $\bar{v}(\bar{r}) = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$  vektor-vektorfüggvényt akkor mondtuk differenciálhatónak, ha megváltozása így volt írható:

$$(*) \quad \bar{v}(\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}) - \bar{v}(\bar{r}_0) = \bar{A} \Delta \bar{r} + \bar{\varepsilon} \Delta \bar{r},$$

ahol az  $\bar{\varepsilon}$  tenzor mátrixának minden eleme  $|\Delta \bar{r}| \rightarrow 0$  esetében 0-hoz tart, az  $\bar{A}$  derivált-tenzor mátrixa pedig:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ezen  $\bar{A}$  mátrixot egy szimmetrikus és egy antimetrikus mátrix összegére bontva fel, a nekik megfelelő szimmetrikus és antimetrikus tenzorok skalárinvariánsa, ill. vektorinvariánsa (lásd Matematika I/2. jegyzet 48. fejezet)

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \text{div } \bar{v}$$

ill.

$$\bar{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \bar{i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \bar{j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \bar{k} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v}.$$

Ha mármost  $(\kappa)$ -ban eltekintünk a kicsiny  $\Delta \bar{r}$  esetében az első tag mellett elhanyagolható utolsó tagtól, és az  $\bar{A}$  deriválttenzort  $\bar{A}_s$  szimmetrikus és  $\bar{A}_a$  antimetrikus részének összegére bontjuk, akkor

$$(\kappa\kappa) \quad \bar{v}(\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}) \approx \bar{v}(\bar{r}_0) + \bar{A}_s \Delta \bar{r} + \bar{A}_a \Delta \bar{r}$$

adódik. Ezt az eredményt a következőképpen szemléltethetjük:

Irja le  $\bar{v}(\bar{r})$  egy áramló folyadék sebességi vektorterét. Ekkor  $(\kappa\kappa)$  értelmében a folyadék vizsgált darabjának mozgása jó közelítéssel három mozgásból tehető össze.  $(\kappa\kappa)$  jobb oldali első tagja nem tartalmazza  $\Delta \bar{r}$ -et, ez tehát valamennyi vizsgált részecskére közös, úgyhogy a vizsgált folyadékrész  $\bar{v}(\bar{r}_0)$  sebességű merev testszerű haladó mozgását mutatja. A harmadik tag  $\bar{c} \times \bar{r}$  alakban is írható ( $\bar{c} \bar{A}$ , ill.  $\bar{A}_a$  vektorinvariánsa), eszerint ez a tag azt mutatja, hogy a vizsgált folyadékdarab merev testszerű forgó mozgást is végez, melynek szögsebesség vektora  $\bar{c}$ . (Ezért nevezzük a derivált tenzor vektorinvariánsának kétsz eresét  $\text{rot } \bar{v}$ -nek.) Igazolható, hogy a  $\bar{v}(\bar{r}_0 + \Delta \bar{r})$  sebesség közelítő értékét szolgáltató képlet középső tagja arra mutat, hogy a folyadékdarab alakváltozást szenved, az  $\bar{A}_s$  szimmetrikus tenzor (azaz az  $\bar{A}$  tenzor) skalárinvariánsa a térfogatváltozás sebességét, a folyadék szétáramlásának gyorsaságát méri ezt a vektortér divergenciájának nevezzük.

## 5. Skalár-vektorfüggvény gradiensének Ignatowsky-féle definíciója

a) A Gauss-Osztrogradszkij-tétel következményeként a következő nevezetes integráltétel vezethető le (un. gradiens-tétel):

### Tétel

Legyen  $F$  egy mérhető felszínű, irányítható, zárt felület,  $\bar{n}$  az  $F$  felület által bezárt mérhető térfogatu  $V$  térrészből kifelé mutató normális egységvektor. Legyen  $u(\bar{r})$  és  $\text{grad } u(\bar{r})$  folytonos  $V$ -ben és ennek  $F$  határán. Ekkor

$$\iiint_V \text{grad } u \, dx \, dy \, dz = \iint_F u(\bar{r}) \, d\bar{f}.$$

### Bizonyítás

$\bar{n} = n_1 \bar{i} + n_2 \bar{j} + n_3 \bar{k}$ , ( $|\bar{n}| = 1$ ) mellett alakítsuk át a tételben szereplő felületmenti integrált felszín szerinti integrállá:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \iint_F u(\bar{r}) \, d\bar{f} = \iint_F (u(\bar{r})\bar{n}) \, d\bar{f} = \\ &= \left( \iint_F u(\bar{r})n_1 \, d\bar{f} \right) \bar{i} + \left( \iint_F u(\bar{r})n_2 \, d\bar{f} \right) \bar{j} + \left( \iint_F u(\bar{r})n_3 \, d\bar{f} \right) \bar{k}. \end{aligned}$$

Az utóbbi három integrál úgy is felfogható, mint az  $u(\bar{r})\bar{i}$ ,  $u(\bar{r})\bar{j}$  és  $u(\bar{r})\bar{k}$  vektorfüggvények skalárértékű felületmenti integrálja:

$$\bar{I} = \left( \iint_F (u\bar{i}) \, d\bar{f} \right) \bar{i} + \left( \iint_F (u\bar{j}) \, d\bar{f} \right) \bar{j} + \left( \iint_F (u\bar{k}) \, d\bar{f} \right) \bar{k}.$$

Alkalmazzuk külön-külön az itt szereplő zárt  $F$  felületre vonatkozó felületmenti integrálokra a Gauss-Osztrogradszkij-tételt. Mivel

$$\text{div}(u\bar{i}) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{div}(u\bar{j}) = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{div}(u\bar{k}) = \frac{\partial u}{\partial z},$$

adódik:

$$\bar{I} = \iint_F u(\bar{r}) \, d\bar{f} = \left( \iiint_V \frac{\partial u}{\partial x} \, dx \, dy \, dz \right) \bar{i} + \left( \iiint_V \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \, dy \, dz \right) \bar{j} +$$

$$+ \left( \iiint_V \frac{\partial u}{\partial z} dx dy dz \right) \bar{k} = \iiint_V \text{grad } u dx dy dz,$$

amint állítottuk.

b) Az előbbi tételből könnyen adódik  $\text{grad } u(\bar{r})$  P pontbeli értékét szolgáltató koordináta-invariáns Ignatowsky-féle definíciója.

Jelentsenek  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$  a P pontra rázsugorodó zárt felületeket,  $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$  pedig a fenti felületek által bezárt térrészek térfogatának mérőszámát. Ha az  $F_1$  felületek mérhető felszínek és irányíthatók,  $u(\bar{r})$  pedig parciális deriváltjaival együtt folytonos az  $F_1$  felületeken valamint az általuk bezárt mérhető térfogatu  $K_1$  térrészekben ( $K_1$  térfogatát jelölje  $V_1$ ), akkor kifelé irányított felületi normálissal számolva az

$$\frac{\iint_{F_1} u(\bar{r}) d\bar{f}}{V_1}, \quad \frac{\iint_{F_2} u(\bar{r}) d\bar{f}}{V_2}, \quad \dots, \quad \frac{\iint_{F_n} u(\bar{r}) d\bar{f}}{V_n}, \quad \dots$$

sorozat konvergens és limesze:

$$(1) \quad \lim \frac{\iint_{F_n} u(\bar{r}) d\bar{f}}{V_n} = [\text{grad } u(\bar{r})]_{(P)}.$$

A tett feltevések mellett ugyanis ha  $F_n$  már eléggé rázsugorodik P-re, akkor az  $F_n$  felület által bezárt térrészt  $K_n$ -nel jelölve:

$$\iint_{F_n} u(\bar{r}) d\bar{f} = \iiint_{K_n} \text{grad } u(\bar{r}) dx dy dz = [\text{grad } u(\bar{r})]_{(P)} V_n + \bar{H},$$

ahol  $\text{grad } u$  folytonossága révén

$$\text{grad } u = [\text{grad } u]_{(P)} + \bar{\eta},$$



és a P pontban  $\lim \bar{\eta} = 0$ ,  $\bar{H}$  pedig  $\bar{\eta}$  integrálásból adódó hibatag.

Ha  $K_n$  már beleesik P alkalmas környezetébe, akkor tetszőleges

$\varepsilon > 0$  mellett

$$|\bar{H}| = \left| \iiint_{K_n} \bar{\eta}(\vec{r}) \, dx \, dy \, dz \right| \leq \varepsilon \iiint_{K_n} dx \, dy \, dz = \varepsilon \cdot V_n,$$

Előbbi eredményünkéből  $V_n \neq 0$ -val átosztva tehát írhatjuk:

$$\left[ \text{grad } u(\vec{r}) \right]_{(P)} = \frac{1}{V_n} \iint_{F_n} u(\vec{r}) \, d\vec{f} - \frac{\bar{H}}{V_n},$$

ahol

$$\left| \frac{\bar{H}}{V_n} \right| \rightarrow 0$$

Ez azonban éppen azt jelenti, hogy P-re rázsugorodó  $F_n$  zárt felületekre az (1) határérték létezik, ezt akartuk bizonyítani.

$\left[ \text{div } \vec{v} \right]_{(P)}$ , ill.  $\left[ \text{rot } \vec{v} \right]_{(P)}$ -nek az 1., ill. 3. fejezetben megadtuk az Ignatowsky-féle koordináta-invariáns definícióját, majd ebből ki is számítottuk az XYZ derékszögű koordinátarendszerben  $\vec{v} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$  divergenciájának és rotációjának értékét. Az ott követett okoskodásokhoz hasonló okoskodással adódik (1)-ből a korábban más úton már levezetett

$$\text{grad } u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

számítási utasítás. Ennek részletezésére itt nem térünk ki.

c)  $\text{div } \vec{v}$ ,  $\text{rot } \vec{v}$  és  $\text{grad } u$  kiszámítására szolgáló képleteinket az un. nabla-szimbolikával könnyen megjegyezhetjük:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

mellett

$$(2) \quad \text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}, \quad \text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v}, \quad \text{grad } u = \nabla u.$$

Vezessük be a szimbolikus  $\nabla$  vektor koordinátainvariáns definíciójaként a

$$(3) \quad [\nabla]_{(P)} = \lim \frac{\iint_{F_n} d\vec{f}}{V_n}$$

jelölést, ahol  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$  a  $P$  pontra rázsugorodó zárt felületeket jelentenek kifelé mutató felületi normálissal,  $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$  az ezen felületek által bezárt térrész térfogatának mérőszáma. A formális (2) összefüggések alapján a (3) -ban definiált  $\nabla$  vektor segítségével könnyen felírhatjuk (ill. megjegyezhetjük magunknak)  $[\text{grad } u]_{(P)}$ ,

$[\text{div } \vec{v}]_{(P)}$ ,  $[\text{rot } \vec{v}]_{(P)}$  koordináta-invariáns, Ignatowsky-féle definícióját:

$$[\text{grad } u]_{(P)} = \lim \frac{\iint_{F_n} u(\vec{r}) d\vec{f}}{V_n},$$

$$[\text{div } \vec{v}]_{(P)} = \lim \frac{\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{f}}{V_n},$$

$$[\text{rot } \vec{v}]_{(P)} = \lim \frac{\iint_{F_n} d\vec{f} \times \vec{v}(\vec{r})}{V_n} = \lim \frac{\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) \times d\vec{f}}{V_n}.$$

## 6. Általános (görbevonalu) koordináták

Ha egy pont helyzetét a térben három adat (lehetőleg kölcsönösen) egyértelműen meghatározza, akkor ezeket a pont koordinátáinak nevezzük. Az a tény, hogy a pont helyzetét három adat, mondjuk  $q_1, q_2, q_3$  (pl. a pont gömbi koordinátái - a szokásos jelöléssel  $r, \vartheta, \varphi$ ) egyértelműen meghatározza abban nyilvánul meg, hogy a pontnak valamely XYZ derékszögű koordinátarendszerbeli koordinátái kifejezhetők, mint a  $q_1, q_2, q_3$  változók (paraméterek) függvényei:

$$\begin{aligned}
 x &= x(q_1, q_2, q_3), \\
 y &= y(q_1, q_2, q_3), \\
 z &= z(q_1, q_2, q_3),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

az

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1, q_2, q_3) \bar{i} + y(q_1, q_2, q_3) \bar{j} + z(q_1, q_2, q_3) \bar{k}$$

helyzetvektorokkal is jellemezhetjük a tér pontjait. Az új  $q_1, q_2, q_3$  változók rendszerét általánosságban görbevonalu koordinátarendszernek nevezzük, melynél a koordinátavonalak egyenletei:

$$\begin{aligned}
 x &= x(q_1, b, c), \\
 y &= y(q_1, b, c), \quad \text{ill. röviden} \quad \bar{r} = \bar{r}(q_1, b, c), \\
 z &= z(q_1, b, c),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 x &= x(a, q_2, c), \\
 y &= y(a, q_2, c), \quad \text{ill. röviden} \quad \bar{r} = \bar{r}(a, q_2, c), \\
 z &= z(a, q_2, c),
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 x &= x(a, b, q_3), \\
 y &= y(a, b, q_3), \quad \text{ill. röviden} \quad \bar{r} = \bar{r}(a, b, q_3), \\
 z &= z(a, b, q_3),
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

ahol  $a, b, c$  állandókat jelentenek.

A továbbiakban feltesszük, hogy az (1) jobboldalán álló függvények folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkeznek.

A koordinátavonalak érintővektorai:

$$\bar{a}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

az érintő egységvektorok:

$$(6) \quad \bar{e}_i = \frac{\bar{a}_i}{|\bar{a}_i|}, \quad i = 1, 2, 3.$$

A görbevonalu koordinátarendszer ortogonális, ha

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 = \bar{a}_2 \bar{a}_3 = \bar{a}_3 \bar{a}_1 = 0.$$

Az alábbiakban többnyire csak ortogonális koordinátarendszereket fogunk vizsgálni.

Az (1) görbevonalu koordinátarendszer koordinátafelületeinek egyenletei:

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, c), \\ y &= y(q_1, q_2, c), \quad \text{ill. röviden} \quad \bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, c), \\ z &= z(q_1, q_2, c), \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= x(q_1, b, q_3), \\ y &= y(q_1, b, q_3), \quad \text{ill. röviden} \quad \bar{r} = \bar{r}(q_1, b, q_3), \\ z &= z(q_1, b, q_3), \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} x &= x(a, q_2, q_3), \\ y &= y(a, q_2, q_3), \quad \text{ill. röviden} \quad \bar{r} = \bar{r}(a, q_2, q_3), \\ z &= z(a, q_2, q_3), \end{aligned}$$

ahol  $a, b, c$  állandók.

E koordinátafelületek normálisait úgy definiáljuk, hogy azok a koordinátavonalak (5) -ben felírt  $\bar{a}_i$  érintővektorainak reciprok vektorhármassá alkossák. (Matematika I/1. jegyzet 9. fejezet.) Az

$$(10) \quad \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 = D$$

jelöléssel ( $D \neq 0$ )

$$(11) \quad \bar{r} = \bar{r}(a, q_2, q_3) \text{ normálisa: } \bar{n}_1 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}}{D} = \frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3}{D},$$

$$(12) \quad \bar{r} = \bar{r}(q_1, b, q_3) \text{ normálisa: } \bar{n}_2 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}}{D} = \frac{\bar{a}_3 \times \bar{a}_1}{D},$$

$$(13) \quad \bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, c) \text{ normálisa: } \bar{n}_3 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}}{D} = \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2}{D}.$$

(Az  $\bar{n}_1$  normálisból  $\bar{n}_2$  és  $\bar{n}_3$  ciklikus cserével is nyerhető.)  $\bar{n}_1, \bar{n}_2$  és  $\bar{n}_3$  létezését a  $D \neq 0$  feltétel biztosítja.

Mivel  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  és  $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$  reciprok vektorhármast alkot, segítségükkel adott  $\bar{v}$  vektor érintő, ill. normális irányu koordinátái könnyen meghatározhatók:

$$(14) \quad \bar{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \bar{a}_i = v_1 \bar{a}_1 + v_2 \bar{a}_2 + v_3 \bar{a}_3 \text{ esetén } v_i = \bar{v} \bar{n}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(15) \quad \bar{v} = \sum_{i=1}^3 c_i \bar{n}_i = c_1 \bar{n}_1 + c_2 \bar{n}_2 + c_3 \bar{n}_3 \text{ esetén } c_i = \bar{v} \bar{a}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ha a vizsgált görbevonali koordinátarendszer ortogonális, akkor a koordinátafelületek normálisai és a koordinátavonalak érintővektorai között egyszerű összefüggés áll fenn:

$$(16) \quad \bar{n}_i = \frac{\bar{a}_i}{|\bar{a}_i|^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Mivel ugyanis ortogonális rendszer esetében

$$D = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 = |\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2| \cdot |\bar{a}_3|$$

és pl.  $\bar{a}_2 \times \bar{a}_3$  az  $\bar{a}_1$  vektor irányába mutató  $|\bar{a}_2| |\bar{a}_3|$  nagyságú vektor

$$\bar{n}_1 = \frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3}{D} = \frac{|\bar{a}_2| |\bar{a}_3|}{|\bar{a}_1| |\bar{a}_2| |\bar{a}_3|} \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|} = \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|^2}$$

Hasonlóképpen vezethető le ortogonális rendszer esetében  $\bar{n}_2$  és  $\bar{n}_3$ -nak a (16) képletben felírt értéke.

Írjuk fel néhány gyakrabban előforduló görbevonalu koordinátarendszer esetében az (1) transzformációs formulákat, vizsgáljuk meg, mik lesznek e koordinátarendszer koordinátavonalai és koordinátafelületei, írjuk fel a koordinátavonalak érintővektorait, a koordinátafelületek normálisait, vizsgáljuk meg a rendszer ortogonalitását.

#### a) Gömbi koordinátarendszer

Az

$$q_1 = R, \quad q_2 = u, \quad q_3 = v$$

jelöléssel a transzformációs formulák:

$$x = R \sin u \cos v,$$

$$y = R \sin u \sin v, \quad \text{ill. } \vec{r} = R \sin u \cos v \vec{i} + R \sin u \sin v \vec{j} + R \cos u \vec{k},$$

$$z = R \cos u,$$

(R, u, és v jelentését lásd a 19. ábrán).

A koordinátafelületek:

$$R = a$$

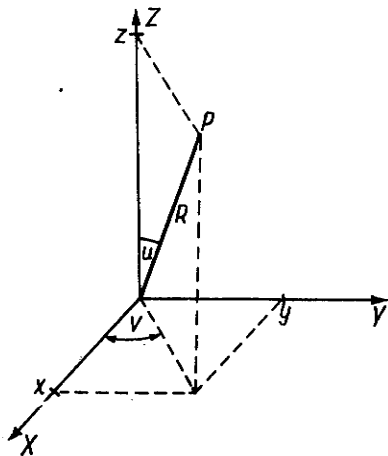
0(0, 0, 0) középpontu koncentrikus gömbfelületek,

$$u = b$$

Z tengelyű forgáskupfelületek, melyeknek csúcsa az 0(0, 0, 0) pontban fekszik,

$$v = c$$

Z tengelyből kiinduló, az XY síkra merőleges félsíkok.



19. ábra

A koordinátavonalak ezek áthatási görbéi, vagyis

$$\bar{r} = \bar{r}(R, b, c) \quad \text{egyenletű félegyeneselek,}$$

$$\bar{r} = \bar{r}(a, u, c) \quad \text{egyenletű félkörívek,}$$

$$\bar{r} = \bar{r}(a, b, v) \quad \text{egyenletű az } XY \text{ síkkal párhuzamos}$$

síkban fekvő körvonalak.

Ezen koordinátavonalak érintői:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{d\bar{r}(R, b, c)}{dR} = \left[ \frac{\partial \bar{r}(R, u, v)}{\partial R} \right]_{\substack{u=b, \\ v=c}} = \\ &= \left[ \sin u \cos v \bar{i} + \sin u \sin v \bar{j} + \cos u \bar{k} \right]_{\substack{u=b, \\ v=c}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 &= \frac{d\bar{r}(a, u, c)}{du} = \left[ \frac{\partial \bar{r}(R, u, v)}{\partial u} \right]_{\substack{R=a, \\ v=c}} = \\ &= \left[ R \cos u \cos v \bar{i} + R \cos u \sin v \bar{j} - R \sin u \bar{k} \right]_{\substack{R=a, \\ v=c}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_3 &= \frac{d\bar{r}(a, b, v)}{dv} = \left[ \frac{\partial \bar{r}(R, u, v)}{\partial v} \right]_{\substack{R=a, \\ u=b}} = \\ &= \left[ -R \sin u \sin v \bar{i} + R \sin u \cos v \bar{j} \right]_{\substack{R=a, \\ u=b}}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 = \bar{a}_2 \bar{a}_3 = \bar{a}_3 \bar{a}_1 = 0,$$

a rendszer ortogonális.

A későbbiekben szükségünk lesz még a következő eredményekre:

$$|\bar{a}_1| = \sqrt{\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u} = \sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u} = 1,$$

$$|\bar{a}_2| = \sqrt{R^2 \cos^2 u \cos^2 v + R^2 \cos^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u} =$$

$$= \sqrt{R^2 (\cos^2 u + \sin^2 u)} = R,$$

$$|\bar{a}_3| = \sqrt{R^2 \sin^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u \cos^2 v} = \sqrt{R^2 \sin^2 u} = R \sin u$$

mivel  $0 < u < \tilde{\pi}$  esetén  $\sqrt{\sin^2 u} = |\sin u| = \sin u$ . Ebből következik a rendszer ortogonalitására való tekintettel, hogy

$$D = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 = R^2 \sin u$$

és a koordinátafelületek normálisai:

$$\bar{n}_1 = \bar{a}_1, \quad \bar{n}_2 = \frac{\bar{a}_2}{R}, \quad \bar{n}_3 = \frac{\bar{a}_3}{R \sin u}.$$

#### b) Hengerkoordinátarendszer

A szokásos

$$q_1 = R, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

jelöléssel a transzformációs formulák:

$$x = R \cos \varphi,$$

$$y = R \sin \varphi, \quad \text{ill.} \quad \bar{r} = R \cos \varphi \bar{i} + R \sin \varphi \bar{j} + z \bar{k},$$

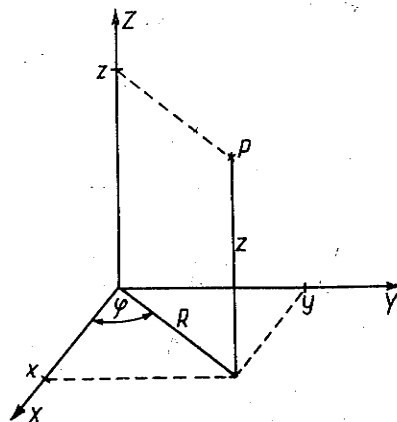
$$z = z$$

( $R, \varphi$ , és  $z$  jelentését lásd a 20. ábrán).

A koordinátafelületek:

$$R = a$$

20. ábra





Z tengelyű, ill. a Z tengellyel párhuzamos alkotóju egyenes körhenger-felületek,

$$\varphi = b$$

Z tengelyből kiinduló, az XY síkra merőleges félsíkok,

$$z = c,$$

az XY síkkal párhuzamos síkok.

A koordinátavonalak ezek áthatási görbéi, vagyis

$\bar{r} = \bar{r}(R, b, c)$  egyenletű az XY síkkal párhuzamos síkban fekvő, a Z tengelyből kiinduló félegyenesek,

$\bar{r} = \bar{r}(a, \varphi, c)$  egyenletű az XY síkkal párhuzamos síkban fekvő körvonalak,

$\bar{r} = \bar{r}(a, b, z)$  egyenletű Z tengellyel párhuzamos egyenesek.

Ezen koordinátavonalak érintői:

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= \frac{d\bar{r}(R, b, c)}{dR} = \left[ \frac{\partial \bar{r}(R, \varphi, z)}{\partial R} \right]_{\substack{\varphi=b, \\ z=c}} = [\cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}], \\ \bar{a}_2 &= \frac{d\bar{r}(a, \varphi, c)}{d\varphi} = \left[ \frac{\partial \bar{r}(R, \varphi, z)}{\partial \varphi} \right]_{\substack{R=a, \\ z=c}} = [-R \sin \varphi \bar{i} + R \cos \varphi \bar{j}] \\ \bar{a}_3 &= \frac{d\bar{r}(a, b, z)}{dz} = \left[ \frac{\partial \bar{r}(R, \varphi, z)}{\partial z} \right]_{\substack{R=a \\ \varphi=b}} = \bar{k}.\end{aligned}$$

Mivel

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 = \bar{a}_2 \bar{a}_3 = \bar{a}_3 \bar{a}_1 = 0,$$

a rendszer ortogonális, és tekintettel arra, hogy

$$\begin{aligned}|\bar{a}_1| &= \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1, \\ |\bar{a}_2| &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi} = R, \\ |\bar{a}_3| &= 1,\end{aligned}$$

adódik:

$$D = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 = R,$$

a koordinátafelületek normálisai pedig:

$$\bar{n}_1 = \bar{a}_1, \quad \bar{n}_2 = \bar{a}_2 \frac{1}{R^2}, \quad \bar{n}_3 = \bar{a}_3.$$

### c) Általános hengerkoordinátarendszer

A transzformációs formulák:

$$x = q_1 f(q_2) + c_1 q_3,$$

$$y = q_1 g(q_2) + c_2 q_3, \quad \text{ill.} \quad \bar{r} = q_1 \bar{r}_1(q_2) + q_3 \bar{v}, \quad \text{ahol} \quad \bar{v} = c_1 \bar{i} + c_2 \bar{j} + c_3 \bar{k},$$

$$z = q_1 h(q_2) + c_3 q_3 \quad \bar{r}_1(q_2) = f(q_2) \bar{i} + g(q_2) \bar{j} + h(q_2) \bar{k}.$$

A koordinátafelületek:

$$q_1 = a : \bar{r} = a \bar{r}_1(q_2) + q_3 \bar{v} \quad \text{hengerfelületek,}$$

$$q_2 = b : \bar{r} = q_1 \bar{d} + q_3 \bar{v} \quad \text{síkok,}$$

$$q_3 = e : \bar{r} = q_1 \bar{r}_1(q_2) + e \bar{v} \quad \text{kupfelületek.}$$

A hengerkoordinátarendszerek általában nem ortogonálisak. Pl. az

$$x = u a \cos t,$$

$$y = u b \sin t,$$

$$z = z$$

( $q_1 = u$ ,  $q_2 = t$ ,  $q_3 = z$ ) elliptikus henger-koordinátarendszer esetében a koordinátavonalak érintő-vektorai:

$$\bar{a}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \cos t \bar{i} + b \sin t \bar{j},$$

$$\bar{a}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = -u a \sin t \bar{i} + u b \cos t \bar{j},$$

$$\bar{a}_3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \bar{k},$$

és mivel

$$\bar{a}_1 \bar{a}_3 = \bar{a}_2 \bar{a}_3 = 0,$$

de

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 = -u a^2 \sin t \cos t + u b^2 \sin t \cos t \neq 0,$$

ha  $a \neq b$ , a rendszer ezen kikötés mellett nem ortogonális.

A további tárgyalások leegyszerűsítése érdekében vezessük be a következő jelöléseket:

$$(17) \quad \bar{a}_i \bar{a}_j = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} = g_{ij} = g_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

speciálisan

$$(18) \quad |\bar{a}_i|^2 = \bar{a}_i \bar{a}_i = g_{ii} \quad (i = 1, 2, 3),$$

ill. az

$$(19) \quad |\bar{a}_i| = H_i \quad \text{jelöléssel} \quad |\bar{a}_i|^2 = H_i^2.$$

## 7. A gradiens kiszámítása görbevonalu koordinátarendszerben

Egy skalártér gradiensét legelőször úgy definiáltuk, mint a skalárvektorfüggvény differenciálhányadosát, vagyis az  $u(\bar{r})$  függvény megváltozásának főrészében (a du differenciálban) szereplő "arányossági tényező"-t:

$$\Delta u = u(\bar{r} + \Delta \bar{r}) - u(\bar{r}) = \bar{a} \Delta \bar{r} + \bar{\epsilon} \Delta \bar{r},$$

és ha itt  $|\bar{\epsilon}| \rightarrow 0$ , ha  $|\Delta \bar{r}| \rightarrow 0$ , akkor  $u(\bar{r})$  differenciálható, és

$$\bar{a} = \text{grad } u = \frac{du}{d\bar{r}}.$$

Teljesen hasonlóképpen

$$(1) \quad \bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3)$$

esetében

$$u(\bar{r}) = u(q_1, q_2, q_3)$$

megváltozása

$$\Delta u = u(\bar{r}(q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2, q_3 + \Delta q_3)) - u(\bar{r}(q_1, q_2, q_3)),$$

ezen megváltozás főrésze

$$(2) \quad du = \text{grad } u \, d\bar{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial q_i} \Delta q_i.$$

Mivel azonban (1) megváltozása

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2, q_3 + \Delta q_3) - \bar{r}(q_1, q_2, q_3),$$

ennek főrésze

$$d\bar{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \Delta q_i = \sum_{i=1}^3 \bar{a}_i \Delta q_i,$$

ezen összefüggésből  $d\bar{r}$  érintőirányu koordinátái (lásd 6. fejezet (14))

$$\Delta q_i = d\bar{r} \, \bar{n}_i.$$

Ezen eredményünket (2) -be behelyettesítve adódik:

$$du = \text{grad } u \, d\bar{r} = \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial q_i} \bar{n}_i \right) d\bar{r},$$

azaz

$$(3) \quad \begin{aligned} \text{grad } u &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial q_i} \bar{n}_i = \\ &= \frac{\partial u}{\partial q_1} \bar{n}_1 + \frac{\partial u}{\partial q_2} \bar{n}_2 + \frac{\partial u}{\partial q_3} \bar{n}_3. \end{aligned}$$

Ha tehát görbevonalu koordinátarendszerben a  $\nabla$  vektort így definiáljuk:

$$(4) \quad \nabla = \bar{n}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \bar{n}_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \bar{n}_3 \frac{\partial}{\partial q_3},$$

akkor a (3) képlet most is

$$\text{grad } u = \nabla u$$

alakban jegyezhető meg a legkönnyebben.

A (3) képletet ortogonális rendszer esetében az

$$\bar{n}_i = \frac{\bar{a}_i}{|\bar{a}_i|^2} = \frac{\bar{a}_i}{H_i^2} = \frac{\bar{e}_i}{H_i}$$

jelölés felhasználásával még a következő alakban is felírhatjuk:

$$\text{grad } u = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i^2} \frac{\partial u}{\partial q_i} \bar{a}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} \bar{e}_i$$

### 8. A divergencia kiszámítása görbevonalu ortogonális koordináta-rendszerben

a) A  $P$  pontra rázsugorodó mérhető felszínű, zárt, irányítható  $F_n$  felületeken, ill. az általuk bezárt  $V_n$  térfogatu térrészekben folytonos  $\bar{v}(\bar{r})$  vektorfüggvény esetében,  $\bar{v}(\bar{r})$  koordinátáinak parciális deriváltjairól is feltételezve a folytonosságot beláttuk, hogy kifelé mutató felületi normális mellett

$$[\text{div } \bar{v}]_{(P)} = \lim_{(P)} \frac{\iint_{F_n} \bar{v}(\bar{r}) \cdot d\bar{f}}{V_n}.$$

E határértéket az 1. fejezetben speciálisan derékszögű hasábok esetére kiszámítva jutottunk  $\text{div } \bar{v}$  derékszögű koordinátás kiszámítására szolgáló képletünkre.

Vizsgáljuk most a tér azon  $(q_1, q_2, q_3)$  pontjainak  $K$  halmazát, melyekre

$$q'_1 \leq q_1 \leq q'_1 + \Delta q_1,$$

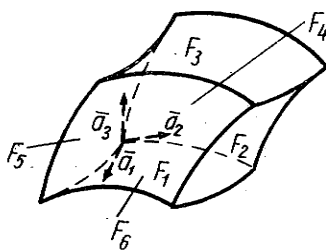
$$q'_2 \leq q_2 \leq q'_2 + \Delta q_2,$$

$$q'_3 \leq q_3 \leq q'_3 + \Delta q_3.$$

E pontok egy görbevonalu hasáb belsejében, ill. határán helyezkednek el, amely a  $P$  pontot tartalmazza és amelynek oldalai

$$\begin{aligned}
 F_1 : \bar{r} &= \bar{r}(q'_1 + \Delta q_1, q'_2, q'_3), \\
 F_2 : \bar{r} &= \bar{r}(q'_1, q'_2 + \Delta q_2, q'_3), \\
 F_3 : \bar{r} &= \bar{r}(q'_1, q'_2, q'_3 + \Delta q_3), \\
 F_4 : \bar{r} &= \bar{r}(q'_1, q'_2, q'_3), \\
 F_5 : \bar{r} &= \bar{r}(q'_1, q'_2, q'_3), \\
 F_6 : \bar{r} &= \bar{r}(q'_1, q'_2, q'_3),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

felületek.



21. ábra

Tegyük fel, hogy  $\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3)$  első és másodrendű parciális deriváltjai (vagyis az  $\bar{a}_i$  vektorok parciális deriváltjai is), valamint a vizsgált  $\bar{v}(\bar{r})$  vektortér koordinátáinak parciális deriváltjai is folytonosak a fenti  $K$  halmaz pontjaiban. Ekkor  $\bar{v}(\bar{r})$ -nek az (1)-beli  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) felületeken létezik a felületmenti integrálja, továbbá, ha  $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3$  már elég kicsiny, tetszőleges  $P_k \in K$  pontra

$$\left[ \bar{a}_i \right]_{(P_k)} \approx \left[ \bar{a}_i \right]_{(P)}, \quad \bar{v}(P_k) \approx \bar{v}(P), \quad P \in K,$$

ahol a közelítésnél elkövetett hiba  $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3 \rightarrow 0$  esetében 0-hoz tart. ( $\bar{a}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .)

E feltevések mellett a  $K$  halmaz pontjaival megadott görbevonalu hasáb térfogatát olyan egyenesvonalu hasáb térfogatával közelíthetjük meg, melynek élvektorai

$$\begin{aligned}
 \bar{r}(q'_1 + \Delta q_1, q'_2, q'_3) - \bar{r}(q'_1, q'_2, q'_3) &\approx \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \Delta q_1 = \\
 &= \bar{a}_1(P_1) \Delta q_1,
 \end{aligned}$$

$$\bar{r}(q'_1, q'_2 + \Delta q_2, q'_3) - \bar{r}(q'_1, q'_2, q'_3) \approx \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \Delta q_2 =$$

$$(q'_1, q'_2 + \nu_2^\ell \Delta q_2, q'_3)$$

$$= \bar{a}_2(P_2) \Delta q_2,$$

$$\bar{r}(q'_1, q'_2, q'_3 + \Delta q_3) - \bar{r}(q'_1, q'_2, q'_3) \approx \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} \Delta q_3 =$$

$$(q'_1, q'_2, q'_3 + \nu_3^\ell \Delta q_3)$$

$$= \bar{a}_3(P_3) \Delta q_3$$

(itt  $0 \leq \nu_1^\ell \leq 1$ ,  $0 \leq \nu_2^\ell \leq 1$ ,  $0 \leq \nu_3^\ell \leq 1$ , azaz  $P_1 \in K$ ,  $P_2 \in K$ ,  $P_3 \in K$ ).

A vizsgált görbevonalu hasáb térfogata tehát közelítőleg

$$(2) \quad V \approx |\bar{a}_1(P_1) \bar{a}_2(P_2) \bar{a}_3(P_3) \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3| \approx \underbrace{[\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3]}_D (P) \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

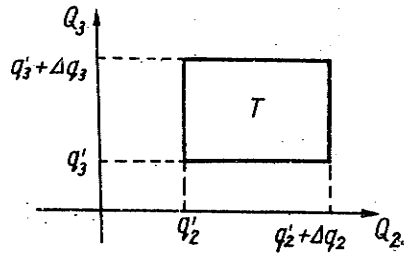
ahol a közelítésnél elkövetett hiba még  $\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$ -mal osztva is 0-hoz tart  $\Delta q_1 \rightarrow 0$ ,  $\Delta q_2 \rightarrow 0$ ,  $\Delta q_3 \rightarrow 0$  esetében.

A  $\bar{v}(\bar{r})$  vektor-vektorfüggvénynek a fenti görbevonalu hasáb-felületre vonatkozó felületmenti integrálját kifelé mutató felületi normálissal a következőképpen számíthatjuk ki.

$$\begin{aligned} \iint_F \bar{v}(\bar{r}) d\bar{f} &= \left( \iint_{F_1} \bar{v} d\bar{f} + \iint_{F_4} \bar{v} d\bar{f} \right) + \left( \iint_{F_2} \bar{v} d\bar{f} + \iint_{F_5} \bar{v} d\bar{f} \right) + \\ &+ \left( \iint_{F_3} \bar{v} d\bar{f} + \iint_{F_6} \bar{v} d\bar{f} \right), \end{aligned}$$

ahol az  $F_1$ , ill.  $F_4$  lapnak  $\bar{a}_1$ , ill.  $-\bar{a}_1$ ,  $F_2$  és  $F_5$ -nek  $\bar{a}_2$  és  $-\bar{a}_2$ ,  $F_3$  és  $F_6$ -nak  $\bar{a}_3$  és  $-\bar{a}_3$  irányu a kívánt irányításu normálisa.

T-vel jelölve a  $q_2, q_3$  paramétersík  $q'_2 \leq q_2 \leq q'_2 + \Delta q_2$ ,  $q'_3 \leq q_3 \leq q'_3 + \Delta q_3$  tartományát, mivel  $\bar{a}_2 \times \bar{a}_3 = D \bar{n}_1$ , adódik:



22. ábra

$$\begin{aligned}
 & \iint_{F_1} \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f} + \iint_{F_4} \bar{v}(\bar{r}) \, d\bar{f} = \\
 & = \iint_T \bar{v}(\bar{r}(q_1' + \Delta q_1, q_2, q_3)) D(q_1' + \Delta q_1, q_2, q_3) \bar{n}_1(q_1' + \Delta q_1, q_2, q_3) \, dq_2 \, dq_3 - \\
 & - \iint_T \bar{v}(\bar{r}(q_1', q_2, q_3)) D(q_1', q_2, q_3) \bar{n}_1(q_1', q_2, q_3) \, dq_2 \, dq_3.
 \end{aligned}$$

Az integrálok különbségét az integrálandó függvények különbsége integráljaként felírva, a tett folytonossági kikötések mellett a következő közeli-tések végezhetők el:

$$\begin{aligned}
 & (\bar{v} \bar{n}_1 D)_{(q_1' + \Delta q_1, q_2, q_3)} - (\bar{v} \bar{n}_1 D)_{(q_1', q_2, q_3)} = \\
 & = \left[ \frac{\partial (\bar{v} \bar{n}_1 D)}{\partial q_1} \right]_{(q_1' + \Delta q_1, q_2, q_3)} - \left[ \frac{\partial (\bar{v} \bar{n}_1 D)}{\partial q_1} \right]_{(P)} \Delta q_1 \approx \left[ \frac{\partial (\bar{v} \bar{n}_1 D)}{\partial q_1} \right]_{(P)} \Delta q_1,
 \end{aligned}$$

ahol  $P \in K$  az a rögzített pont, amelyben  $\text{div } \bar{v}$  értékét ki akarjuk számítani. Ez azonban azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}
 \iint_{F_1} \bar{v} \, d\bar{f} + \iint_{F_4} \bar{v} \, d\bar{f} & \approx \left[ \frac{\partial (\bar{v} \bar{n}_1 D)}{\partial q_1} \right]_{(P)} \Delta q_1 \iint_T dq_2 \, dq_3 = \\
 & = \left[ \frac{\partial (\bar{v} \bar{n}_1 D)}{\partial q_1} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3,
 \end{aligned}$$



ahol a közelítésnél elkövetett hiba még  $\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$ -mal osztva is 0-hoz tart  $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3 \rightarrow 0$  esetében.

Teljesen hasonlóan adódik, hogy

$$\iint_{F_2} \bar{v} d\bar{f} + \iint_{F_5} \bar{v} d\bar{f} \approx \left[ \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_2 D)}{\partial q_2} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3,$$

$$\iint_{F_3} \bar{v} d\bar{f} + \iint_{F_6} \bar{v} d\bar{f} \approx \left[ \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_3 D)}{\partial q_3} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3.$$

Eredményeinket összefoglalva

$$\frac{\iint_F \bar{v} d\bar{f}}{V} \approx \frac{1}{|(D)_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3|} \left[ \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_1 D)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_2 D)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_3 D)}{\partial q_3} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 = \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_i D)}{\partial q_i} \right]_{(P)}$$

Ha mármost olyan görbevonalu hasábokat vizsgálunk, amelyek a P pontra rázsugorodnak, akkor ezek sorozatára a fenti közelítésnél elkövetett hiba zérushoz tart (ilyen hasábok sorozatára ugyanis szükségképpen  $\Delta q_1 \rightarrow 0$ ,  $\Delta q_2 \rightarrow 0$ ,  $\Delta q_3 \rightarrow 0$ ), vagyis

$$(3) \quad \left[ \text{div } \bar{v} \right]_{(P)} = \lim \frac{\iint_F \bar{v} d\bar{f}}{V} = \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_i D)}{\partial q_i} \right]_{(P)} =$$

$$= \frac{1}{|D|} \left[ \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_1 D)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_2 D)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{n}_3 D)}{\partial q_3} \right]_{(P)}.$$

A (3) képlet tetszőleges nem-ortogonális rendszer esetében is érvényes.

A (3) képletet jobbsodrású ortogonális rendszer esetében könnyen felírhatjuk még további két alakban.

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \bar{a}_i$$

esetén

$$\bar{v} \bar{n}_i = v_i,$$

vagyis

$$(4) \quad \operatorname{div} \bar{v} = \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(v_i D)}{\partial q_i} = \frac{1}{|D|} \left[ \frac{\partial(v_1 D)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 D)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 D)}{\partial q_3} \right].$$

Felhasználva azonban a

$$\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| = |\bar{a}_i| = H_i$$

jelölést

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 b_i \bar{e}_i$$

esetén, mivel  $\bar{e}_i = \frac{\bar{a}_i}{H_i}$ ,  $\bar{e}_i H_i = \bar{a}_i$ , azaz

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 b_i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i}{H_i} (H_i \bar{e}_i) = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i}{H_i} \bar{a}_i.$$

A (4) képletbe  $v_i$  helyébe  $\frac{b_i}{H_i}$ -t téve

$$(5) \quad \operatorname{div} \bar{v} = \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{b_i}{H_i} D \right) =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (b_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (b_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (b_3 H_1 H_2) \right\}.$$

b) Ha a  $\bar{v}$  vektor a reciprok rendszerben, vagyis normális irányu összetevőkkel van megadva:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 c_i \bar{n}_i,$$

akkor előző eredményeinkből igen könnyen vehetjük le  $\text{div } \bar{v}$  ortogonális rendszerben való kiszámítására szolgáló képletünket. Ekkor ugyanis

$$\begin{aligned}\bar{v}\bar{n}_1 D &= D(c_1 \bar{n}_1^2 + c_2 \bar{n}_2 \bar{n}_1 + c_3 \bar{n}_3 \bar{n}_1) = Dc_1 \bar{n}_1^2 = Dc_1 \frac{|\bar{a}_2 \times \bar{a}_3|^2}{D^2} = \\ &= c_1 \frac{H_2^2 H_3^2}{D},\end{aligned}$$

mivel a feltételezett ortogonalitás miatt  $\bar{n}_2 \bar{n}_1 = \bar{n}_3 \bar{n}_1 = 0$ ,  $|\bar{a}_2 \times \bar{a}_3|^2 = |\bar{a}_2|^2 |\bar{a}_3|^2 = H_2^2 H_3^2$ . Hasonlóképpen adódik:

$$\bar{v}\bar{n}_2 D = c_2 \frac{H_3^2 H_1^2}{D}, \quad \bar{v}\bar{n}_3 D = c_3 \frac{H_1^2 H_2^2}{D},$$

míg végül, eredményeinket összefoglalva írhatjuk:

$$\begin{aligned}\text{div } \sum_{i=1}^3 c_i \bar{n}_i &= \frac{1}{|D|} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} & 0 \\ H_1^2 & 0 & 0 & \frac{1}{D} c_1 \\ 0 & H_2^2 & 0 & \frac{1}{D} c_2 \\ 0 & 0 & H_3^2 & \frac{1}{D} c_3 \end{vmatrix} = \\ (6) \quad &= \frac{1}{|D|} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{D} c_1 H_2^2 H_3^2 \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{D} c_2 H_3^2 H_1^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{1}{D} c_3 H_1^2 H_2^2 \right) \right\}.\end{aligned}$$

Anélkül, hogy ezt levezetnénk, felírjuk nem-ortogonális rendszer esetében a  $\text{div } \bar{v}$  kiszámítására szolgáló képletet:

$$(7) \quad \operatorname{div} \sum_{i=1}^3 c_i \bar{n}_i = \frac{1}{|D|} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \frac{1}{D} c_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \frac{1}{D} c_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \frac{1}{D} c_3 \end{vmatrix} \cdot (g_{ik} = \bar{a}_i \bar{a}_k) .$$

Fenti képleteink segítségével igen könnyen be lehet pl. látni, hogy az egységnyi pontszerű töltés elektrosztatikus tere divergenciamentes. Gömbi koordinátarendszer esetében ugyanis

$$\bar{E} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3} = \frac{\bar{a}_1}{R^2} ,$$

(lásd 6. fejezet a)), vagyis

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{1}{R^2 \sin u} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{R^2 \sin u}{R^2} \right) = 0 .$$

c) Külön foglalkozni szeretnénk a  $\Delta$  operátor (Laplace-operátor) megadásával, ill.

$$\Delta U = \nabla^2 U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U$$

felírásával általános görbevonalu, majd speciálisan gömbi- és hengerkoordinátarendszerben.

A  $\operatorname{grad} U$  vektort normális irányú összetevőkkel felírva

$$\operatorname{grad} U = \nabla U = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} \bar{n}_i = \frac{\partial U}{\partial q_1} \bar{n}_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \bar{n}_2 + \frac{\partial U}{\partial q_3} \bar{n}_3 .$$

(6) értelmében ortogonális rendszer esetében

$$(8) \quad \Delta U = \operatorname{div} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} \bar{n}_i = \frac{1}{|\bar{D}|} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} & 0 \\ H_1^2 & 0 & 0 & \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ 0 & H_2^2 & 0 & \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ 0 & 0 & H_3^2 & \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial q_3} \end{vmatrix},$$

$(H_i = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| = |\bar{a}_i|, i = 1, 2, 3),$  ill. (7) értelmében nem-ortogonális rendszer esetében:

$$(9) \quad \Delta U = \operatorname{div} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} \bar{n}_i = \frac{1}{|D|} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial q_3} \end{vmatrix},$$

ahol  $g_{ik} = \bar{a}_i \bar{a}_k, i, k = 1, 2, 3.$

Speciálisan gömbi koordináta-rendszer esetében tehát a 6. fejezet a) pontjában kiszámított  $|\bar{a}_i| = H_i (i = 1, 2, 3),$  ill.  $D = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3$  érték felhasználásával

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \Delta U &= \frac{1}{R^2 \sin u} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{R^2 \sin u} \frac{\partial U}{\partial R} \\ 0 & R^2 & 0 & \frac{1}{R^2 \sin u} \frac{\partial U}{\partial u} \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2 u & \frac{1}{R^2 \sin u} \frac{\partial U}{\partial v} \end{vmatrix} = \dots = \\
 &= \frac{1}{R^2 \sin u} \left\{ 2R \sin u \frac{\partial U}{\partial R} + R^2 \sin u \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \cos u \frac{\partial U}{\partial u} + \right. \\
 &\quad \left. + \sin u \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin u} \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

A 6. fejezet b) pontjának eredményeit felhasználva, hengerkoordináták esetében

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \Delta U &= \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \\ 0 & R^2 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = \dots = \\
 &= \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial U}{\partial R} + R \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + R \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Például gömbi koordinátarendszerben látható be legkönnyebben, hogy az

$$U = \frac{1}{|\vec{r}|}.$$

skalár-vektorfüggvény kielégíti a Laplace-egyenletet. Gömbi koordinátákban ugyanis (az előbbi jelölésekkel)

$$U = \frac{1}{R} ,$$

és így

$$\Delta U = \frac{1}{R^2 \sin u} \left( 2R \sin u \left( -\frac{1}{R^2} \right) + R^2 \sin u \left( \frac{2}{R^3} \right) \right) = 0.$$

### 9. A rotáció kiszámítása görbevonalu ortogonális koordinátszerben

A  $\bar{v}(\bar{r})$  vektortér  $P$  pontbeli rotációjának meghatározására a következő koordinátainvariáns definíciót adtuk meg:

$$[\text{rot } \bar{v}] = \lim_{(P)} \frac{\frac{\iint_F d\bar{f} \times \bar{v}}{V}}{V} = \lim_{(P)} \frac{-\frac{\iint_V \bar{v} \times d\bar{f}}{V}}{V} ,$$

ahol  $F$ -fel a  $P$  pontra rázsugorodó felületeket jelöltük, az ezen felületek által bezárt térrész térfogatát jelölte  $V$ , az  $F$  felületekről feltettük, hogy mérhető felszíniük és irányíthatók, az általuk bezárt térrész mérhető köbtartalma, a felületmenti integrálokat pedig kifelé irányított normálissal kellett számítani.

Bebizonyítottuk, hogy amennyiben  $\bar{v}(\bar{r})$  koordinátáinak parciális deriváltjai is folytonosak a  $P$  pont környezetében, a fenti határérték mindig létezik.

Számítsuk ki most ezt a határértéket speciális  $P$ -re rázsugorodó zárt felületek, görbevonalu hasábok esetében.

Legyen  $P(q'_1, q'_2, q'_3)$ , és  $P$  valamely  $H$  környezetében legyen  $\bar{r}(q_1, q_2, q_3)$  első és másodrendű parciális deriváltjaival,  $\bar{v}(\bar{r})$  pedig koordinátáinak parciális deriváltjaival együtt folytonos.

Jelentse  $K$  a tér azon pontjainak halmazát, melyekre

$$q'_1 \leq q_1 \leq q'_1 + \Delta q_1,$$

$$q'_2 \leq q_2 \leq q'_2 + \Delta q_2,$$

$$q'_3 \leq q_3 \leq q'_3 + \Delta q_3,$$

ahol  $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3$  már olyan kicsiny, hogy  $K \subset H$ .

A K tartományt határoló görbevonalu hasáb a 21. ábrán látható, a 8. fejezet (1) képletében meg is adtuk e görbevonalu hasábot határoló  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$  felületek egyenletét. E hasáb térfogatának közelítő értéke a 8. fejezet (2) formulájának értelmében

$$V \approx \left| \begin{matrix} [\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3] \\ (P) \end{matrix} \right| \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 = \left| \begin{matrix} (D) \\ (P) \end{matrix} \right| \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3,$$

míg a hasábot határoló  $F_1$  lapoknak a zárt térrészről kifelé mutató normálisai

$$\text{az } F_1 \text{ lap esetében } \bar{a}_2 \times \bar{a}_3 = \bar{n}_1 D = \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|^2} D, \text{ a } (q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3),$$

$$\text{az } F_4 \text{ lap esetében } -(\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) = -\bar{n}_1 D = -\frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|^2} D, \text{ a } (q'_1, q_2, q_3),$$

paraméterértékek mellett, az  $F_2$  és  $F_5$ , ill. az  $F_3$  és  $F_6$  lapok esetében pedig a felületi normális a fentiből ciklikus cserével nyerhető. Nyilvánvalóan fennáll:

$$\frac{\iint_{F_1} \bar{v} \times d\bar{f}}{V} = - \frac{\iint_{F_1} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_4} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_2} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_5} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_3} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_6} \bar{v} \times d\bar{f}}{V}.$$

Számítsuk ki a következő integrálokat:

$$\iint_{F_1} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_4} \bar{v} \times d\bar{f} = I$$

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 c_i \bar{n}_i \text{ esetében a } q_2, q_3 \text{ paramétersík megfelelő tartományát}$$

$$T \text{-vel jelölve: } T = \{(q_2, q_3): q'_2 \leq q_2 \leq q'_2 + \Delta q_2, q'_3 \leq q_3 \leq q'_3 + \Delta q_3\}$$

$$I = \iint_T \left\{ [c_2 \bar{n}_2 \times (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)]_{(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)} + [c_3 \bar{n}_3 \times (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)]_{(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)} \right\} dq_2 dq_3 + \iint_T \left\{ [c_2 \bar{n}_2 \times (-\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)]_{(q'_1, q_2, q_3)} + [c_3 \bar{n}_3 \times (-\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)]_{(q'_1, q_2, q_3)} \right\} dq_2 dq_3 =$$



$$\begin{aligned}
&= \iint_T \left\{ \left[ -c_2 \bar{a}_3 \right]_{(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)} + \left[ c_3 \bar{a}_2 \right]_{(q'_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)} + \right. \\
&\quad \left. + \left[ c_2 \bar{a}_3 \right]_{(q'_1, q_2, q_3)} - \left[ c_3 \bar{a}_2 \right]_{(q'_1, q_2, q_3)} \right\} dq_2 dq_3 \approx \\
&\approx \iint_T \left\{ - \left[ \frac{\partial (c_2 \bar{a}_3)}{\partial q_1} \right]_{(q'_1, q_2, q_3)} + \left[ \frac{\partial (c_3 \bar{a}_2)}{\partial q_1} \right]_{(q'_1, q_2, q_3)} \right\} \Delta q_1 dq_2 dq_3 \approx \\
&\approx \left\{ - \left[ \frac{\partial (c_2 \bar{a}_3)}{\partial q_1} \right]_{(P)} + \left[ \frac{\partial (c_3 \bar{a}_2)}{\partial q_1} \right]_{(P)} \right\} \Delta q_1 \iint_T dq_2 dq_3 = \\
&= \left[ - \frac{\partial (c_2 \bar{a}_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (c_3 \bar{a}_2)}{\partial q_1} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 .
\end{aligned}$$

A számolás során a következő átalakítást végeztük:

$$\bar{n}_2 \times (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) = \bar{n}_2 \times \bar{n}_1 D = \frac{\bar{a}_2}{|\bar{a}_2|^2} \times \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|^2} D = - \frac{\bar{a}_3}{|\bar{a}_3|} \frac{1}{|\bar{a}_2|} \frac{1}{|\bar{a}_1|} D = - \bar{a}_3,$$

$$\text{ill. } \bar{n}_3 \times (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) = \dots = \bar{a}_2, \quad \bar{n}_1 \times (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) = 0,$$

a közelítéseket pedig  $c_2 \bar{a}_3$  és  $c_3 \bar{a}_2$  és ezek parciális deriváltjainak feltételezett folytonossága miatt végezhetjük el.

Hasonlóképpen adódik:

$$\begin{aligned}
\iint_{F_2} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_5} \bar{v} \times d\bar{f} &\approx \left[ - \frac{\partial (c_3 \bar{a}_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (c_1 \bar{a}_3)}{\partial q_2} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 , \\
\iint_{F_3} \bar{v} \times d\bar{f} + \iint_{F_6} \bar{v} \times d\bar{f} &\approx \left[ - \frac{\partial (c_1 \bar{a}_2)}{\partial q_3} + \frac{\partial (c_2 \bar{a}_1)}{\partial q_3} \right]_{(P)} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 .
\end{aligned}$$

Eredményeinket összefoglalva tehát  $\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$  -mal rövidítve adódik

$$\begin{aligned}
 -\frac{\iint \bar{v} \times d\bar{f}}{V} &\approx \left( \frac{\frac{\partial(c_2 \bar{a}_3)}{\partial q_1} - \frac{\partial(c_3 \bar{a}_2)}{\partial q_1} + \frac{\partial(c_3 \bar{a}_1)}{\partial q_2} - \frac{\partial(c_1 \bar{a}_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(c_1 \bar{a}_2)}{\partial q_3} - \frac{\partial(c_2 \bar{a}_1)}{\partial q_3}}{|D|} \right)_{(P)} = \\
 &= \left( \frac{1}{|D|} \left\{ \frac{\partial c_2}{\partial q_1} \bar{a}_3 + c_2 \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial q_1} - \frac{\partial c_3}{\partial q_1} \bar{a}_2 - c_3 \frac{\partial \bar{a}_2}{\partial q_1} + \frac{\partial c_3}{\partial q_2} \bar{a}_1 + c_3 \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q_2} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial c_1}{\partial q_2} \bar{a}_3 - c_1 \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial q_2} + \frac{\partial c_1}{\partial q_3} \bar{a}_2 + c_1 \frac{\partial \bar{a}_2}{\partial q_3} - \frac{\partial c_2}{\partial q_3} \bar{a}_1 - c_2 \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q_3} \right\} \right)_{(P)} = \\
 &= \left( \frac{1}{|D|} \left\{ \bar{a}_1 \left( \frac{\partial c_3}{\partial q_2} - \frac{\partial c_2}{\partial q_3} \right) - \bar{a}_2 \left( \frac{\partial c_3}{\partial q_1} - \frac{\partial c_1}{\partial q_3} \right) + \bar{a}_3 \left( \frac{\partial c_2}{\partial q_1} - \frac{\partial c_1}{\partial q_2} \right) \right\} \right)_{(P)}
 \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy a tett folytonossági kikötések mellett fennáll

$$\frac{\partial \bar{a}_3}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1 \partial q_3} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_3 \partial q_1} = \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q_3},$$

ill. hasonlóképpen:

$$\frac{\partial \bar{a}_2}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial q_2} = \frac{\partial \bar{a}_2}{\partial q_3}.$$

Be lehet bizonyítani, hogy az okoskodás során végzett közelítéseknei elkövetett hibák a görbevonalu hasákok P-re való rázsugorodásakor, amikor is szűkséggképpen  $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3 \rightarrow 0$ , 0-hoz tartanak, és így előbbi

eredményünket determináns-alakban felírva adódik:

$$\text{rot } \bar{v} = \frac{1}{|D|} \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ahol  $\bar{v} = \sum_{i=1}^3 c_i \bar{n}_i$ , amit bizonyítani akartunk.

E képlet akkor is helyesen adja meg  $\text{rot } \bar{v}$  értékét, ha a rendszer nem ortogonális, ekkor azonban a képlet levezetése lényegesen bonyolultabb.

A fenti képletből a  $\text{rot } \bar{v}$  derékszögű koordinátás alakját szolgáltató ismert képlet azonnal adódik.

Gömbi koordináták esetében (a 6. fejezet a) pontjában használt jelölésekkel)

$$\text{rot } \bar{v} = \frac{1}{R^2 \sin u} \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (c_i = \bar{v} \bar{a}_i).$$

E képlet felhasználásával könnyen belátható az egységnyi pontszerű töltés elektrosztatikus terének rotációmentessége.

$$\bar{E} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3} = \frac{1}{R^2} \bar{a}_1$$

esetében ugyanis  $c_1 = \bar{E} \bar{a}_1 = \frac{1}{R^2}$ ,  $c_2 = \bar{E} \bar{a}_2 = 0$ ,  $c_3 = \bar{E} \bar{a}_3 = 0$

$$\text{rot } \bar{v} = \frac{1}{R^2 \sin u} \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{1}{R^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Hengerkoordináták esetében ugyancsak a 6. fejezet b) pontjának jelöléseivel:

$$\text{rot } \bar{v} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (c_i = \bar{v} \bar{a}_i).$$



## KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

### 10. Komplex számok

a) Ismeretes, hogy a geometriában és a fizikában milyen előnnyel jár a vektor fogalmának bevezetése és az a körülmény, hogy a vektorok között bizonyos műveletek: összeadás, kivonás, számmal való szorzás, skaláris és vektoriális szorzás, értelmezve vannak. Bizonyos kényelmetlenséget okoz mindenesetre az a körülmény, hogy a vektorok szorzásával kapcsolatos műveleti törvények elég lényegesen különböznek a számok szorzásának műveleti törvényeitől (a vektoriális szorzás nem kommutatív, vektorok szorzása nem asszociatív), az osztás műveletét pedig vektorok esetére nem is tudtuk értelmezni. Ezért szükséges, hogy a számokat és a vektorokat írásban egymástól gondosan megkülönböztessük.

Felmerülhet a gondolat, nem lehet-e vajon a vektorok szorzását úgy értelmezni, hogy annak műveleti törvényei minden tekintetben megegyezzenek a számok szorzásának műveleti törvényeivel. Kimutatható, hogy térbeli vektorokra ez nem lehetséges. Síkbeli vektorokra azonban lehetséges; hogy miképpen, azt az alábbiakban fogjuk megvizsgálni.

A valós számokat egy egyenes (a valós számok tengelye) irányába mutató síkvektorokkal is jellemezhetjük. A száme egyenes 0 pontjából az 1 pontba mutató vektort  $\vec{e}$ -vel jelölve és nem téve különbséget a száme egyenes pontjainak koordinátái és a hozzájuk tartozó helyzetvektorok között, pl.

$$3 = 3\vec{e},$$

$$-2 = (-2)\vec{e},$$

és ezen  $a\vec{e}$ ,  $b\vec{e}$ ,  $c\vec{e}$  vektorokra a következő műveleti szabályok érvényesek:

$$a\vec{e} + b\vec{e} = b\vec{e} + a\vec{e} \quad (\text{az összeadás kommutatív})$$

$$a\vec{e} + (b\vec{e} + c\vec{e}) = (a\vec{e} + b\vec{e}) + c\vec{e} = a\vec{e} + b\vec{e} + c\vec{e} \quad (\text{az összeadás asszociatív})$$

$$(a\vec{e})(b\vec{e}) = (b\vec{e})(a\vec{e}) \quad (\text{a szorzás kommutatív})$$

$$(a\vec{e})[(b\vec{e})(c\vec{e})] = [(a\vec{e})(b\vec{e})](c\vec{e}) \quad (\text{a szorzás asszociatív})$$

$$(a\vec{e})[(b\vec{e}) + (c\vec{e})] = (a\vec{e})(b\vec{e}) + (a\vec{e})(c\vec{e}) \quad (\text{a szorzás disztributív})$$

A számegyenes irányába mutató vektorokkal jellemezve a valós számokat, mivel valós számok szorzata, ill. hányadosa is valós szám, ezen vektorok szorzata megint az egyenes irányába mutató vektor (hányadosa ugyanígy). Minthogy továbbá az  $\bar{e}$  vektor az 1 valós számnak felel meg, azért a vele való szorzásra a következő szabály érvényes:

$$(1) \quad \bar{e} \cdot (a\bar{e}) = a\bar{e}, \quad \text{speciálisan } \bar{e} \cdot \bar{e} = \bar{e}.$$

Ha mármost általánosítani akarjuk a számok műveleti szabályait kielégítő ezen speciális vektorok (vagyis a valós számok) fogalmát, a következőképpen járhatunk el:

Tekintsünk egy síkot, ennek vektorait jelöljük a szokásos módon az  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ , stb. jellel. A vektorok összeadását és számmal való szorzását a szokott módon értelmezzük. A vektor hosszúságát most is a vektor abszolút értékének nevezzük.

Vegyünk fel a síkban két egymásra merőleges számegyenest, az egyiket az előbb értelmezett  $\bar{e}$  egységvektor legyen a tengelyen a 0 pontból az 1 pontba mutató vektor, a másikon a hasonlóképpen definiált egységvektort jelölje  $\bar{j}$ . Ezen egységvektorok segítségével a sík bármely  $\bar{v}$  vektora felírható

$$(2) \quad \bar{v} = a\bar{e} + b\bar{j}$$

alakban, ahol  $a$  és  $b$  valós számok. Speciálisan  $b = 0$  esetében a (2) vektor az  $\bar{e}$  egységvektorral jellemzett számegyenes irányába mutató vektort, vagyis az  $(a\bar{e}) = a$  valós számot jellemzi.

Vizsgáljuk meg, hogy lehetséges-e síkvektorok szorzását úgy értelmezni, hogy a számok szorzásához mindenben hasonló műveleti szabályokat kövessen. Ha ez lehetséges, akkor bármely két vektornak a szorzatát kiszámíthatjuk, mielőtt ismerjük az  $\bar{e}\bar{e}$ ,  $\bar{e}\bar{j}$ ,  $\bar{j}\bar{j}$  szorzatok eredményét. Ugyanis

$$(3) \quad (a\bar{e} + b\bar{j})(c\bar{e} + d\bar{j}) = ac(\bar{e}\bar{e}) + ad(\bar{e}\bar{j}) + bc(\bar{j}\bar{e}) + bd(\bar{j}\bar{j}) = ac\bar{e} + (ad+bc)(\bar{e}\bar{j}) + bd(\bar{j}\bar{j}),$$

mivel előbbi okoskodásunk értelmében

$$\bar{e}\bar{e} = \bar{e},$$

és a szorzás kommutativitását megkövetelve

$$\bar{e}\bar{j} = \bar{j}\bar{e}.$$

Az  $\bar{e}$  vektorral való szorzás változatlanul hagyta a  $\bar{v} = \bar{a}\bar{e}$  vektorokat (amelyekkel a valós számokat jellemezhetjük), célszerű ezt bármely más síkvektorral kapcsolatban is megkövetelnünk, vagyis legyen bármely (2) típusú síkvektorra

$$\bar{e}\bar{v} = \bar{v}\bar{e} = \bar{v},$$

speciálisan a  $\bar{j}$  vektor esetében

$$(4) \quad \bar{e}\bar{j} = \bar{j}\bar{e} = \bar{j}.$$

Az alábbiakban még a  $(\bar{j}\bar{j}) = \bar{j}^2$  szorzat értékét kell megállapítanunk.

E célból gondoljuk meg a következőket: a számok szorzásánál érvényes volt az a szabály, hogy a szorzat abszolút értéke egyenlő a tényezők abszolút értékének szorzatával. Ha ezt a szabályt a síkvektorok szorzásánál is fenn akarjuk tartani, akkor szükségképpen

$$|\bar{j}^2| = |\bar{j}|^2 = 1,$$

azaz  $\bar{j}^2$  is egységvektor kell, hogy legyen. Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$|\bar{e} + \bar{j}| = |\bar{e} - \bar{j}| = \sqrt{2},$$

(23. ábra), tehát egyrészt

$$|(\bar{e} + \bar{j})(\bar{e} - \bar{j})| = |\bar{e} + \bar{j}| |\bar{e} - \bar{j}| = \sqrt{2} \sqrt{2} = 2,$$

másrészt

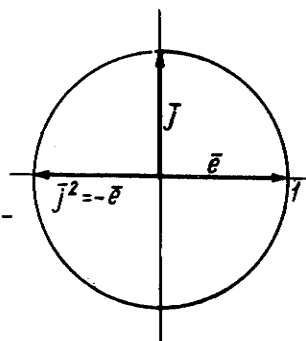
$$|(\bar{e} + \bar{j})(\bar{e} - \bar{j})| = |\bar{e}^2 - \bar{j}^2| = |\bar{e} - \bar{j}^2|,$$

és ezt előbbi eredményünkkel összevetve adódik:

$$|\bar{e} - \bar{j}^2| = 2.$$

Eredményünk azt jelenti, hogy a  $\bar{j}^2$  egységvektor végpontja egyrészt a kezdőpont körüli egységnyi sugarú kör kerületén, másrészt az  $\bar{e}$  vektor végpontjától 2 egységnyi távolságra fekszik, tehát szükségképpen  $-\bar{e}$ -vel egyenlő:

$$(5) \quad \bar{j}^2 = -\bar{e}.$$



23. ábra

A (3) szorzás tehát (4) és (5) figyelembevételével így írható:

$$\bar{u}\bar{v} = (a\bar{e}+b\bar{j})(c\bar{e}+d\bar{j}) = ac\bar{e} + (ad+bc)\bar{j} + bd(-\bar{e}) = (ac-bd)\bar{e} + (ad+bc)\bar{j}.$$

A (2) síkvektorok összeadása kommutatív és asszociatív:

$$\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u},$$

$$\bar{u} + (\bar{v}+\bar{w}) = (\bar{u}+\bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + \bar{v} + \bar{w},$$

ill. a fenti értelmezés szerinti szorzása kommutatív, asszociatív és disztributív:

$$\bar{u}\bar{v} = \bar{v}\bar{u},$$

$$\bar{u}(\bar{v}\bar{w}) = (\bar{u}\bar{v})\bar{w},$$

$$\bar{u}(\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u}\bar{v} + \bar{u}\bar{w},$$

amint az könnyű számolással igazolható.

Az asszociativitás fennállása pl. a következőképpen látható be:

$$\begin{aligned} (a\bar{e} + b\bar{j}) [(c\bar{e} + d\bar{j})(f\bar{e} + g\bar{j})] &= (a\bar{e} + b\bar{j}) [(cf - dg)\bar{e} + (df + cg)\bar{j}] = \\ &= (acf - adg - bdf - bcg)\bar{e} + (adf + acg + bcf - bdg)\bar{j}, \\ [(a\bar{e} + b\bar{j})(c\bar{e} + d\bar{j})](f\bar{e} + g\bar{j}) &= [(ac - bd)\bar{e} + (ad + bc)\bar{j}](f\bar{e} + g\bar{j}) = \\ &= (acf - bdf - adg - bcg)\bar{e} + (acg - bdg + adf + bcf)\bar{j}. \end{aligned}$$

E síkvektorok műveleti törvényei megegyeznek tehát a számok körében megismert műveleti törvényekkel. E vektorokkal úgy lehet számolni, ahogy azt a számokkal tettük. A későbbiekben ezért a fent értelmezett  $\bar{v}$  síkvektorokat komplex számoknak fogjuk nevezni. Az elnevezést indokolja, hogy e vektorok speciális esetként a valós számokat is megadják, a valós számfogalom általánosításai.

A valós számok és a számegyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés állt fenn. Hasonló a helyzet a komplex számok (e speciális  $\bar{v}$  síkvektorok) és a sík pontjai között. A koordináta-rendszer rögzítése után minden  $x\bar{e} + y\bar{j}$  komplex számnak az  $x\bar{e} + y\bar{j}$  vektorral, mint helyzetvektorral jellemzett P pont, és minden P pontnak egy, a ponthoz mutató  $x\bar{e} + y\bar{j}$  síkvektor, és ennek egy komplex szám felel meg. Mivel a síkbeli pontokat valós számokból álló rendezett számpárokkal



jellemezzük, a komplex számokat nemcsak síkvektorral, hanem a síkvektort helyzetvektorként véve fel, e vektor végpontjának koordinátaival, ill. az ezekből álló rendezett számpárral is megadhatjuk.

A síkot, amelynek pontjai és a komplex számok között a fenti kölcsönös egyértelmű megfeleltetést létesítettük, komplex számsíknak nevezzük.

Tekintettel arra, hogy az  $\bar{e}$  komplex szám a szorzásnál éppen úgy viselkedik, mint az 1 szám,  $\bar{e}$  helyett a továbbiakban mindenütt 1-et írunk, és mint szorzót szokás szerint elhagyjuk. Megállapodunk még abban is, hogy a  $\bar{j}$  komplex szám helyett is egyszerűen  $j$ -t írunk ( $j$  helyett szokás az irodalomban még  $i$ -t is írni), és a komplex számokat felülhuzás nélkül,  $z$ -vel jelöljük. A sík  $(x, y)$  pontjával jellemzett komplex szám, vagyis a koordináta-rendszer kezdőpontjából az  $(x, y)$  pontba mutató helyzetvektor:

$$z = x + jy.$$

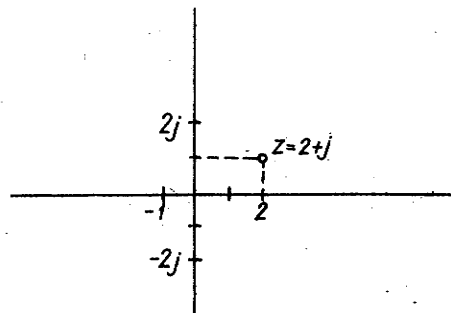
A komplex számsíknak egyik számegyenesén (amelyen az  $\bar{e}$  vektor fekszik) a  $z = a\bar{e} = a$  alaku valós számok helyezkednek el. Ezt a tengelyt valós tengelynek nevezzük. A komplex számsíkban felvett derékszögű koordináta-rendszer másik tengelyén, amelyen a  $j$  vektor fekszik, a  $z = bj$  alaku ún. tiszta képzetes számok helyezkednek el. Ezt a tengelyt képzetes tengelynek nevezzük (24. ábra).

A  $z = x + jy$  komplex szám valós részén az  $x$ , képzetes részén az  $y$  valós számot értjük és így jelöljük:

$$x = \operatorname{Re} z,$$

$$y = \operatorname{Im} z.$$

A komplex szám valós és képzetes részével történő



24. ábra

$$z = x + jy$$

alaku megoldását a komplex szám algebrai, vagy kanonikus alakban történő megadásának nevezzük. Később a komplex számok megadásának más módszereivel is meg fogunk ismerkedni.

b) Komplex számok esetében a négy alapszámítás különösebb nehézség nélkül elvégezhető.

Komplex számok összeadására, kivonására, szorzására vonatkozóan ui. a következő mondható:

$$z_1 = x_1 + jy_1, \quad z_2 = x_2 + jy_2$$

esetében

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

vagyis a komplex számokkal e műveleteknél úgy számolhatunk, mint a valós számokkal, csak a  $j^2 = -1$  egyenlőségre kell tekintettel lennünk. Két komplex szám összegét, ill. különbségét mint a nekik megfelelő síkvektorok összegét, ill. különbségét is megszerkeszthetjük. Pl.:

$$(2 + 3j) + (-5 + 2j) = -3 + 5j,$$

$$(-1 - 5j) - (3 - 12j) = -4 + 7j,$$

$$(3 - 4j)(2 + 5j) = 6 - 8j + 15j - 20j^2 = 26 + 7j.$$

A komplex számok osztásának tárgyalása előtt célszerű még egy új fogalommal megismerkednünk:

### Definíció

Két komplex számot, amelyek egymástól csak képzetes részük előjelében különböznek, konjugált komplex számoknak nevezünk.

A  $z = x + jy$ , komplex szám konjugáltja (jelben  $\bar{z}$ ) tehát

$$\bar{z} = x - jy.$$

Konjugált komplex számok összege és szorzata mindig valós szám:

$$z + \bar{z} = 2x,$$

$$(z - \bar{z}) = j 2y,$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + xyj - xyj - y^2 j^2 = x^2 + y^2.$$

Mivel  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ , a vektorokhoz hasonlóan a  $z$  komplex számot megadó síkvektor hosszúságának mérőszámát  $z$  abszolút érté-

kének nevezve és  $|z|$ -kel jelölve, fenti összefüggéseink még így is írhatók:

$$(6) \quad \frac{z + \bar{z}}{2} = \operatorname{Re} z,$$

$$(7) \quad \frac{z - \bar{z}}{2j} = \operatorname{Im} z,$$

$$(8) \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Komplex számok osztására vonatkozóan mármost a következő mondható:

$$z_1 = x_1 + jy_1, \quad z_2 = x_2 + jy_2$$

esetén  $z_1$ -nek  $z_2$ -vel való osztását úgy végezzük el, hogy az adódó tört számlálóját és nevezőjét a nevező konjugáltjával beszorozva az így adódó valós nevezőjű törtben a számlálót tagonként elosztjuk a valós nevezővel:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Két komplex szám osztását tehát mindig el tudjuk végezni, feltéve, hogy az osztó nem 0. Ha ui.  $z_2 = x_2 + jy_2 \neq 0$ , akkor  $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$ , s így fent a jobboldalon álló komplex számnak van értelme, és könnyű számolással igazolható, hogy e számnak  $x_2 + jy_2$ -vel való szorzata éppen  $x_1 + jy_1$ . Pl.

$$\frac{2 + 3j}{5 - j} = \frac{(2 + 3j)(5 + j)}{(5 - j)(5 + j)} = \frac{10 - 3 + (2 + 15)j}{25 + 1} = \frac{7}{26} + \frac{17}{26}j.$$

A  $z = x + jy$  komplex szám  $n$ -edik hatványát ( $n$  pozitív egész szám) a binomiális tétel alkalmazásával számíthatjuk ki (kombinatorikus utón a binomiális tételnek komplex számokra is érvényes bizonyítás adható):

$$z^n = (x + jy)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (jy)^{n-k},$$

ahol könnyen igazolható módon

$$j^{4k+1} = j,$$

$$j^{4k+2} = j^2 = -1,$$

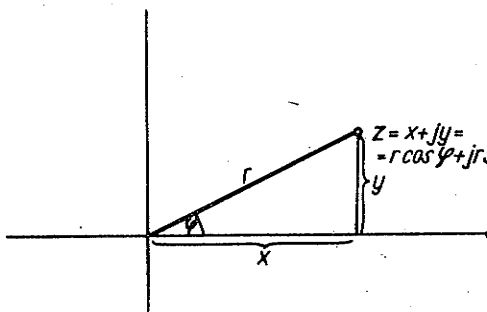
$$j^{4k+3} = j^3 = -j,$$

$$j^{4k+4} = j^4 = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Pl.

$$\begin{aligned} (2 - 3j)^4 &= \binom{4}{0} 2^0 (-3j)^4 + \binom{4}{1} 2^1 (-3j)^3 + \binom{4}{2} 2^2 (-3j)^2 + \\ &+ \binom{4}{3} 2^3 (-3j)^1 + \binom{4}{4} 2^4 = \\ &= 81 + 216j - 216 - 96j + 16 = -119 + 120j. \end{aligned}$$

c) Láttuk, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a komplex számsík pontjai és a komplex számok között. A komplex számsík pontjait azonban nemcsak derékszögű, hanem polárkoordinátákkal is jellemezhetjük. Ezen polárrendszer kezdőpontját a valós és képzetes tengely metszéspontjába, a polártengelyt pedig a valós tengely pozitív felére helyezve (25. ábra) az  $(x, y)$  számpárral, mint derékszögű koordinátákkal jellemzett pont polárkoordinátái  $r, \varphi$ , melyekre



25. ábra

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(Ezen két összefüggés helyett szokás rövidebben  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ , ill.  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$  -et is írni, ekkor azonban minden esetben még külön meg kell gondolnunk, hogy  $\arctg \frac{y}{x}$ , vagy  $\pi + \arctg \frac{y}{x}$  szolgáltatja-e helyesen az  $(x, y)$  pont polárszögét.)

Másrészt az  $x$  és  $y$  derékszögű koordinátákat a pont  $r, \varphi$  polárkoordinátáival az

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (*)$$

összefüggés kapcsolja össze, és itt  $r$  nem más, mint az  $(x, y)$  ponthoz mutató vektor, vagyis a  $z$  komplex szám abszolút értéke,  $r = |z|$ ,  $\varphi$  pedig a  $z$  komplex számot megadó vektornak a valós tengellyel bezárt szöge. E szöget a komplex szám arkuszának (vagy argumentumának) nevezzük és így jelöljük:

$$\varphi = \arg z.$$

Az algebrai alakban megadott  $z = x + jy$  komplex számba a  $(*)$  összefüggéseket behelyettesítve adódik tehát:

$$\begin{aligned} z &= x + jy = r \cos \varphi + j r \sin \varphi = \\ z &= r(\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad \text{ahol } r = |z|, \quad \varphi = \arg z. \end{aligned} \quad (9)$$

Ez utóbbi alakot a komplex szám trigonometrikus alakjának nevezzük. Egy komplex szám trigonometrikus alakját tehát a komplex szám abszolút értékének és arkuszának ismeretében tudjuk felírni. Ezek az adatok a komplex szám valós és képzetes részének ismeretében könnyen meghatározhatók, amint arra a c) pont elején már kitértünk.

Adot  $r = |z|$  és  $\varphi = \arg z$  értékekhez egy és csakis egy komplex szám tartozik,  $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ , egy  $z$  komplex számnak azonban nemcsak  $\arg z = \varphi$ , hanem minden ettől  $2\pi$  többszörösében különböző szög is arkusza:

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r(\cos(\varphi + 2\pi) + j \sin(\varphi + 2\pi)) = \\ &= r(\cos(\varphi + 2k\pi) + j \sin(\varphi + 2k\pi)), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Trigonometrikus alakban megadott komplex számok szorzása, osztása és hatványozása igen egyszerű eredményre vezet:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$$

esetében

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + j(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned}$$

azaz

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - j \sin \varphi_2)}{r_2^2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + j(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \end{aligned}$$

azaz

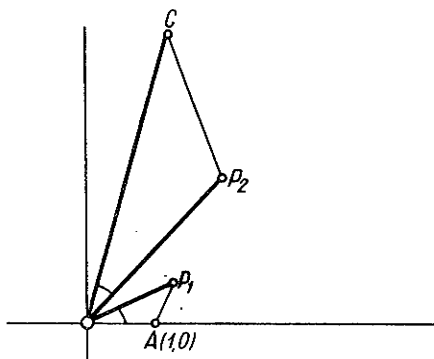
$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Szavakban: két komplex szám szorzata az a komplex szám, amelynek abszolút értéke a két tényező abszolút értékének szorzata, arkusza pedig a két tényező arkuszának összege; két komplex szám hányadosa az a komplex szám, amelynek abszolút értéke (az osztást tört alakjában írva fel) a számláló és nevező abszolút értékének hányadosa, arkusza pedig a számláló és nevező arkuszának különbsége.

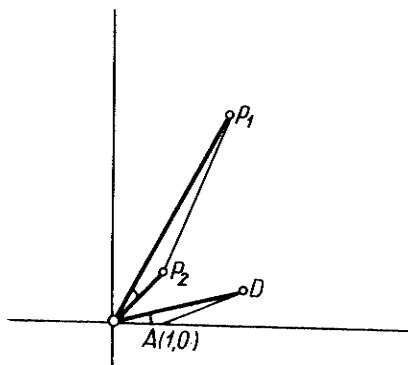
E szabályok segítségével könnyen meg is szerkeszthető  $z_1$  és  $z_2$  ismeretében a  $z_1 \cdot z_2$ , ill. a  $\frac{z_1}{z_2}$  komplex szám. (26. ill. 27. ábra).

Ha ugyanis a komplex számsíkban  $z_1$ , ill.  $z_2$  az  $O(0,0)$  pontból a  $P_1$ , ill.  $P_2$  pontba mutató vektorok, akkor a valós tengely egység-pontját  $A$ -val jelölve:  $A = (1,0)$  az  $OAP_1$  háromszöghöz hasonló

$OP_2C$  háromszög  $OC$  oldala a  $z_1 z_2$  komplex számnak (megfelelő oldalak  $OA$  és  $OP_2$ , ill.  $OP_1$  és  $OC$ ), míg az  $OP_2P_1$  háromszöghöz hasonló  $OAD$  háromszög  $OD$  oldala a  $\frac{z_1}{z_2}$  komplex számnak felel meg (megfelelő oldalak a hasonló háromszögekben  $OP_1$  és  $OD$ , ill.  $OP_2$  és  $OA$ ).



26. ábra



27. ábra

A hatványozás szabálya a szorzás szabályának ismételt alkalmazásával adódik:

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

esetében

$$(10) \quad z^n = r^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi) \quad (n \text{ pozitív egész szám}).$$

E képletet Moivre képletének is nevezik. Ennek értelmében

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg z^n = n \arg z.$$

A  $z$  komplex számból történő gyökvonás műveletét a következőképpen értelmezzük:

$\sqrt[n]{z}$  ( $n$  pozitív egész szám) azokat a  $w$  komplex számokat jelenti, amelyekre

$$w^n = z.$$

Ha

$$|w| = \varrho, \quad \text{arc } w = \psi, \quad |z| = r, \quad \text{arc } z = \varphi,$$

akkor a (10) Moivre-formula értelmében

$$|w^n| = |w|^n = \varrho^n = r = |z|, \quad \text{tehát } \varrho^n = r,$$

$$\text{arc } w^n = n \text{ arc } w = n\psi = \text{arc } z,$$

mivel azonban a  $z$  komplex számnak nemcsak  $\varphi$ , hanem  $\varphi + 2k\pi$  is arkusza, a  $w^n = z$  egyenlőségből a két komplex szám arkuszára nézve a következő összefüggésre jutunk:

$$n\psi = \varphi + 2k\pi.$$

(Másképpen megfogalmazva, abból, hogy két komplex szám egyenlő, csak az következik, hogy arkuszaik egymástól csak  $2\pi$  egész számú többszörösében különbözhetnek.)

Fenti összefüggéseinkből következik:

$$|w| = \varrho = \sqrt[n]{r},$$

$$\text{arc } w = \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ha tehát

$$z = r (\cos \varphi + j \sin \varphi),$$

akkor

$$(11) \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right).$$

A (11) formula értelmében a  $z$  komplex számnak látszólag végtelen sok  $n$ -edik gyöke van, hiszen  $k$  tetszőleges egész szám lehet. A  $\cos x$  és  $\sin x$  függvények periodikussága miatt azonban e végtelen sok komplex gyök között csak  $n$  számú lesz egymástól különböző.  $k = p$  és  $k = p + n$ -re ugyanis

$$\cos \frac{\varphi + 2\pi(p+n)}{n} = \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi p}{n} + 2\pi \right) = \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi p}{n} \right),$$

$$\sin \frac{\varphi + 2\pi(p+n)}{n} = \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi p}{n} + 2\pi \right) = \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi p}{n} \right),$$



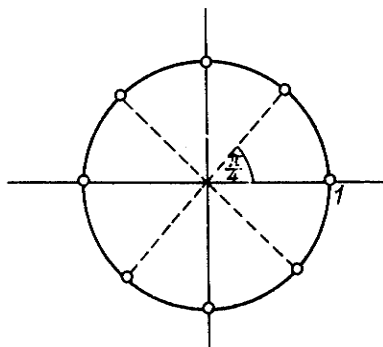
bármely egész  $p$  értékre, vagyis  $k$ -nak pl. a  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$  értéket adva,  $\sqrt[n]{z}$  minden különböző értékét megkapjuk. E gyököket a komplex számsíkon ábrázolva azok a  $z = 0$  középpontu  $\sqrt[n]{r}$  sugaru körvonalon helyezkednek el és egy szabályos  $n$ -szög csúcspontjai lesznek.

Speciálisan a  $z = 1$  szám  $n$ -edik gyökei az ún. egységgyökök

$$\xi_n = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 2k\tilde{\pi} + j \sin 2k\tilde{\pi}} = \begin{cases} \cos 0 + j \sin 0 = 1, \\ \cos \frac{2\tilde{\pi}}{n} + j \sin \frac{2\tilde{\pi}}{n}, \\ \cos \frac{4\tilde{\pi}}{n} + j \sin \frac{4\tilde{\pi}}{n}, \\ \vdots \\ \cos \frac{2(k-1)\tilde{\pi}}{n} + j \sin \frac{2(k-1)\tilde{\pi}}{n}. \end{cases}$$

$$= \cos \frac{2k\tilde{\pi}}{n} + j \sin \frac{2k\tilde{\pi}}{n} =$$

E gyököket  $n = 8$  esetében a 28. ábra szemlélteti.



28. ábra

### Példák

$$1^o \quad z_1 = 3 - 4j, \quad z_2 = -1 - 7j.$$

$$|z_1 z_2| = ?$$

$$\arg z_1 z_2 = ?$$

Mivel

$$z_1 = \sqrt{9 + 16} = 5, \quad \arg z_1 = -\arctan \frac{4}{3} \approx -53,13^\circ,$$

$$z_2 = \sqrt{1 + 49} \approx 7.07, \quad \arg z_2 = \tilde{\kappa} + \arctan 7 \approx 261,87^\circ,$$

adódik:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \approx 35,4, \quad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \approx 208,74^\circ \approx 3,64$$

(A példát természetesen úgy is megoldhattuk volna, hogy algebrai alakban elvégezzük a  $z_1 z_2$  szorzást, majd az így adódó komplex számnak számítsuk az abszolút értékét és az arkuszát.)

$$2^\circ \quad z_1 = 2 + 5j, \quad z_2 = -4 + 3j.$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = ?$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = ?$$

Az előbbihez hasonlóan okoskodva

$$|z_1| = \sqrt{4 + 25} \approx 5,39, \quad \arg z_1 = \arctan \frac{5}{2} \approx 68,2^\circ,$$

$$|z_2| = \sqrt{16 + 9} = 5, \quad \arg z_2 = \tilde{\kappa} - \arctan \frac{3}{4} \approx 180^\circ - 36,9^\circ = 143,1^\circ$$

vagyis

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| \approx \frac{5,39}{5} \approx 1,08, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} \approx 68,2^\circ - 143,1^\circ = -74,9^\circ \approx -1,31.$$

(A feladatot úgy is megoldhattuk volna, hogy kiszámítjuk a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \dots = \frac{7}{25} - j \frac{26}{25}$$

komplex számot, majd ennek határozzuk meg az abszolút értékét és az arkuszát.)

$$3^\circ \quad z = 3 - j,$$

$$\sqrt{z} = ?$$

Mivel

$$z = \sqrt{9 + 1} \approx 3,17$$

$$\arg z = - \arctan \frac{1}{3} \approx -18,4^\circ,$$

és így

$$z \approx 3,17 (\cos(-18,4^\circ + k360^\circ) + j \sin(-18,4^\circ + k360^\circ)),$$

$$\sqrt{z} \approx \sqrt{3,17} \left( \cos \frac{-18,4^\circ + k360^\circ}{2} + j \sin \frac{-18,4^\circ + k360^\circ}{2} \right) \approx$$

$$\approx \begin{cases} 1,78 (\cos(-9,2^\circ) + j \sin(-9,2^\circ)), \\ 1,78 (\cos 170,8^\circ + j \sin 170,8^\circ). \end{cases}$$

Az adódó két gyök csak előjelben különbözik egymástól, mivel  $\cos(-9,2^\circ) = \cos 9,2^\circ = -\cos 170,8^\circ$  és  $\sin(-9,2^\circ) = -\sin 9,2^\circ = -\sin 170,8^\circ$ .

## 11. Komplex tagu sorozat és sor

### a) Definíció

A

$$(1) \quad z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

komplex tagu számsorozatról azt mondjuk, hogy határértéke a  $z_0$  komplex szám, ha

$$\lim |z_n - z_0| = 0.$$

Az (1) számsorozat  $z_0$ -hoz való konvergenciáját a valós számok körében alkalmazott módon kétféleképpen is jelölhetjük:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0,$$

ill.

$$z_n \rightarrow z_0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Mivel az (1) számsorozat tagjait és a  $z_0$  számot a komplex szám-sík megfelelő pontjaival szemléltethetjük, és  $|z_n - z_0|$  a  $z_n$  és  $z_0$  komplex számokat ábrázoló pontok távolsága a síkon, a fent megadott definíció az  $n$ -dimenziós tér pontsorozatainak konvergenciájára adott definícióból speciális esetként adódik (Matematika I/2. jegyzet 27.) fejezet). Ebből következik, hogy a

$$z_n = x_n + jy_n \quad (x_n \text{ és } y_n \text{ valós, } n = 0, 1, \dots)$$

jelöléssel a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$$

• reláció egyenértékű a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$$

relációk egyidejű fennállásával.

A komplex számsíkban a  $z_0$  középpontu  $\varepsilon$  sugaru körlemez (két-dimenziós gömböt), vagyis a  $z_0$  pont  $\varepsilon$  sugaru környezetét a

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség jellemzi.

Az előrebocsátott definíció birtokában egyszerűbb alakban mondhatók ki az  $n$ -dimenziós tér konvergens pontsorozataira a Matematika I/2. jegyzet 27. fejezetében megfogalmazott fontos tételek:

### I. Tétel

A  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  sorozatra  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ , ha tetszőleges  $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan  $N = N(\varepsilon)$ , hogy a  $z_0$  pont  $\varepsilon$  sugaru környezetébe a sorozat minden olyan  $z_n$  tagja beleesik, melynél  $n > N$ :

$$|z_n - z_0| < \varepsilon, \text{ valahányszor } n > N.$$

### II. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium)

A  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha tetszőleges  $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan  $N = N(\varepsilon)$ , hogy  $n, m > N(\varepsilon)$  esetében

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

### Definíció

A  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  komplex tagu számsorozat korlátos, ha meg-  
adható egy olyan valós  $K$  szám, hogy a sorozat minden tagja benne fe-  
küldjék a  $z = 0$  körüli  $K$  sugaru körlemezben, vagyis

$$|z_n| < K, \quad n = 1, 2, \dots$$

### III. Tétel (Bolzano-Weierstrass-tétel)

Korlátos komplex tagu számsorozatból kiválasztható konvergens rész-  
sorozat.

A valós számokra érvényes hasonló állításokhoz hasonló módon látha-  
tók be a határérték következő egyszerű tulajdonságai:

Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$$

és ha  $b \neq 0$ , akkor még

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

b) Valós tagu sorozatok tárgyalásánál azokat a számsorozatokat, ame-  
lyek nem tettek eleget a konvergencia valamely szükséges és elégséges fel-  
tételének, divergens számsorozatoknak neveztük. A divergens számsorozat-  
okon belül külön foglalkoztunk azonban az un. "plusz végtelenhez" vagy  
"minusz végtelenhez" tartó számsorozatokkal. Ilyen sorozatok esetében a  
valós számok szemléltetésére szolgáló számegyeneset kiegészítettük a  
 $+\infty$  (vagy  $-\infty$ ) ponttal, e pont környezeteinek a  $(K, +\infty)$ , (vagy  $(-\infty, -K)$ )  
intervallumokat nevezve, az előbbi I. Tétel mintájára mondhatjuk:

$x_n \rightarrow +\infty$ , ha tetszőleges  $K > 0$  esetében megadható olyan  $N$  szám, hogy  $x_n > K$ , ha már  $n > N$  (az  $x_n$  számok  $n > N$  esetén már mind beleesnek a  $(K, +\infty)$  intervallumba).

$x_n \rightarrow -\infty$ , ha tetszőleges  $K > 0$  esetében megadható olyan  $N$  szám, hogy  $x_n < -K$ , ha már  $n > N$ .

Komplex tagu  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  számsorozatok esetében is, ha a sorozat nem konvergens, divergensnek mondjuk. A divergens számsorozatok közül azonban most nem tudjuk megkülönböztetni azokat, amelyek  $+\infty$ -hez, és amelyek  $-\infty$ -hez tartanak, hanem abban állapodunk meg, hogy (előjelre való tekintet nélkül) végtelenhez tartónak mondjuk azokat a számsorozatokot, amelyekben  $|z_n| \rightarrow \infty$ .

Szemléletesen a következő mondható: egészítsük ki a komplex számsíkot a végtelen távoli ponttal (ennek felel meg a végtelen abszolút értékű komplex szám). A végtelen távoli pont környezetének nevezzük azon  $z$  komplex számok halmazait, melyekre  $|z| > K$ , vagyis amelyek a  $z = 0$  középpontu  $K$  sugaru körvonalon kívül helyezkednek el.

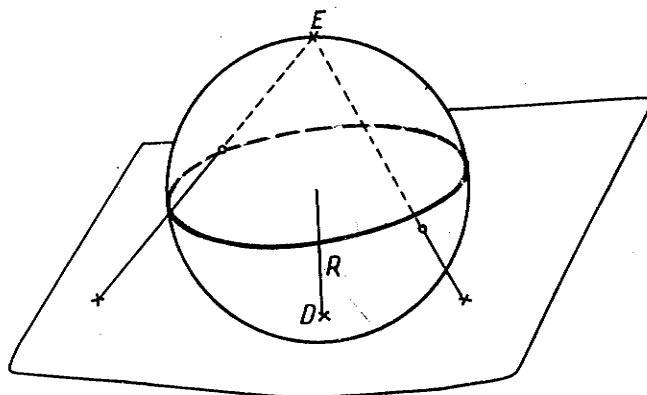
Akkor mondjuk tehát, hogy

$$z_n \rightarrow \infty, \quad \text{ill.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty,$$

ha a  $\infty$  pont minden környezetéhez megadható olyan  $N$ , hogy a számsorozat  $N$ -nél nagyobb indexű tagjai valamennyien beleesnek a végtelen távoli pont adott környezetébe.

Jól szemléltethetők a konvergens és végtelenhez tartó (divergens) komplex tagu számsorozatok az ún. komplex számgömbön.

Egészítsük ki a komplex számsíkot a végtelen távoli ponttal. Érintse a komplex számsíkot egy  $R$  sugaru gömb a sík tetszőleges pontjában. Legyen ez a pont egyszerűség kedvéért a  $z = 0$  pont. A gömb ezen  $D$  érintkezési pontjával ellentétes pontja legyen  $E$ . Létesítsünk egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a gömb és a komplex számsík pontjai között úgy, hogy az  $E$  pontból kiinduló félegyeneseink által a gömbfelületből, ill. a komplex számsíkból kimetszett pontokat feleltessük meg egymásnak (sztereografikus projekció). Ezáltal a  $z = 0$  pontnak a  $D$  pontot ("déli pólus"), míg  $E$ -nek ("északi pólus") a végtelen távoli pontot feleltettük meg (29. ábra). A sík bármely  $z_0$  pontját tekintve ( $z_0$  a végtelen távoli pont is lehet)  $z_0$  környezetei a gömbfelület pontjaiból álló



29. ábra

nyílt halmazok (tartományok),  $z = 0$  és  $z = \infty$  környezetei speciálisan gömbsüvegek lesznek, sőt belátható, hogy minden körlemez képe a gömbön gömbsüveg.

Ebben a szemléltetésben a konvergencia és a végtelenhez tartó (és így divergencia) komplex tagú sorozatok azonos módon jellemezhetők a következő értelemben:

Ha a  $z$ -síkon  $z_n \rightarrow z_0$ , akkor a  $z_n$ -eknek megfelelő gömbi pontok tartanak a  $z_0$ -nak megfelelő gömbi ponthoz, és ez akkor is igaz, ha  $z_0 = \infty$ .

Komplex  $z$  esetén is érvényes, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0, \quad \text{ha } 0 < |z| < 1,$$

illetve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \infty, \quad \text{ha } |z| > 1.$$

$0 < |z| < 1$  esetében ugyanis tetszőleges  $\varepsilon > 0$  mellett

$$|z^n - 0| = |z^n| = |z|^n < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N = \frac{\ln \varepsilon}{\ln |z|},$$

ill. tetszőleges  $K > 0$  mellett  $|z| > 1$  esetében

$$|z^n| = |z|^n > K, \quad \text{ha már } n > \frac{\ln K}{\ln |z|}.$$

c) A

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

komplex tagu sor konvergenciáját és összegét is a valós tagu sorok mintájára értelmezhetjük.

### Definíció

A  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  sor konvergens, ha az

$$s_n = \sum_{k=1}^n z_k$$

részletösszegek sorozata konvergens, és ekkor a sor összegén a  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  határértéket értjük.

A valóshoz hasonlóan látható be pl., hogy az

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

geometriai sor  $|z| < 1$  esetében konvergens, és összege  $\frac{1}{1-z}$ .

### Definíció

A  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  sor abszolút konvergensnek mondjuk, ha a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$$

sor konvergens.

Mivel a  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$  sor valós, pozitív tagu sor, a komplex tagu sorok abszolút konvergenciájának megállapítására használható a pozitív tagu (valós) sorokra érvényes konvergencia-kritériumok bármelyike (lásd Matematika I/2. jegyzet 19. fejezet).

A valóshoz hasonlóan látható be, hogy komplex tagu sorok esetében is érvényes az az állítás, hogy az abszolút konvergens sorok konvergensnek, hogy abszolút konvergens sorokban a tagok sorrendjét megváltoztathatjuk, ill. két abszolút konvergens sort szabad tagonként összeszorozni.



Így pl. a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

sor (melynek összege valós  $z$  esetében  $e^z$ ) tetszőleges komplex  $z$  esetében abszolút konvergens, hiszen

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!}$$

és a valós tagu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z^k}{k!} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

sor konvergens (összege  $e^{|z|}$ ).

Kézenfekvő megállapodni abban, hogy a  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  sor összegét komplex  $z$  esetén is  $e^z$ -vel jelöljük. Ez annál is jogosultabb, mert itt is érvényben marad a közös alapu hatványok szorzására vonatkozó

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

szabály. Ha ugyanis az

$$e^{z_1} = 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots + \frac{z_1^n}{n!} + \dots$$

és az

$$e^{z_2} = 1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \dots + \frac{z_2^n}{n!} + \dots$$

sorokat úgy szorozzuk össze, hogy azon tagokat gyűjtjük egybe, melyekben  $z_1$  és  $z_2$  kitevője együttvéve  $n$  (a sorok abszolút konvergens volta miatt ez megtehető), akkor ezek a tagok ilyen alakúak:

$$\begin{aligned} & \frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!} \frac{z_2}{1!} + \frac{z_1^{n-2}}{(n-2)!} \frac{z_2^2}{2!} + \dots + \frac{z_1}{1!} \frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z_2^n}{n!} = \\ & = \sum_{k=0}^n \frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!} \frac{z_2^k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k. \end{aligned}$$

Mivel a binomiális tétel komplex számokra is érvényes, a tételt felhasználva írhatjuk:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k = (z_1 + z_2)^n,$$

így tehát

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2},$$

amint állítottuk.

Az előzőkhöz hasonlóan látható be, hogy az

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots$$

és a

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots$$

sorok minden komplex  $z$  esetében abszolút konvergensek, s minthogy összegük valós  $z$  esetében  $\cos z$ , ill.  $\sin z$ , azért megállapodunk abban, hogy e sorok összegét komplex  $z$  esetében is ugyanugy jelöljük, vagyis:

$$(3) \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$(4) \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Könnyű továbbá meggyőződni arról, hogy

$$\begin{aligned} e^{jz} &= 1 + \frac{jz}{1!} + \frac{(jz)^2}{2!} + \frac{(jz)^3}{3!} + \frac{(jz)^4}{4!} + \frac{(jz)^5}{5!} + \dots = \\ &= 1 + j \frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - j \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + j \frac{z^5}{5!} - \dots = \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots\right) + j \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots\right) = \\ &= \cos z + j \sin z. \end{aligned}$$

Érvényes tehát a következő összefüggés:

$$(5) \quad e^{jz} = \cos z + j \sin z.$$

Ezt az összefüggést Euler-féle relációnak nevezik.

A  $\cos z$  és  $\sin z$  értelmezésére szolgáló végtelen sorokból (lásd (3) és (4)) rögtön látszik, hogy

$$\cos(-z) = \cos z,$$

$$\sin(-z) = -\sin z,$$

és így az (5) összefüggést  $z$  helyett  $(-z)$ -re írva fel:

$$(6) \quad e^{-jz} = \cos z - j \sin z.$$

(5) -höz (6) -ot hozzáadva és 2 -vel osztva, ill. (5) -ből (6) -ot levonva és  $2j$  -vel osztva a

$$(7) \quad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2},$$

illetve

$$(8) \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

képleteket nyerjük, melyeket ugyancsak Euler-relációknak, ill.  $\cos z$  és  $\sin z$  exponenciális alakját megadó képleteknek nevezzük. Ezek a képletek indokolják meg végső fokon a trigonometrikus és hiperbolikus függvények között érvényes sok analógiát.

A (7) és (8) képletek alkalmazásaként igazoljuk, hogy a valós számok körében fennálló ún. "addíciós képletek" komplex  $z$  esetében is érvényesek. Pl.

$$\begin{aligned} \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \frac{e^{jz_1} - e^{-jz_1}}{2j} \cdot \frac{e^{jz_2} + e^{-jz_2}}{2} + \\ &+ \frac{e^{jz_1} + e^{-jz_1}}{2} \cdot \frac{e^{jz_2} - e^{-jz_2}}{2j} = \\ &+ \frac{e^{j(z_1+z_2)} - e^{j(z_2-z_1)} + e^{j(z_1-z_2)} - e^{-j(z_1+z_2)}}{4j} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{j(z_1 + z_2)} + e^{j(z_2 - z_1)} - e^{j(z_1 - z_2)} - e^{-j(z_1 + z_2)}}{4j} = \\
& = \frac{e^{j(z_1 + z_2)} - e^{-j(z_1 + z_2)}}{2j} = \sin(z_1 + z_2) .
\end{aligned}$$

Hasonlóképpen látható be, hogy

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 .$$

Az (5) -ben felírt Euler-formulát felhasználva a

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

trigonometrikus alakban megadott komplex számot még a következő alakban is felírhatjuk:

$$(9) \quad z = r e^{j\varphi} ,$$

ahol

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z .$$

A (9) -ben felírt alakot a  $z$  komplex szám exponenciális alakjának nevezzük.

A szorzás, osztás, hatványozás és gyökvonás műveletét exponenciális alakban megadott komplex számokkal a következőképpen végezhetjük el:

$$z_1 = r_1 e^{j\varphi_1} , \quad z_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$$

esetében

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} ,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} ,$$

$$(z_1)^n = (r_1)^n e^{nj\varphi_1}$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} e^{j(\varphi_1 + 2k\pi)/n} = \sqrt[n]{r_1} e^{j\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}}.$$

Az exponenciális alakban történő felírással azonnal látszik, milyen kapcsolat áll fenn két komplex szám és azok szorzatának, hányadosának, ill. hatványának és gyökének abszolút értéke és arkusza között.

Az exponenciális írásmód segítségével könnyű az alábbi összefüggéseket is belátnunk:

$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},$$

$$|\bar{z}| = |z|,$$

$$\operatorname{arc} \bar{z} = -\operatorname{arc} z,$$

míg az algebrai alak segítségével igazolható, hogy

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.$$

#### Példák

$$i^0 \quad z = j,$$

$$\sqrt[3]{z} = ?$$

Mivel

$$|z| = |j| = 1, \quad \operatorname{arc} z = \operatorname{arc} j = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

azért tehát

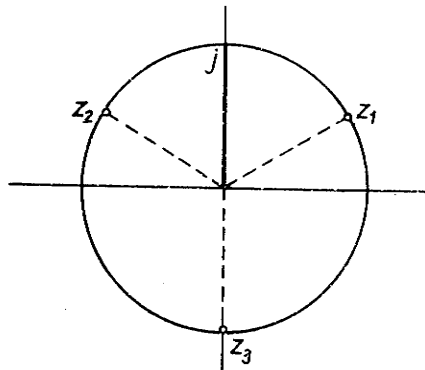
$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{e^{j(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}} = e^{j(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})},$$

és így a három különböző gyök:

$$z_1 = e^{j\frac{\tilde{\kappa}}{6}} = \cos \frac{\tilde{\kappa}}{6} + j \sin \frac{\tilde{\kappa}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2},$$

$$z_2 = e^{j(\frac{\tilde{\kappa}}{6} + \frac{2\tilde{\kappa}}{3})} = \cos \frac{5\tilde{\kappa}}{6} + j \sin \frac{5\tilde{\kappa}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2},$$

$$z_3 = e^{j(\frac{\tilde{\kappa}}{6} + \frac{4\tilde{\kappa}}{3})} = \cos \frac{9\tilde{\kappa}}{6} + j \sin \frac{9\tilde{\kappa}}{6} = -j.$$



30. ábra

A három gyök a  $z = 0$  körüli egységsugaru körvonalon fekszik (30. ábra).

$$2^0 z = -4,$$

$$\sqrt[4]{z} = ?$$

A  $z = -4$  számú exponenciális alakja:

$$z = -4 = e^{j(\tilde{\kappa} + 2k\tilde{\kappa})},$$

és így

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4} e^{j\frac{\tilde{\kappa} + 2k\tilde{\kappa}}{4}} = \begin{cases} 1,414 e^{j\frac{\tilde{\kappa}}{4}} = z_1, \\ 1,414 e^{j\frac{3\tilde{\kappa}}{4}} = z_2, \\ 1,414 e^{j\frac{5\tilde{\kappa}}{4}} = z_3, \\ 1,414 e^{j\frac{7\tilde{\kappa}}{4}} = z_4. \end{cases}$$

A gyökvonás eredményeként adódó négy különböző gyök tehát az  $z = 0$  középpontú  $\sqrt[4]{4} \approx 1,414$  sugaru körvonalon fekszik, a gyökök egy  $\sqrt{2}$  oldalú négyzet csúcspontjait adják meg (31. ábra).

$$3^o \quad z_1 = 2 e^{j \frac{\pi}{3}}$$

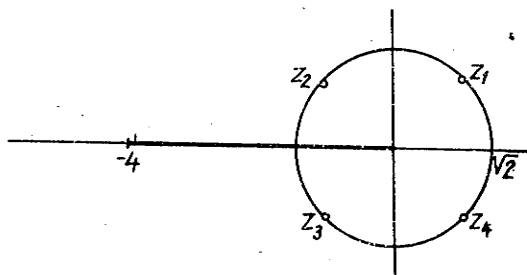
$$z_2 = 3 e^{j \frac{\pi}{4}},$$

$$\operatorname{Re} z_1 z_2 = ?$$

$$\operatorname{Im} z_1 z_2 = ?$$

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = ?$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = ?$$



31. ábra

Mivel

$$z_1 z_2 = 6 e^{j \frac{7\pi}{12}} = 6 \left( \cos \frac{7\pi}{12} + j \sin \frac{7\pi}{12} \right),$$

adódik:

$$\operatorname{Re} z_1 z_2 = 6 \cos \frac{7\pi}{12} = -6 \cos \frac{5\pi}{12} = -6 \cos 75^\circ \approx -1,55$$

$$\operatorname{Im} z_1 z_2 = 6 \sin \frac{7\pi}{12} = 6 \sin \frac{5\pi}{12} = 6 \sin 75^\circ \approx 5,8.$$

Másrészt

$$z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + j\sqrt{3},$$

$$z_2 = 3 \left( \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{\sqrt{2}} + j \frac{3}{\sqrt{2}},$$

azaz

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 3,12$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 3,85.$$

4<sup>o</sup> Irjuk fel az

$$az^2 + bz + c = 0$$

másodfoku egyenlet megoldásait. (a, b, c, tetszőleges komplex számok a ≠ 0.)

Feladatunk megoldásának menete teljesen megegyező az avval, ahogyan a másodfoku, valós együtthatóju algebrai egyenlet megoldó képletét előtanulmányainkban levezettük.

Fenti egyenletünket  $a$ -val beszorozva ( $a \neq 0$ ) adódik:

$$a^2 z^2 + abz + ac = 0,$$

azaz

$$(az + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + ac = 0,$$

$$(az + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4};$$

a jobb- és baloldaltól négyzetgyököt vonva írhatjuk:

$$(x) \quad az + \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2},$$

mivel bármely  $z$  komplex szám két különböző négyzetgyöke egymástól csak előjelben különbözik:

$$\sqrt{z} = \begin{cases} z_1 = \sqrt{r} e^{j\frac{\varphi}{2}}, \\ z_2 = \sqrt{r} e^{j(\frac{\varphi}{2} + \pi)} = \sqrt{r} e^{j\frac{\varphi}{2}} e^{j\pi} = \sqrt{r} e^{j\frac{\varphi}{2}} (\cos \pi + j \sin \pi) = -\sqrt{r} e^{j\frac{\varphi}{2}}. \end{cases}$$

(x) -ből  $z$ -t kifejezve adódik:

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

a valósban nyert eredménnyel egyezően.

Eredményünkből következik, hogy ha egy valós együtthatós másodfoku algebrai egyenletnek komplex gyökei vannak, azok csak konjugált komplex számok lehetnek. Pl.

$$y^2 + 3y + 5 = 0$$



megoldásai:

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11} j}{2} = \begin{cases} -1,5 + 1,66 j, \\ -1,5 - 1,66 j. \end{cases}$$

## 12. Komplex változós függvény

a) Az előbbieken láttuk, hogy az analízis alapfogalmai (számsorozat határértéke, végtelen sor konvergenciája stb.) és az ezekkel kapcsolatos alapvető tételek megfelelő módosításokkal általánosíthatók oly módon, hogy a valós szám fogalma helyébe a komplex szám általánosabb fogalmát tesszük. Ez az általánosítás bizonyos esetekben azzal a haszonnal is járt, hogy olyan összefüggésekre derített fényt, amelyek a valós analízis körében maradvá érthetetlenek volnának, így például az Euler-formulák az exponenciális és trigonometrikus függvények közötti kapcsolatra mutatnak rá. A továbbiakban az analízis további fogalmait általánosítjuk komplex számokra, mégpedig a függvénynek, a függvény határértékének, folytonosságának, a differenciálhányadosnak és az integrálnak fogalmát. Az ekként felépülő komplex változós függvénytan módszerei és eredményei az alkalmazásokban igen nagy jelentőséggel bírnak.

### Definíció

A  $w$  komplex változó a  $z$  komplex változónak függvénye, ha  $z$  minden szóba jövő értékéhez  $w$ -nek meghatározott értéke tartozik.

Ezt a körülményt a valósból átvett

$$(1) \quad w = f(z)$$

jellel jelöljük.

A Matematika I/1. jegyzet 22. fejezetében a függvényre adott általános definícióból azonnal adódik speciális esetként  $w = f(z)$  értelmezése:

$w = f(z)$  olyan utasítás, amellyel a  $z$ -sík bizonyos  $P_1$  részhalmazának minden eleméhez a  $w$ -sík meghatározott elemét rendeljük hozzá. Ezen utóbbi elemek halmazát  $R_1$ -gyel jelölve  $P_1$  az  $f(z)$  függvény értelmezési tartománya,  $R_1$  pedig értékkészlete.

Ha (1)-ben a függő és független változót valós és képzetes részére bontjuk:

$$(2) \quad w = u + jv, \quad z = x + jy,$$

akkor  $u$  és  $v$  nyilván  $x$  és  $y$  függvényei lesznek:

$$(3) \quad \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y). \end{aligned}$$

A  $w = f(z)$  függvény megadása tehát a (3) függvények megadásával is történhetik.

Igy pl.

$$1^o \quad w = z^2 \quad \text{esetében}$$

$$u + jv = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + 2jxy,$$

azaz

$$u = x^2 - y^2,$$

$$v = 2xy.$$

$$2^o \quad w = \frac{1}{z} \quad \text{esetében}$$

$$u + jv = \frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2},$$

azaz

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$3^o \quad w = e^z \quad \text{esetében}$$

$$u + jv = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y),$$

azaz

$$u = e^x \cos y,$$

$$v = e^x \sin y.$$

$4^o \quad w = \sin z$  esetében, mivel az előző fejezetben láttuk, hogy az addíciós képlet alkalmazható:

$$\begin{aligned}
 u + jv &= \sin(x + jy) = \sin x \cos jy + \cos x \sin jy = \\
 &= \sin x \frac{e^{j^2 y} + e^{-j^2 y}}{2} + \cos x \frac{e^{j^2 y} - e^{-j^2 y}}{2j} = \\
 &= \sin x \quad \text{ch } y \quad + \cos x \quad j \text{ sh } y,
 \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}
 u &= \sin x \text{ ch } y, \\
 v &= \cos x \text{ sh } y.
 \end{aligned}$$

5<sup>o</sup>  $w = \cos z$  esetében előbbi eredményeinket felhasználva:

$$\begin{aligned}
 u + jv &= \cos x \cos jy - \sin x \sin jy = \\
 &= \cos x \text{ ch } y - j \sin x \text{ sh } y,
 \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}
 u &= \cos x \text{ ch } y, \\
 v &= -\sin x \text{ sh } y.
 \end{aligned}$$

6<sup>o</sup>  $w = \bar{z}$  esetében

$$u + jv = x - jy,$$

azaz

$$\begin{aligned}
 u &= x, \\
 v &= -y.
 \end{aligned}$$

7<sup>o</sup>  $w = |z|$  esetében

$$u + jv = \sqrt{x^2 + y^2},$$

azaz

$$\begin{aligned}
 u &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\
 v &= 0.
 \end{aligned}$$

## b) Definíció

Az  $f(z)$  függvénynek a  $z_0$  helyen  $A$  a határértéke, ha bármely  $\varepsilon > 0$  -hoz található olyan  $\delta > 0$ , hogy

$$|f(z) - A| < \varepsilon, \quad \text{ha már} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Más szavakkal:  $f(z)$  határértéke a  $z_0$  helyen  $A$ , ha  $A$  tetszőlegesen kicsiny  $\varepsilon$  sugaru környezetébe beleesnek a  $z_0$  hely alkalmas  $\delta$  sugaru környezetébe eső  $z$  értékekhez rendelt  $f(z)$  függvényértékek. Ezt a tényt a valóságban bevezetett jelöléssel juttatjuk kifejezésre:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

A definícióból azonnal kiolvasható, hogy a

$$z = x + jy, \quad z_0 = x_0 + jy_0, \quad f(z) = u + jv, \quad A = a + jb$$

jelölésekkel a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

reláció egyenértékű a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = a \quad \text{és} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = b$$

összefüggések egyidejű fennállásával. Ebből azonnal adódik a következő

### Tétel

Az  $f(z)$  függvénynek a  $z_0$  pontban akkor és csak akkor határértéke az  $A$  szám, ha bármely  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  komplex tagu számsorozat-ra, melyre  $z_n \neq z_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) és  $z_n \rightarrow z_0$ , egyszersmind  $f(z_n) \rightarrow A$ .

A többváltozós függvények tárgyalásánál követett gondolatmenethez hasonlóan definiálhatjuk komplex változós függvényeknek a komplex számsík valamely  $H$  halmazára szorítkozva vett határértékét.

### Definíció

Az  $f(z)$  függvénynek a  $z_0$  pontban a  $H$  halmazra szorítkozva határértéke  $A$ , ha  $f(z_n) \rightarrow A$ , valahányszor  $z_1, z_2, \dots$  olyan tetszőleges komplex tagu számsorozatot jelent, melyre

$$z_n \neq z_0, \quad z_n \in H \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{és} \quad z_n \rightarrow z_0.$$

E definíció abban az esetben, amikor  $z_0$  a  $H$  halmaznak belső pontja ( $H$   $z_0$ -át alkalmas kis környezetével együtt tartalmazza) korábbi definíciókkal megegyezik. Az utóbbi definícióban azonban természetesen feltételezzük, hogy  $z_0$  nem külső pont a  $H$  halmazra nézve, (nem adható meg  $z_0$ -nak olyan alkalmas kis környezete, amelyben nincs  $H$ -hoz tartozó pont).

Hasonló az  $f(z)$  függvény  $z_0$  helyhez tartozó végtelen határértékének definíciója:

### Definíció

Az  $f(z)$  függvénynek a  $z_0$  pontban végtelen a határértéke, ha bármely  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  komplex tagú számsorozatra, melyre  $z_n \neq z_0$  és  $z_n \rightarrow z_0$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) egyszersmind  $f(z_n) \rightarrow \infty$ .

### Definíció

Az  $f(z)$  függvénynek a  $z_0$  pontban a  $H$  halmazra szorítkozva végtelen a határértéke, ha  $f(z_n) \rightarrow \infty$  valahányszor  $z_1, z_2, \dots$  olyan tetszőleges komplex tagú számsorozat, melyre  $z_n \neq z_0$ ,  $z_n \in H$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) és  $z_n \rightarrow z_0$ .

E definíció akkor is alkalmazható, amikor  $z_0$  a végtelen távoli pontot jelenti.

A valós analízisben követett okoskodás mintájára látható be, hogy ha

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_2 \quad (|w_1| \text{ és } |w_2| \text{ véges}),$$

akkor

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = w_1 + w_2,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - g(z)) = w_1 - w_2,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) = w_1 \cdot w_2$$

és ha  $w_2 \neq 0$ , akkor

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_1}{w_2}.$$

c) Az egyváltozós függvények esetében mondottakhoz hasonlóan a következőképpen adhatjuk meg az  $f(z)$  függvény  $z_0$  pontbeli folytonosságának definícióját:

### Definíció

Az  $f(z)$  függvény a  $z_0$  helyen folytonos, ha

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Más szavakkal:  $f(z)$  folytonos a  $z_0$  helyen, ha ott értelmezve van, van határértéke és ez megegyezik a függvény  $z_0$ -beli helyettesítési értékével. Ez tehát annyit jelent, hogy  $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ , valahányszor egy  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  sorozatra  $z_n \rightarrow z_0$ . Ha  $z_0$  határpontja a komplex számsík egy  $H$  halmazának, és  $f(z_0)$  egyenlő  $f(z)$   $z_0$ -beli, a  $H$  halmazra szorítkozva képzett határértékével, akkor azt mondjuk, hogy  $f(z)$  a  $z_0$  pontban a  $H$  halmazra szorítkozva folytonos.

A folytonosság definíciójából azonnal adódik, hogy

$$f(z) = u + jv, \quad z = x + jy, \quad z_0 = x_0 + jy_0$$

mellett  $f(z)$   $z_0$ -beli folytonossága egyenértékű azzal, hogy az  $u(x, y)$  és  $v(x, y)$  függvények az  $(x_0, y_0)$  helyen folytonosak.

A valós, egyváltozós függvényekre vonatkozó megfelelő tételekhez hasonlóan igazolhatók az alábbi állítások:

Ha  $f(z)$  és  $g(z)$  folytonosak a  $z_0$  helyen, akkor

$$f(z) + g(z),$$

$$f(z) - g(z),$$

$$f(z) \cdot g(z)$$

és  $g(z_0) \neq 0$  esetén

$$\frac{f(z)}{g(z)}$$

is folytonos a  $z_0$  helyen.

Ha  $g(z)$  folytonos a  $z_0$  helyen és  $f(w)$  folytonos a  $w = g(z_0)$  helyen, akkor  $f(g(z))$  is folytonos a  $z_0$  helyen.

Pl. a  $w = z$ ,  $w = z^2$ ,  $w = e^z$ ,  $w = \sin z$ ,  $w = \cos z$ ,  
 $w = \sin^2 z$ ,  $w = \cos^2 z$  függvények minden  $z$ -re,  $w = \frac{1}{z}$  a  $z = 0$   
hely kivételével minden  $z$ -re folytonos

$w = |z|$  folytonosságát például így láthatjuk be: tetszőleges  
 $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  sorozatra, ha  $z_n \rightarrow z_0$ , akkor a megfelelő

$|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|, \dots$  sorozat

is konvergens és  $|z_n| \rightarrow |z_0|$ .

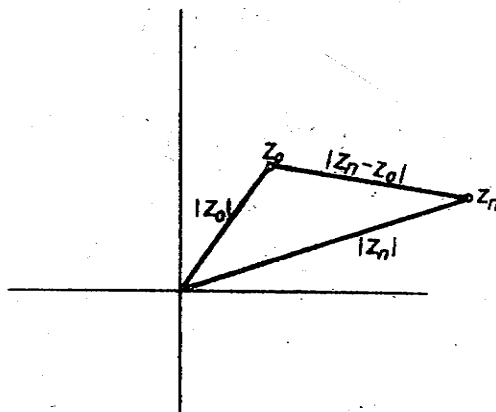
$(|z_n - z_0| \geq |z_n| - |z_0|)$  a há-

romszög egyenlőtlensége miatt  
(32. ábra))

$w = |z|$  folytonosságából  
következik, hogy  $f(z)$  -vel  
együtt  $|f(z)|$  is folytonos.

A folytonos függvények előbb  
felsorolt tulajdonságai könnyen  
belátható módon a  $H$  halmaz-  
ra szorítkozva folytonos függvé-  
nyekre is állnak. Az összetett  
függvény folytonosságára vo-  
natkozó tétel például így szól:

Ha  $g(z)$  a  $z_0$  pontban  
a  $H$  halmazra szorítkozva folytonos,  $f(w)$  pedig a közönséges érte-  
lemben folytonos a  $w = g(z_0)$  helyen, akkor  $f(g(z))$  is folytonos a  $H$   
halmazra szorítkozva a  $z_0$  helyen.



32. ábra

### Definíció

Az  $f(z)$  függvényt a  $H$  halmazon folytonosnak mondjuk, ha  $H$   
minden pontjában, legalábbis a  $H$  halmazra szorítkozva folytonos. ( $H$  -  
val a  $z$  komplex számsík pontjainak egy halmazát jelöltük.)

Korlátos és zárt  $F$  halmazon folytonos  $f(z)$  függvényekről a következő két nevezetes tétel mondható ki (korlátos zárt ponthalmaz definícióját lásd Matematika I/2. jegyzet, 27. fejezet).

#### Tétel (Weierstrass tétel)

Ha  $f(z)$  a komplex számsíknak egy korlátos és zárt  $F$  halmazán folytonos, akkor ott korlátos is, azaz alkalmas  $K$ -ra  $|f(z)| < K$ .

(A tétel valós és képzetes részre való bontással könnyen igazolható.)

#### Tétel

Ha  $f(z)$  a komplex számsíknak egy korlátos és zárt  $F$  halmazán folytonos, akkor ott egyenletesen folytonos, azaz tetszőleges  $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan  $\delta > 0$ , hogy ha  $z_1 \in F$ ,  $z_2 \in F$  és  $|z_1 - z_2| < \delta$ , akkor  $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ .

### 13. Komplex változós függvény differenciálhatósága és regularitása. Harmonikus függvények

#### a) Definíció

Az  $f(z)$  függvény a  $z_0$  helyen differenciálható, ha létezik a véges

$$(1) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

határérték.

Ebben az esetben az (1) határértéket az  $f(z)$  függvény  $z_0$  helyen vett deriváltjának, vagy differenciálhányadosának nevezzük és az

$f'(z)$ ,  $\frac{df(z)}{dz}$ , stb. jelekkel jelöljük.

#### I. Tétel

Az  $f(z)$  függvény akkor és csak akkor differenciálható a  $z_0$  pontban, ha a  $z_0$  és  $z_0 + \Delta z$  pontokhoz tartozó megváltozása a következő alakban állítható elő:



$$(2) \quad f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \alpha \Delta z + \varepsilon \Delta z,$$

ahol  $\alpha$  nem függ  $\Delta z$ -től és  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ha  $\Delta z \rightarrow 0$ .

Ekkor

$$\alpha = f'(z_0).$$

A tétel ugyanolyan gondolatmenettel látható be, mint a valós egyváltozós differenciálható függvényekre kimondott hasonló állítás (Matematika I/1. jegyzet 28. fejezet).

## II. Tétel

Ha  $f(z)$  a  $z_0$  helyen differenciálható, akkor ott folytonos is.

Ez az állítás a (2) formulából azonnal következik.

A valós egyváltozós függvényeknél követett gondolatmenettel láthatók be az alábbi differenciálási szabályok:

ha  $f(z)$  és  $g(z)$  differenciálható,  $c$  állandó, akkor

$$(z^n)' = n z^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (c)' = 0,$$

$$(c \cdot f(z))' = c \cdot f'(z),$$

$$(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z),$$

$$(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z),$$

$$\left( \frac{f(z)}{g(z)} \right)' = \frac{f'(z) g(z) - g'(z) f(z)}{g(z)^2},$$

$$(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z).$$

Ezen szabályok alapján pl. a racionális függvények mindenütt differenciálhatók, ahol a nevezőjük nem zérus.

Keressünk olyan szükséges és elégséges kritériumot, amely alkalmas lesz a  $w = f(z)$  függvény differenciálhatóságának vizsgálatára. E célból vizsgáljuk meg először, mint mondhatunk egy differenciálható  $f(z)$  függvény  $u(x, y)$  valós és  $v(x, y)$  képzetes részéről.

Ha  $f(z) = u(x,y) + j v(x,y)$  differenciálható a  $z = x + jy$  helyen, akkor a  $\Delta z = h + jk$ ,  $f'(z) = A + jB$   $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + j \mathcal{E}_2$  jelöléssel

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (A + jB) \Delta z + \mathcal{E} \Delta z,$$

ill részletesebben kiírva

$$\begin{aligned} [u(x+h, y+k) + jv(x+h, y+k)] - [u(x,y) + jv(x,y)] = \\ = Ah + Ajk + jBh - Bk + \mathcal{E}_1 h + \mathcal{E}_1 jk + j \mathcal{E}_2 h - \mathcal{E}_2 k, \end{aligned}$$

tehát

$$u(x+h, y+k) - u(x,y) = Ah - Bk + \mathcal{E}_1 h - \mathcal{E}_2 k,$$

(\*)

$$v(x+h, y+k) - v(x,y) = Bh + Ak + \mathcal{E}_2 h + \mathcal{E}_1 k,$$

ahol  $A$  és  $B$  állandó, és  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rightarrow 0$ , ha  $h, k \rightarrow 0$ , hiszen  $f(z)$  differenciálhatóságából következik, hogy  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + j \mathcal{E}_2 \rightarrow 0$ , ha  $\Delta z = h + jk \rightarrow 0$ .

Arra az eredményre jutottunk tehát, hogy ha  $f(z)$  a  $z$  helyen differenciálható, akkor ott  $u(x,y)$  és  $v(x,y)$  is differenciálható, (\*)-ből azonban még az is kiolvasható, hogy

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{az első egyenlőségéből,} \quad A = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{a másodikból, azaz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\text{és } B = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{az első egyenlőségéből,} \quad B = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{a másodikból, tehát}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Láttuk tehát, hogy ha  $f(z)$  differenciálható a  $z$  helyen, akkor  $u(x,y)$  és  $v(x,y)$  is differenciálható ugyanott és

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

A (3) összefüggéseket Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenleteknek nevezzük.

Állításunk meg is fordítható. Az állítást és annak megfordítását a következő tételben mondhatjuk ki:

### III. Tétel

Ahhoz, hogy  $f(z) = u + jv$  a  $z = x + jy$  helyen differenciálható legyen, szükséges és elégséges, hogy  $u(x, y)$  és  $v(x, y)$  az  $(x, y)$  helyen differenciálható legyen és kielégítse a Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket.

A feltétel szükséges voltát az előbb már beláttuk, elégséges voltát a következőképpen igazolhatjuk.

Legyenek  $u(x, y)$  és  $v(x, y)$  differenciálhatók az  $(x, y)$  helyen és teljesítsék a (3) összefüggéseket. Ekkor fennáll

$$u(x+h, y+k) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \gamma_1 h + \gamma_2 k,$$

$$v(x+h, y+k) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} h + \frac{\partial v}{\partial y} k + \gamma_3 h + \gamma_4 k,$$

ahol  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \rightarrow 0$ , ha  $h, k \rightarrow 0$ . Ekkor azonban

$$\begin{aligned} f(x + jy + h + jk) - f(x + jy) &= \\ &= [u(x + h, y + k) + jv(x + h, y + k)] - [u(x, y) + jv(x, y)] = \\ &= u(x + h, y + k) - u(x, y) + j(v(x + h, y + k) - v(x, y)) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \gamma_1 h + \gamma_2 k + j \left[ \frac{\partial v}{\partial x} h + \frac{\partial v}{\partial y} k + \gamma_3 h + \gamma_4 k \right]. \end{aligned}$$

A (3) összefüggések alkalmazásával azonban e kifejezés még a következő alakban is felírható:

$$\begin{aligned} f(x+jy+h+jk) - f(x+jy) &= \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \right) (h + jk) + \gamma_1 h + \gamma_2 k + \gamma_3 h + \gamma_4 k = \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \right) (h + jk) + \frac{\eta_1^{h+} \eta_2^{k+} \eta_3^{hj+} \eta_4^{kj}}{h + jk} (h + jk),$$

ahol feltevésünk értelmében  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \rightarrow 0$ , ha  $h, k \rightarrow 0$ , és ezért

$$\frac{\eta_1^{h+} \eta_2^{k+} \eta_3^{hj+} \eta_4^{kj}}{h + jk} \rightarrow 0,$$

hiszen

$$\left| \frac{h}{h + jk} \right| \leq 1 \quad \text{és} \quad \left| \frac{k}{h + jk} \right| \leq 1.$$

Ez azonban éppen azt jelenti, hogy  $f(z)$  differenciálható, amit bizonyítani akartunk.

Fenti okoskodásunkból még az is adódott, hogy  $f(z)$  differenciálhányadosa:

$$(4) \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}.$$

A differenciálható  $f(z)$  függvényre fennálló (3) összefüggések értelmében az  $f'(z)$  deriváltat még a következő alakban is felírhatjuk:

$$(5) \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}.$$

A (4) és (5) képleteket közvetlenül a differenciálhányados definíciójából is levezethetjük. Ha ugyanis az (1) határérték létezik, akkor e határértéket speciálisan  $\Delta z = \Delta x$ , ill.  $\Delta z = j\Delta y$  esetében kiszámítva differenciálhányadosként éppen (4), ill. (5) adódik.

A III. Tétel segítségével igazoljuk, hogy  $w = e^z$  minden  $z$ -re differenciálható.

$$w = e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y),$$

tehát

$$\operatorname{Re} w = u = e^x \cos y,$$

$$\operatorname{Im} w = v = e^x \sin y.$$

$u$  és  $v$  mindenütt differenciálható függvények, és mivel

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

a Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenletek is kielégülnek, s így  $w = e^z$  valóban differenciálható.

$e^z$  differenciálhányadosa a (4) képlet felhasználásával:

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + j e^x \sin y = e^z,$$

tehát itt is érvényben marad a valósból megismert differenciálási szabály.

Ebből következik, hogy  $\sin z$  és  $\cos z$  is minden  $z$ -re differenciálható és

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Például

$$\begin{aligned} (\sin z)' &= \left( \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \right)' = \frac{1}{2j} (je^{jz} - (-j)e^{-jz}) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \\ &= \cos z. \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, hol differenciálható az

$$f(z) = \bar{z}$$

függvény. E függvény esetében

$$u = x, \quad v = -y,$$

azaz

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1,$$

tehát

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y},$$

a függvény sehol sem differenciálható.

Vizsgáljuk meg, hol differenciálható a

$$w = \sin \bar{z}$$

függvény. Valós és képzetes részre bontással adódik:

$$u = \sin x \operatorname{ch} y,$$

$$v = -\cos x \operatorname{sh} y,$$

és így e differenciálható függvények parciális deriváltjai

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{sh} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\cos x \operatorname{ch} y.$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  csak akkor állhat fenn, ha mindkét parciális derivált zérussal egyenlő, azaz  $\operatorname{ch} y \neq 0$  folytán, ha  $\cos x = 0$ , vagyis  $x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$ .

$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$  szintén csak akkor teljesülhet, ha a szereplő két parciális derivált zérus. Mivel azonban az  $x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$  helyeken  $\sin x \neq 0$ , a parciális deriváltak csak  $\operatorname{sh} y = 0$ , azaz  $y = 0$  esetében tűnnek el. A Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenletek tehát csak az

$$x = (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad y = 0$$

pontokban teljesülnek,  $\sin \bar{z}$  tehát csak ezekben a pontokban differenciálható, és deriváltja mindezen pontokban zérus.

### Definíció

Az  $f(z)$  függvény egy  $z_0$  pontban reguláris, ha a  $z_0$  hely egy környezetében mindenütt differenciálható.

Ha  $f(z)$  a komplex számsík  $T$  nyílt halmazán differenciálható (vagyis  $T$  minden pontjában differenciálható), akkor  $f(z)$  minden  $z \in T$  helyen reguláris. Ekkor azt mondjuk, hogy  $f(z)$  a  $T$  nyílt halmazon reguláris.

Pl.  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  az egész komplex számsíkon differenciálható, tehát regulárisak is,  $\frac{1}{z}$  az egész komplex számsíkban a  $z = 0$  pont kivételével differenciálható,  $z \neq 0$  esetén reguláris is. Láttuk, hogy  $\sin \bar{z}$  az  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $y = 0$  pontokban differenciálható, mivel azonban ezen pontok környezetében nem differenciálható, sehol sem reguláris.

Sokszor kerül felhasználásra a következő tétel:

#### IV. Tétel

Ha  $f(z)$  a  $z_0$  helyen reguláris, akkor  $f'(z)$  a  $z_0$  helyen folytonos.

A tétel bizonyítására itt nem térünk ki.

Reguláris függvény helyett szokás még analitikus, ill. holomorf függvényt is mondani.

#### c) Definíció

Az  $u(x,y)$  függvény harmonikus egy  $T$  nyílt halmazon, ha másodrendű parciális deriváltjai folytonosak  $T$ -ben és kielégítik a

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplace-féle parciális differenciálegyenletet.

A reguláris és harmonikus függvények kapcsolatáról az alábbiakban két tételt mondunk majd ki. Előzőleg azonban néhány fontos fogalmat kell definiálnunk: (v.ö. 4. fejezet d.))

#### Definíció

A  $T$  halmaz összefüggő, ha bármely két pontja a halmazon belül poligonon összeköthető egymással.

Ha  $T$  összefüggő nyílt halmaz, tartománynak nevezzük. A  $T$  tartomány (a síkban) egyszeresen összefüggő, ha  $T$  bármely benne futó többszörös pont nélküli zárt poligonon együtt annak belsejét is tartalmazza.

### V. Tétel

Ha  $f(z)$  reguláris a  $T$  tartományban, akkor  $u(x,y)$  valós és  $v(x,y)$  képzetes része harmonikus függvény  $T$ -ben.

A tételt most még további megszorítással fogjuk igazolni, nevezetesen  $f(z)$ -ről feltesszük, hogy  $T$ -ben kétszer differenciálható és második deriváltja folytonos  $T$ -ben. (Később majd látni fogjuk, hogy ezen utóbbi megszorítások el is hagyhatók.)

A tett feltevések mellett  $T$ -ben mindenütt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad - \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} ;$$

az első összefüggést  $x$ , a másodikat  $y$  szerint parciálisan deriválva összevonással adódik:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0,$$

ill. az első összefüggést  $y$ , a másodikat  $x$  szerint parciálisan deriválva összevonással:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,$$

hiszen a tett feltevések mellett a szereplő vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlők. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Egyszeresen összefüggő  $T$  tartomány esetében az V. Tételben ki-mondott állítás meg is fordítható:

### VI. Tétel

Ha  $u(x,y)$  az egyszeresen összefüggő  $T$  tartományban harmonikus függvény, akkor mindig található  $u(x,y)$ -hoz olyan  $T$ -ben harmonikus  $v(x,y)$  függvény, hogy

$$f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$$

$T$ -ben reguláris legyen. A  $v(x,y)$  függvényt  $u(x,y)$  harmonikus tár-sának nevezzük.



A feltétel értelmében  $u(x,y)$  és  $v(x,y)$  harmonikus társa ki kell, hogy elégítsék a Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket, azaz

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

De a

$$(\mathbf{x}) \quad - \frac{\partial u}{\partial y} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial x} \bar{\mathbf{j}}$$

vektortér rotációmentes az egyszerűen összefüggő  $T$  tartományban:

$$\text{rot} \left( - \frac{\partial u}{\partial y} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial x} \bar{\mathbf{j}} \right) = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ - \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \bar{\mathbf{k}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0,$$

s így a Stokes-tétel értelmében (a tétel alkalmazásának feltételei teljesülnek)  $(\mathbf{x})$  potenciálos vektortér. Valóban létezik tehát  $T$ -ben olyan  $v(x,y)$  függvény, melyre

$$\text{grad } v = - \frac{\partial u}{\partial y} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial x} \bar{\mathbf{j}}.$$

Korábbi eredményeink alapján:

$$\mathbf{v} = \int_{\bar{\mathbf{a}}}^{\bar{\mathbf{r}}} \left( - \frac{\partial u}{\partial y} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial x} \bar{\mathbf{j}} \right) d\bar{\mathbf{r}},$$

ahol tetszőleges  $T$ -ben futó és a  $T$ -beli  $\bar{\mathbf{a}}$  és  $\bar{\mathbf{r}}$  helyzetvektoru pontokat összekötő  $L$  görbe mentén integrálhatunk.

Az  $u + jv$  függvény ekkor  $T$ -ben mindenütt kielégíti a Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket,  $u$  és  $v$  parciális deriváltjainak folytonosságából pedig  $u$  és  $v$  differenciálható volta következik, így tehát a III. Tétel értelmében  $u + jv$   $T$ -ben mindenütt differenciálható, és így reguláris is. Ennek következtében  $v$  is harmonikus.

$u(x, y)$  harmonikus társát,  $v(x, y)$  -t természetesen csak egy additív  $C$  állandó erejéig tudjuk meghatározni. Más szavakkal,  $u(x, y)$  -nak a tett feltevések mellett végtelen sok harmonikus társa van, ezek azonban egymástól csak egy additív állandóban térnek el.

Keressünk például egy olyan reguláris függvényt, melynek valós része  $u = x^2 - y^2$ .

Vizsgáljuk meg először, hogy  $u$  harmonikus-e?

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2,$$

$$\Delta u = 2 + (-2) = 0.$$

Olyan  $v(x, y)$  függvényt kell tehát keresnünk, melyre

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y} = 2y,$$

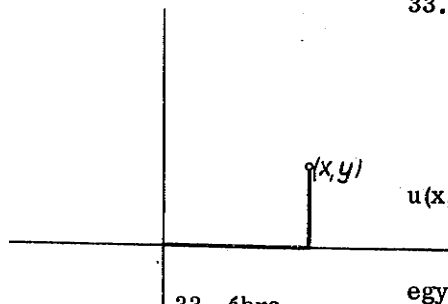
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x.$$

Ilyen függvényt szolgáltat a

$$v(x, y) = \int_0^{\vec{r}} (2y\vec{i} + 2x\vec{j}) d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 2ydx + 2xdy$$

görbementi integrál. Mivel  $u(x, y)$  az egész síkban harmonikus, az integrált a 33. ábra szerinti ut mentén számítva ki:

$$v(x, y) = \int_0^y 2x dy = 2xy.$$



33. ábra

$u(x, y)$  egy harmonikus társa

$$v(x, y) = 2xy,$$

egy keresett reguláris függvény tehát pl.

$$u + jv = (x^2 - y^2) + j 2xy = (x + jy)^2 = z^2.$$

#### 14. Komplex változós függvények által létesített leképezések.

##### Körtartó és konformis leképezés

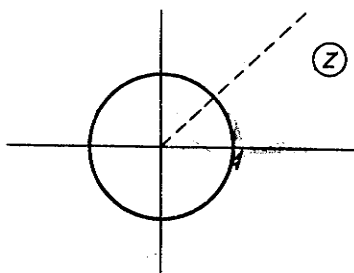
a) Egy  $w = f(z)$  komplex változós függvényt a következő módon lehet szemléltetni: a  $z$  és  $w$  változókat egy-egy számsíkon ábrázoljuk, és a  $z$ -sík minden olyan  $z$  pontjának, melyben  $f(z)$  értelmezve van, megfeleltetjük a  $w$ -síknak  $w = f(z)$  pontját. Ilyen módon a függvény a  $z$ -síkot, vagy annak egy részét a  $w$ -síkra, vagy annak egy részére képezi le. Ezt a leképezést azután azáltal szemléltethetjük, hogy alkalmas  $z$ -síkbeli görbéknek megadjuk a  $w$ -síkbeli képeit.

Igy pl. könnyű belátni, hogy a

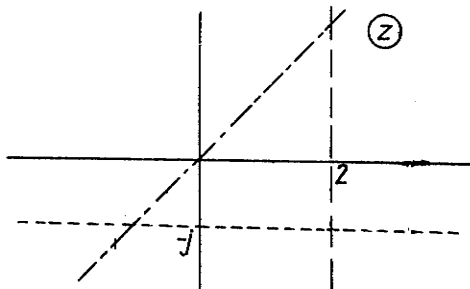
(1)

$$w = az$$

leképezés a  $z$ -síknak a kezdőpontra vonatkozó  $|a|$ -szoros nagyítását ( $|a| < 1$  esetében kicsinyítést), valamint ugyancsak a kezdőpont körül  $\arg a$  szöggel való elforgatását jelenti. Például a 34. és 35. ábrán látható



34. ábra



35. ábra

$$|z| = 1, \quad \arg z = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Re} z = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$$

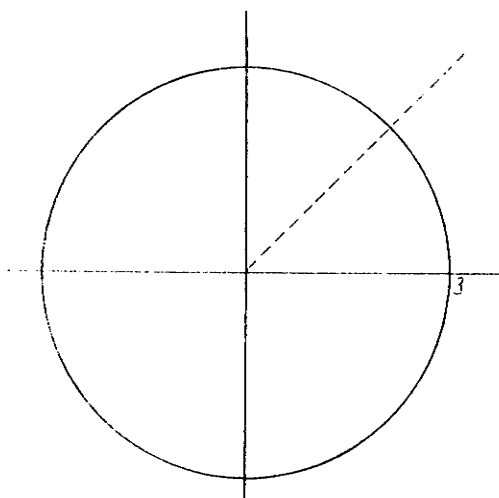
görbéknek a

$$w = 3z$$

leképezésnél a

$$|w| = 3, \quad \arg w = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Re} w = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{Im} w = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{Re} w = \operatorname{Im} w$$

görbék (lásd 36. és 37. ábra), a



36. ábra

$$w = -3z = 3 e^{j\tilde{\pi}} z$$

(w)  
leképezésénél a

$$|w| = 3, \quad \arg w = \tilde{\pi} + \frac{\tilde{\pi}}{4},$$

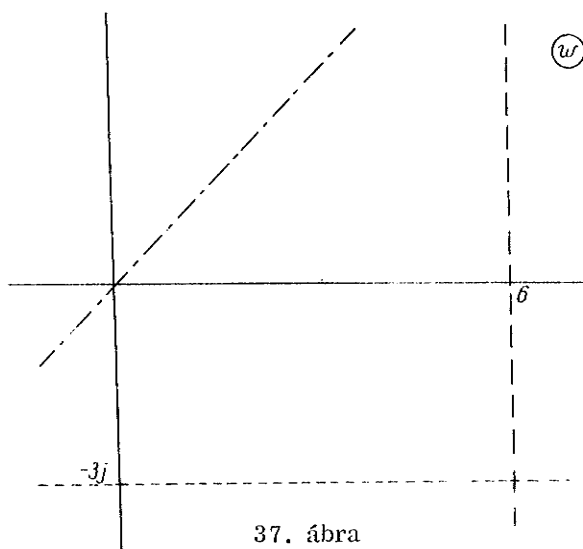
$$\operatorname{Re} w = -6, \quad \operatorname{Im} w = 3,$$

$$\operatorname{Re} w = -\operatorname{Im} w$$

görbék (lásd 38. és 39. ábra), a

$$w = jz = e^{j\frac{\tilde{\pi}}{2}} z$$

leképezésénél a



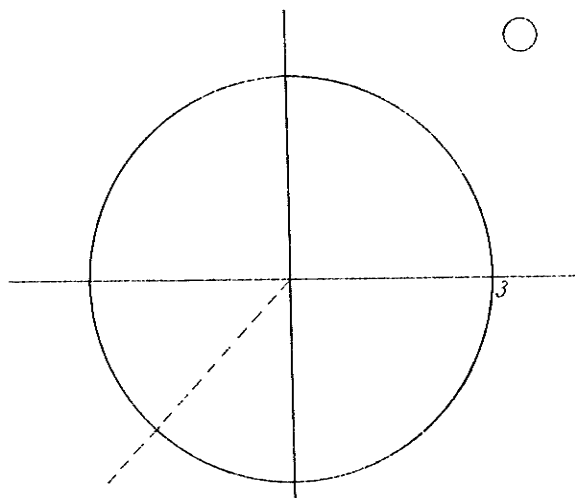
37. ábra

$$|w| = 1, \quad \arg w = \frac{\tilde{\pi}}{2} + \frac{\tilde{\pi}}{4}, \quad \operatorname{Im} w = 2, \quad \operatorname{Re} w = 1, \quad \operatorname{Re} w = -\operatorname{Im} w$$

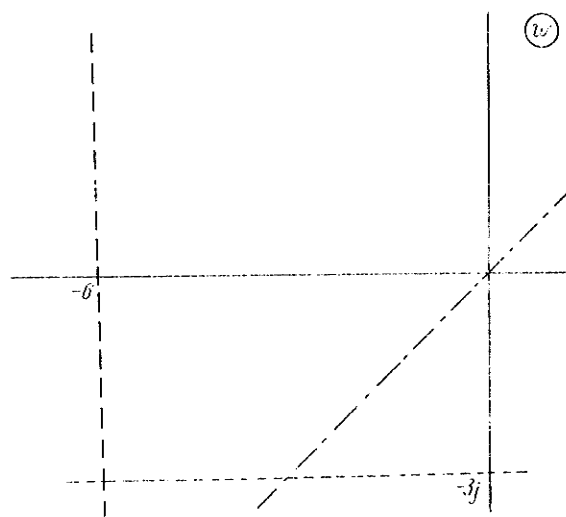
görbék (lásd 40. és 41. ábra), a

$$(x) \quad w = (1+j)z = \sqrt{2} e^{j\frac{\tilde{\pi}}{4}} z$$

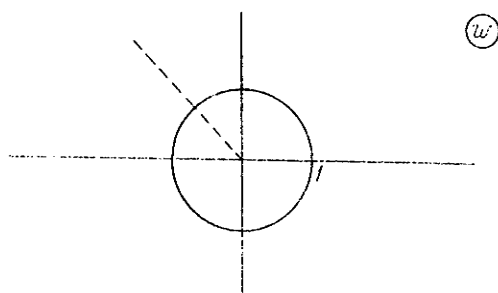
leképezésénél a



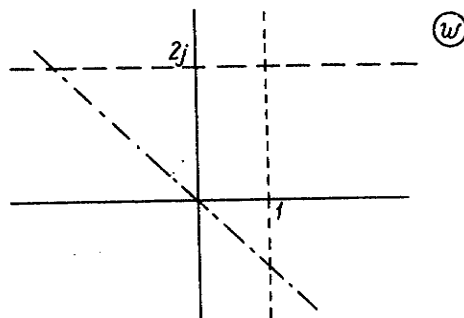
38. ábra



39. ábra



40. ábra

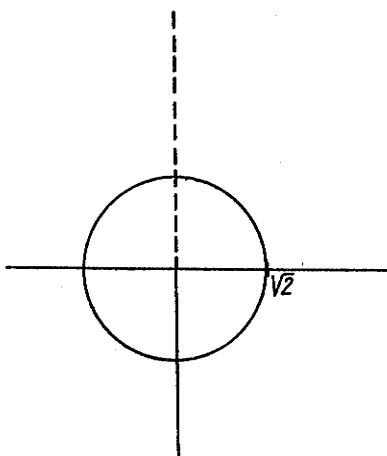


41. ábra

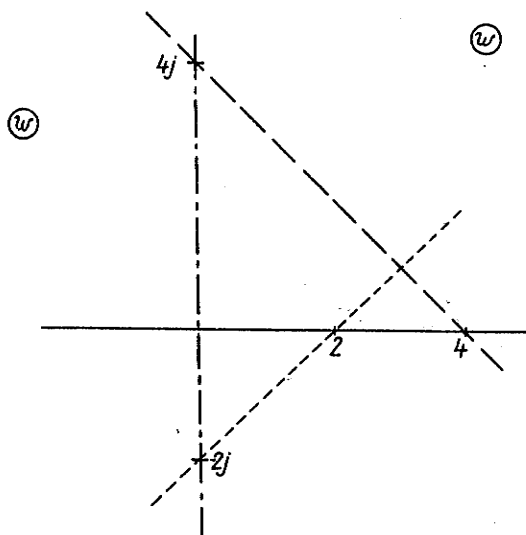
$$|w| = \sqrt{2}, \quad \arg w = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Im} w = 4 - \operatorname{Re} w, \quad \operatorname{Im} w = -2 + \operatorname{Re} w,$$

$$\operatorname{Re} w = 0$$

görbékbe viszi át (lásd 42. és 43. ábra).



42. ábra



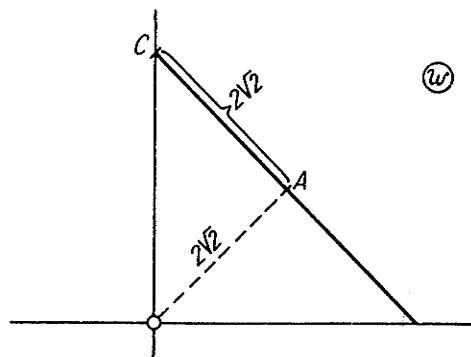
43. ábra

Ezen leképezéseknél a képgörbék felrajzolása kevesebb nehézséget okoz, mint azok egyenletének felírása. A  $(*)$  leképezésnél például a  $\operatorname{Re} z = 2$  egyenes a nagyítás és forgatás után is egyenes marad, egyenletének felírásához elég tehát két pontját, vagy egy pontját és irányát ismernünk.  $\operatorname{Re} z = 2$  a kezdőponttól 2 egység távolságban haladt, az  $\operatorname{Im} z = 0$  egyenletű  $x$  tengellyel alkotott szöge  $\frac{\pi}{2}$  volt. Az  $(1+j)z = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} z$  leképe-

zés után az egyenes a kezdőponttól  $2\sqrt{2}$  távolságban halad, és a  $\operatorname{Re} w = u$  tengellyel  $\frac{\tilde{\pi}}{2} + \frac{\tilde{\pi}}{4} = 3 \cdot \frac{\tilde{\pi}}{4}$  szöget zár be, egyenlete tehát

$$v = 4 - u,$$

mivel a 44. ábrán látható egyenlőszáru derékszögű  $OAC$  háromszögben  $OC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16$ .



44. ábra

A  $v = \operatorname{Im} w$ ,  $u = \operatorname{Re} w$  jelöléssel a kívánt eredményre jutottunk. Könnyen belátható, hogy a

$$(2) \quad w = z + b$$

leképezés a  $z$ -síknak a  $b$  komplex számot ábrázoló vektorral való eltolását jelenti. Például a 36. ábrán látható görbéknek a

$$w = z + 3 - j$$

leképezésénél a

$$|w - 3 + j| = 1, \quad w = 3 - j + t e^{j \frac{\tilde{\pi}}{4}}, \quad \operatorname{Re} w = 5, \quad \operatorname{Im} w = -2, \quad w = 3 - j + t e^{j \frac{\tilde{\pi}}{4}}$$

görbék lesznek a képei. Pl. az utolsó kép-görbe esetében így okoskodhatunk:

A  $w = z + 3 - j$  leképezésnél a  $z$ -síkbeli  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$  szögfelező minden pontját a  $3 - j$  komplex számot ábrázoló vektorral el kell

tolni. A  $z$ -síkbeli szögfelező egyenletét célszerűbben a  $z = t e^{j \frac{\tilde{\pi}}{4}}$  alak-

ban írva fel (a szögfelezőn azok a  $z$  komplex számok fekszenek, melyeknek arkusza  $\frac{\pi}{4}$ , vagyis amelyek  $e^{j\frac{\pi}{4}}$  állandósorozói), az egyenes pontjait a  $3-j$  komplex számot ábrázoló vektorral eltolva a kép-görbe fenti egyenletére jutunk. Ezen képgörbének az a szakasza, amelyben  $e^{j\frac{\pi}{4}}$  arányossági tényezője pozitív az  $\text{arc } z = \frac{\pi}{4}$  félegyenes képét adja meg a  $w = z + 3 - j$  leképezésnél.

A

$$(3) \quad w = az + b$$

leképezés (1) és (2) összetételeként nagyítás (kicsinyítés), forgatás és egy eltolás egymásután való alkalmazásával nyerhető. Pl. a

$$w = (1 + j)z + 3 - j$$

leképezésnél  $|z| = 1$  körnek egyenlete:

$$|w - (3 - j)| = \sqrt{2}$$

(a leképezés  $\sqrt{2}$ -szeres nagyítást,  $\frac{\pi}{4}$ -del való elforgatást és  $3 - j$ -vel való eltolást jelent).

Részletesebben kívánunk foglalkozni a

$$(4) \quad w = \frac{1}{z}$$

függvény által létesített leképezéssel. E függvény a  $z$ -sík körvonalait és egyeneseit vagy körvonalakba, vagy egyenesekbe viszi át. Ennek belátására célszerű lesz először általánosságban felírni ezen görbék egyenletét.

Az a középpontu,  $R$  sugaru körvonal egyenlete:

$$|z - a| = R,$$

(45. ábra), ill. mivel

$$|z - a|^2 = (z - a)(\overline{z - a}) = (z - a)(\bar{z} - \bar{a}),$$

$$(5) \quad z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a} = R^2$$



Megfordítva viszont minden

$$z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + c = 0$$

alaku egyenlet valós  $c < a\bar{a}$  esetén kör egyenlete, mert az  $R^2 = a\bar{a} - c$  jelöléssel az egyenlet az (5) alaku egyenletbe megy át.

Speciálisan  $a = \bar{a} = 0$  esetében a körvonal középpontja a  $z = 0$  pont,

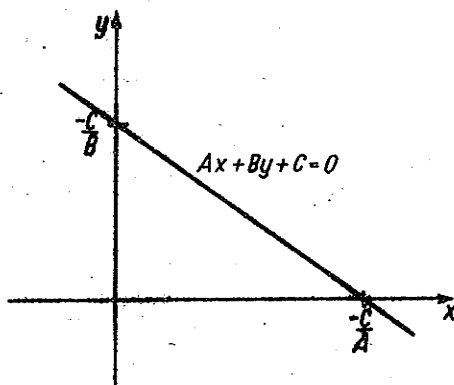
$a\bar{a} - R^2 = 0$  esetében pedig a körvonal áthalad a  $z = 0$  ponton.

Az általános helyzetű egyenes egyenlete:

$$(6) \quad az + \bar{a}\bar{z} = c \quad (c \text{ valós}).$$

Ezt az egyenletet a következő okoskodással állíthatjuk fel: Az  $XY$  síkban fekvő egyenes általános egyenlete

$$Ax + By + C = 0. \quad (A, B, C, \text{ valós szám.})$$



46. ábra

Ugyanezen egyenesnek a  $z$ - síkban az egyenlete az

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2},$$

$$y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2j}$$

összefüggések felhasználásával

$$A \frac{z + \bar{z}}{2} + B \frac{z - \bar{z}}{2j} + C = 0,$$

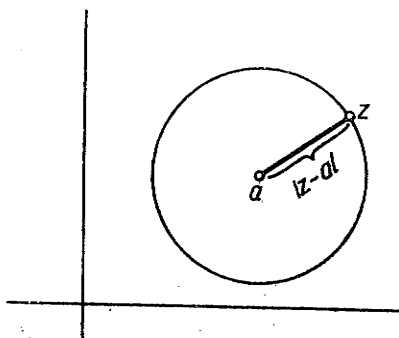
illetve

$$\frac{A - Bj}{2} z + \frac{A + Bj}{2} \bar{z} = -C,$$

ami az

$$a = \frac{A - Bj}{2}, \quad \bar{a} = \frac{A + Bj}{2}, \quad c = -C$$

jelöléssel épp a (6) egyenletet adja meg.



45. ábra

Megfordítva, azonnal adódik, hogy minden

$$za + \bar{z}\bar{a} = c$$

alakú egyenlet valós  $c$  esetén egyenes egyenlete.

Mivel mármost  $w = \frac{1}{z}$  esetén

$$z = \frac{1}{w}, \quad \bar{z} = \frac{1}{\bar{w}},$$

(5) képe a  $w = \frac{1}{z}$  leképezésnél

$$\frac{1}{w} \frac{1}{\bar{w}} - a \frac{1}{\bar{w}} - \bar{a} \frac{1}{w} + a\bar{a} - R^2 = 0,$$

más alakban felírva: ( $w\bar{w}$  -tal beszorozva)

$$(7) \quad 1 - aw - \bar{a}\bar{w} + (a\bar{a} - R^2) w\bar{w} = 0.$$

(7)  $a\bar{a} - R^2 \neq 0$  esetében kör, speciálisan  $a = \bar{a} = 0$  esetében  $w = 0$  középpontú kör,  $a\bar{a} - R^2 = 0$  esetében egyenes egyenlete.

(6) képe a  $w = \frac{1}{z}$  leképezésnél ( $c$  valós)

$$a \frac{1}{w} + \bar{a} \frac{1}{\bar{w}} = c,$$

más alakban felírva ( $w\bar{w}$  -tal beszorozva):

$$(8) \quad a\bar{w} + \bar{a}w - c(w\bar{w}) = 0.$$

(8) valós  $c \neq 0$  esetében a  $w = 0$  ponton áthaladó kör,  $c = 0$  esetében a  $w = 0$  ponton áthaladó egyenes egyenlete ( $c = 0$  esetén (6) áthaladt a  $z = 0$  ponton).

Mivel a komplex számgömbön (lásd 11. fejezet) a  $z$ -sík egyeneseseinek és köreinek egyaránt körvonalak felelnek meg, fenti eredményünket röviden úgy foglalhatjuk össze, hogy  $w = \frac{1}{z}$  körtartó leképezést létesít.

Részletesebben:  $w = \frac{1}{z}$  a komplex számgömbön fekvő körvonalakat a komplex számgömbön fekvő körvonalakra képezi le. A komplex számsíkon maradv a egyenest végtelen sugaru körnek tekintve, szintén röviden körtartónak nevezhetjük a  $w = \frac{1}{z}$  leképezést.

A

$$(9) \quad w = \frac{az + b}{cz + d}$$

leképezés  $c \neq 0$ ,  $bc - ad \neq 0$  esetén a (3) és (4) leképezésekből állítható össze, amint azt a következő számítás mutatja:

$$\begin{aligned} w &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{a(z + \frac{d}{c}) - \frac{ad}{c} + b}{c(z + \frac{d}{c})} = \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

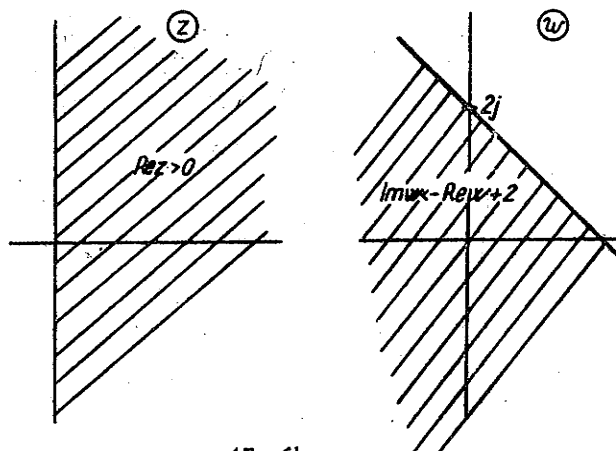
Mínt hogy a nagyítás (kicsinyítés), forgatás és eltolás egyenest egyenesbe, kört körbe visz át, a  $w_1 = \frac{1}{z}$  leképezés pedig - mint előbb beláttuk - körtartó, a (9) függvény is egyenest és kört vagy egyenesbe vagy körbe visz át, tehát körtartó leképezést létesít.

Az alkalmazások szempontjából általában nem az az érdekes, hogy egy adott  $w = f(z)$  függvény valamilyen, a  $z$ -síkon megadott görbét, vagy ezen görbe által határolt síkrészt a  $w$ -síkon milyen görbéje, ill. milyen részébe képezi le, hanem adott leképezéshöz keresünk olyan függvényt, amely a kívánt leképezést létesíti. E feladat akkor a legegyszerűbb, amikor egyenes, vagy körvonal által határolt tartományokat hasonlóképpen egyenes vagy körvonal által határolt tartományba leképező függvényt keresünk. Ekkor ugyanis könnyen felírható olyan lineáris-, vagy lineáris tört-függvény, amely a kívánt leképezést létesíti. (Általában természetesen végtelen sok ilyen függvény van, a feladat megoldásához elegendő azonban csupán egyetlen, a kívánt leképezést létesítő függvény felírása.)

1°. A  $\operatorname{Re} z > 0$  félsíkot az  $\operatorname{Im} w < -\operatorname{Re} w + 2$  félsíkba (47. ábra) pl. a

$$w = e^{-j \frac{3\pi}{4}} z + 2j$$

leképezés viszi át, mivel a  $\operatorname{Re} z > 0$  félsíkot a  $\zeta = e^{-j \frac{3\pi}{4}}$  leképezés beforgatja az  $\operatorname{Im} \zeta < -\operatorname{Re} \zeta$  félsíkba, míg a  $w = \zeta + 2j$  leképezés olyan eltolás, amellyel épp a kívánt képtartományra jutunk.

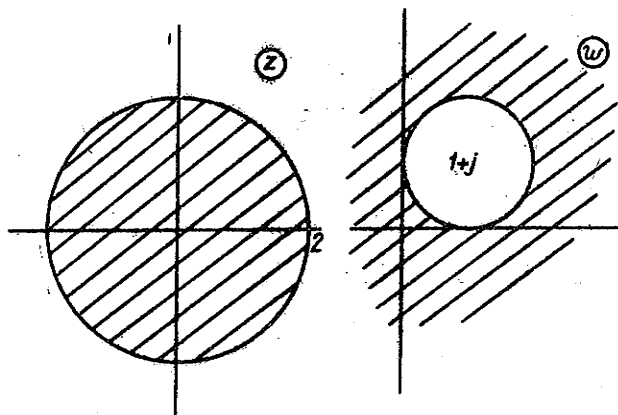


47. ábra

2° A  $|z| < 2$  körlemez a 48. ábrán látható  $|w - (1+j)| > 1$  tartományba a

$$w = \frac{2}{z} + (1+j)$$

leképezés viszi át. A  $|z| < 2$  körlemez ugyanis a  $\zeta = \frac{1}{z}$  leképezés-nél a  $|\zeta| > \frac{1}{2}$  tartományba megy át, és így kétszeres nagyítás és  $(1+j)$ -vel való eltolás után jutunk a kívánt  $|w - (1+j)| > 1$  képtartományra.



48. ábra

3° A  $|z| < 2$  körlemez a  $\text{Re } w < 0$  félsíkra leképező lineáris törtfüggvényt a következőképpen írhatunk fel. Három pont egyértelműen meghatároz egy körvonalat. Vegyünk tehát fel a  $|z| = 2$  körvonalon három pontot, feleltessünk meg ezeknek a  $\text{Re } w = 0$  egyenesen három al-

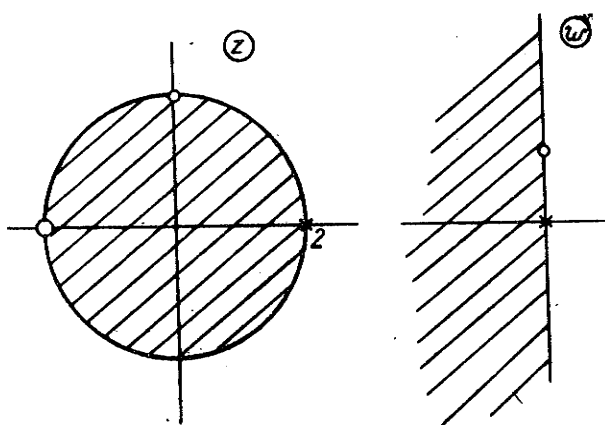
kalmas pontot, és próbáljunk felírni egy olyan lineáris törtfüggvényt, amely a kijelölt  $z_1, z_2, z_3$  pontokat épp a nekik megfelelő  $w_1, w_2, w_3$  pontba viszi át. Amennyiben  $w_1, w_2, w_3$  között a 0 pont és a végtelen távoli pont szerepel, könnyű ilyen lineáris törtfüggvényt felírni. Példánkban például legyen

$$z_1 = 2 \quad \text{képe} \quad w_1 = 0,$$

$$z_2 = 2j \quad \text{képe} \quad w_2 = j,$$

$$z_3 = -2 \quad \text{képe} \quad w_3 = \infty,$$

(49. ábra).



49. ábra

(\*)

$$w = c \frac{z - 2}{z + 2}$$

a  $z_1 = 2$  és  $z_3 = -2$  pontokat nyilván a kívánt képpontokba viszi át.

A  $c$  állandót úgy kell most még meghatároznunk, hogy a (\*) függvény  $z_2 = 2j$ -t  $w_2 = j$ -be vigye át. Ehhez a következő egyenleteket kell megoldanunk:

$$j = c \frac{2j - 2}{2j + 2},$$

azaz

$$c = j \frac{j + 1}{j - 1} = -j \frac{(j+1)^2}{(j-1)(-j-1)} = -j \frac{2j}{2} = 1,$$

és így

$$w = \frac{z - 2}{z + 2}$$

a  $|z| = 2$  körvonalat a  $\operatorname{Re} w = 0$  egyenesbe viszi át. Mivel a függvény a  $z = 0$  pontot  $w = -1$ -be viszi át, függvényünk a  $|z| < 2$  tartományt egyben a  $\operatorname{Re} w < 0$  félsíkba is átviszi, vagyis feladatunk megoldását adja. (Ha olyan  $w = f(z)$  függvényt írtunk volna fel, amely  $|z| < 2$ -t  $\operatorname{Re} w > 0$ -ba viszi át, akkor  $w = -f(z)$  vinné át  $|z| < 2$ -t  $\operatorname{Re} w < 0$ -ba.)

A példa megoldásánál láttuk, igen lényeges volt, hogy a kép-tartomány határgörbéjén a kezdőpont rajta feküdt. Ha nem áll fenn ez az eset, így okoskodhatunk:

4<sup>o</sup> Írjunk fel egy olyan függvényt, amely a  $|z| < 2$  körlemez a  $\operatorname{Re} w < 4$  félsíkba viszi át.

Az előbbi példában láttuk, hogy

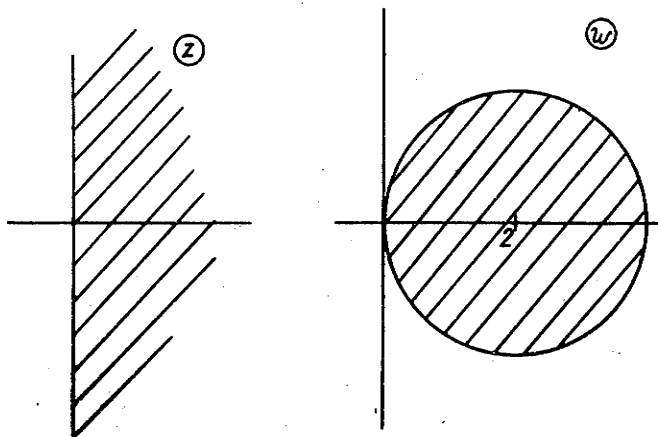
$$w = \frac{z - 2}{z + 2}$$

a  $|z| < 2$  körlemez a  $\operatorname{Re} w < 0$  félsíkba viszi át,

$$w = \frac{z - 2}{z + 2} + 4$$

tehát nyilván a  $|z| < 2$  körlemez a kívánt  $\operatorname{Re} w < 4$  félsíkba viszi át.

5<sup>o</sup> Adjunk meg egy olyan függvényt, amely a  $\operatorname{Re} z > 0$  félsíkot a  $|w - 2| < 2$  körlemezre képezi le. (50. ábra.)



50. ábra

A 3<sup>o</sup> példánál követett okoskodással egy olyan lineáris törtfüggvényt írunk fel (implicit alakban), amely pl. a következő pontokat felelteti meg egymásnak:

$$\begin{array}{ll} w_1 = 4 & \text{-nek megfelelteti} \quad z_1 = 0 \text{ -át,} \\ w_2 = 2+2j\text{-nek} & " \quad z_2 = -j \text{ -t,} \\ w_3 = 0 \text{ -nak} & " \quad z_3 = \infty \text{ -t.} \end{array}$$

$$z = c \frac{w - 4}{w}$$

az első és harmadik követelménynek nyilván megfelel. A második követelmény értelmében

$$\begin{aligned} -j &= c \frac{2j - 2}{2 + 2j}, \\ c &= -j \frac{1 + j}{j - 1} = +j \frac{(1 + j)^2}{2} = j^2 = -1, \end{aligned}$$

vagyis

$$z = \frac{4 - w}{w},$$

ill. explicit alakra hozva

$$w = \frac{4}{z + 1}$$

egy, a kívánt leképezést adó függvény. (Azt a tényt, hogy e függvény nemcsak a tartományok határgörbéit, hanem magukat a tartományokat is egymásba képezi le könnyen beláthatjuk:  $w = 2$  -nek megfelel  $z = 1$ .)

Általában a következőképpen adható meg egy olyan  $w = f(z)$  lineáris törtfüggvény, amely a  $z$ -síkból a végesben fekvő egymástól különböző  $z_1, z_2, z_3$  pontokat a  $w$ -sík három végesben fekvő, egymástól különböző  $w_1, w_2, w_3$  pontjába viszi át:

$$(*) \quad \frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

(\*) valóban lineáris törtfüggvény és a  $z_k$  pontokat a kívánt  $w_k$  pontokba ( $k = 1, 2, 3$ ) viszi át.

Ha a  $z_k$  vagy  $w_k$  számok közül egyik végtelenné válik, akkor  $(\kappa)$  számlálóiban, ill. nevezőiben azokat a különbségeket, amelyekben ez a szám szerepel, 1-gyel kell helyettesíteni. Ha p.  $z_3 = \infty$  és  $w_1 = \infty$ , akkor a  $(\kappa)$  képlet az

$$\frac{1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{1}{1}$$

ill.

$$w = w_2 + (w_3 - w_2) \frac{z - z_2}{z - z_1}$$

alakot ölti. Ez utóbbi függvény valóban a  $z = z_1$  pontnak a  $w_1 = \infty$ , a  $z = z_2$  pontnak a  $w = w_2 + (w_3 - w_2)0 = w_2$ , a  $z = z_3 = \infty$  pontnak a  $w = w_2 + (w_3 - w_2) \cdot 1 = w_3$  pontot felelteti meg.

Megjegyezzük, hogy  $(\kappa)$  az egyetlen olyan lineáris törtfüggvény, amely adott három különböző  $z_1, z_2, z_3$  pontot adott három különböző  $w_1, w_2, w_3$  pontba viszi át (amennyiben e pontok valamelyike nem fekszik a végesben, a fent részletezett  $(\kappa)$ -ból felírható lineáris törtfüggvény a leképezést létesítő egyetlen lineáris törtfüggvény). Az állítás bizonyítására nem térünk ki.

Sokszöggel határolt tartományok leképezésének kérdésére a 22. fejezetben még visszatérünk.

Mielőtt a reguláris komplex változós függvények által nyújtott leképezés vizsgálatára rátérnénk, foglalkoznunk kell azzal a kérdéssel, hogy hogyan a legcélszerűbb általában a komplex számsíkon futó görbe egyenletét a továbbiakban felírunk.

b) Térgörbék, speciális síkgörbék egyenletét egyparaméteres vektor-skalárfüggvénnyel, ill. paraméteres egyenletrendszerrel adtuk meg. Pl. egy, az  $XY$  síkban fekvő  $L$  görbe megadása

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

alakban, ill.

$$x = x(t),$$

$$y = y(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

paraméteres egyenletrendszerrel történhetik. Ha mármost a  $z$  komplex számsíkban fekvő  $L$  görbe egyenletét akarjuk felírni, az a fentihez hasonlóan



$$x = x(t),$$

$$y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

paraméteres egyenletrendszerrel történik, ahol  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ , vagyis a fenti paraméteres egyenletrendszert rövidebben

$$z = x(t) + j y(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

ill.

$$z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

alakban is felírhatjuk. A komplex számsíkon haladó görbe egyenletét tehát a valós  $t$  paraméter  $z(t)$  komplex értékű függvényével adhatjuk meg.

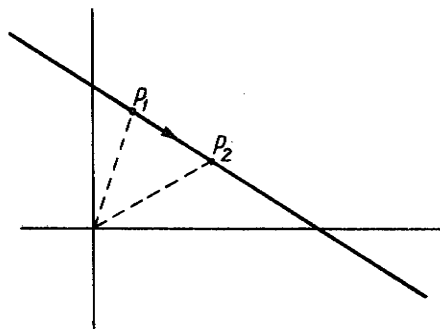
Pl. a  $z_1$  és  $z_2$  komplex számokkal megadott  $P_1$  és  $P_2$  pontokon áthaladó egyenes egyenlete

$$(x) \quad z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

alakban is felírható, ahol  $t$  valós paraméter. Ha  $t$  0-tól 1-ig változik, a megfelelő  $z$  befutja a  $P_1$  és  $P_2$  pont közötti egyenesszakaszt (51. ábra).

Speciálisan a  $z = 0$  és  $z = 2-j$  pontokat összekötő egyenesszakasz egyenlete:

$$z = (2-j)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$



51. ábra

A  $z = a$  középpontú  $R$  sugarú körvonal egyenlete

$$(xx) \quad z = a + R e^{jt}$$

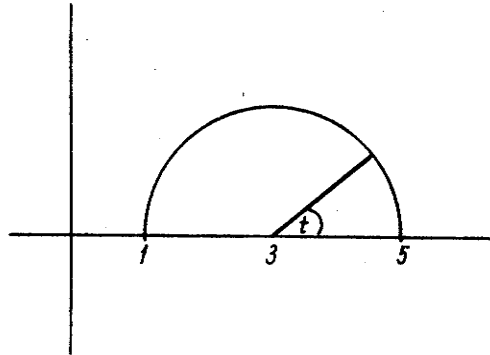
Ha ugyanis  $a = 0$ , akkor a vizsgált körvonalon azok és csak azok a komplex számok fekszenek, melyeknek abszolút értéke  $R$ , vagyis amelyekre

$$z = R e^{jt}$$

(a komplex szám arkuszát  $t$ -vel jelöltük). Ha a vizsgált kör középpontja  $a \neq 0$ , akkor a  $z = 0$  középpontu  $R$  sugaru körvonalból a -val történő eltolással adódik a vizsgált körvonal egyenlete.

Pl. a  $z = 3$  középpontu  $R = 2$  sugaru körvonal  $\text{Im } z > 0$  részének (52. ábra) egyenlete:

$$z = 3 + 2 e^{jt}, \quad 0 < t < \pi.$$



52. ábra

Ha a komplex számsíkon haladó görbe egyenletét a valós  $t$  paraméter  $z(t)$  komplex értékű függvényével adjuk meg, látható, hogy

$$\frac{d z(t)}{dt} = z'(t) \neq 0$$

esetén  $z'(t)$  mint komplex vektor a görbének a  $t$  paraméterű pontbeli érintővektorát adja meg. Ha történetesen a paraméter az  $s$  ívhosszuság, akkor  $\frac{dz}{ds} \neq 0$  az érintő egységvektort szolgáltatja.

Ha az  $L$  görbe egyenletét megadó  $z(t)$  függvény folytonosan differenciálható az  $\alpha \leq t \leq \beta$  intervallumban, akkor az ezen paraméterértékeknek megfelelő görbedarab ívhosszúsága:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt.$$

Ennélfogva a  $t = \alpha$  és  $t$  paraméterű pontok közötti ívhosszúság

$$s(t) = \int_{\alpha}^t |z'(t)| dt,$$

és így

$$\frac{ds}{dt} = |z'(t)|.$$

c) Legyen a  $w = f(z)$  függvény a  $z_0$  helyen reguláris, és tegyük fel, hogy  $f'(z_0) \neq 0$ . Legyen továbbá  $L$  egy, a  $z_0$  ponton áthaladó  $z = z(t)$  paraméteres előállítású görbe, melyre  $z(t_0) = z_0$  és  $z'(t_0) \neq 0$ . Legyen továbbá  $L'$  a  $w$ -síknak  $w = f(z(t))$  előállítású görbéje; vagyis legyen  $L'$  az  $L$  görbe  $w$ -síkbeli képe, amelyen a  $t_0$  paraméterértéknek az  $f(z_0) = w_0$  pont felel meg.

Elsősorban belátjuk, hogy az  $L'$  görbének is van érintője a  $w_0$  pontban. Ugyanis:

$$\left[ \frac{d f(z(t))}{dt} \right]_{t=t_0} = f'(z(t_0)) \cdot z'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \neq 0$$

a tett kikötések mellett.

Az  $L$  görbe  $z_0$  pontbeli érintőjének irányszögét (az érintőnek a valós tengely pozitív irányával bezárt szögét)  $\varphi$ -vel,  $L'$   $w_0$ -beli érintőjének irányszögét  $\psi$ -vel jelölve az adódott tehát, hogy

$$\begin{aligned} \psi &= \arctan \left( \frac{d f(z(t))}{dt} \right) = \arctan (f'(z_0) \cdot z'(t_0)) = \\ &= \arctan f'(z_0) + \arctan z'(t_0) = \arctan f'(z_0) + \varphi. \end{aligned}$$

Eszerint tehát a  $z_0$  pontban érintővel rendelkező görbék képei a  $w_0$  pontban érintővel rendelkeznek és a képgörbe érintője az eredeti görbe érintőjéhez képest az  $\arctan f'(z_0)$  szöggel van elforgatva. Két, a  $z_0$  ponton áthaladó  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  irányszögű érintővel rendelkező görbét vizsgálva a megfelelő képgörbék érintőinek irányszöge:

$$\psi_1 = \arctan f'(z_0) + \varphi_1,$$

$$\psi_2 = \arctan f'(z_0) + \varphi_2,$$

vagyis az érintők által bezárt szög:

$$\psi_1 - \psi_2 = (\arctan f'(z_0) + \varphi_1) - (\arctan f'(z_0) + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Arra az eredményre jutottunk tehát, hogy a tett feltevések mellett a  $z_0$  ponton áthaladó görbék érintőinek hajlásszöge megegyezik a képgörbék érintőinek hajlásszögével, a leképezés szögtartó a  $z_0$  pontban.

Ha továbbá az  $L$  görbe előállításában  $z'(t)$  a  $t_0$  hely környezetében,  $f'(z)$  pedig  $z_0$  környezetében folytonos, akkor  $s(t)$ -vel jelölve az  $L$  görbén,  $S(t)$ -vel pedig az  $L'$  görbén a  $t_0$  paraméterű ponttól számított ívhosszusát

$$\left[ \frac{ds}{dt} \right]_{t=t_0} = |f'(z_0) \cdot z'(t_0)| = |f'(z_0)| \left[ \frac{ds}{dt} \right]_{t=t_0},$$

ugyhogy a képgörbe ívhosszuságának megváltozása  $t$ -nek kis megváltozása esetén jó közelítéssel  $|f'(z_0)|$ -szerese az eredeti görbe ívhosszúsága megváltozásának. A  $z_0$  ponton áthaladó különböző görbék ívhosszúságai tehát ugyanolyan arányban torzulnak, a leképezés aránytartó.

### Definíció

A szögtartó és aránytartó leképezést konformis leképezésnek nevezzük.

Előbbi okoskodásaink eredménye tehát a következő állításban foglalható össze:

A reguláris  $f(z)$  függvény által létesített leképezés konformis minden olyan  $z_0$  pontban, ahol  $f'(z_0) \neq 0$ .

Pl.  $w = z^2$  az egész síkban reguláris függvény,  $w' = 2z \neq 0$ , ha  $z \neq 0$ , tehát a  $z = 0$  pont kivételével mindenütt konformis leképezést létesít. Valóban a

$$|z| = 2 \quad \text{és} \quad \arg z = 0$$

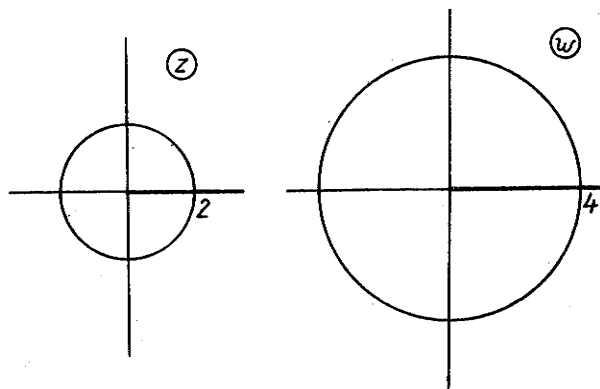
görbék (amelyek egymást a  $z = 2$  pontban derékszögben metszik) a

$$|w| = 2^2 = 4 \quad \text{és} \quad \arg w = 0$$

görbékbe viszi át, és ezek szintén derékszögben metszik egymást (53. ábra). Ha azonban az egymást a  $z = 0$  pontban metsző

$$\arg z = \frac{\pi}{6} \quad \text{és} \quad \arg z = \frac{\pi}{4}$$

félegyeneseket tekintjük (ezek hajlásszöge  $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ ), e görbék a  $w = z^2$  függvény által létesített leképezés az



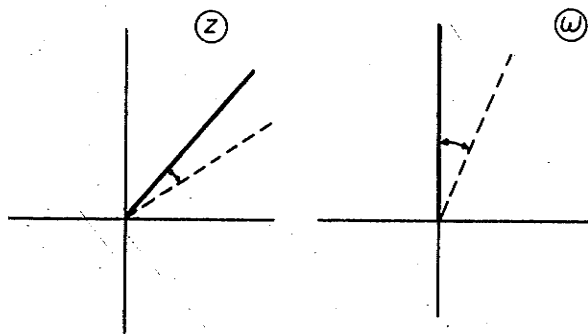
53. ábra

$$\operatorname{arc} w = 2 \frac{\tilde{\kappa}}{6} = \frac{\tilde{\kappa}}{3} \quad \text{és} \quad \operatorname{arc} w = 2 \frac{\tilde{\kappa}}{4} = \frac{\tilde{\kappa}}{2}$$

görbékbe viszi át ( $\operatorname{arc} w = \operatorname{arc} z^2 = 2 \operatorname{arc} z$ ), s ezen képgörbék hajlásszöge:

$$\frac{\tilde{\kappa}}{2} - \frac{\tilde{\kappa}}{3} = \frac{\tilde{\kappa}}{6} \neq \frac{\tilde{\kappa}}{12},$$

a leképezés a  $z = 0$  pontban valóban nem szögtartó (54. ábra).



54. ábra

A  $w = z^2$  függvény által létesített leképezés az

$$L: \quad z = (1 + j)t \quad \left( \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \varepsilon \right)$$

egyenesszakaszt az

$$L' \quad w = 2jt^2 \quad \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$$

szakaszba viszi át.

$L$  ivhosszúsága  $s = |(1+j)\varepsilon| = \sqrt{2}\varepsilon$ , mivel pedig a  $z = (1+j)\frac{1}{2}$  helyen  $|w'| = |2 \cdot (1+j) \cdot \frac{1}{2}| = |(1+j)| = \sqrt{2}$  adódik, hogy

$$L' \text{ ivhosszúsága } S \approx \sqrt{2} s = \sqrt{2} \sqrt{2} \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Pontosan elvégezve a számítást  $L'$  ivhosszúságára

$$S = \left| 2j\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2 - 2j\left(\frac{1}{2}\right)^2 \right| = 2 \left| \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2 - \frac{1}{4} \right| = 2\varepsilon + 2\varepsilon^2$$

adódik, és ez kicsiny  $\varepsilon > 0$  esetében valóban jó közelítéssel  $2\varepsilon$ -nal egyenlő.

Más példaként vizsgáljuk meg a  $w = \sin z$  függvény által létesített leképezést. E függvény az egész komplex számsíkban értelmezett reguláris függvény. A függvényt valós és képzetes részre bontva ugyanis (lásd 12.) 4<sup>o</sup>)  $z = x + jy$  mellett

$$(10) \quad \begin{aligned} u &= \operatorname{Re} \sin z = \sin x \operatorname{ch} y, \\ v &= \operatorname{Im} \sin z = \cos x \operatorname{sh} y, \end{aligned}$$

e függvények differenciálhatók és kielégítik a Cauchy-Riemann-féle párciális differenciálegyenleteket.

Mivel

$$(\sin z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y - j \sin x \operatorname{sh} y = \cos z,$$

a  $w = \sin z$  függvény által létesített leképezés a  $z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$  helyeken konformis. Az  $y = b$ , ( $b \neq 0$ )  $x = c$  egyenesek képei tehát egymást derékszögben metsző görbék lesznek, a  $z$ -sík un. koordinátahálózataát tehát a  $w = \sin z$  függvény által létesített leképezés ortogonális görbeseregbe viszi át.

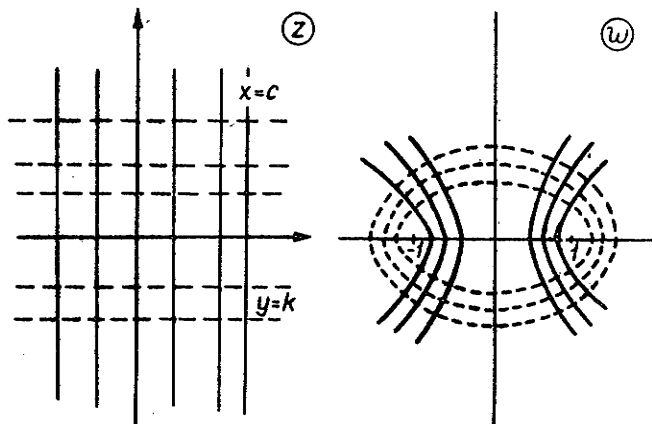
(10) -re való tekintettel az  $y = b$  egyenesek képei

$$\begin{aligned} u &= \sin x \operatorname{ch} b, & \sin x &= \frac{u}{\operatorname{ch} b}, \\ \text{ill.} & & & \\ v &= \cos x \operatorname{sh} b, & \cos x &= \frac{v}{\operatorname{sh} b} \quad (b \neq 0), \end{aligned}$$

vagyis utóbb nyert két összefüggésünket négyzetreemelve és összeadva adódik:

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 b} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 b} = 1.$$

Az  $y = b$  ( $b \neq 0$ ) egyenessereg képe tehát  $\operatorname{ch} b$ , ill.  $|\operatorname{sh} b|$  féltengelyű ellipszissereg. Ezen ellipszissereg konfokális, mert bármely  $b \neq 0$  mellett az adódó ellipszis fókuszai az  $u$  tengely  $\pm \sqrt{\operatorname{ch}^2 b - \operatorname{sh}^2 b} = \pm 1$  pontjai (55. ábra).



55. ábra

Az  $x = c$  egyenesek képei (10).-ből adódóan a

$$\operatorname{ch} y = \frac{u}{\sin c}, \quad (c \neq k\pi)$$

$$\operatorname{sh} y = \frac{v}{\cos c}$$

képletek négyzetreemelése és összevonásából adódóan az

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$$

hiperbolák. E hiperbolák is konfokálisak, hiszen bármely  $c \neq k\tilde{\pi}$  mellett az adódó hiperbola fókuszai az  $u$  tengely  $\pm \sqrt{\sin^2 c + \cos^2 c} = \pm 1$  pontjai.

Speciálisan az  $x = k\tilde{\pi}$  egyenesek képei (10)-ből kiolvashatóan az  $u = 0$  egyenes megfelelő szakaszai, míg  $y = 0$  képe a  $v = 0$  egyenes  $-1 \leq u \leq 1$  szakasza.

Hasonlóképpen vizsgálható a  $w = \cos z$ , ill. a  $w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$  függvény által létesített leképezés.

### 15. Az exponenciális függvény és annak Riemann-felülete. A logaritmus-függvény. Az általános hatványfüggvény

a) A  $w = e^z$  függvényt a 11. fejezetben értelmeztük:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

$w = e^z$  az egész síkban reguláris függvény. Az Euler-összefüggésből kiolvashatóan  $2\tilde{\pi}j$  szerint periodikus függvény:

$$(1) \quad e^{z+2\tilde{\pi}j} = e^z e^{2\tilde{\pi}j} = e^z (\cos 2\tilde{\pi} + j \sin 2\tilde{\pi}) = e^z.$$

Vizsgáljuk meg a függvény által létesített leképezést.

A  $z$ -sík valós tengelyével párhuzamos, azaz

$$y = c$$

egyenletű egyenes képe a  $w$ -síkbeli kezdőpontból kiinduló  $c$  irányszögű félegyenes; ennek egyenlete

$$\operatorname{arc} w = c.$$

(Mivel ugyanis  $e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy}$ ,  $y = \operatorname{arc} e^z$ .)

A  $z$ -sík képzetes tengelyével párhuzamos, azaz

$$x = b$$

egyenletű egyenes képe a  $w$ -síkbeli kezdőpont körüli  $e^b$  sugarú körvonallal; ennek egyenlete



$$|w| = e^b.$$

(Mivel  $|e^z| = e^x$ .)

Látható tehát, hogy a  $w = e^z$  függvény a  $z$ -sik tetszőleges  $a < y \leq a + 2\pi$ ,  $-\infty < x < +\infty$  sávját az egész  $w$ -sikra képezi le  $w = 0$  kivételével; bármely  $z$  és  $z + 2\pi j$  pontnak ugyanaz a kép-pont felel meg, annak megfelelően, hogy  $e^z$   $2\pi j$  szerint periodikus függvény.

Ha a  $z$ -siknak egy olyan  $D$  tartományát akarjuk megadni, amelynek kölcsönösen egyértelmű leképezését adja meg  $w = e^z$  a  $w$ -sikra, akkor  $D$  nem tartalmazhat olyan pontokat, melyeknek  $w = e^z$  ugyanazon képpontokat felelteti meg. Bármely egész  $k$  mellett azonban a

$$(2) \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2k-1)\pi < y < (2k+1)\pi$$

sávot azon  $w$  értékek halmazára képezi le kölcsönösen egyértelműen  $w = e^z$ , amelyekre

$$(3) \quad 0 < |w| < \infty, \quad (2k-1)\pi < \arg w < (2k+1)\pi.$$

(3) a negatív valós tengely mentén bemetszett  $w$ -sik. A (2)-beli sáv-határoknak a bemetszés "partjai" felelnek meg az  $e^z$  függvény által létesített leképezésnél. Az  $y = (2k-1)\pi$  egyenesnek (a (2) sáv alsó határának) az alsó part, az  $y = (2k+1)\pi$  egyenesnek (a (2) sáv felső határának) a felső part felel meg.

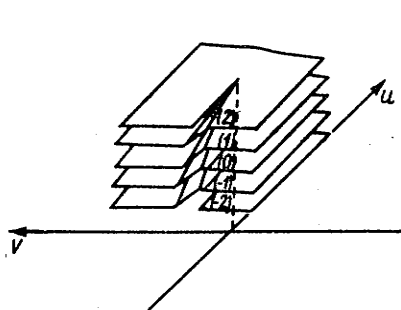
Mivel a (2) sávokkal a  $z$ -sikot végtelen sok részre vághatjuk fel, s ezek mindegyikét külön-külön a negatív valós tengely mentén bemetszett  $w$ -sikra képezi le kölcsönösen egyértelműen  $w = e^z$ , ahhoz, hogy az egész  $z$ -sik kölcsönösen egyértelmű és folytonos képére jussunk a  $w = e^z$  függvény által létesített leképezésnél a következőképpen okoskodhatunk.

Vegyük a negatív valós tengely mentén bemetszett  $w$ -siknak végtelen sok példányát. Legyen a  $k$ -adik sik ( $k$ -sik) a (2) sáv képe a  $w = e^z$  függvény által létesített leképezésnél. Ragasszuk össze ezeket a sávokat egymással úgy, hogy a nekik megfelelő sávok csatlakozzanak egymáshoz. Tehát a  $0$ -sikkal kezdve (ez a  $-\pi < y < \pi$   $-\infty < x < \infty$  sáv képe) e sik bemetszésének felső partjához ragasztjuk az  $1$ -sik (ez a  $\pi < y < 3\pi$ ,  $-\infty < x < \infty$  sáv képe) bemetszésének alsó partját; az  $1$ -sik bemetszésének felső partját a  $2$ -sik (a  $3\pi < y < 5\pi$   $-\infty < x < \infty$  sáv képe) bemetszésének alsó partjához ragasztva, az eljárást  $k = 3, 4, \dots$  esetére folytatjuk. A  $0$ -sikon szabadon maradt a negatív valós tengely mentén történt bemetszés alsó partja; ehhez a  $-1$ -sik (a  $-3\pi < y < -\pi$ ,  $-\infty < x < \infty$  sáv képe) bemetszésének felső partját, a  $(-1)$ -sik bemetszésének alsó

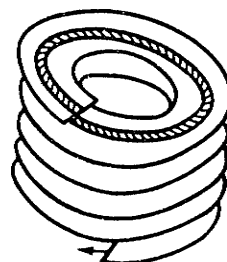
partját a  $(-2)$ -sík bemetszésének felső partjához ragasztjuk (e sík a  $-5\pi < y < -3\pi$ ,  $-\infty < x < \infty$  sáv képe) és az eljárást a  $k = -3, -4, \dots$  síkokra hasonlóképpen folytatjuk.

Az így megszerkesztett  $R$  végtelen soklevelű felületet a  $w = e^z$  függvény Riemann-felületének nevezzük (56. ábra). A  $w = e^z$  függvény az egész nyílt  $z$ -síkot (az egész  $z$ -sík, anélkül, hogy azt a végtelen távoli ponttal kiegészítő) kölcsönösen egyértelműen és folytonosan képezi le az  $R$  Riemann-felületre.

Jól szemléltethető a  $0 < \operatorname{Re} z < a$  sáv képe a  $w = e^z$  függvény által létesített leképezésnél az  $e^z$   $R$  Riemann-felületén. E sáv képe az  $1 < |w| < e^a$  körgyűrű fölött csigalépcsőhöz hasonló módon elhelyezkedő végtelen csigaalakú sáv (57. ábra).



56. ábra



57. ábra

Megjegyezzük még, hogy  $w = e^z$  a  $w = 0$  és  $w = \infty$  értékeket sehol sem veszi fel. E pontok felett tehát  $e^z$   $R$  Riemann-felületének nincsenek pontjai.

b) A valós mintájára a

$$(4) \quad w = \ln z$$

függvényt a

$$(5) \quad z = e^w$$

összefüggéssel értelmezzük.

A (4) függvény valós és képzetes részét a következő megfontolással kaphatjuk meg. Legyen

$$w = u + jv, \quad |z| = r, \quad \arg z = \varphi.$$

(5) értelmében

$$re^{j\varphi} = e^{u+jv} = e^u e^{jv},$$

azaz mivel két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha abszolút értékeik megegyeznek egymással, arkuszaik pedig egymástól csak  $2\pi$  többszörösében különböznek

$$r = e^u, \quad \varphi + 2k\pi = v,$$

vagyis másképp írva

$$u = \ln r = \ln |z|,$$

$$v = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi.$$

Bármely  $z$  számra ( $z \neq 0$ ) tehát  $\ln z$  végtelen sokértékű függvény, értékei:

$$(6) \quad \ln z = \ln |z| + j(\arg z + 2k\pi)$$

Az  $\ln z$  függvény főértékének azt az ágat nevezzük, amelyben az  $\arg z + 2k\pi$  érték  $-\pi$  és  $\pi$  közé esik; röviden írva:

$$(7) \quad \text{Ln } z = \ln |z| + j \arg z, \quad \text{ahol} \quad -\pi < \arg z \leq \pi$$

$\ln z$  többi értéke a (7) főértékből  $2\pi j$  egész számú többszörösének hozzáadásával adódik.

Mint hogy  $-\pi < \arg z < \pi$  esetén  $\arg z$  folytonos függvény, azért  $\ln z$  főértéke,  $\text{Ln } z$ , a negatív valós tengely mentén bemetszett síkban folytonos függvény. Ugyanitt differenciálható is, mert a

$$w = \text{Ln } z, \quad w_0 = \text{Ln } z_0$$

jelöléssel

$$\frac{\text{Ln } z - \text{Ln } z_0}{z - z_0} = \frac{w - w_0}{z - z_0} = \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}},$$

és ha  $z \rightarrow z_0$ , akkor  $\text{Ln } z$  folytonossága miatt  $w \rightarrow w_0$ , úgyhogy

$$\frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} \rightarrow \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}.$$

### Tétel

Ha  $z$  nem fekszik a negatív valós tengelyen és  $z \neq 0$ , akkor érvényes a

$$\frac{d \operatorname{Ln} z}{dz} = \frac{1}{z}$$

differentiálási szabály.

A (7) függvény egyértelműen és konformisan (mivel  $\frac{d \operatorname{Ln} z}{dz} \neq 0$ ) képezi le a negatív valós tengely mentén bemetszett síkot a  $-\tilde{\pi} < v < \tilde{\pi}$ ,  $-\infty < u < +\infty$  sávra ( $\operatorname{Ln} z = u + jv$ ). Ha a negatív valós tengely egy  $-a$  pontjához felülről (az  $\operatorname{Im} z > 0$  félsíkból) közeledünk, akkor  $\operatorname{Ln} z \rightarrow \ln a + \tilde{\pi}j$ , ha ugyanehhez a ponthoz alulról (az  $\operatorname{Im} z < 0$  félsíkból) közeledünk, akkor  $\operatorname{Ln} z \rightarrow \ln a - \tilde{\pi}j$ . Ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy a bemetszés különböző partjain (ti. felső és alsó partján) az  $\operatorname{Ln} z$  különböző (egymástól  $2\tilde{\pi}j$ -ben különböző) értékeket vesz fel.

A (6), vagyis a többértékű  $\ln z$  függvény által létesített leképezést vizsgálva a következőképpen járhatunk el. Legyen  $D$  a negatív valós tengely mentén bemetszett  $z$ -sík.  $D$ -t (6) egyes ágai (a (6)-ból  $k$  különböző értékei mellett adódó függvények) a  $w$ -sík egyes  $(2k-1)\tilde{\pi} < v < (2k+1)\tilde{\pi}$ ,  $-\infty < u < +\infty$  sávjaira, a negatív valós tengelyt pedig a  $v = (2k+1)\tilde{\pi}$  egyenesekre képezik le. A  $D$  tartomány nyilván végtelen sokféleképpen helyezhető el  $z = e^w$  Riemann-felületén (jelöljük ezt  $R'$ -vel). Helyezzük el a  $D$  tartományt a Riemann-felület (0)-lapján. Ekkor  $v = \operatorname{arc} z - \tilde{\pi}$  és  $\tilde{\pi}$  között változik, vagyis  $\ln z$  az  $R'$  Riemann-felületet kölcsönösen egyértelműen az egész  $w$ -síkra,  $\operatorname{Ln} z$   $R'$  fent kijelölt levelét a  $-\infty < \operatorname{Re} w < +\infty$ ,  $-\tilde{\pi} < \operatorname{Im} w \leq \tilde{\pi}$  sávra képezi le.

Pozitív  $z$ -kre  $\operatorname{arc} z = 0$ ,  $\operatorname{Ln} z = \ln z$ , vagyis a valósban már megismert közösleges logaritmus-függvényre jutunk. Könnyen belátható, hogy  $\ln z$  ( $\ln x$ -nek a komplex számsíkban való folytatása) rendelkezik a logaritmus jól ismert tulajdonságaival:

$$\operatorname{Ln} (z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$$

olyan  $z_1$  és  $z_2$ -re, melyeknél  $\operatorname{arc} z_1$ ,  $\operatorname{arc} z_2$ ,  $\operatorname{arc} z_1 + \operatorname{arc} z_2$  ( $-\tilde{\pi}$ ,  $\tilde{\pi}$ ]-be esik.

Az  $\ln z$  függvény értelmezéséből folyik, hogy könnyen kiszámítható pl.:

$$\ln j = \ln 1 + j \left( \frac{\tilde{\pi}}{2} + 2k\tilde{\pi} \right) = j \left( \frac{\tilde{\pi}}{2} + 2k\tilde{\pi} \right)$$

$$\ln(-2) = \ln 2 + j(\pi + 2k\pi) \approx 0,69 + j(2k + 1)\pi,$$

$$\ln(3-4j) = \ln 5 + j(-0,93 + 2k\pi).$$

c) A  $w = z^a$  általános hatványfüggvényt ( $z \neq 0$ ), ahol  $a = \alpha + j\beta$  tetszőleges komplex szám, a

$$z^a = e^{a \ln z} \quad (z \neq 0)$$

összefüggéssel definiáljuk.  $\beta = 0$  és racionális  $\alpha$  esetén e definíció az eddigi definícióval összhangban van.

$z$  -t exponenciális alakban írva fel:  $z = r e^{j\varphi}$

$$\ln z = \ln r + j(\varphi + 2k\pi),$$

tehát

$$z^a = e^{(\alpha + j\beta) \ln z} = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} e^{j(\alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r)}.$$

Ha  $\beta = 0$ , vagyis valós  $a$  esetében  $z^a$  összes értékei a

$$|w| = |z^a| = e^{a \ln r} = r^a$$

körvonalon helyezkednek el, míg ekkor

$$(\kappa) \quad \arg z^a = \varphi_k = a\varphi + 2k\pi a.$$

Ha  $a$  racionális, vagyis ha  $a = \frac{p}{q}$  ( $p$  és  $q \neq 0$  egész és relatív prim), akkor  $(\kappa)$  értékei közül csak  $q$  számú olyan fordul elő, amely egymástól nem  $2\pi$  egész számú többszörösében tér el:

$$\varphi_0 = a\varphi, \quad \varphi_1 = a\varphi + \frac{p}{q} 2\pi, \quad \varphi_2 = a\varphi + \frac{p}{q} 4\pi, \dots, \quad \varphi_{q-1} = a\varphi + \frac{p}{q} (q-1)2\pi.$$

Látjuk, hogy racionális  $a = \frac{p}{q}$  értékek esetében a  $z^a$  függvény azonos a  $\sqrt[q]{z^p}$  függvénnyel:

$$w = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}.$$

Irracionális  $a$  esetében nincsenek  $(\kappa)$  értékei között olyanok, amelyek egymástól csak  $2\pi$  többszörösében különböznenek, (ha ui. egész  $k_1$  és  $k_2$  esetében  $k_1 \neq k_2$  és  $2k_1\pi a - 2k_2\pi a = 2\pi n$  volna,

ahol  $n$  egész szám, akkor  $a = \frac{n}{k_1 - k_2}$  racionális szám volna),  
 $a$

$$w = z^a = e^{a \ln z}$$

függvény tehát irracionális  $a$  esetében is végtelen sokrétű függvény.

#### Példák

$$j^j = e^{j \ln j} = e^{j(\ln 1 + j(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$$

$$j^{\tilde{\pi}} = e^{\tilde{\pi} \ln j} = e^{\tilde{\pi}(\ln 1 + j(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{j\tilde{\pi}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$$

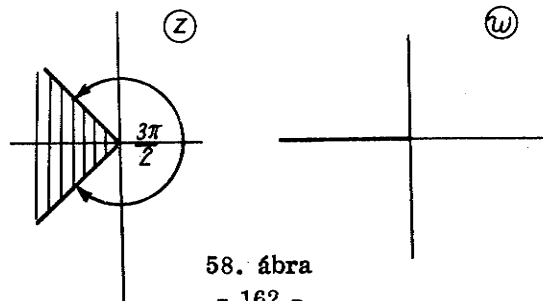
A  $z^a$  hatványfüggvény definíciója értelmében  $e$  többértékű függvénynek kiválasztható reguláris ága, ugyanott, ahol az  $\ln z$  függvényé. Pl. kiválasztható  $z^a$  reguláris ága a negatív valós tengely mentén bemetszett síkon:

$$e^{a \operatorname{Ln} z} = e^{a(\ln z + j \operatorname{arc} z)}, \quad (-\pi < \operatorname{arc} z \leq \tilde{\pi}).$$

Ez az ág reguláris, az összetett függvény differenciálási szabálya értelmében:

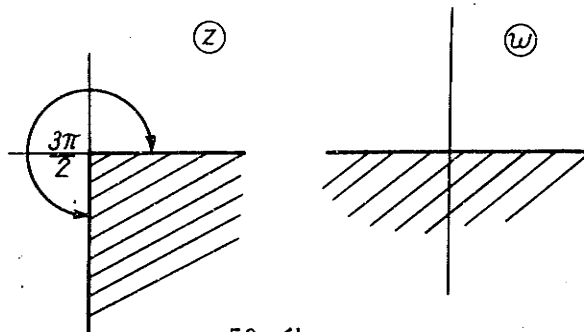
$$\frac{dz^a}{dz} = \frac{d e^{a \operatorname{Ln} z}}{dz} = e^{a \operatorname{Ln} z} \cdot \frac{a}{z} = a z^{a-1}.$$

Speciálisan, ha  $a > 0$ , a következőket mondhatjuk.  $a > 1$  esetén  $z^a$  főértéke  $(e^{a \operatorname{Ln} z})^a - \frac{\tilde{\kappa}}{a} < \operatorname{arc} z < \frac{\tilde{\pi}}{a}$  szögteret kölcsönösen egyértelműen és konformisan képezi le a negatív tengely mentén bemetszett  $w$  síkra ( $a = \frac{4}{3}$  esetén lásd az 58. ábrát), a



58. ábra

$0 < \arg z < \frac{\pi}{a}$  szögtér a felső félsíkra képződik le. Ha  $a < 1$ , akkor a negatív valós tengely mentén bemetszett síkra való kölcsönösen egyértelmű leképezés nem lehetséges. Ha azonban  $\frac{1}{2} < a < 1$ , akkor  $z^a$  főértéke a  $0 < \arg z < \frac{\pi}{a}$  szögteret kölcsönösen egyértelműen képezi a felső félsíkra ( $a = \frac{2}{3}$  esetén lásd az 59. ábrát).



59. ábra

Más többértékű függvény esetén is bevezethető a Riemann-felület fogalma, de aránylag igen egyszerű függvényekhez tartozó Riemann-felületek sem szemléltethetők a térben mindig úgy, mint  $w = \ln z$  Riemann-felülete.

Vizsgáljuk meg pl. a  $w = \sqrt{z}$  ( $z = w^2$ ) függvény által nyújtott leképezést. E függvény kétértékű, minden  $z \neq 0$  értékhez két különböző függvényértéket rendel. A függvény által nyújtott leképezése a  $z$ -síknak a  $w$ -síkra tehát nem kölcsönösen egyértelmű. A leképezés kölcsönösen egyértelmű azonban a  $z$ -sík és  $w^2$  alább megkonstruálandó Riemann-felülete között.

Tekintsük két példányát (lapját) a  $z$ -síknak, mindegyiken bemetszést végezve a negatív valós tengely mentén. Tegyük fel, hogy az I. lapon fekvő  $z$ -khez  $w = \sqrt{z}$  egyik értékét (pl. a valós  $z > 0$  értékekhez  $+\sqrt{z}$  értékét), a II. lapon fekvő  $z$ -khez  $w = \sqrt{z}$  megfelelő másik értékét (valós  $z > 0$  esetén  $-\sqrt{z}$  értékét) rendeljük hozzá. Helyezzük a II. lapot az I. lapra úgy, hogy az azonos koordinátájú pontok egymás felett helyezkedjenek el. Ezután összeragasztjuk egymással az I. lap bemetszésének alsó partját és a II. lap bemetszésének felső partját. Ezután a bemetszések még szabadon maradt két partját (az I. lap bemetszésének felső partját és a II. lap bemetszésének alsó partját) kellene összeragasztani egymással, amit azonban a közönséges térben nem tudunk megvalósítani, hiszen a két összeragasztandó part között terül el az első ragasztással

nyert felület. Ennek ellenére úgy képzeljük, mintha ez az összeragasztás is megtörtént volna és az így adódó felületet nevezzük  $z = w^2$  (ill.  $w = \sqrt{z}$ ) Riemann-felületének. Ezen  $R$  felület a teljes  $z$ -sík felett helyezkedik el, kivéve a  $z = 0$  pontot, minden  $z \neq 0$  pont felett  $R$  két különböző pontja fekszik, amelyek annak különböző lapjaihoz tartoznak. E Riemann-felület és a komplex számsík között (a  $z = 0$  pont kivételével)  $w = \sqrt{z}$  kölcsönösen egyértelmű leképezést létesít.

d) A  $w = \ln z$  függvény segítségével értelmezhetjük a

$$w = \sin z, \quad w = \cos z, \quad w = \operatorname{tg} z$$

függvények inverzeit. Pl.

$$w = \arcsin z \quad \text{jelentése} \quad z = \sin w,$$

azaz

$$z = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j},$$

vagyis

$$(e^{jw})^2 - 2jz(e^{jw}) - 1 = 0,$$

$$e^{jw} = \frac{2jz \pm \sqrt{-4z^2 + 4}}{2} = jz \pm \sqrt{1 - z^2},$$

azaz végeredményben

$$\begin{aligned} w = \arcsin z &= \frac{1}{j} \ln (jz \pm \sqrt{1 - z^2}) = \\ &= \arcsin (jz \pm \sqrt{1 - z^2}) + 2k\pi - j \ln |jz \pm \sqrt{1 - z^2}|. \end{aligned}$$

A  $w = \arcsin z$  függvény által létesített leképezés a  $w = \sin z$  függvény által létesített és a 14. fejezetben tárgyalt leképezés inverz leképezése.

Hasonlóképpen adódik, hogy

$$w = \arccos z = \frac{1}{j} \ln (z \pm \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2j} \ln \frac{j - z}{j + z}.$$

(Az utóbbi függvény csak  $z \neq j$  esetében van értelmezve.)



Pl.

$$\begin{aligned}\operatorname{arc} \sin 2 &= \operatorname{arc} (2j \pm \sqrt{3} j) + 2k\tilde{\pi} - j \ln |2j \pm \sqrt{3} j| = \\ &= \frac{\tilde{\pi}}{2} + 2k\tilde{\pi} - j \ln |2 \pm \sqrt{3}|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arc} \cos j &= \frac{1}{j} \ln (j \pm \sqrt{-1-1}) = \frac{1}{j} \ln (1 \pm \sqrt{2}) j = \\ &= \frac{1}{j} \ln |1 \pm \sqrt{2}| + \operatorname{arc} (1 \pm \sqrt{2}) j + 2k\tilde{\pi},\end{aligned}$$

$$(\operatorname{arc} (1 + \sqrt{2})j = \frac{\tilde{\pi}}{2}, \quad \operatorname{arc} (1 - \sqrt{2})j = -\frac{\tilde{\pi}}{2}).$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2j = \frac{1}{2j} \ln \frac{-j}{3j} = -\frac{j}{2} \ln \frac{1}{3} + \frac{1}{2} (\tilde{\pi} + 2k\tilde{\pi}).$$

## 16. Komplex változós integrál

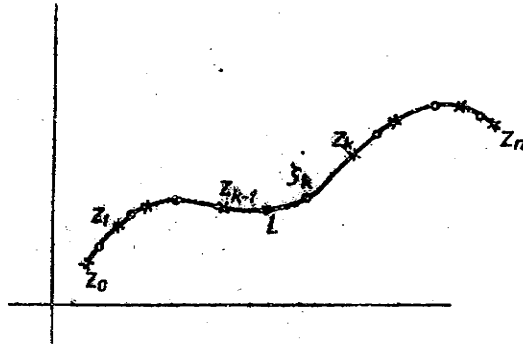
### a) Definíció

Legyen  $L$  egy rektifikálható görbedarab a komplex számsíkban,  $f(z)$  pedig az  $L$  görbe pontjaiban folytonos komplex változós függvény. Osszuk fel az  $L$  görbét a befutás sorrendjében a  $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_n$  osztópontokkal részekre ( $z_0$  tehát az  $L$  görbe kezdő,  $z_n$  pedig az  $L$  végpontját megadó komplex szám). Legyen  $\zeta_k$  a görbedarab  $z_{k-1}$  és  $z_k$  osztópontok közötti ívén fekvő tetszőleges pont (60. ábra). Az  $L$  görbe bármely minden határon túl finomodó felosztás-sorozatához ily módon képezett

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$$

összegek a felosztástól függetlenül bizonyíthatóan egy határértékhez konvergálnak, amelyet az  $f(x)$  komplex változós függvény  $L$  görbe menti integráljának nevezünk és így jelöljük:

$$(*) \quad \int_L f(z) dz.$$



60. ábra

Az  $L$  görbe minden határon túl finomodó felosztás-sorozatán olyan felosztások sorozatát értjük, amelyekben a görbén felvett osztópontok számának növekedésével együtt két-két osztópont közötti görbevek hosszúsága is  $0$ -hoz tart.

A  $(\kappa)$  határérték létezését a következőképpen láthatjuk be.  
Legyen

$$z = x + jy, \quad z_k = x_k + jy_k, \quad \xi_k = \xi_k + j\eta_k,$$

$$f(z) = u + jv.$$

Ekkor az  $f(z)$  függvény integrálközelítő összege:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) &= \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ u(\xi_k, \eta_k) + jv(\xi_k, \eta_k) \right] \left[ (x_k - x_{k-1}) + j(y_k - y_{k-1}) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ u(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) \right] + \\ &\quad + j \sum_{k=1}^n \left[ v(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) + u(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) \right]. \end{aligned}$$

Az itt adódó két összeg azonban az  $u(x,y)\bar{i} - v(x,y)\bar{j}$ , ill. az  $v(x,y)\bar{i} + u(x,y)\bar{j}$  vektor-vektorfüggvény  $L$  görbe mentén vett skalárértékű vonalmenti integráljának integrálközelítő összege (lásd Matematika I/2. jegyzet 49. fejezet), amely összegek a tett feltevések mellett az  $L$  görbe minden határon túl való finomításánál az

$$\int_L (u dx - v dy), \quad \text{ill.} \quad \int_L (v dx + u dy)$$

határértékhez tartanak. Ebből következik, hogy az  $f(z)$  függvényre és az  $L$  görbére tett feltevések mellett a  $(\kappa)$  határérték létezik, és

$$(\kappa) \quad \int_L f(z) dz = \int_L (u dx - v dy) + j \int_L (v dx + u dy).$$

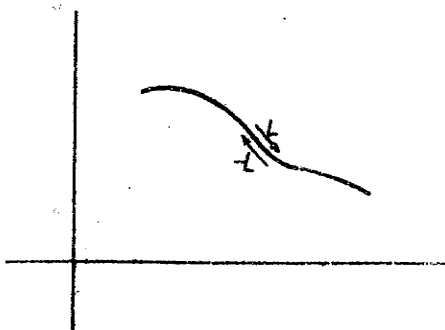
b) Könnyen igazolható, hogy az  $f(z)$  függvény  $L$  görbe mentén vett integrálja a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$1^o \quad \int_L (f_1(z) + f_2(z)) dz = \int_L f_1(z) dz + \int_L f_2(z) dz,$$

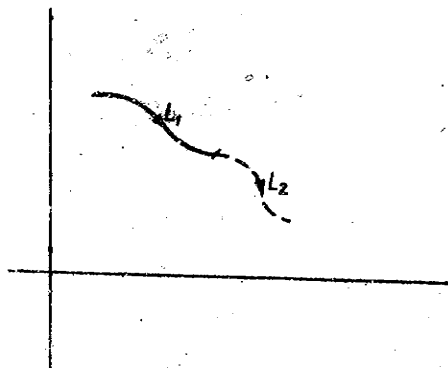
$$2^o \quad \int_L c f(z) dz = c \int_L f(z) dz.$$

Ha  $-L$  jelenti az  $L$  görbedarabot ellenkező irányban történő befutás mellett (61. ábra), akkor

$$3^o \quad \int_{-L} f(z) dz = - \int_L f(z) dz.$$



61. ábra



62. ábra

Ha az  $L$  görbe az  $L_1$  és  $L_2$  görbék egymáshoz fűzésével keletkezik, (62. ábra) akkor

$$4^o \quad \int_L f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz.$$

E tulajdonságokat a  $(\kappa)$  integrálnak a vektorfüggvény skalárértékű vonalmenti integráljával való kapcsolata révén  $(\kappa\kappa)$  formula) azonnal beláthatjuk.

Könnyen igazolható közvetlenül az alábbi egyenlőtlenség:

5<sup>o</sup> Ha az  $L$  görbe ivhosszasága  $\ell$  és  $L$  mentén  $|f(z)| \leq M$ , akkor

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq M \ell.$$

Ekkor ugyanis az  $L$  görbe bármely felosztása mellett

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n M |z_k - z_{k-1}| \leq M \ell.$$

c) Az  $f(z)$  függvény  $L$  görbe mentén vett integrálját gyakran a következőképpen számíthatjuk ki:

Legyen az  $L$  görbe egyenlete paraméteres előállításban megadva:

$$L: \quad z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Tegyük fel, hogy  $z'(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) folytonos (ekkor  $L$  biztosan rektifikálható). A  $(\kappa\kappa)$  formula segítségével ekkor a következőképpen alakíthatjuk át  $f(z)$   $L$  mentén vett integrálját a  $t$  valós paraméter szerinti közönséges (Riemann-féle) integrállá (pontosabban komplex értékű valós változós függvény Riemann-integráljává, amin a függvény valós része integráljának és a képzetes rész integrálja  $j$ -szeresének összegét értjük):

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= \int_L [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + j \int_L [v(x, y) dx + u(x, y) dy] = \\ &= \int_{t=\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] dt + \\ &\quad + j \int_{t=\alpha}^{\beta} [v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + j \int_{t=\alpha}^{\beta} [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)] dt = \\
& = \int_{t=\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t)) + jv(x(t), y(t))] [x'(t) + jy'(t)] dt = \\
& = \int_{t=\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) dt.
\end{aligned}$$

Eredményünk tehát:

$$(1) \quad \int_L f(z) dz = \int_{t=\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) dt,$$

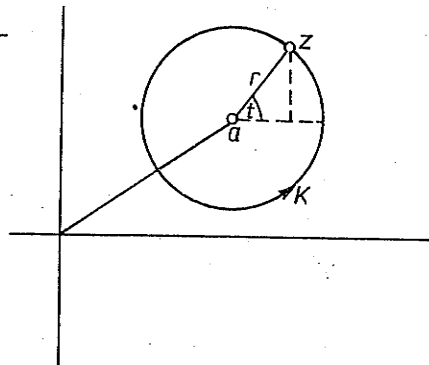
ahol  $t$  valós változó. E képlet a helyettesítési integrálás képletére emlékeztet.

Pl. jelentse  $K$  az  $a$  középpontu  $r$  sugaru kört az óramutató járásával ellenkező (pozitív) befutás mellett (63. ábra). Ekkor  $K$  egyenlete

$$\begin{aligned}
z &= a + r e^{jt}, \quad 0 \leq t < 2\pi, \\
z' &= r j e^{jt},
\end{aligned}$$

és így

$$(2) \quad \int_K \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{r j e^{jt}}{r e^{jt}} dt = 2\pi j,$$



63. ábra

ha viszont  $n \neq -1$  egész, akkor

$$\begin{aligned}
\int_K (z-a)^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{jnt} r j e^{jt} dt = j r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)jt} dt = \\
&= j r^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos(n+1)t + j \sin(n+1)t] dt =
\end{aligned}$$

$$= jr^{n+1} \left[ \frac{\sin(n+1)t}{n+1} + j \frac{-\cos(n+1)t}{n+1} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

A (\*) integrálnak a primitív függvény segítségével való számítására szolgáló eljárás most a következő formában érvényes:

### Tétel

Ha a síkban egy, T tartományában  $F'(z) = f(z)$  és az L görbe az a pontból a T tartományon belül a b pontba halad, akkor

$$\int_L f(z) dz = F(b) - F(a).$$

Az

$$f(z) = u + jv, \quad F(z) = U + jV$$

jelölésekkel ugyanis, mivel egyrészt

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial x},$$

másrészt

$$F'(z) = \frac{\partial V}{\partial y} - j \frac{\partial U}{\partial y},$$

az  $F'(z) = f(z)$  összefüggés értelmében

$$u = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

és így

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= \int_L (u dx - v dy) + j \int_L (v dx + u dy) = \\ &= \int_L \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \right) + j \int_L \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_L \operatorname{grad} U \, d\vec{r} + j \int_L \operatorname{grad} V \, d\vec{r} = \\
&= U(b) - U(a) + j(V(b) - V(a)) = \\
&= F(b) - F(a),
\end{aligned}$$

amivel állításunkat igazoltuk.

d) A következő nevezetes tétel mind a komplex változós függvények integrálásának technikája, mind a további elméleti vizsgálatok szempontjából alapvető fontossága:

#### Cauchy-féle alaptétel

Ha  $f(z)$  reguláris az egyszeresen összefüggő  $T$  tartományban, és  $C$  egy  $T$ -ben fekvő többszörös pont nélküli zárt, rektifikálható görbe, akkor

$$\int_C f(z) \, dz = 0.$$

A tett feltevések mellett ugyanis  $f(z) = u + jv$  kielégíti a Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\
&-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}$$

és  $f'(z)$  folytonossága miatt e parciális deriváltak folytonosak is. Ez azonban azt jelenti, hogy a (\*) formulában szereplő

$$\int_C (u \, dx - v \, dy), \quad \text{ill.} \quad \int_C (v \, dy + u \, dx)$$

integrálok a ~~(\*)~~ miatt rotációmentes  $\vec{v}_1 = u\vec{i} - v\vec{j}$ , ill.  $\vec{v}_2 = v\vec{i} + u\vec{j}$  vektortereknek az egyszeresen összefüggő  $T$  tartományban futó  $C$  zárt

görbe menti integráljai, s így a Stokes-tétel értelmében 0-val egyenlők (a Stokes-tétel alkalmazásának feltételei teljesülnek), azaz

$$\int_L f(z) dz = \int_L (u dx - v dy) + j \int_L (v dx + u dy) = 0 + j 0 = 0,$$

amit bizonyítani akartunk.

e) A következőkben szükségünk lesz néhány geometriai fogalomra és tételre, amelyek az un. topológia témakörébe tartoznak.

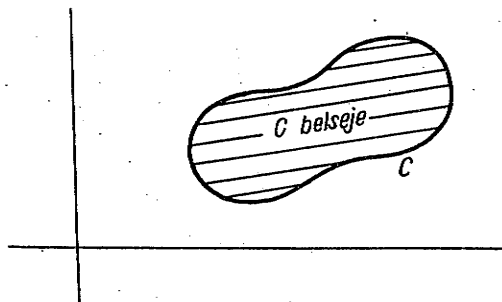
### Definíció

A többszörös pont nélküli zárt síkgörbéket Jordan-görbéknek nevezik. (E definíció már a Matematika I/2. jegyzet 27. fejezetében szerepelt.)

### Jordan-féle görbetétel

Ha  $C$  egy Jordan-görbe, akkor a  $C$  görbe pontjait a síkból elhagyva, a sík megmaradó része két közös pont nélküli tartományból áll; ezek közül az egyik korlátos, a másik nem, és mindkettőnek határa a  $C$  görbe. A két tartomány közül a korlátosat a  $C$  görbe belsejének, a másikat a  $C$  görbe külsejének nevezzük.

A tétel állításának helyességét szemléletünk alátámasztja (64. ábra), szabatos bizonyítása azonban eléggé körülményes, ezért erre nem térünk ki.



64. ábra

### Definíció

Egy rektifikálható  $C$  Jordan-görbe két körüljárási iránya közül pozitívnak mondjuk azt, amelynél a görbe belseje a bal kéz felé esik. A másik befutási irányt negatívnak mondjuk.



Azon, hogy a görbe belseje bal kéz felé esik, pontosabban a következőt kell érteni:

A  $C$  görbének bármely  $z_0$  pontjában, amelyben van a görbének érintője, tekintsük a görbe normálisának azt a félegyenesét, amely az érintőnek a befutás irányának megfelelően irányított félegyeneséből pozitív irányu  $90^\circ$ -os forgással keletkezik. Ennek a félegyenesnek a  $z_0$  pontból kiinduló elég rövid szakasza a  $C$  görbe belsejébe esik.

Kimutatható, hogy minden Jordan-görbe belseje egyszeresen összefüggő tartomány, a Jordan-görbe külseje azonban nem egyszeresen összefüggő tartomány, hanem un. többszörösen összefüggő tartomány.

A továbbiakban gyakran használjuk majd fel az alábbi állítást:

### Állítás

Ha  $T$  egyszeresen összefüggő tartomány és  $L$  olyan önmagát nem metsző törtvonal, melynek egyik végpontja  $T$ -nek határpontja, egyébként azonban  $T$  belsejében fekszik, akkor  $T$ -ből elhagyva  $L$  pontjait, a visszamaradó  $T'$  halmaz is egyszeresen összefüggő tartomány.

Állításunkat a szemlélet alátámasztja, bizonyítására nem térünk ki.

f) A Cauchy-féle alaptétel következő nevezetes következményei mondhatók ki:

### I. Tétel

Legyen  $T$  egyszeresen összefüggő tartomány,  $C_1$  és  $C_2$  két,  $T$ -ben fekvő rektifikálható Jordan-görbe, a pedig olyan pont, amely  $C_1$ -nek és  $C_2$ -nek is belsejéhez tartozik. Ha  $f(z)$  a  $T$  tartományban az a hely kivételével reguláris függvény és a  $C_1$  és  $C_2$  görbét megegyező irányban futjuk be, akkor

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz .$$

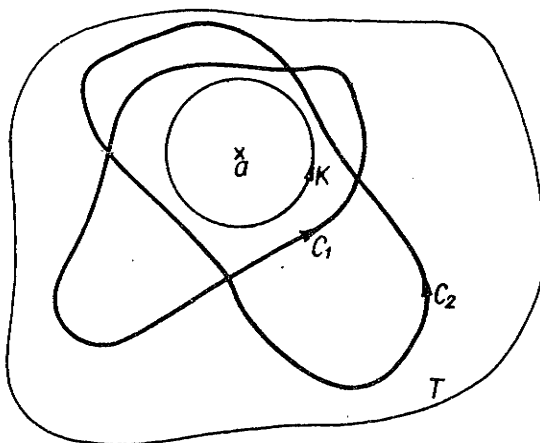
### Bizonyítás

Vegyünk fel az  $a$  pont, mint középpont körül olyan kicsiny sugaru  $K$  kört, amely a  $C_1$  és  $C_2$  görbének is belsejében fekszik. (65. ábra.) Meg fogjuk mutatni, hogy

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_K f(z) dz,$$

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_K f(z) dz,$$

ahol  $K$ -t a  $C_1$  és  $C_2$  görbékkel megegyező irányban futjuk be. Ebből a tételben kimondott állítás nyilván következik. Elég persze az első egyenlőséget igazolnunk, a bizonyítás során pedig egyszerűség kedvéért  $C_1$  helyett  $C$ -t írhatunk.

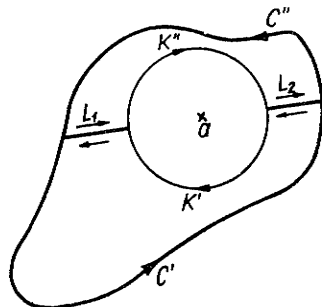


65. ábra

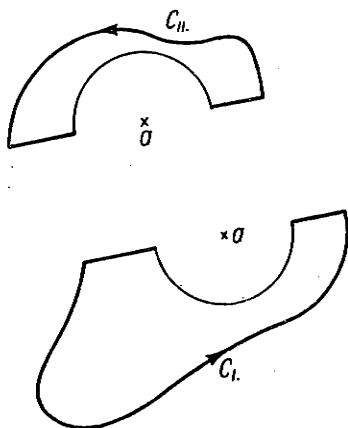
Feltehető, hogy  $T$  nem áll az egész síkból; ellenkező esetben  $T$  szerepét valamely, a  $C$  görbét tartalmazó kör belsejének adhatjuk át. Minthogy  $T$  egyszeresen összefüggő, azért  $C$  belseje, s ezzel együtt a  $K$  kör és az  $a$  pont is  $T$ -hez tartozik.

Fekessünk most az  $a$  ponton át egy egyenest, s haladjunk ezen a  $K$  körrel közös pontjaiból elindulva az  $a$ -tól távolodva mindkét irányban a  $C$  görbével közös legelső pontjáig. A felvett egyenesnek így adódó két szakaszát jelöljük  $L_1$  és  $L_2$ -vel.  $L_1$  és  $L_2$   $C$  belsejéhez, s

így  $T$ -hez tartozik. A  $C$  görbét az  $L_1$  és  $L_2$  szakaszokkal közös pontjai két ivre bontják, jelöljük ezeket  $C'$  és  $C''$ -vel, míg a  $K$  körnek az  $L_1$  és  $L_2$  szakaszokkal közös pontjai által meghatározott félkörívét  $K'$  és  $K''$ -vel jelöljük (66. ábra). A 67. ábráról leolvasható (és szabatosan is bizonyítható, hogy megválaszthatjuk e jelölést úgy, hogy az a pont a  $C'$ ,  $L_2$ ,  $K'$ ,  $L_1$  darabokból összetett  $C_I$  Jordan-görbének és a  $C''$ ,  $L_1$ ,  $K''$ ,  $L_2$  darabokból összetett  $C_{II}$  Jordan-görbének is külsejében fekszen. Ha mármost a  $C_I$  és  $C_{II}$  görbét olyan irányban járjuk körül, hogy a  $C'$



66. ábra



67. ábra

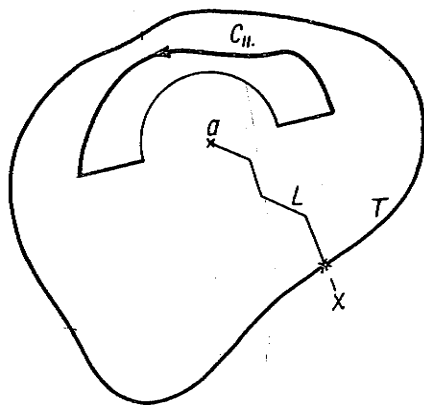
és  $C''$  ívek befutási iránya egymáshoz csatlakozzék és a  $C$  görbének az integrál kiszámításánál megkívánt irányu körüljárását adja, akkor a  $K'$  és  $K''$  félkörívek befutási iránya is egymáshoz csatlakozik, de a  $K$  körnek a  $C$  görbe körüljárásával ellenkező irányu befutását adja, az  $L_1$  és  $L_2$  szakaszok pedig kétszer, ellenkező irányban kerülnek bejárásra. Ennélfogva

$$\begin{aligned}
 & \int_{C_I} f(z) dz + \int_{C_{II}} f(z) dz = \\
 &= \int_{C'} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz - \int_{K'} f(z) dz + \int_{L_1} f(z) dz + \\
 &+ \int_{C''} f(z) dz - \int_{L_1} f(z) dz - \int_{K''} f(z) dz - \int_{L_2} f(z) dz = \\
 &= \int_C f(z) dz - \int_K f(z) dz.
 \end{aligned}$$

Állításunkat igazoltuk tehát, ha még megmutatjuk, hogy

$$\int_{C_I} f(z) dz = \int_{C_{II}} f(z) dz = 0.$$

Ezen összefüggés azonban a Cauchy-féle alaptételből következik. Mint-hogy ugyanis az  $a$  pont a  $C_{II}$  görbe külsejében fekszik, azért a



68. ábra

összeköthető valamely  $T$ -hez nem tartozó ponttal (ilyen van, mert  $T$  nem az egész sík)  $C_{II}$  metszése nélkül egy önmagát nem metsző törtvonal segítségével (68. ábra). E törtvonal átmetszi  $T$  határát;  $a$ -tól első,  $T$  határával közös pontjáig terjedő részét jelöljük  $L$ -lel. Ha  $L$  pontjait elhagyjuk  $T$ -ből, egyszeresen összefüggő  $T'$  tartományt nyerünk (az  $a$  pont állításának értelmében).  $T'$ -ben  $f(z)$  már reguláris (hiszen az  $a$  pontot  $L$ -lel együtt elhagytuk  $T$ -ből), így a  $T'$ -ben fekvő zárt  $C_{II}$  görbére

$$\int_{C_{II}} f(z) dz = 0.$$

Hasonlóan adódik a  $C_I$  görbére az állítás. Ezzel a tételt igazoltuk.

E tételt szokás még általánosított Cauchy-féle alaptételnek is nevezni, mivel e tételből az eredeti Cauchy-féle alaptétel könnyen levezethető.

## II. Tétel

Legyen  $T$  egyszeresen összefüggő tartomány,  $C$   $T$ -ben fekvő rektifikálható Jordán-görbe,  $a$  pedig olyan pont, amely  $C$  belsejéhez tartozik. Ha  $f(z)$  a  $T$  tartományban az  $a$  hely kivételével reguláris; az  $a$  hely környezetében pedig korlátos, akkor

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

### Bizonyítás

Jelentsen  $K_\varphi$  az  $a$  pont, mint középpont körül felvett kicsiny  $\varphi$  sugaru kört, amely  $C$  belsejében fekszik (69. ábra). Az I. Tétel értelmében

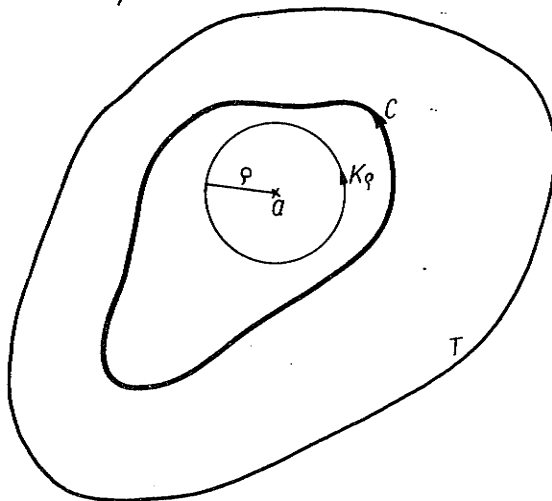
$$\int_C f(z) dz = \int_{K_\varphi} f(z) dz.$$

Utóbbi integrálunkat a b) pontban elmondottak értelmében a következőképpen becsülhetjük meg.  $f(z)$  regularitása, ill. az  $a$  hely környezetében feltételezett korlátossága miatt megadható egy olyan  $R$  szám és  $M$  korlát, hogy

$$|f(z)| < M,$$

hacsak  $0 < |z - a| < R$ ,

és így  $\varphi < R$  esetén



69. ábra

$$\left| \int_{K_\varphi} f(z) dz \right| \leq M 2\pi\varphi.$$

Ez a becslés azonban  $\varphi$  tetszőleges volta miatt az állítást adja.

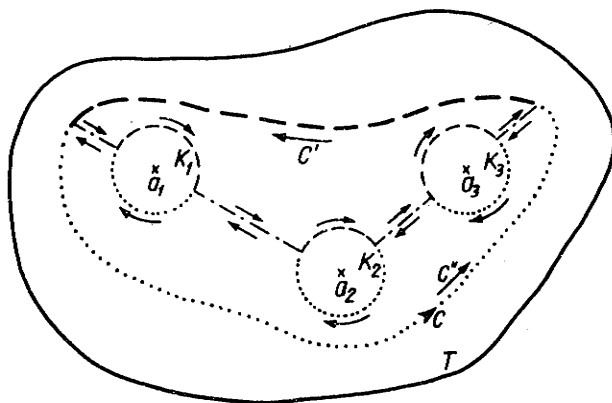
Integrálok kiszámítása során jól fel lehet használni az alábbi tételt:

### III. Tétel

Legyen  $T$  egyszeresen összefüggő tartomány,  $C$   $T$ -ben fekvő rektifikálható Jordan-görbe,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  pedig olyan pontok, amelyek  $C$  belsejéhez tartoznak. Ha  $f(z)$  a  $T$  tartományban az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  helyek kivételével reguláris függvény, akkor

$$\int_C f(z)dz = \int_{K_1} f(z)dz + \int_{K_2} f(z)dz + \dots + \int_{K_n} f(z)dz,$$

ahol  $K_i$  olyan  $a_i$  középpontú kört jelent ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), amelyet  $C$  -vel egyező irányban futunk be,  $C$  belsejében fekszik és sem belsejében, sem határán nem fekszik egyetlen  $a_k \neq a_i$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) pont sem.



70. ábra

A tétel állítását szemléletesen a 70. ábrán látható módon láthatjuk be  
 $(0 = \int_{C'} + \int_{C''} = \dots = \int_C - \left[ \int_{K_1} + \int_{K_2} + \int_{K_3} \right])$ . A pontos bizonyításra nem térünk ki.

## 17. A Cauchy-féle integrálformula és következményei

### Tétel

Legyen  $T$  egyszeresen összefüggő tartomány,  $C$  a  $T$  tartományban fekvő rektifikálható Jordan-görbe,  $z_0$  pedig  $C$  belsejében fekvő pont. Ha az  $f(z)$  függvény  $T$ -ben reguláris, és a  $C$  görbét pozitív (az óramutató járásával ellenkező) irányban futjuk be, akkor

$$(\kappa) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Ezt az összefüggést nevezik Cauchy-féle integrálformulának.

### Bizonyítás

Vegyük fel a  $z_0$  pont körül olyan kicsiny  $r$  sugaru  $K_r$  kört, mely  $C$  belsejében fekszik. Ekkor az előbbi fejezet I. Tétele (általánosított Cauchy-féle alaptétel) értelmében

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Mivel azonban

$$\begin{aligned} \int_{K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{K_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) \int_{K_r} \frac{1}{z - z_0} dz = \\ &= \int_{K_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) 2\pi j \end{aligned}$$

az előző fejezet (2) formulájának értelmében, s így a fentiből adódik, hogy

$$(\kappa\kappa) \quad f(z_0) 2\pi j = \int_{K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{K_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

A jobb oldalon szereplő második integrál azonban az előző fejezet II. tétele értelmében 0, mivel  $f(z)$   $T$ -ben, s így  $z_0$ -ban is reguláris, a  $z \in T$  és  $z_0$  helyhez tartozó különbségi hányadosa tehát nyilván korlátos, vagyis az idézett tétel feltételei ki vannak elégítve.  $(\kappa\kappa)$ -ból tehát  $2\pi j$ -vel való átosztás után  $(\kappa)$  adódik, állításunkat igazoltuk.

E fontos tétel tehát lényegében azt mutatja, hogy egy reguláris függvénynek a  $C$  Jordan-görbe belsejében felvett értékei már magán a  $C$  görbén felvett értékek segítségével meg vannak határozva, és pedig a  $C$  belsejében fekvő  $z$  pontban

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi .$$

Ezen összefüggésből egy segédtétel előrebocsátása után fontos további következményeket vonhatunk le.

### Segédtétel

Legyen  $L$  egy rektifikálható görbedarab, legyen  $\varphi(z)$  az  $L$  pontjaiban folytonos, s az  $L$ -hez nem tartozó  $z$  pontokban értelmezze a  $g(z)$  függvényt a

$$g(z) = \int_L \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

képlet. Ekkor  $g(z)$  az  $L$ -hez nem tartozó pontokban akárhányszor differenciálható és

$$g^{(n)}(z) = n! \int_L \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi ,$$

azaz  $g(z)$  deriváltjai az integráljel alatti deriválással számíthatók.

### Bizonyítás

Az állítás  $n = 0$ -ra igaz. Tegyük fel, hogy  $(n-1)$ -re teljesül; megmutatjuk, hogy akkor  $n$ -re is igaz, s így a teljes indukciós bizonyítási eljárással állításunkat minden természetes számra igazoltuk.

Ha az  $L$ -hez nem tartozó pontokban feltevésünk értelmében

$$g^{(n-1)}(z) = (n-1)! \int_L \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi ,$$

akkor  $L$ -hez nem tartozó  $z$  és elég kis  $h$  mellett



$$\begin{aligned}
\frac{g^{(n-1)}(z+h) - g^{(n-1)}(z)}{h} &= \frac{(n-1)!}{h} \int_L \varphi(\zeta) \left[ \frac{1}{(\zeta-z-h)^n} - \frac{1}{(\zeta-z)^n} \right] d\zeta = \\
&= \frac{(n-1)!}{h} \int_L \varphi(\zeta) \frac{(\zeta-z)^n - (\zeta-z-h)^n}{(\zeta-z-h)^n (\zeta-z)^n} d\zeta = \\
&= \frac{(n-1)!}{h} \int_L \varphi(\zeta) \frac{h[(\zeta-z)^{n-1} + (\zeta-z)^{n-2}(\zeta-z-h) + \dots + (\zeta-z-h)^{n-1}]}{(\zeta-z-h)^n (\zeta-z)^n} d\zeta,
\end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned}
\frac{g^{(n-1)}(z+h) - g^{(n-1)}(z)}{h} - n! \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta &= \\
&= (n-1)! \int_L \varphi(\zeta) \left[ \frac{(\zeta-z)^{n-1} + \dots + (\zeta-z-h)^{n-1}}{(\zeta-z-h)^n (\zeta-z)^n} - \frac{n}{(\zeta-z)^{n+1}} \right] d\zeta = \\
&= (n-1)! \int_L \varphi(\zeta) \left[ \frac{(\zeta-z)^n + (\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z-h) + \dots + (\zeta-z)(\zeta-z-h)^{n-2}}{(\zeta-z-h)^n (\zeta-z)^{n+1}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{n(\zeta-z-h)^n}{(\zeta-z-h)^n (\zeta-z)^{n+1}} \right] d\zeta.
\end{aligned}$$

Mivel azonban

$$\begin{aligned}
&(\zeta-z)^n + (\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z-h) + \dots + (\zeta-z)(\zeta-z-h)^{n-2} - n(\zeta-z-h)^n = \\
&= [(\zeta-z)^n - (\zeta-z-h)^n] + [(\zeta-z)^{n-1} - (\zeta-z-h)^{n-1}](\zeta-z-h) + \dots + \\
&\quad + [(\zeta-z) - (\zeta-z-h)](\zeta-z-h)^{n-1}
\end{aligned}$$

és itt a szögletes zárójelekben álló különbségek a

$$\begin{aligned}
(\zeta-z)^k - (\zeta-z-h)^k &= h \left\{ (\zeta-z)^{k-1} + (\zeta-z)^{k-2}(\zeta-z-h) + \dots + \right. \\
&\quad \left. + (\zeta-z-h)^{k-1} \right\}
\end{aligned}$$

mintára alakíthatók át, ezen átalakítást elvégezve végül is a következő adódik:

$$\begin{aligned} & \frac{g^{(n-1)}(z+h) - g^{(n-1)}(z)}{h} - n! \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta = \\ & = (n-1)! h \int_L \varphi(\zeta) \frac{\sum (\zeta-z)^\alpha (\zeta-z-h)^\beta}{(\zeta-z-h)^n (\zeta-z)^{n+1}} d\zeta, \end{aligned}$$

ahol a jobboldali számlálóban meghatározott ( $h$ -től független) számú tag áll, a  $h$ -től független  $\alpha$  és  $\beta$  kitevőkkel.

Ha most  $\varphi$  jelenti a  $z$  pontnak  $L$ -től való távolságát, és  $|h|$  már kisebb, mint  $\frac{\varphi}{2}$ , akkor  $\zeta \in L$  esetén

$$|\zeta - z| \geq \varphi, \quad |\zeta - z - h| \geq \frac{\varphi}{2}$$

(lásd 71. ábra), és alkalmas  $M$  számra

$$|\zeta - z| \leq M, \quad |\zeta - z - h| \leq M.$$

Ennélfogva alkalmas  $M_1$  számra

$$\left| \sum (\zeta-z)^\alpha (\zeta-z-h)^\beta \right| \leq M_1,$$

és így a  $|\varphi(\zeta)|$  függvénynek egy  $L$ -re vonatkozó felső korlátját  $M_2$ -vel jelezve:

$$|\varphi(\zeta)| \leq M_2, \quad \text{ha } \zeta \in L,$$

71. ábra

a következő becslést nyerjük:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g^{(n-1)}(z+h) - g^{(n-1)}(z)}{h} - n! \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \\ & \leq (n-1)! |h| \frac{M_1 M_2}{\varphi^{n+1} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^n} \cdot \ell, \end{aligned}$$

ahol  $\ell$  jelenti az  $L$  görbe hosszúságát. A jobb oldal  $h \rightarrow 0$  esetén zérushoz tart, s ez az állítást adja. A tételt tehát teljes indukcióval bebizonyítottuk.

A segédtételt az (1) összefüggéssel összekapcsolva a következő fontos tételre jutunk:

#### Tétel

Ha  $f(z)$  reguláris egy tartományban, akkor abban nemcsak egyszer, hanem akárhányszor differenciálható.

Ha ugyanis  $z_0$  a tartománynak egy pontja, s a  $K$  kört úgy vettük fel, hogy középpontja  $z_0$  legyen és egészen  $T$ -ben feküdjék, ha továbbá  $K_1$  a  $K$ -val koncentrikus kisebb sugaru kört jelent, akkor  $K$  belseje egyszerűen összefüggő tartomány, melyben  $f(z)$  reguláris, tehát a  $K_1$  belsejében fekvő  $z$  pontokban (1) értelmében

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Ennek folytán a segédtétel értelmében  $K_1$  belsejében, így a  $z_0$  helyen is,  $f(z)$  akárhányszor differenciálható.

#### Tétel

Ha  $T$  egyszerűen összefüggő tartomány,  $C$  ebben fekvő rektifikálható Jordan-görbe,  $z_0$   $T$ -nek  $C$  belsejében fekvő pontja, s  $f(z)$   $T$ -ben reguláris, akkor

$$(2) \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

ahol  $C$ -t az óramutató járásával ellenkező értelemben futjuk be.

E tétel állítása is az előbb mondottakból azonnal következik.

## 18. Komplex függvénysorok

Ha egy végtelen sor tagjai a  $z$  komplex változó függvényei, akkor komplex függvénysorról beszélünk:

$$(1) \quad f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

$M$  -mel jelölve azon  $z$  -k halmazát, amelyekre az  $f_k(z)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) függvények valamennyien értelmezve vannak, ezen  $z \in M$  értékek közül bizonyos  $z$  értékek mellett az (1) függvénysor konvergens, más  $z \in M$  értékek mellett divergens lehet. Azon  $z$  értékek  $N$  halmazát, amelyekre a függvénysor konvergens, a sor konvergenciatartományának nevezzük. Nyilvánvaló, hogy  $N \subset M$ , de speciális esetben  $N$  meg is egyezhetik  $M$  -mel, vagyis ekkor a sor az egész  $M$  halmazon konvergens.

A konvergenciatartomány különböző pontjaiban a sor összege általában más és más, azaz a sor összege  $z$  -nek függvénye:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \quad (z \in N).$$

Pl. az

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{kz} = e^z + e^{2z} + \dots + e^{nz} + \dots$$

függvénysor konvergens, ha

$$|e^z| = |e^x| |e^{jy}| = |e^x| < 1,$$

azaz, ha  $x < 0$ . E feltételnek elegettevő  $z$  helyeken (vagyis a komplex számsíknak a 72. ábrán látható félsíkjában) a függvénysor összege

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{kz} = e^z \frac{1}{1 - e^z}.$$

Pl. a  $z = -1 + 2j$  helyen a sor összege

$$e^{-1+2j} \frac{1}{1 - e^{-1+2j}} = e^{-1+2j} \frac{1 - e^{-1-2j}}{1 - e^{-1+2j} - e^{-1-2j} + e^{-2}} =$$

$$= \frac{e^{-1}(\cos 2 + j \sin 2) - e^{-2}}{1 - e^{-1}2 \cos 2 + e^{-2}} = \frac{e \cos 2 - 1}{e^2 - 2e \cos 2 + 1} +$$

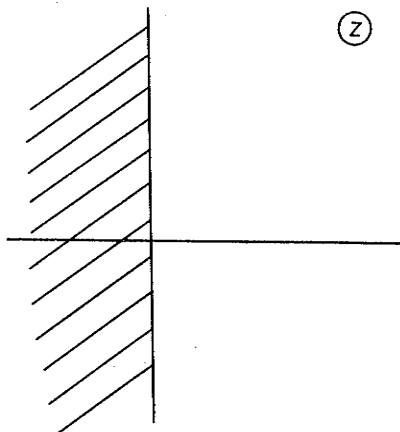
$$+ j \frac{e \sin 2}{e^2 - 2e \cos 2 + 1} \approx -0,25 + 0,29 j.$$

Az, hogy a  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$  függvénysor

a  $z$  helyen konvergens, annyit jelent, hogy bármely kicsiny  $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan  $N_0$  szám, hogy - a sor  $n$ -edik részletösszegét  $s_n(z)$ -vel, a sor összegét pedig  $f(z)$ -vel jelölve -

$$(s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z))$$

$$|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \text{ ha csak } n > N_0.$$



72. ábra

Adott kicsiny  $\varepsilon > 0$ -hoz különböző  $z$  helyeket választva különböző  $N_0$  számok tartozhatnak, az  $N_0$  számot tehát  $\varepsilon$  és  $z$  megadása határozza meg.

### Definíció

Akkor mondjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

függvénysor valamely  $H$  halmazon egyenletesen konvergens, ha bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan, a  $z$ -től független  $n_0$  index, hogy fennálljon:

$$|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \text{ ha csak } z \in H, n > n_0.$$

Konvergens, ill. valamely  $H$  halmazon egyenletesen konvergens komplex tagu függvénytörökre a megfelelő valós tételekhez (lásd Matematika I/2. jegyzet 22. fejezet) hasonló tételek mondhatók ki. E tételek igazolása is a valósban követett okoskodással végezhető el.

### I. Tétel

A  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$  függvénytör akkor és csak akkor konvergál egyenletesen a  $H$  halmazon, ha tetszőleges  $\varepsilon > 0$  -hoz mindig található olyan  $n_0$ , hogy  $n, m > n_0$ ,  $z \in H$  esetén

$$|s_n(z) - s_m(z)| < \varepsilon.$$

$$(s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z), \quad s_m(z) = \sum_{k=1}^m f_k(z)).$$

### II. Tétel

Ha az  $f_k(z)$  függvények folytonosak a  $H$  halmazon és a  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f(z)$  sor  $H$  -n egyenletesen konvergens, akkor  $f(z)$  is folytonos a  $H$  halmazon.

### III. Tétel

Ha az  $f_k(z)$  függvények folytonosak az  $L$  rektifikálható görbén, és  
~~a~~  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f(z)$  sor  $L$  -en egyenletesen konvergens, akkor

$$\int_L f(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_L f_k(z) dz.$$

Függvénytörök tagonkénti differenciálhatóságára lényegesen egyszerűbb tétel mondható ki komplex függvénytörökre, mint valósakra (v.ö. Matematika I/2. 22. fejezet, V. Tétel).

#### IV. Tétel

Ha a  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f(z)$  sor tagjai a  $T$  tartományban regulárisak és a sor  $T$ -ben egyenletesen konvergens, akkor  $f(z)$  is reguláris  $T$ -ben, és

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z).$$

#### Bizonyítás

Legyen  $z_0$  a  $T$  tartomány egy tetszőleges pontja. Jelentsen  $K$ , ill.  $K_0$  két,  $z_0$  középpontu,  $T$ -ben fekvő kört, ezek közül legyen  $K_0$  sugara nagyobb, de még  $K_0$  belseje is tartozzék teljesen  $T$ -hez. Mivel a  $K_0$  kör belseje által alkotott egyszeresen összefüggő tartományban az  $f_k(z)$  függvények regulárisak, a  $K$  belsejében fekvő  $z$  helyeken a Cauchy-féle integrálformula szerint

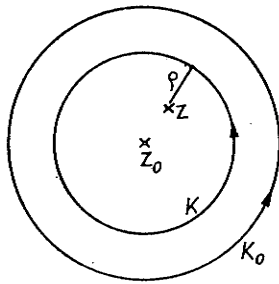
$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

tehát ezen  $z$ -kre

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=1}^{\infty} \int_K \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi j} \int_K \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

A most alkalmazott átalakítás jogos volt, mert ha  $\rho$  jelenti  $z$ -nek  $K$ -tól való távolságát, akkor  $\zeta \in K$  esetén (73. ábra)

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} \right| \leq \frac{1}{\rho},$$



73. ábra

tehát a  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\zeta)$  sorból, amely  $K$ -n a feltevés értelmében egyenletesen konvergens,  $\frac{1}{\zeta - z}$ -vel való tagonkénti szorzás által ismét  $K$ -n egyenletesen konvergens sort nyerünk, hiszen ha már a  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$  sor  $s_n(z)$  és  $s_m(z)$  részletösszegére  $K$ -n mindenütt

$$|s_n(z) - s_m(z)| < \varepsilon, \quad n, m > n_0$$

akkor

$$|s'_n(z) - s'_m(z)| = \left| \frac{1}{\zeta - z} \right| |s_n(z) - s_m(z)| < \frac{1}{\rho} \varepsilon, \quad \text{ha } n, m > n_0$$

$K$ -n mindenütt, vagyis az I. tétel értelmében a "beszorzással" nyert sor is egyenletesen konvergens. A Cauchy-féle integrálformula következményeinek bizonyításánál felhasznált segéd-tétel (17. fejezet) szerint tehát az

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

függvény  $K$  belsejében reguláris, és itt

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{n!}{2\pi j} \int_K \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \right) d\zeta = \\ &= \frac{n!}{2\pi j} \sum_{k=1}^{\infty} \int_K \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{2\pi j} \int_K \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z), \end{aligned}$$

ismét azért, mert a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$$



sor  $K$ -n egyenletesen konvergens, hiszen egyenletesen konvergens sorból legfeljebb  $\frac{1}{\varrho^{n+1}}$  abszolút értékű szorzóval való végigszorozással adódik. Így tehát

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$$

a  $K$  kör belsejében, tehát a  $z = z_0$  helyen is. Mivel azonban  $z_0$  a  $T$  tartománynak tetszőleges helye volt, ezzel igazoltuk, hogy állításunk az egész  $T$  tartományban érvényes.

Egy komplex tagu függvénysor egyenletes konvergenciájának megvizsgálására a következő elégséges feltétel adható meg:

Weierstrass-féle kritérium:

Ha a  $H$  halmazon mindenütt  $|f_k(z)| \leq M_k$  és a  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$  sor kon-  
vergens, akkor a  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$  sor  $H$ -n egyenletesen konvergens.

Az állítás a valós tagu függvénysoroknál követett okoskodással látható be.

### 19. Komplex hatványsorok

A függvénysoroknak fontos speciális esetei a hatványsorok. A hasonló valós tétel mintájára (Matematika I/2. jegyzet 23. fejezet) most is kimutatható, hogy ha a

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

hatványsor a  $z_0$  helyen konvergens, akkor  $|z| < |z_0|$  esetén abszolút konvergens. Ebből a tényből a valósban követett okoskodással adódik, hogy a  $(*)$  hatványsor konvergencia-helyeit illetően három eset lehetséges:

- 1<sup>o</sup> a sor csak  $z = 0$  esetén konvergens, vagy
- 2<sup>o</sup> a sor bármely  $z$  mellett konvergens, vagy
- 3<sup>o</sup> van olyan  $r > 0$  szám, hogy a sor  $|z| < r$  esetén konvergens,  $|z| > r$  esetén divergens.

Ez utóbbi esetben tehát a sor konvergenciahelyei a kezdőpont körüli  $r$  sugaru kör belsejéből (esetleg a kör egyes határpontjaiból is) állnak. Ezt a kört a kérdéses hatványsor konvergenciakörének, az  $r$  számot a sor konvergenciasugarának nevezik.

Pl. a  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  sor bármely  $z$ -re konvergens (ugy is szoktuk mondani, hogy a sor konvergenciasugara végtelen), a  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$  geometriai sor azonban csak  $|z| < 1$  esetében konvergens, tehát a sor konvergenciasugara:  $r = 1$ .

Egy hatványsor konvergenciasugarát a gyakorlatban a numerikus sorok abszolút konvergenciájának meghatározására szolgáló kritériumok (Matematika I/2. jegyzet 19. fejezet) segítségével lehet megkeresni. Komplex hatványsorokra is érvényes a Cauchy-Hadamard-féle tétel, melynek értelmében a  $(x)$  sor  $r$  konvergenciasugaráról a következő mondható:

Ha a  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  hatványsorban  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = A$ , akkor a hatványsor konvergenciasugara  $0 < A < +\infty$  esetén

$$r = \frac{1}{A},$$

$A = 0$  esetén

$$r = +\infty,$$

$A = +\infty$  esetén

$$r = 0.$$

A tételt valós tagu hatványsorokra már igazoltuk, komplex tagu hatványsorokra ugyanugy bizonyítható.

Ismét a megfelelő valós tétel mintájára látható be, hogy a  $(x)$  hatványsor konvergenciakörének belsejében a sor abszolút konvergens, továbbá, hogy  $r_1 < r$  esetében ( $r$ -rel a konvergenciasugarat jelöltük) a sor a kezdőpont körüli  $r_1$  sugaru körben egyenletesen konvergens. A Weierstrass-féle kritériumot alkalmazva ugyanis, mivel  $|z| \leq r_1$  esetén

$$|a_k z^k| \leq |a_k| r_1^k$$

és  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r_1^k$  konvergens (a sor a  $z = r_1$  helyen abszolút konvergens),  
 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$   $|z| \leq r_1$  esetében egyenletesen konvergens.

Mínt hogy továbbá az  $a_k z^k$  függvények mindenütt regulárisak, azért a  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  sor összege a konvergenciakör belsejében reguláris, és ott a sor akárhányszor tagonként differenciálható az előző fejezetben bebizonyított IV. Tétel értelmében.

A fentiekhez teljesen hasonló állítások mondhatók az általánosabb

$$(XXX) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

alaku hatványsorokról, csak hogy itt a konvergenciakör középpontja a  $z_0$  hely.

Foglalkozni fogunk még a

$$(XXXX) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}$$

alaku sorokkal is  $((z - z_0)$  negatív kitevőjű hatványai szerint haladó hatványsorok). A

$$Z = \frac{1}{z - z_0}$$

helyettesítéssel a (XXXX) sor átmegy a

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k$$

sorba, úgy hogy az ilyen sorokról a következőket mondhatjuk:

- 1° a sor vagy egyetlen  $z$ -re sem konvergens, vagy
- 2° a sor  $z = z_0$  kivételével minden  $z$ -re konvergens, vagy
- 3° a sor a  $z_0$  pont körüli bizonyos kör külsejében konvergens, belsejében divergens.

Ez utóbbi esetben a kérdéses kör külsejében a sor abszolút konvergens, s minden koncentrikus nagyobb sugarú kör külsejében egyenletesen konvergens.

Mínt hogy a  $z_0$  helyet kivéve a  $\frac{b_k}{(z - z_0)^k}$  függvények regulárisak, azért a kérdéses kör külsejében a (XXXX) sor összege is reguláris.

A fent elmondottakból következik, hogy az

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

függvény mindenütt reguláris, s deriváltja

$$(e^z)' = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = e^z,$$

amint arról már régebben meggyőződöttünk.

Hasonlóan igazolhatók a

$$(\sin z)' = \cos z,$$

ill.

$$(\cos z)' = -\sin z$$

szabályok is.

A valósban alkalmazott okoskodással írhatók fel pl. az alábbi hatványsorok:

a)  $\sin z$ -nek  $(z-2)$  hatványai szerint haladó sora ( $z=2$  helyhez tartozó hatványsora):

$$\sin z = \sin((z-2) + 2) = \sin(z-2) \cos 2 + \cos(z-2) \sin 2$$

lévén

$$\begin{aligned} \sin z &= \cos 2 \left( \frac{z-2}{1!} - \frac{(z-2)^3}{3!} + \dots \right) + \sin 2 \left( 1 - \frac{(z-2)^2}{2!} + \frac{(z-2)^4}{4!} - \dots \right) \\ &= \sin 2 + \cos 2 (z-2) - \frac{\sin 2}{2!} (z-2)^2 + \dots \end{aligned}$$

A sorfejtés minden  $z$ -re konvergens.

b)  $\cos(2z-3)$ -nak  $z$  hatványai szerint haladó sora (a  $z_0 = 0$  helyhez tartozó hatványsora) az előbbihez hasonló okoskodással:

$$\begin{aligned} \cos(2z-3) &= \cos 2z \cos 3 + \sin 2z \sin 3 = \\ &= \cos 3 \left( 1 - \frac{4z^2}{2!} + \frac{2^4 z^4}{4!} - \dots \right) + \end{aligned}$$

$$+ \sin 3 \left( \frac{2z}{1!} - \frac{2^3 z^3}{3!} + - \dots \right) = \cos 3 + (2 \sin 3)z - \\ - (2 \cos 3)z^2 - + \dots$$

A hatványsor minden  $z$ -re konvergens.

c) Az  $\frac{1}{z-3}$  függvénynek  $z$  hatványai szerint haladó sora:

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \frac{z^3}{27} + \dots \right).$$

A sorfejtés konvergens, ha

$$\left| \frac{z}{3} \right| < 1, \quad \text{azaz, ha } |z| < 3.$$

Ugyanezt a függvényt a  $|z| > 3$  tartományban is előállíthatjuk hatványsor összegeként. Az

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$

átalakítást alkalmazva ugyanis a második tényező  $\frac{3}{z}$  hányadosu geometriai sor összegeként fogható fel, vagyis

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} + \frac{27}{z^3} + \dots \right) = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^3} + \frac{27}{z^4} + \dots$$

és ez a hatványsor konvergens, ha

$$\left| \frac{3}{z} \right| < 1, \quad \text{azaz, ha } |z| > 3.$$

d) Az  $e^{\frac{1}{z}}$  függvény  $z$  hatványai szerint haladó sora:

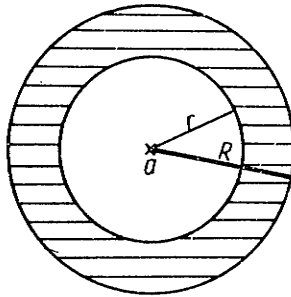
$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \frac{1}{2!} + \frac{1}{z^3} \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{z^n} \frac{1}{n!} + \dots$$

A sorfejtés  $z = 0$  kivételével minden  $z$ -re konvergens.

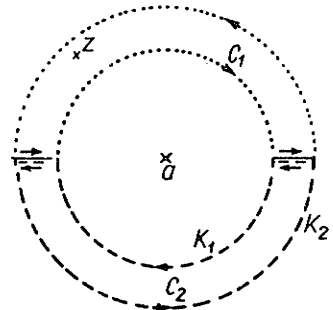
## 20. Laurent-sor

a) Legyen  $f(z)$  az  $a$  hely körüli  $r$  és  $R$  sugaru körök közötti gyűrűben (vagyis  $r < |z - a| < R$  esetén) reguláris. Megengedjük az  $r = 0$  és  $R = \infty$  esetet is. Meg fogjuk mutatni, hogy e körgyűrűben (74. ábra)  $f(z)$  előállítható egy  $(z-a)$  pozitív hatványai szerint haladó és egy,  $(z-a)$  negatív hatványai szerint haladó hatványsor összegeként:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}.$$



74. ábra



75. ábra

Legyen ugyanis  $z$  a fenti körgyűrű egy helye; az  $a$  középpontu  $K_1$  és  $K_2$  köröket vegyük fel úgy, hogy  $r_1$  és  $r_2$  sugarukra

$$r < r_1 < |z - a| < r_2 < R$$

fennálljon (75. ábra). Fektesünk az  $a$  ponton át egy  $z$ -t nem tartalmazó egyenest, ennek  $K_1$  és  $K_2$  közti szakaszaiból és a  $K_1$  és  $K_2$  körnek a kérdéses egyenessel közös pontjai által meghatározott íveiből állítsuk össze a 75. ábra szerinti  $C_1$  és  $C_2$  Jordan-görbéket. A

Cauchy-féle integrálformula szerint könnyen belátható módon

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

( $z$  egy, a  $C_1$  Jordan-görbe belsejében fekvő pont), és a Cauchy-féle alaptétel szerint

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

(a  $z$  pont nem fekszik a  $C_2$  Jordan-görbe belsejében).

Minthogy a  $K_1$  és  $K_2$  körök pozitív értelmű befutása mellett

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_{K_2} - \int_{K_1},$$

azért tehát

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi j} \int_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Az itt szereplő első integrált alakítsuk át a következőképpen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - a}{\zeta - a} \right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - a)^k}{(\zeta - a)^{k+1}}. \end{aligned}$$

A fenti átalakítás jogos, mert ha  $\zeta$  a  $K_2$  körön változik, akkor

$$\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < 1,$$

s így a jobb oldalon szereplő geometriai sor konvergens.

Ha még a  $K_2$  körön alkalmas  $M_2$ -re

$$|f(\zeta)| \leq M_2$$

(ilyen  $M_2$   $f(z)$  feltételezett regularitása miatt létezik), akkor

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} (z - a)^k \right| \leq \frac{M_2}{r_2} \left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right|^k = \frac{M_2}{r_2} \left( \frac{|z - a|}{r_2} \right)^k,$$

ugyhogy a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_2}{r_2} \left( \frac{|z - a|}{r_2} \right)^k$$

numerikus sor  $K_2$ -n való konvergenciája miatt a Weierstrass-kritérium értelmében az

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} (z - a)^k$$

hatványsor  $K_2$  mentén egyenletesen konvergens. Ennélfogva tagonként integrálva

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \left[ \int_{K_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \right] (z - a)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k \end{aligned}$$

adódik, ahol

$$(1) \quad c_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta.$$

Hasonlóan alakítható át a  $K_1$  menti integrál is:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{-1}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} = \frac{-1}{z - a} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - a}{z - a} \right)^k = \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^k}{(z - a)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Itt is jogos az átalakítás, mert  $K_1$  mentén  $\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| < 1$ , s így a jobboldali geometriai sor konvergens. Így tehát

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = - \sum_{k=0}^{\infty} f(\zeta) (\zeta - a)^k \frac{1}{(z - a)^{k+1}},$$

s itt az előzőkhöz hasonló indoklással tagonként integrálhatunk:



$$-\frac{1}{2\pi j} \int_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \left[ \int_{K_1} f(\zeta) (\zeta - a)^k d\zeta \right] \frac{1}{(z - a)^{k+1}}.$$

Ha itt  $k$  helyett  $(k-1)$ -et írunk, akkor ez még a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \left[ \int_{K_1} f(\zeta) (\zeta - a)^{k-1} d\zeta \right] \frac{1}{(z - a)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \frac{1}{(z - a)^k}$$

alakban írható, ahol

$$(2) \quad c_{-k} = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_1} f(\zeta) (\zeta - a)^{k-1} d\zeta.$$

Végül is azt nyertük, hogy

$$(3) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \frac{1}{(z - a)^k},$$

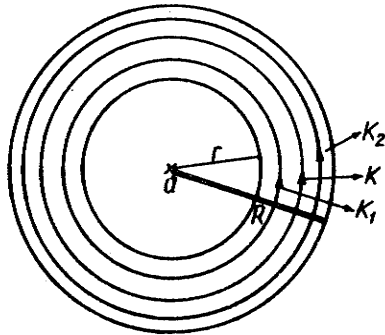
ahol  $c_k$  és  $c_{-k}$  értékét (1), ill. (2) szolgáltatja.

Ezen együtthatókat előállító integrálok látszólag  $z$ -től függenek, mert a  $z$ -től függően választott  $K_1$  és  $K_2$  körök mentén vannak számítva. Minthogy azonban az

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \quad \text{és} \quad f(\zeta) (\zeta - a)^{k-1}$$

függvények az  $r < |\zeta - a| < R$  körgyűrűben regulárisak, azért a Cauchy-féle alaptétel felhasználásával könnyen látható, hogy e függvényeknek a  $K_1$ , ill.  $K_2$  menti

integrálja egyenlő egy ezekkel koncentrikus, de tetszőleges  $r$  és  $R$  közötti sugaru  $K$  kör mentén vett integrállal (76. ábra):



76. ábra

$$(4) \quad \begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta, \\ c_{-k} &= \frac{1}{2\pi j} \int_K f(\zeta) (\zeta - a)^{k-1} d\zeta. \end{aligned}$$

(Ennek igazolása az általánosított Cauchy-féle alaptétel mintájára történik.)

Arra az eredményre jutottunk tehát, hogy a (3) sorfejtés az együtthatókat megadó (4) képletekkel a vizsgált  $r < |z-a| < R$  körgyűrűben mindenütt érvényes, amint azt állítottuk.

Szokás a (3) -ban szereplő két sort egyetlen sorba összefoglalni:

$$(5) \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k,$$

ahol

$$(6) \quad c_k = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Az (5) sorfejtést a benne szereplő együtthatókat (6) -tal definiálva az  $f(z)$  függvénynek a kérdéses körgyűrűhöz tartozó Laurent-sorának nevezik.

b) Különösen fontos az az eset, amikor  $f(z)$  az  $a$  hely körüli  $R$  sugaru kör belsejében mindenütt reguláris. Ekkor az előbbi okoskodásban  $r = 0$  választható, s  $f(z)$  -nek Laurent-sorában a negatív kitevőjű tagok elmaradnak, mert  $f(\zeta) (\zeta - a)^{k-1}$  ekkor az egész körben reguláris, így a Cauchy-féle alaptétel szerint az abban haladó  $K$  kör mentén integrálja zérus. Másrészt viszont a Cauchy-féle integrálformula következményeként adódik, hogy

$$\frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$$

ugyhogy a Laurent-sor most ezt az alakot ölti:

$$(7) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k.$$

A (7) sort  $f(z)$ -nek a  $z = a$  helyhez tartozó Taylor-sorának nevezzük; e hatványsor az  $a$  középpontu  $R$  sugaru kör belsejében mindenütt konvergens és előállítja  $f(z)$ -t.

Ujabb fogalmat vezetve be az itt elmondottakat érdekes tételben foglalhatjuk össze.

### Definíció

Az  $f(z)$  függvény a  $z = a$  helyen analitikus, ha az  $a$  hely alkalmas környezetében  $(z - a)$  hatványai szerint haladó hatványsor összegeként állítható elő.

### Tétel

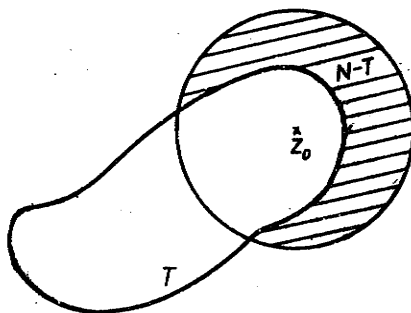
$f(z)$  akkor és csakis akkor analitikus a  $z = a$  helyen, ha ott reguláris.

Valóban, ha  $f(z)$  az  $a$  helyen analitikus, akkor a definíció értelmében reguláris függvények egyenletesen konvergens sorának összege, s így reguláris függvény. Megfordítva, ha  $f(z)$  reguláris az  $a$  helyen, akkor a alkalmas környezetében a (7) hatványsor összegeként állítható elő, vagyis analitikus.

Előfordul, hogy valamely  $f(z)$  függvényt egy  $T$  tartományban konvergens hatványsor összegeként állítunk elő, a hatványsor azonban még a  $T$  tartományon kívül fekvő bizonyos pontokban is konvergens. Ez lehetőséget nyújt arra, hogy a függvény értelmezését a függvény analitikus voltának megtartása mellett kiterjesszük.

Pl. legyen  $z_0 \in T$ . Ha  $f(z)$ -t

$(z - z_0)$  hatványai szerint hatványsorba fejtjük, és e sor konvergenciatartománya,  $N$ , tartalmaz  $T$ -hez nem tartozó pontokat, akkor ezen pontokban  $f(z)$ -t a  $(z - z_0)$  hatványai szerint haladó hatványsor összegeként definiálva,  $f(z)$ -t az  $N - T$  halmazon analitikusan értelmeztük. A függvény értelmezési tartományának ilyen módon való kibővítése az un. analitikus folytatás legegyszerűbb módja (77. ábra).



77. ábra

### c) Definíció

Ha van olyan  $R$ , hogy  $f(z)$  az a középpontu  $R$  sugaru körben az a hely kivételével reguláris, akkor az a helyet izolált szinguláris helynek nevezzük.

Ha  $a$  az  $f(z)$  függvénynek izolált szinguláris helye, akkor  $f(z)$ -nek az  $a$  helyhez tartozó Laurent sora  $0 < |z-a| < R$  esetében (tehát az  $R$  sugaru kör belsejében mindenütt, kivéve magán az  $a$  helyen) előállítja  $f(z)$ -t.

Ilyenkor három eset lehetséges:

1<sup>o</sup> Ha  $f(z)$  Laurent-sorában nem lépnek fel negatív kitevőjű tagok, azaz

$$(*) \quad f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots, \quad (0 < |z-a| < R),$$

akkor az  $f(a) = c_0$  megállapodással  $f(z)$  az  $a$  helyen is regulárisra tehető;  $f(z)$ -nek az  $a$  helyen megszüntethető szingularitása van.

2<sup>o</sup> Ha  $f(z)$  Laurent-sorában fellépnek ugyan negatív kitevőjű tagok, de csak véges számban, akkor a Laurent-sor ilyen alakú:

$$(**) \quad f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots, \quad (c_{-n} \neq 0).$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy  $f(z)$ -nek az  $a$  helyen  $n$ -edrendű pólusa van.

3<sup>o</sup> Ha  $f(z)$  Laurent-sorában végtelen sok negatív kitevőjű tag van, akkor az  $a$  hely  $f(z)$ -nek lényeges szinguláris helye.

Könnyen beláthatók az alábbi állítások:

Ha  $f(z)$ -nek az  $a$  helyen megszüntethető szingularitása van, akkor

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0,$$

ahol  $c_0$  a (\*)-beli megfelelő együttható,

ha  $f(z)$ -nek az  $a$  helyen  $n$ -edrendű pólusa van, akkor

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) (z-a)^n = c_{-n},$$

ahol  $c_{-n}$  a (\*\*) -beli megfelelő együttható,

míg ha  $f(z)$ -nek az  $a$  hely lényeges szinguláris helye, nem adható meg olyan  $p$  természetes szám, hogy a

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) (z-a)^p$$

határérték létezzék.

### Tétel

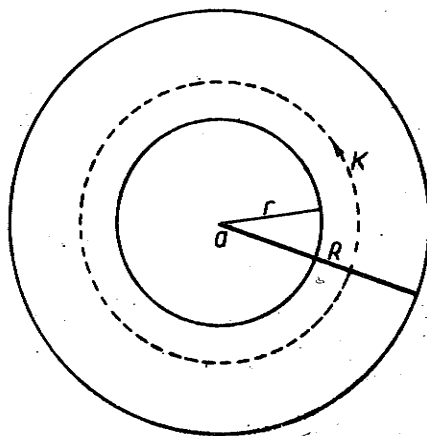
Ha  $f(z)$  az  $a$  hely körüli  $r < |z-a| < R$  körgyűrűtartományban

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{-k}}{(z-a)^k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z-a)^k$$

alaku sorba fejthető, akkor e sor nem lehet más, mint  $f(z)$  Laurent-sora.

### Bizonyítás

Vegyünk fel egy a középpontu és a körgyűrűben haladó  $K$  kört (78. ábra).  $K$  mentén mindkét sor egyenletesen konvergens, s ilyen marad nyilván  $(z-a)$  bármely pozitív vagy negatív kitevőjű hatványával való szorzás után is. De akkor  $f(z)$  Laurent-sorának együttthatóira



78. ábra

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_K \frac{d_k (\zeta-a)^k}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \int_K (\zeta-a)^{k-n-1} d\zeta$$

adódik. Mivel azonban

$$\int_K (\zeta-a)^{k-n-1} d\zeta = \begin{cases} 2\pi j, & \text{ha } k = n, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

(lásd 16. fejezet), a kapott sorból tehát csak a  $k = n$  indexű tag marad meg,

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} d_n \cdot 2\pi j = d_n,$$

amivel állításunkat igazoltuk.

Ennek a tételnek alapján világos, hogy pl. a

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - + \dots$$

sor a  $\frac{\sin z}{z^2}$  függvénynek a  $z = 0$  hely körüli Laurent-sora. E Laurent-sorból az is kiolvasható, hogy a  $z = 0$  hely a  $\frac{\sin z}{z^2}$  függvénynek elsőrendű pólusa.

Az  $\frac{1 - \cos z}{z}$  függvénynek a  $z = 0$  hely körüli Laurent-sora:

$$\frac{1 - \cos z}{z} = \frac{1}{z} \left( 1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + - \dots \right) = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + - \dots$$

A függvénynek a  $z = 0$  helyen megszüntethető szingularitása van.

Az  $f(z) = \cos \frac{1}{z}$  függvénynek a  $z = 0$  hely körüli Laurent-sora:

$$\cos \frac{1}{z^2} = 1 - \frac{1}{z^4} \frac{1}{2!} + \frac{1}{z^8} \frac{1}{4!} + \dots,$$

a függvénynek a  $z = 0$  hely lényeges szinguláris helye.

d) Könnyen bebizonyítható az eddigiek alapján az algebra un. alaptétele:

Bármely (valós, vagy komplex együtthatós)  $p(z)$  polinom elsőfoku gyöktényezők szorzatára bontható:

$$p(z) = c(z-a_1)^{\alpha_1} (z-a_2)^{\alpha_2} \dots (z-a_r)^{\alpha_r},$$

valós együtthatóju polinom pedig első- és másodfoku valós gyöktényezők szorzatára bontható:

$$p(z) = c(z-a_1)^{\alpha_1} \dots (z-a_k)^{\alpha_k} (z^2+r_1z+s_1)^{\sigma_1} \dots (z^2+r_\ell z+s_\ell)^{\sigma_\ell}$$

### Bizonyítás

Először is megmutatjuk, hogy bármely legalább elsőfoku  $p(z)$  polinomnak van zérushelye. Ha ugyanis az egész síkban  $p(z) \neq 0$  volna, akkor  $\frac{1}{p(z)}$  az egész síkban reguláris volna, és így az egész síkban konvergens

$$\frac{1}{p(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

hatványsorba volna fejthető. De a

$$p(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0, \quad (b_n \neq 0, n \geq 1)$$

jelöléssel

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{b_n z^n + \dots + b_0} = \frac{1}{z^n} \frac{1}{b_n + \frac{b_{n-1}}{z} + \dots + \frac{b_0}{z^n}};$$

itt

$$\left| \frac{b_{n-1}}{z} + \dots + \frac{b_0}{z^n} \right| < \frac{|b_n|}{2}$$

ha  $z$  elég nagy, úgyhogy ekkor

$$\left| b_n + \frac{b_{n-1}}{z} + \dots + \frac{b_0}{z^n} \right| > \frac{|b_n|}{2}.$$

Tudjuk azonban, hogy  $-a_0$  hely körüli  $R$  sugaru kört  $K_R$ -rel jelölve -

$$c_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_R} \frac{1}{p(z)} \frac{1}{z^{k+1}} dz,$$

tehát elég nagy  $R$  mellett

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R^n} \frac{2}{|b_n|} \frac{1}{R^{k+1}} 2\pi R = \frac{2}{|b_n|} \frac{1}{R^{n+k}},$$

és így  $|c_k|$  tetszőlegesen kicsiny számmal is kisebb,  $c_k = 0$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Így tehát  $\frac{1}{p(z)} = 0$  adódnék, ami lehetetlen.

Legyen most  $p(z)$ -nek egy zérushelye  $a_1$ . Minthogy  $k > n$  esetén  $p^{(k)}(a_1) = 0$ , azért  $p(z)$ -nek az  $a_1$  helyhez tartozó Taylor-sora ilyen alakú:

$$p(z) = A_1(z-a_1) + A_2(z-a_1)^2 + \dots + A_n(z-a_1)^n.$$

Ha itt  $A_1 = A_2 = \dots = A_{\alpha_1-1} = 0$ , de  $A_{\alpha_1} \neq 0$ , akkor

$$\begin{aligned} p(z) &= (z-a_1)^{\alpha_1} \left[ A_{\alpha_1} + A_{\alpha_1+1}(z-a_1) + \dots + A_n(z-a_1)^{n-\alpha_1} \right] = \\ &= (z-a_1)^{\alpha_1} p_1(z), \end{aligned}$$

ahol  $p_1(z)$  egy  $(n-\alpha_1)$ -edfoku polinom, melyre  $p_1(a_1) \neq 0$ .



Ha  $p_1(z)$ -nek egy zérushelye  $a_2$ , akkor hasonlóan

$$p_1(z) = (z-a_2)^{\alpha_2} p_2(z),$$

ahol  $p_2(a_2) \neq 0$ . Az eljárást tovább folytatva, végül

$$p(z) = (z-a_1)^{\alpha_1} (z-a_2)^{\alpha_2} \dots (z-a_r)^{\alpha_r} q(z)$$

adódik, ahol  $q(z)$  már nulladfokú polinom, azaz állandó:

$$(\ast) \quad p(z) = c(z-a_1)^{\alpha_1} (z-a_2)^{\alpha_2} \dots (z-a_r)^{\alpha_r}.$$

Megjegyezzük még, hogy a  $(\ast)$  előállítás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű. Valóban, az világos, hogy az  $a_1, \dots, a_r$  számok éppen  $p(z)$  különböző zérushelyei, tehát  $p(z)$  által egyértelműen meg van határozva a sorrendtől eltekintve. Ugyanez áll azonban a kitevőkre is: ha

$$p(z) = c(z-a_1)^{\alpha_1} \dots (z-a_r)^{\alpha_r} = c'(z-a_1)^{\alpha'_1} \dots (z-a_r)^{\alpha'_r}$$

és itt pl.  $\alpha_1 < \alpha'_1$ , akkor  $(z-a_1)^{\alpha_1}$ -gyel végigosztva  $z \neq a_1$  esetén

$$c(z-a_2)^{\alpha_2} \dots (z-a_r)^{\alpha_r} = c'(z-a_1)^{\alpha'_1 - \alpha_1} \dots (z-a_r)^{\alpha'_r},$$

ez pedig lehetetlen, mert  $z \rightarrow a_1$  esetén a baloldal határértéke nem zérus, a jobboldalé ellenben az. Így  $\alpha_1 = \alpha'_1, \dots, \alpha_r = \alpha'_r$ , s végül aztán  $c = c'$ . Az egyes  $a_1, \dots, a_r$  zérushelyeknek megfelelő (az előbbiek szerint egyértelműen meghatározott)  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  kitevőket a megfelelő zérushelyek multiplicitásának nevezzük (mint ahogy azt a valósban is tettük).

Ezzel állításunk első részét igazoltuk.

Ha most  $p(z)$  valós együtthatóju polinom, akkor minden  $a$  nem valós komplex zérushellyel együtt  $\bar{a}$  (a konjugáltja) is ugyanannyiszoros zérushelye  $p(z)$ -nek. Valós együtthatóju  $p(z)$  polinom esetén ugyanis

$$\begin{aligned} \overline{p(z)} &= \overline{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0} = \\ &= \overline{b_n} \overline{z}^n + \overline{b_{n-1}} \overline{z}^{n-1} + \dots + \overline{b_0} = \\ &= p(\bar{z}), \end{aligned}$$

tehát

$$p(z) = \overline{p(\bar{z})},$$

azaz a

$$p(z) = (z - a)^\alpha q(z), \quad q(a) \neq 0$$

jelöléssel

$$\overline{(\bar{z} - a)^\alpha q(\bar{z})} = (z - \bar{a})^\alpha \overline{q(\bar{z})} = p(z), \quad \overline{q(a)} \neq 0,$$

ami mutatja, hogy  $\bar{a}$  is  $\alpha$ -szoros zérushelye  $p(z)$ -nek. A  $p(z)$  polinom komplex zérushelyeinek megfelelő gyöktényezők tehát párosával úgy csoportosíthatók, hogy egy párba két konjugált zérushelynek megfelelő gyöktényező kerüljön. Csakhogy a

$$(z - a)(z - \bar{a}) = z^2 - (a + \bar{a})z + a\bar{a}$$

polinom valós másodfoku gyöktényező, hiszen  $a + \bar{a}$  és  $a\bar{a}$  valósak, amivel állításunk második részét is igazoltuk.

## 21. Reziduum-tétel

### Definíció

Ha az  $f(z)$  függvénynek a izolált szinguláris helye, akkor  $f(z)$  e helyhez tartozó Laurent-sorában  $\frac{1}{z-a}$  együtthatóját  $f(z)$  a helyhez tartozó reziduumának nevezzük és a

$$\text{Res}_{z=a} f(z)$$

jellel jelöljük.

Igy például

$$\text{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^2} = 1,$$

mert

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots$$

### Tétel (Reziduum-tétel)

Legyen  $f(z)$  a  $T$  egyszeresen összefüggő tartományban a véges számú  $a_1, a_2, \dots, a_n$  helyek kivételével reguláris, s a  $C$  rektifikálható Jordan-görbe fektüdjék  $T$ -ben és ne haladjon át az  $a_k$  helyek egyikén sem; ha  $C$ -t pozitív irányban futjuk be, akkor

$$\int_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{z=a_k} \text{Res } f(z),$$

az összegezést a  $C$  görbe belsejében fekvő  $a_k$  helyekre terjesztve ki.

### Bizonyítás

Feltehető, hogy  $T$  nem áll az egész komplex számsíkból, ellenkező esetben ugyanis  $T$  szerepét egy, a  $C$  görbét magában foglaló kör belsejének adhatnók át. Jelöljük  $g_k(z)$ -vel az  $f(z)$  függvény  $a_k$  helyhez tartozó Laurent-sorában a negatív kitevőjű tagok összegét ( $g_k(z)$ -t az  $f(z)$  függvény Laurent-sora főrészének is szokás nevezni). A  $g_k(z)$  függvény az  $a_k$  hely kivételével az egész síkon reguláris, az  $f(z) - g_k(z)$  különbségnek pedig az  $a_k$  helyen megszüntethető szingularitása van; ezért a

$$h(z) = f(z) - g_1(z) - \dots - g_n(z)$$

függvény a  $T$  tartományban mindenütt regulárisra tehető. A Cauchy-féle alaptételt alkalmazva tehát

$$\int_C [f(z) - g_1(z) - \dots - g_n(z)] dz = 0,$$

azaz

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_C g_k(z) dz.$$

Az általánosított Cauchy-féle alaptétel szerint azonban, ha  $a_k$  a  $C$  görbe belsejében fekszik, akkor alkalmas  $a_k$  középpontú  $K$  körre

$$\int_C g_k(z) dz = \int_K g_k(z) dz.$$

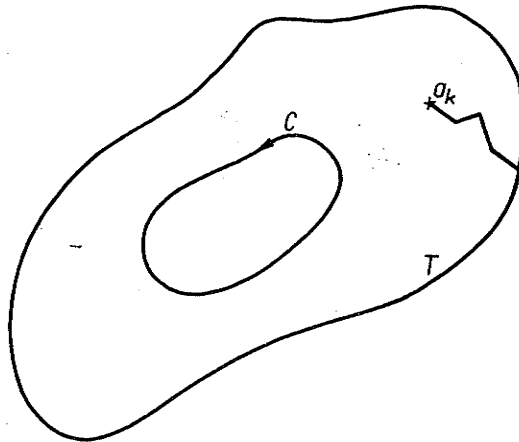
Mivel azonban

$$g_k(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{-\nu}}{(z-a_k)^{\nu}},$$

adódik

$$\int_K g_k(z) dz = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{-\nu} \int_K \frac{dz}{(z-a_k)^{\nu}} = 2\pi j c_{-1} = 2\pi j \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z)$$

tekintettel a hatványsor egyenletes konvergenciájára és az itt szereplő integrálok ismert értékeire (18. fejezet).



79. ábra

Ha viszont  $a_k$  C külsejében fekszik (79. ábra), akkor  $a_k$ -t C metszése nélkül egy törtvonallal T határával összekötve, a megmaradó egyszeresen összefüggő tartományban  $g_k(z)$  reguláris, tehát

$$\int_C g_k(z) dz = 0.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

A Reziduum-tételben kimondott állítás a Cauchy-féle alaptételnek (pontosan be nem bizonyított) következményéből (16. fejezet, III. Tétel) a Laurent-sorfejtés együtthatóit szolgáltató képletre való tekintettel (20. fejezet (6)) közvetlenül adódik. Ha ugyanis az  $f(z)$  függvénynek az  $a_1, a_2, a_3$  izolált szinguláris helyei a  $C$  görbe belsejébe esnek, ezen helyek, mint középpont körüli alkalmas kicsiny sugaru köröket pedig  $K_1, K_2, K_3$  -mal jelöljük, akkor az idézett tétel értelmében (lásd 70. ábra)

$$(\kappa) \quad \int_C f(z) dz = \int_{K_1} f(z) dz + \int_{K_2} f(z) dz + \int_{K_3} f(z) dz,$$

a köröket  $C$  -vel megegyező, pozitív irányban befutva. Ha azonban  $f(z)$ -nek az  $a_1, a_2, a_3$  szinguláris helyekhez tartozó Laurent-sora:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z-a_1)^k, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a_2)^k, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z-a_3)^k,$$

akkor e sorokban a  $b_{-1}, c_{-1}, d_{-1}$  együtthatókat (az  $a_1, a_2, a_3$  izolált szinguláris helyekhez tartozó reziduumokat) a Laurent-sorfejtés együtthatóképletéből adódóan

$$b_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_1} f(\zeta) d\zeta,$$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_2} f(\zeta) d\zeta,$$

$$d_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_3} f(\zeta) d\zeta$$

szolgáltatja. Ezen integrálok értékét  $(\kappa)$  -ba behelyettesítve éppen az igazolandó összefüggésre jutunk.

Adott függvény reziduumának kiszámítására gyakran jól használható a következő szabály:

Ha  $f(z)$  -nek a  $z = a$  helyen  $n$  -edrendű pólusa van, akkor

$$(1) \quad \operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ (z-a)^n f(z) \right].$$

Ha ugyanis  $f(z)$ -nek a  $z = a$  helyen  $n$ -edrendű pólusa van, akkor Laurent-sora:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

vagyis

$$(z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + \dots$$

A  $c_{-1}$  együttható meghatározása céljából differenciáljuk ezen utóbbi azonosságot  $n-1$ -szer (a tagonkénti differenciálás a sor egyenletes konvergenciája miatt jogos):

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ (z-a)^n f(z) \right] = (n-1)! c_{-1} + n(n-1) \dots 2c_0(z-a) + \dots$$

Elvégezve ezután a  $z \rightarrow a$  határátmenetet (közvetlenül nem helyettesíthetünk be  $z$  helyébe  $a$ -t, hiszen  $f(z)$  az  $a$  helyen nincs értelmezve)

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ (z-a)^n f(z) \right] = (n-1)! c_{-1}$$

adódik, ahonnan átrendezéssel az (1) formulát nyerjük.

Ha  $f(z)$  és  $g(z)$  reguláris az  $a$  helyen,  $g(a) \neq 0$ ,  $g'(a) \neq 0$ , akkor

$$(2) \quad \operatorname{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

Valóban, a mondott feltételek mellett, ha  $f(a) \neq 0$ , akkor az  $\frac{f(z)}{g(z)}$  függvénynek elsőrendű pólusa van az  $a$  helyen, és így (1) értelmében

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \left[ (z-a) \frac{f(z)}{g(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(a)}{z-a}} = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

Ha  $f(a) = 0$ ,  $g(a) = 0$ ,  $g'(a) \neq 0$ , akkor az  $\frac{f(z)}{g(z)}$  függvénynek megszüntethető szingularitása van az  $a$  helyen, és ekkor a (2) képlet triviálisan helyes.

Például

$$\int_K \frac{\sin z}{1+z^2} dz$$

értékét, ahol  $K$  a  $|z|=2$  körvonalat jelenti pozitív irányu befutással, a következőképpen számíthatjuk ki. Az integrálandó függvénynek két izolált szinguláris helye  $z_1 = j$ ,  $z_2 = -j$  esik a  $K$  görbe belsejébe.

Mindkét helyre a (2) képlet alkalmazható:

$$\begin{aligned} \int_K \frac{\sin z}{1+z^2} dz &= 2\pi j \left[ \operatorname{Res}_{z=j} \frac{\sin z}{1+z^2} + \operatorname{Res}_{z=-j} \frac{\sin z}{1+z^2} \right] = \\ &= 2\pi j \left[ \left( \frac{\sin z}{2z} \right)_{z=j} + \left( \frac{\sin z}{2z} \right)_{z=-j} \right] = \\ &= 2\pi j \frac{\sin j}{j} = 2\pi \sin j \approx 7,38 j. \end{aligned}$$

Az

$$\int_C \frac{z-4}{z(z-2)^2} dz$$

integrál értékének kiszámításánál, ahol  $C$  a  $|z|=3$  körvonalat jelenti pozitív irányu befutás mellett, az integrálandó függvény  $z=0$  és  $z=2$  helyhez tartozó reziduumait kell kiszámítanunk.

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{z-4}{z(z-2)^2} = \left( \frac{z-4}{(z-2)^2 + z(z-2)^2} \right)_{z=0} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$\operatorname{Res}_{z=2} \frac{z-4}{z(z-2)^2} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \frac{z-4}{z} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{4}{z^2} = 1,$$

tehát

$$\int_C \frac{z-4}{z(z-2)^2} dz = 2\pi j \left( \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z-4}{z(z-2)^2} + \operatorname{Res}_{z=2} \frac{z-4}{z(z-2)^2} \right) = 2\pi j (-1+1) = 0.$$

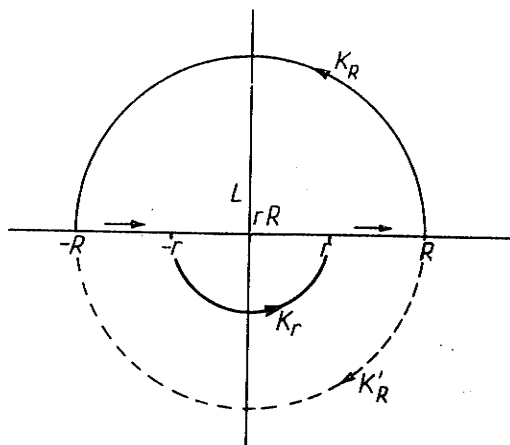
Gyakran előnyösen felhasználható a reziduum-tétel valós integrálok kiszámítására is. Tekintsük pl. az

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

improprius integrált. Az integrálandó függvény páros volta miatt

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

A  $z = 0$  hely körüli  $r$  sugaru félkör alsó felét  $K_r$ , a  $z = 0$  hely körüli  $R$  sugaru félkör felső felét  $K_R$ , alsó felét  $K'_R$ -rel, a valós tengely  $-R < z < -r$ , és  $r < z < R$  szakaszát  $L_{rR}$ -rel jelezve (lásd 80. ábra) írható:



80. ábra



$$I = \frac{1}{2} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[ \int_{-R}^{-r} + \int_r^R \right] = \frac{1}{2} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{L_{rR}} \frac{\sin z}{z} dz =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{L_{rR}} \frac{e^{jz}}{2jz} dz - \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{L_{rR}} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz \right].$$

Mi az alábbiakban a következő zárt görbe mentén vett integrálokat fogjuk kiszámítani:

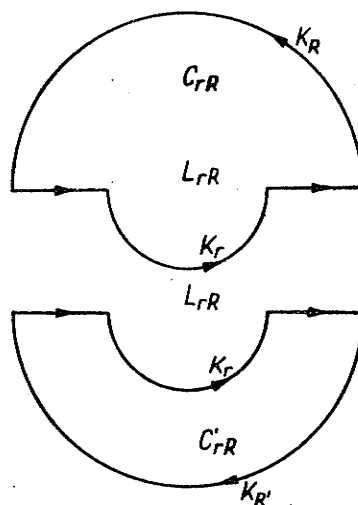
$$I_1 = \int_{C_{rR}} \frac{e^{jz}}{2jz} dz$$

és

$$I_2 = \int_{C'_{rR}} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz,$$

ahol  $C_{rR}$  és  $C'_{rR}$  a 81. ábrán látható görbéket jelentik; majd megmutatjuk, hogy ezen integrálok különbségének a kiszámítandó integráltól való eltérése  $r \rightarrow 0$  és  $R \rightarrow \infty$  esetében a 0-hoz tart, amivel feladatunkat, az  $I$  integrál kiszámítását, meg is oldottuk.

A reziduum-tétel értelmében



81. ábra

$$I_1 = \int_{C_{rR}} \frac{e^{jz}}{2jz} dz = 2\pi j \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{jz}}{2jz} = 2\pi j \frac{e^0}{2j} = \pi,$$

míg a Cauchy-féle alaptétel értelmében

$$I_2 = \int_{C'_{rR}} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz = 0.$$

Mivel azonban

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_2 &= \left[ \int_{L_{rR}} \frac{e^{jz}}{2jz} dz - \int_{L_{rR}} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz \right] = \int_{K_r} \frac{e^{jz}}{2jz} dz + \int_{K_R} \frac{e^{jz}}{2jz} dz - \\
 &- \left[ \int_{K_r} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz + \int_{K'_R} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz \right] = \int_{K_r} \frac{\sin z}{z} dz + \\
 &+ \int_{K_R} \frac{e^{jz}}{2jz} dz - \int_{K'_R} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz,
 \end{aligned}$$

az itt adódó három integrált kell még megbecsülnünk  $r \rightarrow 0$  és  $R \rightarrow \infty$  esetében.

Mivel  $z \rightarrow 0$  esetében  $\left| \frac{\sin z}{z} \right| \rightarrow 1$  (a függvény Laurent-sorfejtéséből ez kiolvasható), azért kicsiny  $r$  esetében található olyan  $N$  szám, hogy  $\left| \frac{\sin z}{z} \right| < N$  legyen. Ekkor azonban

$$\left| \int_{K_r} \frac{\sin z}{z} dz \right| < N \tilde{\pi} r$$

(a  $K_r$  félkörív hosszúsága  $\tilde{\pi} r$ ), és ez nullához tart, ha  $r \rightarrow 0$ .

A visszamaradó két integrál nullához tartásának igazolása teljesen hasonló, így mi csak az  $\int_{K_R} \frac{e^{jz}}{2jz} dz$  integrált vizsgáljuk majd  $r \rightarrow 0$  és  $R \rightarrow \infty$  esetében.

Az integrál kiszámítására alkalmazzuk először a parciális integrálás szabályát:

$$\int_{K_R} \frac{e^{jz}}{2jz} dz = \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^{jz}}{j} \cdot \frac{1}{z} \right]_{z=R}^{z=-R} + \frac{1}{2j} \int_{K_R} \frac{e^{jz}}{j} \cdot \frac{1}{z^2} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \frac{-e^{-jR} - e^{jR}}{z^2} - \frac{1}{2} \int_{K_R} \frac{e^{jz}}{z^2} dz = \\
&= \frac{\cos R}{R} - \frac{1}{2} \int_{K_R} \frac{e^{jz}}{z^2} dz.
\end{aligned}$$

Mivel azonban a  $K_R$  félköríven (itt  $\text{Im } z = y \geq 0$ )

$$|e^{jz}| = |e^{jx-y}| = |e^{-y}| \leq 1,$$

azért

$$\left| \int_{K_R} \frac{e^{jz}}{2jz} dz \right| \leq \left| \frac{\cos R}{R} \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{K_R} \frac{e^{jz}}{2jz} dz \right| \leq \frac{1}{R} + \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \pi R,$$

és itt a jobboldal  $R \rightarrow \infty$  esetében zérushoz tart. Teljesen hasonlóan látható be, hogy

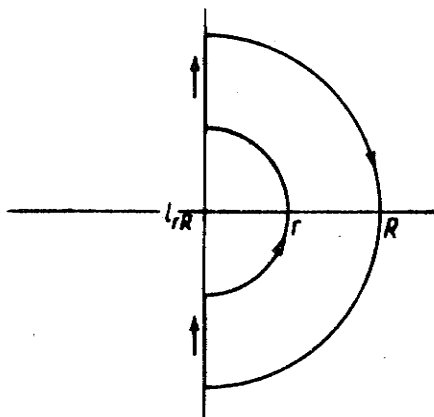
$$\int_{K'_R} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz \rightarrow 0, \quad \text{ha } R \rightarrow \infty,$$

vagyis

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{L_{rR}} \frac{\sin z}{z} dz = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[ \underbrace{\int_{C_{rR}} \frac{e^{jz}}{2jz} dz}_{I_1} - \underbrace{\int_{C'_{rR}} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz}_{I_2} - \int_{K_r} \frac{\sin z}{z} dz - \right. \\
&\quad \left. - \int_{K_R} \frac{e^{jz}}{2jz} dz + \int_{K_R} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz \right] = \frac{1}{2} \tilde{h}.
\end{aligned}$$

Az előbbi integrál kiszámítása során talált részeredmények segítségével az un. impulzus-függvény integrálalakját is előállíthatjuk. Impulzus függvénynek nevezzük a következő utasítással megadott függvényt:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } t = 0, \\ 0, & \text{ha } t < 0. \end{cases}$$



82. ábra

Azt állítjuk, hogy

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\ell_{rR}} \frac{e^{t\zeta}}{\zeta} d\zeta,$$

ahol az  $\ell_{rR}$  görbe a 82. ábrán látható, vagyis az előbbi példánál szereplő  $L_{rR} + K_r$  görbéből 90°-os elforgatással nyerhető görbe. Rövidebben még így is szoktuk jelölni:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{e^{t\zeta}}{\zeta} d\zeta.$$

Az előző példa eredményeit és jelöléseit használva

$$I_1 = \tilde{\kappa},$$

azaz

$$I = \frac{1}{\tilde{\kappa}} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[ \int_{L_{rR} + K_r} \frac{e^{jz}}{2jz} dz + \int_{K_R} \frac{e^{jz}}{2jz} dz \right] = \frac{1}{2\tilde{\kappa}j} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{L_{rR} + K_r} \frac{e^{jz}}{z} dz,$$

hiszen a második integrál, mint láttuk,  $R \rightarrow \infty$  esetében zérushoz tart. Vezessük be a

$$jz = t\zeta \quad (t > 0), \quad dz = \frac{t}{j} d\zeta$$

helyettesítést, mely tulajdonképpen 90°-os elforgatást és nyújtást eredményez, vagyis az  $L_{rR} + K_r$  integrációs út lényegében az előbb  $\ell_{rR}$ -rel jelölt utba megy át:

$$1 = \dots = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\ell_{rR}} \frac{e^{t\zeta}}{\zeta} \frac{t}{j} d\zeta = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{e^{t\zeta}}{\zeta} d\zeta = f(t),$$

↑  
(t > 0).

Igy tehát t > 0 esetre valóban igazoltuk, hogy

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{e^{t\zeta}}{\zeta} d\zeta = 1.$$

↑

Az előző példánál láttuk azonban, hogy

$$I_2 = 0,$$

azaz

$$0 = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[ \int_{L_{rR} + K_r} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz + \int_{K'_R} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz \right] = \frac{1}{2\pi j} \int_{L_{rR} + K_r} \frac{e^{-jz}}{2jz} dz,$$

hiszen a második integrál, mint mondtuk, R → ∞ esetében zérushoz tart. A jz = -t helyettesítést alkalmazva (t < 0, dz = - $\frac{t}{j}$  dζ) az előzőhöz hasonló okoskodással

$$0 = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\ell_{rR}} \frac{e^{t\zeta}(-t)}{\frac{-t\zeta}{j}} d\zeta = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{e^{t\zeta}}{\zeta} d\zeta = f(t) \quad (t < 0).$$

↑

Igy tehát t < 0 esetre valóban igazoltuk, hogy

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{e^{t\zeta}}{\zeta} d\zeta = 0.$$

↑

Vizsgáljuk meg az itt adódó f(t) függvény értékét t = 0 esetében:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{e^0}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{1}{\zeta} d\zeta.$$

↑

Alkalmazzuk a ζ = -jz helyettesítést (dζ = -j dz) :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{1}{jz} j dz = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[ \int_{L_{rR}} \frac{dz}{z} + \int_{K_r} \frac{dz}{z} \right] = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{K_r} \frac{dz}{z},$$

hiszen az első integrál az integrandusz páratlansága folytán zérussal egyenlő. Visszamaradó integrálunkat polárkoordináták bevezetésével számíttva ki, adódik:

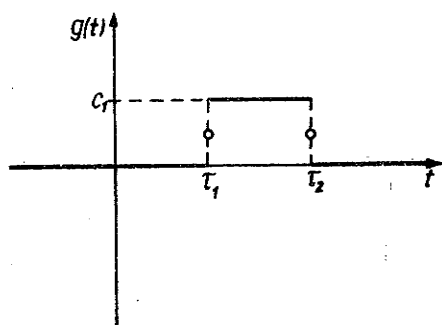
$$f(0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\tilde{\kappa}}^0 \frac{1}{re^{j\varphi}} r j e^{j\varphi} d\varphi = \frac{j\tilde{\kappa}}{2\pi j} = \frac{1}{2}.$$

Beláttuk tehát, hogy valóban

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{e^{t\zeta}}{\zeta} d\zeta = \begin{cases} 1, & \text{ha } t > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } t = 0, \\ 0, & \text{ha } t < 0. \end{cases}$$

Ebből már következik, hogy

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{e^{(t-\tilde{\tau}_1)\zeta}}{\zeta} d\zeta = \begin{cases} 1, & \text{ha } t > \tilde{\tau}_1, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } t = \tilde{\tau}_1, \\ 0, & \text{ha } t < \tilde{\tau}_1. \end{cases}$$



83. ábra

A 83. ábrán megadott függvényt például így adhatjuk meg integrálképlettel:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{c_1 e^{(t-\tau_1)\zeta} - c_1 e^{(t-\tau_2)\zeta}}{\zeta} d\zeta.$$

A residuum-tétel nevezetes alkalmazásaként foglalkozni fogunk az alábbiakban az un. argumentum-elvvel. Ennek kimondásához, ill. igazolásához két segédtételekre van azonban szükségünk:

### I. Segédétel

Ha  $f(z)$  reguláris az  $a$  helyen, és a az  $f(z)$  függvénynek  $m$ -edrendű zérushelye, akkor az  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  függvénynek az  $a$  hely elsőrendű pólusa és

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = m.$$

### Bizonyítás

A feltétel értelmében

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(m)}(a) \neq 0,$$

vagyis az  $f(z)$  függvénynek az  $a$  helyhez tartozó Taylor-sora:

$$f(z) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} (z-a)^m + \dots = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

és így

$$f'(z) = m c_m (z-a)^{m-1} + \dots = \sum_{k=m}^{\infty} k c_k (z-a)^{k-1},$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a} \frac{m c_m + (m+1) c_{m+1} (z-a) + \dots}{c_m + c_{m+1} (z-a) + \dots}.$$

Mivel azonban

$$g(z) = \frac{m c_m + (m+1) c_{m+1} (z-a) + \dots}{c_m + c_{m+1} (z-a) + \dots}$$

reguláris az  $a$  helyen, tehát ott Taylor-sorba fejthető:

$$\begin{aligned} g(z) &= g(a) + g'(a) (z-a) + \dots = \\ &= m + \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z-a)^k \end{aligned}$$

adódik, hogy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a} \quad g(z) = \frac{1}{z-a} (m + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \dots),$$

és e Laurent-sorfejtésből a segédtétel állítása közvetlenül kiolvasható:

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = m.$$

## II. Segédtétel

Ha a b hely az f(z) függvénynek n-edrendű pólusa, akkor a b hely az  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  függvénynek elsőrendű pólusa és

$$\operatorname{Res}_{z=b} \frac{f'(z)}{f(z)} = -n.$$

## Bizonyítás

A feltétel értelmében f(z) b helyhez tartozó Laurent-sora

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-b)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-b} + c_0 + c_1(z-b) + \dots = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-b)^k$$

azaz

$$f'(z) = \frac{-n c_{-n}}{(z-b)^{n+1}} + \dots = \sum_{k=-n}^{\infty} k c_k (z-b)^{k-1},$$

innen

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\frac{-n c_{-n}}{(z-b)^{n+1}} + \dots}{\frac{c_{-n}}{(z-b)^n} + \dots} = \frac{1}{z-b} \frac{-n c_{-n} + b_1(z-b) + \dots}{c_{-n} + d_1(z-b) + \dots}.$$

Mivel azonban

$$g(z) = \frac{-n c_{-n} + b_1(z-b) + \dots}{c_{-n} + d_1(z-b) + \dots}$$



reguláris a  $b$  helyen és  $g(b) = -n$ , a  $g(z)$  függvényt a  $b$  helyen Taylor-sorba fejtvé adódik:

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{z-b} g(z) = \frac{1}{z-b} (g(b) + g'(b)(z-b) + \dots) = \\ &= \frac{1}{z-b} (-n + g'(b)(z-b) + \dots),\end{aligned}$$

tehát a  $b$  hely valóban elsőrendű pólus és

$$\operatorname{Res} \frac{f'(z)}{f(z)} = -n,$$

amint azt állítottuk.

E segédtételek birtokában az argumentum-elve a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

#### Argumentum elv

Legyen  $f(z)$  a  $T$  egyszeresen összefüggő tartományban véges sok pólus kivételével reguláris függvény, amelynek csak véges sok zérushelye van. Jelentsen  $C$  olyan rektifikálható Jordan-görbét, amely  $f(z)$  egyetlen szinguláris helyén és egyetlen zérushelyén sem halad át. Ha a  $C$  görbe belsejébe a  $b_1, b_2, \dots, b_k$  pólusok (a  $b_i$  pólus  $n_i$ -edrendű,  $i = 1, 2, \dots, k$ ) és az  $a_1, a_2, \dots, a_j$  zérushelyek (az  $a_i$  zérushely  $m_i$ -edrendű,  $i = 1, 2, \dots, j$ ) esnek, akkor a  $C$  görbe pozitív irányu befutása mellett  $\arg f(z)$  megváltozása a  $C$  görbe mentén  $2\pi$ -szerese a multiplicitással számított zérushelyek és pólushelyek száma közötti különbségnek.

#### Bizonyítás

A tett feltevések mellett a Residuum-tételt és az előbbi két segédtételt alkalmazva:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi j \left[ \sum_{i=1}^j \operatorname{Res}_{z=a_i} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{k=1}^k \operatorname{Res}_{z=b_k} \frac{f'(z)}{f(z)} \right] =$$

$$= 2\pi j (m_1 + m_2 + \dots + m_j - n_1 - n_2 - \dots - n_k) =$$

$$= 2\pi j (M - N),$$

ahol  $M$   $f(z)$  zérushelyeinek száma (e helyeket multiplicitásukkal véve),  $N$  pedig  $f(z)$  pólusainak száma (multiplicitással véve).

Másrészt azonban, ha  $C$  egyenletét  $z = z(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  alakban adjuk meg,

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{t_1}^{t_2} \frac{f'(z(t))}{f(z(t))} z'(t) dt = \left[ \ln f(z(t)) \right]_{t_2}^{t_1}$$

és mivel  $\ln f(z(t))$  valós részének  $\ln|f(z(t))|$ -nek megváltozása a  $C$  zárt görbén való körülhaladás során zérus, integrálunk  $\ln f(z(t))$  képzetes részének,  $\arg f(z)$ -nek megváltozásával,  $\Delta \arg f(z)$ -vel a következőképpen fejezhető ki:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = j \Delta \arg f(z) = 2\pi j (M - N),$$

vagyis végeredményben

$$\Delta \arg f(z) = 2\pi (M - N)$$

amit igazolni akartunk.

## 22. Schwarz-Christoffel-formula

A komplex függvénytan alkalmazásai során gyakran felmerül az a feladat, hogy a komplex sík egy adott tartományát egy másik adott tartományra reguláris függvény segítségével konformisan kell leképezni. Ilyen leképezés lehetőségét igen általános feltételek mellett biztosítja a konformis leképezés alaptétele, amely szerint minden síkbeli egyszeresen összefüggő tartomány - kivéve magát az egész síkot - konformisan leképezhető egy kör belsejére, amiből könnyen következik, hogy bármely két ilyen tartomány egymásra is leképezhető konformisan.

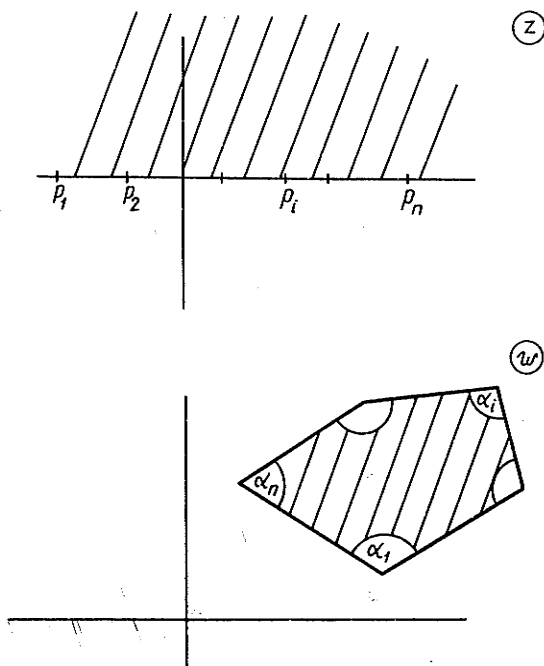
Ez az alaptétel persze még nem nyújt meghatározott eljárást arra nézve, hogyan kell egy adott tartományt egy másik adott tartományra konformisan leképezni. Sok esetben a leképezést létesítő függvényt nem nehéz

megkeresni. Speciálisan körtartó leképezést létesítő lineáris törtfüggvényeket a 14. fejezetben ismertetett módszerrel írhatunk fel.

Sokszögek által határolt tartományok leképezésénél gyakran jó szolgálatot nyújt a következő ún. Schwarz-Christoffel-féle formula:

$$(1) \quad w = M \int_C^z (\zeta - p_1)^{\lambda_1} (\zeta - p_2)^{\lambda_2} \dots (\zeta - p_n)^{\lambda_n} d\zeta + N$$

függvény, ahol  $C, M, N, p_1, \dots, p_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  állandók, a felső félsíkot (az  $\text{Im } z \geq 0$  félsíkot) egy sokszög belsejére és határára képezi le úgy, hogy a valós tengely  $p_1, \dots, p_n$  pontjai mennek át a sokszög csúcspontjaiba, és a sokszögnek a  $p_i$ -nek megfelelő csúcsnál fekvő belső szöge  $\alpha_i = (\lambda_i + 1)\pi$ . (84. ábra).



84. ábra

Itt sokszögön nemcsak az elemi geometriában szereplő sokszögeket kell érteni, hanem általánosabban minden olyan egyszerűen összefüggő tartományt, amelynek határa véges számú egyenesszakaszból és félegyenesből tehető össze (lásd 85-91. ábrát).

Az állítás részletes bizonyítására nincs módunk, a szereplő állandókkal kapcsolatban azonban megjegyezzük, hogy a  $p_1, p_2, \dots, p_n$  pontok közül hármat tetszőlegesen adhatunk meg, míg a többi  $p_k$  pontot, valamint az  $M$  és  $N$  állandókat a feladat feltételeiből kell meghatározni. Annyit azonban könnyű belátni, hogy ha  $z$  a valós tengely mentén  $p_i$ -től  $p_{i+1}$ -ig változik, akkor ezen  $z - k$  képe a (4) függvény által nyújtott leképezésnél egy egyenes-szakaszt ír le. (1) -ből ugyanis

$$\frac{dw}{dz} = M(z - p_1)^{\lambda_1} (z - p_2)^{\lambda_2} \dots (z - p_n)^{\lambda_n},$$

vagyis

$$\operatorname{arc} \frac{dw}{dz} = \operatorname{arc} M + \sum_{k=1}^n \lambda_k \operatorname{arc}(z - p_k).$$

Ha azonban  $z$  a feltétel értelmében a valós tengelyen  $p_i$  és  $p_{i+1}$  között változik, akkor  $\operatorname{arc}(z - p_k) = 0$ , ha  $k \leq i$  és  $\operatorname{arc}(z - p_k) = \tilde{\pi}$ , ha  $k \geq i+1$ , ilyen  $z$ -kre tehát

$$(2) \quad \operatorname{arc} \frac{dw}{dz} = \operatorname{arc} M + \sum_{k=i+1}^n \lambda_k \tilde{\pi},$$

a valós tengely  $(p_i, p_{i+1})$  szakasza tehát valóban egyenesdarabba megy át (a szakasz képe olyan görbe, melynek érintői olyan komplex vektorok, melyeknek arkusza a (2) összefüggéssel megadott állandó, vagyis a kép görbe egyenes). (2) -ből azonban az is kiolvasható, hogy a  $(p_{i-1}, p_i)$  és  $(p_i, p_{i+1})$  szakaszok képei által bezárt külső szög:

$$\operatorname{arc} M + \tilde{\pi} (\lambda_{i+1} + \dots + \lambda_n) - (\operatorname{arc} M + \tilde{\pi} (\lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_n)) = -\lambda_i \tilde{\pi},$$

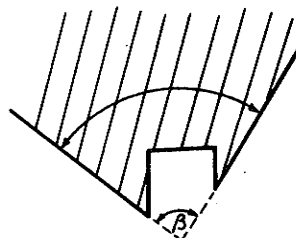
ugyhogy a megfelelő belső szög

$$\alpha_i = \tilde{\pi} + \lambda_i \tilde{\pi},$$

amivel beláttuk, hogy a valós tengelyt az (1) függvény egy sokszögre képezi le; be kellene még bizonyítani, hogy az  $\operatorname{Im} z \geq 0$  félsíkot (1) a sokszög belsejére képezi le, mégpedig kölcsönösen egyértelműen. Erre azonban nem térünk ki.

Az alkalmazások során gyakran lép fel az az eset, amikor a  $w$ -síkon fekvő sokszög csúcsai egyikének a végtelen távoli pont felel meg; ekkor az (1) -ben felírt Schwarz-Christoffel-féle formulában az  $e$  csúcshoz megfelelő tényező kiesik. Ezt a tényt a gyakorlatban az (1) formula egyszerűsítésére szokták felhasználni.

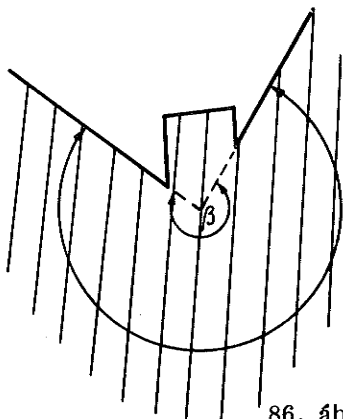
Ugyancsak fontos az alkalmazások szempontjából az az eset, amikor a  $w$  síkban fekvő sokszögnek van egy vagy több csúcsa a végtelenben. Ilyenkor a végtelenben fekvő csúcsoknál levő szöget a végtelenbe futó egyenesek végesben fekvő metszéspontjánál alkotott szög  $(-1)$ -szeresének kell venni.



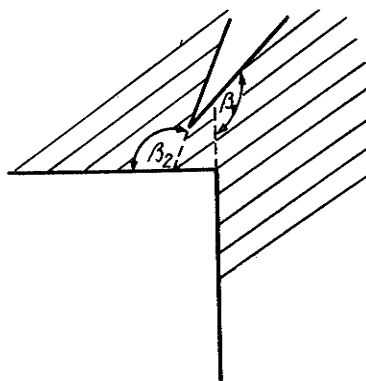
85. ábra

Két végtelenbe futó félegyenes szögén a félegyenesek (vagy meghosszabbításuk) metszéspontja körül elég nagy sugárral húzott és a vizsgált tartományban fekvő körív középponti szögének  $(\beta)$   $(-1)$ -szeresét kell érteni (85., 86. és 87. ábra).

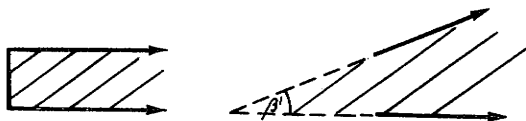
Párhuzamos félegyenesek szögét a nem párhuzamos félegyenesek esetének határhelyzeteként fogjuk fel, és az így adódó  $(\beta')$  szög határértékeként állapítjuk meg szögüket (88., 89. és 90. ábrák).



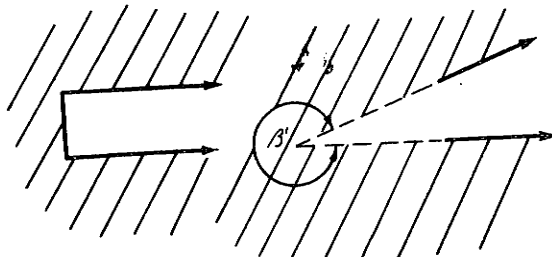
86. ábra



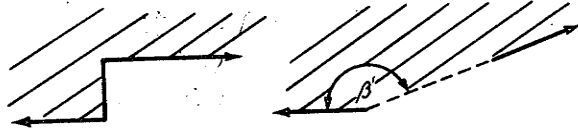
87. ábra



88. ábra

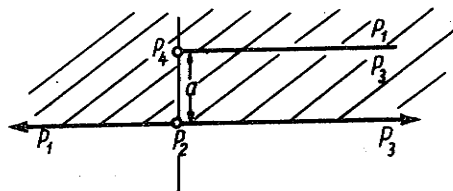


89. ábra



90. ábra

Legyen pl. a  $w$ -síkban fekvő sokszög az  $a_j$  pontból jobbra kiinduló, a valós tengellyel párhuzamos félegyenes mentén bemetszett felső félsík. Ez olyan négyszögnek tekinthető, amelynek két csúcsa a végtelenben van,



91. ábra

oldalszakaszai a valós tengelynek a  $0$ -tól balra, ill. jobbra fekvő félegyenes, ill. a bemetszést szolgáltató félegyenes kétszer befutva (91. ábra). Ezen négyszög  $0$  pontban elhelyezett  $P_2$  csúcsánál fekvő szöge  $\tilde{\pi}$ , az  $a_j$  pontnál ( $P_4$ ) levő szöge  $2\tilde{\pi}$ , míg a végtelen távoli  $P_3$  csúcsban  $0$ , a  $P_1$  csúcsban pedig  $-\tilde{\pi}$  a szög mérőszáma, ami a bemetsző

egyenes kis elforgatásával az előbbi szabályok alapján könnyen meghatározható.

A  $P_1$  végtelen távoli csúcspontot a  $z$ -sík végtelen távoli pontjának, a  $P_3$  csúcsot a  $p_3 = 0$  pontnak, a  $P_4$  csúcspontot a  $p_4 = 1$  pontnak, a  $P_2$  csúcspontot pedig alkalmas  $p_2 =$  pontnak feleltetjük meg. A megfelelő kitevők a Schwarz-Christoffel formulában:

| $P_k$ | $p_k$    | $\alpha_k$     | $\lambda_k = \frac{\alpha_k}{\tilde{\pi}} - 1$ |
|-------|----------|----------------|------------------------------------------------|
| $P_1$ | $\infty$ | $-\tilde{\pi}$ | $-2$                                           |
| $P_2$ | $\xi$    | $\tilde{\pi}$  | $0$                                            |
| $P_3$ | $0$      | $0$            | $-1$                                           |
| $P_4$ | $1$      | $2\tilde{\pi}$ | $1$                                            |

Ennek értelmében

$$\begin{aligned} (K) \quad w &= M \int (\zeta - \xi)^0 (\zeta - 0)^{-1} (\zeta - 1) d\zeta + N = M \int \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta + N = \\ &= M(z - \ln z) + N \end{aligned}$$

létesíti a kívánt leképezést (a  $p_1$ -nek megfelelő tényező nem szerepel  $(K)$ -ban, mert  $p_1 = \infty$ , és a  $p_2$ -nek megfelelő szintén nem szerepel, mert  $\lambda_2 = 0$ ).

Az  $M$  és  $N$  állandók értékét a következő okoskodással határozhatjuk meg.

Ha  $z$  a valós tengely mentén balról tart  $0$ -hoz a keresett leképezésnél adódó képpontok a valós tengely mentén  $\infty$ -hez kell, hogy tartssanak, vagyis ekkor a  $z = -r$  ( $r > 0$  valós) jelöléssel

$$(KK) \quad M(-r - \ln(-r)) + N \rightarrow \infty, \quad \text{ha } r \rightarrow +0,$$

és itt a baloldalon látható kifejezés minden elég kis  $r$ -re valós. Mivel azonban a leképező függvény a  $z = 1$  pontnak a  $w = aj$  pontot felelteti meg,  $(K)$  ből

$$aj = M + N, \quad \text{azaz } N = aj - M$$

adódik, és így  $(KK)$  még így is írható:

$$M(-r - \ln(-r)) + aj - M \rightarrow +\infty, \quad \text{ha } r \rightarrow +0.$$

Az a tény, hogy a baloldali kifejezés elég kicsiny valós  $r > 0$ -ekre már valós kell, hogy legyen, az  $M = M_1 + jM_2$  jelöléssel azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} (KKK) \quad \operatorname{Im} [M(-r - \ln(-r)) + aj - M] &= \\ &= M_1 \tilde{\kappa} - M_2(r + \ln) + a - M_2 = 0. \end{aligned}$$

Ez azonban minden elég kis  $r$ -re csak úgy állhat, ha

$$M_2 = 0,$$

és ekkor  $(KKK)$  értelmében

$$M_1 \tilde{\kappa} + a = 0, \quad M_1 = -\frac{a}{\tilde{\kappa}} = M,$$

azaz

$$N = a_j - M = a_j + \frac{a}{\hbar}.$$

Az adott leképezést létesítő függvény tehát

$$w = -\frac{a}{\hbar} (z - \ln z) + ja + \frac{a}{\hbar}.$$

## 22. Komplex potenciál

A komplex változós függvénytan egyes eredményei igen gyümölcsözően alkalmazhatók speciális vektorterek leírására. Ilyen vektorterek a kétdimenziós vektorterek (vektormezők) és az ún. planparalel vektorterek. Planparalelnek olyan vektortereket nevezünk, amelynél a tér vektorai párhuzamosak egyetlen  $M$  síkkal, és bármely  $M$ -re merőleges egyenes pontjaiban a hozzárendelt vektorok nagysága és iránya egyező. Ilyen vektortér pl. az egyenesen egyenletesen eloszló töltés elektrosztatikus tere.

Tegyük fel, hogy a vizsgált  $E$  planparalel vektortér egy egyszerűen összefüggő  $N$  térrészben rotáció- és divergenciamentes:

$$(1) \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0.$$

$$(2) \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

Ekkor  $N$ -ben  $\vec{E}$ -nek van skalárpotenciálja:

$$\vec{E} = -\operatorname{gradu},$$

és (2) -re való tekintettel

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \operatorname{gradu} = \Delta u = 0,$$

vagyis az  $u$  skalárpotenciál harmonikus függvény. Mivel feltevésünk értelmében  $\vec{E}$  planparalel, ha  $M$  a  $z$ -sík, ( $z = x + jy$ ) ez azt jelenti, hogy  $u(x, y)$  harmonikus függvény, megadható tehát egy reguláris komplex változós függvény valós részeként.

Tegyük fel, hogy ismerjük az  $\vec{E}$  vektortér ekvipotenciális felületeit, ezek a  $z$ -síkra merőleges alkotóju hengerfelületek, melyeknek a  $z$ -síkkal való metszetei (az ekvipotenciális vonalak) az

$$u = c$$

egyenlettel adhatók meg.



Ha  $u$  harmonikus társát  $v$  -vel jelöljük, akkor a

$$v = k$$

felületsereg (görbesereg) merőleges lesz az  $u = c$  ekvipotenciális felületsereg (görbesereg), hiszen

$$\begin{aligned} \text{grad } u \cdot \text{grad } v &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \bar{j} \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

(az  $u + jv$  függvény reguláris volta miatt ugyanis  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ). Ez azonban azt jelenti, hogy ha  $v$  az  $u$  potenciálfüggvény harmonikus társa, akkor  $v = k$  az  $\bar{E}$  tér trajektóriáinak egyenlete.

### Definíció

#### Az

$$F(z) = u + jv$$

komplex változós függvényt, ahol  $u(x, y)$  az  $\bar{E}$  vektortér skalárpotenciálja,  $v(x, y)$  pedig ennek harmonikus társa, az  $\bar{E}$  planparalel divergencia- és rotációmentes tér komplex potenciáljának nevezzük.

Láttuk, hogy a komplex potenciál az  $\bar{E}$  vektortér ekvipotenciális vonalainak, ill. trajektóriáinak rendszerét a képsík koordinátahálózatába viszi át. Adott  $u = c$  ekvipotenciális vonalsereg ismeretében kereshetjük tehát az  $F(z)$  komplex potenciált mint egy, az adott leképezést létesítő reguláris komplex változós függvényt a 22. fejezetben, ill. egyszerűbb esetben a 14. fejezetben részletezett módon.

Végezetül az  $\bar{E}$  vektortér és annak  $F(z)$  komplex potenciálja között fennálló további összefüggésre szeretnénk még utalni.

Mivel  $F(z)$  reguláris

$$F'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - j \frac{\partial u}{\partial y},$$

és így

$$|F'(z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = |\bar{E}|,$$

mi az

$$\bar{E} = X\bar{i} + Y\bar{j}$$

jelöléssel

$$X + jY = -\overline{F'(z)}.$$

A komplex potenciál deriváltjának abszolút értéke megadja tehát a vektortér nagyságát, konjugáltjának  $(-1)$ -szerese pedig magát a vektorteret adja meg.

Pl. a koordináta-rendszer kezdőpontján áthaladó és a  $z$ -síkra merőleges vezető esetében, ha a hosszúságegységre eső töltés méréyszáma  $q$ , az ekvipotenciális vonalak koncentrikus körök, a trajektóriák pedig a koordináta-rendszer kezdőpontjából kiinduló félegyenesek.

E vektorteret az

$$\bar{E} = 2q \frac{x\bar{i} + y\bar{j}}{x^2 + y^2}$$

képlettel adhatjuk meg.

A komplex potenciálra tehát, mivel

$$-F'(z) = 2q \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = 2q \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 2q \frac{1}{z}$$

adódik:

$$F(z) = 2q \ln \frac{1}{z} = -2q \ln z.$$

Valóban

$$\operatorname{Re} F(z) = 2q \ln \frac{1}{|z|} = c \quad (0,0) \text{ középpontú körsereg,}$$

$\operatorname{Im} F(z) = 2q \operatorname{arc} \frac{1}{z} = K \quad (0,0)$ -ből kiinduló félegyenes-sereg egyenlete.

## DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

### 24. A differenciálegyenletek fogalma és osztályozása

Sok fizikai, geometriai, műszaki probléma megoldásához bizonyos változó mennyiségek közötti függvénykapcsolatot kell meghatároznunk. Gyakran a probléma ismert feltételei lehetővé teszik, hogy az ismeretlen függvény, annak független változója és az ismeretlen függvény első, második stb. differenciálhányadosa között bizonyos összefüggést állapítsunk meg. Így pl. egy sorbakapcsolt  $R$  ohmikus ellenállást és  $L$  önindukciót tartalmazó áramkörben folyó áram  $I$  intenzitása, az áramforrás (esetleg változó)  $U(t)$  feszültsége és a  $t$  idő között a következő kapcsolat áll fenn:

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + R I = U.$$

A nehézségi erőterben szabadon eső test  $h$  magassága és az esés  $t$  ideje között a következő összefüggés érvényes:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -g.$$

ahol  $g$  a nehézségi gyorsulás mérőszáma. Ha azonban a szabadon eső testre a sebességgel arányos fékező erő (légellenállás) hat, akkor az előbbi egyenlet így módosul:

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -mg + k \frac{dh}{dt}.$$

Általában az olyan összefüggést, amely valamely függvény, annak független változója és az egyes független változók szerinti deriváltjai között állapít meg kapcsolatot, differenciálegyenletnek nevezzük. Ha a függvény egyváltozós, és így a szereplő deriváltak közönséges deriváltak, akkor közönséges differenciálegyenletről, ha a függvény többváltozós, és így a szereplő deriváltak parciális deriváltak, akkor parciális differenciálegyenletről beszélünk.

Az előbb felírt három differenciálegyenlet közönséges differenciálegyenlet. Parciális differenciálegyenlet pl. a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

un. síkbeli Laplace-egyenlet.

Mi az alábbiakban egyelőre csak közönséges differenciálegyenletekkel fogunk foglalkozni, ezeket fogjuk röviden differenciálegyenleteknek nevezni.

A differenciálegyenleteket a bennük fellépő deriváltak rendszáma szerint osztályozhatjuk.

### Definíció

Egy differenciálegyenletet  $n$ -edrendűnek mondunk, ha a differenciálegyenletben fellépő legmagasabbrendű derivált  $n$ -edrendű.

Ennek értelmében a fejezet elején felírt első differenciálegyenlet elsőrendű, a másik kettő pedig másodrendű.

Elsőrendű, másodrendű, ill.  $n$ -edrendű differenciálegyenletek legáltalánosabban a következő implicit alakban adhatók meg:

$$f(x, y, y') = 0,$$

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

ill.

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Mi az alábbiakban általában explicit alakban megadható differenciálegyenletekkel fogunk foglalkozni. Az  $n$ -edrendű explicit alakban megadható differenciálegyenletek általános alakja:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

### Definíció

Az olyan függvényt, amely valamely differenciálegyenletnek eleget tesz, a differenciálegyenlet megoldásának nevezzük.

A differenciálegyenletek megoldását az alábbiakban a valós változóju, valós értékű függvények körében keressük.

Valamely differenciálegyenletnek általában nemcsak egy megoldása van, hanem végtelen sok. Pl. az

$$y' = 2x$$

differenciálegyenletnek megoldásai az

$$y = x^2 + c$$

alakú függvények, ahol  $c$  tetszőleges állandó. Az  $y = x^2 + c$  ún. egy-paraméteres függvényseregen kívül azonban más megoldása nincs is az  $y' = 2x$  differenciálegyenletnek.

Az

$$y'' = e^x$$

differenciálegyenletnek megoldásai az

$$y = e^x + c_1 x + c_2$$

alkalú függvények (a megoldás kétparaméteres függvénysereggel adható meg), és csak ezek oldják meg a differenciálegyenletet.

Valamely elsőrendű differenciálegyenletnek végtelen sok megoldása közül általában oly módon jelölhetünk meg egyet, hogy megadjuk az ismeretlen függvénynek az értékét a független változónak valamely  $x_0$  értékéhez, azaz előírjuk az

$$y(x_0) = y_0$$

értéket. Miután igen gyakori az az eset, hogy a differenciálegyenletben a független változó az idő, és az ismeretlen függvénynek a vizsgált folyamat kezdetekor (azaz  $t = 0$  -nál) felvett értéke ismeretes, azért az ilyen feltevélt kezdeti feltételnek szokás nevezni.

Másodrendű differenciálegyenlet esetén rendszerint az

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{és} \quad y'(x_0) = y'_0$$

értékeket szokták előírni (pl. mozgási feladat esetében a kezdeti helyzetet és sebességet) és az ilyen típusú előírást nevezik kezdeti feltételnek.

Általában egy  $n$ -edrendű

$$(K) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

differenciálegyenlet megoldása  $n$  -paraméteres függvényseregként adódik:

$$(KK) \quad y = g(x, c_1, \dots, c_n),$$

ahol  $c_1, \dots, c_n$  állandók. ~~(\*\*)~~ -ot a ~~(\*)~~ differenciálegyenlet általános megoldásának nevezik. A  $c_1, \dots, c_n$  állandók speciális megválasztásával ~~(\*\*)~~ -ből a ~~(\*)~~ differenciálegyenlet egy speciális, un. partikuláris megoldására jutunk. Az állandók speciális megválasztására általában egy

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

kezdeti feltétel ad utasítást.

Konkrét problémák megoldásában szereplő differenciálegyenleteknél igen gyakran a kezdeti feltételek is a feladat adatai között szerepelnek. A szokásos eljárás ilyenkor rendszerint az, hogy először a differenciálegyenlet általános megoldását (a differenciálegyenletet kielégítő paraméteres függvénysereget) keressük meg, majd az abban előforduló állandók értékét iparkodunk úgy megválasztani, hogy a kezdeti feltételek ki legyenek elégítve.

Tekintsük pl. a következő problémát: a  $t = 0$  pillanatban függőlegesen felfelé hajtunk egy testet  $v_0 = 2 \text{ m/sec}$  kezdősebességgel,  $h_0 = 10 \text{ m}$  magasságból. Az időnek milyen függvénye lesz a testnek a talaj feletti  $h$  magassága?

Tudjuk, hogy a légellenállást figyelmen kívül hagyva a  $h$  magasság a következő differenciálegyenletnek tesz elget:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -g = -9,8.$$

Ennek a differenciálegyenletnek általános megoldása közvetlen integrálással adódóan:

$$h = -9,8 \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Mint hogy  $t = 0$  -kor  $h = 10$ , adódik:

$$10 = c_2,$$

és mivel ugyancsak  $t = 0$  -kor  $\frac{dh}{dt} = -9,8 t + c_1$  értéke  $2$ , azért tehát

$$2 = c_1.$$

Igy a keresett magasság:

$$h = -4,9 t^2 + 2t + 10.$$

Az eddigi egyszerű példákban a differenciálegyenlet megoldását integrálás (kvadratura) útján határoztuk meg. Hasonló a helyzet még sok más differenciálegyenletnél is. Erre való tekintettel szokás a differenciálegyenlet megoldásának műveletét a differenciálegyenlet integrálásának is nevezni, a differenciálegyenletnek eleget tevő függvényt, vagy az olyan implicit függvénykapcsolatot, amelynek ez a függvény eleget tesz, a differenciálegyenlet integráljának, és az ilyen függvényt ábrázoló görbét a differenciálegyenlet integrálgörbéjének nevezni.

Annak a kérdésnek általánosságban való vizsgálatára, hogy valamely differenciálegyenletnek mikor van valamely  $(x_0, y_0)$  ponton áthaladó egy és csakis egy megoldása, a 26. fejezetben térünk ki részletesen. A továbbiakban most az elsőrendű differenciálegyenleteknek legegyszerűbb típusaival ismerkedünk meg, melyeknél meg tudunk adni olyan eljárást, amely megfelelő megszorítások mellett véges számú lépésben elvezet a differenciálegyenlet valamennyi megoldásához.

## 25. Elsőrendű differenciálegyenletek

Az alábbiakban az

$$(*) \quad y' = f(x, y)$$

explicit alakban megadható elsőrendű differenciálegyenletek néhány típusával fogunk foglalkozni.

Általánosságban a  $(*)$  típusú differenciálegyenletek az  $f(x, y)$  függvény  $T$  értelmezési tartományában (ahol  $T$  összefüggő nyílt halmaz) a következőképpen szemléltethetők:

Minden  $(x, y) \in T$  ponthoz az  $(*)$  differenciálegyenlet egy irányt rendel a

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$$

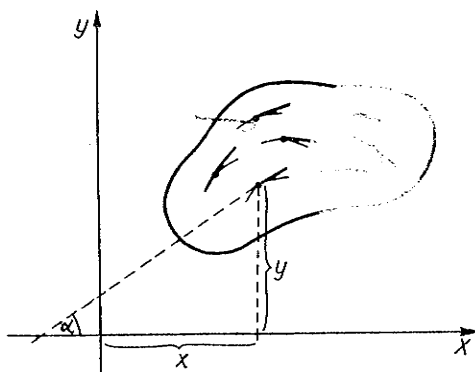
összefüggéssel, ahol  $\alpha$  jelenti a megadott irányba mutató vektornak az  $X$  tengely pozitív irányával bezárt szögét. Ily módon tehát az  $(*)$  differenciálegyenlet a  $T$  tartományban egy iránymezőt definiál,  $(*)$  megoldásai pedig olyan görbék, amelyek ezen iránymezőhöz simulnak, vagyis amelyek érintőjének meredeksége minden  $(x, y) \in T$  pontban a megfelelő  $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$  érték.

A fentiek pontosabb megfogalmazásához a következő fogalmat célszerű bevezetni:

### Definíció

Az  $x, y, p$  számhármast, ahol  $p = \operatorname{tg} \alpha$  az  $(x, y)$  ponton áthaladó, és az  $X$  tengely pozitív irányával  $\alpha$  szöget bezáró egyenes meredeksége, az  $(x, y)$  ponton áthaladó vonalelemnek nevezzük.

Ha egy adott görbének minden pontjában van érintője, és ez az érintő egyetlen pontban sem párhuzamos az  $Y$  tengellyel, akkor azt mondjuk, hogy a görbe azokat a vonalelemeket szolgáltatja, amelyeket úgy nyerünk, hogy az  $(x, y)$  koordinátákkal megadott görbe-ponthoz a számhármass harmadik tagjaként a görbe  $(x, y)$  pontbeli érintőjének  $p = \operatorname{tg} \alpha$  meredekségét rendeljük hozzá.



92. ábra

A  $(x)$  differenciálegyenlet tehát minden  $(x, y) \in T$  ponthoz egy vonalelemet rendel (92. ábra). A differenciálegyenlet megoldása során olyan görbét keresünk, melynek minden pontjában van érintője, és csak olyan vonalelemeket szolgáltat, amelyek a  $(x)$  összefüggésből nyerhetők.

Megfordítva, legyen megadva a sík valamely  $T$  tartományában egy görbesereg úgy, hogy  $T$  minden pontján a görbeseregnek pontosan egy görbéje haladjon át, s ennek az illető pontban az  $Y$  ten-

gellyel nem-párhuzamos érintője legyen. Ekkor a görbesereg a  $T$  tartományban egy iránymezőt határoz meg, ti. az  $(x, y) \in T$  ponthoz a görbesereg e ponton áthaladó görbéjének e pontbeli érintője által megszabott irányt rendeli hozzá. Az előbbiek szerint ez az iránymező egy elsőrendű differenciálegyenlettel egyenértékű. Mondhatjuk tehát, hogy az említett kikötéseknek eleget tevő görbesereg egy elsőrendű differenciálegyenletet határoz meg.

Abban a gyakori esetben, amikor a görbesereg görbéit

$$(1) \quad y = f(x, c)$$

alakban lehet megadni, ahol a  $c$  paraméter értéke a görbesereg egyes görbéin állandó, de görbéről görbére változó, a görbesereghez tartozó differenciálegyenletet úgy kaphatjuk meg, hogy az (1) egyenletet differenciáljuk és a keletkező



$$(2) \quad y' = f'(x, c)$$

egyenletből  $c$  értékét kifejezve az (1) egyenletbe helyettesítjük.

Pl.

$$(3) \quad y = \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}$$

megadja azon parabolasereg egyenletét, melynek szimmetria-tengelye az  $Y$  tengely, és fókusza a  $(0, 0)$  pont, mégpedig  $c > 0$  mellett az alulról konvex,  $c < 0$  mellett az alulról konkáv parabolákat szolgáltatja. Tekintsük a  $c > 0$  esetet. (3) -ből

$$y' = \frac{x}{c},$$

tehát  $y' \neq 0$  feltételezésével

$$c = \frac{x}{y'},$$

és így (3) -ba behelyettesítve  $x \neq 0$  esetén

$$y = \frac{xy'}{2} - \frac{x}{2y'}$$

adódik. Innen  $y'$ -t kifejezve az  $x \neq 0$  kikötés figyelembevételével pl. az  $x > 0$  félsíkra szorítkozva, amikor is  $c > 0$  miatt  $y' > 0$ ,

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{x}.$$

Ez tehát a vizsgált görbesereg differenciálegyenlete az  $x > 0$  félsíkban. Hasonlóképpen adódik, hogy az  $x < 0$  félsíkban a görbesereg differenciálegyenlete ugyanaz, míg  $c < 0$  esetében az  $x \neq 0$  feltétel mellett (3) differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{x}.$$

Legyen most a  $T$  tartományban két görbesereg megadva (amelyek az előbbi megszorításoknak eleget tesznek) úgy, hogy bármely  $(x, y) \in T$  pontban az  $e$  ponton áthaladó első seregbeli görbe érintője merőleges a második seregbeli görbe érintőjére. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a második sereg az elsőre ortogonális, ill. hogy a második sereg görbéi az első sereg görbéinek ortogonális trajektóriái. Pl. ha az első görbesereg görbéi egy rotáció-

mentes planparalel vektortér ekvipotenciális vonalai, akkor a vektortér trajektóriái éppen ezeknek ortogonális trajektóriái.

Ha ismerjük egy görbesereg differenciálegyenletét, akkor a rá ortogonális görbesereg differenciálegyenlete ebből úgy nyerhető, hogy  $y'$  helyébe  $-\frac{1}{y'}$ -t írunk, hiszen az  $(x, y)$  ponton áthaladó első seregbeli görbe érintőjének iránytangense és az ugyanezen ponton áthaladó második seregbeli görbe érintőjének iránytangense egymásnak negatív reciprok értékei.

Pl. a koordinátarendszer kezdőpontján áthaladó és az  $XY$ -síkra merőleges vezető esetében, ha a töltés a vezető mentén egyenletesen oszlik el, a trajektóriák a koordinátarendszer kezdőpontjából kiinduló és az  $XY$  síkban fekvő félegyeneseek. E trajektóriasereg differenciálegyenlete

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad (x \neq 0, y \neq 0).$$

Az ortogonális görbesereg differenciálegyenlete

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y}{x},$$

azaz

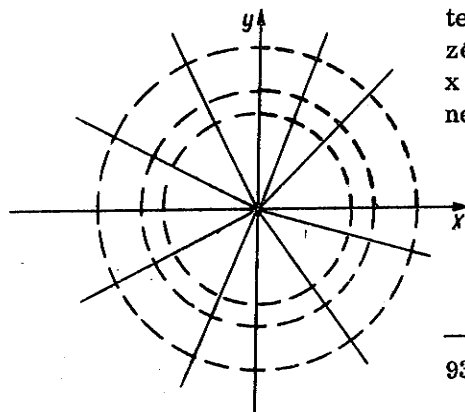
$$x = -yy'$$

Ennek megoldása

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c,$$

azaz

$$x^2 + y^2 = 2c.$$



Az ortogonális görbesereg (ekvipotenciális görbesereg) tehát  $(0, 0)$  középpontú körsereg (93. ábra), pl. az  $x > 0, y > 0$  síkrészben a megfelelő negyedkörívek serege.

93. ábra

## I. Exakt differenciálegyenlet

### Definíció

A

$$(1) \quad p(x, y) + q(x, y) y' = 0$$

alaku differenciálegyenletet exakt differenciálegyenletnek nevezünk, ha a  
sík valamely T tartományában p(x, y) és q(x, y) folytonos függvények,  
q(x, y) ≠ 0 és van olyan F(x, y) függvény, melyre

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = q(x, y).$$

Az ilyen differenciálegyenlet megoldása lényegében a  $F(x, y)$  függvény meghatározását kívánja. Valóban a következő tétel mondható ki:

### Tétel

Ha p(x, y) és q(x, y) a sík egy T tartományában folytonos függvények,  
q(x, y) ≠ 0 T-ben és van olyan F(x, y) függvény T-ben,  
melyre  $\frac{\partial F}{\partial x} = p$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = q$ , akkor az

$$p(x, y) + q(x, y) y' = 0$$

exakt differenciálegyenlet általános megoldása az

$$(3) \quad F(x, y) = c$$

egyenletből, ahol c állandót jelent, y-nak x függvényeként történő  
kifejezésével nyerhető. Ha  $(x_0, y_0) \in T$ , akkor az  $y(x_0) = y_0$  kez-  
deti feltételt az (1) egyenletnek egy és csak egy megoldása elégíti ki, és-  
pedig az, amely az

$$F(x, y) = F(x_0, y_0)$$

képletből adódik y-nak x függvényeként történő kifejezésével.

### Bizonyítás

Tegyük fel először, hogy  $y = g(x)$  valamely  $a < x < b$  intervallumban megoldása az (1) egyenletnek, és hogy az  $y = g(x)$  függvény görbéje  $a < x < b$  esetén a  $T$  tartományban fekszik. Ekkor  $a < x < b$  mellett

$$p(x, g(x)) + q(x, g(x)) g'(x) = 0,$$

tehát (2) -re való tekintettel

$$\left[ \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right]_{(x, g(x))} + \left[ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right]_{(x, g(x))} g'(x) = \frac{dF(x, g(x))}{dx} = 0,$$

ahonnan

$$F(x, g(x)) = c$$

( $c$  állandó) adódik. Az  $y = g(x)$  függvény tehát csakugyan a (3) egyenletből nyerhető  $y$ -nak  $x$  függvényeként történő kifejezésével.

Megfordítva, ha  $y = g(x)$  olyan, az  $(a, b)$  intervallumban értelmezett folytonos függvény, mely a  $c$  állandó valamilyen értéke mellett eleget tesz az

$$F(x, g(x)) = c$$

egyenletnek, s melyre az  $y = g(x)$  függvény görbéje  $a < x < b$  esetén a  $T$  tartományba esik, akkor az implicit függvényekről szóló tétel (Matematika I/2. jegyzet 35. fejezet) értelmében - amely tétel

$\frac{\partial F}{\partial y} = q \neq 0$  miatt alkalmazható -  $y = g(x)$  differenciálható az  $(a, b)$  intervallumban és

$$\begin{aligned} \frac{dF(x, g(x))}{dx} &= \left[ \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right]_{(x, g(x))} + \left[ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right]_{(x, g(x))} g'(x) = \\ &= p(x, g(x)) + q(x, g(x)) g'(x) = 0, \end{aligned}$$

ugyhogy  $y = g(x)$  megoldása az (1) egyenletnek.

Ha  $(x_0, y_0) \in T$ , akkor az  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltételt kielégítő megoldásra vonatkozóan a  $c$  állandó értéke nyilván csak  $F(x_0, y_0)$  lehet; viszont ismét az implicit függvényekről szóló tétel alapján megadható

az  $x_0$  helynek olyan  $(a, b)$  környezete, hogy az  $(a, b)$  intervallumban egy és csak egy  $y = g(x)$  folytonos függvény van, melyre  $g(x_0) = y_0$ , amely kielégíti az

$$F(x, g(x)) = F(x_0, y_0)$$

egyenletet és melyre az  $y = g(x)$  függvény görbéje  $a < x < b$  esetén  $T$ -be esik. Az előzők szerint az így nyert  $y = g(x)$  függvény szolgáltatja az (1) egyenletnek egyetlen olyan megoldását, amely az  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltételt kielégíti.

Az (1) differenciálegyenlet exaktságának megvizsgálására a 4. fejezet d) alatti eredményei alapján az alábbi tételben foglalt kritériumot szoktuk használni:

### Tétel

Ha  $p(x, y)$  és  $q(x, y)$  a  $T$  tartományban folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal bír, akkor az (1) egyenlet exakt voltához szükséges a

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$$

egyenlőség teljesülése. Ha  $T$  egyszeresen összefüggő, akkor ez a feltétel (a  $q(x, y) \neq 0$  kikötéssel együtt) elégséges is ahhoz, hogy (1) exakt differenciálegyenlet legyen.

Pl. az

$$x + y + (x - y)y' = 0 \quad (y \neq x)$$

differenciálegyenlet exakt, mert az  $y > x$  ill.  $y < x$  félsíkokban

$$\frac{\partial (x+y)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial (x-y)}{\partial x} = 1.$$

Keresnünk kell tehát olyan  $F(x, y)$  függvényt, melyre

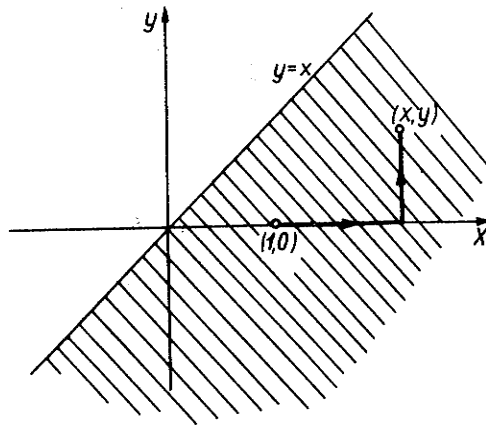
$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = (x + y),$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = (x - y).$$

Pl. az  $x > y$  félsíkban (94. ábra)

$$F(x, y) = \int_{(1, 0)}^{(x, y)} (x + y) dx + (x - y) dy =$$

$$= \int_1^x x dx + \int_0^y (x - y) dy = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}.$$



94. ábra

Differenciálegyenletünk megoldásai az  $x > y$  félsíkban tehát az

(~~xx~~) 
$$-\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C,$$

ill.

$$y = x - \sqrt{2x^2 - 2C}$$

explicit alakban írhatók fel. Az  $x < y$  félsíkban a differenciálegyenlet-megoldását implicit alakban az előbbivel megegyező függvény, explicit alakban azonban az

$$y = x + \sqrt{2x^2 - 2C}$$

függvény adja meg.

Speciálisan pl. az  $y(1) = 0$  kezdeti feltételt kielégítő megoldás (az  $x > y$  félsíkban, az  $(1, 0)$  ponton áthaladó integrálgörbe egyenlete) így nyerhető  $(xx)$ -ből

$$\frac{1}{2} + 0 - 0 = C,$$

vagyis

$$y = x - \sqrt{2x^2 - 1}$$

a keresett partikuláris megoldás explicit alakban. Teljesen hasonló okoskodással nyerhető, hogy az  $y(-1) = 0$  kezdeti feltételt kielégítő megoldás

$$y = x + \sqrt{2x^2 - 1}.$$

Keressük a

$$\frac{2x}{y^2} + \frac{y - 2x^2}{y^3} y' = 0$$

differenciálegyenlet megoldását az

$y > 2x^2$  tartományban (95. ábra).

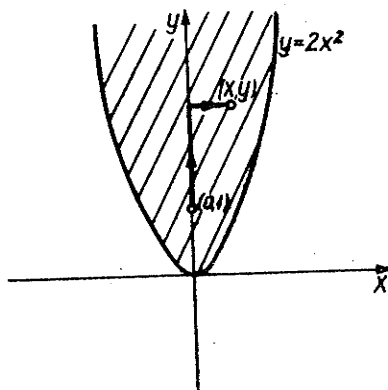
Ezen egyszerűen összefüggő tartományban  $y'$  együtthatója nem

tűnik el, a  $p(x, y) = \frac{2x}{y^2}$  és

$q(x, y) = \frac{y - 2x^2}{y^3}$  függvények

folytonosak, sőt, differenciálhatók,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{4x}{y^3} = \frac{\partial q}{\partial x},$$



95. ábra

a differenciálegyenlet tehát **exakt**.

Megoldásához a  $F(x, y)$  függvényt az ábrán jelzett ut mentén integrálva a következőképpen juthatunk:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{(0, 1)}^{(x, y)} \left( \frac{2x}{y^2} dx + \frac{y - 2x^2}{y^3} dy \right) = \int_1^y \frac{dy}{y^2} + \int_0^x \frac{2x}{y^2} dx = \\ &= -\frac{1}{y} + 1 + \frac{x^2}{y^2}. \end{aligned}$$

A differenciálegyenlet megoldása tehát az

$$\frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{y} = c,$$

ill. a

$$cy^2 + y - x^2 = 0$$

egyenlőségéből  $y$  kifejezésével adódik (itt  $c$ -vel átoszthatunk, mert  $c \neq 0$ , hiszen a fentiből  $c = 0$  esetén  $y = x^2$  adódna és ez a görbe nem halad a vizsgált  $y > 2x^2$  tartományban):

$$(\text{xxx}) \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4cx^2}}{-2c}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy az  $y > 2x^2$  tartományban  $c$  milyen értékeket vehet fel és  $(\text{xxx})$ -ban a négyzetgyökös kifejezés milyen előjellel állhat. Mivel a vizsgált tartományban

$$(\text{xxxx}) \quad \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4cx^2}}{-2c} > 2x^2$$

$c > 0$  esetén adódik, hogy

$$\begin{aligned} -1 + \sqrt{1 + 4cx^2} &> 4cx^2, \\ + \sqrt{1 + 4cx^2} &> 1 + 4cx^2 \end{aligned}$$

ill. a rövidebb  $1 + 4cx^2 = u$  jelöléssel

$$+ \sqrt{u} > u,$$

ami  $u > 1$  folytán nem állhat. Így tehát a  $c > 0$  esetet ki kell zárunk.

$c < 0$  esetén  $(\text{xxxx})$ -ból

$$-1 + \sqrt{1 + 4cx^2} < 4cx^2,$$

ill.

$$+ \sqrt{1 + 4cx^2} < 1 + 4cx^2$$

adódik, vagyis a rövidebb  $1 + 4cx^2 = v$  jelöléssel



$$+ \sqrt{v} < v.$$

Mivel  $0 < v < 1$  a baloldalon csak a negatív előjel állhat ( $\sqrt{v} < v$  esetén ugyanis  $v > 1$ , esetünkben pedig  $0 < v < 1$ ), és így a differenciálegyenlet megoldása az  $y > 2x^2$  tartományban

$$y = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4cx^2}}{2c}, \quad c < 0.$$

Pl. a  $(0, 2)$  ponton áthaladó integrálgörbe egyenlete (az  $y(0) = 2$  kezdeti feltételt kielégítő függvény)

$$2 = \frac{-1 - 1}{2c}, \quad \text{azaz} \quad 4c = -2, \quad c = -\frac{1}{2}$$

folytán

$$y = 1 + \sqrt{1 - 2x^2}.$$

Az alábbiakban az exakt differenciálegyenletek osztályának fontos képviselőivel ismerkedünk meg.

## II. Változók szétválasztásával megoldható differenciálegyenletek

### Definíció

Ha  $p(x)$  az  $a < x < b$  és  $q(y)$  a  $c < y < d$  intervallumban folytonos függvény, és  $q(y) \neq 0$ , akkor a

$$(4) \quad p(x) = q(y) y', \quad \text{ill.} \quad y' = + p(x) \frac{1}{q(y)}$$

differenciálegyenletet a változók szétválasztásával megoldható differenciálegyenletnek nevezünk.

A tett feltevések mellett valóban

$$p(x) - q(y)y' = 0$$

a  $T = \{ (x, y) : a < x < b, \quad c < y < d \}$  négyszög-tartományban értelmezett exakt differenciálegyenlet. Ha ui. a  $p(x)$  függvénynek egy  $(a, b)$  intervallumbeli primitív függvényét  $P(x)$ -szel,  $q(y)$ -nak egy  $(c, d)$  intervallumbeli primitív függvényét pedig  $Q(y)$ -nal jelöljük, az

$$F(x, y) = P(x) - Q(y)$$

függvény eleget tesz a vizsgált négyszög-tartományban a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P'(x) = p(x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -Q'(y) = -q(y)$$

összefüggéseknek. Ennélfogva a (4) differenciálegyenlet megoldásai az

$$F(x, y) = C,$$

ill.

$$P(x) - Q(y) = C,$$

azaz

$$P(x) = Q(y) + C$$

implicit alakban adhatók meg. Utóbbi összefüggésünket azonban még így is felírhatjuk:

$$\int p(x) dx = \int q(y) dy.$$

Explicit alakban a megoldás ezen egyenlőségéből nyerhető  $y$ -nak  $x$  függvényeként történő kifejezésével.

$a < x_0 < b$ ,  $c < y_0 < d$  esetén a (4) differenciálegyenlet  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltételt kielégítő egyetlen megoldása az

$$F(x, y) = F(x_0, y_0),$$

azaz

$$P(x) - Q(y) = P(x_0) - Q(y_0),$$

ill.

$$P(x) - P(x_0) = Q(y) - Q(y_0),$$

tehát az

$$\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi = \int_{y_0}^y q(\eta) d\eta$$

egyenletből adódik,  $y$ -nak  $x$  függvényeként történő kifejezésével.

Eredményünket így foglalhatjuk össze:

A

$$q(y) \cdot y' = p(x)$$

differenciálegyenletet a

$$q(y) \frac{dy}{dx} = p(x)$$

alakban írva szabad formálisan átszorzunk  $dx$ -szel:

$$q(y) dy = p(x) dx,$$

majd mindkét oldalt integrálni:

$$\int q(y) dy = \int p(x) dx,$$

ill.

$$\int_{y_0}^y q(\eta) d\eta = \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi,$$

ha nem az általános, hanem az  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást keressük.

Ezt az eljárást nevezik a változók szétválasztásának.

Pl. az

$$1 + y^2 + xy y' = 0 \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

differenciálegyenlet megoldása a következőképpen történhetik:

$$1 + y^2 = -xy \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dx}{x} = - \frac{y}{1+y^2} dy \quad (x \neq 0, 1+y^2 \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \frac{y}{1+y^2} dy + c,$$

$$\ln|x| = - \frac{1}{2} \ln(1+y^2) + c,$$

$$|x| = e^{-\frac{1}{2} \ln(1+y^2) + c} =$$

$$= e^c (1 + y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Innen  $y$ -t explicit alakban könnyű megadni:

$$1 + y^2 = e^{2c} \frac{1}{x^2},$$

vagyis az  $y > 0$   $x > 0$ , ill.  $y > 0$   $x < 0$  tartományokban

$$y = \sqrt{\frac{C^2}{x^2} - 1},$$

az  $y < 0$ ,  $x > 0$  és  $y < 0$ ,  $x < 0$  tartományokban

$$y = -\sqrt{\frac{C^2}{x^2} - 1},$$

ahol a megoldásokban az  $e^c$  állandót egyszerűség kedvéért  $C$ -vel jeöltük. Egyszerűbben jutottunk volna el ugyanerre az eredményre, ha az integrálásnál adódó  $c$  állandót rögtön  $\ln c$  alakban írtuk volna. Ezt a jelölést gyakran használjuk.

Határozzuk meg az

$$y' = 2xy$$

differentiálegyenlet  $y(1) = 2$  kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

Feladatunkat úgy is megoldhatnánk, hogy először a differentiálegyenlet általános megoldását számítjuk ki, majd az ebben szereplő állandó speciális megválasztásával írjuk fel a keresett partikuláris megoldást. Ehelyett azonban a változók szétválasztása után mindjárt határozott integrálokat számítva:

$$\frac{dy}{y} = 2x \, dx,$$

$$\int_2^y \frac{d\eta}{\eta} = \int_1^x 2\xi \, d\xi,$$

$$\ln y - \ln 2 = x^2 - 1,$$

$$\ln y = x^2 - 1 + \ln 2,$$

$$y = e^{x^2 - 1 + \ln 2} = e^{x^2} e^{-1} e^{\ln 2},$$

azaz

$$y = \frac{2}{e} e^{x^2}$$

a keresett partikuláris megoldás.

Igen sok fizikai feladat vezet szétválasztható változóju elsőrendű differenciálegyenletre. Pl.

Mivel az  $m$  tömegű radioaktív test  $\Delta t$  idő alatt szétsugárzott  $\Delta m$  anyagmennyisége kicsiny  $\Delta t$  esetén jó közelítéssel arányos  $m$ -mel és  $\Delta t$ -vel:

$$\Delta m \approx -k m \Delta t, \text{ ill. } \frac{\Delta m}{\Delta t} \approx -k m,$$

$\Delta t \rightarrow 0$  esetén a következő differenciálegyenletre jutunk:

$$\frac{dm}{dt} = -k m.$$

Ha a  $t = 0$  pillanatban  $m = m_0$ , akkor ennek a differenciálegyenletnek megoldása:

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -k \int_0^t dt,$$

$$\ln m - \ln m_0 = -kt,$$

$$\ln \frac{m}{m_0} = -kt,$$

$$\frac{m}{m_0} = e^{-kt},$$

$$m = m_0 e^{-kt}.$$

Igen egyszerű differenciálegyenlet megoldásaként adódik a sorbakapcsolt  $R$  ohmikus ellenállást és  $L$  önindukciót tartalmazó áramkörben az áram  $I$  intenzitása.  $I(t)$  a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U,$$

ahol  $U$  az áramkör sarkaira kapcsolt (esetleg változó) feszültség.

Ha  $U = 0$ , és a  $t = 0$  pillanatban  $I = I_0$  (áram kikapcsolása), akkor

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0,$$

$$\frac{dI}{I} = - \frac{R}{L} dt,$$

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = - \frac{R}{L} \int_0^t dt,$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = - \frac{R}{L} t,$$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Ha  $U = E$  (állandó) és a  $t = 0$  pillanatban  $I = 0$  (egyenáram bekapcsolása), akkor az eredeti differenciálegyenletből a változók szétválasztásával adódik:

$$L \frac{dI}{dt} = - RI + E,$$

$$\int_0^I \frac{dI}{E - RI} = \frac{1}{L} \int_0^t dt,$$

$$- \frac{1}{R} \ln \frac{E - RI}{E} = \frac{1}{L} t,$$

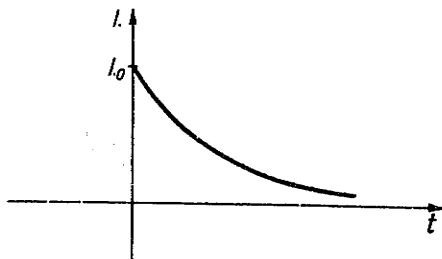
$$\ln \frac{E - RI}{E} = - \frac{R}{L} t,$$

$$E - RI = E e^{-\frac{R}{L} t},$$

azaz

$$I = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Látható, hogy  $I$  aszimptotikusan közeledik kikapcsoláskor a 0 bekapcsoláskor az Ohm-törvény által megszabott  $\frac{E}{R}$  értékhez (96. ábra).



III.

Az

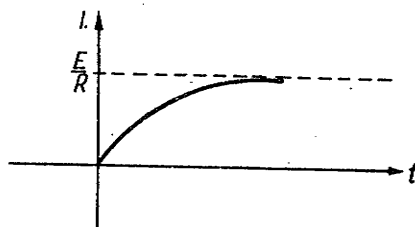
$$(5) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

alaku differenciálegyenletek a változók szétválasztásával megoldható egyenletekre vezethetők vissza, ha új ismeretlenként a

$$z = \frac{y}{x}$$

hányadost vezetjük be.

Ekkor ugyanis



96. ábra

$$y = z x,$$

$$y' = z' x + z,$$

ugyhogy az (5) egyenlet így is írható:

$$z' x + z = f(z),$$

ill.

$$z' = \frac{f(z) - z}{x},$$

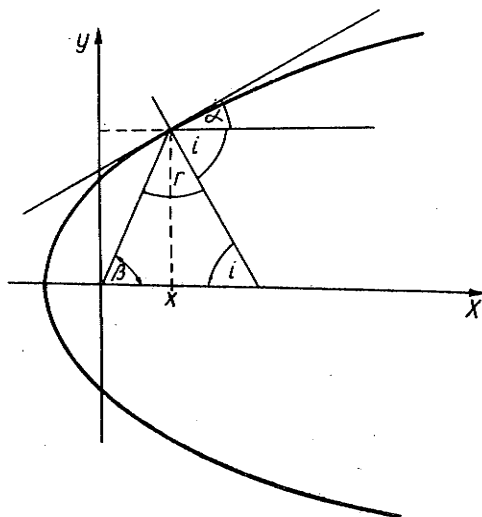
itt pedig a változók szétválaszthatók.

Az (5) típusú differenciálegyenleteket szokás homogén differenciálegyenleteknek is nevezni, mivel itt  $y'$  az  $y$  és  $x$ -nek un. 0-adfoku homogén függvénye. (Általában azt mondjuk, hogy az  $n$ -változós  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  függvény  $m$ -ed foku homogén függvénye az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  változóknak, ha

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, \dots, x_n).$$

Pl.

Milyen meridiáncörbével kell készíteni a forgási felület alaku tükröt, hogy a tengelyével párhuzamos sugarakat egy pontban gyűjtse össze? (A gömbtükör ezt csak közelítően teszi meg.)



97. ábra

Tekintsük a tükrör keresztmetszetét,  $x$ -tengelynek válasszuk a tükrör tengelyét, kezdőpontnak azt a pontot, amelybe a tükrör az  $x$ -tengellyel párhuzamos sugarakat összegyűjti. A 97. ábra jelöléseivel

$$\operatorname{tg} \alpha = y', \quad \alpha + i = \frac{\tilde{r}}{2}, \quad i = r,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x}, \quad \beta + i + r = \tilde{r},$$

tehát

$$\beta = \tilde{r} - 2i = \tilde{r} - 2\left(\frac{\tilde{r}}{2} - \alpha\right) = 2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

vagyis

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - y'^2},$$

$$y - yy'^2 = 2xy',$$

$$yy'^2 + 2xy' - y = 0,$$

és ezt az egyenletet  $y'$ -re megoldva

$$y' = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{2y} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$$

Nyilvánvaló, hogy  $x > 0$ ,  $y > 0$  mellett  $y' > 0$ , tehát a fenti kifejezésben a négyzetgyök pozitív előjellel veendő, s így a következő differenciálegyenletre jutunk:



$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} = \frac{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - 1}{\frac{y}{x}}.$$

Mivel ez a differenciálegyenlet az (5) típusba tartozik, bevezetve a

$z = \frac{y}{x}$  változót a

$$z'x + z = \frac{\sqrt{1 + z^2} - 1}{z}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletre jutunk. Ennek megoldása

$$z'x = \frac{\sqrt{1 + z^2} - 1 - z^2}{z},$$

$$\int \frac{z \, dz}{\sqrt{1 + z^2} - 1 - z^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

A baloldali integrál kiszámítására alkalmazzuk az  $u = \sqrt{1 + z^2}$  helyettesítést (ekkor  $u^2 = 1 + z^2$ , tehát  $u \, du = z \, dz$ ):

$$\int \frac{z \, dz}{\sqrt{1 + z^2} - 1 - z^2} = \int \frac{u \, du}{u - u^2} = \int \frac{du}{1 - u} = - \int \frac{du}{u - 1} = - \ln (u - 1)$$

(az abszolút érték jelét azért hagyhattuk el a kiintegrálásnál, mert  $u > 1$ , s így  $u - 1 > 0$ ), tehát az  $u$  helyébe visszahelyettesítve  $\sqrt{1 + z^2}$ -et a differenciálegyenlet megoldása:

$$- \ln (\sqrt{1 + z^2} - 1) = \ln x + \ln c$$

azaz

$$\ln \frac{1}{\sqrt{1 + z^2} - 1} = \ln Cx,$$

és így

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z^2} - 1} = Cx,$$

$$1 = Cx \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - Cx,$$

$$Cx + 1 = Cx \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}},$$

$$C^2 x^2 + 2Cx + 1 = C^2 x^2 + C^2 y^2,$$

azaz végeredményben

$$C^2 y^2 = 2Cx + 1.$$

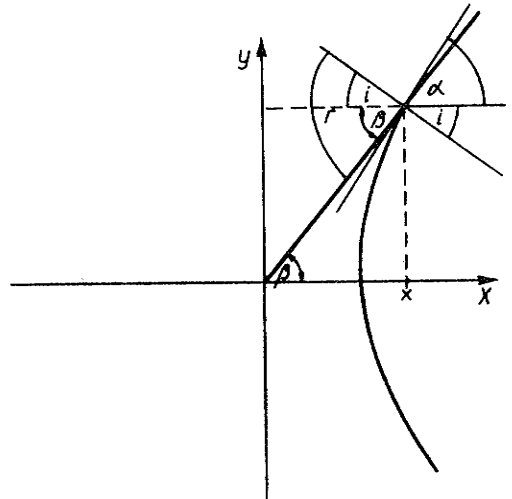
Ez utóbbi összefüggés parabola egyenletét adja meg, amelynek tengelye az  $x$ -tengely, fókuszja pedig a  $(0, 0)$  pont. A feladat megoldása tehát parabolikus tükör.

Következő feladatként vizsgáljuk meg, hogy milyen meridiángörbéjű forgási felülettel kell a plan-konvex gyűjtőlencsét határolni, hogy a tengelyével párhuzamos sugarakat egy pontba gyűjtse össze?

A koordinátarendszernek és a jelöléseknek a 98. ábra szerinti megválasztásával

$$\operatorname{tg} \alpha = y', \quad \alpha + i = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x}, \quad r = i + \beta.$$



98. ábra

A Snellius-Descartes-féle törvény értelmében (ha a lencse anyagának törésmutatója  $n > 1$ )

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n}$$

(az optikailag sűrűbb közegből lép ki a fény), vagyis

$$\sin r = n \sin i,$$

ill.

$$(6) \quad \sin (i + \beta) = n \sin i.$$

Mivel azonban

$$\sin i = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

$$\cos i = \sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}},$$

$$\sin \beta = \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}$$

(6)-ból az addíciós képletet alkalmazva adódik:

$$n \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} + \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}},$$

azaz

$$n \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = 1+y' \frac{y}{x},$$

$$y' = \frac{n \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} - 1}{\frac{y}{x}}.$$

E differenciálegyenlet a most vizsgált (5) típusba tartozik. Bevezetve a

$z = \frac{y}{x}$  változót

$$z'x + z = \frac{n \sqrt{1+z^2} - 1}{z},$$

$$z'x = \frac{n \sqrt{1+z^2} - 1 - z^2}{z}$$

ill.

$$\int \frac{zdz}{n \sqrt{1+z^2} - 1 - z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

adódik. A baloldali integrált az  $u = \sqrt{1+z^2}$  helyettesítéssel számítjuk ki:

$$\int \frac{z \, dz}{n \sqrt{1+z^2} - 1-z^2} = \int \frac{u \, du}{nu - u^2} = \int \frac{du}{n-u} = -\ln(n-u)$$

( $n-u > 0$ , ha  $y$ -nak kis értékeire, tehát  $u = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$ -nek 1-hez közeli értékeire szorítkozunk). Differenciálegyenletünk megoldása tehát

$$-\ln(n - \sqrt{1+z^2}) = \ln Cx,$$

azaz

$$\frac{1}{n - \sqrt{1+z^2}} = Cx,$$

$$1 = Cxn - Cx \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}},$$

$$Cnx - 1 = Cx \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}},$$

$$C^2 n^2 x^2 - 2Cnx + 1 = C^2 x^2 + C^2 y^2,$$

ill.

$$C^2(n^2 - 1)x^2 - C^2 y^2 - 2Cnx + 1 = 0.$$

Ezt az egyenletet átrendezve, a teljes négyzetté való kiegészítés módszerét alkalmazva

$$\left( C \sqrt{n^2 - 1} x - \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \right)^2 - C^2 y^2 = \frac{n^2}{n^2 - 1} - 1 = \frac{1}{n^2 - 1},$$

ill.

$$\left( C(n^2 - 1)x - n \right)^2 - C^2(n^2 - 1)y^2 = 1,$$

azaz

$$C^2(n^2 - 1)^2 \left( x - \frac{n}{C(n^2 - 1)} \right)^2 - C^2(n^2 - 1)y^2 = 1$$

adódik. Látható, hogy ez hiperbola egyenlete, melynek középpontja az

$$\left( \frac{n}{C(n^2 - 1)}, 0 \right) \text{ pont, valós és képzetes tengelye az } y = 0 \text{ és } x = \frac{n}{C(n^2 - 1)}$$

egyenesekre esik, a féltengelyek

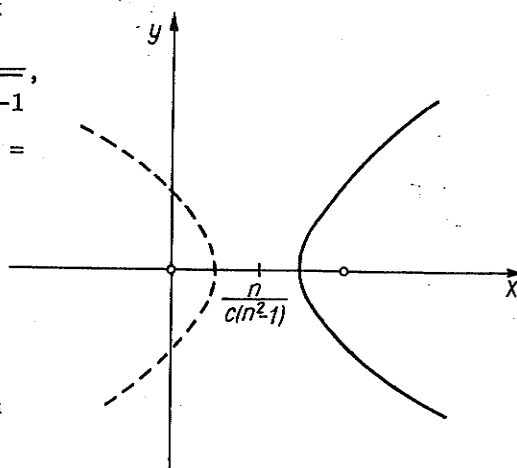
$$\text{hossza } a = \frac{1}{C(n^2-1)}, \quad b = \frac{1}{C\sqrt{n^2-1}},$$

s így a fókusz távolság  $\sqrt{a^2 + b^2} =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{1}{C^2(n^2-1)^2} + \frac{1}{C^2(n^2-1)}} = \\ &= \sqrt{\frac{1+n^2-1}{C^2(n^2-1)^2}} = \frac{n}{C(n^2-1)}. \end{aligned}$$

A hiperbola egyik fókusza tehát a  $(0,0)$ , a másik pedig a

$$\left(\frac{2n}{C(n^2-1)}, 0\right) \text{ pontba esik}$$



99. ábra

(99. ábra).

Feladatunk megoldásának értelmében tehát a lencsét (kétköpenyű) forgási hiperboloidnak kell határolnia.

Megemlítünk még néhány olyan differenciálegyenlet-típust, amely egyszerű helyettesítéssel szétválasztható változójú differenciálegyenletre vezethető vissza:

$$1^0 \quad y' = f(ax + by + c), \quad a, b, c \text{ állandók, } b \neq 0.$$

Az

$$u = ax + by + c$$

helyettesítést alkalmazva, mivel

$$u' = a + by',$$

ide  $y' = f(u)$  értékét behelyettesítve az

$$u' = a + bf(u) \quad (b \neq 0)$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletre jutunk. Ezt megoldva, majd visszahelyettesítve  $u = ax + by + c$  értékét az  $1^0$  differenciálegyenlet megoldására jutunk.

Az előbb kizárt  $b = 0$  esetén az  $1^0$  differenciálegyenlet közvetlen integrálással megoldható.

Pl. az

$$y' = \sin(x+y) \quad (-x < y < \frac{\pi}{2} - x)$$

differenciálegyenletet így oldhatjuk meg:

$$u = x + y,$$

$$u' = 1 + y',$$

azaz

$$u' = 1 + \sin u, \quad (\sin u \neq -1, \text{ mivel } 0 < u < \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{du}{1 + \sin u} = dx,$$

vagyis a jobboldalon az integrálást elvégezve, a baloldalon az integrandusz számlálóját és nevezőjét  $1 - \sin u$ -val beszorozva ( $1 - \sin u \neq 0$ ), mert  $0 < u < \frac{\pi}{2}$ )

$$x = \int \frac{1 - \sin u}{1 - \sin^2 u} du = \int \left( \frac{1}{\cos^2 u} - \frac{\sin u}{\cos^2 u} \right) du = \operatorname{tg} u - \frac{1}{\cos u} + c,$$

és így a differenciálegyenlet megoldása

$$x = \operatorname{tg}(x+y) - \frac{1}{\cos(x+y)} + c.$$

2° Az

$$y' = h \left( \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \right)$$

differenciálegyenlettel először abban a speciális esetben foglalkozunk, amikor

$$(7) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ezen feltétel mellett  $c = f = 0$  esetén a differenciálegyenlet éppen (5) típusu homogén egyenlet. Az általános esetben  $x$  helyett alkalmas új  $u$  független változót,  $y$  helyett pedig alkalmas új  $v$  függvényt vezetünk be úgy, hogy ezen új  $v(u)$  függvényre nézve a differenciálegyenlet már (5) típusu egyenletbe menjen át. Legyen tehát

$$(8) \quad x = u + p, \quad y = v + q,$$

ahol  $p$  és  $q$  olyan, hogy

$$ap + bq + c = 0$$

$$dp + eq + f = 0$$

(p és q tehát az  $ax + by + c = 0$ ,  $dx + ey + f = 0$  egyenletrendszer (7) értelmében létező egyetlen megoldása; a (8) lineáris transzformációval a koordináta-rendszer kezdőpontját az  $ax + by + c = 0$  és  $dx + ey + f = 0$  egyenesek  $x = p$ ,  $y = q$  metszéspontjába toljuk el). Mivel  $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ , az eredeti differenciálegyenlet a (8) transzformációval a

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= h \left( \frac{au + bv + ap + bq + c}{du + ev + dp + eq + f} \right) = \\ &= h \left( \frac{au + bv}{du + ev} \right) = h \left( \frac{a + b \frac{v}{u}}{d + e \frac{v}{u}} \right) \end{aligned}$$

(5) típusu egyenletbe megy át, és fordítva, ezen utóbbi egyenlet minden megoldásából (8) alapján az eredeti differenciálegyenlet megoldására jutunk.

Ha

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0, \text{ azaz } ae = bd$$

és  $b = e = 0$ , akkor a 2<sup>o</sup> differenciálegyenlet közvetlenül integrálással megoldható. Ha pl.  $e \neq 0$ , akkor új ismeretlenként a

$$(10) \quad v = dx + ey + f$$

változót vezetve be  $\left( \frac{dv}{dx} = d + e \frac{dy}{dx} \right)$  az eredeti differenciálegyenlet szétválasztható változójú differenciálegyenletbe megy át:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= d + e \frac{dy}{dx} = \\ &= d + e h \left( \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \right) = d + e h \left( \frac{aex + bey + ce}{e(dx + ey + f)} \right) = \\ &= d + e h \left( \frac{bdx + bey + bf - bf + ce}{e(dx + ey + f)} \right) = \end{aligned}$$

$$= d + e h \left( \frac{bv - bf + ce}{ev} \right)$$

(az átalakítások során felhasználtuk, hogy  $ae = bd$ ). Megfordítva, az utóbbi egyenlet minden megoldásából (10) alapján az eredeti  $2^o$  differenciálegyenlet megoldására jutunk. Ha  $b \neq 0$ , akkor a  $h\left(\frac{1}{w}\right) = j(w)$  helyettesítést alkalmazzuk és az eredeti differenciálegyenletből így adódó

$$y' = j\left(\frac{dx + ey + f}{ax + by + c}\right)$$

differenciálegyenlet megoldására alkalmazzuk az előbbi okoskodást.

#### IV. Multiplikátor (integráló tényező)

$$A \quad p(x) + q(y)y' = 0 \quad (q(y) \neq 0), \text{ ill}$$

$$(11) \quad y' = -p(x) \frac{1}{q(y)}$$

tipusu differenciálegyenleteket a változók szétválasztásával megoldható differenciálegyenleteknek neveztük. A (11) differenciálegyenlet nem exakt, exakttá csak a  $q(y) \neq 0$  tényezővel való végigszorzás után válik. Felvevődik tehát az a kérdés, hogy valamely nem-exakt differenciálegyenlet esetében lehet-e olyan függvényt találni, amellyel a differenciálegyenlet beszorozva az exakttá válik, és ha igen, hogy lehet ezt a függvényt meghatározni.

#### Definíció

Legyen egy  $H$  tartományban megadva a

$$(12) \quad p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

differenciálegyenlet. Ha  $M(x, y)$  olyan  $H$ -ban el nem tűnő folytonos függvény, melyre az

$$(13) \quad M(x, y)p(x, y) + M(x, y)q(x, y)y' = 0$$

differenciálegyenlet exakt, akkor  $M(x, y)$ -t a (12) differenciálegyenlet egy multiplikátorának (vagy integráló tényezőjének) nevezzük a  $H$  tartományban.



A multiplikátor meghatározására a következő tétel mondható ki:

### Tétel

Ha egy egyszeresen összefüggő T tartományban  $p(x,y)$  és  $q(x,y)$  folytonos parciális deriváltakkal rendelkező függvények, T-ben  $q(x,y) \neq 0$ , akkor a tartományban az ugyancsak folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkező és el nem tűnő  $M(x,y)$  függvény akkor és csak akkor multiplikátora a (12) differenciálegyenletnek, ha kielégíti a

$$(14) \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} p(x,y) - \frac{\partial M(x,y)}{\partial x} q(x,y) + M(x,y) \left( \frac{\partial p(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial q(x,y)}{\partial x} \right) = 0$$

parciális differenciálegyenletet.

A tétel állítása könnyen adódik, hiszen az exakt differenciálegyenlet tárgyalásánál kimondott tétel értelmében az  $M(x,y)$  multiplikátorral beszorzott (13) differenciálegyenlet exakt, ha

$$\frac{\partial (M(x,y)p(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial (M(x,y)q(x,y))}{\partial x}$$

(ahol T-ben a  $M$ ,  $p$ ,  $q$  függvényekre a tételben kimondott feltételek teljesülnek). Ezen összefüggésből a multiplikátor parciális differenciálegyenlete közvetlenül adódik.

Parciális differenciálegyenletek megoldása a közönséges differenciálegyenletek megoldásánál lényegesen nehezebb feladat, így mi az alábbiakban csak azzal az egyszerű speciális esettel fogunk foglalkozni, amikor a (12) differenciálegyenlet egyváltozós  $M(x)$ , ill.  $M(y)$  multiplikátorral exakttá tehető.

$1^0$   $M = M(x)$  esetében a multiplikátor differenciálegyenlete (14) -ből:

$$- \frac{dM}{dx} q + M \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0,$$

azaz

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dx} = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q}$$

és itt a jobboldal nem függhet  $y$ -től. E differenciálegyenletet megoldva

$$\ln M = \int \left( -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{1}{q} dx,$$

ill.

$$\int \left( -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{1}{q} dx$$

$$M = e$$

adódik (a differenciálegyenlet integrálása során azért nem irtuk ki a  $c$  állandót, mert nem célunk az összes multiplikátor kiszámítása, elegendő a (12) egyenletnek csupán egy alkalmas multiplikátorát meghatározunk).

$2^0$   $M = M(y)$  esetében a multiplikátor differenciálegyenlete

$$\frac{dM}{dy} p + M \left( -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0,$$

azaz

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dy} = - \frac{-\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{p}$$

és itt a jobboldal nem függhet  $x$ -től ( $p(x, y) \neq 0$ ). E differenciálegyenletet megoldva az előbbiekhöz hasonlóan a multiplikátorra

$$\int \left( -\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \frac{1}{p} dy$$

$$M = e$$

adódik.

Összefoglalva eredményeinket a következő mondható:

Ha valamely egyszeresen összefüggő  $T$  tartományban  $p(x, y)$  és  $q(x, y)$  folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal bíró függvények,

$$q(x, y) \neq 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \text{de} \quad \left( -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{1}{q} \quad \text{nem függ } y\text{-től,}$$

akkor  $M = M(x)$  multiplikátorral, míg  $-\left( -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{1}{p}$   $x$ -től való függetlensége esetén (ekkor persze még fel kell tenni, hogy  $p \neq 0$ )  $M = M(y)$  multiplikátorral a

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

differenciálegyenlet exaktá tehető. Az

$$M p + M q y' = 0$$

**exakt** differenciálegyenlet megoldása a korábban már részletezett módon történik, és mivel  $M \neq 0$ , az utóbbi differenciálegyenlet minden megoldása egyben az eredeti differenciálegyenletnek is megoldását szolgáltatja.

Oldjuk meg például az alábbi differenciálegyenleteket:

$$1. \quad (2 + 2x - y^2) - 2yy' = 0. \quad (y \neq 0)$$

$$A \quad p = 2 + 2x - y^2, \quad q = -2y \quad \text{jelöléssel látható, hogy}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

a differenciálegyenlet tehát nem **exakt**. Mivel azonban

$$\left( \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{1}{q} = 1,$$

tehát  $y$ -től nem függ,  $x$ -től függő multiplikátorral a differenciálegyenlet **exakttá** tehető.

$$M(x)(2+2x-y^2) - M(x)2yy' = 0$$

**exaktságának feltétele:**

$$\frac{\partial (-2yM(x))}{\partial x} = \frac{\partial (M(x)(2+2x-y^2))}{\partial y},$$

azaz

$$-2y \frac{dM}{dx} = M(-2y),$$

$$\int \frac{dM}{M} = \int dx,$$

$$\ln M = x,$$

$$M = e^x.$$

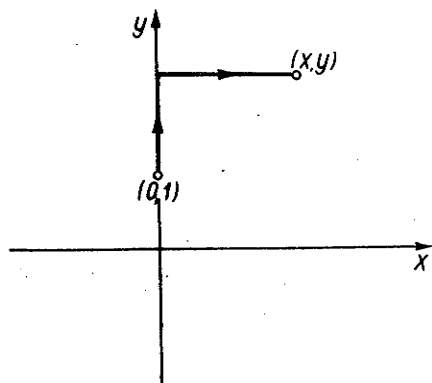
Az

$$e^x(2+2x-y^2) - e^x 2yy' = 0$$

**exakt** differenciálegyenlet megoldását pl. az  $y > 0$  félsíkban keresve a 100. ábrán bejelölt ut mentén integrálva adódik:

$$F(x, y) = \int_{(0,1)}^{(x,y)} (e^x(2+2x-y^2)dx - e^x 2y dy) = \int_1^y -2y dy + \int_0^x e^x(2+2x-y^2) dx =$$

$$= \dots = -y^2 e^x + 2xe^x + 1.$$



100. ábra

adódik.

2. Az

$$x + \left(\frac{x^2}{y} - y + \frac{1}{y}\right) y' = 0, \quad (y^2 - x^2 \neq 1 \quad y \neq 0)$$

differenciálegyenletnél a  $p = x$ ,  $q = \frac{x^2}{y} - y + \frac{1}{y}$  jelöléssel

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{2x}{y},$$

differenciálegyenletünk tehát nem exakt. Mivel azonban

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) \frac{1}{p} = \frac{2}{y}$$

nem függ  $x$ -től, az  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $y^2 - x^2 \neq 1$  összefüggéseknek elegettevő valamely egyszeresen összefüggő tartományban  $y$ -től függő multiplikátorral a differenciálegyenlet exakttá tehető.

$$M(y) x + M(y) \left( \frac{x^2}{y} - y + \frac{1}{y} \right) y' = 0$$

exaktságának feltétele:

$$\frac{\partial (M(y)x)}{\partial y} = \frac{\partial M(y) \left( \frac{x^2}{y} - y + \frac{1}{y} \right)}{\partial x},$$

azaz

$$x \frac{dM}{dy} = M \frac{2x}{y},$$

$$\int \frac{dM}{M} = \int \frac{2}{y} dy,$$

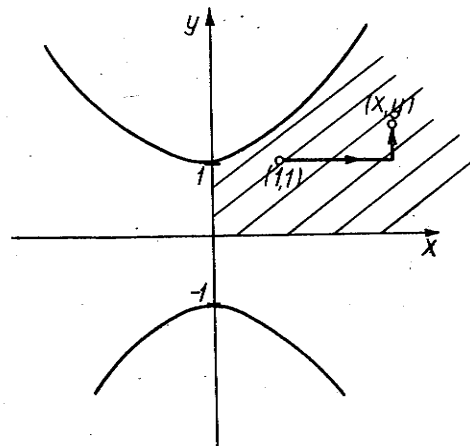
$$\ln M = 2 \ln y = \ln y^2,$$

$$M = y^2.$$

A differenciálegyenlet megoldása tehát pl. az  $x > 0$ ,  $0 < y < \sqrt{1+x^2}$  egyszerűen összefüggő tartományban (101. ábra) megegyezik az exakt

$$xy^2 + (x^2y - y^3 + y) y' = 0$$

differenciálegyenlet megoldásával. Ezt a 101. ábrán bejelölt ut mentén integrálva adódik:



101. ábra

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{(1,1)}^{(x,y)} (xy^2 dx + (x^2y - y^3 + y) dy) = \\ &= \int_1^x x dx + \int_1^y (x^2y - y^3 + y) dy = \dots = \end{aligned}$$

$$= -\frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4},$$

a differenciálegyenlet megoldása tehát implicit alakban:

$$-\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2} (1+x^2) = C.$$

## V. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

Az elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakja:

$$(15) \quad a(x) y' + b(x) y = f(x),$$

ahol valamely  $\alpha < x < \beta$  intervallumban  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $f(x)$  folytonos függvények, és  $a(x) \neq 0$ .

A (15) egyenlet megoldásai szoros kapcsolatban állnak annak az egyenletnek a megoldásaival, melynek baloldala (15) -tel megegyező, jobboldalán azonban 0 áll. Ezt a differenciálegyenletet nyilván más függvény elégíti ki, jelöljük ezért ez utóbbi differenciálegyenlet ismeretlen függvényét megkülönböztetésül  $Y(x)$  -szel. Az

$$(16) \quad a(x) Y' + b(x) Y = 0$$

differenciálegyenletet a (15) inhomogén lineáris differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenletnek nevezzük.

Kimondható mármost a következő tétel:

### Tétel

Ha az  $\alpha < x < \beta$  intervallumban  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $f(x)$  folytonos függvények és itt  $a(x) \neq 0$ , akkor  $\alpha < x_0 < \beta$  és tetszőleges  $y_0$  mellett a (15) differenciálegyenletnek egy és csakis egy megoldása van, amely az egész  $(\alpha, \beta)$  intervallumban létezik. A megoldás úgy állítható elő, hogy először megoldjuk a (16) homogén egyenletet, azután pedig (15) megoldását  $y = c(x) Y_1$  alakban keressük, ahol  $c(x)$  ismeretlen függvény,  $Y_1$  pedig a (16) homogén egyenletnek egy (nem azonosan zérus) megoldása.

A tételben kimondott állításokat a következőképpen igazolhatjuk:

Ha  $y_1$  a (15) egyenletnek,  $Y$  pedig a (16) egyenletnek megoldása, akkor  $y = Y + y_1$  is megoldása a (15) egyenletnek, mert

$$\begin{aligned} a(x)(Y + y_1)' + b(x)(Y + y_1) &= [a(x)Y' + b(x)Y] + (a(x)y_1' + b(x)y_1) = \\ &= 0 + f(x). \end{aligned}$$

Hasonló egyszerű számítással látható be, hogy megfordítva, ha  $y$  és  $y_1$  (15) -nek megoldásai, akkor  $Y = y - y_1$  a (16) homogén egyenletnek tesz eleget. Ezt röviden úgy szoktuk kifejezni, hogy a (15) egyenlet  $y$  általános megoldása

$$y = Y + y_1$$

alakban írható, ahol  $y_1$  a (15) egyenletnek egy partikuláris megoldása,  $Y$  pedig a (16) homogén egyenlet általános megoldása.

A (16) egyenletnek először pozitív megoldásait keressük.  
Mivel a (16) egyenlet  $a(x) \neq 0$  folytán

$$Y' = - \frac{b(x)}{a(x)} Y$$

alakban írható, az  $\alpha < x < \beta$ ,  $0 < Y < +\infty$  tartományban alkalmazhatjuk rá a változók szétválasztásának módszerét:

$$\frac{dY}{Y} = - \frac{b(x)}{a(x)} dx,$$

$$\ln Y = - \int \frac{b(x)}{a(x)} dx + \ln c \quad (c > 0),$$

és így

$$Y = c e^{- \int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$$

szolgáltatja (16) megoldásait az  $\alpha < x < \beta$ ,  $0 < Y < +\infty$  tartományban. Ezek a megoldások az egész  $(\alpha, \beta)$  intervallumban értelmezve vannak, kielégítik (16) -ot és nem tűnnek el.

Jelölje most  $Y_1$  a (16) homogén differenciálegyenletnek egy  $(\alpha, \beta)$  -ban sehol el nem tűnő megoldását, pl. az előbb nyert megoldások valamelyikét.  $Y_1 \neq 0$  folytán a (15) inhomogén differenciálegyenlet

megoldását kereshetjük  $y = c(x)Y_1$  alakban, ahol  $c(x)$  egyelőre ismeretlen függvény. Behelyettesítve (15) -be adódik:

$$a(x) [c'(x)Y_1 + c(x)Y_1'] + b(x)c(x)Y_1 = f(x),$$

ill.

$$a(x)c'(x)Y_1 + [a(x)Y_1' + b(x)Y_1]c(x) = f(x),$$

vagyis

$$a(x)Y_1' + b(x)Y_1 = 0, \text{ miatt } a(x)c'(x)Y_1 = f(x)$$

( $Y_1$  a (16) egyenletnek megoldása). Az utóbbi egyenletből

$$c'(x) = \frac{f(x)}{a(x)Y_1(x)},$$

és feltevéseink értelmében az ezen egyenlőség jobboldalán álló függvény az egész  $(\alpha, \beta)$  intervallumban folytonos, vagyis az utóbbi összefüggésből  $c(x)$  integrálással meghatározható. Ilyen módon  $Y_1$  ismeretében könnyen előállíthatjuk (15) -nek egy (vagy akárhány) partikuláris megoldását.

A most elvégzett számítás az  $f(x) = 0$  speciális esetben azt mutatja, hogy a (16) homogén differenciálegyenlet minden megoldása  $Y = c(x)Y_1$  alaku, ahol  $c'(x) = 0$ , vagyis  $c(x)$  állandó. Ha tehát a változók szátválasztásának módszerével meghatároztuk a (16) homogén differenciálegyenletnek egy  $(\alpha, \beta)$  -ban el nem tűnő  $Y_1$  megoldását, akkor (16) általános megoldása az  $\alpha < x < \beta$ ,  $-\infty < Y < +\infty$  tartományban

$$Y = cY_1,$$

ahol  $c$  tetszőleges állandó

Ezután (15) -nek egy  $y_1$  partikuláris megoldását

$$y_1 = c(x)Y_1$$

alakban kereshetjük (mivel itt a homogén egyenlet általános megoldásában szereplő állandó helyébe irtunk egy ismeretlen függvényt, az eljárást az "állandó variálása" módszerének nevezik).

Végül is (15) általános megoldása:

$$y = cY_1 + y_1$$

alakban adódik.



Az  $x = x_0$  helyhez ( $\alpha < x_0 < \beta$ ) tetszőleges  $y_0$  kezdeti értéket előírva,  $Y_1(x_0) \neq 0$  miatt meghatározható a  $c$  állandó (egyféleképpen) úgy, hogy a megoldás az  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  kezdeti feltételt is kielégítse.

Megjegyezzük még, hogy az előbb elmondottakból következik, hogy a (16) homogén differenciálegyenletnek minden megoldása vagy azonosan eltűnik  $(\alpha, \beta)$ -ban (ti.  $c = 0$  esetén), vagy seholsem tűnik el  $(\alpha, \beta)$ -ban (ti. ha  $c \neq 0$ ).

Például az

$$(17) \quad (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2 \quad (1+x^2 \neq 0)$$

differenciálegyenletet így oldhatjuk meg: a megfelelő homogén differenciálegyenlet

$$(18) \quad (1+x^2)Y' - 2xY = 0,$$

ahonnan

$$\int \frac{dY}{Y} = \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\ln Y = \ln(1+x^2) + \ln c = \ln c(1+x^2),$$

$$Y = c(1+x^2).$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását az állandó variálásával az

$$y_1 = c(x)(1+x^2)$$

alakban keressük. Deriválva és behelyettesítve a (17) egyenletbe adódik:

$$c'(x)(1+x^2)^2 + c(x)2x(1+x^2) - 2xc(x)(1+x^2) = (1+x^2)^2,$$

azaz

$$c'(x)(1+x^2)^2 = (1+x^2)^2,$$

$$c'(x) = 1,$$

$$c(x) = x$$

(az integrációs állandót azért nem írtuk ki, mert csak egy alkalmas  $c(x)$  függvényt keresünk), a (17) egyenlet keresett partikuláris megoldása tehát

$$y_1 = x(1 + x^2),$$

vagyis (17) általános megoldása

$$y = Y + y_1 = c(1 + x^2) + \dot{x}(1 + x^2).$$

Sorbakapcsolt  $R$  ohmikus ellenállást és  $L$  önindukciót tartalmazó áramkörre  $U = E \sin \omega t$  váltófeszültséget kapcsolva az  $I$  áramintenzitás a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$(19) \quad L \frac{dI}{dt} + RI = E \sin \omega t.$$

Keressük ennek a homogén lineáris differenciálegyenletnek  $I(0) = I_0$  kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

A (19) egyenletnek megfelelő homogén

$$L \frac{dY}{dt} + R Y = 0$$

egyenlet megoldásával korábban már foglalkoztunk (II):

$$Y = c e^{-\frac{R}{L} t}.$$

A (19) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük mármost

$$I_1 = c(t) e^{-\frac{R}{L} t}$$

alakban. Ekkor (19) -be behelyettesítve

$$L c'(t) e^{-\frac{R}{L} t} + L c(t) \left(-\frac{R}{L}\right) e^{-\frac{R}{L} t} + R c(t) e^{-\frac{R}{L} t} = E \sin \omega t,$$

azaz

$$L c'(t) e^{-\frac{R}{L} t} = E \sin \omega t,$$

$$c'(t) = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t.$$

Innen

$$c(t) = \frac{E}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t dt = \dots =$$

$$= E e^{\frac{R}{L}t} \left( \frac{R}{R^2 + L^2 \omega^2} \sin \omega t - \frac{L\omega}{R^2 + L^2 \omega^2} \cos \omega t \right)$$

Jelöljük a sík  $(R, L\omega)$  koordinátákkal megadott pontjának polárszögét  $\varphi$ -vel; ekkor

$$R = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} \cos \varphi, \quad L\omega = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} \sin \varphi,$$

és az előbbi képlet így írható:

$$\begin{aligned} c(t) &= E e^{\frac{R}{L}t} \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) = \\ &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} e^{\frac{R}{L}t} \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Végül is tehát a (19) egyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} I &= Y + I_1 = c e^{-\frac{R}{L}t} + c(t) e^{-\frac{R}{L}t} = \\ &= c e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Az  $I(0) = I_0$  kezdeti feltétel miatt a fenti képletbe  $t = 0$ -t helyettesítve adódik:

$$I_0 = c e^0 + \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin(0 - \varphi),$$

azaz

$$c = I_0 + \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin \varphi,$$

ugyhogy az  $I(0) = I_0$  kezdeti feltételnek elégtévő partikuláris megoldás:

$$I_p = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

E megoldásban látható, hogy az első két tag  $t \rightarrow +\infty$  esetén 0-hoz tart; a harmadik a feszültségével megegyező frekvenciájú rezgés, melynek amplitúdója a feszültség amplitúdójának  $\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$ -tel való osztása útján kapható (látszólagos ellenállás) és fázisban a feszültséghez képest  $\varphi$ -vel el van tolva, ahol  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$ .

A lineáris egyenletekhez hasonlóan kezelhetők az ún. Bernoulli-féle egyenletek:

$$a(x) y' + b(x) y = c(x) y^n.$$

Itt is először megoldjuk az

$$a(x) Y' + b(x) Y = 0$$

homogén egyenletet, azután ennek egy megoldását  $Y_1$ -gyel jelölve, az egyenlet megoldását  $y = k(x) Y_1$  alakban keressük. A  $k(x)$  függvényre a változók szétválasztásával megoldható egyenletet nyerünk.

Például oldjuk meg az

$$(20) \quad y' + 2xy = 2x^3 y^3$$

egyenletet. A homogén egyenlet

$$Y' + 2xY = 0.$$

Ennek megoldása:

$$Y' = -2xY,$$

$$\int \frac{dY}{Y} = - \int 2x dx,$$

$$\ln Y = -x^2 + \ln c,$$

$$Y = ce^{-x^2}.$$

Az  $Y_1 = e^{-x^2}$  választás mellett keressük a (20) differenciálegyenlet megoldását

$$y = k(x)e^{-x^2}$$

alakban. Ekkor  $y' = k'(x)e^{-x^2} - 2xk(x)e^{-x^2}$ , vagyis (20) -ba behelyettesítve

$$k'(x)e^{-x^2} - 2xk(x)e^{-x^2} + 2xk(x)e^{-x^2} = 2x^3 k^3(x)e^{-3x^2},$$

vagyis

$$k'(x) = 2x^3 k^3(x)e^{-2x^2}.$$

E differenciálegyenletet a változók szétválasztásának módszerével megoldva

$$\begin{aligned} \int \frac{dk}{k^3} &= \int 2x^3 e^{-2x^2} dx = \int x^2 (2xe^{-2x^2}) dx = \\ &= x^2 \frac{-e^{-2x^2}}{2} + \int xe^{-2x^2} dx = \\ &= -\frac{x^2 e^{-2x^2}}{2} - \frac{e^{-2x^2}}{4} + C, \end{aligned}$$

tehát

$$-\frac{1}{2k^2} = -\frac{e^{-2x^2}}{4} (2x^2 + 1 - 4Ce^{2x^2}).$$

A  $-4C = C_1$  jelöléssel innen

$$\begin{aligned} k^2 &= e^{2x^2} \frac{2}{2x^2 + 1 + C_1 e^{2x^2}}, \\ k(x) &= e^{x^2} \sqrt{\frac{2}{2x^2 + 1 + C_1 e^{2x^2}}}, \end{aligned}$$

a (20) differenciálegyenlet megoldása tehát

$$y = k(x)e^{-x^2} = \sqrt{\frac{2}{2x^2 + 1 + C_1 e^{2x^2}}}.$$

## 26. Egzisztencia- és unicitási tételek

Az

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

elsőrendű, explicit alakban megadható differenciálegyenletek speciális típusainak megoldásával foglalkoztunk az előző fejezetben. Minden egyes típusnál külön-külön a szereplő függvényekre tett bizonyos kikötések mellett beláttuk, hogy egy és csakis egy olyan  $y(x)$  függvény létezik, melyre valamely  $T$  tartományban  $y(x_0) = y_0$  ( $(x_0, y_0) \in T$ ) fennáll, vagyis szemléletesen, a vizsgált differenciálegyenletnek egy és csakis egy olyan integrálgörbéje létezik, amely áthalad az  $(x_0, y_0) \in T$  ponton. Ezen vizsgálatoknál használt módszerek egyszersmind a vizsgált differenciálegyenlet megoldását is szolgáltatták.

A 25. fejezet elején röviden általánosságban is foglalkoztunk az (1) differenciálegyenletekkel. Arra a megállapításra jutottunk, hogy az (1) differenciálegyenlet egy iránymezőt határoz meg, azaz minden  $(x, y) \in T$  ponthoz egy vonalelemet rendel. A differenciálegyenlet megoldásai az iránymező trajektóriáival azaz olyan görbékkel szemléltethetők, amelyek csak (1) -ből nyerhető vonalelemeket szolgáltatnak.

Az alábbiakban olyan tételeket fogunk kimondani és bebizonyítani, amelyek egyrészt biztosítani fogják azt, hogy az (1) differenciálegyenletnek létezzék az  $(x_0, y_0) \in T$  ponton áthaladó integrálgörbéje (egzisztencia-tétel), másrészt biztosítani fogják, hogy az  $(x_0, y_0) \in T$  ponton (1) -nek csak egy integrálgörbéje haladjon át (unicitási-tétel). Az unicitás kérdésének vizsgálata főleg fizikai folyamatok leírására szolgáló differenciálegyenletek megoldásánál igen fontos, hiszen ezek biztosítják a megoldás egyértelműségét. Az ilyen irányú elméleti vizsgálatok egyben az (1) differenciálegyenlet  $(x_0, y_0) \in T$  ponton áthaladó integrálgörbéjének közelítő meghatározására is jó módszert szolgáltatnak.

Bevezetésként először néhány fogalommal kell megismerkednünk.

A Matematika I/1. jegyzet 40. fejezetében foglalkoztunk már az iterációs módszerrel, azt speciálisan egyenletek közelítő megoldására ismertette. Az (1) differenciálegyenletek esetében hasonlóképpen okoskodva a következőt mondhatjuk:

Ha az (1) differenciálegyenletnek az  $(x_0, y_0)$  ponton áthaladó integrálgörbéjét (vagy (1) -nek az  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltételt kielégítő megoldását) akarjuk meghatározni, induljunk ki valamilyen  $\varphi_0(x)$  függvényből, amely folytonos, és görbéje áthalad az  $(x_0, y_0)$  ponton ( $\varphi_0(x)$  kielégíti a kezdeti feltételt):

$$\varphi_0(x_0) = y_0.$$

Ha  $\varphi_0(x)$  véletlenül nem éppen (1) megoldása, úgy tekintsük a megoldás 0 -adik közelítésének, és definiáljuk segítségével a megoldás első közelítő függvényét,  $\varphi_1(x)$ -et a

$$\varphi_1'(x) = f(x, \varphi_0(x)), \quad \varphi_1(x_0) = y_0,$$

feltételeket nyilván kielégítő

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi_0(x)) dx$$

képlettel. E  $\varphi_1(x)$  függvény segítségével a megoldás második közelítő függvénye,  $\varphi_2(x)$  hasonlóképpen értelmezhető:

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi_1(x)) dx.$$

Eljárásunkat tovább folytatva az adódó  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  függvények bizonyos kikötések mellett az (1) differenciálegyenlet kereseti megoldásához konvergáló sorozatot alkotnak (azaz elég nagy  $n$ -re  $\varphi_n(x)$  az (1) egyenlet alkalmas közelítő megoldásának tekinthető), és meg fogjuk mutatni, hogy az (1) egyenlet  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltételt kielégítő megoldásának létezése is ezen  $\varphi_n(x)$  függvények segítségével bizonyítható.

A bizonyítás során általában azt fogjuk megkívánni, hogy az (1) differenciálegyenlet jobboldalán szereplő  $f(x, y)$  függvény tegyen eleget valamely  $(x_0, y_0)$  pont környezetében, vagy valamely  $T$  tartományban ún. Lipschitz-feltételnek. Ezen pontosabban a következőt kell értenünk.

#### Definíció

Az  $f(x, y)$  függvény valamely  $(x_0, y_0)$  pont alkalmas  $T = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$  környezetében (amely  $f(x, y)$  értelmezési

tartományának része) Lipschitz-feltételnek tesz eleget, ha megadható egy olyan  $M$  szám, hogy  $x$ -től függetlenül bármely  $(x, y_1) \in T$ ,  $(x, y_2) \in T$  esetén

$$(2) \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M |y_2 - y_1|.$$

$M$ -et az  $f(x, y)$  függvény  $T$ -hez tartozó Lipschitz-állandójának nevezzük.

Ha  $f(x, y)$  egy  $G$  tartomány minden  $(x_0, y_0)$  pontjának alkalmas  $T$  környezetében Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor azt mondjuk, hogy  $f(x, y)$   $G$ -ben Lipschitz-feltételnek tesz eleget.

Nyilván eleget tesznek a (2) Lipschitz-feltételnek mindazok az  $f(x, y)$  függvények, amelyek a  $T = \{(x, y): |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$  tartományban  $y$  szerint parciálisan differenciálhatók, és amelyekre a  $\frac{\partial f}{\partial y}$  parciális derivált  $T$ -ben korlátos. Ekkor ugyanis

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq M \quad ((x, y) \in T)$$

mellett a középértéktételt alkalmazva

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |y_2 - y_1| \left| \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y} \right| \leq |y_2 - y_1| M,$$

ahol  $(x, y_1) \in T$ ,  $(x, y_2) \in T$ , és  $\eta$   $y_1$  és  $y_2$  közé esik.

Ha az előbbieken kívül még azt is megköveteljük, hogy a  $\frac{\partial f}{\partial y}$  parciális derivált folytonos legyen valamely  $G$  tartományban, akkor  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$  nyilván korlátos  $G$  minden pontjának alkalmas környezetében, tehát  $f(x, y)$   $G$ -ben Lipschitz-feltételnek tesz eleget.

E feltétel azonban elégséges, de korántsem szükséges. Például az  $f(x, y) = |y|$  függvény az egész síkban Lipschitz-feltételnek tesz eleget:

$$||y_2| - |y_1|| \leq |y_2 - y_1|,$$

és ugyanakkor nem differenciálható az egész síkban.

Az (1) differenciálegyenlet  $(x_0, y_0)$  ponton áthaladó integrálgörbéjének létezésére (a differenciálegyenlet  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltételnek eleget tevő megoldásának létezésére) mármost a következő egzisztencia-tételt mondhatjuk ki:



# Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel

Legyen  $f(x, y)$  a

$$(3) \quad T = \{ (x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}$$

tartományban korlátos:

$$(4) \quad |f(x, y)| \leq A \quad ((x, y) \in T),$$

folytonos, és tegyen eleget T-ben Lipschitz-feltételnek:

$$(5) \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M |y_2 - y_1|.$$

E feltételek mellett van az (1):

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenletnek olyan  $y = \varphi(x)$  egyenletű integrálgörbéje, amely áthalad az  $(x_0, y_0)$  ponton, és

$$(6) \quad |x - x_0| < \alpha = \min(a, \frac{b}{A})$$

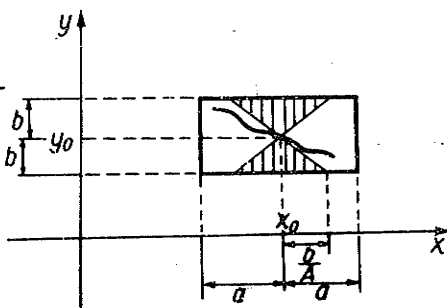
esetén T-ben halad.<sup>x)</sup>

<sup>x)</sup>  $\alpha$  itteni választását az a körülmény indokolja, hogy ha  $y = \varphi(x)$  az  $y' = f(x, y)$  differenciálegyenletnek az  $(x_0, y_0)$  ponton áthaladó integrálgörbéje, akkor (4) értelmében ezen görbe  $(x_0, y_0)$  pontbeli érintőjének meredeksége így becsülhető meg:

$$|y'(x_0)| = |f(x_0, y_0)| \leq A.$$

Mivel az  $(x_0, y_0)$  ponton áthaladó A és -A meredekségű egyenesek az  $y = y_0 \pm b$  egyeneseket az  $x = x_0 \pm \frac{b}{A}$  abszcisszájú pontokban metszik (102. ábra) biztosan állíthatjuk, hogy az a és  $\frac{b}{A}$  értékek közül a kisebbet  $\alpha$ -val jelölve,

$|x - x_0| < \alpha = \min(a, \frac{b}{A})$  esetén az  $y = \varphi(x)$  egyenletű görbe T-ben halad.



102. ábra

Magát a  $\varphi(x)$  függvényt a következőképpen nyerhetjük:

Egy  $|x-x_0| < \alpha$  esetén folytonos  $\varphi_0(x)$  függvényből kiindulva, mely az adott kezdeti feltételt kielégíti és  $T$ -ben halad:

$$(7) \quad \varphi_0(x_0) = y_0, \quad |x-x_0| < \alpha, \quad |\varphi_0(x) - y_0| \leq b,$$

a  $\varphi_n(x)$  függvényeket ( $n = 1, 2, \dots$ ) szukcessziven a

$$(8) \quad \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi_{n-1}(x)) dx \quad (|x-x_0| < \alpha)$$

képlettel definiáljuk. Ekkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$  létezik, és

$$(9) \quad \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$$

( $|x-x_0| < \alpha$  esetén) az (1) differenciálegyenlet keresett megoldását adja.

#### Bizonyítás

Először is belátjuk, hogy a (8) képlet alkalmazásával szukcessziven nyert  $\varphi_n(x)$  függvények  $|x-x_0| < \alpha$  esetében léteznek és folytonosak.

$\varphi_0(x)$  a feltétel értelmében folytonos  $|x-x_0| < \alpha$  esetén, és így  $f(x, y)$   $T$ -beli folytonossága és a (7) -beli második összefüggés értelmében  $f(x, \varphi_0(x))$  is folytonos  $|x-x_0| < \alpha$  esetén. Létezik tehát

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi_0(x)) dx,$$

ha  $|x-x_0| < \alpha$ , és ezen intervallumban folytonos is. Mivel pedig

$$\varphi_1(x_0) = y_0$$

és (4), ill. (6) értelmében

$$|\varphi_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, \varphi_0(x)) dx \right| \leq |x-x_0| A < \alpha \quad A \leq b,$$

a  $\varphi_1(x)$  függvény  $|x-x_0| < \alpha$  esetén ugyanazon feltételeknek tesz eleget, mint  $\varphi_0(x)$ . Létezik tehát

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi_1(x)) dx$$

és  $|x-x_0| < \alpha$  esetén ugyancsak  $\varphi_0(x)$  -szel egyező feltételeknek tesz eleget.  $n$ -ről  $n+1$ -re következtetve adódik, hogy a (8) -ban definiált  $\varphi_n(x)$  függvények mind léteznek  $|x-x_0| < \alpha$  esetén, folytonosak is, és kielégítik a

$$(10) \quad \varphi_n(x_0) = y_0, \quad |\varphi_n(x) - y_0| < b$$

összefüggéseket.

Ezután megmutatjuk, hogy  $\varphi_0(x)$  alkalmas választása mellett a

$$(11) \quad \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \dots$$

sor, melynek részletösszegei épp a (8) formulával megkonstruált  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  függvények, egyenletesen konvergens, összege  $(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x))$  a  $\varphi_n(x)$  függvények folytonossága miatt

tehát folytonos függvény. Végezetül megmutatjuk azután, hogy e  $\varphi(x)$  függvény görbéje  $T$  -ben halad és éppen a keresett integrálgörbe.

Legyen

$$\varphi_0(x) = y_0.$$

E függvény  $|x-x_0| < \alpha$  esetén nyilván folytonos,  $T$  -ben halad és kielégíti a  $\varphi_0(x_0) = y_0$  feltételt. (8) ill. (4) értelmében ekkor

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq A |x-x_0|;$$

(8) és az (5) alatti Lipschitz-feltétel értelmében pedig előbbi eredményünket felhasználva

$$\begin{aligned}
\left| \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x \left[ f(x, \varphi_1(x)) - f(x, \varphi_0(x)) \right] dx \right| \leq \\
&\leq \left| \int_{x_0}^x \left| f(x, \varphi_1(x)) - f(x, \varphi_0(x)) \right| dx \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x \left| \varphi_1(x) - \varphi_0(x) \right| dx \right| \leq \\
&\leq MA \left| \int_{x_0}^x |x - x_0| dx \right| = MA \frac{|x - x_0|^2}{2}.
\end{aligned}$$

Hasonlóképpen adódik, hogy

$$\left| \varphi_3(x) - \varphi_2(x) \right| \leq AM^2 \frac{|x - x_0|^3}{3!} = \frac{A}{M} \frac{(M|x - x_0|)^3}{3!},$$

ill.

$$\left| \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) \right| \leq \frac{A}{M} \frac{(M|x - x_0|)^n}{n!} \leq \frac{A}{M} \frac{(M\alpha)^n}{n!}.$$

Mivel a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M\alpha)^k}{k!}$$

sor konvergens, a Weierstrass-féle kritérium értelmében (Matematika I/2. jegyzet 22. fejezet) a (11) sor egyenletesen konvergens. A sor összegét  $\varphi(x)$ -szel jelölve

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x).$$

$\varphi(x)$  nyilván folytonos lesz  $|x - x_0| < \alpha$  esetén (ui. ekkor a (11) sor tagjai folytonosak) és (10) értelmében

$$\varphi(x_0) = y_0,$$

és

$$\left| \varphi(x) - y_0 \right| \leq b.$$

(A (10) összefüggés ui. minden  $n$ -re fennállt.)

Meg kell még mutatnunk, hogy  $|x - x_0| < \alpha$  esetén

$$(12) \quad \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx.$$

Az (5) Lipschitz-feltétel értelmében előbbi eredményeinket felhasználva

$$\begin{aligned} |f(x, \varphi_n(x)) - f(x, \varphi_{n-1}(x))| &\leq M |\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq A \frac{(M|x-x_0|)^n}{n!} \leq \\ &\leq \frac{A(M\alpha)^n}{n!} \quad (|x-x_0| < \alpha) \end{aligned}$$

adódik, így tehát az

$$\begin{aligned} f(x, \varphi_0(x)) + (f(x, \varphi_1(x)) - f(x, \varphi_0(x))) + \dots + (f(x, \varphi_n(x)) - \\ - f(x, \varphi_{n-1}(x))) + \dots \end{aligned}$$

függvénysor a Weierstrass-kritérium értelmében egyenletesen konvergens, szabad tehát tagonként integrálnunk, ami más szavakkal azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} y_0 + \int_{x_0}^x \left\{ \lim f(x, \varphi_{n-1}(x)) \right\} dx &= y_0 + \lim \int_{x_0}^x f(x, \varphi_{n-1}(x)) dx = \\ &= y_0 + \lim \left\{ \varphi_n(x) - y_0 \right\} = \varphi(x) \end{aligned}$$

(az átalakításnál a második lépésnél felhasználtuk a (8) összefüggést). Így tehát a (12) összefüggés valóban fennáll. Mivel pedig  $|x-x_0| < \alpha$

esetén az  $f(x, \varphi(x))$  függvény folytonos, (12) jobboldala (és így baloldala is) differenciálható. A differenciálást elvégezve

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

adódik,  $\varphi(x)$  tehát valóban megoldása az (1) differenciálegyenletnek. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Megjegyezzük még, hogy a (11) sor részletösszegeinek a sor  $\varphi(x)$  összegétől (az (1) differenciálegyenlet keresett megoldásától) való eltérésére a következő becslés adható;

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{A}{M} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(M|x-x_0|)^k}{k!} \quad (|x-x_0| < \alpha),$$

vagyis a (8) -ban definiált  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  függvények legalább olyan jól konvergálnak a  $\varphi(x)$  függvényhez, mint az exponenciális sor.

Az egzisztencia-tételből következik az alábbi állítás:

Ha valamely  $G$  tartományban  $f(x, y)$  és  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  folytonosak, akkor bármely  $(x, y) \in G$  ponton áthalad az (1) differenciálegyenletnek integrálgörbéje.

Például az ún. Bernoulli-féle differenciálegyenlet esetében

$$a(x) y' + b(x) y = c(x) y^n,$$

ahol feltesszük, hogy valamely  $G$  tartományban  $a(x), b(x), c(x)$  folytonosak, és  $a(x) \neq 0$ . Valóban, e feltételek mellett minden  $(x_0, y_0) \in G$  ponton halad át a differenciálegyenletnek integrálgörbéje, mivel a differenciálegyenletből

$$y' = \frac{c(x)}{a(x)} y^n - \frac{b(x)}{a(x)} y$$

adódik ( $a(x) \neq 0$ ), és a tett feltevések mellett a jobboldal és ennek  $y$  szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{c(x)}{a(x)} n y^{n-1} - \frac{b(x)}{a(x)}$$

is folytonos  $G$ -ben.

Annak biztosítására, hogy az  $(x_0, y_0)$  ponton az (1) differenciálegyenletnek csak egy integrálgörbéje haladjon át a következő tétel mondható ki:

#### Unicitási tétel

Ha  $f(x, y)$  valamely  $G$  tartományban folytonos és Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor minden  $(x_0, y_0) \in G$  ponton az (1) differenciálegyenletnek csak egy integrálgörbéje halad át.

Más szavakkal tehát a Picard-Lindelöf tételben megfogalmazott egzisztencia-feltétel egyben a megoldás unicitását is biztosítja.

### Bizonyítás

Legyen  $(x_0, y_0) \in G$  és jelentse  $T$  az

$$(13) \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

négyszögtartományt ( $T \subset G$ ). A feltétel értelmében elég kis  $a$  és  $b$  esetén található egy olyan  $M$  Lipschitz-állandó, hogy

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M |y_2 - y_1|$$

$x$ -től függetlenül, minden, a (13) négyszögtartományba eső  $(x, y_2)$  és  $(x, y_1)$  pontra. Ha az  $a$  és  $\frac{1}{M}$  számok közül a kisebbet  $\alpha$ -val jelöljük, akkor  $0 < \beta < \alpha$  esetén az

$$(14) \quad |x - x_0| \leq \beta < \alpha, \quad |y - y_0| \leq b \quad (\alpha = \min(a, \frac{1}{M}))$$

négyszögtartományba eső  $(x, y_2)$  és  $(x, y_1)$  pontokra

$$(15) \quad |x - x_0| |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \frac{1}{M} M |y_2 - y_1| = |y_2 - y_1|.$$

Tegyük fel mármost a tétel állításával ellentétben, hogy  $y = \varphi(x)$  és  $y = \psi(x)$  két, az  $(x_0, y_0)$  ponton áthaladó egymással azonosan meg nem egyező, a (14) négyszögtartományban haladó és az egész  $|x - x_0| \leq \beta$  intervallumban értelmezett integrálgörbéje az (1) differenciálegyenletnek. Ez azt jelenti, hogy (15) értelmében

$$(16) \quad \begin{aligned} | \varphi(x) - \psi(x) | &= \left| \int_{x_0}^x \{ f(u, \varphi(u)) - f(u, \psi(u)) \} du \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x \left| \frac{\varphi(u) - \psi(u)}{u - x_0} \right| du. \end{aligned}$$

Az utóbbi improprius integrál biztosan létezik, mert a l'Hospital-szabályt alkalmazva

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \frac{\varphi(u) - \psi(u)}{u - x_0} = \lim_{u \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(u) - \psi'(u)}{1} = f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = 0.$$

Ha mármost az egész  $|x - x_0| \leq \beta$  intervallumban  $\varphi(x)$  és  $\psi(x)$  nem azonosan egyenlő egymással, akkor a fentiek értelmében az  $|x - x_0| \leq \beta$  intervallumban folytonossá tehető

$$\left| \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{x - x_0} \right|$$

nem azonosan eltűnő függvénynek az  $|x - x_0| \leq \beta$  intervallumban valahol pozitív  $G$  maximális értékét fel kell vennie (Weierstrass-tétel, Matematika I/1. jegyzet 27. fejezet). Jelöljük az  $x_0$ -hoz legközelebb eső ilyen helyet  $\xi$ -vel. Ekkor azonban (16)-ból

$$G = \left| \frac{\varphi(\xi) - \psi(\xi)}{\xi - x_0} \right| < \frac{1}{|\xi - x_0|} \left| \int_{x_0}^{\xi} G \, du \right| = G,$$

azaz  $G < G$  következne, hiszen a folytonos  $\left| \frac{\varphi(u) - \psi(u)}{u - x_0} \right|$  függvény

az  $x_0$  és  $\xi$  közötti intervallumban ( $\xi$ -t kivéve) mindenütt kisebb  $G$ -nél.  $G < G$  nyilván nem állhat, vagyis a  $\varphi(x)$  és  $\psi(x)$  függvények az  $|x - x_0| \leq \beta$  intervallumban azonosan meg kell, hogy egyezzenek egymással.

Most még azt is bebizonyítjuk, hogy az  $(x_0, y_0)$  ponton áthaladó  $y = \varphi(x)$  és  $y = \psi(x)$  egyenletű integrálgörbe nemcsak  $|x - x_0| \leq \beta$ -ban hanem  $G$ -ben mindenütt meg kell hogy egyezzenek egymással.

Tegyük most fel, hogy  $y = \varphi(x)$  és  $y = \psi(x)$  az  $(x_0, y_0) \in G$  ponton áthaladó,  $G$ -ben fekvő és valamely  $x_0$ -át tartalmazó  $(x_1, x_2)$  intervallumban definiált integrálgörbék, amelyek nem azonosan egyenlők egymással, hanem pl. valamely  $x_0 < x < x_2$  helyen  $\varphi(x) \neq \psi(x)$ . Legyen  $\xi$  az ilyen  $x$ -ek alsó határa és  $\eta = \varphi(\xi) = \psi(\xi)$  (ti.  $x < \xi$  esetén  $\varphi(x) = \psi(x)$  és így a  $\varphi(x)$  és  $\psi(x)$  függvények folytonossága miatt  $\varphi(\xi) = \psi(\xi)$ ). Ekkor előbbi eredményünket  $(x_0, y_0)$



helyett  $(\xi, \eta)$ -ra alkalmazva adódik, hogy  $\varphi$  és  $\psi$  még  $\xi$ -nek egy környezetében is megegyezik egymással  $\xi$  definíciójával ellentétben.

## 27. Implicit alaku elsőrendű differenciálegyenletek

Az elsőrendű implicit alaku differenciálegyenletek általános alakja:

$$(1) \quad F(x, y, y') = 0.$$

E differenciálegyenletek megoldását általában az explicit alaku differenciálegyenletek megoldására vezetjük vissza. Elsőrendű tehát az a kérdés, milyen feltételek mellett fejezhető ki az (1) egyenletből  $y'$ , mikor felel meg az (1) differenciálegyenletnek csupán egy, vagy több, esetleg végtelen sok

$$(2) \quad y' = f(x, y)$$

alaku explicit differenciálegyenlet.

Az implicit függvényről szóló tételből (Matematika I/2. jegyzet 35. fejezet) adódik, hogy ha  $F(x, y, y')$  az  $(x_0, y_0, y'_0)$  valamely alkalmas környezetében folytonos és folytonos  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  parciális deriválttal rendelkezik, továbbá ha  $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$  és  $\left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{(x_0, y_0, y'_0)} \neq 0$ , akkor

minden elég kicsiny  $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan  $\delta > 0$ , hogy az  $F(x, y, y') = 0$  egyenletnek minden olyan  $(x, y)$  értékpárral, melyre  $|x - x_0| < \delta$ ,  $|y - y_0| < \delta$  egyetlen az  $|y' - y'_0| < \varepsilon$  intervallumba

eső  $y' = f(x, y)$  megoldása legyen. Ez a megoldás a  $T_\delta = \{(x, y): |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$  tartományban folytonos függvény és  $f(x_0, y_0) = y'_0$ . Ha  $F(x, y, y')$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}$   $T_\delta$ -ban folytonos függvények, akkor  $\delta$  megválasztható úgy, hogy  $T_\delta$ -ban  $f(x, y)$  parciális deriváltjai is létezzenek és folytonosak legyenek. Ennek értelmében tehát az (1) differenciálegyenletnek a  $F(x, y, y')$  függvényre tett előbbi feltételek mellett egy, vagy több (esetleg végtelen sok)  $y' = f(x, y)$  explicit differenciálegyenlet felel meg az  $(x_0, y_0)$  pont bizonyos környezetében, és itt  $f(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  és  $\frac{\partial f}{\partial y}$  is folytonos függvények. Ezen  $y' = f(x, y)$

differenciálegyenletek mindegyikének az  $(x_0, y_0)$  ponton egy és csakis egy integrálgörbéje halad át (az egzisztencia és unicitási tétel értelmében) és ezek a függvények valamennyien kielégítik az (1) implicit differenciál-

egyenletet. Sokszor azonban meg szoktunk elégedni egy integrálgörbe meghatározásával.

Azokat az  $(x_0, y_0, y'_0)$  értékhármakat, amelyek az (1) differenciálegyenletet kielégítik most is a differenciálegyenlethez tartozó vonalelemeknek nevezzük. Ezekkel kapcsolatban a következő definícióban állapodunk meg:

### Definíció

#### Legyen az

$$(3) \quad F(x, y, y') = 0$$

differenciálegyenletet kielégítő  $(x_0, y_0, y'_0)$  számhármast valamely környezetében  $F(x, y, y')$  és  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  folytonos függvény.

Az  $(x_0, y_0, y'_0)$  vonalelemet a (3) differenciálegyenlet reguláris vonalelemének nevezzük, ha  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  az  $(x_0, y_0, y'_0)$  helyen nem tűnik el.

$\left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{(x_0, y_0, y'_0)} = 0$  esetén a (3) differenciálegyenletet kielégítő  $(x_0, y_0, y'_0)$  számhármast a differenciálegyenlet szinguláris vonalelemének nevezzük.

Előbbi okoskodásunk értelmében, ha  $\left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{(x_0, y_0, y'_0)} \neq 0$ , vagyis  $(x_0, y_0, y'_0)$  a (3) differenciálegyenlet reguláris vonaleleme, minden elég kicsiny  $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan  $\delta > 0$ , hogy  $|x - x_0| < \delta$ ,  $|y - y_0| < \delta$  esetén minden  $(x, y)$  ponthoz pontosan egy, az  $|y' - y'_0| < \varepsilon$  feltételnek eleget tevő

$$y' = f(x, y)$$

megoldása tartozik a (3) differenciálegyenletnek, ahol  $f(x, y)$  elég kicsiny  $\delta$ -ra folytonos függvény.

Például az alábbi differenciálegyenleteknél  $x_0 = y_0 = y'_0 = 0$  szinguláris vonalelem, mivel

$$y'^2 - x^2 = 0, \quad \text{ill.} \quad x^2 + y'^2 + y'^2 = 0$$

esetében is  $2y' = 0$  a vizsgált helyen.

Explicit elsőrendű differenciálegyenleteknél természetesen nem léphetnek fel szinguláris vonalelemek, mivel az egyenletet

$$y' - f(x, y) = 0$$

alakban írva a bal oldal  $y'$  szerinti parciális deriváltja 1.

Hangsúlyozni szeretnénk azonban, hogy egy differenciálegyenletnél szinguláris vonalelemek fellépése igen gyakori jelenség, így nem hanyagolható el az ezekre kiterjedő vizsgálat.

### Definíció

Az  $F(x, y, y') = 0$  differenciálegyenlet valamely integrálgörbáját regulárisnak, ill. szingulárisnak nevezzük aszerint, hogy csak reguláris, ill. csak szinguláris vonalelemeken halad át.

Szokás még az  $F(x, y, y') = 0$  differenciálegyenletnek un. diszkrimináns görbéjéről is beszélni. Ezen azoknak az  $(x, y)$  pontoknak összességét értjük, amelyek a differenciálegyenlet szinguláris vonalelemévé egészíthetők ki, vagyis amelyekre  $F = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$   $y'$  alkalmas megválasztása mellett. Gyakran előfordul, hogy a diszkrimináns görbe nem folytonos, sőt izolált pontokból is állhat.

Tegyük fel, hogy a (3) differenciálegyenletnek partikuláris megoldásaiából ki tudunk választani egy egyparaméteres

$$(4) \quad y = g(x, c)$$

sereget és hogy ennek a seregnek van burkoló görbéje. Ezen azt kell érteni, hogy van olyan

$$(5) \quad y = \varphi(x)$$

görbe, amelynek minden pontján áthalad a (4) sereg egyik görbéje, amely őt ebben a pontban érinti. Ekkor nyilván (5) is megoldása a (3) differenciálegyenletnek, hiszen ha a  $c$  paramétert úgy választjuk meg, hogy a (4) sereg  $c$  paraméterű görbéje az (5) görbét valamely  $(x, \varphi(x))$  pontban érintse, akkor

$$\varphi'(x) = \frac{\partial g(x, c)}{\partial x},$$

ugyhogy az  $(x, g(x, c), \frac{\partial g(x, c)}{\partial x})$  vonalelemmel együtt az  $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$  vonalelem is kielégíti (3) -at.

Eszerint a partikuláris megoldások egyparaméteres seregének burkoló görbéje is megoldása (3) -nak. Ha a burkoló görbe vonalelemeinek környezetében  $F(x, y, y')$  elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak, akkor a burkoló görbe csak szinguláris megoldás lehet, hiszen minden pontján át legalább két megoldás görbéje halad. Emiatt a burkoló görbe mindig része a diszkrimináns görbének.

Természetesen ha egy ponton át két egymást érintő integrálgörbe halad át, akkor újabb integrálgörbét kaphatunk úgy is, hogy az érintkezési pontban az egyik integrálgörbéről a másikra térünk át.

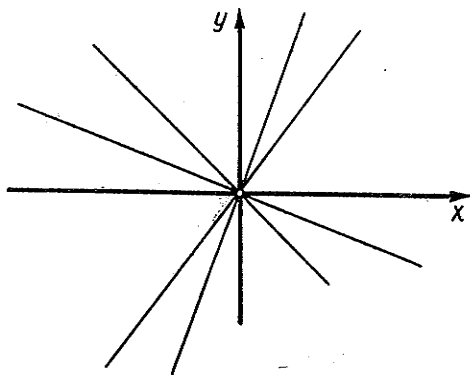
Például az

$$F = xy' - y = 0$$

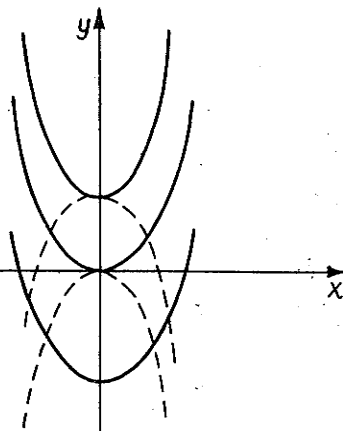
differenciálegyenlet esetében  $F = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ , ha  $x = 0$ ,  $y = 0$  és  $y'$  tetszőleges. A diszkrimináns görbe tehát az egyetlen  $(0, 0)$  pontból áll. A differenciálegyenlet integrálgörbéinek egyenlete

$$y = cx,$$

a diszkrimináns görbén (azaz a  $(0, 0)$  ponton) végtelen sok integrálgörbe halad át (103. ábra).



103. ábra



104. ábra

Az

$$F = y'^2 - 4x^2 = 0$$

differenciálegyenlet esetében  $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' = 0$ , ha  $y' = 0$  és ezen érték mellett  $F = 0$ , ha  $x = 0$ . A szinguláris vonalelemek tehát azok az értékhármasok, ahol

$$x = 0, \quad y \text{ tetszőleges}, \quad y' = 0.$$

A diszkrimináns görbe az  $Y$  tengely. A differenciálegyenlet megoldásai:

$$y = x^2 + c,$$

ill.

$$y = -x^2 + c,$$

ill. az ezen görbék darabjaiból összeállítható differenciálható függvények. A diszkrimináns-görbe minden pontján két fent explicit megadott integrálgörbe halad át. Maga a diszkrimináns-görbe nem integrálgörbe (104. ábra).

Az

$$F = y^2(y'^2 + 1) - 1 = 0 \quad (y > 0)$$

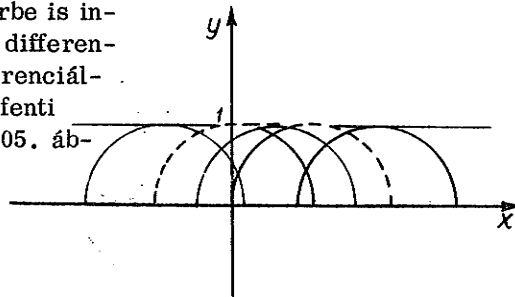
differenciálegyenletnél  $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y^2 y' = 0$ , és  $F = 0$ , ha  $y = 1$ ,  $y' = 0$ . Szinguláris vonalelemek azok az értékhármasok, ahol

$$x \text{ tetszőleges}, \quad y = 1, \quad y' = 0,$$

a diszkrimináns görbe tehát az  $y = 1$  egyenes és ez egyben burkoló görbe is. A differenciálegyenlet megoldásai az

$$(x + c)^2 + y^2 = 1, \quad y > 0$$

görbék, maga a diszkrimináns-görbe is integrálgörbe, továbbá megoldása a differenciálegyenletnek minden olyan differenciálható függvény, melynek görbéje a fenti görbék darabjaiból tehető össze (105. ábra).



105. ábra

## 28. Elsőrendű differenciálegyenletek közelítő megoldása

A 26. fejezetben említettük már, hogy az

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

differenciálegyenletnek  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltételt kielégítő megoldását kereshetjük az ún. szukcesszív approximáció módszerével. Ez annyit jelent, hogy a folytonos  $\varphi_0(x) = y_0$  függvényből kiindulva, szukcesszíven a  $\varphi_n(x)$  függvényt a

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi_{n-1}(x)) \, dx$$

képlettel definiáljuk. A  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  függvények sorozata - például ha  $f(x, y)$  és  $\frac{\partial f}{\partial y}$  az  $(x_0, y_0)$  hely környezetében folytonos - az (1) differenciálegyenlet megoldásához konvergál. (Egzsztencia-tétel.) Azt is említettük, hogy az (1) egyenlet  $\varphi(x)$  megoldását  $\varphi_n(x)$ -szel közelítve meg, a hiba:

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{A}{M} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(M|x-x_0|)^k}{k!}, \quad (|x-x_0| < \alpha)$$

ahol  $\alpha$ ,  $A$  és  $M$  jelentése a korábbi (26. fejezet).

Gyakran hasznos egy differenciálegyenlet megoldását hatványsor alakjában keresni. Arra a kérdésre, hogy ez mikor tehető meg az alábbi tételt mondhatjuk ki:

### Tétel

Az

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y + \dots + a_m(x)y^m$$

differenciálegyenletnek, amennyiben az  $a_k(x)$  függvények ( $k = 0, 1, \dots, m$ )  $x_0$  környezetében analitikusak, van

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$$

alaku megoldása.

A tételt itt nem bizonyítjuk, megjegyezzük azonban, hogy sokkal általánosabb tétel is kimondható, ehhez azonban értelmeznünk kellene a kétváltozós analitikus függvényeket, valamint a kétváltozós hatványsorokat.

Oldjuk meg például mint két közelítő módszerrel az

$$y' = xy^2 + 1$$

differenciálegyenletet az  $y(0) = 0$  kezdeti feltétellel.

Mivel a  $(0,0)$  hely környezetében  $xy^2 + 1$  és ennek  $y$  szerinti parciális deriváltja is folytonos, a szukcesszív approximációval nyert függvényt sorozat biztosan konvergens és a differenciálegyenletnek biztosan van egy és csakis egy a  $(0,0)$  ponton áthaladó integrálgörbéje. Legyen

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0, \\ \text{ekkor} \quad \varphi_1 &= 0 + \int_0^x (x \cdot 0^2 + 1) dx = x, \\ \varphi_2 &= 0 + \int_0^x (x \cdot x^2 + 1) dx = \frac{x^4}{4} + x, \\ \varphi_3 &= 0 + \int_0^x (x(\frac{x^4}{4} + x)^2 + 1) dx = \frac{x^{10}}{160} + \frac{x^7}{14} + \frac{x^4}{4} + x \end{aligned}$$

és így tovább. A megoldásnak a  $\varphi_3(x)$  függvénnyel az  $|x| = |y| < 0,1$  tartományban történő megközelítésénél elkövetett hibára a következő becslést adhatjuk:

$$\begin{aligned} |\varphi_3(x) - \varphi(x)| &< \frac{0,1^3 + 1}{2 \cdot (0,1)^2} \sum_{k=4}^{\infty} \left[ \frac{(20,1^2 x)^k}{k!} \right]_{x=0,1} < \\ &< (0,1)^{-2} \frac{(0,002)^4}{4!} \sum_{k=0}^{\infty} (0,002)^k = \end{aligned}$$

$$= \frac{2^4}{4!} (0,1)^{10} \frac{1}{1-0,002} = \frac{2}{3} (0,1)^{10} \frac{1}{0,998} < (0,1)^{10}.$$

Mivel  $x^2$  és  $1$  is analitikus függvény  $(0,0)$  környezetében (azaz hatványsor összegeként állítható elő) kereshetjük ugyanezen differenciálegyenlet megoldását hatványsor alakjában is. Legyen tehát a megoldás

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

A kezdeti feltétel miatt nyilván  $a_0 = 0$ . Mivel egy hatványsort szabad konvergenciatartományának belsejében tagonként differenciálni

$$\varphi'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$$

adódik, vagyis a differenciálegyenletbe behelyettesítve  $(\varphi^2(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(x))$ , és mivel a hatványsor konvergenciatartományának belsejében abszolút konvergens a részletszorzatokat tetszőlegesen rendezhetjük):

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots &= \\ = x(a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots)(a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots) + 1 &= \\ = x(a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3)x^4 + (2a_1 a_4 + 2a_2 a_3)x^5 + \dots) + 1 & \end{aligned}$$

adódik. E két hatványsor azonosan csak úgy egyezhet meg egymással, ha  $x$  azonos hatványainak együtthatója a jobb- és baloldalon megegyezik, azaz

$$a_1 = 1$$

$$2a_2 = 0,$$

$$3a_3 = 0,$$

$$4a_4 = a_1^2 = 1, \quad \text{azaz} \quad a_4 = \frac{1}{4}$$

$$5a_5 = 2a_1 a_2 = 0,$$



$$6a_6 = a_2^2 + 2a_1a_3 = 0,$$

$$7a_7 = 2a_1a_4 + 2a_2a_3 = \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad a_7 = \frac{1}{14}$$

⋮  
⋮  
⋮

A differenciálegyenlet megoldását szolgáltató hatványsornak első néhány tagja tehát

$$x + \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{14}$$

(előző eredményünkkel, a  $\varphi_3(x)$  approximáló függvényvel a hatványsor első három értékes (nem 0 együtthatóju) tagjából képezett részletösszeg egyezik meg).

## 29. Elsőrendű differenciálegyenletrendszerek. n-edrendű explicit differenciálegyenletek

I. Az elsőrendű differenciálegyenletrendszerek általános alakja:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{aligned} \quad (1)$$

ahol  $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$  az  $x, y_1, \dots, y_n$  változók  $(n+1)$ -dimenziós terének valamely  $T$  tartományában értelmezett függvények.

Minden olyan

$$(2) \quad y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$$

függvényrendszer, melynek függvényei valamely  $a < x < b$  intervallumban differenciálhatók, továbbá ezen  $x$ -ekre  $(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in T$  és az (1) differenciálegyenletrendszert kielégítik, az (1) differenciálegyenletrendszer megoldása, integrálja, ill. szemléletesen kifejezve az

$(n+1)$  -dimenziós térben a (2) egyenletekkel megadott görbe, az (1) differenciálegyenlet-rendszer integrálgörbéje.

Az elsőrendű differenciálegyenletrendszerek az  $n = 1$  speciális esetben az explicit alakban megadható elsőrendű differenciálegyenleteket szolgáltatják.

Ahhoz, hogy az (1) differenciálegyenletrendszer megoldására vonatkozó egzisztencia- és unicitási tételt mondhassunk ki, definiálnunk kell  $(n+1)$  - változós függvényekre az un. Lipschitz-feltételt.

### Definíció

Akkor mondjuk, hogy az  $f(x, y_1, \dots, y_n)$  függvény a  $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$  pont valamely

$$(3) \quad T = \{ (x, y_1, \dots, y_n) : |x - \xi| \leq a, |y_1 - \eta_1| \leq b, \dots, |y_n - \eta_n| \leq b \}$$

környezetében Lipschitz-feltételnek tesz eleget, ha megadható egy  $M > 0$  szám úgy, hogy

$$(4) \quad |f(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - f(x, y_1, \dots, y_n)| \leq M \sum_{k=1}^n |\bar{y}_k - y_k|$$

bármely két  $T$  -ben fekvő  $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  és  $(x, y_1, \dots, y_n)$  pontra.

A fenti Lipschitz-feltételt pl. kielégítik mindazok az  $f(x, y_1, \dots, y_n)$  függvények, amelyek  $T$  -ben korlátos (vagy folytonos)  $\frac{\partial f}{\partial y_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

parciális deriváltakkal rendelkeznek.

Elsőrendű differenciálegyenletrendszerekre hasonló egzisztencia- és unicitási tételek mondhatók ki, mint az  $y' = f(x, y)$  differenciálegyenletre. A tételek bizonyításának menete is hasonló, ennek részletezésére azonban itt nem térünk ki.

### Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel

Legyenek az  $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$  függvények az  $(n+1)$  -dimenziós

$$(4) \quad T = \{ (x, y_1, \dots, y_n) : |x - \xi| \leq a, |y_1 - \eta_1| \leq b, \dots, |y_n - \eta_n| \leq b \}$$

tartományban korlátosak:

$$|f_k(x, y_1, \dots, y_n)| \leq A \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

folytonosak, és tegyenek T -ben Lipschitz-feltételnek eleget:

$$|f_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - f_k(x, y_1, \dots, y_n)| \leq M \sum_{k=1}^n |\bar{y}_k - y_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in T, \quad (x, y_1, \dots, y_n) \in T.$$

E feltételek mellett van az (1) differenciálegyenletrendszernek

$$y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$$

integrálgörbéje, amely áthalad a  $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$  ponton, és amely

$$|x - \xi| < \alpha = \min(a, \frac{b}{A})$$

esetén a (4) -ben definiált T tartományban halad.

Magát a  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  megoldásrendszert a következőképpen nyerhetjük:

Kiindulva az  $|x - \xi| < \alpha$  esetén nyilván folytonos

$$\varphi_{10}(x) = \eta_1, \dots, \varphi_{n0}(x) = \eta_n$$

(röviden  $\varphi_{k0}(x) = \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$ ) függvényrendszerből, szukcesz-  
szíven a  $\varphi_{ki}(x)$  függvényeket  $i = 1, 2, 3, \dots$  -re a

$$\varphi_{ki}(x) = \eta_k + \int_{\xi}^x f_k(x, \varphi_{1,i-1}(x), \dots, \varphi_{n,i-1}(x)) dx$$

képlettel definiáljuk. Ekkor  $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_{ki}(x) \quad k = 1, 2, \dots, n$  esetén létezik és a

$$\varphi_k(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_{ki}(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

függvényrendszer  $|x - \xi| < \alpha$  esetén az (1) differenciálegyenletrendszer keresett megoldását szolgáltatja.

Az egzisztencia-tételből itt is következik a következő állítás:

Ha egy  $G$  tartományban az  $f_1(x, y, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$  függvények, valamint  $y_1, \dots, y_n$  szerinti parciális deriváltjaik folytonosak, akkor  $G$  minden pontján áthalad az (1) differenciálegyenletrendszernek integrálgörbéje.

Annak biztosítására, hogy a  $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n) \in G$  ponton csak egy integrálgörbe haladjon át, a következő tétel mondható ki:

#### Unicitási tétel

Ha az  $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) függvények egy  $G$  tartományban folytonosak és  $G$  minden pontjának alkalmas környezetében Lipschitz-feltételnek tesznek eleget, akkor minden  $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n) \in G$  ponton legfeljebb egy integrálgörbe halad át.

Az egzisztencia-tétellel egybevetve a fenti tétel értelmében a tett feltevések mellett  $G$ -nek minden pontján az (1) differenciálegyenletrendszernek tehát egy és csakis egy integrálgörbéje halad át.

Az (1) elsőrendű differenciálegyenletrendszernek gyakori speciális esete az un. lineáris differenciálegyenletrendszer. Ennek általános alakja:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_{10}(x) + y_1 f_{11}(x) + \dots + y_n f_{1n}(x), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_{n0}(x) + y_1 f_{n1}(x) + \dots + y_n f_{nn}(x), \end{aligned} \quad (5)$$

ahol az  $f_{ik}(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n$ ) függvények valamely  $a < x < b$  intervallumban vannak értelmezve.

Ha speciálisan

$$f_{10}(x) = \dots = f_{n0}(x) = 0,$$

akkor az (5) differenciálegyenletrendszert homogén lineárisnak mondjuk.

Az (5) differenciálegyenletrendszerre az egzisztencia és unicitási tétel így módosul:

Ha valamely  $a < x < b$  intervallumban az  $f_{ik}(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $k = 0, 1, \dots, n$ ) függvények folytonosak, akkor minden  $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$  ponton  $a < \xi < b$  esetén az (5) differenciálegyenletrendszernek egy és csak egy integrálgörbéje halad át.

Az (5) differenciálegyenletrendszernek további speciális eseteként adódik az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletrendszer, amikor is az (5) egyenletrendszer jobboldalán szereplő  $f_{ik}(x)$  függvények valamennyien állandók. E differenciálegyenletrendszer tárgyalására a 33. fejezetben még visszatérünk.

II. Az  $n$ -edrendű explicit alakban megadható differenciálegyenletek általános alakja:

$$(6) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}),$$

ahol  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  az  $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$  változók  $(n+1)$ -dimenziós terében értelmezett függvény.

A (6) differenciálegyenlet megoldásának minden olyan  $n$ -szer differenciálható  $y = \varphi(x)$  függvényt nevezünk, amely deriváltjaival együtt kielégíti a (6) összefüggést.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a (6) differenciálegyenlet tárgyalását elsőrendű differenciálegyenletrendszerek tárgyalására vezethetjük vissza.

Tekintsük e célból az alábbi elsőrendű differenciálegyenletrendszert:

$$(7) \quad \begin{aligned} y'_0 &= y_1, \\ y'_1 &= y_2, \\ &\vdots \\ y'_{n-2} &= y_{n-1}, \\ y'_{n-1} &= f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{aligned}$$

Az  $y = y_0$  jelöléssel a (7) egyenletrendszer megadása a (6) differenciálegyenlet megadásával nyilvánvalóan ekvivalens. Hasonlóképpen könnyen adódik, hogy ha

$$y = \varphi(x)$$

(6) -nak megoldása, akkor

$$(8) \quad y_0 = \varphi(x), \quad y_1 = \varphi'(x), \dots, \quad y_{n-1} = \varphi^{(n-1)}(x)$$

kielégíti (7) -et, és fordítva, ha (8) a (7) differenciálegyenletrendszernek megoldása, akkor az  $y_0(x) = \varphi(x)$  jelöléssel (7) első  $n - 1$  egyenletéből

$$\varphi_1(x) = \varphi'(x), \dots, y_{n-1}(x) = \varphi^{(n-1)}(x)$$

következik, és ezt figyelembevéve, (7) utolsó egyenletéből adódik, hogy  $\varphi(x)$   $n$  -edik deriváltja is létezik és

$$[\varphi^{(n-1)}(x)]' = \varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)),$$

azaz  $\varphi(x)$  kielégíti a (6) differenciálegyenletet.

A fentiek értelmében az elsőrendű differenciálegyenletrendszerekre kimondott egzisztencia- és unicitási tételnek  $n$  -edrendű explicit alakban megadható differenciálegyenletekre a következő átfogalmazás adható:

#### Egzisztencia és unicitási tétel

Ha az  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  függvény az  $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$  változók  $(n+1)$  -dimenziós terének valamely  $T$  tartományában folytonos és Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor minden  $(\xi, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \in T$  ponton a (6) differenciálegyenletnek pontosan egy  $y = \varphi(x)$  egyenletű integrálgörbéje halad át, amely a

$$\varphi(\xi) = \eta_0, \quad \varphi'(\xi) = \eta_1, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

kezdeti feltételnek tesz eleget.

A (6) differenciálegyenletnek a (7) elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre történő átirásából az is látható, hogy  $n$ -edrendű differenciálegyenletek esetében miért kell kezdeti feltételként a differenciálegyenlet megoldását szolgáltató  $\varphi(x)$  függvényt és  $\varphi(x)$  deriváltjainak értékét megadnunk egy alkalmas helyen.

A továbbiakban másodrendű differenciálegyenletekkel fogunk foglalkozni, de pl. a 31. és 32. fejezet teljesen hasonlóképpen volna  $n$ -edrendű differenciálegyenletek esetében is tárgyalható.

### 30. Másodrendű hiányos differenciálegyenletek

A másodrendű explicit alakban megadható differenciálegyenletek általános alakja

$$(1) \quad y'' = f(x, y, y').$$

Az előző fejezetben kimondott egzisztencia- és unicitási tétel értelmében, ha a háromváltozós  $f(x, y, y')$  függvény valamely  $T$  tartományban az  $y$  és  $y'$  változók szerinti parciális deriváltjaival együtt folytonos függvény (vagyis Lipschitz-feltételnek is eleget tesz), akkor  $T$  minden pontján (1) -nek egy és csakis egy integrálgörbéje halad át.

Ebben a fejezetben az (1) differenciálegyenlet két speciális típusával foglalkozunk, az

$$(2) \quad y'' = f(x, y')$$

és az

$$(3) \quad y'' = g(y, y')$$

un. hiányos másodrendű differenciálegyenletekkel.

A (2) differenciálegyenlet vizsgálata az

$$(4) \quad \begin{aligned} y' &= u(x), \\ u' &= f(x, u) \end{aligned}$$

elsőrendű differenciálegyenletrendszer tárgyalására vezethető vissza. Ezen egyenletrendszert úgy oldjuk meg, hogy először meghatározzuk (4) második egyenletének  $u(x)$  megoldását, majd ezt (4) első egyenletébe behelyettesítve közvetlen integrálással a (2) differenciálegyenlet  $y(x)$  megoldására jutunk.

A (3) differenciálegyenletet olyan tartományban vizsgáljuk, ahol  $y'$  nem tűnik el. Ekkor ha  $y = \varphi(x)$  (3) -nak megoldása, akkor  $\varphi(x)$  szigorúan monoton, tehát van  $x = \psi(y)$  inverz függvénye, és ez differenciálható. Új ismeretlen függvényként  $p = y'$  -t vezetve be, ezt tekintethetjük  $x$  helyett az  $y$  független változó  $p(\psi(y))$  függvényének is. Mivel azonban ekkor

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

ezen értéket (3) -ba behelyettesítve arra az eredményre jutunk, hogy a (3) differenciálegyenlet megoldásánál először az

$$(5) \quad p'p = g(y, p) \quad (p' = \frac{dp}{dy})$$

egyenletből határozzuk meg a  $p(y)$  függvényt, majd ezt a

$$\frac{dy}{dx} = p(y)$$

egyenletbe behelyettesítve azt a változók szétválasztásának módszerével oldjuk meg.

Oldjuk meg pl. az

$$1 + y'^2 = 2y y'', \quad y > 0, \quad y' > 0$$

differenciálegyenletet. Mivel e differenciálegyenlet (3) típusu, a  $p = y'$ ,  $y'' = \frac{dp}{dy} p$  összefüggések felhasználásával a következő két differenciálegyenlet írható fel:

$$y' = p,$$

$$(6) \quad 1 + p^2 = 2y \frac{dp}{dy} p.$$

Az utóbbi egyenletet a változók szétválasztásának módszerével megoldva:

$$\int \frac{2p}{1 + p^2} dp = \int \frac{dy}{y},$$

$$\ln(1 + p^2) = \ln y + \ln c_1 = \ln c_1 y, \quad (c_1 > 0)$$



azaz

$$1 + p^2 = c_1 y,$$

$$p = \sqrt{c_1 y - 1}$$

(a feltétel értelmében ui.  $p = y' > 0$ ).  $p$  értékét a (6) egyenletrendszer első egyenletébe behelyettesítve

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{c_1 y - 1}$$

adódik. Ezt az egyenletet ismét a változók szétválasztásának módszerével megoldva nyerjük:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c_1 y - 1}} = \int dx,$$

$$\frac{2}{c_1} \sqrt{c_1 y - 1} = x + c_2,$$

ill.

$$c_1 y - 1 = \frac{c_1^2}{4} (x + c_2)^2,$$

$$y = \frac{1}{c_1} \left( 1 + \frac{c_1^2}{4} (x + c_2)^2 \right),$$

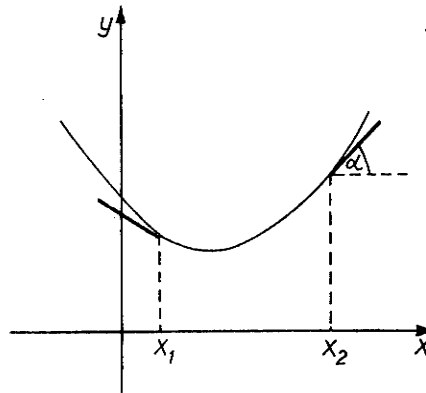
ahol  $c_1 > 0$ ,  $c_2$  pedig tetszőleges állandó.

Határozzuk meg a két pontjában felfüggesztett tökéletesen hajlékony súlyos fonál (lánc) alakját.

A fonál valamely pontjára ható huzóerő nyilván az érintő irányába mutat, nagysága az  $x$  abszcisszájú pontban legyen  $q(x)$ . A fonál által megadott görbe érintőjének irányszögét  $\alpha$ -val jelölve (106. ábra)  $\operatorname{tg} \alpha = y'$ , és így

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$



106. ábra

A fonál  $x_1$  és  $x_2$  abszcisszáik közötti darabjára ható huzóerő  $x$ -komponense:

$$\frac{q(x_2)}{\sqrt{1 + y'(x_2)^2}} - \frac{q(x_1)}{\sqrt{1 + y'(x_1)^2}} = 0,$$

mert a súlyerő függőleges irányú. Innen tehát

$$(*) \quad \frac{q(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = c.$$

Mivel a kérdéses darabra ható huzóerő  $y$ -komponense a súlyerővel tart egyensúlyt

$$\frac{q(x_2)y'(x_2)}{\sqrt{1 + y'(x_2)^2}} - \frac{q(x_1)y'(x_1)}{\sqrt{1 + y'(x_1)^2}} = \rho g \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx,$$

ahol  $g$  a nehézségi gyorsulás mérőszáma,  $\rho$  a fonál hosszegységében foglalt tömeg mérőszáma. A következő eredményre jutottunk tehát (a  $(*)$  összefüggést felhasználva):

$$y'(x_2) - y'(x_1) = \frac{\rho g}{c} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Ha itt  $(x_2 - x_1)$  -gyel osztunk és azután elvégezzük az  $x_2 \rightarrow x_1$  határátmenetet, akkor a  $-\frac{\rho g}{c} = b$  jelöléssel az

$$y'' = b \sqrt{1 + y'^2}$$

differenciálegyenlet adódik. E differenciálegyenlet a (2) típusba tartozik, vagyis a megfelelő elsőrendű differenciálegyenletrendszer:

$$y' = u(x),$$

$$u' = b \sqrt{1 + u^2}.$$

A második egyenletet a változók szétválasztásának módszerével megoldva

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int b \, dx,$$

$$\operatorname{arsh} u = bx + c$$

adódik. Innen

$$u = \operatorname{sh}(bx + c),$$

vagyis a differenciálegyenletrendszer első egyenletét  $(y' = u)$  közvetlen integrálással megoldva

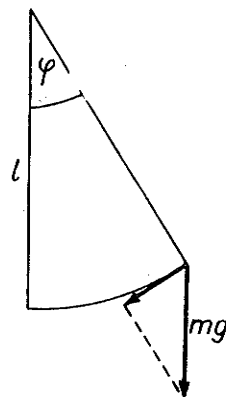
$$y = \operatorname{sh}(bx + c) \, dx = \frac{1}{b} \operatorname{ch}(bx + c) + d.$$

A fonál alakja tehát láncgörbe. (Innen ered az  $y = \operatorname{ch} x$  görbe elnevezése.)

Vizsgáljuk meg a súlytalan  $\ell$  hosszúságú fonálon függő  $m$  tömegű pont (matematikai inga) mozgását a nehézségi erő hatása alatt. Tegyük fel, hogy az inga kilendítése a nyugalmi helyzetből történik, és az inga legnagyobb kitérési szöge  $\alpha$ .

A 107. ábrán látható jelöléssel adódik, hogy az inga mozgását az

$$m \ell \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$



107. ábra

ill.

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{g}{l} \sin \varphi$$

differenciálegyenlettel írhatjuk le. E differenciálegyenlet (3) típusu. Vezessük be tehát új ismeretlen függvényként az

$$(XXX) \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

szögsebességet, új független változóként pedig  $\varphi$ -t. Ekkor a fenti differenciálegyenlet így módosul  $(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \omega)$ :

$$(XXX) \quad \frac{d\omega}{d\varphi} \omega = - \frac{g}{l} \sin \varphi.$$

A (XX) és (XXX) egyenletekből álló differenciálegyenletrendszernek keressük mármost a következő kezdeti feltételeknek elegettevő megoldását:

$t = 0$  -nál  $\varphi = 0$  (a kilendítés a nyugalmi helyzetből történik),

$\varphi = \alpha$  -nál  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 0$  (a maximális kilengési szögnél  $\varphi$ -nek szélsőértéke van).

Az (XXX) egyenletet a változók szétválasztásának módszerével megoldva:

$$\int \omega d\omega = - \int \frac{g}{l} \sin \varphi d\varphi$$
$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l} \cos \varphi + c_1.$$

Figyelembevétel az  $[\omega]_{\varphi=\alpha} = 0$  feltételt, innen

$$0 = \frac{g}{l} \cos \alpha + c_1,$$

$$c_1 = - \frac{g}{l} \cos \alpha,$$

és így

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \alpha),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}.$$

Ezt az eredményt a (\*\*) differenciálegyenletbe behelyettesítve a változók szétválasztásával adódik:

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = dt,$$

vagyis figyelembevéve a  $\varphi(0) = 0$  kezdeti feltételt:

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = \int_0^t dt.$$

Egy negyed lengés idejére tehát adódik:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}.$$

A jobboldali integrál elemi függvényekkel nem fejezhető ki, ún. elliptikus integrál. Értéke táblázatból tetszés szerinti pontossággal kiszámítható. A Matematika I/2. jegyzetben az integrál közelítő értékét sorfejtéssel határoztuk meg (25. fejezet). Kicsiny  $\alpha$  esetén jó közelítéssel

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

### 31. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Az  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakja:

$$(1) \quad y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = f(x).$$

A differenciálegyenletre a következő egzisztencia és unicitási tétel mondható ki:

### Tétel

Ha az  $f(x), f_0(x), \dots, f_{n-1}(x)$  függvények valamely  $a < x < b$  intervallumban folytonosak, akkor  $a < \xi < b$  esetén tetszőlegesen adva meg az  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$  számokat az (1) differenciálegyenletnek egy és csakis egy olyan  $\varphi(x)$  megoldása van  $a < x < b$ -ben, amely kielégíti a

$$\varphi(\xi) = \eta_0, \quad \varphi'(\xi) = \eta_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

kezdeti feltételt.

Mi az alábbiakban speciálisan másodrendű lineáris differenciálegyenletekkel fogunk foglalkozni. Ezeknek általános alakját többnyire nem az (1) -ből  $n = 2$  esetében adódó képlettel, hanem a következőképpen szoktuk megadni:

$$(2) \quad a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = f(x),$$

ahol  $a(x) \neq 0$ , továbbá  $a(x), b(x), c(x), f(x)$  valamely  $a < x < b$  intervallumban folytonos függvények. E feltétel értelmében (2) -t  $a(x) \neq 0$  -val végigosztva (1) -gyel megegyező alakban áll elő a másodrendű lineáris differenciálegyenlet, a folytonossági kikötések értelmében pedig a fenti tételből következik  $(a, b)$  -ben (2) megoldásának létezése és egyértelmősége.

A (2) differenciálegyenlet megoldása szoros kapcsolatban áll a (2) -nek megfelelő

$$(3) \quad a(x) Y'' + b(x) Y' + c(x) Y = 0$$

homogén differenciálegyenlet megoldásával. Ui. a következő állítást mondhatjuk ki:

I. Ha  $y_1$  a (2) egyenletnek egy megoldása,  $Y$  pedig befutja a (3) alatti egyenlet valamennyi megoldását, akkor

$$y = y_1 + Y$$

befutja a (2) egyenlet valamennyi megoldását.

Közvetlen behelyettesítéssel ui. rögtön igazolható, hogy az  $y = y_1 + Y$  alakú függvények (2) -nek megoldásai, és viszont, ha  $y$  és  $y_1$  (2) -nek megoldásai, akkor  $Y = y - y_1$  megoldása (3) -nak.

Az alábbiakban először a (3) egyenlet megoldásainak meghatározásával fogunk foglalkozni. Ezekre a következő állítás mondható ki:

II. Ha  $Y_1$  és  $Y_2$  megoldásai (3) -nak, és  $c_1$  és  $c_2$  állandók, akkor

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

is megoldása (3) -nak.

Behelyettesítéssel ez az állítás is azonnal igazolható. Az állítás bizonyos értelemben meg is fordítható. Mielőtt azonban ezt a megfordítást ki-mondanánk, néhány további megjegyzést kell tennünk.

Ha  $Y_1$  és  $Y_2$  a (3) differenciálegyenlet megoldásai, és vala-mely  $a < x_0 < b$  helyen

$$Y_1(x_0) = Y_2(x_0); \quad Y'_1(x_0) = Y'_2(x_0),$$

akkor  $(a, b)$  -ben mindenütt

$$Y_1(x) = Y_2(x).$$

Mivel  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$   $(a, b)$  -beli feltételezett folytonossága és az  $a(x) \neq 0$  feltétel miatt az (3) differenciálegyenletre az egzisztencia- és unicitási tétel érvényes, (3) -nak csak egy, az

$$Y(x_0) = a, \quad Y'(x_0) = b$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldása létezik, az  $Y_1(x)$  és  $Y_2(x)$  megoldások tehát valóban csak megegyezők lehetnek. (Az állítást közvetlenül, az egzisztencia- és unicitási tételre való hivatkozás nélkül is be lehet bizonyítani.)

III. Másképp megfogalmazva az állításból következik az  $Y=Y_1-Y_2$  függvénye, hogy ha a (3) egyenlet egy  $Y(x)$  megoldására  $Y(x_0) = Y'(x_0) = 0$  ( $a < x_0 < b$ ), akkor  $Y(x) = 0$   $(a, b)$  -ben.

Ezekután egy, a továbbiakban igen gyakran szereplő fogalmat vezetünk be:

### Definíció

Az  $Y_1$  és  $Y_2$  függvényeket egymástól lineárisan függetlennek nevezzük valamely  $(a, b)$  intervallumban, ha egyik sem állandószorosa a másiknak.

E fogalom segítségével megadhatjuk mármost a fejezet elején közölt II. állítás megfordítását.

IV. Ha  $Y_1$  és  $Y_2$  a (3) differenciálegyenletnek egymástól lineárisan független megoldásai, akkor (3) -nak minden megoldása  $c_1 Y_1 + c_2 Y_2$  alakban írható, ahol  $c_1$  és  $c_2$  alkalmas állandók.

Legyen ui.  $x_0$  tetszőleges hely  $(a, b)$  -ben,  $Y$  pedig (3) -nak valamely megoldása. A  $c_1$  és  $c_2$  állandók meghatározhatók úgy, hogy

$$\begin{aligned} c_1 Y_1(x_0) + c_2 Y_2(x_0) &= Y(x_0), \\ (4) \quad c_1 Y_1'(x_0) + c_2 Y_2'(x_0) &= Y'(x_0) \end{aligned}$$

legyen. (4) ugyanis a  $c_1$  és  $c_2$  állandók kiszámítására elsőfoku egyenletrendszer, és ha ennek determinánsa zérus volna, akkor a

$$\begin{aligned} d_1 Y_1(x_0) + d_2 Y_2(x_0) &= 0, \\ d_1 Y_1'(x_0) + d_2 Y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

homogén egyenletrendszernek volna nemtriviális  $(d_1, d_2)$  megoldása. Ez azonban lehetetlen, mert ez azt jelentené, hogy a  $d_1 Y_1(x) + d_2 Y_2(x)$  függvény a (3) differenciálegyenletnek olyan megoldása, amely deriváltjával együtt eltűnik az  $x_0$  helyen, vagyis a III. állítás értelmében  $(a, b)$  -ben mindenütt:

$$d_1 Y_1(x) + d_2 Y_2(x) = 0,$$

s ebből pl.  $d_1 \neq 0$  esetén

$$Y_1(x) = - \frac{d_2}{d_1} Y_2(x)$$



adódna, vagyis a feltétellel ellentétben  $Y_1(x)$  és  $Y_2(x)$  nem volna egymástól  $(a, b)$  -ben lineárisan független. Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

a  $c_1$  és  $c_2$  állandók (4) egyenletrendszerből kiszámított értéke mellett a (3) differenciálegyenlet adott kezdeti feltételt kielégítő megoldása, ugyanezen kezdeti feltételeket kielégítő más megoldása a differenciálegyenletnek pedig az unicitási tétel miatt nem lehet.

A IV. állítás bizonyítása során még a következő eredményre is jutottunk.

Ha  $Y_1$  és  $-Y_2$  a (3) differenciálegyenletnek egymástól lineárisan független megoldásai, akkor a

$$W = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix}$$

un. Wronski-féle determináns  $(a, b)$  -ben sehol sem tűnik el.

Megfordítva, könnyen látható, hogy ha  $Y_1 = cY_2$ , akkor a fenti Wronski-féle determináns azonosan 0.

Az eddigiek értelmében a (2) másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása két lépésben végezhető el: először megkeressük a megfelelő (3) homogén differenciálegyenletnek két egymástól lineárisan független  $Y_1$  és  $Y_2$  megoldását, azután pedig az eredeti (inhomogén) egyenletnek egy  $y_1$  megoldását. Ezek ismeretében (2) valamennyi megoldása az

$$y = y_1 + c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

alakban írható.

A továbbiakban e megoldások megkeresésének módszerével fogunk foglalkozni.

A (3) differenciálegyenlet  $Y_1$  és  $Y_2$  lineárisan független megoldásainak ismeretében a (2) differenciálegyenlet  $y_1$  megoldását a következő módszerrel határozhatjuk meg.

Keressük az  $y_1$  függvényt

$$y_1 = c_1(x)Y_1(x) + c_2(x)Y_2(x)$$

alakban, ahol  $c_1(x)$  és  $c_2(x)$   $x$ -nek egyelőre ismeretlen függvényei. Ekkor

$$y_1' = c_1'Y_1 + c_2'Y_2 + c_1Y_1' + c_2Y_2'.$$

Ha a  $c_1(x)$  és  $c_2(x)$  függvényeket azon megszorításnak vetjük alá, hogy

$$(5) \quad c_1'Y_1 + c_2'Y_2 = 0$$

legyen, akkor tehát

$$y_1' = c_1Y_1' + c_2Y_2',$$

és így

$$y_1'' = c_1'Y_1' + c_2'Y_2' + c_1Y_1'' + c_2Y_2''.$$

$y_1'$  és  $y_1''$  ezen értékeit behelyettesítve a (2) differenciálegyenletbe adódik:

$$\begin{aligned} & c_1(a(x)Y_1'' + b(x)Y_1' + c(x)Y_1) + c_2(a(x)Y_2'' + b(x)Y_2' + c(x)Y_2) + \\ & + a(x)(c_1'Y_1' + c_2'Y_2') = f(x), \end{aligned}$$

ill. mivel az első két tagban  $c_1$ , ill.  $c_2$  együtthatója zérus ( $Y_1$  és  $Y_2$  megoldásai a (3) egyenletnek)  $a(x) \neq 0$ -val átosztva:

$$(6) \quad c_1'Y_1' + c_2'Y_2' = \frac{f(x)}{a(x)}$$

A  $c_1(x)$  és  $c_2(x)$  függvényekre tehát az (5) és (6) egyenletekből álló

$$(7) \quad c_1'Y_1' + c_2'Y_2' = 0$$

$$c_1'Y_1' + c_2'Y_2' = \frac{f(x)}{a(x)}$$

differenciálegyenletrendszer adódott. (7) azonban nem más, mint a  $c_1'$  és  $c_2'$  ismeretlenekre nézve olyan elsőfokú egyenletrendszer, melynek determinánsa

$$W = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

hiszen  $Y_1$  és  $Y_2$  lineárisan független. (7) -ből tehát  $c_1'$  és  $c_2'$  egyértelműen meghatározhatók, ezen függvényekből pedig integrálással a  $c_1(x)$  és  $c_2(x)$  függvényekre juthatunk. Ezen függvényekkel felírva

$$y_1 = c_1(x)Y_1 + c_2(x)Y_2$$

a (2) egyenletnek egy megoldását szolgáltatja. Az itt ismertetett eljárás neve: az állandók variálása.

Hasonló gondolatmenettel határozhatjuk meg a (3) egyenlet egy (a, b) -ben sehol el nem tűnő  $Y_1$  megoldásának ismeretében a (3) homogén differenciálegyenletnek egy másik,  $Y_1$  -től lineárisan független  $Y_2$  megoldását. Ezt a megoldást

$$(8) \quad Y_2 = u(x)Y_1(x)$$

alakban keressük, ahol  $u(x)$  az  $x$  változónak ismeretlen függvénye. (8) -ból ugyanis

$$Y_2' = u'(x)Y_1(x) + u(x)Y_1'(x),$$

$$Y_2'' = u''(x)Y_1(x) + 2u'(x)Y_1'(x) + u(x)Y_1''(x),$$

és  $Y_2$ ,  $Y_2'$ ,  $Y_2''$  ezen értékeit (3) -ba behelyettesítve az  $u(x)$  függvényre a következő differenciálegyenlet adódik:

$$\begin{aligned} u(x)(a(x)Y_1'' + b(x)Y_1' + c(x)Y_1) + u'(x)(2a(x)Y_1' + b(x)Y_1) + \\ + u''(x)a(x)Y_1 = 0. \end{aligned}$$

E differenciálegyenletben  $u(x)$  együtthatója zérus ( $Y_1(x)$  megoldása a (3) egyenletnek), vagyis  $u(x)$ -re az

$$a(x) u''(x) + (2a(x)Y_1' + b(x)Y_1) u'(x) = 0$$

hiányos másodrendű differenciálegyenlet adódik. E differenciálegyenletet, mint  $p = u'(x)$ -re elsőrendű lineáris differenciálegyenletet megoldva, a  $p(x)$  megoldásból  $u(x)$  közvetlen integrálással adódik.

Összefoglalva tehát a (2) differenciálegyenlet megoldását többnyire a következőképpen határozhatjuk meg.

1<sup>o</sup> Felírjuk az inhomogén lineáris differenciálegyenletnek megfelelő (3) homogén differenciálegyenletet és ennek kitaláljuk egy  $Y_1(x)$  a vizsgált tartományban sehol el nem tűnő megoldását ( $Y_1$  meghatározására általános módszer nincsen).

2<sup>o</sup> A (3) homogén differenciálegyenlet ezen  $Y_1$  megoldástól lineárisan független másik megoldását

$$Y_2 = u(x)Y_1$$

alakban keressük. Eközben  $u(x)$ -re nézve hiányos  $F(u'', u', x) = 0$  differenciálegyenletre jutunk.

3<sup>o</sup> A (3) homogén differenciálegyenlet általános megoldását az egymástól lineárisan független  $Y_1$  és  $Y_2$  megoldások segítségével

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

alakban felírjuk.

4<sup>o</sup> A (2) inhomogén differenciálegyenlet egy megoldását az állandók variálásának módszerével

$$y_1 = c_1(x)Y_1(x) + c_2(x)Y_2(x)$$

alakban keressük. Ekkor  $c_1'$  és  $c_2'$ -re a következő elsőfokú egyenletrendszer adódik:

$$c_1' Y_1 + c_2' Y_2 = 0$$

$$c_1' Y_1' + c_2' Y_2' = \frac{f(x)}{a(x)}.$$

Innen  $c_1'$  és  $c_2'$ -t kiszámítva, ezekből integrálással  $c_1$  és  $c_2$  keresett értékére jutunk.

5° A (2) differenciálegyenlet általános megoldását felírjuk

$$\begin{aligned} y &= y_1 + Y = \\ &= y_1 + c_1 Y_1 + c_2 Y_2 \end{aligned}$$

alakban.

6° Ha a (2) differenciálegyenletnek valamely kezdeti feltételnek elegettevő partikuláris megoldását kell meghatározni, akkor az 5°-ben felírt általános megoldásban kell még a  $c_1$  és  $c_2$  állandókat alkalmazni megválasztani.

Megjegyezzük még, hogy mind a 2° lépésnél, mind a 4°-nél mivel csupán egy-egy, a kívánalmaknak megfelelő  $u(x)$ ,  $c_1(x)$ ,  $c_2(x)$

függvény meghatározása a célunk, az adódó differenciálegyenletek integrálása során az integrációs állandókat mindig zérusnak vehetjük.

Példaként oldjuk meg az

$$(9) \quad xy'' - (1+x)y' + y = x^2$$

differenciálegyenletet. Szorítkozzunk az  $x > 0$  értékekre. Ekkor  $y''$  együtthatója nem tűnik el, mivel pedig  $x$ ,  $-(1+x)$ ,  $1$ ,  $x^2$   $(0, +\infty)$ -ben folytonos függvények, a differenciálegyenletnek mindig van  $x > 0$  esetén egyértelmű megoldása

A (9) -nek megfelelő homogén differenciálegyenlet:

$$(10) \quad xY'' - (1+x)Y' + Y = 0.$$

Ennek a differenciálegyenletnek  $x > 0$  esetén el nem tűnő megoldása:

$$Y_1 = 1 + x.$$

Keressük (10) -nek egy, ettől lineárisan független megoldását



$$= -\frac{1}{x+1} x e^x + \int \frac{x+1}{x+1} e^x dx =$$

$$= -\frac{1}{x+1} x e^x + e^x.$$

A (10) differenciálegyenlet keresett megoldása tehát

$$Y_1 = u(x)(x+1) = -x e^x + x e^x + e^x = e^x.$$

A (10) egyenlet minden megoldása tehát

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 =$$

$$= c_1(x+1) + c_2 e^x$$

alakjában írható fel.

A (9) egyenlet egy megoldását mármost

$$y_1 = c_1(x)(1+x) + c_2(x)e^x$$

alakban keresve  $c_1'$  és  $c_2'$ -re a következő egyenletrendszer adódik (lásd (7))

$$c_1'(x+1) + c_2' e^x = 0,$$

$$c_1' + c_2' e^x = \frac{x^2}{x} = x.$$

Innen

$$c_1' = -1, \quad c_2' = \frac{(x+1)}{e^x},$$

vagyis

$$c_1 = -x, \quad c_2 = \int (x+1)e^{-x} dx = \dots = -(x+2)e^{-x},$$

vagyis

$$y_1 = -x(1+x) - (x+2) = -x^2 - 2x - 2,$$

és így a (9) differenciálegyenlet megoldása:

$$y = -x^2 - 2x - 2 + c_1(x+1) + c_2 e^x.$$

Az  $y(1) = 2$ ,  $y'(1) = 0$  kezdeti feltételnek elegettevő megoldás esetén, mivel

$$y' = -2x - 2 + c_1 + c_2 e^x,$$

a  $c_1$  és  $c_2$  állandókra a következő egyenletrendszer adódik:

$$2c_1 + ec_2 = 7,$$

$$c_1 + ec_2 = 4.$$

Innen

$$c_1 = 3, \quad c_2 = \frac{1}{e},$$

vagyis az adott kezdeti feltételnek elegettevő megoldás:

$$y = -x^2 - 2x - 2 + 3(x+1) + e^{x-1}.$$

### 32. Másodrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek

Az

$$(1) \quad ay'' + by' + cy = f(x)$$

alakú differenciálegyenleteket, ahol  $a \neq 0$ ,  $b$ ,  $c$  állandók,  $f(x)$  pedig valamely  $(\alpha, \beta)$  intervallumban folytonos függvény, másodrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenleteknek nevezzük. ((1) a 31. fejezet (2) differenciálegyenletének az a speciális esete, amikor az  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  függvények állandók.)

Az alábbiakban először azt az esetet vizsgáljuk, amikor  $a$ ,  $b$ ,  $c$  valós számok, s így az (1) differenciálegyenletnek is valós megoldásait keressük.

Az (1) inhomogén differenciálegyenletnek megfelelő

$$(2) \quad aY'' + bY' + cY = 0$$

homogén differenciálegyenlet megoldásai egyszerű eljárással határozhatók meg. Keressük ui. (2) megoldásait

$$y = e^{\lambda x}$$

alakban. Ekkor



$$Y' = \lambda e^{\lambda x},$$

$$Y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

vagyis ezen függvényeket (2) -be behelyettesítve

$$a \lambda^2 e^{\lambda x} + b \lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0,$$

ill. az  $e^{\lambda x} \neq 0$  tényezővel osztva

$$(3) \quad a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

adódik. Ennek értelmében  $Y = e^{\lambda x}$  akkor megoldása a (2) homogén differenciálegyenletnek, ha  $\lambda$  kielégíti a (3) másodfoku egyenletet. A (3) egyenletet a (2) differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenletnek nevezik.

A (3) karakterisztikus egyenlet megoldása során három eset állhat elő:

1<sup>o</sup> Ha  $b^2 - 4ac > 0$ , akkor a (3) egyenletnek két különböző valós  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  gyöke van. Ekkor tehát a (2) differenciálegyenletnek

$$Y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad \text{és} \quad Y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

két lineárisan független valós megoldása, vagyis (2) általános megoldása:

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2<sup>o</sup> Ha  $b^2 - 4ac = 0$ , akkor a (3) egyenletnek  $\lambda = -\frac{b}{2a}$  kétszeres gyöke, vagyis a (2) differenciálegyenletnek egy megoldása

$$Y_1 = e^{-\frac{b}{2a} x}.$$

A (2) differenciálegyenletnek egy másik,  $Y_1$  -től lineárisan független megoldását (a 31. fejezetben ismertetett módon)

$$Y_2 = u(x) Y_1 = u(x) e^{-\frac{b}{2a} x}$$

alakban keressük. Mivel ekkor

$$Y_2' = u'(x)e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}u(x)e^{-\frac{b}{2a}x},$$

$$Y_2'' = u''(x)e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{a}u'(x)e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}x}u(x),$$

(2) -be behelyettesítve és azonnal egyszerűsítve  $e^{-\frac{b}{2a}x} \neq 0$  -val adódik:

$$au''(x) + (-b+bu)'(x) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)u(x) = 0.$$

Itt  $u(x)$  együtthatója zérus, hiszen a feltétel értelmében  $b^2 - 4ac = 0$ , és közös nevezőre hozás után  $u(x)$  együtthatójának számlálójában éppen  $-b^2 + 4ac$  áll. Az  $u(x)$  függvényre tehát, mivel  $a \neq 0$ , az

$$u'(x) = 0$$

differenciálegyenlet adódott. Innen integrálással

$$u'(x) = d_1,$$

$$u(x) = d_1x + d_2,$$

vagyis speciálisan a  $d_1 = 1, d_2 = 0$  választással a (2) differenciálegyenletnek egy, a karakterisztikus egyenlet megoldása segítségével felírt  $Y_1$  megoldásától lineárisan független megoldása:

$$\begin{aligned} Y_2 &= u(x) Y_1 = \\ &= x e^{-\frac{b}{2a}x}. \end{aligned}$$

Ennek értelmében  $b^2 - 4ac = 0$  esetén (2) általános megoldása

$$Y = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}$$

alakban írható fel.

3<sup>o</sup> Ha  $b^2 - 4ac < 0$ , akkor a (3) karakterisztikus egyenletnek konjugált komplex gyökei vannak. Jelöljük ezeket a rövidség kedvéért a következőképpen:

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm j\nu \quad \left( \mu = -\frac{b}{2a}, \quad \nu = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \right)$$

Világos, hogy az

$$e^{(\mu+j\nu)x} \quad \text{és} \quad e^{(\mu-j\nu)x}$$

függvények a (2) egyenletnek megoldásai, ezek azonban komplex értékűek. Valós megoldásokat ezek segítségével a következőképpen állíthatunk elő. Mivel a 31. fejezet II. állítása értelmében a homogén differenciálegyenletek megoldásainak lineáris kombinációja is megoldása a differenciálegyenletnek

$$\frac{1}{2} (e^{(\mu+j\nu)x} + e^{(\mu-j\nu)x}) = e^{\mu x} \frac{e^{j\nu x} + e^{-j\nu x}}{2} = e^{\mu x} \cos \nu x,$$

és

$$\frac{1}{2j} (e^{(\mu+j\nu)x} - e^{(\mu-j\nu)x}) = e^{\mu x} \frac{e^{j\nu x} - e^{-j\nu x}}{2j} = e^{\mu x} \sin \nu x$$

megoldásai a (2) differenciálegyenletnek. Ezen valós értékű megoldások egymástól nyilvánvalóan lineárisan függetlenek, vagyis  $b^2 - 4ac < 0$  esetén a (2) differenciálegyenlet általános megoldása

$$\begin{aligned} Y &= c_1 e^{\mu x} \cos \nu x + c_2 e^{\mu x} \sin \nu x = \\ &= e^{\mu x} (c_1 \cos \nu x + c_2 \sin \nu x) \end{aligned}$$

alakban írható fel, ahol

$$\mu = -\frac{b}{2a}, \quad \nu = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy ha (2) -ben  $a \neq 0$ ,  $b$ ,  $c$  komplex számok is lehetnek, akkor

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \text{esetén} \quad Y = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{2a}x},$$

minden más esetben pedig a (3) karakterisztikus egyenlet gyökeit (ezek általában komplex számok lesznek)  $\beta_1$  és  $\beta_2$  -vel jelölve

$$Y = c_1 e^{\beta_1 x} + c_2 e^{\beta_2 x}$$

alakban írható fel az  $aY'' + bY' + cY = 0$  differenciálegyenlet (komplex, esetleg valós értékű) megoldása.

Állandó (valós) együtthatós lineáris másodrendű differenciálegyenleteknél sok esetben az inhomogén (1) differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresését is le lehet egyszerűsíteni. Az állandók variálásának - az előbbi fejezetben ismertetett - módszere helyett ugyanis, ha az (1) egyenlet inhomogenitását okozó  $f(x)$  függvény ilyen alakú:

$$(4) \quad f(x) = p(x)e^{ax} \cos bx + q(x)e^{ax} \sin bx,$$

ahol  $p(x)$  és  $q(x)$  legfeljebb  $n$  -edfoku polinomok, de közülük az egyik legalább pontosan  $n$  -edfoku, (1) -nek egy megoldását

$$(5) \quad y_1 = P(x)e^{ax} \cos bx + Q(x)e^{ax} \sin bx$$

alakban kereshetjük. Itt  $P(x)$  és  $Q(x)$   $n$  -edfoku polinomok, melyeknek határozatlan együtthatóit az (1) differenciálegyenletbe való visszahelyettesítés után az együtthatóösszehasonlítás módszerével határozhatjuk meg. Az alábbiakban néhány példát mutatunk arra, hogy különböző alakú  $f(x)$  függvények mellett milyen alakban kereshető az (1) differenciálegyenlet  $y_1$  megoldása:

| $f(x)$              | $y_1$                   |
|---------------------|-------------------------|
| $3 e^{2x}$          | $A e^{2x}$              |
| $2x^2 - x - 3$      | $Ax^2 + Bx + C$         |
| $-x^3$              | $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$  |
| $\cos 3x$           | $A \cos 3x + B \sin 3x$ |
| $\cos 3x - \sin 3x$ | $A \cos 3x + B \sin 3x$ |
| $x^2 e^{-x}$        | $(Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$ |

| $f(x)$               | $y_1$                               |
|----------------------|-------------------------------------|
| $e^{-x} \sin 2x$     | $e^{-x}(A \sin 2x + B \cos 2x)$     |
| $x \cos x$           | $(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x$ |
| $x + 2e^x - e^{-2x}$ | $Ax + B + Ce^x + De^{-2x}$          |
| $e^{-x} + \sin 2x$   | $Ae^{-x} + B \sin 2x + C \cos 2x.$  |

Az itt vázolt módszer nem vezet eredményre, ha az (5) kísérletező függvény az (1) differenciálegyenletnek megfelelő (2) homogén differenciálegyenlet megoldásának állandószoorsa. Ilyenkor az (5) -nek megfelelően felírt függvény  $x$  -szeresével, ha ez is megoldja a (2) egyenletet,

akkor  $x^2$  -szeresével kell kísérleteznünk. Ilyenkor rezonanciáról beszélünk, mivel ez a jelenség elhanyagolható ohmikus ellenállású sorbakapcsolt önindukciót és kapacitást tartalmazó áramkörben akkor áll elő, ha a rendszer sarkaira kapcsolt feszültség frekvenciája a rendszer belső rezgésének (a megfelelő homogén differenciálegyenlet megoldásának) frekvenciájával egyenlő.

Természetesen, ha az (5) alaku függvények nem megoldásai az (1) differenciálegyenletnek, mindig kereshetjük (1) -nek egy  $y_1$  megoldását a homogén egyenlet általános megoldásából az állandók variálásának módszerével (lásd 31. fejezet).

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

$$a) \quad 4y'' - 3y' - y = e^{-2t}.$$

A megfelelő homogén egyenlet:

$$4Y'' - 3Y' - Y = 0,$$

az ehhez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$4\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0.$$

Ennek megoldása:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{8} = \begin{cases} 1, \\ -\frac{1}{4}, \end{cases}$$

tehát a homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y = c_1 e^t + c_2 e^{-0,25t}.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását (5) értelmében a következő alakban kereshetjük:

$$y_1 = A e^{-2t}.$$

Ekkor

$$y_1' = -2A e^{-2t},$$

$$y_1'' = 4A e^{-2t},$$

vagyis az inhomogén differenciálegyenletbe behelyettesítve:

$$16A e^{-2t} + 6A e^{-2t} - A e^{-2t} = e^{-2t}.$$

Innen

$$21 A = 1,$$

$$A = \frac{1}{21}.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$Y = \frac{1}{21} e^{-2t} + c_1 e^t + c_2 e^{-0,25t}.$$

$$b) \quad y'' + 6y' + 9y = \sin 2x.$$

A megfelelő homogén differenciálegyenlet:

$$Y'' + 6Y' + 9Y = 0,$$

az ehhez tartozó karakterisztikus egyenlet pedig:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0.$$

Ennek megoldása:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = -3.$$

A 2<sup>o</sup> -ben elmondottak értelmében a homogén differenciálegyenlet általános megoldását tehát a következő alakban írhatjuk fel:

$$Y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_1 = A \sin 2x + B \cos 2x$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_1' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x,$$

$$y_1'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x.$$

$y_1$ ,  $y_1'$  és  $y_1''$  értékét behelyettesítve az inhomogén differenciálegyenletbe és  $\sin 2x$ , ill.  $\cos 2x$  szerint rendezve nyerjük:

$$\sin 2x (5A - 12B) + \cos 2x (12A + 5B) = \sin 2x.$$

Az együtthatókat összehasonlítva  $A$ , ill.  $B$ -re a következő kétismeretlenes egyenletrendszer adódik:

$$5A - 12B = 1,$$

$$12A + 5B = 0.$$

Innen

$$A = \frac{5}{169}, \quad B = -\frac{12}{169}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$y = \frac{5}{169} \sin 2x - \frac{12}{169} \cos 2x + (c_1 + c_2 x) e^{-3x}.$$

$$c) \quad y'' + 4y' + 5y = x^2 - 3.$$

A megfelelő homogén differenciálegyenlet:

$$Y'' + 4Y' + 5Y = 0,$$

az ehhez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Ennek megoldása:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = -2 \pm j,$$

és így a homogén differenciálegyenlet általános megoldása (a  $3^0$ -ban elmondottak értelmében)

$$Y = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását keressük

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C$$

alakban.

$$y_1' = 2Ax + B,$$

$$y_1'' = 2A,$$

vagyis az inhomogén differenciálegyenletbe  $y_1, y_1'$  és  $y_1''$  fenti értékeit behelyettesítve és mindjárt  $x$  hatványai szerint rendezve adódik:

$$x^2 5A + x(5B + 8A) + 5C + 4B + 2A = x^2 - 3.$$

Együtthatóösszehasonlítással a következő egyenletrendszert nyerjük:

$$5A = 1,$$

$$8A + 5B = 0,$$

$$2A + 4B + 5C = -3,$$

vagyis

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{8}{25}, \quad C = -\frac{53}{125}.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{8}{25}x - \frac{53}{125} + c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x.$$



$$d) \quad y'' + 5y' + 6y = 2e^{-2x}.$$

A megfelelő homogén differenciálegyenlet:

$$Y'' + 5Y' + 6Y = 0,$$

az ehhez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0.$$

Ennek megoldása

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \begin{cases} -2, \\ -3, \end{cases}$$

tehát a homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

Az előbbiek mintájára az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását

$$(*) \quad y_1 = Ae^{-2x}$$

alakban kellene (5) értelmében keresnünk. Mivel azonban  $e^{-2x}$  (és annak állandósorozói is) a homogén differenciálegyenletet elégítik ki, nem lehet az inhomogén differenciálegyenletnek  $(*)$  alakú megoldása. Az ún. rezonancia esete áll tehát fenn, az inhomogén differenciálegyenlet megoldását az

$$y_0 = xAe^{-2x}$$

alakban kell keresnünk. Ekkor

$$y_0' = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x},$$

$$y_0'' = -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x},$$

és  $y_0$ ,  $y_0'$ ,  $y_0''$  értékeit az inhomogén differenciálegyenletbe behelyettesítve adódik:

$$(-4A + 5A) e^{-2x} + \underbrace{(4A - 10A + 6A)}_{=0} x e^{-2x} = 2e^{-2x},$$

tehát

$$A = 2.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + Y = \\ &= 2xe^{-2x} + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}. \end{aligned}$$

$$e) \quad y'' + a^2 y = \sin ax. \quad (a \neq 0)$$

A megfelelő homogén differenciálegyenlet

$$Y'' + a^2 Y = 0,$$

és ennek megfelelő karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + a^2 = 0,$$

ennek megoldása:

$$\lambda_{1,2} = \pm aj,$$

vagyis a homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax.$$

(Teljesen hasonlóképpen adódik, hogy az  $X'' - a^2 X = 0$  egyenlet általános megoldása  $X = d_1 e^{ax} + d_2 e^{-ax}$ , míg az  $X'' = 0$  egyenlet általános megoldása közvetlen integrálással is adódóan  $X = d_1 x + d_2$ ).

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását (5) értelmében

$$(\text{xx}) \quad y_1 = A \sin ax + B \cos ax$$

alakjában kellene keresnünk. Mivel azonban a (xx) alaku függvények a megfelelő homogén differenciálegyenletet elégítik ki (s így az inhomogén differenciálegyenletnek nem tehetnek eleget) ismét rezonancia áll fenn, az inhomogén differenciálegyenlet egy megoldását

$$y_0 = A x \sin ax + B x \cos ax$$

alakban kell keresnünk. Innen - mindjárt alkalmasan rendezve -

$$y'_0 = (-Bax + A)\sin ax + (Aax + B)\cos ax,$$

$$y''_0 = (-Aa^2x - 2Ba)\sin ax + (-Ba^2 + 2Aa)\cos ax,$$

azaz az inhomogén differenciálegyenletbe behelyettesítve

$$(-Aa^2x - 2Ba + Aa^2x)\sin ax + (-Ba^2 + 2Aa + Ba^2x)\cos ax = \sin ax,$$

tehát együtthatóösszehasonlítással adódik:

$$-2Ba = 1,$$

$$2Aa = 0.$$

Innen  $a \neq 0$  folytán

$$B = -\frac{1}{2a}, \quad A = 0,$$

tehát az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = y_0 + Y = -\frac{1}{2a} x \cos ax + c_1 \sin ax + c_2 \cos ax.$$

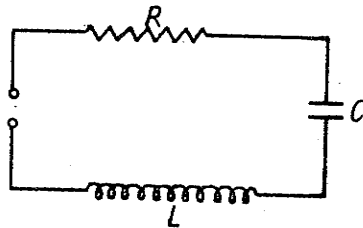
f) R ohmikus ellenállást, L önindukciót, C kapacitást tartalmazó rezgőkörben az áram  $i$  intenzitása a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dU}{dt},$$

ahol  $U$  a beiktatott áramforrás feszültsége (108. ábra).

Vizsgáljuk meg, hogyan változik  $i(t)$  először abban az esetben, amikor  $U = c$ , tehát  $\frac{dU}{dt} = 0$ . Problémánk megoldására a fenti inhomogén differenciálegyenlethez tartozó

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$



108. ábra

homogén differenciálegyenlet megoldása vezet. A megfelelő karakterisztikus egyenlet

$$L \lambda^2 + R \lambda + \frac{1}{C} = 0.$$

Innen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}.$$

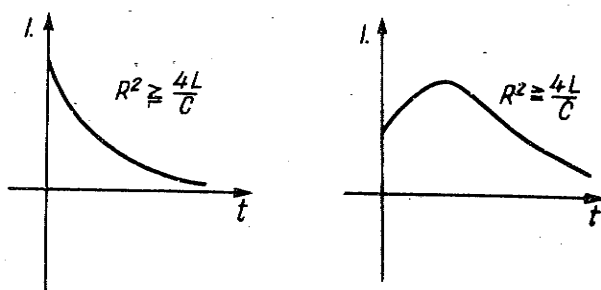
Ha az  $R$  ohmikus ellenállás nagy, pontosabban, ha

$$R^2 > 4 \frac{L}{C},$$

akkor a karakterisztikus egyenlet gyökei valósak és láthatóan negatívak, tehát az intenzitás

$$I = c_1 e^{-\alpha_1 t} + c_2 e^{-\alpha_2 t}$$

alaku, ahol  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$  valós számok. Könnyű belátni, hogy ekkor  $t$  növekedtével  $I$  egy szélsőérték elérése után monoton tart 0-hoz (109. ábra).



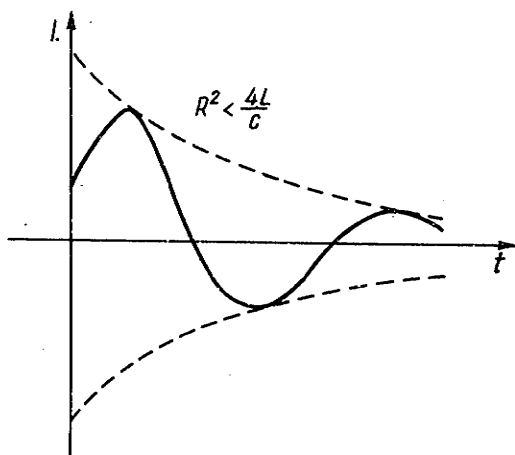
109. ábra

Lényegében hasonló a helyzet, ha

$$R^2 = 4 \frac{L}{C}.$$

Ha azonban

$$R^2 < 4 \frac{L}{C},$$



110. ábra

akkor a karakterisztikus egyenlet gyökei konjugált komplexek:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{j}{2L} \sqrt{4 \frac{L}{C} - R^2}.$$

A

$$k = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{4 \frac{L}{C} - R^2}$$

jelöléssel tehát az intenzitás

$$I = e^{-kt} (c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t).$$

Ekkor tehát  $I$  csillapított rezgéseket végez  $\omega_0$  körfrekvenciával. Az  $R = 0$  esetben (amely gyakorlatilag nem valósítható meg, csak megközelíthető)  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , tehát egy rezgés ideje

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Tekintsük most az előbb vizsgált rezgőkört  $U = E \sin \omega t$  feszültség mellett, amikor az áramintenzitás az

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = E \omega \cos \omega t$$

differentiálegyenletnek tesz eleget. A megfelelő homogén egyenlet megoldását már az előbb vizsgáltuk. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük

$$i_o = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

alakban. Deriválás, majd az inhomogén differenciálegyenletbe való behelyettesítés és alkalmas rendezés után adódik:

$$\cos \omega t (-AL\omega^2 + BR\omega + \frac{1}{C}A) + \sin \omega t (-BL\omega^2 - AR\omega + \frac{1}{C}B) = E\omega \cos \omega t.$$

Innen együtthatóösszehasonlítással a következő kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} A(\frac{1}{C} - L\omega^2) + BR\omega &= E\omega, \\ -AR\omega + B(\frac{1}{C} - L\omega^2) &= 0. \end{aligned}$$

Megoldva  $A$ -ra és  $B$ -re az egyenletrendszert, nyerjük:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R^2 + (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2} E, \\ B &= \frac{R}{R^2 + (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2} E, \end{aligned}$$

tehát

$$i_o = \frac{E}{R^2 + (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2} \left[ (\frac{1}{C\omega} - L\omega) \cos \omega t + R \sin \omega t \right].$$

Ez a partikuláris megoldás egyszerűbb alakban is felírható. A sík  $(R, L\omega - \frac{1}{C\omega})$  koordinátájú pontjának polárszögét  $\varphi$ -vel jelölve ugyanis (111. ábra)

$$R = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2} \cos \varphi,$$

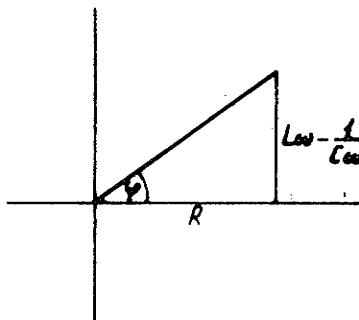
$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2} \sin\varphi,$$

és így

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}} (\sin\omega t \cos\varphi - \cos\omega t \sin\varphi) = \\ &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Ez tehát az  $U(t)$  feszültséggel megegyező frekvenciájú csillapítatlan rezgés. A rezgés fázisa  $U$  fázisához képest  $\varphi$ -vel van eltolva, ahol

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R},$$



míg a rezgés amplitúdója  $U$  amplitúdójából,  $E$ -ből a

$\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}$  tényezővel (lát-

111. ábra

szólagos ellenállás) való osztás útján kapható. Adott  $L$ ,  $R$ ,  $C$  mellett maximális az amplitúdó, ha

$$\frac{1}{C\omega} - L\omega = 0, \quad \text{tehát} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Példánkban az inhomogén egyenlet általános megoldását azért nem szükséges felírni, mert mint láttuk, a megfelelő homogén differenciálegyenlet általános megoldása nagy  $t$  esetén elhanyagolható.

### 33. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletrendszerek

Az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletrendszerek általános alakja:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n.
 \end{aligned}$$

Az

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \underline{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y'_n \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

jelölést bevezetve (1) még a következő mátrixegyenlet alakjában is felírható:

$$(2) \quad \underline{y}' = \underline{A} \underline{y}.$$

(Általában egy mátrix deriváltján (ha a mátrix elemei az  $x$  független változó függvényei) az elemenkénti deriválással nyert mátrixot értjük. Hasonlóan értelmezzük a mátrix integrálját is.)

Hasonlóképpen az

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & y'_1 - (a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n) = g_1(x), \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & y'_n - (a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n) = g_n(x)
 \end{aligned}$$

inhomogén lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletrendszer az

$$(4) \quad \underline{y}' - \underline{A} \underline{y} = \underline{g}(x)$$

mátrixegyenlettel is felírható, ahol



$$\underline{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}.$$

Mivel tehát az (1), ill. (3) differenciálegyenletrendszerek megoldása kvadratikus  $\underline{A}$  mátrixot tartalmazó mátrixegyenletek megoldására vezethető vissza, az alábbiakban először a mátrix-analízis néhány fogalmával kell megismerkednünk. Eközben természetesen a Matematika I/1. jegyzet 12.-17. fejezetében közölt alapfogalmakra - anélkül, hogy erre külön hivatkoznánk - fogunk támaszkodni.

### I. Skalár együtthatós mátrix-polinomok

A mátrix-szorzás asszociativitása folytán kvadratikus  $\underline{A}$  mátrix esetén az  $\underline{A}^n$  és  $\underline{A}^m$  mátrixok felcserélhetők, speciálisan  $n$ , ill.  $m = 0$  esetén is, ha a  $0$ -adik hatványt így értelmezzük:

$$\underline{A}^0 = \underline{E},$$

ahol  $\underline{E}$  jelenti az  $\underline{A}$  mátrixével megegyező rendű egységmátrixot.

Ebből következik, hogy az  $\underline{A}$  mátrixból a  $c_0, c_1, \dots, c_n$  skalár-együtthatókkal képezett

$$c_0 \underline{E} + c_1 \underline{A} + c_2 \underline{A}^2 + \dots + c_n \underline{A}^n = p(\underline{A})$$

un. mátrix-polinommal racionális egész műveletek ugyanugy végezhetők, mint a

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n = p(x)$$

skalár-polinommal. Igaz továbbá, hogy az egy változót tartalmazó skalár-identitások, melyekben csak racionális egész műveletek szerepelnek, érvényben maradnak, ha bennük a változót tetszőleges kvadratikus  $\underline{A}$  mátrix-szal, a változó zérusadik hatványát pedig  $\underline{E}$ -vel helyettesítjük. Pl.

$$p(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1),$$

tehát tetszőleges kvadratikus  $\underline{\underline{A}}$  mátrixra is áll:

$$p(\underline{\underline{A}}) = 3\underline{\underline{A}}^2 - 6\underline{\underline{A}} - 9\underline{\underline{E}} = 3(\underline{\underline{A}} - 3\underline{\underline{E}})(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{E}}).$$

Legyen pl.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$3\underline{\underline{A}}^2 - 6\underline{\underline{A}} - 9\underline{\underline{E}} = 3 \begin{pmatrix} 4-3 & -2-1 \\ 6+3 & -3+1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -3 \\ 9 & -21 \end{pmatrix},$$

$$3(\underline{\underline{A}} - 3\underline{\underline{E}})(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{E}}) = 3 \begin{pmatrix} 2-3 & -1 \\ 3 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+1 & -1 \\ 3 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -3 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}.$$

## II. Mátrix karakterisztikus- és minimál polinomja

A továbbiakban fontos szerepe lesz a következő definíciónak és tételnek:

### Definíció

Egy kvadratikus  $\underline{\underline{A}}$  mátrix karakterisztikus polinomjának nevezzük az

$$(5) \quad D(\lambda) \equiv \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$$

polinomot.

### Tétel

Bármely kvadratikus  $\underline{\underline{A}}$  mátrixot  $D(\lambda)$  karakterisztikus polinomjába behelyettesítve

$$(6) \quad D(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{0}}$$

adódik. (6) -ot az  $\underline{\underline{A}}$  mátrix karakterisztikus egyenletének nevezzük.

$D(\lambda)$  az (5) jobboldalán felírt un. karakterisztikus determináns kifejtésével  $\lambda$ -nak  $n$ -edfoku polinomjaként adódik. (6)-ban tehát  $D(\underline{A})$  az  $\underline{A}$  mátrixnak  $n$ -edfoku mátrix-polinomja, melyre (6) értelmében

$$D(\underline{A}) = c_0 \underline{E} + \sum_{i=1}^n c_i \underline{A}^i = \underline{0},$$

tehát valóban a kívánt mátrix-egyenletre jutottunk.

Pl.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

esetén

$$D(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 5,$$

s így

$$D(\underline{A}) = \underline{A}^2 - 2\underline{A} - 5\underline{E} = \underline{0}$$

a keresett karakterisztikus egyenlet. Közvetlen kiírással is könnyen meggyőződhetünk arról, hogy  $\underline{A}$  kielégíti ezt az egyenletet.

Azt az állítást, hogy bármely kvadratikus  $\underline{A}$  mátrix kielégíti a hozzá tartozó karakterisztikus egyenletet, a következőképpen igazolhatjuk:

Bármely kvadratikus  $\underline{B}$  mátrixra

$$\underline{B} \operatorname{adj} \underline{B} = (\operatorname{adj} \underline{B}) \underline{B} = \underline{E} \det \underline{B}.$$

Tegyük itt  $\underline{B}$  helyébe  $\underline{A} - \lambda \underline{E}$ -t, ahol  $\lambda$  tetszőleges szám. Ekkor a karakterisztikus polinom definíciója szerint

$$(*) \quad \underline{E} D(\lambda) \equiv \underline{E} \det (\underline{A} - \lambda \underline{E}) \equiv (\underline{A} - \lambda \underline{E}) \operatorname{adj} (\underline{A} - \lambda \underline{E}).$$

Az itt szereplő  $\operatorname{adj} (\underline{A} - \lambda \underline{E})$  mátrixot részletesen kiírva

$$\operatorname{adj} (\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \underline{C}_0 + \underline{C}_1 \lambda + \dots + \underline{C}_{n-1} \lambda^{n-1},$$

és ez a mátrix az előbbiek szerint felcserélhető  $\underline{A} - \lambda \underline{E}$ -vel, tehát  $\underline{A}$ -val is, hiszen  $\lambda \underline{E}$  bármely mátrix-szal felcserélhető. Eszerint

$$\underline{A}(\underline{C}_0 + \underline{C}_1 \lambda + \dots + \underline{C}_{n-1} \lambda^{n-1}) = (\underline{C}_0 + \underline{C}_1 \lambda + \dots + \underline{C}_{n-1} \lambda^{n-1})\underline{A}.$$

Itt  $\lambda = 0$  helyettesítéssel

$$\underline{A}\underline{C}_0 = \underline{C}_0\underline{A},$$

majd ezeket a tagokat a bal- és jobboldalról elhagyva és  $\lambda$ -val való osztás után újra  $\lambda = 0$ -t helyettesítve

$$\underline{A}\underline{C}_1 = \underline{C}_1\underline{A},$$

s folytatólag

$$\underline{A}\underline{C}_k = \underline{C}_k\underline{A} \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

adódik.

$\underline{A}$  (\*)-ból keletkező

$$\underline{E} D(\lambda) \equiv (\underline{A} - \lambda \underline{E}) (\underline{C}_0 + \underline{C}_1 \lambda + \dots + \underline{C}_{n-1} \lambda^{n-1})$$

azonosságban eszerint  $\lambda$  helyébe beírhatjuk az  $\underline{A}$  mátrixot; hiszen az összes szereplő mátrixok felcserélhetők egymással. Innen

$$D(\underline{A}) = \underline{E} D(\underline{A}) = (\underline{A} - \underline{A}\underline{E}) (\underline{C}_0 + \underline{C}_1\underline{A} + \dots + \underline{C}_{n-1}\underline{A}^{n-1}) = \underline{0}.$$

Előfordulhat, hogy a  $D(\lambda)$  karakterisztikus polinomnál alacsonyabb fokú polinomot is meg lehet adni, amelybe az  $\underline{A}$  mátrixot behelyettesítve, eredményül  $\underline{0}$  adódik.

### Definíció

Egy  $\underline{A}$  kvadratikus mátrix minimál-polinomja az a legalacsonyabb fokú  $\Delta(\lambda)$  polinom, amelyre  $\Delta(\underline{A}) = \underline{0}$ . Az utóbbi egyenletet az  $\underline{A}$  mátrix minimálegyenletének nevezik.

Az előbb vizsgált

$$\underline{\underline{E}} D(\lambda) \equiv (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \text{adj} (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})$$

azonosságból kiindulva a következőképpen kaphatunk kedvező esetben  $D(\lambda)$  -nál alacsonyabb fokú polinomot, amelybe behelyettesítve az  $\underline{\underline{A}}$  mátrixot  $\underline{\underline{0}}$  adódik. Tegyük fel, hogy az  $\text{adj}(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})$  mátrix minden eleme osztható  $\lambda$  -nak valamely legalább elsőfokú  $\Theta(\lambda)$  polinomjával. Ekkor a baloldali mátrix minden elemének is nyilván oszthatónak kell lenni  $P(\lambda)$  -val, úgyhogy

$$D(\lambda) = \Theta(\lambda) \Delta(\lambda).$$

Másrészt az

$$\text{adj} (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \Theta(\lambda) (\underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{B}}_1 \lambda + \dots + \underline{\underline{B}}_m \lambda^m), \quad (m < n-1)$$

jelölést bevezetve könnyen látható, hogy  $\underline{\underline{A}}$  felcserélhető a jobboldali második tényezővel és ebből az előbbi bizonyításban követett okoskodással adódik, hogy  $\underline{\underline{A}}$  felcserélhető a  $\underline{\underline{B}}_k$  mátrixok mindegyikével is. Innen

$$\underline{\underline{E}} \Theta(\lambda) \Delta(\lambda) \equiv (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \Theta(\lambda) (\underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{B}}_1 \lambda + \dots + \underline{\underline{B}}_m \lambda^m),$$

majd  $\Theta(\lambda)$  -val végigosztva

$$\underline{\underline{E}} \Delta(\lambda) \equiv (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) (\underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{B}}_1 \lambda + \dots + \underline{\underline{B}}_m \lambda^m),$$

s minthogy a szereplő mátrixok itt is mind felcserélhetők  $\underline{\underline{A}}$  -val, helyes azonosságot kapunk, ha  $\lambda$  helyébe az  $\underline{\underline{A}}$  mátrixot írjuk:

$$\Delta(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{E}} \Delta(\underline{\underline{A}}) = (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} \underline{\underline{E}}) (\underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{B}}_1 \underline{\underline{A}} + \dots + \underline{\underline{B}}_m \underline{\underline{A}}^m) = \underline{\underline{0}}.$$

Pl. az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomja

$$D(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

$\underline{\underline{A}}$  karakterisztikus egyenlete tehát  $((1-\lambda)^3 = 1-3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3)$

$$(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^3 = \underline{\underline{E}} - 3\underline{\underline{A}} + 3\underline{\underline{A}}^2 - \underline{\underline{A}}^3 = \underline{\underline{0}}.$$

Mivel

$$\text{adj}(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{pmatrix} (1-\lambda)^2 & 0 & -(1-\lambda) \\ 0 & (1-\lambda)^2 & -(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)^2 \end{pmatrix} = (1-\lambda) \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

az  $\underline{\underline{A}}$  -hoz tartozó minimál-polinom:

$$\Delta(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\Theta(\lambda)} = \frac{(1-\lambda)^3}{1-\lambda} = (1-\lambda)^2,$$

s így  $\underline{\underline{A}}$  minimál-egyenlete:

$$(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^2 = \underline{\underline{E}} - 2\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{0}}.$$

( $\Delta(\lambda)$  valóban minimál-polinom, mert  $c_1 \underline{\underline{A}} + c_0 \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$  csak

$\underline{\underline{A}} = -\frac{c_0}{c_1} \underline{\underline{E}}$  esetén állhat.)

### III. A mátrixfüggvény definíciója és analitikus előállítása

Ha  $f(z)$   $z$  -nek racionális függvénye, akkor egy kvadratikus  $\underline{\underline{A}}$  mátrix  $f(\underline{\underline{A}})$  függvényét formálisan úgy képezhetjük, hogy az  $f(z)$  függvényt szolgáltató képletben  $1$  helyébe az  $\underline{\underline{A}}$  -val megegyező rendű  $\underline{\underline{E}}$  egységmátrixot,  $z$  helyébe az  $\underline{\underline{A}}$  mátrixot helyettesítjük, és a függvényutasításban szereplő műveleteket az  $\underline{\underline{A}}$  mátrixon elvégezzük. Pl.

$$f(z) = \frac{3z - 1}{2 - z}$$

esetén

$$f(\underline{\underline{A}}) = \frac{3\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}}}{2\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}} = (3\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}})(2\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}.$$

Természetesen  $f(\underline{\underline{A}})$  csak olyan  $\underline{\underline{A}}$  mátrixra értelmezhető, amelyre a nevezőben szereplő mátrix (a fenti példában  $2\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}$ ) nem szinguláris.

Ha  $f(z)$   $z$ -nek nem racionális függvénye, akkor  $f(\underline{\underline{A}})$ -t úgy értelmezhetjük, hogy  $f(z)$ -t  $z$  hatványai szerint haladó konvergens hatványsorba fejtjük és ide helyettesítjük be  $z$  helyébe a kvadratikus  $\underline{\underline{A}}$ , 1 helyébe pedig az  $\underline{\underline{A}}$ -val megegyező rendű  $\underline{\underline{E}}$  egység mátrixot. Ezen előállítást nevezzük az  $f(\underline{\underline{A}})$  mátrixfüggvény analitikus előállításának.

Pl.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

miatt

$$e^{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!} \underline{\underline{A}}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \underline{\underline{A}}^n + \dots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots$$

miatt

$$\sin \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} - \frac{1}{3!} \underline{\underline{A}}^3 + \frac{1}{5!} \underline{\underline{A}}^5 - + \dots$$

Általánosságban akkor mondjuk, hogy a

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \underline{\underline{A}}^k \quad (\underline{\underline{A}}^0 = \underline{\underline{E}})$$

hatványsor konvergens, és összege az  $f(\underline{\underline{A}})$  mátrix-függvény, ha az

$$s_m(\underline{\underline{A}}) = \sum_{k=0}^m c_k \underline{\underline{A}}^k$$

mátrix minden eleme  $m \rightarrow \infty$  esetében véges határértékhez, az  $f(\underline{\underline{A}})$  mátrix megfelelő eleméhez konvergál.

Ha az  $\underline{A}$  mátrix karakterisztikus egyenletének gyökei az

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

hatványsor konvergenciakörének belsejébe esnek, akkor bizonyítható, hogy a megfelelő

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \underline{A}^k$$

mátrix-hatványsor konvergens. A tételt ilyen általánosságban itt nem bizonyítjuk be, megjegyezzük azonban, hogy a fenti feltételek mellett a

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \underline{A}^k$  mátrix-hatványsor  $\underline{A}$  minimálpolinomjánál ( $\Delta \underline{A}$ -nál)

alacsonyabb fokszámu mátrixpolinomra redukálható. Ezen megjegyzés a gyakorlat szempontjából igen hasznos és fontos.

E redukciót közvetlenül el tudjuk végezni pl.  $e^{\underline{A}}$  hatványsor előállításán, ha

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\underline{A}$  karakterisztikus egyenlete:

$$D(\lambda) \equiv \det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = 0,$$

tehát

$$D(\underline{A}) = \underline{A}^2 - \underline{A} = \underline{0},$$

vagyis

$$\underline{A}^2 = \underline{A},$$

ennek értelmében tehát

$$\begin{aligned} \underline{A}^3 &= \underline{A}^2 = \underline{A}, \\ &\vdots \\ \underline{A}^n &= \underline{A}^{n-1} \underline{A} = \dots = \underline{A}, \\ &\vdots \end{aligned}$$



$e^{\underline{A}}$  korábban már felírt hatványsor-előállítására tehát a következő alakra redukálható:

$$\begin{aligned} e^{\underline{A}} &= \underline{E} + \underline{A} + \frac{1}{2!} \underline{A}^2 + \frac{1}{3!} \underline{A}^3 + \dots + \frac{1}{n!} \underline{A}^n + \dots = \\ &= \underline{E} + \underline{A} + \frac{1}{2!} \underline{A} + \frac{1}{3!} \underline{A} + \dots + \frac{1}{n!} \underline{A} + \dots = \\ &= \underline{E} + \underline{A} \left( 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \right) = \\ &= \underline{E} + \underline{A}(e - 1). \end{aligned}$$

Az alábbiakban egy általános módszert mutatunk a redukcióra abban az esetben, ha a mátrix minimál-polinomjának minden gyöke egyszeres és az

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{hatványsor konvergenciakörének belsejébe esik.}$$

Legyen tehát  $\underline{A}$   $n$ -edrendű kvadratikus mátrix, melynek minimál-polinomja:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_j); \quad (j \leq n).$$

Mivel itt  $\lambda$  tetszőleges komplex szám lehet, jelöljük  $z$ -vel, vagyis a minimál-polinom:

$$\Delta(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_j); \quad (j \leq n).$$

Nyilván

$$(7) \quad \Delta(\lambda_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j).$$

Az

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

hatványsor  $m$ -edik részletösszege

$$s_m(z) = \sum_{k=0}^m c_k z^k$$

$m \geq j$  esetén az

$$\frac{s_m(z)}{\Delta(z)} = Q_m(z) + \frac{R_m(z)}{\Delta(z)}$$

összefüggés értelmében, ahol  $Q_m(z)$  legfeljebb  $(m-j)$ -edfoku,  $R_m(z)$  pedig legfeljebb  $(j-1)$ -edfoku polinomja  $z$ -nek, a következő alakban is felírható:

$$(8) \quad s_m(z) = Q_m(z) \Delta(z) + R_m(z).$$

Ez azonban az  $\underline{\underline{A}}$  mátrixra alkalmazva azt jelenti, hogy

$$s_m(\underline{\underline{A}}) = Q_m(\underline{\underline{A}}) \Delta(\underline{\underline{A}}) + R_m(\underline{\underline{A}}) = R_m(\underline{\underline{A}}),$$

mivel

$$\Delta(\underline{\underline{A}}) = 0$$

( $\underline{\underline{A}}$  kielégíti minimálegyenletét).

$\underline{\underline{A}}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \underline{\underline{A}}^k$$

mátrix-hatványsor konvergenciájának vizsgálatához elég tehát az  $R_m(\underline{\underline{A}})$  "osztási maradékok" sorozatának konvergenciáját vizsgálni  $m \rightarrow \infty$  esetében.

(8) -ből (7) miatt következik, hogy

$$s_m(\lambda_i) = Q_m(\lambda_i) \Delta(\lambda_i) + R_m(\lambda_i) = R_m(\lambda_i),$$

és így az  $R_m(z)$  legfeljebb  $(j-1)$ -edfoku polinomra

$$(9) \quad \begin{aligned} s_m(\lambda_1) &= R_m(\lambda_1), \\ s_m(\lambda_2) &= R_m(\lambda_2), \\ &\vdots \\ s_m(\lambda_j) &= R_m(\lambda_j). \end{aligned}$$

Könnyű azonban felírni olyan  $(j-1)$ -edfoku polinomot, amely a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j$  helyeken épp a fenti (9) alatti értékeket veszi fel (e polinom megadása egyértelmű, mert két legfeljebb  $(j-1)$ -edfoku polinom, ha  $j$  különböző helyen megegyezik egymással, akkor mindenütt megegyezik egymással). Legyen ugyanis

$$(10) \quad L_k(z) = \frac{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_{k-1})(z - \lambda_{k+1}) \dots (z - \lambda_j)}{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_j)}.$$

Ezen  $j$ -edfoku ún. Lagrange-féle interpolációs polinomra

$$L_k(\lambda_p) = \begin{cases} 1, & \text{ha } p = k, \\ 0, & \text{ha } p \neq k, \text{ ill. } p = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, j, \end{cases}$$

és így az  $f(z)$  hatványsorának  $s_m(z)$  részletösszegéből adódó  $R_m(z)$   $(j-1)$ -edfoku polinom (az "osztási maradék") a következő alakban is felírható:

$$(11) \quad R_m(z) = s_m(\lambda_1)L_1(z) + s_m(\lambda_2)L_2(z) + \dots + s_m(\lambda_j)L_j(z),$$

ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j$  az  $\underline{A}$  mátrix minimálegyenletének egyszeres gyökei. Ha  $m \rightarrow \infty$ , az  $L_1(\underline{A}), \dots, L_j(\underline{A})$  mátrixok  $m$ -től való függetlensége miatt a határátmenet a skalár együtthatókban nehézség nélkül elvégezhető, s így - mivel a  $\lambda_i$  értékek  $f(z)$  hatványsorának konvergenciakörébe esnek, azaz  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(\lambda_i) = f(\lambda_i)$  - adódik:

$$\begin{aligned} f(\underline{A}) &= \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(\underline{A}) = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m(\underline{A}) = \\ &= f(\lambda_1)L_1(\underline{A}) + f(\lambda_2)L_2(\underline{A}) + \dots + f(\lambda_j)L_j(\underline{A}) = \sum_{k=1}^j f(\lambda_k)L_k(\underline{A}). \end{aligned}$$

Az  $f(\underline{A})$  mátrixfüggvényt így módon sikerült  $\underline{A}$   $(j-1)$ -edfoku  $L_k(\underline{A})$  mátrix-polinomjainak lineáris kombinációjaként előállítanunk. Pl.

1<sup>o</sup>

$$\sin \underline{\underline{A}} = \sin \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = ?$$

Mivel

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = \\ = (\lambda - 4)(\lambda - 1),$$

vagyis a minimálegyenlet gyökei

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1,$$

a Lagrange-polinomok a következők lesznek:

$$L_1(z) = \frac{z-1}{4-1} = \frac{1}{3}(z-1), \quad L_2(z) = \frac{z-4}{1-4} = -\frac{1}{3}(z-4).$$

Innen adódik, hogy

$$\sin \underline{\underline{A}} = \sin(\lambda_1) L_1(\underline{\underline{A}}) + \sin(\lambda_2) L_2(\underline{\underline{A}}) = \\ = \sin 4 \left( \frac{\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}}}{3} \right) + \sin 1 \left( \frac{\underline{\underline{A}} - 4\underline{\underline{E}}}{-3} \right) = \\ = \frac{\underline{\underline{E}}}{3} \left( \frac{4}{3} \sin 1 - \frac{1}{3} \sin 4 \right) + \frac{\underline{\underline{A}}}{3} (\sin 4 - \sin 1) \frac{1}{3}.$$

2<sup>o</sup>

$$e^{\underline{\underline{A}}} = e^{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}} = ?$$

Az utóbb ismerttetett módszerrel végezve a redukciót (e feladatot ugyan-  
is korábban más módszerrel már megoldottuk), mivel  $\underline{\underline{A}}$  sajátértékei

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1,$$

és így az interpoláló Lagrange-polinomok:

$$L_1(z) = \frac{z-1}{0-1} = 1-z, \quad L_2(z) = \frac{z-0}{1-0} = z,$$

adódik:

$$e^{\underline{A}} = e^{\lambda_1} L_1(\underline{A}) + e^{\lambda_2} L_2(\underline{A}) = \underline{E} - \underline{A} + e\underline{A} = \underline{E} + \underline{A}(e-1),$$

és ez egyezik korábbi eredményünkkel.

$$3^0 \ln \underline{B} = ?$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{9}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

$\ln(1+z)$  konvergens hatványsorba fejthető, ha  $|z| < 1$ . A  $\underline{B}$  mátrixot  $\underline{B} = \underline{E} + \underline{A}$  alakban felírva:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\underline{A}$  sajátértékei a

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \frac{1}{5^3} \begin{vmatrix} -5\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-5\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-5\lambda \end{vmatrix} = \dots = \frac{1}{5^3} (4-5\lambda)(5\lambda+1)(5\lambda-3) = 0$$

összefüggésből adódóan

$$\lambda_1 = -\frac{1}{5}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{5}, \quad \lambda_3 = \frac{4}{5},$$

s ezek mind a  $|z| < 1$  körlemezbe esnek.

A keresett Lagrange-polinomok:

$$L_1(z) = \frac{(z - \frac{3}{5})(z - \frac{4}{5})}{-\frac{4}{5}(-\frac{5}{5})} = \frac{25z^2 - 35z + 12}{20},$$

$$L_2(z) = \frac{(z - \frac{4}{5})(z + \frac{1}{5})}{-\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{25z^2 - 15z - 4}{-4},$$

$$L_3(z) = \frac{(z + \frac{1}{5})(z - \frac{3}{5})}{1 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{25z^2 - 10z - 3}{5},$$

vagyis

$$\begin{aligned} \ln \underline{\underline{B}} &= \ln(1 - \frac{1}{5}) L_1(\underline{\underline{A}}) + \ln(1 + \frac{3}{5}) L_2(\underline{\underline{A}}) + \ln(1 + \frac{4}{5}) L_3(\underline{\underline{A}}) = \\ &= \underline{\underline{E}} \left\{ \frac{3}{5} \ln \frac{4}{5} + \ln \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \ln \frac{9}{5} \right\} + \\ &+ \underline{\underline{A}} \left\{ -\frac{7}{4} \ln \frac{4}{5} + \frac{15}{4} \ln \frac{8}{5} - 2 \ln \frac{9}{5} \right\} + \\ &+ \underline{\underline{A}}^2 \left\{ \frac{5}{4} \ln \frac{4}{5} - \frac{25}{4} \ln \frac{8}{5} + 5 \ln \frac{9}{5} \right\}. \end{aligned}$$

#### IV. Elsőrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletrendszer megoldása

Ezen differenciálegyenletrendszer-típusra a mátrixszámítás segítségével kétféle megoldási módszert is adhatunk. Az első az előbb elmondottakhoz kapcsolódva az állandó együtthatós lineáris homogén differenciálegyenleteknél alkalmazott okoskodás révén jut el a mátrixszámítás alkalmazásával a megoldáshoz, a második módszer a differenciálegyenletrendszer megoldásának problémáját sajátérték-probléma megoldására vezeti vissza.

1<sup>o</sup> Az

$$(12) \quad y' = Ay$$

differenciálegyenlet megoldása (A állandó) - mint ismeretes -

$$y = c e^{Ax},$$

míg az  $y(0) = y_0$  kezdeti feltételnek eleget tevő megoldás:

$$y = y_0 e^{Ax}.$$

Az

$$y'_1 = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n,$$

.

.

$$y'_n = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n$$

differentiálegyenlet-rendszer a következő mátrix-differentiálegyenlet alakjában írható fel:

$$(13) \quad \underline{y}' = \underline{A} \underline{y},$$

ahol

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \underline{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20}, \dots, y_n(0) = y_{n0}$$

kezdeti feltételt rövidebben így is felírhatjuk:

$$(14) \quad \underline{y}(0) = \underline{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

(12) -höz hasonlóan (13) megoldása:

$$\underline{y} = e^{\underline{A}x} \underline{c},$$

ill. a (14) kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$(15) \quad \underline{y} = e^{\underline{A}x} \underline{y}_0.$$

Azt, hogy (15) valóban kielégíti (13) -at és (14) -et, egyszerű visszahelyettesítéssel ( $e^{\underline{A}x}$  minden  $x$  -re egyenletesen konvergens hatványsorát tagonként  $x$  szerint deriválva) könnyen beláthatjuk:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} e^{\underline{A}x} \underline{y}_0 &= \frac{d}{dx} \left\{ \underline{E} + \underline{A}x + \frac{1}{2!} \underline{A}^2 x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \underline{A}^n x^n + \dots \right\} \underline{y}_0 = \\ &= (\underline{A} + \underline{A}^2 x + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \underline{A}^n x^{n-1} + \dots) \underline{y}_0 = \\ &= \underline{A} e^{\underline{A}x} \underline{y}_0 ,\end{aligned}$$

továbbá

$$(e^{\underline{A}x} \underline{y}_0)_{x=0} = \underline{E} \underline{y}_0 = \underline{y}_0 ,$$

amit igazolni akartunk.

Pl. az

$$y_1' = 5y_1 + 4y_2,$$

$$y_2' = y_1 + 2y_2$$

differenciálegyenletrendszer esetében a következő mátrix-differenciálegyenlet írható fel:

$$\underline{y}' = \underline{A} \underline{y} ,$$

ahol

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}, \quad \text{ill. legyen } \underline{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kezdeti feltétel is megadva.

$$\begin{aligned}\underline{A} \text{ sajátértékei } \lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 1 \quad (\text{a } \det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \text{ egyenlet gyökei}), \text{ a megfelelő Lagrange-polinomok:}\end{aligned}$$



$$L_1(z) = \frac{z-1}{6-1} = \frac{z-1}{5},$$

$$L_2(z) = \frac{z-6}{1-6} = \frac{z-6}{5},$$

és így

$$e^{\underline{A}x} = e^{6x} L_1(\underline{A}) + e^x L_2(\underline{A}) = e^{6x} \frac{1}{5} (\underline{A} - \underline{E}) + e^x \left(-\frac{1}{5}\right) (\underline{A} - 6\underline{E}),$$

tehát a mátrix-differenciálegyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} \underline{y} &= e^{\underline{A}x} \underline{y}_0 = \frac{e^{6x}}{5} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{e^x}{5} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{6x}}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{e^x}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

azaz a differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$y_1 = \frac{4}{5} e^{6x} - \frac{4}{5} e^x,$$

$$y_2 = \frac{1}{4} e^{6x} + \frac{4}{5} e^x.$$

2<sup>o</sup> Kereshetjük a (13) mátrix-differenciálegyenlet megoldását - a homogén állandó együtthatós differenciálegyenleteknél követett módszer mintájára -

$$(16) \quad \underline{y} = \underline{c} e^{\lambda x}$$

alakban is, ahol  $\lambda$  állandó és

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{y}' = \underline{c} \lambda e^{\lambda x},$$

vagyis  $y$  és  $y'$  ezen értékeit (13) -ba behelyettesítve

$$\underline{c} \lambda e^{\lambda x} = \underline{A} \underline{c} e^{\lambda x}, \quad \text{ill.} \quad \lambda \underline{E} \underline{c} = \underline{A} \underline{c}$$

azaz

$$(\underline{A} - \lambda \underline{E}) \underline{c} = 0$$

adódik. Ezen mátrix-egyenletnek akkor van a triviálistól eltérő megoldása, ha

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0,$$

s így a (13) differenciálegyenlet megoldása az  $\underline{A}$  mátrix  $\lambda_i$  sajátértékeinek meghatározására vezetett. Ha ezen  $\lambda_i$  sajátértékekhez meghatározható  $n$  számú lineárisan független  $\underline{c}_i$  sajátvektor, ezekből (13) általános megoldása felírható. Miután ugyanis a  $\underline{c}_i$  sajátvektor számszorosa is sajátvektor, az

$$y_i = \underline{c}_i e^{\lambda_i x}$$

alakban írva fel a sajátvektorokat, ezekkel (13) általános megoldása a következőképpen írható fel:

$$y = A_1 y_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + A_n y_n e^{\lambda_n x},$$

ahol  $A_1, \dots, A_n$  állandók.  $n$  számú lineárisan független sajátvektor (és így  $n$  számú lineárisan független megoldás) mindig létezik, ha az  $\underline{A}$  mátrix sajátértékei mind különbözők. Ellenkező esetben lehet még, hogy található  $\underline{A}$ -nak  $n$  lineárisan független  $y_i$  sajátvektora, mint azt a Matematika I/1. jegyzet 17. fejezetében is láthattuk; ha nem ez az eset áll fenn, akkor (13) -nak a  $\lambda$  többszörös sajátértékhez lineárisan független megoldásait

$$y(x) e^{\lambda x}$$

alakban kereshetjük. Itt

$$y(x) = \sum_i a_i y_i x^i,$$

és az  $y_i$  vektorok meghatározása homogén lineáris algebrai egyenletrendszer megoldására vezet.

Ezt a módszert az előbb már felírt

$$y' = \underline{A} y, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}$$

differenciálegyenletre alkalmazva, mivel  $\underline{A}$  sajátértékei  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 1$ , a megfelelő sajátvektorok pedig az

$$(\underline{A} - 6\underline{E}) y_1 = 0, \quad \text{ill.} \quad (\underline{A} - \underline{E}) y_2 = 0, \quad y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásaként adódó

$$y_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vektorok, így tehát a mátrix-differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = A_1 y_1 e^{6x} + A_2 y_2 e^x,$$

ill. részletesen kiírva a megfelelő homogén lineáris differenciálegyenletrendszer általános megoldása:

$$y_1 = 4A_1 e^{6x} + A_2 e^x,$$

$$y_2 = A_1 e^{6x} - A_2 e^x,$$

ahol  $A_1$  és  $A_2$  állandók. Az  $y_1(0) = 0$ ,  $y_2(0) = 1$  kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$y_1 = \frac{4}{5} e^{6x} - \frac{4}{5} e^x,$$

$$y_2 = \frac{1}{5} e^{6x} + \frac{4}{5} e^x.$$

### V. Elsőrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet-rendszer megoldása

Az

$$(17) \quad y' - A y = g(x)$$

állandó együtthatós elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek az  $y(0) = y_0$  kezdeti feltételnek eleget tevő megoldása:

$$(18) \quad y = e^{Ax} y_0 + \int_0^x e^{A(x-\xi)} g(\xi) d\xi$$

alakban írható fel. A (17) -nek megfelelő homogén differenciálegyenlet ugyanis

$$Y' - AY = 0,$$

ennek általános megoldása

$$(19) \quad Y = c e^{Ax};$$

az inhomogén (17) differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével keresve

$$y_1 = c(x) e^{Ax}$$

esetén (17) -be behelyettesítve  $c(x)$  -re

$$c'(x) = e^{-Ax} g(x), \quad \text{azaz} \quad c(x) = \int e^{-A\xi} g(\xi) d\xi$$

adódik. Az  $y(0) = y_0$  kezdeti feltételt figyelembe véve (19) -ből

$$Y = y_0 e^{Ax},$$

míg az inhomogén differenciálegyenletnek  $x = 0$  -nál eltűnő partikuláris megoldása

$$y_0 = \left( \int_0^x e^{-A\xi} g(\xi) d\xi \right) e^{Ax} = \int_0^x e^{A(x-\xi)} g(\xi) d\xi,$$

vagyis valóban (18) alakjában írható fel a (17) differenciálegyenlet  $y(0) = y_0$  kezdeti feltételt kielégítő megoldása.

Ennek mintájára az

$$\begin{aligned} (20) \quad & y_1' - (a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n) = g_1(x), \\ & \vdots \\ & y_n' - (a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n) = g_n(x) \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer

$$\begin{aligned} (21) \quad & y_1(0) = y_{10}, \\ & \vdots \\ & y_n(0) = y_{n0} \end{aligned}$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldását úgy is kereshetjük, mint az

$$(22) \quad \underline{y}' - \underline{A}\underline{y} = \underline{g}(x)$$

mátrix-differenciálegyenlet

$$\underline{y}(0) = \underline{y}_0$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldását, ahol

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \underline{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underline{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

A (22) mátrix-differenciálegyenletnek megfelelő homogén mátrix-differenciálegyenlet:

$$\underline{y}' - \underline{A}\underline{y} = 0, \quad \text{ill.} \quad \underline{y}' = \underline{A}\underline{y},$$

ennek kezdeti feltételünket kielégítő megoldása előző eredményeink alapján

$$\underline{y} = e^{\underline{A}x} \underline{y}_0.$$

Keressük mármost a (22) inhomogén egyenlet egy megoldását

$$\underline{y}_1 = e^{\underline{A}x} \underline{c}(x)$$

alakban (állandók variálása). (22) -be behelyettesítve adódik:

$$e^{\underline{A}x} \underline{c}'(x) + \underline{A} e^{\underline{A}x} \underline{c}(x) - \underline{A} e^{\underline{A}x} \underline{c}(x) = \underline{g}(x),$$

vagyis

$$\underline{c}'(x) = e^{-\underline{A}x} \underline{g}(x),$$

$$\underline{c}(x) = \int_0^x e^{-\underline{A}\xi} \underline{g}(\xi) d\xi.$$

Az így felírt  $\underline{c}(x)$ , s vele együtt az  $\underline{y}_1$  partikuláris megoldás is eltűnik  $x = 0$  -nál, vagyis a (22) mátrix-differenciálegyenlet  $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$  kezdeti feltételt kielégítő megoldása

$$\begin{aligned} \underline{y} &= e^{\underline{A}x} \underline{y}_0 + e^{\underline{A}x} \underline{c}(x) = \\ (23) \quad &= e^{\underline{A}x} \underline{y}_0 + \int_0^x e^{\underline{A}(x-\xi)} \underline{g}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

alakjában írható fel. Formálisan tehát a (18) megoldó képletből (A helyébe  $\underline{A}$ -t,  $y$  és  $y_0$ , valamint  $g$  helyébe  $\underline{y}$ ,  $\underline{y}_0$  és  $\underline{g}$ -t írva) felírható a (22) mátrix-differenciálegyenlet  $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$  kezdeti feltételt kielégítő (23) megoldása.

(Abban az okoskodásban, mely a (23) képlethez elvezetett, felhasználtuk, hogy

$$e^{\underline{\underline{A+B}}} = e^{\underline{\underline{A}}} e^{\underline{\underline{B}}},$$

ha  $\underline{\underline{A}}$  és  $\underline{\underline{B}}$  felcserélhető. Ez a tényezők hatványsor-előállításából összevonással könnyen belátható.)

Oldjuk meg pl. az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:

$$y_1' = 6y_1 + 5y_2 + 2e^x,$$

$$y_2' = -y_1 + 4y_2 + 4e^x,$$

a következő kezdeti feltételekkel:

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 3.$$

Feladatunkat mátrix-alakban így írhatjuk fel:

$$\underline{\underline{y}}' = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \underline{\underline{y}} + e^x \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{y}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

A megfelelő homogén egyenlet megoldásához az  $e^{\underline{\underline{Ax}}}$  mátrixot határozzuk meg, ahol

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\underline{\underline{A}}$  sajátértékeit a  $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$  egyenlet megoldásaiként nyerjük:

$$\lambda_1 = 5 + 2j, \quad \lambda_2 = 5 - 2j.$$

A Langrange-polinomok:

$$L_1(z) = \frac{z - (5 - 2j)}{(5+2j) - (5-2j)} = \frac{1}{4j} (z - 5 + 2j)$$

$$L_2(z) = \frac{z - (5 + 2j)}{-4j} = -\frac{1}{4j} (z - 5 - 2j),$$

$$\begin{aligned} L_1(\underline{\underline{A}}) &= \frac{1}{4j} \left\{ \underline{\underline{A}} + (-5+2j) \underline{\underline{E}} \right\} = \frac{1}{4j} \left\{ \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + (-5+2j) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{4j} \begin{pmatrix} 1+2j & 5 \\ -1 & -1+2j \end{pmatrix} = \frac{1}{4j} \frac{1}{1+2j} \begin{pmatrix} 1+2j \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2j & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hasonlóképp adódik:

$$L_2(\underline{\underline{A}}) = \dots = -\frac{1}{4j} \frac{1}{1-2j} \begin{pmatrix} 1-2j \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2j & 5 \end{pmatrix},$$

és így

$$\begin{aligned} e^{\underline{\underline{A}}x} &= e^{\lambda_1 x} L_1(\underline{\underline{A}}) + e^{\lambda_2 x} L_2(\underline{\underline{A}}) = \\ &= \frac{e^{(5+2j)x}}{-8+4j} \begin{pmatrix} 1+2j \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2j & 5 \end{pmatrix} - \frac{e^{(5-2j)x}}{8+4j} \begin{pmatrix} 1-2j \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2j & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A homogén egyenlet adott kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$\begin{aligned} \underline{y} &= e^{\underline{\underline{A}}x} \underline{y}(0) = \\ &= \left\{ \frac{e^{(5+2j)x}}{-8+4j} \begin{pmatrix} 1+2j \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2j & 5 \end{pmatrix} - \frac{e^{(5-2j)x}}{8+4j} \begin{pmatrix} 1-2j \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2j & 5 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= e^{5x} \left\{ \frac{16+2j}{-8+4j} (\cos 2x + j \sin 2x) \begin{pmatrix} 1+2j \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{16-2j}{8+4j} (\cos 2x - \right. \\ &\quad \left. - j \sin 2x) \begin{pmatrix} 1-2j \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= e^{5x} \left\{ -\frac{1}{2} (3+2j)(\cos 2x + j \sin 2x) \begin{pmatrix} 1+2j \\ -1 \end{pmatrix} - \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2} (3-2j)(\cos 2x - j \sin 2x) \begin{pmatrix} 1-2j \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \frac{e^{5x}}{2} \left\{ (\cos 2x + j \sin 2x) \begin{pmatrix} 1-8j \\ 3+2j \end{pmatrix} + (\cos 2x - j \sin 2x) \begin{pmatrix} 1+8j \\ 3-2j \end{pmatrix} \right\} = \\
&= e^{5x} \begin{pmatrix} \cos 2x + 8 \sin 2x \\ 3 \cos 2x - 2 \sin 2x \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Az inhomogén egyenletnek az  $\underline{y}(0) = \underline{0}$  kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását az

$$e^{\underline{A}x} \int_0^x (e^{\underline{A}\xi})^{-1} \underline{g}(\xi) d\xi$$

kifejezés szolgáltatja. Miután

$$\begin{aligned}
(e^{\underline{A}x})^{-1} &= (e^{-x})^{\underline{A}} = \frac{1}{-8+4j} e^{-(5+2j)x} \begin{pmatrix} 1+2j \\ -1 \end{pmatrix} (1+2j \quad 5) - \\
&- \frac{1}{8+4j} e^{-(5-2j)x} \begin{pmatrix} 1-2j \\ -1 \end{pmatrix} (1-2j \quad 5),
\end{aligned}$$

a fenti integrálban az integrandusz

$$\begin{aligned}
(e^{\underline{A}\xi})^{-1} \underline{g}(\xi) &= \left\{ \frac{1}{-8+4j} e^{-(5+2j)\xi} \begin{pmatrix} 1+2j \\ -1 \end{pmatrix} (1+2j \quad 5) - \right. \\
&- \frac{1}{8+4j} e^{-(5-2j)\xi} \begin{pmatrix} 1-2j \\ -1 \end{pmatrix} (1-2j \quad 5) \left. \right\} e^{\xi} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{-18+4j}{-8+4j} e^{(-4-2j)f} \begin{pmatrix} 1+2j \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-18-4j}{8+4j} e^{(-4+2j)f} \begin{pmatrix} 1-2j \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Az integrálást elvégezve nyerjük:

$$\begin{aligned} \int_0^x (e^{\underline{A}f})^{-1} \underline{g}(f) df &= \frac{9-2j}{4-2j} \frac{1}{-4-2j} \left\{ e^{(-4-2j)x} - 1 \right\} \begin{pmatrix} 1-2j \\ -1 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{9+2j}{4+2j} \frac{1}{-4+2j} \left\{ e^{(-4+2j)x} - 1 \right\} \begin{pmatrix} 1-2j \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= - \frac{9-2j}{20} \left\{ e^{(-4-2j)x} - 1 \right\} \begin{pmatrix} 1+2j \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{9+2j}{20} \left\{ e^{(-4+2j)x} - 1 \right\} \begin{pmatrix} 1-2j \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Balról  $e^{\underline{A}x}$ -szel szorozva nyerjük az inhomogén egyenlet keresett partikuláris megoldását. (E szorzás elvégzése a Lagrange-polinomokkal elég egyszerű.)

$$\begin{aligned} e^{\underline{A}x} \int_0^x (e^{\underline{A}f})^{-1} \underline{g}(f) df &= - \frac{9-2j}{20} (e^x - e^{(5+2j)x}) \begin{pmatrix} 1+2j \\ -1 \end{pmatrix} - \\ &- \frac{9+2j}{20} (e^x - e^{(5-2j)x}) \begin{pmatrix} 1-2j \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= - \frac{e^x}{10} \begin{pmatrix} 13 \\ -9 \end{pmatrix} + e^{5x} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 13 \cos 2x - 16 \sin 2x \\ -9 \cos 2x - 2 \sin 2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet-rendszernek az adott kezdeti feltételt kielégítő megoldása tehát:

$$\begin{aligned}
 y &= e^{5x} \begin{pmatrix} \cos 2x + 8 \sin 2x \\ 3 \cos 2x - 2 \sin 2x \end{pmatrix} - \frac{e^x}{10} \begin{pmatrix} 13 \\ -9 \end{pmatrix} + \\
 &+ \frac{e^{5x}}{10} \begin{pmatrix} 13 \cos 2x - 16 \sin 2x \\ -9 \cos 2x - 2 \sin 2x \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{e^{5x}}{10} \begin{pmatrix} 23 \cos 2x + 64 \sin 2x \\ 21 \cos 2x - 22 \sin 2x \end{pmatrix} - \frac{e^x}{10} \begin{pmatrix} 13 \\ -9 \end{pmatrix} .
 \end{aligned}$$



## F Ü G G E L É K

### 34. Fourier-sorok

a) A matematika különböző irányu alkalmazásai során gyakran lép fel a következő probléma: adva vannak az  $(a, b)$  intervallumban értelmezett

$$g_1(x), \quad g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$$

függvények, továbbá az ugyanitt értelmezett  $f(x)$  függvény. Kérdés, előállítható-e  $f(x)$  az adott  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$  függvények szerint haladó

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots + c_n g_n(x) + \dots$$

sor alakjában, ahol  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  megfelelő állandók.

Például abban az esetben, amikor

$$g_k(x) = (x - a)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

az  $f(x)$  függvénynek  $(x-a)$  hatványai szerint haladó

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

hatványsorba való fejtése a kitűzött problémának megoldása.

Más példaként utalhatunk a harmonikus rezgőmozgások összetevésénél adódó probléma megfordítására. Mint említettük,

$$g_k(x) = A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

ha  $x$  az időt jelenti, az  $A_k$  amplitudója,  $\omega_k$  körfrekvenciája,  $\varphi_k$  kezdőfázisu harmonikus rezgőmozgás pályáját írja le. Véges sok,

pl.  $n$  számú ilyen harmonikus rezgőmozgás összegezésekor előálló eredő rezgés pályáját az

$$f(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k)$$

függvény írja le. E függvény periódikus függvény, ha az összetevő rezgések frekvenciáinak viszonya racionális, vagyis ha a körfrekvenciák valamennyien egy közös  $\omega$  alapfrekvencia egész számú többszöröseiként állíthatók elő:  $\omega_k = p_k \omega$  ( $p_k$  egész). Ha az alapfrekvenciát elegendőnek tekintjük, a most tett kikötések mellett, a periódikus  $f(x)$  függvényre a következő összefüggést nyerjük:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n A_k \sin(p_k x + \varphi_k) = \sum_{k=1}^n (A_k \cos \varphi_k \sin p_k x + A_k \sin \varphi_k \cos p_k x) = \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k \sin p_k x + b_k \cos p_k x), \end{aligned}$$

ahol

$$a_k = A_k \cos \varphi_k, \quad b_k = A_k \sin \varphi_k.$$

$f(x)$  -et ún. véges trigonometrikus sorral állítottuk elő.

Felmerül a kérdés, vajon egy periódikus  $f(x)$  függvény előállítható-e harmonikus rezgések eredőjeként, vagy másképp, egy fenti típusú véges, vagy esetleg végtelen trigonometrikus sor összegeként.

Minden ilyen sorbafejtési probléma két kérdést vet fel:

1. Található-e egyáltalán ilyen sorfejtés az adott  $f(x)$  függvény számára?

2. Ha található, hogyan lehet a benne szereplő  $c_k$  együtthatókat meghatározni?

Logikailag az első kérdésre kellene először válaszolni, gyakran azonban könnyebb a második kérdésre választ adni. Így pl. a hatványsorok esetében, az  $f(x)$  függvényt valamilyen  $a$ -ra szimmetrikus  $(a-r, a+r)$  intervallumban előállító

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

sor együtthatói nem lehetnek mások, mint a

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

képlettel megadott Taylor-együtthatók.

Ha a fenti második kérdésre válaszolni tudunk, és ennek megfelelően a  $c_k$  együtthatókat meghatároztuk, akkor az első kérdésre is könnyebben megtalálhatjuk a választ, hiszen elég a talált  $c_k$  együtthatókkal képezett  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k g_k(x)$  sort megvizsgálni, hogy előállítja-e  $f(x)$ -et, vagy sem.

Az alábbiakban olyan sorfejtéseket fogunk vizsgálni, melyeknél a fent másodiknak felvetett kérdésre - bizonyos megszorítások mellett - könnyű válaszolni. E sorok az ún. Fourier-sorok.

b) Legyenek a  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$  függvények az

$$(1) \quad 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

függvényekkel azonosak. Kérdés, előállítható-e az  $f(x)$  függvény az

$$(2) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

alaku trigonometrikus sorral, és ha igen, hogyan kell az itt látható együtthatókat meghatározni (az együtthatók fenti jelölésének célszerűségét később indokoljuk majd).

Ahhoz, hogy ilyen sorfejtés lehetséges legyen, mindenesetre szükséges, hogy  $f(x)$   $2\pi$  szerint periódikus függvény legyen ( $f(x+2\pi) = f(x)$  minden  $x$ -re), hiszen a trigonometrikus sor tagjai mind  $2\pi$  szerint periódikus függvények. A továbbiakban ezért mindig feltesszük, hogy  $f(x)$   $2\pi$  szerint periódikus függvény.

A (2) trigonometrikus sor együtthatóit könnyen meghatározhatjuk, ha feltesszük, hogy a sor egyenletesen konvergens a  $(-\infty, +\infty)$  intervallumban. Ekkor ugyanis (2) jobb- és baloldalát  $\cos nx$ , ill.  $\sin nx$ -szel megszorozva a nyert

$$f(x) \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx),$$

$$f(x) \sin nx = \frac{a_0}{2} \sin nx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx \sin nx + b_k \sin kx \sin nx)$$

függvénysorok  $|\cos nx| \leq 1$ , ill.  $|\sin nx| \leq 1$  miatt szintén egyenletesen konvergensek lesznek, szabad tehát e sorokat bármely  $(a, a + 2\tilde{\pi})$  intervallumban tagonként integrálni. Ezen integrálást elvégezve, mivel az (1) függvénysorozat bármely két különböző függvényének szorzatát véve, ezen szorzat integrálja bármely  $2\tilde{\pi}$  hosszúságú intervallumon 0 -nak adódik (lásd Matematika I/2 jegyzet 6. fejezet), nyerjük

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\tilde{\pi}} f(x) \cos nx \, dx &= a_n \int_a^{a+2\tilde{\pi}} (\cos nx)^2 \, dx = a_n \int_a^{a+2\tilde{\pi}} \frac{1+\cos 2nx}{2} \, dx = \\ &= a_n \tilde{\pi}, \\ \int_a^{a+2\tilde{\pi}} f(x) \sin nx \, dx &= b_n \int_a^{a+2\tilde{\pi}} (\sin nx)^2 \, dx = b_n \int_a^{a+2\tilde{\pi}} \frac{1-\cos 2nx}{2} \, dx = \\ &= b_n \tilde{\pi}, \end{aligned}$$

ugyhogy végeredményben

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{\tilde{\pi}} \int_a^{a+2\tilde{\pi}} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\tilde{\pi}} \int_a^{a+2\tilde{\pi}} f(x) \sin nx \, dx,$$

$$(n = 1, 2, \dots),$$

és itt az első képlet  $n = 0$  esetén is érvényes. (Erről (2) jobb és bal oldalát  $(a, a+2\tilde{\pi})$  -ben integrálva közvetlenül is meggyőződhetünk; a (2) trigonometrikus sor állandó tagját éppen azért írtuk  $\frac{a_0}{2}$  alakban, hogy  $a_0$  értéke (3) -ből  $n = 0$  esetén adódjon.)

A következő állítást mondhatjuk ki tehát:

Ha  $f(x)$  egyenletesen konvergens (2) alaku trigonometrikus sorba fejthető, akkor annak együtthatóit szükségképpen a (3) képletek szolgáltatják.



### Definíció

Ha  $f(x)$   $2\pi$  szerint periodikus integrálható függvény, akkor a  
(3) képlettel megadott együtthatókat Fourier-együtthatóknak, a velük felírt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

sor  $f(x)$  Fourier-sorának nevezzük.

Eredményeinket röviden úgy foglalhatjuk tehát össze, hogy ha  $f(x)$  egyenletesen konvergens trigonometrikus sorba fejthető, akkor e sor  $f(x)$  Fourier-sora.

Megjegyezzük azonban, hogy  $f(x)$  -et olyankor is előállíthatja Fourier-sora, ha e sor nem egyenletesen konvergens.

Könnyen igazolhatók az alábbi állítások:

Páros függvény Fourier-sora tiszta koszinusz-sor, páratlan függvény Fourier-sora tiszta szinusz-sor.

Ha ui.  $f(x)$  páros, akkor  $f(x) \sin nx$  páratlan függvény, így az  $a = -\pi$  választás mellett a (2) sor (3) -ban felírt együtthatóira áll:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0,$$

hiszen páratlan függvénynek valamely  $0$  -ra szimmetrikus intervallumra vonatkozó integrálja eltűnik. Hasonlóan látható be, hogy páratlan  $g(x)$  függvény esetében (ekkor  $g(x) \cos nx$  páratlan függvény)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx = 0,$$

és így a páros  $f(x)$ , ill. páratlan  $g(x)$  függvény Fourier-sora valóban tiszta koszinusz-, ill. szinusz-sor.

Okoskodásunkban felhasználtuk azt a körülményt, hogy a Fourier-együtthatók értéke a kiszámításukra szolgáló képletben szereplő  $a$  számtól nem függ, úgyhogy az integrációs intervallumot mindig olyan  $2\pi$  hosszúságú intervallumnak választhatjuk, amelyben az integrálok kiszámítása lehetőleg egyszerű. Ez annak az általános szabálynak a következménye, hogy egy  $2\pi$  szerint periódikus függvénynek bármely  $2\pi$  hosszúságú intervallumon ugyanakkora az integrálja, hiszen  $2\pi$  szerint periódikus integrandusz esetén, ha  $2k\pi \leq a \leq 2(k+1)\pi$ , akkor

$$\int_a^{a+2\pi} = \int_a^{2(k+1)\pi} + \int_{2(k+1)\pi}^{a+2\pi} = \int_a^{2(k+1)\pi} + \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} = \int_a^{2(k+1)\pi} + \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} = \int_0^{2\pi}.$$

A számítások egyszerűsítése és áttekinthetőbbé tétele miatt sokszor célszerű a Fourier-sort komplex alakba átírni. Ez lényegében az Euler-össze-függések segítségével végezhető el.

Legyen tehát  $f(x)$   $2\pi$  szerint periodikus korlátos és integrálható függvény. Ekkor Fourier-sora a (2) trigonometrikus sor, melynek együtt-hatói a (3) Fourier-együtthatók. Írjuk fel először a Fourier-sor  $n$ -edik részletösszegét, és alakítsuk ezt át exponenciális alakra:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \frac{e^{jkx} + e^{-jkx}}{2} + b_k \frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jkx} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jkx}. \end{aligned}$$

A második összegezésben  $k$  helyett  $(-k)$ -t vezetve be szummációs indexnek, írható:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jkx} + \sum_{\substack{k=-1 \\ (-k=1)}}^{-n} \frac{a_{-k} + jb_{-k}}{2} e^{jkx}.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$(4) \quad c_k = \begin{cases} \frac{a_k - jb_k}{2}, & \text{ha } k \geq 0, \\ \frac{a_{-k} + jb_{-k}}{2}, & \text{ha } k < 0. \end{cases}$$

E jelöléssel a Fourier-sor  $n$ -edik részletösszegét, majd magát a Fourier-sort is igen egyszerű alakban írhatjuk fel, hiszen

$$b_0 = 0 \quad \text{lévén} \quad c_0 = \frac{a_0}{2},$$

és így

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k e^{jkx} + \sum_{k=-1}^{-n} c_k e^{jkx} = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jkx},$$

míg  $f(x)$  Fourier-sora:

$$(5) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkx},$$

ahol az (5) sor összegén a fenti  $s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jkx}$  szimmetrikus részletösszegek sorozatának határértékét értjük. (Megjegyezzük, hogy elő-

fordulhat az az eset, hogy külön-külön  $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{jkx}$ , ill.  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{jkx}$  divergens sorok, ennek ellenére azonban (5) konvergens sor.) (5) -ben (3) és (4) értelmében  $k \geq 0$  esetében

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) (\cos kx - j \sin kx) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{-jkx} dx, \end{aligned}$$

míg  $k < 0$  esetében

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_{-k} + jb_{-k}}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) (\cos(-kx) + j \sin(-kx)) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{-jkx} dx. \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy  $c_k$  értékét  $k \geq 0$ , ill.  $k < 0$  esetén ugyanaz a képlet szolgáltatja, vagyis az exponenciális alakban felírt (5) Fourier-sor együtthatóira:

$$(6) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{-jkx} dx.$$

b) A Fourier-sor speciális függvénysor. Konvergensnek akkor mondjuk, ha részletösszegeinek sorozata konvergens. Exponenciális alakban írva fel a Fourier-sort ez azt jelenti, hogy az (5) sor konvergens, amennyiben az

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jkx}$$

(szimmetrikus) részletösszegek sorozata konvergens.

Mi az alábbiakban nem térünk ki annak részletes vizsgálatára, hogy milyen feltételek mellett konvergál valamely  $f(x)$  függvény Fourier-sora egy pontban, vagy egy intervallumban, csupán néhány - a gyakorlatban jól használható - konvergencia-kritériumot sorolunk fel.

#### Tétel

Ha  $f(x)$   $2\pi$  szerint periódikus, korlátos és integrálható függvény és egy  $x$  helyen  $f(x)$ -nek véges jobboldali és baloldali határértéke van és alkalmas  $K$  szám mellett  $h > 0$  esetén

$$(7) \quad \left| \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} \right| \leq K, \\ \left| \frac{f(x-h) - f(x-0)}{h} \right| \leq K,$$

akkor az  $x$  helyen  $f(x)$  Fourier-sora konvergens és összege

$$(8) \quad \frac{f(x-h) + f(x-0)}{2}.$$

Megjegyezzük, hogy a (7) egyenlőtlenségek fennállását elegendő csupán valamely  $\delta > 0$  mellett  $0 < h < \delta$  esetre megkivánnunk, mert ha  $M$  jelenti  $|f(x)|$  egy felső korlátját, akkor  $h \geq \delta$  esetén

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} \right| \leq \frac{2M}{\delta}, \\ \left| \frac{f(x-h) - f(x-0)}{h} \right| \leq \frac{2M}{\delta}.$$

E konvergencia-kritérium értelmében pl. ha  $f(x)$  az  $x$  helyen differenciálható, Fourier-sora konvergens, de ez már akkor is fennáll, ha  $f(x)$  -nek az  $x$  helyen van véges jobboldali és baloldali differenciálhányadosa. Ugyancsak teljesül a (7) feltétel, ha  $f(x)$  -nek az  $x$  helyen ugrása van, de a függvény görbéjének van az ugrási helyen jobb,-ill. baloldali érintője, amely nem párhuzamos az  $Y$  tengellyel.

Ha a (7) -nek eleget tevő  $f(x)$  Fourier-sora az  $x$  helyen konvergens, és  $f(x)$  az  $x$  helyen folytonos, akkor Fourier-sorának összege nyilvánvalóan

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x).$$

Előbbi tételünk igen általános feltevések mellett biztosítja  $f(x)$  Fourier-sorának konvergenciáját, de nem nyújt felvilágosítást arra nézve, hogy milyen gyors ez a konvergencia, nem szolgáltat jó becslést arra nézve, mennyire térnek el a Fourier-sor részletösszegei a sor összegétől. Jól használható becslésre akkor jutunk, ha az  $f(x)$  függvényről még felteesszük, hogy többször differenciálható.

Ha az  $(a, b)$  intervallum véges számú olyan szakaszra bontható, melyeknek mindegyikében az  $f(x)$  függvény monoton, akkor az  $f(x)$  Fourier-sora az  $(a, b)$  intervallum minden helyén konvergens, és összege a (8) képletbeli érték, ill.  $f(x)$  aszerint, hogy az  $x$  helyen  $f(x)$  nem folytonos, vagy folytonos.

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy  $f(x)$   $[a, b]$  -beli folytonossága Fourier-sora konvergenciájának sem nem szükséges, sem nem elégséges feltétele.

c) Gyakorlásként írjuk fel az alábbi függvények Fourier-sorát.

$$1^o \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0, \\ \frac{\tilde{\pi} - x}{2}, & \text{ha } 0 < x < 2\tilde{\pi}, \end{cases}$$

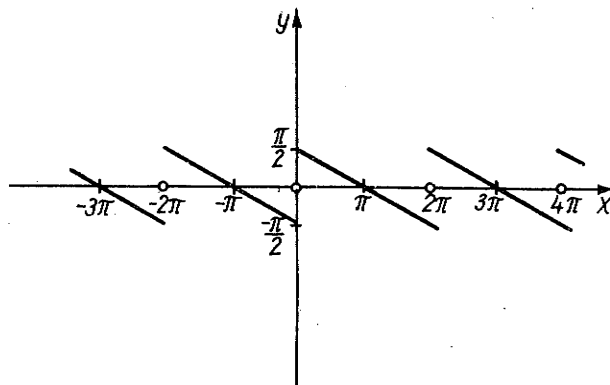
$f(x + 2k\tilde{\pi}) = f(x)$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ . A függvényt a 112. ábrán szemléltettük. Mivel  $f(x)$  páratlan függvény, Fourier-sora tiszta szinusz-sor:

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx + \dots,$$

ahol

$$b_n = \frac{1}{\tilde{\pi}} \int_0^{2\tilde{\pi}} \frac{\tilde{\pi} - x}{2} \sin nx \, dx = \frac{1}{\tilde{\pi}} \left[ \frac{\tilde{\pi} - x}{2} \frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{2\tilde{\pi}} -$$

$$- \frac{1}{\tilde{\pi}} \int_0^{2\tilde{\pi}} \frac{1}{2} \frac{\cos nx}{n} dx = \frac{1}{\tilde{\pi}} \left( \frac{\tilde{\pi}}{2n} + \frac{\tilde{\pi}}{2n} \right) - \frac{1}{2n\tilde{\pi}} \left[ \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\tilde{\pi}} = \frac{1}{n} .$$



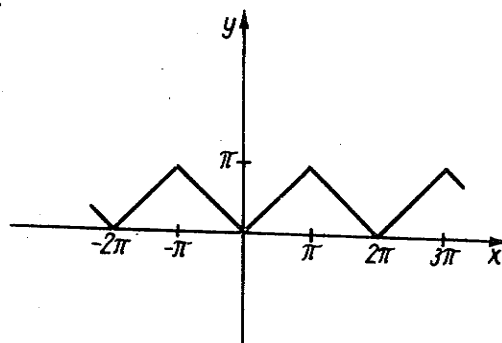
112. ábra

Mivel  $f(x)$  szakaszonként monoton függvény, Fourier-sora tehát konvergens, írható

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} .$$

A Fourier-sor minden  $x$ -re előállítja a függvényt (az  $x = 2k\tilde{\pi}$  helyeken  $f(x) = 0 = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ ).

2<sup>o</sup> Legyen  $g(x) = |x|$ , ha  $-\tilde{\pi} \leq x < \tilde{\pi}$ , különben pedig  $2\tilde{\pi}$  szerint periódikus.  $g(x)$  páros függvény (113. ábra), Fourier-sora tiszta koszinusz-sor:



113. ábra

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + \dots,$$

ahol

$$a_n = \frac{1}{\tilde{\kappa}} \int_{-\tilde{\kappa}}^{\tilde{\kappa}} |x| \cos nx \, dx = \frac{2}{\tilde{\kappa}} \int_0^{\tilde{\kappa}} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\tilde{\kappa}} \left[ x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\tilde{\kappa}} -$$

$$- \frac{2}{\tilde{\kappa}} \int_0^{\tilde{\kappa}} 1 \cdot \frac{\sin nx}{n} \, dx = - \frac{2}{n\tilde{\kappa}} \left[ -\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\tilde{\kappa}} = \frac{2}{n\tilde{\kappa}} ((-1)^n - 1) =$$

$$= \begin{cases} \frac{-4}{n^2 \tilde{\kappa}}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros;} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\tilde{\kappa}} \int_{-\tilde{\kappa}}^{\tilde{\kappa}} |x| \, dx = \frac{2}{\tilde{\kappa}} \int_0^{\tilde{\kappa}} x \, dx = \dots = \tilde{\kappa}.$$

Mivel  $g(x)$  szakaszonként monoton függvény, Fourier-sora konvergens, és mivel  $g(x)$  minden  $x$ -re folytonos, minden  $x$  helyen  $g(x)$ -et állítja elő:

$$g(x) = \frac{\tilde{\kappa}}{2} - \frac{4}{\tilde{\kappa}} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \dots \right).$$

<sup>3</sup> Legyen  $h(x) = \sin \mu x$  ( $\mu$  nem egész) ha  $0 \leq x < 2\pi$  és  $2\pi$  szerint periódikus függvény. E függvény Fourier-sorának exponenciális alakját (vagy másképp a komplex Fourier-sort) írjuk fel. ( $h(x)$  szakaszonként monoton függvény, így a Fourier-sor biztosan konvergens.)  
 $h(x)$  Fourier-sora:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkx},$$

ahol

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \mu x e^{-jkx} \, dx = \frac{1}{4\pi j} \int_0^{2\pi} (e^{j\mu x} - e^{-j\mu x}) e^{-jkx} \, dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi j} \int_0^{2\pi} (e^{j(\mu-k)x} - e^{-j(\mu+k)x}) dx = \frac{1}{4\pi j} \left[ \frac{e^{j(\mu-k)x}}{j(\mu-k)} - \frac{e^{-j(\mu+k)x}}{-j(\mu+k)} \right]_0^{2\pi} = \\
&= \frac{1}{4\pi j} \left( \frac{e^{j\mu 2\pi} - 1}{j(\mu-k)} + \frac{e^{-j\mu 2\pi} - 1}{j(\mu+k)} \right) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\mu}{\mu^2 - k^2} \frac{e^{j\mu 2\pi} + e^{-j\mu 2\pi}}{2} + \\
&+ \frac{k}{2\pi j(\mu^2 - k^2)} \frac{e^{j\mu 2\pi} - e^{-j\mu 2\pi}}{2j} + \frac{\mu}{2\pi(\mu^2 - k^2)} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-\mu \cos 2\pi\mu}{\mu^2 - k^2} + \frac{k \sin 2\pi\mu}{j(\mu^2 - k^2)} + \frac{\mu}{\mu^2 - k^2} \right).
\end{aligned}$$

A keresett Fourier-sor tehát:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{-\mu \cos 2\pi\mu}{\mu^2 - k^2} + \frac{k \sin 2\pi\mu}{j(\mu^2 - k^2)} + \frac{\mu}{\mu^2 - k^2} \right) e^{jkx}$$

és e sor az  $x \neq 2k\pi$  helyeken  $h(x)$ -et, az  $x = 2k\pi$  helyeken  $\frac{h(x+0) + h(x-0)}{2}$ -t állítja elő.

d) Gyakran előfordul, hogy egy  $f(x)$  függvény nem  $2\pi$ , hanem valamilyen más periódussal rendelkezik. Jelöljük ezt a periódust  $2\ell$ -lel, legyen tehát  $f(x)$  olyan függvény, melyre

$$f(x + 2\ell) = f(x)$$

minden  $x$ -re. Ekkor is - hasonló feltételek mellett, mint a  $2\pi$  szerint periódikus függvény esetében -  $f(x)$  trigonometrikus sorba fejthető.

Vezessük be ugyanis a  $\xi = \frac{\pi}{\ell} x$  változót, s jelöljük az  $f(x) = f(\frac{\ell}{\pi} \xi)$  függvényt  $\varphi(\xi)$ -vel. E  $\varphi(\xi)$  függvény már  $2\pi$  szerint periódikus, mert

$$\varphi(\xi + 2\pi) = f\left(\frac{\ell}{\pi}(\xi + 2\pi)\right) = f\left(\frac{\ell}{\pi}\xi + 2\ell\right) = f\left(\frac{\ell}{\pi}\xi\right) = \varphi(\xi).$$



Ha  $\varphi(\xi)$  a b) pontban felsorolt konvergencia-kritériumok valamelyikének eleget tesz, Fourier-sorba fejthető, vagyis

$$\varphi(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\xi + b_k \sin k\xi),$$

ahol:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \varphi(\xi) \cos n\xi \, d\xi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \varphi(\xi) \sin n\xi \, d\xi,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Visszatérve az  $f$  függvényre és az  $x$  változóra írhatjuk tehát:

$$\varphi(\xi) = f\left(\frac{\ell}{\pi} \xi\right) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{\pi}{\ell} x + b_k \sin k \frac{\pi}{\ell} x\right),$$

ahol az  $a_n$  és  $b_n$  együtthatók előbbi képletében a  $\xi = \frac{\pi}{\ell} x$  helyettesítést elvégezve adódik

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \varphi(\xi) \cos n\xi \, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} \xi\right) \cos n\xi \, d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\ell}{\pi}\alpha}^{\frac{\ell}{\pi}\alpha+2\ell} f(x) \cos \left(n \frac{\pi}{\ell} x\right) \cdot \frac{\pi}{\ell} dx = \frac{1}{\ell} \int_a^{a+2\ell} f(x) \cos n \frac{\pi}{\ell} x \, dx, \end{aligned}$$

ahol  $a = \frac{\ell}{\pi} \alpha$ . Hasonlóképpen adódik:

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_a^{a+2\ell} f(x) \sin n \frac{\pi}{\ell} x \, dx.$$

A következő definíciót mondhatjuk ki:

Ha  $f(x)$   $2\ell$  szerint periódikus korlátos és integrálható függvény, akkor az

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_a^{a+2\ell} f(x) \cos n \frac{\pi}{\ell} x \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_a^{a+2\ell} f(x) \sin n \frac{\pi}{\ell} x \, dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

képlettel megadott együtthatókat Fourier együtthatóknak, a velük felírt

$$(9) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \frac{\tilde{\ell}}{\ell} x + b_k \sin k \frac{\tilde{\ell}}{\ell} x)$$

trigonometrikus sort  $f(x)$  Fourier-sorának nevezzük.

Ezen általánosabb definícióból  $\ell = \tilde{\ell}$  esetén az a) pontban adott definíció adódik. Az ott elmondottakhoz hasonlóan most is páros  $f(x)$  esetében (9) -ben  $b_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); páratlan  $f(x)$  esetében pedig  $a_n = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). A b) pontban véghezvitt átalakításokat a (9) Fourier-sor esetében is elvégezhetjük, és így a (9) sor exponenciális alakjára jutunk:

$$(10) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \frac{\tilde{\ell}}{\ell} x + b_k \sin k \frac{\tilde{\ell}}{\ell} x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk \frac{\tilde{\ell}}{\ell} x},$$

ahol

$$c_k = \frac{1}{2\ell} \int_a^{a+2\ell} f(x) e^{-jk \frac{\tilde{\ell}}{\ell} x} dx.$$

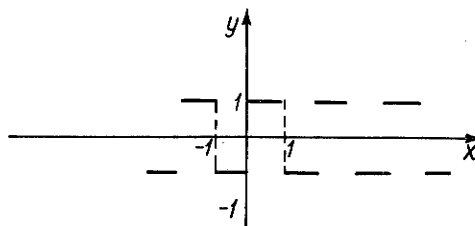
A b) pontban kimondott konvergencia-kritériumok természetesen a (9), ill. (10) Fourier-sor konvergenciáját is biztosítják.

Pl. az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ -1, & \text{ha } -1 < x < 0, \end{cases}$$

és 2 szerint periódikus függvény (lásd 114. ábra) páratlan, szakaszonként monoton, így tehát konvergens

$$b_1 \sin \tilde{\ell} x + b_2 \sin 2 \tilde{\ell} x + \dots + b_n \sin n \tilde{\ell} x + \dots$$



114. ábra

Fourier-sorba fejthető (most  $2\ell = 2$ , azaz  $\ell = 1$ ,  $k \frac{\pi}{\ell} = k\tilde{\pi}$ ), ahol

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin n \tilde{\pi} x \, dx = 2 \int_0^1 \sin n \tilde{\pi} x \, dx = \\ &= -2 \left[ \frac{\cos n \tilde{\pi} x}{n \tilde{\pi}} \right]_0^1 = -\frac{2}{n \tilde{\pi}} ( (-1)^n - 1 ) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{4}{n \tilde{\pi}}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases} \end{aligned}$$

$f(x)$  Fourier-sora tehát

$$\begin{aligned} &\frac{4}{\tilde{\pi}} \left( \sin \tilde{\pi} x + \frac{\sin 3\tilde{\pi} x}{3} + \dots + \frac{\sin (2k+1)\tilde{\pi} x}{2k+1} + \dots \right) = \\ &= \frac{4}{\tilde{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\tilde{\pi} x}{2k+1}. \end{aligned}$$

Az  $x \neq k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) folytonossági helyeken e sor összege  $f(x)$ , míg az  $x = k$  helyeken a sor összege  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$ .

Pl. az  $x = \frac{1}{2}$  helyen  $f(\frac{1}{2}) = 1$ , vagyis a fenti Fourier-sorba  $x = \frac{1}{2}$ -et helyettesítve

$$1 = \frac{4}{\tilde{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots \right),$$

azaz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots$$

adódik. (Más úton ugyanerre az eredményre jutottunk a Matematika I/2. jegyzet 23. fejezetében.)

e) A gyakorlatban gyakran előfordul, hogy egy függvényt grafikusán, vagy táblázattal adnak meg, és a későbbi vizsgálatok miatt célszerű a függvényt valamilyen analitikus kifejezés segítségével megadni. E célra jól használhatók a trigonometrikus sorok, feltéve persze, hogy a vizsgált tábl-

lázattal, vagy grafikusan megadott függvény közelítően eléggé pontosan fejezhető ki Fourier-sora első néhány tagjának összegével. A közelítő számítás lényege tehát a függvény Fourier-sora első néhány együtthatójának meghatározása. Ez jó közelítéssel megoldható az ezen együtthatókat szolgáltató integrálok közelítő kiszámításával. (Ezzel kapcsolatban lásd Matematika I/2. jegyzet 15. fejezetet.) Megjegyezzük azonban, hogy e közelítéseknél az integrálközelítő összegek felírásánál olyan osztópontokat célszerű felvenni, melyekben a trigonometrikus függvények értéke könnyen kiszámítható, pl. az argumentum  $\frac{\pi}{6}$  többszörösének adódik. Konkrétan, pl. egy  $2\pi$  szerint periódikus  $f(x)$  függvény esetében a  $(0, 2\pi)$  intervallumot az  $x_i = i \frac{2\pi}{12} = i \frac{\pi}{6}$  ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ) osztópontokkal  $\frac{\pi}{6}$  hosszúságú részintervallumokra bontva fel, az  $a_n$  és  $b_n$  Fourier-együtthatókat (lásd (3)) megközelítő alkalmas integrálközelítő összegek:

$$a_n \approx \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{6} \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) \cos nx_i, \quad b_n \approx \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{6} \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) \sin nx_i,$$

ahol a  $\cos nx_i$  és  $\sin nx_i$  függvényértékek váltakozva  $0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Harmonikus analízisnek nevezzük a matematikának azt a részét, amely a függvények trigonometrikus sorba való fejtésével foglalkozik, míg a grafikusan, vagy táblázattal megadott függvények trigonometrikus sorainak közelítő meghatározását szolgáló módszereket a gyakorlati harmonikus analízis tárgyalja.

A harmonikus analízátorok az adott  $f(x)$  függvény Fourier-együtthatóinak automatikus meghatározására szolgáló készülékek. A mechanikus elv alapján készített analízátorok két alapszerkezetből állnak: az "integráló" és az "analizáló" szerkezetből. Az integráló szerkezet valamilyen, határozott integrál kiszámítására szolgáló készülék, pl. planiméter. Az analizáló szerkezetnek speciális tüje van, amellyel ha felrajzoljuk az  $y = f(x)$   $2\pi$  szerint periódikus függvény görbét, a megfelelő konstrukció következtében az integráló készülék az  $f(x) \cos nx$ , ill.  $f(x) \sin nx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) függvények integrálját számítja ki (a planiméter csúcsa kényszermozgást végez az  $y = f(x) \cos nx$ , ill.  $f(x) \sin nx$  egyenletű görbék mentén). Egyes analízátorok több integráló készülékkel is rendelkeznek, ez lehetővé teszi, hogy a függvény görbéjének felrajzolásakor egyszerre több Fourier-együtthatót is kiszámíthassunk.

### 35. Fourier-integrál; Fourier-transzformáció

#### Definíció

Operátornak olyan műveleti utasítást nevezünk, amely a függvények bizonyos osztályának minden függvényéhez meghatározott módon egy másik függvényt rendel hozzá.

Ahelyett, hogy azt mondanók, egy operátort alkalmazunk valamely adott függvényre, gyakran azt mondjuk, hogy függvényünket valamely függvénytranszformációnak vetjük alá, az operátor alkalmazásával nyert függvényt pedig függvényünk transzformáltjának nevezzük.

Operátor pl. a függvény differenciálását előíró ún. differenciáloperátor, melyet a differenciálható függvények osztályába tartozó  $f(x)$  függvényre

alkalmazva a  $\frac{d f(x)}{dx} = f'(x)$  függvényre jutunk. Egy másik operátor pl. a  $(-\infty, +\infty)$  intervallum minden véges intervallumában korlátos és integrálható  $f(t)$  függvényekhez, melyekre  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  létezik, ún. Fourier-transzformáltjukat, az

$$(1) \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

függvényt hozzárendelő ún. Fourier-transzformáció. (Általában, ha egy függvényosztály  $f(t)$  függvényeihez a hozzárendelés egy integrál segítségével történik, akkor integráltranszformációról beszélünk.)

Az (1) -ben definiált Fourier-transzformációra a következőképpen juthatunk:

Tekintsünk egy  $f(\xi)$  függvényt, amelyről nem tesszük fel, hogy periódikus. Képezzünk egy  $g(\xi)$  függvényt, amely a  $(-T, T)$  szakaszban  $f(\xi)$  -vel megegyezik és  $2T$  szerint periodikus. Ha  $g(\xi)$  alkalmas feltételeknek eleget tesz (pl. differenciálható, vagy monoton),  $2T$  szerint periódikus tagokból álló Fourier-sorba fejthető, és ez a sor azután  $f(\xi)$  -t is előállítja a  $(-T, T)$  intervallumban. Megkíséreljük majd ezután elvégezni a  $T \rightarrow \infty$  határátmenetet és olyan kritériumot adunk meg, amelynek teljesülése esetén az előálló kifejezés  $f(\xi)$  -t már mindenütt előállítja.

A  $g(\xi)$  függvényt (és  $(-T, T)$  -ben  $f(\xi)$  -t is) előállító Fourier-sor exponenciális alakja:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk \frac{\tilde{\xi}}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-j \frac{\tilde{\xi}}{T} t} dt \right) e^{jk \frac{\tilde{\xi}}{T} \xi}$$

ahol a  $\sum$  jel mellett a  $\times$  azt jelenti, hogy a sor összegét az

$s_n = \sum_{k=-n}^n (\dots)$  részletösszegek sorozatának határértékeként ( $n \rightarrow \infty$  esetén) nyerjük.

Minthogy a  $T \rightarrow \infty$  határátmenetet akarjuk elvégezni, tegyünk az itt álló  $\int_{-T}^T$  integrál helyébe  $\int_{-\infty}^{+\infty}$   $-t$ , vezessük be továbbá az  $\omega_k = k \frac{\pi}{T}$  jelölést:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{T} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega_k t} dt \right) e^{j\omega_k \xi}.$$

Az

$$F(\omega_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega_k t} dt$$

jelöléssel ez így írható:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \times \frac{\pi}{T} F(\omega_k) e^{j\omega_k \xi}$$

ez pedig úgy fogható fel, mint az

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega \xi} d\omega$$

integrál azon közelítő összege, melyben a  $(-\infty, +\infty)$  intervallumot a

$$\dots < -\frac{5\pi}{2T} < -\frac{3\pi}{2T} < -\frac{\pi}{2T} < \frac{\pi}{2T} < \frac{3\pi}{2T} < \frac{5\pi}{2T} < \dots$$

osztópontokkal osztottuk részekre és közbülső pontoknak a

$$0, \pm \frac{\pi}{T}, \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{3\pi}{T}, \dots$$

pontokat választottuk.

Ha  $T \rightarrow \infty$ , akkor ez a beosztás minden határon túl finomodik, úgyhogy a határátmenet az

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega\xi} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \cdot e^{j\omega\xi} \right) d\omega$$

kifejezést szolgáltatja. E kifejezést az  $f(\xi)$  függvény Fourier-integráljának, a benne szereplő és (1) -ben külön már felírt  $F(\omega)$  függvényt pedig  $f(\xi)$  Fourier-transzformáltjának nevezzük.

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \text{jelentése: } \int_{-\infty}^{+\infty} \dots = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \dots \right)$$

Bebizonyítható, hogy ha  $f(\xi)$  minden véges intervallumban korlátos és integrálható és az  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  improprius integrál konvergens, továbbá

a vizsgált  $\xi$  hely környezetében olyan feltételnek tesz eleget, amely mellett a hely környezetében konvergens Fourier-sorba volna fejthető (pl. differenciálható, vagy egy intervallumban monoton), akkor  $f(\xi)$  Fourier-integrálja a  $\xi$  helyen konvergens, és ha  $\xi$  az  $f(\xi)$  függvénynek folytonossági helye, akkor

$$(3) \quad f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega\xi} d\omega.$$

Ez más szavakkal kifejezve azt mondja ki, hogy az adott feltételek mellett az (1) Fourier-transzformáció, mellyel az  $f(\xi)$  függvényhez az (1) -beli  $F(\omega)$  függvényt rendeltük hozzá, megfordítható, vagyis  $F(\omega)$  ismeretében a Fourier-transzformációnak alávetett  $f(\xi)$  függvényt a (2), ill. (3) képlettel kaphatjuk meg.

Megjegyezzük, hogy szokás a (2) Fourier-integrálban szereplő  $\frac{1}{2\pi}$  arányossági tényezőt a Fourier-transzformált képletéhez is csatolni, az alkalmazások miatt azonban célszerűbb a fent adott definíció.

(Ha  $\xi$  az  $f(\xi)$  függvénynek nem folytonossági helye - de az előbb elmondott további kikötések teljesülnek - a Fourier-integrál  $f(\xi)$  jobb- és baloldali határértékének számtani közepéhez konvergál.)

Az alábbiakban egy speciális integráltranszformációval, az un. Laplace-transzformációval fogunk foglalkozni, amely egyik igen alkalmas módja az operátorszámítás matematikailag precíz megalapozásának.

### 36. A Laplace-transzformáció fogalma és műveleti szabályai

a) Legyen a valós vagy komplex értékű  $f(t)$  függvény a  $(0, +\infty)$  intervallum minden véges részintervallumában korlátos és integrálható. Jelentsen  $p$  komplex számot.

#### Definíció

A fenti kikötéseknek eleget tevő  $f(t)$  függvény Laplace-integrálján az

$$(1) \quad F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

integrált értjük.

Általában persze ez az improprius integrál csak bizonyos  $p$  számokra lesz konvergens, mi a továbbiakban csak olyan  $p$  számok mellett fogjuk az (1) Laplace-integrált vizsgálni, amelyek mellett az abszolút konvergens, azaz

$$(2) \quad \int_0^{\infty} |f(t)| |e^{-pt}| dt$$

konvergens; ekkor nyilván (1) is konvergens. Az (1) -ben definiált integráltranszformációt Laplace-transzformációnak, a transzformációval nyert  $F(p)$  függvényt pedig  $f(t)$  Laplace-transzformáltjának nevezzük és így jelöljük:

$$F(p) = L \{ f(t) \} = \bar{f}(p).$$

Célszerű a továbbiakban megállapodnunk abban, hogy a Laplace-transzformációnak alávetett  $f(t)$  függvény  $t < 0$  esetében azonosan zérus.

Azon  $p$  számoknak, melyekre  $f(t)$  Laplace-integrálja abszolút konvergens, a komplex számsíkban való elhelyezkedését illetően a következő tételt mondhatjuk ki:

#### Tétel

A (2) integrál vagy egyetlen  $p$  -re sem konvergens, vagy minden  $p$  -re konvergens, vagy van olyan  $x_0$  valós szám, hogy (2)  $\operatorname{Re} p > x_0$  esetén konvergens,  $\operatorname{Re} p < x_0$  esetén divergens.



A tétel állítása értelmében tehát a konvergencia-tartományba eső  $p$  számok egy, a képzetes tengellyel párhuzamos egyenestől jobbra fekvő félsíkot töltenek ki, amely az egész síkra is kiterjedhet, de az is lehetséges, hogy a sík egy pontjában sem konvergens a (2) integrál.

### Bizonyítás

Állításunk igazolására először egy segéd-tételt bizonyítunk be:

Ha (2)  $p = p_1$  mellett konvergens, és  $\operatorname{Re} p_2 > \operatorname{Re} p_1$  akkor (2)  $p = p_2$  mellett is konvergens.

Állításunk a  $\operatorname{Re} p_1 = x_1$ ,  $\operatorname{Re} p_2 = x_2$  jelölések mellett abból adódik, hogy  $x_2 > x_1$  folytán

$$\left| e^{-p_2 t} \right| = e^{-x_2 t} \leq e^{-x_1 t} = \left| e^{-p_1 t} \right|,$$

hacsak  $t \geq 0$ , azaz

$$|f(t)| \left| e^{-p_2 t} \right| \leq |f(t)| \left| e^{-p_1 t} \right|,$$

és így

$$\int_0^{\infty} |f(t)| \left| e^{-p_1 t} \right| dt$$

konvergenciájából következik

$$\int_0^{\infty} |f(t)| \left| e^{-p_2 t} \right| dt$$

konvergenciája.

Ha a most felsorolt lehetőségek közül sem az első, sem a második nem következik be, akkor tekintsük a (2) integrál  $p$  konvergenciahelyeinek valós részeiből álló számokat. Ezek halmazának kell, hogy legyen alsó határa (különben (2) minden  $p$ -re konvergens lenne, ezt az esetet pedig kizártuk), jelöljük ezt  $x_0$ -al. Ekkor  $\operatorname{Re} p < x_0$  esetén (2) divergens. Ha  $\operatorname{Re} p > x_0$ , akkor legyen  $p_1$  olyan hely, melyen (2) konvergens, és amelyre

$$x_0 < \operatorname{Re} p_1 < \operatorname{Re} p.$$

A segédttétel értelmében ekkor (2) a  $p$  helyen konvergens. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Pl. az  $f(t) = 1$  ( $0 < t < +\infty$ ) függvény Laplace-integrálja  $\operatorname{Re} p > 0$  esetében konvergens:

$$\int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \left[ \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p},$$

hiszen  $t \rightarrow +\infty$  esetén  $|e^{-pt}| = e^{-xt} \rightarrow 0$ , ha  $x = \operatorname{Re} p > 0$ . Ezen  $p$  értékekre a Laplace-integrál abszolút konvergens, mert

$$\int_0^{\infty} |e^{-pt}| dt = \int_0^{\infty} e^{-xt} dt = \left[ \frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Az  $f(t) = 1$  függvény ( $0 < t < +\infty$ ) Laplace-transzformáltja tehát:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}, \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

Hasonlóképpen látható be, hogy az  $f(t) = e^{at}$  ( $0 < t < +\infty$ ) függvény (ahol a tetszőleges valós, vagy komplex szám) Laplace-transzformáltja

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \left[ \frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)} \right]_0^{\infty} = \\ &= 0 + \frac{1}{p-a} = \frac{1}{p-a}. \end{aligned}$$

E Laplace-integrál  $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$  esetében konvergens (ekkor ui.  $t \rightarrow +\infty$  esetén  $|e^{-(p-a)t}| = e^{-(\operatorname{Re} p - \operatorname{Re} a)t} = e^{(\operatorname{Re} a - \operatorname{Re} p)t} \rightarrow 0$ ).

Gyakran jól használhatjuk a Laplace-integrál konvergenciájának vizsgálatára szolgáló alábbi elégséges (de nem szükséges) feltételt:

Ha  $t \geq 0$  esetén

$$|f(t)| \leq K e^{\alpha t} \quad (\alpha \text{ valós}),$$

akkor  $\operatorname{Re} p > \alpha$  mellett  $f(t)$  Laplace-integrálja abszolút konvergens.

A  $\operatorname{Re} p = x$  jelöléssel ugyanis

$$|f(t)| |e^{-pt}| = |f(t)| e^{-xt} \leq K e^{\alpha t} e^{-xt} = K e^{(\alpha - x)t},$$

és mivel

$$\int_0^{\infty} K e^{(\alpha - x)t} dt = K \left[ \frac{e^{(\alpha - x)t}}{\alpha - x} \right]_0^{\infty} = -K \frac{1}{\alpha - x},$$

hiszen  $\alpha - x < 0$  folytán  $t \rightarrow +\infty$  esetén  $e^{(\alpha - x)t} \rightarrow 0$ , szükségképpen konvergens lesz

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad \text{is, ha} \quad x = \operatorname{Re} p > \alpha.$$

Eszerint pl. az  $f(t) = 5 e^{2t} \cos 3t$  függvény Laplace-integrálja abszolút konvergens, ha  $\operatorname{Re} p > 2$ , mert

$$|5 e^{2t} \cos 3t| \leq 5 e^{2t}.$$

A Laplace-transzformáció gyakorlati alkalmazása szempontjából is igen fontos állítást mond ki az alábbi tétel:

#### Tétel

Az  $f(t)$  függvény Laplace-transzformáltja

$$(\kappa) \quad F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

a jobboldali integrál abszolút konvergencia félsíkjaiban reguláris függvény, melynek deriváltja:

$$(\kappa\kappa) \quad \frac{dF(p)}{dp} = F'(p) = \int_0^{\infty} f(t) (-t) e^{-pt} dt = -\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\}.$$

E tétel ismételt alkalmazásával nyerjük, hogy:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}.$$

## Bizonyítás

Legyen  $x_0$  a  $(*)$  integrál abszolút konvergenciájának félsíkjában fekvő valós szám. A

$$F_k(p) = \int_k^{k+1} f(t) e^{-pt} dt$$

jelöléssel

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(p),$$

és ez a sor a  $\operatorname{Re} p > x_0$  félsíkban egyenletesen konvergens, mert itt

$$|F_k(p)| = \left| \int_k^{k+1} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_k^{k+1} |f(t)| |e^{-pt}| dt \leq \int_k^{k+1} |f(t)| e^{-x_0 t} dt$$

és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} |f(t)| e^{-x_0 t} dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-x_0 t} dt$$

a feltevés szerint konvergens. Elég tehát megmutatni, hogy a  $F_k(p)$  függvények mindenütt regulárisak, mert ebből a reguláris függvényekből álló egyenletesen konvergens sor összegének regularitását kimondó tétel szerint  $F(p)$  reguláris volta következik a  $\operatorname{Re} p > x_0$  félsíkban, s minthogy  $x_0$ -t a valós tengelynek az abszolút konvergencia félsíkjába eső részén tetszőlegesen választhattuk, az abszolút konvergencia félsíkjának minden pontjában is ugyanez áll.

Mármost

$$\begin{aligned} \frac{F_k(p+h) - F_k(p)}{h} &= \frac{1}{h} \int_k^{k+1} f(t) (e^{-(p+h)t} - e^{-pt}) dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_k^{k+1} f(t) e^{-pt} (e^{-ht} - 1) dt, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} & \frac{F_k(p+h) - F_k(p)}{h} + \int_k^{k+1} f(t) t e^{-pt} dt = \\ & = \int_k^{k+1} f(t) \left( \frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right) e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Itt azonban  $e^{-ht}$  hatványsor-alakját felhasználva

$$\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t = \frac{ht^2}{2!} - \frac{h^2 t^3}{3!} + \dots,$$

tehát

$$\begin{aligned} & \left| \frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right| \leq |h| t^2 \left( \frac{1}{2!} + \frac{|h| t}{3!} + \dots \right) \leq \\ & \leq |h| t^2 \left( 1 + \frac{|h| t}{1!} + \frac{|h|^2 t^2}{2!} + \dots \right) = |h| t^2 e^{|h| t} \leq |h| t^2 e^t, \end{aligned}$$

mihelyt  $|h| \leq 1$ . Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F_k(p+h) - F_k(p)}{h} + \int_k^{k+1} f(t) t e^{-pt} dt \right| \leq \\ & \leq |h| \int_k^{k+1} |f(t)| t^2 e^t |e^{-pt}| dt, \end{aligned}$$

és ez tart a 0-hoz, ha  $h \rightarrow 0$ . Eszerint  $F_k(p)$  valóban differenciálható, és

$$F'_k(p) = - \int_k^{k+1} f(t) t e^{-pt} dt.$$

Ebből ~~(az)~~ azonnal kiadódik, figyelembe véve az egyenletesen konvergencia tagonkénti deriválásáról szóló tételt, és azt, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} - \int_k^{k+1} f(t) t e^{-pt} dt = - \int_0^{+\infty} f(t) t e^{-pt} dt,$$

hiszen a jobboldali integrál konvergencia a  $\operatorname{Re} p > x_0$  félsíkban, minthogy

$$\begin{aligned} |f(t) t e^{-pt}| &= |f(t)| t e^{-xt} = |f(t)| e^{-x_0 t} t e^{(x_0 - x)t} \leq \\ &\leq C |f(t)| e^{-x_0 t}, \end{aligned}$$

ahol  $x = \operatorname{Re} p > x_0$  és  $C$  a  $t e^{(x_0 - x)t}$  függvénynek egy felső korlátja a  $[0, +\infty)$  intervallumban.

b) Lehetőleg sokféle függvény Laplace-transzformáltjának kiszámítása és a Laplace-transzformáció alkalmazásainak megkönnyítése céljából foglalkozunk össze a Laplace-transzformáció "műveleti szabályait". Ezek rendszerint két függvény Laplace-transzformáltja között állapítanak meg kapcsolatot; az ilyen kapcsolatok mindig abban a félsíkban érvényesek, amelyben a szereplő Laplace-integrálok mind abszolút konvergenssek. Ennek pontos megjelölését gyakran elhagyjuk, megállapítása mindig könnyen elvégezhető.

$$1^0 \quad \mathcal{L}\{c f(t)\} = c \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad (c \text{ állandó}).$$

$$2^0 \quad \mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

$$3^0 \quad \underline{\text{Ha}} \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = F(p), \quad \underline{\text{akkor}} \quad \mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(p).$$

E tételből következik annak ismételt alkalmazásával a korábban már levezetett

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$$

összefüggés felhasználásával, hogy

$$\mathcal{L}\{t\} = -\frac{d}{dp} \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = -\frac{d}{dp} \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^3},$$

$$\mathcal{L}\{t^3\} = -\frac{d}{dp} \frac{2}{p^3} = \frac{2 \cdot 3}{p^4} = \frac{3!}{p^4},$$

és általában

$$(3) \quad \mathcal{L}\{t^n\} = (-1)^n \frac{d^n \frac{1}{p}}{dp^n} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$4^o \quad \underline{\text{Ha}} \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = F(p), \quad \underline{\text{akkor}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(p - a)$$

(itt  $a$  tetszőleges valós, vagy komplex szám). Ezen állítást szokás I. Eltolási tételnek is nevezni.

Az állítást könnyű igazolni, mert valóban

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a).$$

E szabály segítségével is adódik előzőleg már közvetlenül kiszámított eredményünk:

$$(4) \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \mathcal{L}\{1 \cdot e^{at}\} = \frac{1}{p - a}$$

A (4) képlet alkalmazásával pedig adódik:

$$(5) \quad \mathcal{L}\{\cos at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2}\right\} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - ja} + \frac{1}{p + ja} \right) = \frac{p}{p^2 + a^2},$$

$$(6) \quad \mathcal{L}\{\sin at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{p - ja} - \frac{1}{p + ja} \right) = \frac{a}{p^2 + a^2}.$$

Mivel a gyakorlatban sokszor szerepel, külön megemlítjük még, hogy

$$(7) \quad \mathcal{L} \{ t^n e^{at} \} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}} .$$

5<sup>o</sup> Ha  $\alpha > 0$ , akkor

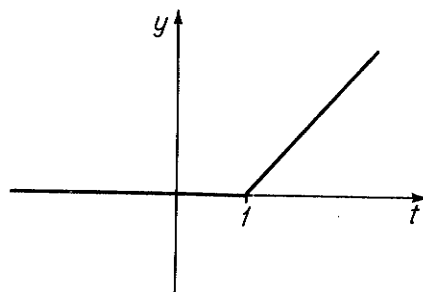
$$\mathcal{L} \{ f(t - \alpha) \} = e^{-\alpha p} \mathcal{L} \{ f(t) \} . \quad (\text{II. Eltolási tétel.})$$

Valóban, mivel megállapodásunk értelmében  $t < 0$  esetében  $f(t) = 0$ ,  $t < \alpha$  esetében  $f(t - \alpha) = 0$ , és így

$$\mathcal{L} \{ f(t - \alpha) \} = \int_0^{\infty} f(t - \alpha) e^{-pt} dt = \int_{\alpha}^{\infty} f(t - \alpha) e^{-pt} dt,$$

és ezen utóbbi integrálunkban az  $u = t - \alpha$  helyettesítést elvégezve nyerjük:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ f(t - \alpha) \} &= \int_0^{\infty} f(u) e^{-p(\alpha+u)} du = e^{-\alpha p} \int_0^{\infty} f(u) e^{-pu} du = \\ &= e^{-\alpha p} \mathcal{L} \{ f(t) \} , \end{aligned}$$



115. ábra

amint azt állítottuk.

Ha pl.

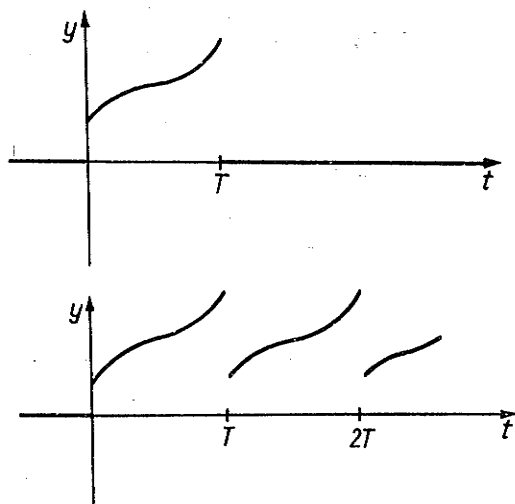
$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 1, \\ t-1, & \text{ha } t \geq 1 \end{cases}$$

(lásd 115. ábra), akkor

$$\mathcal{L} \{ f(t) \} = e^{-p} \cdot \frac{1}{p^2} .$$

6<sup>o</sup> Ha  $f(t)$  a  $(0, T)$  intervallumon kívül eltűnik,  $f(t)$  pedig az a  $T$  szerinti periódikus függvény, mely  $(0, T)$ -ben  $f_0(t)$ -vel megegyezik (116. ábra), akkor





116. ábra

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-Tp}} \mathcal{L}\{f_0(t)\}.$$

Valóban

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f_0(t-kT) e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T f_0(t-kT) e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTp} \mathcal{L}\{f_0(t)\} = \mathcal{L}\{f_0(t)\} \frac{1}{1-e^{-Tp}}, \quad \text{ha } \operatorname{Re} p > 0. \end{aligned}$$

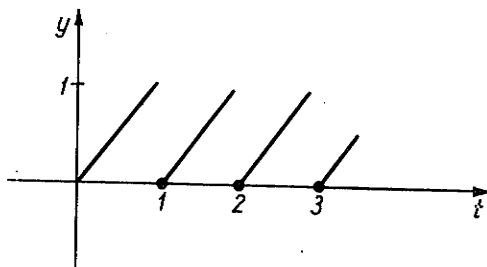
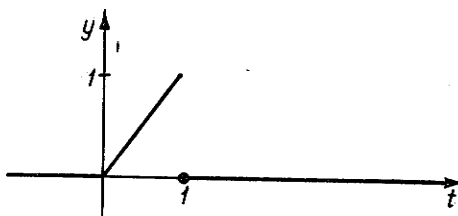
(Az egyes lépések során felhasználtuk, hogy  $f(t) = f_0(t-kT)$ , ha  $kT < t < (k+1)T$ , és  $f_0(t-kT)$  a  $(kT, (k+1)T)$  intervallumon kívül azonosan 0; alkalmaztuk a II. Eltolási tételt, végül pedig összegeztük a  $\operatorname{Re} p > 0$  esetében konvergens  $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTp}$  geometriai sort.)

Pl. a 117. ábrán szemléltetett függvény esetében

$$f_0(t) = \begin{cases} t, & \text{ha } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

vagyis az  $f_0(t)$  -vel  $[0, 1)$  -ben megegyező 1 szerint periódikus  $f(t)$  függvény Laplace-transzformáltja:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-p}} \cdot \mathcal{L}\{f_0(t)\} = \frac{1}{1-e^{-p}} \int_0^1 t e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{1-e^{-p}} \left( \left[ t \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-pt}}{-p} dt \right) = \\ &= \frac{1}{1-e^{-p}} \left( \frac{e^{-p}}{-p} + \frac{1}{p} \left[ \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^1 \right) = \\ &= \frac{1}{1-e^{-p}} \left( \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p} \right) = \frac{1 - e^{-p}(1+p)}{p^2(1-e^{-p})}. \end{aligned}$$



117. ábra

7° Ha  $f(t)$  a  $(0, +\infty)$  intervallumban folytonos és annak belsejében differenciálható függvény, és  $f'(t)$  Laplace-transzformáltja létezik, akkor  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  is létezik és

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

E fontos állítást egyelőre azon további megszorítás mellett bizonyítjuk be, hogy

$$(HH) \quad |f'(t)| \leq K e^{\alpha t} \quad (\alpha > 0).$$

(Ezen utóbbi feltétel - mint már említettük - elégséges, de nem szükséges  $\mathcal{L}\{f'(t)\}$  létezéséhez.)

Ha ul. (HH) fennáll, akkor könnyen belátható, hogy  $f(t)$  Laplace-transzformáltja is létezik, mert ekkor

$$\begin{aligned} |f(t)| &= \left| f(0) + \int_0^t f'(u) du \right| \leq |f(0)| + \int_0^t |f'(u)| du \leq \\ &\leq |f(0)| + \int_0^t K e^{\alpha u} du = |f(0)| + K \left[ \frac{e^{\alpha u}}{\alpha} \right]_0^t = \\ &= |f(0)| + K \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} \leq \left( |f(0)| e^{-\alpha t} + \frac{K}{\alpha} \right) e^{\alpha t} = C e^{\alpha t} \end{aligned}$$

ami pedig  $f(t)$  Laplace-integráljának konvergenciáját biztosítja.

Állításunk további részének igazolásához  $x = \operatorname{Re} p$  esetén parciálisan integrálva adódik:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt &= \left[ f(t) e^{-pt} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-p) e^{-pt} dt = \\ &= -f(0) + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \end{aligned}$$

mert  $t \rightarrow +\infty$  esetében

$$|f(t) e^{-pt}| = |f(t)| e^{-pt} < C e^{\alpha t} e^{-xt} = C e^{(\alpha-x)t} \rightarrow 0.$$

Az a tény, hogy az állítás a ~~(xx)~~ megszorítás nélkül is érvényes, későbbi eredményeinkből következni fog.

A derivált függvény Laplace-transzformáltjára tehát a következő összefüggés érvényes (célszerűbb jelöléssel):

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p \bar{f}(p) - f(0).$$

E szabályt  $f(t)$  helyett  $f'(t)$ , majd  $f''(t), \dots$ -re alkalmazva nyerjük:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = p \left( \mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \right) = p^2 \bar{f}(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n \bar{f}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Például

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(\cos at)'\} &= -a \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{-a^2}{p^2 + a^2} = \frac{p^2}{p^2 + a^2} - 1 = \\ &= p \mathcal{L}\{\cos at\} - \cos 0. \end{aligned}$$

<sup>8°</sup> Ha

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(x) dx, \quad \psi(0) = 0,$$

s ha  $\psi(t)$  és  $\varphi(t)$  függvények Laplace-transzformáltjai léteznek és  $\varphi(t)$  folytonos, akkor a  $\bar{\psi}(p)$  és  $\bar{\varphi}(p)$  Laplace-transzformáltak között fennáll a

$$\bar{\psi} = \frac{1}{p} \bar{\varphi}$$

összefüggés.

Valóban

$$\mathcal{L}\{\varphi(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d\psi}{dt}\right\} = p \bar{\psi}(p) - \psi(0),$$

azaz

$$\bar{\varphi} = p \bar{\psi},$$

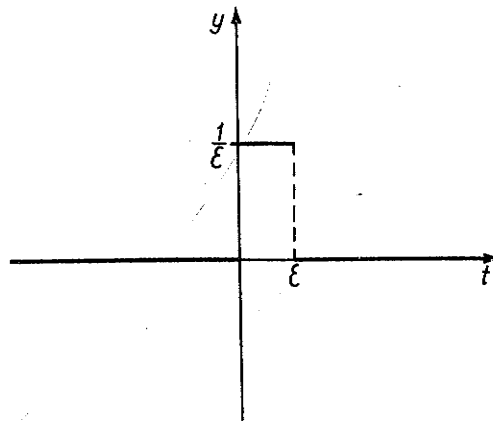
ahonnan átrendezéssel állításunk adódik.

### 36. Az impulzusfüggvény Laplace-transzformáltja

Néhány, a gyakorlatban gyakran előforduló esetben olyan elektromotoros erővel van dolgunk, amelyeknek értéke nagy, hatásuk azonban csak rövid ideig tartó, tehát pillanatnyi lökés, vagy impulzus jellegű van. Tegyük fel egyszerűség kedvéért, hogy az áram egységnyi töltést szállít; ekkor a fent részletezett tulajdonságu elektromotoros erőt közelítőleg az alább definiált  $\delta(t, \varepsilon)$  függvénnyel írhatjuk le:

$$\delta(t, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t = 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}, & \text{ha } 0 < t < \varepsilon, \\ 0, & \text{ha } t \geq \varepsilon, \end{cases}$$

ahol  $\varepsilon$  tetszőlegesen kicsiny szám lehet (118. ábra).



118. ábra

Határozzuk meg  $\delta(t, \varepsilon)$  és a folytonos  $f(t)$  függvény szorzata  $(0, a)$  intervallumra vonatkozó integráljának  $(a > 0)$  határértékét  $\varepsilon \rightarrow 0$  esetében. Nyilván

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^a \delta(t, \varepsilon) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \delta(t, \varepsilon) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\varepsilon} f(t) dt}{\varepsilon},$$

$\delta(t, \varepsilon)$  értelmezéséből folyóan.  $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} f(t) dt$  azonban nem más,  
mint  $\int_b^x f(t) dt$   $x = 0$  helyhez tartozó különbségi hányadosa:

$$\left[ \frac{\int_b^{x+\varepsilon} f(t) dt - \int_b^x f(t) dt}{\varepsilon} \right]_{x=0} = \left[ \frac{\int_x^{x+\varepsilon} f(t) dt}{\varepsilon} \right]_{x=0} = \frac{\int_0^{\varepsilon} f(t) dt}{\varepsilon},$$

e különbségi hányados határértéke pedig az integrandusz  $x = 0$  helyen vett helyettesítési értéke, vagyis  $f(0)$ . Irhatjuk tehát:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^a \delta(t, \varepsilon) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\varepsilon} f(t) dt}{\varepsilon} = f(0).$$

Ha  $\varepsilon \rightarrow 0$  esetén  $\delta(t, \varepsilon)$  egy  $\delta(t)$  limeszfüggvényhez tartana, és a határátmenet az integrálással az előbbi képletben felcserélhető volna, akkor az előbbi képletből

$$(1) \quad \int_0^a \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

adódna. Valójában  $\delta(t, \varepsilon)$  határértéke  $\varepsilon \rightarrow 0$  esetén 0, ha  $t \neq 0$ , és  $+\infty$ , ha  $t = 0$ , az ezzel az utasítással definiált  $\delta(t)$  függvényre azonban (1) baloldala nincs értelmezve, hiszen integrálni csak véges értékű függvényt tudunk. Valójában nincs is olyan  $\delta(t)$  függvény, amely az (1) egyenlőségnek minden folytonos  $f(t)$  függvény mellett eleget tenne. Mégis szokás beszélni olyan  $\delta(t)$  függvényről, amely (1) -nek eleget tesz, és ezt Dirac-féle függvénynek szokták nevezni. Ez a szóhasználat azonban helytelen, hiszen ilyen tulajdonságú függvény nincsen, ehelyett szabatosabban azt kell mondani, hogy olyan operációval állunk szemben, amely minden folytonos  $f(t)$  függvényhez a függvénynek  $f(0)$  helyettesítési értékét rendeli hozzá. Az ilyen (és még általánosabb) függvényoperációkkal a disztribúció-elmélet foglalkozik.

Ha (1) -et formálisan az  $f(t) = e^{-pt}$  függvényre alkalmazzuk, akkor

$$\int_0^a \delta(t) e^{-pt} dt = e^0 = 1$$

adódik, és innen  $a \rightarrow +\infty$  határátmenettel

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

Az itt mondottakat sokkal mélyebben megvilágíthatjuk, a Stieltjes-integrál fogalmának segítségével (Matematika I/2. jegyzet 49. fejezet).

Legyen az előbbi jelölésekkel

$$\Delta(t, \varepsilon) = \int_0^t \delta(u, \varepsilon) du.$$

A Stieltjes-integrálnak közönséges integrállá való átalakításáról szóló tétel értelmében könnyen látható, hogy

$$(2) \quad \int_0^a f(t) d\Delta(t, \varepsilon) = \int_0^a f(t) \delta(t, \varepsilon) dt.$$

Ha  $\varepsilon \rightarrow 0$ , akkor  $\Delta(t, \varepsilon) \rightarrow \Delta(t)$ , ahol  $t > 0$  esetén

$\Delta(t) = 1$ ,  $\Delta(0) = 0$ . A (2) egyenlőség baloldalán a határátmenetet szabad az integráljel alatt elvégezni, hiszen könnyen ellenőrizhető, hogy folytonos  $f(t)$  függvény esetén

$$(3) \quad \int_0^a f(t) d\Delta(t) = f(0),$$

és láttuk az előbb, hogy (2) jobboldala tényleg ehhez a határértékhez tart. A (3) integrált azonban már nem tudjuk közönséges integrállá alakítani, mert nem teljesül rá az átalakításnak az a feltétele, hogy  $\Delta(t)$  a  $[0, a]$  zárt intervallumban differenciálható legyen. Ha formálisan mégis alkalmazzuk az átalakítási képletet, akkor  $\Delta(t)$  deriváltjának  $t > 0$  esetén nyilván  $0$ -át,  $t = 0$  esetén pedig  $+\infty$ -t lehetne tekinteni, vagyis az

$$\int_0^a f(t) d\Delta(t) = \int_0^a f(t) \delta(t) dt$$

képlethez jutnánk. A valójában nem létező Dirac-féle függvény bevezetése tehát onnan eredt, hogy a Stieltjes-integrálokon szabatosan elvégezhető határátmenetet a Stieltjes-integrál fogalmának elkerülése érdekében közönséges integrálokra akarták elvégezni. Éppen ebben az esetben azonban ezáltal helytelen eredményhez, illetőleg a nemlétező Dirac-féle függvény fogalmához jutottak.

### 38. A Laplace-transzformáció megfordítása

A Laplace-transzformációnak a 36. fejezetben részletezett műveleti szabályai értelmében pl. a Laplace-transzformáció alkalmazásával egy állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet közönséges algebrai egyenletbe transzformálhatunk át. Ahhoz azonban, hogy ezen algebrai egyenlet megoldásából visszakövetkeztethessünk az eredeti differenciálegyenlet megoldására, ismernünk kell a Laplace-transzformáció megfordításának, az ún. visszatranszformálásnak technikáját.

a) Ha valamely  $f(t)$  függvény Laplace-transzformáltja  $F(p)$  valódi racionális törtfüggvény, e törtfüggvény részlettörtekre való bontása után tagonkénti visszatranszformálással történik a Laplace-transzformáció megfordítása.

A részlettörtekre való bontás különösen akkor egyszerű, ha

$$F(p) = \frac{u(p)}{v(p)},$$

és  $v(p)$ -nek csak egyszeres (valós vagy komplex) gyökei vannak. Mint a reziduum-számításnál említettük, a részlettörtek együtthatói ekkor könnyen kiszámíthatók, mégpedig, ha  $v(p)$   $n$ -edfokú polinom, melynek gyökei  $p_1, p_2, \dots, p_n$  (tehát  $v(p_i) = 0$ , és mivel  $p_i$  egyszeres gyök  $v'(p_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$F(p) = \frac{u(p)}{v(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{u(p_i)}{v'(p_i)} \cdot \frac{1}{p-p_i},$$

és így



$$(1) \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ F(p) \} = \sum_{i=1}^n \frac{u(p_i)}{v'(p_i)} e^{p_i t}.$$

Az (1) visszatranszformálási formulát szokás Heaviside-féle I. felbontási tételnek is nevezni. Pl.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4p + 13}{p^2 - 3p - 10} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{33}{7} \frac{1}{p-5} - \frac{5}{7} \frac{1}{p+2} \right\} = \frac{33}{7} e^{5t} - \frac{5}{7} e^{-2t};$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2p^2 + 3p + 8}{p^3 + 4p} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{p} - \frac{3j}{4} \frac{1}{p+2j} + \frac{3j}{4} \frac{1}{p-2j} \right\} = \\ &= 2 - \frac{3j}{4} e^{-2jt} + \frac{3j}{4} e^{2jt} = 2 + \frac{3}{2} \sin 2t; \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2p^3 - p^2 + 2p + 2}{p^4 + p^3} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} + \frac{3}{p+1} \right\} = t^2 - 1 + 3e^{-t}.$$

b) Előfordul, hogy egy adott  $F(p)$  függvény két olyan függvény szorzata, melyek ismert függvények Laplace-transzformáltjai. Ebben az esetben  $\mathcal{L}^{-1} \{ F(p) \} = f(t)$  meghatározására felhasználható a következő tétel:

#### Konvolúció tétel

Ha  $F(p) = G(p) \cdot H(p)$ , és  $G(p) = \mathcal{L} \{ g(t) \}$ ,  $H(p) = \mathcal{L} \{ h(t) \}$ ,  
akkor  $F(p) = \mathcal{L} \{ f(t) \}$ , ahol

$$(2) \quad f(t) = \int_0^t g(t-u)h(u) du.$$

A (2) képletben megadott  $f(t)$  függvényt a  $g(t)$  és  $h(t)$  függvények konvolúciójának nevezzük és  $g * h$ -val jelöljük.

Mielőtt a tételt bizonyítanánk, megjegyezzük, hogy könnyű belátni, hogy a konvolúció képzésének művelete kommutatív, azaz

$$g * h = h * g.$$

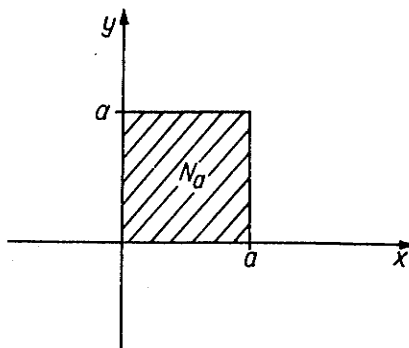
Ha ui. a (2) képletben a  $v = t - u$  helyettesítést alkalmazzuk, átlításunk azonnal adódik:

$$g * h = \int_0^t g(t-u) h(u) du = - \int_t^0 g(v) h(t-v) dv = \int_0^t h(t-v) g(v) dv = h * g.$$

A konvolúció-tételt mármost a következőképpen bizonyíthatjuk be: Tegyük fel, hogy  $p$  a  $g(t)$  és  $h(t)$  függvények Laplace-integráljának abszolút konvergencia félsíkjában fekszik. A  $G(p) \cdot H(p)$  szorzatot improprius kettős integrál alakjában felírva:

$$\begin{aligned} F(p) &= G(p) \cdot H(p) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt \cdot \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} g(x) e^{-px} dx \cdot \int_0^{\infty} h(y) e^{-py} dy = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \int_0^a g(x) e^{-px} dx \cdot \int_0^a h(y) e^{-py} dy \right] = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \iint_{N_a} g(x) h(y) e^{-p(x+y)} dx dy \right], \end{aligned}$$

ahol  $N_a$  a 119. ábrán látható négyzetet jelenti.



119. ábra

Persze egyuttal

$$F(p) = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{N_{\frac{a}{2}}} g(x)h(y)e^{-p(x+y)} dx dy ,$$

( $N_{\frac{a}{2}}$  jelentését lásd a 120. ábrán), ugyhogya  $T_a = N_a - N_{\frac{a}{2}}$

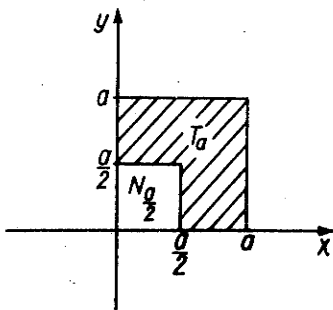
jelöléssel (lásd 120. ábra):

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{T_a} g(x)h(y)e^{-p(x+y)} dx dy = 0.$$

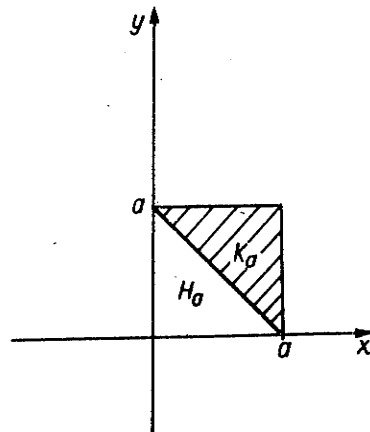
A szereplő integrálok abszolút konvergenciája miatt ugyanilyan okoskodással

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{T_a} |g(x)h(y)e^{-p(x+y)}| dx dy = 0,$$

ugyhogy a 121. ábra jelöléseivel, miután a  $K_a$  tartományt a  $T_a$  tartomány magában foglalja, és a nem-negatív  $|g(x)h(y)e^{-p(x+y)}|$  függvény integrálja a  $K_a$  tartományon legfeljebb akkora, mint a  $T_a$ -n, egyuttal adódik:



120. ábra



121. ábra

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{K_a} |g(x) h(y) e^{-p(x+y)}| dx dy = 0.$$

Igy annál inkább igaz:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \left| \iint_{K_a} g(x) h(y) e^{-p(x+y)} dx dy \right| &\leq \\ &\leq \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{K_a} |g(x) h(y) e^{-p(x+y)}| dx dy = 0, \end{aligned}$$

és ennek folytán

$$\begin{aligned} F(p) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{N_a} g(x) h(y) e^{-p(x+y)} dx dy = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{H_a} g(x) h(y) e^{-p(x+y)} dx dy + \\ &+ \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{K_a} g(x) h(y) e^{-p(x+y)} dx dy = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{H_a} g(x) h(y) e^{-p(x+y)} dx dy = \lim_{a \rightarrow \infty} R(a). \end{aligned}$$

Az előbb definiált  $R(a)$  integrált kétszeres integrállá átalakítva adódik:

$$\begin{aligned} R(a) &= \iint_{H_a} g(x) h(y) e^{-p(x+y)} dx dy = \\ &= \int_0^a \int_0^{a-x} g(x) h(y) e^{-p(x+y)} dy dx. \end{aligned}$$

A belső integrálban az  $x+y = t$  helyettesítést alkalmazva:

$$R(a) = \int_0^a \int_x^a g(x) h(t-x) e^{-pt} dt dx = \iint_{L_a} g(x) h(t-x) e^{-pt} dt dx$$

adódik, ahol  $L_a$  az  $(x, t)$  síkban a 122. ábrán látható tartomány.

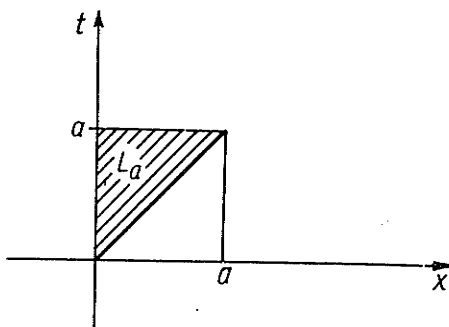
Az integrandusz  $L_a$ -n való integrálhatósága könnyen belátható. Először  $x$  szerint integrálva utóbbi kettős integrálunk a következő kétszeres integrállá alakítható át:

$$\begin{aligned} R(a) &= \int_0^a \int_0^t g(x) h(t-x) e^{-pt} dx dt = \\ &= \int_0^a e^{-pt} \left[ \int_0^t g(x) h(t-x) dx \right] dt = \int_0^a f(t) e^{-pt} dt, \end{aligned}$$

ahol  $f(t)$  a  $g(t)$  és  $h(t)$  függvények konvolúciója. Tehát

$$F(p) = \lim_{a \rightarrow \infty} R(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(t) e^{-pt} dt,$$

amit bizonyítani akartunk. Az okoskodást az abszolút értékek integráljára végezve el, kiderül, hogy ez az integrál is abszolút konvergens.



122. ábra

Alkalmazzuk először a konvolúció-tételt arra az esetre, amikor

$$h(t) \equiv 1.$$

Ekkor

$$f(t) = \int_0^t g(u) \cdot 1 \, du = \int_0^t g(u) \, du.$$

Mivel pedig  $H(p) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$ , adódik:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = G(p) \cdot H(p) = \frac{1}{p} G(p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}\{g(t)\},$$

tehát ha  $\mathcal{L}\{g(t)\}$  létezik, akkor létezik  $f(t) = \int_0^t g(u) \, du$  Laplace-transzformáltja is, és

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{p} \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Utóbbi okoskodásunkkal tehát általánosságban bebizonyítottuk a 36. fejezet 8<sup>o</sup> tételét.

Tegyük fel, hogy  $f(t)$  folytonos  $(0, +\infty)$ -ben, differenciálható annak belsejében, és  $\mathcal{L}\{f'(t)\}$  létezik. Előbbi tételünket alkalmazva,  $g(t)$  helyébe  $f'(t)$ -t,  $f(t)$  helyébe  $f(t) - f(0)$ -át írva adódik:

$$\mathcal{L}\{f(t) - f(0)\} = \frac{1}{p} f'(t),$$

tehát

$$\mathcal{L}\{f(t) - f(0)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \mathcal{L}\{f'(t)\},$$

és innen

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),$$

amivel a 36. fejezet 7<sup>o</sup> tételét sikerült most már teljes általánosságban igazolnunk.

A konvolúció-tétel alkalmazásával kiszámítható pl. az

$$f(t) = \sqrt{t}$$

függvény Laplace-transzformáltja.

A konvolúció-tétel levezetésénél alkalmazott jelölésekkel legyen

$$g(t) = h(t) = \sqrt{t}.$$

Ekkor  $g(t)$  és  $h(t)$  konvolúciója:

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t) * h(t) = \int_0^t \sqrt{u} \sqrt{t-u} \, du = \int_0^t \sqrt{tu-u^2} \, du = \\ &= \int_0^t \sqrt{\left(u - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} t^2} \, du. \end{aligned}$$

Az utóbbi integrálban az

$$u - \frac{t}{2} = \frac{t}{2} \sin u, \quad du = \frac{t}{2} \cos u \, du$$

helyettesítést alkalmazva:

$$f(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{4} \sin^2 u} \frac{t}{2} \cos u \, du = \frac{t^2}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \, du = \frac{\pi}{8} t^2.$$

Ennélfogva

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\pi}{8} t^2\right\} = \frac{\pi}{8} \frac{2}{p^3} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{p^3},$$

tehát

$$G(p) H(p) = (G(p))^2 = \frac{\pi}{4} \frac{1}{p^3},$$

és így

$$G(p) = \mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}.$$

A konvolúció-tétel alkalmazásával például:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2p^2 + 3p + 8}{p^3 + 4p}\right\} &= 2 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2 + 4}\right\} + \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^2 + 4}\right\} + 4 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 + 4}\right\} \\ &= 2 \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t + 4 \int_0^t 1 \cdot \sin 2u \, du = \end{aligned}$$

$$= 2 \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t + 2(1 - \cos 2t) = 2 + \frac{3}{2} \sin 2t.$$

c) Mielőtt általánosságban felvetnők a Laplace-transzformáció megfordításának kérdését, utalnunk kell a Laplace-transzformáció és a Fourier-transzformáció közötti kapcsolatra.

Feküdjék  $p = x + jy$  az  $f(t)$  függvény Laplace-integráljának,  

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$
-nek abszolút konvergencia-félsíkjaiban. Ekkor

$$F(p) = F(x+jy) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(x+jy)t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} e^{-jyt} dt.$$

Mint hogy megállapodásunk szerint  $t < 0$  esetén  $f(t) = 0$ , azért fenti összefüggésünk így is írható:

$$F(x+jy) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-xt} e^{-jyt} dt.$$

Az itt álló integrál abszolút konvergens, tehát  $|e^{-jyt}| = 1$  folytán

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) e^{-xt}| dt$  konvergens. Eszerint az abszolút konvergencia félsíkjaiba eső valós  $x$  mellett  $F(x+j\omega)$  nem más, mint  $f(t) e^{-xt}$  Fourier-transzformáltja. Alkalmazva a Fourier-transzformáció megfordítására vonatkozó tételt (35. fejezet) olyan  $\xi$  helyen, ahol pl.  $f(t)$  differenciálható (és így  $f(t) e^{-xt}$  is differenciálható),

$$\begin{aligned} f(\xi) e^{-x\xi} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+j\omega) e^{j\omega\xi} d\omega, \\ f(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+j\omega) e^{(x+j\omega)\xi} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_{x-j\omega}^{x+j\omega} F(u) e^{u\xi} du, \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben az  $x + j\omega = u$  helyettesítést alkalmaztuk, az utóbbi integrált pedig a  $\operatorname{Re} u = x$  egyenesen  $x - jy$ -től



$x + jy$  -ig számított integrál határértékeként értelmeztük. (Ti.  $y \rightarrow \infty$  esetén.)

Bebizonyítottuk tehát a következő tételt:

Ha a valós  $x$  szám az  $f(t)$  függvény Laplace-integráljának abszolút konvergencia félsíkjában fekszik, akkor minden olyan  $\xi$  helyen, ahol pl.  $f(t)$  differenciálható

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_{x-j\omega}^{x+j\omega} F(u) e^{u\xi} du.$$

Ezt a képletet Riemann-Mellin-féle formulának nevezik.

E formulából kiindulva igazolható a következő állítás:

Ha az  $f(t)$  és a  $g(t)$  függvények Laplace-transzformáltja megegyezik, akkor  $f(t)$  és  $g(t)$  e függvények folytonossági helyein megegyezik egymással.

Ezen állítással választ adtunk - ha nem is teljes általánosságban - a Laplace-transzformáció megfordításának egyértelműségére vonatkozó kérdésre.

A Riemann-Mellin-féle formulában álló integrál rendszerint nem számítható ki elemi uton, s ezért nem alkalmas  $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$  meghatározására. Gyakran lehetséges azonban az integrál meghatározása kerülő uton. Tegyük fel ebből a célból a következőket:

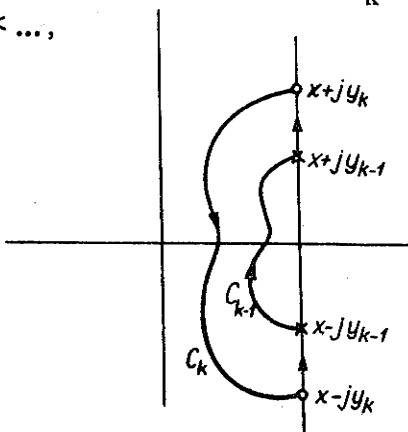
Legyen  $F(p)$  az egész síkon reguláris, kivéve bizonyos  $p_1, p_2, p_3, \dots$  helyeken fekvő pólusokat. Válasszuk meg az  $Y_k$  számokat úgy, hogy  $0 < Y_1 < Y_2 < Y_3 < \dots$ ,

$Y_k \rightarrow \infty$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) legyen.

Feküdjék a valós  $x$  szám  $F(p)$  Laplace-integráljának abszolút konvergencia-félsíkjában, s kössük össze az  $x+jY_k$  és  $x-jY_k$  pontokat olyan  $C_k$  görbékkel,

hogy a  $C_k$  görbét az  $x-jY_k$ -ből  $x+jY_k$ -ba vezető  $L_k$  egyenesdarabbal kiegészítve egy  $J_k$

többszörös pont nélküli zárt



123. ábra

rektifikálható görbét nyerjük, s a  $J_k$  görbék mindegyike belsejében tartalmazza a  $C_{k-1}$  görbét (123. ábra). Tegyük fel, hogy a  $C_k$  görbék nem haladnak át  $F(p)$  egyik pólusán sem, s hogy a  $J_k$  görbék mindegyike  $F(p)$ -nek csak véges számú pólusát tartalmazza a belsejében. Tegyük fel még, hogy ha  $k \rightarrow \infty$ , akkor  $\xi \geq 0$  esetén

$$\int_{C_k} F(u) e^{u\xi} du \rightarrow 0.$$

Ezen feltételek mellett, ha  $F_k(p)$  jelenti az  $F(p)$  függvénynek a  $C_{k-1}$  és  $C_k$  görbék közötti gyűrűalakú tartományban fekvő pólusaihoz tartozó Laurent-soraiban a negatív kitevőjű tagok összegét, akkor minden olyan helyen, ahol pl.  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$  differenciálható, fennáll

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}\{F_k(p)\}.$$

Ezt a formulát szokták Heaviside-féle felbontási tételnek nevezni. (Az előbb a) -ban felírt Heaviside-féle I. felbontási tétel a fentiek nyilvánvaló speciális eseteként adódik.)

A Riemann-Mellin-formula szerint ugyanis (az integrációs változót  $p$ -vel jelölve)

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{x-jY_n}^{x+jY_n} F(p) e^{p\xi} dp = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{L_n} F(p) e^{p\xi} dp = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{J_n} f(p) e^{p\xi} dp, \end{aligned}$$

minthogy feltevésünk szerint a  $C_n$  menti integrál zérushoz tart. A reziduum-tétel szerint azonban

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{J_n} F(p) e^{p\xi} dp = \sum \text{Res} (F(p) e^{p\xi}),$$

ahol az összegezést  $F(p) e^{p\xi}$ -nek a  $J_n$  görbe belsejébe eső singuláris helyeire, azaz  $F(p)$ -nek  $J_n$  belsejébe eső pólusaira kell kiterjeszteni. Ha azonban  $p = a$  egy ilyen pólus, ahol  $F(p)$  Laurent-sora

$$F(p) = \frac{C_{-r}}{(p-a)^r} + \frac{C_{-r+1}}{(p-a)^{r-1}} + \dots + \frac{C_{-1}}{p-a} + C_0 + C_1 (p-a) + \dots,$$

akkor az

$$e^{p\xi} = e^{a\xi} e^{(p-a)\xi} = e^{a\xi} + \frac{e^{a\xi} \xi}{1!} (p-a) + \frac{e^{a\xi} \xi^2}{2!} (p-a)^2 + \dots$$

sorfejtés figyelembevételével

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=a} (F(p) e^{p\xi}) &= C_{-1} e^{a\xi} + C_{-2} \frac{e^{a\xi} \xi}{1!} + C_{-3} \frac{e^{a\xi} \xi^2}{2!} + \dots + \\ &+ C_{-r} \frac{e^{a\xi} \xi^{r-1}}{(r-1)!}, \end{aligned}$$

és könnyű meggyőződni arról, hogy ez nem más, mint

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{C_{-1}}{p-a} + \frac{C_{-2}}{(p-a)^2} + \frac{C_{-3}}{(p-a)^3} + \dots + \frac{C_{-r}}{(p-a)^r} \right\}.$$

Eszerint

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{J_n} F(p) e^{p\xi} dp = \sum_{k=1}^n \mathcal{L}^{-1} \{ F_k(p) \},$$

és az  $n \rightarrow \infty$  határátmenet állításunkat adja.

39. A Laplace-transzformáció alkalmazása közönséges,  
állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek  
és differenciálegyenletrendszerek megoldására

A 36. fejezetben közölt műveleti szabályok értelmében közönséges, állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletekre, ill. differenciálegyenletrendszerekre a Laplace-transzformációt alkalmazva, azok közönséges algebrai egyenletekbe, ill. egyenletrendszerekbe mennek át. Mivel e transzformálás során elsősorban a derivált függvény Laplace-transzformáltját szolgáltató  $7^o$  állítást kell alkalmaznunk, rögtön látható, hogy Laplace-transzformációval mindig adott kezdeti feltételnek eleget tevő partikuláris megoldást célszerű meghatározni. Differenciálegyenletek általános megoldásának meghatározására a Laplace-transzformáció alkalmazása nem jelent a régebben megismert módszerekhez képest lényeges egyszerűsítést.

a) Keressük az

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$$

differenciálegyenletnek ( $y = y(t)$ ) az

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

kezdeti feltételeket kielégítő megoldását.

Abból a feltételből indulva ki, hogy a keresett megoldásnak és első két deriváltjának van Laplace-transzformáltja, a

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$$

jelöléssel, miután

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p) - y(0) = pY(p)$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = p^2Y(p) - p y(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1,$$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{p-2},$$

differenciálegyenletünk mindkét oldalára Laplace-transzformációt alkalmazva adódik:

$$p^2Y - 1 - 4pY + 4Y = \frac{1}{p-2},$$

$$(p-2)^2 Y - 1 = \frac{1}{p-2},$$

$$Y = \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{(p-2)^3}.$$

Itt tagonként közvetlenül visszatranszformálhatunk:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ Y(p) \} = y(t) = te^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$$

(alkalmaztuk az I. Eltolási tételt).

Visszahelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy  $y(t)$  a differenciálegyenletnek adott kezdeti feltételeket kielégítő megoldása.

b) Keressük meg az  $y(x)$  függvényre vonatkozó

$$2y^{(3)} + 6y'' + 5y' + 2y = x$$

differenciálegyenletnek az

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -1$$

kezdeti feltételnek eleget tevő megoldását.

Feltéve, hogy a keresett megoldásnak és első három deriváltjának van Laplace-transzformáltja, a Laplace-transzformáció alkalmazásával adódik (a szokott jelölésekkel):

$$2(p^3 Y - p^2 + p + 1) + 6(p^2 Y - p + 1) + 5(pY - 1) + 2Y = \frac{1}{p^2}.$$

Innen  $Y$ -t kifejezve és a nyert racionális törtfüggvényt részlet-törtekre bontva kapjuk:

$$Y = \frac{2p^4 + 4p^3 - 3p^2 + 1}{p^2(2p^3 + 6p^2 + 5p + 2)} = \frac{2p^4 + 4p^3 - 3p^2 + 1}{2p^2(p+2)(p + \frac{1}{2} - \frac{j}{2})(p + \frac{1}{2} + \frac{j}{2})} = \dots =$$

$$= -\frac{5}{4} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} - \frac{11}{20} \frac{1}{p+2} + \frac{7+6j}{5} \frac{1}{p + \frac{1}{2} - \frac{j}{2}} + \frac{7-6j}{5} \frac{1}{p + \frac{1}{2} + \frac{j}{2}}.$$

Innen tagonként visszatranszformálva nyerjük:

$$\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{5}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{11}{10}e^{-2x} + \frac{7+6j}{5}e^{(-\frac{1}{2} + \frac{j}{2})x} + \\
&+ \frac{7-6j}{5}e^{(-\frac{1}{2} - \frac{j}{2})x} = \\
&= -\frac{5}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{11}{20}e^{-2x} + \frac{2}{5}e^{-\frac{x}{2}}(7\cos\frac{x}{2} - 6\sin\frac{x}{2}) .
\end{aligned}$$

Itt is könnyen meggyőződhetünk arról, hogy  $y(x)$  a differenciálegyenletet az adott kezdeti feltételek mellett kielégítő megoldása.

c) Tekintsük az alábbi lineáris állandó együtthatós elsőrendű differenciálegyenletrendszert:

$$5y' + 4z' + y = 2,$$

$$2y' + 4z' + 2z = e^t.$$

Határozzuk meg a differenciálegyenletrendszernek

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 0$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

A  $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$ ,  $\mathcal{L}\{z(t)\} = Z(p)$  jelöléssel, a Laplace-transzformáció alkalmazása után a következő algebrai egyenletrendszerre jutunk:

$$5(pY - 1) + 4pZ + Y = \frac{2}{p},$$

$$2(pY - 1) + 4pZ + 2Z = \frac{1}{p-1}.$$

Rendezve:

$$(5p + 1)Y + 4pZ = \frac{5p + 2}{p},$$

$$2pY + (4p+2)Z = \frac{2p - 1}{p - 1}.$$

Innen

$$Y = \frac{6p^3 + p^2 - 7p - 2}{(6p^2 + 7p + 1)(p-1)p} = \dots = \frac{2}{p} - \frac{1}{7} \frac{1}{p-1} + \frac{6}{7} \frac{1}{p + \frac{1}{6}},$$

vagyis tagonként visszatranszformálva:

$$y(t) = 2 - \frac{1}{7} e^t - \frac{6}{7} e^{-\frac{t}{6}}.$$

Hasonló számítással

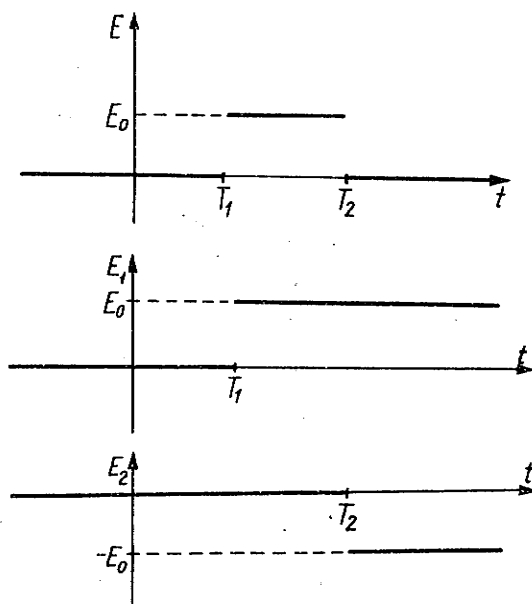
$$Z = \frac{3p + 3}{(12p^2 + 14p + 2)(p-1)} = \dots = \frac{3}{14} \frac{1}{p-1} - \frac{3}{14} \frac{1}{p + \frac{1}{6}},$$

tehát visszatranszformálva adódik:

$$z(t) = \frac{3}{14} e^t - \frac{3}{14} e^{-\frac{t}{6}}.$$

Visszahelyettesítve könnyen meggyőződhetünk arról, hogy  $y(t)$  és  $z(t)$  talált értéke valóban megoldása feladatunknak.

d) Tekintsünk egy sorbakapcsolt  $L$  önindukciót és  $R$  ohmikus ellenállást tartalmazó áramkört, amelyben az elektromotoros erőt a 124. ábrán látható  $E(t)$  függvény adja meg.



124. ábra

Az  $I(t)$  áramintenzitás ekkor a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Az  $I(0) = I_0$  kezdeti feltétel mellett a Laplace-transzformációt alkalmazva az

$$\mathcal{L}\{I(t)\} = \bar{I}(p)$$

$$\mathcal{L}\{E(t)\} = \bar{E}(p)$$

jelöléssel az

$$R \bar{I} + L(p \bar{I} - I_0) = \bar{E}$$

egyenlet adódik. Az  $E$  Laplace-transzformáltat a következőképp határozhatjuk meg. Mint a 124. ábrán látható

$$E = E_1 + E_2,$$

ahol a II. Eltolási tétel értelmében (36. fejezet 5<sup>o</sup>)

$$\bar{E}_1 = e^{-T_1 p} \frac{E_0}{p},$$

$$\bar{E}_2 = -e^{-T_2 p} \frac{E_0}{p},$$

és így

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \frac{E_0}{p} (e^{-T_1 p} - e^{-T_2 p}).$$

A differenciálegyenletből a Laplace-transzformáció alkalmazásával nyert algebrai egyenlet:

$$(R + Lp) \bar{I} - L I_0 = \frac{E_0}{p} (e^{-T_1 p} - e^{-T_2 p}),$$

ahonnan

$$\bar{I} = \frac{L I_0}{R + Lp} + \frac{E_0}{p(R + Lp)} (e^{-T_1 p} - e^{-T_2 p}) = \dots =$$



$$= \frac{I_o}{p + \frac{R}{L}} + \frac{E_o}{R} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right) (e^{-T_1 p} - e^{-T_2 p}).$$

A visszatranszformálásnál is alkalmazva a II. Eltolási tételt, adódik:

$$I(t) = \begin{cases} I_o e^{-\frac{R}{L}t}, & \text{ha } t < T_1, \\ I_o e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_o}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}(t - T_1)}), & \text{ha } T_1 < t < T_2, \\ I_o e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_o}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}(t - T_1)} - e^{-\frac{R}{L}(t - T_2)}), & \text{ha } t > T_2. \end{cases}$$

e) Tekintsünk újra egy sorbakapcsolt  $L$  önindukciót és  $R$  ohmikus ellenállást tartalmazó áramkört, melyben azonban az elektromotoros erőt a 117. ábrán látható periódikus  $f(t)$  függvény adja meg. Vizsgáljuk az áram bekapcsolásának esetét, vagyis legyen a kezdeti feltétel:  $I(0) = 0$ .

Megoldandó differenciálegyenletünk:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = f(t), \quad I(0) = 0,$$

$$f(t) = f_o(t), \quad \text{ha } 0 < t < 1, \quad f(t+k) = f(t) \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

$$f_o(t) = \begin{cases} t, & \text{ha } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Differenciálegyenletünkre a Laplace-transzformációt alkalmazva (a szokott jelöléssel), felhasználva a 36. fejezet 6<sup>o</sup> példájának eredményét

$$(\mathcal{L} \{f(t)\}) = \frac{1 - e^{-p} - pe^{-p}}{p^2(1 - e^{-p})} \quad \text{adódik:}$$

$$Lp\bar{I} + R\bar{I} = \frac{1 - e^{-p} - pe^{-p}}{p^2(1 - e^{-p})},$$

illetve

$$\bar{I} = \frac{1 - e^{-p} - p e^{-p}}{(Lp+R) p^2 (1-e^{-p})}.$$

Feltéve, hogy a Heaviside-féle tétel feltételei ki vannak elégítve,

$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{I}(p)\} = I(t)$  meghatározása így történhetik:

$$\bar{I}(p) \text{ pólusai a } p=0, \quad p = -\frac{R}{L} \text{ és } p_k = 2k\pi j \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

helyek.

A  $p = 0$  helyre nézve:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-p} - p e^{-p} &= 1 - \left(1 - \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} - \frac{p^3}{3!} + \dots\right) - p \left(1 - \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} - \dots\right) = \\ &= \frac{p}{1!} - \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} - \dots + -p + \frac{p^2}{1!} - \frac{p^3}{2!} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{3} p^3 + \dots, \end{aligned}$$

és mivel

$$p^2 (1-e^{-p}) = \frac{p^3}{1!} - \frac{p^4}{2!} + \dots,$$

írhatjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-p} - p e^{-p}}{p^2 (1 - e^{-p})} &= \frac{\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{3} p^3 + \dots}{p^3 - \frac{1}{2} p^4 + \dots} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} p + \dots}{p(1 - \frac{1}{2} p + \dots)} = \\ &= \frac{1}{p} \left( \frac{1}{2} + C_1 p + \dots \right). \end{aligned}$$

Igy tehát

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-p} - p e^{-p}}{(Lp+R)p^2 (1-e^{-p})} &= \frac{1}{p} \frac{\frac{1}{2} + C_1 p + \dots}{R + Lp} = \frac{1}{p} \left( \frac{1}{2R} + d_1 p + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2R} \frac{1}{p} + d_1 + \dots, \end{aligned}$$

ugyhogy a  $p = 0$  hely elsőrendű pólus, a Laurent-sor  $F_k(0)$ -al jelölt ún. főrésze (lásd 38. fejezet)  $\frac{1}{2Rp}$ , a felbontás megfelelő tagja:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2Rp} \right\} = \frac{1}{2R}.$$

A  $p = -\frac{R}{L}$  hely nyilván elsőrendű pólus, ahol a reziduum:

$$A = \left[ \frac{1 - e^{-p} - pe^{-p}}{Lp^2(1 - e^{-p})} \right]_{p=-\frac{R}{L}} = \dots = \frac{L + e^{\frac{R}{L}}(R - L)}{R^2(1 - e^{R/L})},$$

az  $e$  helyhez tartozó Laurent-sor főrésze  $\frac{A}{p + \frac{R}{L}}$ , s a felbontás megfelelő tagja

$$Ae^{-\frac{R}{L}t} = \frac{L + e^{\frac{R}{L}}(R - L)}{R^2(1 - e^{\frac{R}{L}})} e^{\frac{R}{L}t} = \left( \frac{L}{R^2} + \frac{e^{\frac{R}{L}}}{R(1 - e^{\frac{R}{L}})} \right) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Végül a  $p_k = 2k\pi j$  hely ugyancsak elsőrendű pólus, ahol a reziduum

$$\left[ \frac{1 - e^{-p} - pe^{-p}}{(Lp+R)p^2 e^{-p}} \right]_{p=2k\pi j} = \frac{1 - 1 - 2k\pi j}{(L2k\pi j + R)(-4k^2\pi^2)} = \frac{j}{2k\pi(2k\pi Lj + R)},$$

tehát a Laurent-sor főrésze

$$\frac{j}{2k\pi(2k\pi Lj + R)} \frac{1}{p - 2k\pi j},$$

s a felbontás megfelelő tagja:

$$\frac{j}{2k\pi(2k\pi Lj + R)} e^{2k\pi jt}.$$

A  $p_k$  és  $p_{-k}$  helyeknek megfelelő tagokat összevonva, az Euler-összefüggést alkalmazva nyerjük:

$$\frac{j}{2k\tilde{\omega} (2k\tilde{\omega} L_j + R)} e^{2k\tilde{\omega} jt} + \frac{j}{-2k\tilde{\omega} (-2k\tilde{\omega} L_j + R)} e^{-2k\tilde{\omega} jt} - \dots =$$

$$= \frac{2k\tilde{\omega} L \cos 2k\tilde{\omega} t - R \sin 2k\tilde{\omega} t}{k\tilde{\omega} (R^2 + 4k^2\tilde{\omega}^2 L^2)}.$$

Végeredményben tehát a visszatranszformálást elvégezve nyerjük:

$$I(t) = \frac{1}{2R} + \left( \frac{L}{R^2} + \frac{e^{R/L}}{R(1 - e^{R/L})} \right) e^{(-R/L)t} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\tilde{\omega} L \cos 2k\tilde{\omega} t - R \sin 2k\tilde{\omega} t}{k\tilde{\omega} (R^2 + 4k^2\tilde{\omega}^2 L^2)}.$$

Meg lehet mutatni, hogy a talált függvény feladatunknak valóban megoldása. (A felbontási tétel a megoldás periodikus részét mindjárt Fourier-sorba fejtve szolgáltatja.)

#### 40. Operátor-impedancia

Az operátor-impedancia fogalmához a következő megfontolások révén juthatunk el:

Tekintsünk egy  $L$  önindukciós tekercset, mint egy vizsgált áramkör elemét. Legyen a tekercsben az áramerősség  $I$ , a tekercs sarkaihoz kapcsolt feszültség pedig  $E$ . Ebben az esetben

$$E = L \frac{dI}{dt}.$$

Ezen differenciálegyenletre az

$$I(0) = 0$$

kezdeti feltétel mellett a Laplace-transzformációt alkalmazva nyerjük

(a  $\mathcal{L}\{I(t)\} = \bar{I}(p)$ ,  $\mathcal{L}\{E(t)\} = \bar{E}(p)$  jelöléssel):

$$\bar{E} = p L \bar{I},$$

vagy másképpen, a transzformált feszültség és transzformált áramintenzitás hányadosa:

$$Z(p) = \frac{\bar{E}}{\bar{I}} = p L.$$

Ha most egy  $C$  kapacitású kondenzátort tekintünk, amelyen keresztül  $I$  intenzitású áram halad, és a kondenzátorhoz  $E$  feszültséget kapcsolunk, az  $I(0) = 0$  kezdeti feltétel figyelembevételével írható:

$$E = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt.$$

A Laplace-transzformáció alkalmazásával adódik tehát a szokott jelölésekkel:

$$\bar{E} = \frac{1}{pC} \bar{I},$$

vagy másképp

$$Z(p) = \frac{\bar{E}}{\bar{I}} = \frac{1}{pC}.$$

Ha  $R$  ohmikus ellenálláson  $I$  intenzitású áram halad át és az ellenállásra  $E$  feszültséget kapcsolunk, fennáll az

$$E = I R$$

összefüggés, ahonnan Laplace-transzformáció alkalmazásával, a megszokott jelölésekkel

$$\bar{E} = R \bar{I},$$

illetve

$$Z(p) = \frac{\bar{E}}{\bar{I}} = R$$

adódik.

### Definíció

Egy áramkör operátor-impedanciájának a rendszer sarkaihoz kapcsolt feszültség transzformáltjának és a pólusok között folyó áramintenzitás transzformáltjának hányadosát nevezzük.

Az operátor-impedanciát  $Z(p)$  -vel jelölve (ha nem okoz félreértést,  $Z(p)$  -t röviden az áramkör impedanciájának is szokás nevezni), előbbi eredményeinket összefoglalva írhatjuk:

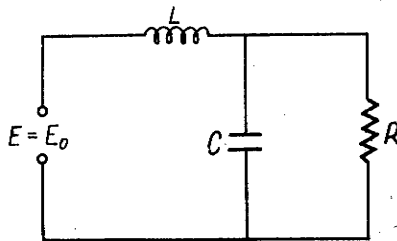
$$Z(p) = \begin{cases} R & \text{ohmikus ellenállás esetében,} \\ pL & \text{önindukciós tekercs esetében (I(0) = 0),} \\ \frac{1}{pC} & \text{kondenzátor esetében.} \end{cases}$$

Az operátor-impedancia jó felhasználhatóságát alkalmas kezdeti feltétellel rendelkező ( $I(0) = 0$ ) differenciálegyenletek Laplace-transzformációval történő megoldásánál az a tény támasztja alá, hogy a Kirchoff-féle törvények formálisan érvényben maradnak transzformált áramerősségek és feszültségek esetén is. Erre az eredményre úgy juthatunk el, hogy a Kirchoff-törvényeket kifejező összefüggést Laplace-transzformációnak vetjük alá, felhasználva azt aényt, hogy a Kirchoff-törvények lineárisak, és a Laplace-transzformáció is lineáris művelet.

Az előbb elmondottak értelmében tehát azt kapjuk, hogy a  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$  impedanciák több elemből álló áramkör esetén soros kapcsolásnál egyszerűen összeadódnak (az eredő impedancia tehát  $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$ ), párhuzamos kapcsolás esetén pedig az eredő impedancia reciprok értékét az egyes elemek impedanciái reciprok értékének összege adja meg (pl. a párhuzamosan kapcsolt  $Z_1$  és  $Z_2$  impedanciájú ellenálláselemek eredő impedanciája:  $\frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$ , ezt formálisan így is

szoktuk jelölni:  $Z = Z_1 \times Z_2$ ).

Ismételten hangsúlyozzuk, hogy az egy differenciálegyenletből Laplace-transzformációval adódó algebrai egyenletet közvetlenül az ellenálláselemek operátorimpedanciáinak segítségével felírni csak akkor tudjuk, ha a differenciálegyenletnek 0 kezdeti feltételt kielégítő megoldását keressük.



Példaként oldjuk meg a következő feladatot:

L önindukciót, C kapacitást, R ellenállást a 125. ábrán látható módon kapcsoljunk össze.  $t = 0$  -kor állandó

125. ábra

$E = E_0$  elektromotoros erőt kapcsolunk be; az elektromotoros erő bekapcsolása előtt a rendszerben nem volt áram és töltés. Határozzuk meg az önindukciós tekercsben keringő  $I$  áramerősséget.

Az áramkör impedanciája (figyelembe véve az egyes ellenálláselemek impedanciáit, valamint azok párhuzamos és soros kapcsolását, valamint azt a tényt, hogy  $I(0) = 0$ ):

$$Z(p) = \frac{\bar{E}}{\bar{I}} = pL + (R \times \frac{1}{pC}) = pL + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{pC}} = pL + \frac{R}{CRp + 1},$$

és mivel az állandó elektromotoros erő Laplace-transzformáltja

$$\bar{E} = \frac{E_0}{p},$$

a transzformált áramintenzitás a következőnek adódik:

$$\bar{I} = E_0 \frac{pCR + 1}{p(p^2 LCR + pL + R)}.$$

A visszatranszformáláshoz szükséges részlettörtekre bontás első lépéseként  $\bar{I}$  nevezőjét írjuk fel gyöktényezős alakban:

$$p^2 LCR + pL + R = LCR(p - p_1)(p - p_2),$$

ahol  $p_1$  és  $p_2$  a

$$p^2 + \frac{p}{CR} + \frac{1}{LC} = 0$$

egyenlet gyökei, azaz rövidítő jelöléssel:

$$p_{1,2} = -a \pm b$$

ahol

$$a = \frac{1}{2CR}, \quad b = \sqrt{a^2 - \frac{1}{LC}}.$$

$\bar{I}$  részlet törtre bontott alakja tehát:

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \frac{E_o}{LCR} \frac{pCR + 1}{p(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{E_o}{LCR} \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{p-p_1} + \frac{C}{p-p_2} \right) = \dots = \\ &= \frac{E_o}{LCR} \left( \frac{LC}{p} + \frac{p_1 CR + 1}{2bp_1} \frac{1}{p-p_1} - \frac{p_2 CR + 1}{2bp_2} \frac{1}{p-p_2} \right).\end{aligned}$$

(A részlet törtre történő felbontásnál szereplő  $A$ ,  $B$ ,  $C$  együtthatókat, mint a  $\frac{pCR + 1}{(p^2 + \frac{p}{CR} + \frac{1}{LC})p}$  függvény  $p = 0$ ,  $p = -a + b$ ,  $p = -a - b$  helyekhez tartozó reziduumát a legcélszerűbb meghatározni.)

Visszatranszformálva adódik végül:

$$I(t) = \frac{E_o}{R} + \frac{E_o}{2LCRb} e^{-at} \left[ \left( CR + \frac{1}{p_1} \right) e^{bt} - \left( CR + \frac{1}{p_2} \right) e^{bt} \right].$$

Ha figyelembe vesszük, hogy

$$e^{bt} = \text{ch } bt + \text{sh } bt, \quad e^{-bt} = \text{ch } bt - \text{sh } bt,$$

akkor

$$\begin{aligned}&\left( CR + \frac{1}{p_1} \right) e^{bt} - \left( CR + \frac{1}{p_2} \right) e^{-bt} = \\ &= 2CR \text{ sh } bt + \frac{1}{p_1 p_2} \left[ (p_2 - p_1) \text{ ch } bt + (p_2 + p_1) \text{ sh } bt \right] = \\ &= 2CR \text{ sh } bt - LC (2b \text{ ch } bt + 2a \text{ sh } bt).\end{aligned}$$

Ennek következtében írható:

$$I(t) = \frac{E_o}{R} \left\{ 1 - e^{-at} \left[ \text{ch } bt + \left( \frac{a}{b} - \frac{R}{bL} \right) \text{ sh } bt \right] \right\}.$$

A fenti képlet  $a^2 > \frac{1}{LC}$  esetében (ekkor  $b$  valós, ez az eset akkor áll fenn, ha  $R$  kicsiny) alkalmazható.

$a^2 < \frac{1}{LC}$  esetében  $b$  képzetes (ez az eset adódik, ha  $R$  nagy)

$$b = j\omega,$$



ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - a^2},$$

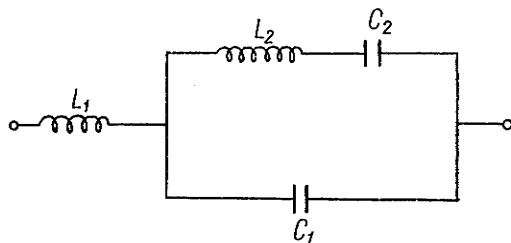
azaz

$$I(t) = \frac{E_o}{R} \left\{ 1 - e^{-at} \left[ \cos t\omega + \left( \frac{a}{\omega} - \frac{R}{\omega L} \right) \sin \omega t \right] \right\}.$$

Írjuk fel az alábbi néhány reaktáns kétpólus operátorimpedanciáját:

1<sup>o</sup>

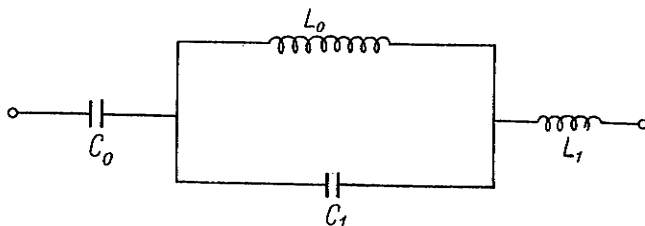
$$\begin{aligned} Z &= pL_1 + \left[ \left( pL_2 + \frac{1}{pC_2} \right) \times \frac{1}{pC_1} \right] = \\ &= pL_1 + \frac{1}{\frac{1}{pL_2 + \frac{1}{pC_2}} + pC_1} \quad (126. \text{ ábra}) \end{aligned}$$



126. ábra

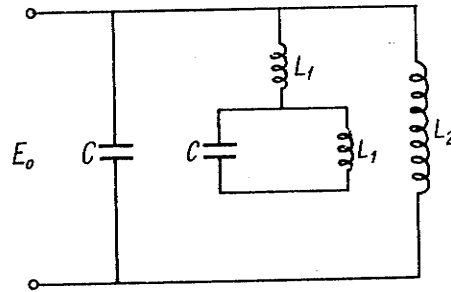
2<sup>o</sup>

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{C_o p} + \left( pL_o \times \frac{1}{C_1 p} \right) + pL_1 = \\ &= \frac{1}{C_o p} + \frac{1}{\frac{1}{pL_o} + C_1 p} + pL_1 \quad (127. \text{ ábra}). \end{aligned}$$



127. ábra

$$\begin{aligned}
 3^o \quad Z &= \frac{1}{pC} \times \left\{ \left[ pL_1 + \left( \frac{1}{pC} \times pL_1 \right) \right] \times pL_2 \right\} = \\
 &= \frac{1}{pC + \frac{1}{pL_2} + \frac{1}{pL_1 + \frac{1}{pC + \frac{1}{pL_1}}}} \quad (128. \text{ ábra}).
 \end{aligned}$$



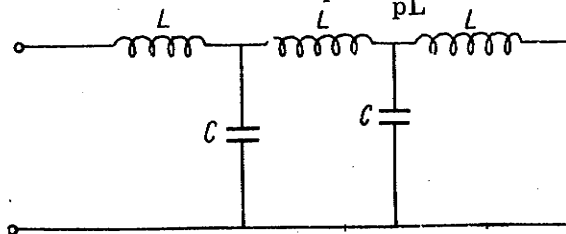
128. ábra

Ha a rendszer sarkaira  $E = E_o \sin \omega t$  feszültséget kapcsolnánk, az  $I(t)$  áramintenzitás Laplace-tranzszformáltját az

$$\bar{I} = \frac{Z}{\bar{E}} = \frac{p^2 + \omega^2}{E_o \omega} Z$$

összefüggés szolgáltatná. Innen részlettörtekre bontás után tudnánk visszatranszformálással  $I(t)$ -t meghatározni.

$$\begin{aligned}
 4^o \quad Z &= pL + \left[ \frac{1}{pC} \times \left( pL + \left\{ \frac{1}{pC} \times pL \right\} \right) \right] = \\
 &= pL + \frac{1}{pC + \frac{1}{pL + \frac{1}{pC + \frac{1}{pL}}}} \quad (129. \text{ ábra}).
 \end{aligned}$$



129. ábra

## ÖSSZEFOGLALÁS

Ezen rövid összefoglalásnak nem lehet célja az egész Matematika I. jegyzet felölelése, minden fontos eredmény felsorolása. Így az összefoglaló sem a vizsgák, sem a szigorlat anyagával nem azonos. Célja éppen az, hogy a sok részlet között tájékozódni nem tudó olvasót az anyag áttekintéséhez hozzásegítse, rámutasson a jegyzet különféle fejezeteiben található anyagrészek összefüggésére, kidomborítsa a hasonló fogalmak között fennálló analógiát. A könnyebb áttekintés érdekében a közölt tételek némelyikét az összefoglalásban nem is idézzük összes feltételeikkel együtt, hanem csak a legjellemzőbb feltételeket hangsúlyozzuk. A pontos fogalmazás a jegyzet megfelelő részében található meg.

\*\*\*

A Matematika I. c. tárgy keretén belül a következő témakörökkel foglalkoztunk:

1. Lineáris algebra;
2. A függvény fogalma, szemléltetése, határértéke, folytonossága, differenciálhatósága, Riemann-integrálja és ezeknek alkalmazásai;
3. Sorozatok és sorok;
4. Differenciálegyenletek.

### 1. Lineáris algebra

(Matematika I/1. jegyzet 3-149 oldal és Matematika I/3. jegyzet 89 - 103. és 331 - 359 oldal.)

Röviden összefoglalva e témakörben foglalkoztunk a valós és komplex szám, a vektor és mátrix fogalmával, megadási módjával, a közöttük definiált műveletek szabályaival, továbbá a determinánsokkal. A mátrix a vektorfogalom általánosítása volt, hiszen az oszlop- ill. sorvektorok speciális mátrixok. Vektor alatt általában háromdimenziós oszlopvektorokat értettünk. Speciális kétdimenziós vektorok voltak a komplex számok (ezek a vektorok mindenben követték a valós számok közt definiált műveleti szabá-

lyokat), még speciálisabb, egy egyenes irányba mutató vektorok a valós számok.

Alkalmazásként beszéltünk az analitikus geometria elemeiről, lineáris egyenletrendszerek megoldásáról, lineáris transzformációról, majd a mátrix sajátértékének és a mátrixfüggvény fogalmának bevezetése után az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletrendszerek megoldásáról.

## 2. Függvénytan

(Matematika I/1. jegyzet 201-378, Matematika I/2. jegyzet 3-151, 251-478, Matematika I/3. 3-62 és 117-222 oldal.)

A következő alapvető definíciókból indultunk ki:

A függvény olyan utasítás, amellyel egy  $P$  halmaz bizonyos  $P_1$  részhalmazának (a függvény értelmezési tartományának) minden eleméhez egy  $R$  halmaznak (a függvény értékkészletének) meghatározott elemét rendeljük hozzá.

Aszerint, hogy a  $P_1$ , ill. az  $R$  halmaz a valós, vagy komplex számok, vektorok (rendezett számpárok, vagy szám) halmaza, beszéltünk

- a) valós egyváltozós,
- b) valós többváltozós,
- c) komplex változós,
- d) egyparaméteres vektor-skalár,
- e) kétparaméteres vektor-skalár,
- f) skalár-vektor,
- g) vektor-vektor

függvényekről, az utóbbi csoporton belül speciálisan homogén lineáris vektor-vektorfüggvényekről, azaz tenzorokról is.

Ezen függvények szemléltetése általában

- a) síkgörbével,
- b) felülettel ( $n$ -változós függvény esetében  $n$ -dimenziós térben),
- c) a függvény által létesített leképezéssel,
- d) térgörbével (speciálisan síkvektorok esetében síkgörbével),
- e) felülettel (háromdimenziós vektorok esetében a háromdimenziós térben),
- f) szintfelületekkel, ill. nivógörbékkel,
- g) trajektóriákkal (ill. erővonalrendszerrel)

történik.

A függvénynek akkor van határértéke  $P$  értelmezési tartományának valamely  $P_0$  helyén, ha ezen hely egy környezetében (magát a helyet kivéve) a függvény értelmezve van, és ha a határértéknek minden  $V$  környezetéhez található  $P_0$ -nek olyan  $U$  környezete, hogy

$$Q \in U \subset P, \quad P_0 \neq Q \quad \text{esetén} \quad f(Q) \subset V.$$

A  $P_i$  hely környezetén a következőt értettük:

Ha  $P$  a valós számok halmaza, és  $P_0$  a végesben fekszik:  $P_0 = a$ , akkor a környezetei az  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  intervallumok; a jobboldali környezetei az  $[a, a + \delta)$  intervallumok, a baloldali környezetei az  $(a - \delta, a]$  intervallumok; ha  $P_i$  nem fekszik a végesben, akkor  $+\infty$  környezetei a  $(Q, +\infty)$  intervallumok,  $-\infty$  környezetei a  $(-\infty, R)$  intervallumok.

Ha  $P$  vektorok halmaza (a komplex számokat is speciális síkvektoroknak fogva fel) és  $\bar{F}_i \in P$  a végesben fekvő  $P_i$  pontba mutat, a  $P_i$  pont  $\varepsilon$  sugarú környezete azon  $\bar{F}$  helyzetvektoru  $Q$  pontok halmaza, amelyekre  $|\bar{F} - \bar{F}_i| < \varepsilon$ ; ha  $P_i$  nem fekszik a végesben, akkor  $P_i$  környezetei azon  $\bar{F}$  helyzetvektoru  $Q$  pontok halmazai, melyekre  $|\bar{F}| > R$ .

A függvény értelmezési tartományának valamely helyén folytonos, ha ott értelmezve van, véges határértéke is van, és ez megegyezik a függvénynek e helyhez tartozó helyettesítési értékével. Egy függvényt értelmezési tartományának valamely nyílt részhalmazán akkor mondunk folytonosnak, ha e részhalmaz minden pontjában folytonos.

Egy függvényt értelmezési tartományának valamely zárt  $F$  részhalmazán akkor mondjuk folytonosnak, ha  $F$  minden pontjában az  $F$  halmazra szorítkozva folytonos (azaz minden  $P_0 \in F$ -re tetszőleges

$P_i \in F, P_i \neq P_0$  esetén, ha  $P_i \rightarrow P_0$ , a megfelelő függvényértékek sorozatára  $f(P_i) \rightarrow f(P_0)$ ).

Ha  $F$  korlátos, zárt halmaz, akkor az  $F$ -en folytonos valós függvény felvesz  $F$ -en egy maximális és minimális értéket. Az előbbi feltételek mellett a függvény  $F$ -en egyenletesen folytonos is. Közelítő számításoknál a függvény folytonossága lehetővé teszi, hogy a folytonossági  $P_i$  helyen vett helyettesítési érték helyett  $P_i$  alkalmas környezetébe eső  $Q_i$  helyen felvett helyettesítési értékkel számolhassunk.

Ha  $R_i$  nem folytonossági helye a vizsgált függvénynek, de van a függvénynek az  $R_i$  helyen határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az  $R_i$

helyen a függvénynek megszüntethető szingularitása van. Ezen kívül beszélhetünk még valós egyváltozós függvény esetében ugrásról ( $f(x)$  -nek az  $a$  hely ugrási helye, ha  $f(x)$  -nek  $a$  -ban véges, de egymástól különböző jobb- és baloldali határértéke van), komplex változós függvény esetében pedig pólusról és lényeges szinguláris helyről ( $f(z)$  -nek az  $z = a$  helyen  $r$  -edrendű pólusa van, ha  $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^r f(z)$  létezik, míg ha ezen utóbbi

határérték semmilyen  $r$  természetes szám mellett sem létezik, lényeges szingularitásról beszélünk).

IV. Akkor mondjuk, hogy a függvény értelmezési tartományának halmába tartozó  $P_0$  helyen differenciálható, ha a  $P_0$  hely alkalmas környezetébe (és a függvény értelmezési tartományába) eső helyet  $P'_0$  -val jelezve a függvény  $f(P'_0)$  megváltozása egy, a két helyhez tartozó független változó érték megváltozásával "arányos" résznek és egy, a független változó megváltozásának egy  $0$  -hoz tartó tényezővel való "szorzat"-ából álló résznek az összege. A független változó megváltozásával arányos ún. fő-rész neve differenciál, az itt szereplő "arányossági tényező" épp a vizsgált helyhez tartozó differenciálhányados, vagy derivált.

Szokás még a differenciálhányadost az ún. különbségi- vagy differenciahányados határértékeként is definiálni. E definíció csak azokra a függvényekre alkalmazható, melyeknek független változója skalár (valós, vagy komplex szám), és ezekre az előbbi definícióval egyenértékű. Részletesebben kiírva így szól: differenciálható egy függvény értelmezési tartományának valamely helyén, ha az  $e$  hely kicsiny környezetébe eső pontban felvett függvényértéke és az eredeti helyen felvett függvényérték különbségének és a független változó megfelelő értékei megváltozásának hányadosa (az ún. különbségi, vagy differenciahányados) ugyanazon a határértékhez tart, bárhogyan is tartson a független változó megváltozása  $0$  -hoz. E határérték a függvény adott helyhez tartozó differenciálhányadosa. Mivel a különbségi hányados a függvénynek az értelmezési tartomány vizsgált részén való átlagos változási sebességét méri, a határértékként adódó differenciálhányados épp a vizsgált pontban szolgáltatja a függvény változási sebességét.

Differenciálható függvény esetében az  $f(P_0)$  függvényérték helyett az  $f(P'_0)$  értékkel számolva az  $e$  közelítésnél elkövetett abszolút hiba közelítőleg a differenciállal, míg a relatív (százalékos) hiba (amennyiben  $f(P_0)$  nem vektor) a differenciál és  $f(P_0)$  hányadosának vehető. Amennyiben egy függvény differenciálhányadosa differenciálható függvény, beszélhetünk e differenciálhányados (az ún. elsőrendű differenciálhányados) deriváltjáról, az eredeti függvény ún. másodrendű deriváltjáról. Hasonlóképpen értelmezzük az utóbbi függvény deriváltjaiként az eredeti függvény magasabbrendű (harmad, negyed stb. rendű) deriváltjait.

A függvény differenciálhatóságából folytonossága következik, az állítás megfordítása azonban általában már nem érvényes.

Egy nyílt halmazon akkor mondjuk a függvényt differenciálhatónak, ha a halmaz minden pontjában differenciálható.

Az alábbiakban az egyes függvénytípusoknál részletesen kitérünk arra, mit kell a differenciálhatóság általános definíciójában szereplő "arányos", "arányossági tényező" fogalmakon érteni, és megemlítjük az illető függvénytípus differenciálszámításának legnevezetesebb alkalmazásait.

a)  $y = f(x)$  differenciálható az  $x_0$  helyen, ha

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A h + \varepsilon h, \quad \text{ahol } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{ha } h \rightarrow 0,$$

a differenciálhányados

$$A = f'(x_0), \quad \text{ill.} \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

$df = f'(x_0)h$  a differenciál.

$A = f'(x_0)$  megadja az  $y = f(x)$  egyenletű görbe  $x_0$  abszcisszájú pontjában az érintő meredekségét.

A magasabbrendű deriváltak segítségével vizsgálhatjuk az  $y = f(x)$  függvény viselkedését egy pontban (pl. lokális maximum, ill. minimum keresése), vagy egy intervallumban (általános függvénymenetvizsgálat, vagy intervallumbeli maximális, ill. minimális függvényérték keresése).

b)  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  differenciálható az  $(x_1, \dots, x_n)$  helyen, ha

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + \varepsilon_1 h_1 + \dots + \varepsilon_n h_n,$$

ahol  $A_1, \dots, A_n$  állandó,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \rightarrow 0$ , ha  $h_1, \dots, h_n \rightarrow 0$ .

$$A_i = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_{(x_1, \dots, x_n)} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h_i}.$$

( $i = 1, \dots, n$ ), un. parciális derivált,

$df = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n$  a differenciál.

A többváltozós láncszabály speciális alkalmazásaként beszéltünk az un. iránymenti deriváltról, továbbá az alkalmazások során a többváltozós szélsőértékfeladatok megoldásáról.

c)  $w = f(z)$  differenciálható a  $z_0$  helyen, ha

$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \Delta z + \varepsilon \Delta z$ , ahol  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ha  $\Delta z \rightarrow 0$ ,  
a differenciálhányados

$$A = f'(z_0), \quad \text{ill.} \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

$df = f'(z_0) \Delta z$  a differenciál

$w = u + jv$ ,  $z = x + jy$  esetében

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy  $f(z)$  az  $(x, y)$  helyen differenciálható legyen, az, hogy  $u(x, y)$  és  $v(x, y)$  ott differenciálhatók legyenek és kielégítsék az  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ;  $-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$  összefüggéseket.

Regulárisnak akkor mondjuk az  $f(z)$  függvényt a  $z_0$  helyen, ha a  $z_0$  hely egy környezetében mindenütt differenciálható. A reguláris komplex változós függvények az alábbi fontos tulajdonságokkal rendelkeznek:

Valamely  $T$  tartományban reguláris  $f(z)$  függvény valós és képzetes része harmonikus függvény ( $\Delta u = 0$ ,  $\Delta v = 0$ ). Egyszeresen összefüggő  $T$  tartományban harmonikus  $u$  függvényhez található olyan  $v$  harmonikus függvény, hogy  $u + jv$  reguláris függvény  $T$ -ben. ( $v$   $u$ -nak harmonikus társa.)

A reguláris  $f(z)$  függvény minden olyan pontban, ahol  $f'(z) \neq 0$ , konformis leképezést létesít.

Ha  $f(z)$  reguláris az egyszeresen összefüggő  $T$  tartományban, akkor  $T$ -ben futó tetszőleges  $C$  rektifikálható Jordan-görbére  $\oint_C f(z) dz = 0$ .

Ha  $f(z)$  a  $z_0$  helyen reguláris, akkor ott akárhányszor differenciálható.



Ha  $f(z)$  az egyszeresen összefüggő  $T$  tartományban a véges számú  $a_1, \dots, a_n$  helyek kivételével reguláris, és a  $C$  rektifikálható Jordan-görbe  $T$ -ben fekszik, de nem halad át az  $a_k$  helyek egyikén sem,  $C$ -t pozitív irányban futva be:  $\oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z),$

ahol az összegezést a  $C$  görbe belsejébe eső  $a_k$  helyekre kell elvégezni.

d)  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  differenciálható a  $t_0$  paraméterű pontban, ha

$$\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0) = \bar{a} \Delta t + \bar{\epsilon} \Delta t, \quad \text{ahol } |\bar{\epsilon}| \rightarrow 0, \quad \text{ha } \Delta t \rightarrow 0,$$

a differenciálhányados

$$\bar{a} = \dot{\bar{r}}(t_0), \quad \text{ill.} \quad \dot{\bar{r}}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

$d\bar{r} = \dot{\bar{r}}(t_0) \Delta t$  a differenciál

$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$  esetén  $x(t), y(t), z(t)$   $t_0$ -beli differenciálhatóságából következik  $\bar{r}(t)$  differenciálhatósága, és viszont.

$\dot{\bar{r}}(t_0)$  geometriai jelentése: az  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  egyenletű térgörbe  $t_0$  paraméterű pontjához tartozó érintővektor. Ha speciálisan az ivhosszúság a paraméter, akkor  $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}'$  az érintő egységvektor,

$$\left| \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} \right| = g \quad \text{a vizsgált térgörbe görbülete.}$$

e)  $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$  differenciálható az  $(u_0, v_0)$  pontban, ha

$$\bar{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \bar{r}(u_0, v_0) = \bar{a} \Delta u + \bar{b} \Delta v + \bar{\epsilon}_1 \Delta u + \bar{\epsilon}_2 \Delta v,$$

ahol  $\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2 \rightarrow 0$ , ha  $\Delta u, \Delta v \rightarrow 0$ , és

$$\bar{a} = \left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right]_{(u_0, v_0)} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \bar{r}(u_0, v_0)}{\Delta u},$$

$$\bar{b} = \left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right]_{(u_0, v_0)} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \bar{r}(u_0, v_0)}{\Delta v}.$$

( $\bar{r}(u, v)$  parciális deriváltjainak kiszámítása koordinátánkénti parciális deriválással történik.)

$d\bar{r} = \bar{a} \Delta u + \bar{b} \Delta v$  a differenciál.

Az  $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$  egyenlettel megadott felület felületi normálisa

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \text{ alakban állítható elő.}$$

f)  $u = u(\bar{r})$  differenciálható az  $\bar{r} = \bar{r}_0$  helyzetvektoru pontban, ha

$$u(\bar{r}_0 + \Delta \bar{r}) - u(\bar{r}_0) = \bar{a} \Delta \bar{r} + \bar{\epsilon} \Delta \bar{r}, \text{ ahol } |\bar{\epsilon}| \rightarrow 0, \text{ ha } |\Delta \bar{r}| \rightarrow 0,$$

$\bar{a}$  differenciálhányados

$$\bar{a} = \left[ \frac{du}{d\bar{r}} \right]_{\bar{r}=\bar{r}_0} = \left[ \text{grad } u \right]_{\bar{r}=\bar{r}_0}.$$

$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$  esetén  $u = u(x, y, z)$ , és

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}.$$

$du = \left[ \text{grad } u \right]_{\bar{r}=\bar{r}_0} \Delta \bar{r}$  a differenciál.

A  $\left[ \text{grad } u \right]_{\bar{r}=\bar{r}_0}$  vektor egyrészt megadja az  $u(\bar{r})$  skalártér  $u = c$

szintfelületének ( $c = u(\bar{r}_0)$ )  $\bar{r} = \bar{r}_0$  pontbeli normálisát, másrészt

megadja azt az irányt, amelyben a leggyorsabban változik az  $u(\bar{r})$  skalártér az  $\bar{r}_0$  helyzetvektoru pontban. ( $\left[ \text{grad } u \right]_{\bar{r}=\bar{r}_0}$  e maximális változási sebesség nagyságát adja meg.)

Az  $u(\bar{r})$  skalártér, ill. az  $u(x, y, z)$  függvény  $\bar{r}_0 = x_0 \bar{i} + y_0 \bar{j} + z_0 \bar{k}$

pontban  $\bar{e} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$  irányban vett változási sebessége (az  $\bar{e}$  egységvektorral megadott irányba vett iránymenti derivált):

$$\left[ \text{grad } u \cdot \vec{e} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_0} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right]_{(x_0, y_0, z_0)}$$

- g)  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$  differenciálható az  $\vec{r} = \vec{r}_0$  helyzetvektoru pontban, ha  
 $\vec{v}(\vec{r}_0 + \Delta \vec{r}) - \vec{v}(\vec{r}_0) = \bar{A}(\Delta \vec{r}) + \bar{\varepsilon}(\Delta \vec{r})$ , ahol az  $\bar{\varepsilon}$  tenzor elemei  
 $\Delta \vec{r} \rightarrow 0$  esetében 0-hoz tartanak, míg az  $\bar{A}$  deriválttenzor  
 mátrixa  $\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  esetén

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$\vec{v}(\vec{r})$  differenciálja:  $d\vec{v} = \bar{A}(\Delta \vec{r})$ .

Az  $\bar{A}$  deriválttenzor vektorinvariánsának kétszerese  $\text{rot } \vec{v}$ , skalár-invariánsa  $\text{div } \vec{v}$ .

V. Akkor mondjuk, hogy egy függvény értelmezési tartományának valamely  $P$  részhalmazán integrálható (Riemann-szerint), ha a  $P$  halmaz felosztásainak "minden határon túl finomodó sorozatához" tartozó "integrálközelítő összegei"-nek sorozata konvergens, és a felosztás módjától, az integrálközelítő összegek speciális megválasztásától függetlenül, mindig ugyanahhoz a határértékhez tart. Ez a határérték a függvény adott  $P$  halmazra vonatkozó integrálja.

Mérhető halmazon folytonos függvény integrálható.

Az alábbiakban az egyes függvénytipusoknál külön-külön rámutatunk majd arra, mit értünk az értelmezési tartomány  $P$  részhalmazára felosztásainak "minden határon túl finomodó" sorozatán, hogyan képezzük az integrálközelítő összeget.

- a) A korlátos  $y = f(x)$  integrálható az  $[a, b]$  intervallumban, ha azt felosztva részekre az

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

osztópontokkal, a megfelelő

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$$

integrálközelítő összegek sorozata tetszőleges minden határon túl finomodó felosztások esetén (azaz olyan felosztásokra, melyekre  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ) a közbülső  $\xi_i$  helyek választásától függetlenül mindig ugyanahhoz a határértékhez tart; e határérték az  $f(x)$  függvény  $[a, b]$  intervallumra vonatkozó határozott integrálja:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Az  $[a, b]$  intervallum mérhető, mértéke:  $b - a$ .

Ha  $F(x)$  a  $f(x)$  függvény egy primitív függvénye  $[a, b]$ -ben, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Alkalmazásként megemlítettük a függvénygörbe alatti terület, forgástest térfogatának, síkgörbe és térgörbe ívhosszúságának, elektromos áram munkájának kiszámítását.

- b) A korlátos  $z = f(x, y)$  függvény integrálható a mérhető területű  $A$  halmazon, ha az  $A$  halmaz minden határon túl finomodó felosztásainak sorozata esetén (vagyis olyan felosztásokra, amelyeknél mindig egyik  $A_i$  részhalmaz átmérője 0-hoz tart) a

$$(\pi) \quad \sigma = \sum_{i=1}^n f(P_i) t(A_i) \quad (P_i \in A_i; t(A_i) \text{ az } A_i \subset A \text{ halmaz területe (mértéke)})$$

integrálközelítő összegek sorozata  $A$  felosztásától és a  $P_i$  közbülső helyek választásától függetlenül mindig ugyanahhoz a határértékhez tart. E határértékek az  $f(x, y)$  függvény  $A$  halmazra vonatkozó

kettős integrálja:  $\iint_A f(x, y) dx dy$ .

Ha  $A$  az  $x$  tengely felől nézve normáltartomány ( $A = N_x = \{(x, y): f_1(x) \leq y \leq f_2(x), a \leq x \leq b\}$ ,  $f_1(x)$  és  $f_2(x)$   $[a, b]$ -ben folytonos függvények), akkor  $N_x$ -en folytonos  $f(x, y)$ -ra

$$\iint_{N_x} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{x=a}^b \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Ha  $A$  az  $y$  tengely felől nézve normáltartomány ( $A = N_y = \{(x, y): g_1(y) \leq x \leq g_2(y), c \leq y \leq d\}$ ,  $g_1(y)$  és  $g_2(y)$   $[c, d]$  ben folytonos függvények), akkor

$$\iint_{N_y} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{y=c}^d \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Teljesen hasonlóan értelmezhető a korlátos  $f(x, y, z)$  függvény  $A$  halmazra vonatkozó hármas integrálja, csupán ekkor a  $(x)$  integrálközelítő összegekben  $t(A_i)$  helyett  $V(A_i)$  szerepel, mint az

$A_i \subset A$  részhalmazok térfogatának mérőszáma (mértéke). Ha  $A$  az  $xy$  sík felől nézve normáltartomány, vagyis

$A = \{(x, y, z): f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y), (x, y) \in B\}$ , ahol  $B$  az  $x$  vagy az  $y$  tengely felől nézve normáltartomány, és  $B$ -n  $f_1(x, y)$  és  $f_2(x, y)$  folytonos függvények, akkor

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_B \left( \int_{z=f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy.$$

Alkalmazásként kettős integrálok esetén síkidomok területének, nyomatékainak, súlypontkoordinátáinak, valamint mérhető felszínü felületek felszínének kiszámítását, hármas integrálok esetén testek térfogatának (tömegének), nyomatékainak, súlypontkoordinátáinak kiszámítását említettük meg.

- c) A folytonos  $w = f(z)$  komplex változós függvénynek a rektifikálható  $L$  görbeszakasz menti integráljára a következőképpen jutunk. Az  $L$  görbeszakaszt a befutás sorrendjében a  $z_0, z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, \dots, z_n$  osztópontokkal részekre osztva, az  $i$ -dik rész-szakasz egy közbülső helyét  $P_i$ -vel jelölve a megfelelő

$$\zeta = \sum_{i=1}^n f(P_i)(z_i - z_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta z_i$$

integrálközelítő összegek sorozata az  $L$  görbeszakasz tetszőleges minden határon túl finomodó felosztásaira (azaz olyan felosztásokra, melyeknél bármely két szomszédos osztópont közötti ivdarab hossza  $0$ -hoz tart), a közbűlső  $P_i$  helyek választásától függetlenül mindig ugyanahhoz a határértékhez tart. E határérték a  $f(z)$  függvény  $L$  görbére vonatkozó integrálja:  $\int_L f(z) dz$ .

Ha  $L$  egyenletét  $z = z(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) alakban adtuk meg (amikor is  $z'(t)$   $[a, b]$ -beli folytonossága  $L$  rektifikálhatóságát biztosítja), akkor

$$\int_L f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Ha  $L$  az  $f(z)$  függvény valamely egyszeresen összefüggő  $T$  regularitási tartományában fut, akkor  $\int_L f(z) dz$  értéke csak  $L$  kez-

dő- és végpontjától függ, különben  $L$ -től független, és ha  $F(z)$  a  $f(z)$  függvény egy primitív függvénye  $T$ -ben, akkor  $\int_L f(z) dz = F(b) - F(a)$ , ahol  $z = a$   $L$  kezdő,  $z = b$   $L$  végpontja.

IV.c)-ben már megemlítettünk valamely reguláris  $f(z)$  függvény integráljának kiszámításával kapcsolatban néhány fontos tételt, így erre itt nem térünk ki.

- d) Az  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  egyparaméteres vektor-skalárfüggvény  $a \leq t \leq b$  intervallumra vonatkozó integrálja teljesen a) mintájára értelmezhető. Kiszámítását is valós egyváltozós függvények integráljának kiszámítására vezetjük vissza:

$$\begin{aligned} \int_a^b \vec{r}(t) dt &= \int_a^b (x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}) dt = \left( \int_a^b x(t) dt \right) \vec{i} + \left( \int_a^b y(t) dt \right) \vec{j} + \\ &+ \left( \int_a^b z(t) dt \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

- e) Az  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  kétparaméteres vektor-skalárfüggvénynek az  $uv$  paramétersík  $A$  mérhető területű halmazára vonatkozó integrálját b) mintájára értelmezhetjük. Kiszámítását is valós kétváltozós függvények integráljának kiszámítására vezethetjük vissza:

$$\begin{aligned} \iint_A \vec{r}(u, v) du dv &= \iint_A (x(u, v) \vec{i} + y(u, v) \vec{j} + z(u, v) \vec{k}) du dv = \\ &= \left( \iint_A x(u, v) du dv \right) \vec{i} + \left( \iint_A y(u, v) du dv \right) \vec{j} + \left( \iint_A z(u, v) du dv \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

- f) Az  $u = u(\vec{r})$  skálár-vektorfüggvénynek az xyz derékszögű koordinátarendszer megadása után egyértelműen az  $u(x, y, z)$  háromváltozós függvény felel meg. Ennek integrálját b) -ben már értelmeztük.
- g) A  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$  folytonos vektor-vektorfüggvénynek értelmezhetjük valamely rektifikálható  $L$  görbe és valamely mérhető felszínt, irányítható  $F$  felület mentén vett skálárértékű és vektorértékű görbementi, ill. felületmenti integrálját.

A)

Legyen  $\vec{v}(\vec{r})$  a rektifikálható  $L$  görbén folytonos, mutasson  $L$  kezdőpontjához az  $\vec{a}$ , végpontjához a  $\vec{b}$  vektor, és az  $L$ -en felvett osztópontokhoz mutató helyzetvektorok legyenek a befutás sorrendjében:  $\vec{a} = \vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{i-1}, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_{n-1}, \vec{r}_n = \vec{b}$ . Legyen  $\vec{\rho}_i$  a görbe felosztásával nyert  $i$ -edik rész valamely pontjához mutató helyzetvektor. Mármost az  $L$  görbe bármely minden határon túl finomodó felosztásaihoz (vagyis olyan felosztásokhoz, amelyeknél a két-két osztópont közötti maximális ivdarab hosszúsága is  $0$ -hoz tart) a megfelelő

$$(\kappa) \quad \vec{\sigma} = \sum_{i=1}^n \vec{v}(\vec{\rho}_i) (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \vec{v}(\vec{\rho}_i) \Delta \vec{r}_i$$

integrálközelítő összegek sorozata a felosztástól és a  $\vec{\rho}_i$  vektorok választásától függetlenül ugyanahhoz a határértékhez tart, és az

$\int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}$  határértéket  $\vec{v}(\vec{r})$   $L$ -en vett skálárértékű vonalmenti

integráljának nevezzük. Teljesen hasonlóképpen értelmezhető  $\vec{v}(\vec{r})$   $L$ -en vett vektorértékű vonalmenti integrálja, csupán ekkor  $(\kappa)$ -ben skáláris szorzás helyett vektoriális szorzás szerepel. Ha  $L$  egyenletét a folytonosan differenciálható  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  függvénnyel adjuk meg ( $a \leq t \leq b$ ), akkor

$$\int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \dot{\vec{r}}(t) dt.$$

Ha egy egyszeresen összefüggő  $T$  térrészben  $\text{rot } \vec{v} = 0$ , akkor bármely  $T$ -ben futó zárt  $L$  görbére  $\oint_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$ , míg ha  $L$  nem zárt, akkor  $\int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}$  értéke csak  $L$  kezdő és végpontjától függ, különben az integrációs uttól független. Ha ismerjük  $\vec{v}(\vec{r})$  potenciálfüggvényét ( $\vec{v}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r}) = \text{grad } u(\vec{r})$ ), akkor  $\int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = u(\vec{b}) - u(\vec{a})$ , ahol  $L$  kezdő, ill. végpontjának helyzetektől függően  $\vec{a}$ , ill.  $\vec{b}$ .

B)

Legyen  $\vec{v}(\vec{r})$  a mérhető felszínű és irányítható  $F$  felületdarabon folytonos. Az  $F$  felületdarabba beírt irányítható poliéderfelületekhez tartozó

$$(\mathbf{KK}) \quad \sum_{i=1}^n \vec{v}(\vec{\rho}_i) \Delta \vec{f}_i$$

integrálközelítő összegeket képezve (ahol  $\vec{\rho}_i$  a  $\Delta f_i$  területű  $i$ -edik poliéderlapnak megfelelő felületdarab valamelyik pontjába mutató vektor, a  $\Delta \vec{f}_i$  vektor pedig a kívánt felületi normális irányába mutat) az  $F$  felület minden határon túl finomodó felosztásaihoz, ezen  $(\mathbf{KK})$  összegek sorozatának határértéke  $\vec{v}(\vec{r})$ -nek az adott normálisirányítás mellett  $F$ -re vonatkozó skalárértékű felületmenti

integrálja:  $\iint_F \vec{v}(\vec{r}) d\vec{f}$ . Ez az integrál úgy is felfogható, mint  $\vec{v}(\vec{r})$

$\vec{n}$  felületi normális irányu vetületének  $v_n$ -nek  $F$ -re vonatkozó felszín szerinti integrálja:  $\iint_F v_n df$ . Ha  $(\mathbf{KK})$ -ban skaláris szor-

zás helyett vektoriális szorzás áll, teljesen hasonló okoskodással jutunk el  $\vec{v}(\vec{r})$   $F$ -re vonatkozó adott  $n$  felületi normális irányítás mellett vett vektorértékű felületmenti integráljára:

$$\iint_F \vec{v}(\vec{r}) \times d\vec{f} \text{ -re.}$$

A fenti definíciókban szerepel az  $F$  felület minden határon túl finomodó felosztásai sorozatának fogalma. Ezen azt kell értenünk, hogy  $F$  egyenletét  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  ( $(u, v) \in A$ ) alakban adva meg a paraméteresik mérhető  $A$  halmazán létesítünk olyan minden határon túl



finomodó háromszöges hálózatot, melynél az egyes háromszögek szögei egy  $\pi$ -nél kisebb korlát alatt maradnak. Ekkor az  $A$ -ba eső csücsu háromszögeknek megfelelő poliéderlapokból álló poliéderfelületek szerepelnek  $(\mathbb{R}^3)$ -ban, ezen poliéderfelületek felszínei pedig meghatározott határértékhez ( $F$  felszínének mérőszámához) tartanak az  $A$  halmaz felosztásainak fent részletezett módon történő minden határon túl való finomításakor.

Az előbbiekhöz hasonlóan értelmezhető a folytonos  $u(\vec{r})$  skalártér

$F$  felületre vonatkozó felületmenti integrálja:  $\iint_F u(\vec{r}) d\vec{f}$  is.

Ha  $F$  egyenletét  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  alakban adjuk meg, ahol  $(u, v) \in A$  és  $A$  az  $uv$  paramétersík mérhető halmaza, akkor, amennyiben  $\vec{r}(u, v)$   $u$  és  $v$  szerinti parciális deriváltjai is folytonosak  $A$ -n,

$$\iint_F \vec{v}(\vec{r}) d\vec{f} = \iint_F \vec{v}(\vec{r}(u, v)) \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv$$

és amennyiben  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$  nem a kívánt felületi normális irányába mutat, a jobboldalon álló integrál  $(-1)$ -szeresét kell vennünk.

Alkalmazásként megemlítettük, hogy ha  $\vec{v}(\vec{r})$  elektromos erőter,

akkor  $\int_L \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}$  az  $L$  görbe mentén végzett munka mérőszáma  
 $\iint_F \vec{v}(\vec{r}) d\vec{f}$  pedig a fluxus.

Felületmenti és vonalmenti integrálok szerepelnek  $\text{grad } u(\vec{r})$ ,  $\text{div } \vec{v}(\vec{r})$  és  $\text{rot } \vec{v}(\vec{r})$  koordináta-invariáns definíciójában:

$$\begin{aligned} [\text{grad } u(\vec{r})]_P &= \lim \frac{\iint_{F_n} u(\vec{r}) d\vec{f}}{V_n}, & [\text{div } \vec{v}(\vec{r})]_P &= \lim \frac{\iint_{F_n} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{f}}{V_n}, \\ [\text{rot } \vec{v}(\vec{r})]_P &= \lim \frac{\iint_{F_n} d\vec{f} \times \vec{v}(\vec{r})}{V_n}, & [\text{rot } \vec{v}(\vec{r})]_P &= \lim \frac{\oint_{L_n} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}}{f_n} \end{aligned}$$

ahol az első három definícióban  $F_n$  zárt felület kifelé mutató felületi normálissal,  $V_n$  az  $F_n$  felület által bezárt térrész térfogatának mérőszáma, az integrálokat pedig a  $P$  pontra rázsugorodó  $F_n$

felületek sorozatára képezzük; az utolsó,  $\text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}$  irányu vetületét megadó definícióban pedig az  $L_n$  határgörbéjű  $\vec{n}$  normális síklap felszíne  $f_n$ , az  $L_n$  görbe befutási irányába mutató érintővektor, az erre merőleges, a zárt  $L_n$  görbe belseje felé mutató vektor és  $\vec{n}$  jobbrendszer alkot, a lim pedig azt jelenti, hogy az integrálokat  $P$ -re rázsugorodó  $L_n$  görbékre kell képeznünk.

A következő nevezetesebb integrál-tételeket ismertük meg:

$$\iiint_V \text{grad } u \, dx \, dy \, dz = \iint_F u(\vec{r}) \, d\vec{f},$$

$$\iiint_V \text{div } \vec{v} \, dx \, dy \, dz = \iint_F \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{f}, \quad (\text{Gauss-Osztrogradszkij-tétel})$$

$$\iint_T \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_L (-q \, dx + p \, dy), \quad (\text{síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tétel}),$$

$$\iiint_V (U \Delta W - W \Delta U) \, dx \, dy \, dz = \iint_F \left( U \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\vec{f} \quad (\text{Green-tétel}),$$

$$\iiint_V \text{rot } \vec{v} \, dx \, dy \, dz = - \iint_F \vec{v}(\vec{r}) \times d\vec{f},$$

$$\iint_{F_1} \text{rot } \vec{v} \, d\vec{f} = \int_L \vec{v}(\vec{r}) \, d\vec{r}, \quad (\text{Stokes-tétel})$$

ahol  $F$  mindig zárt, mérhető felszínű, irányítható felületeket jelentett kifelé mutató felületi normálissal,  $V$  pedig az  $F$  által bezárt térrész és  $V$ -ben, ill.  $F$ -en  $u(\vec{r})$  és parciális deriváltjai,  $\vec{v}(\vec{r})$  és koordinátáinak parciális deriváltjai, ill.  $\Delta U$  és  $\Delta W$  folytonosak. A síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tétel, ill. a Stokes tétel kimondásának feltételeit lásd a Matematika I/3. jegyzet 18 és 38 oldalán.

### 3. Sorozatok és sorok

(Matematika I/1. jegyzet 164-201. oldal, Matematika I/2. jegyzet 151-251, 307-310, Matematika I/3. jegyzet 103 - 117, 184-206 oldal.)

A valós, vagy komplex tagu  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  számsorozat konvergens, és határértéke a  $z_0$  szám ( $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ ), ha tetszőleges  $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan  $N = N(\varepsilon)$ , hogy a  $z_0$  pont  $\varepsilon$  sugaru környezetebe a számsorozat minden olyan  $z_n$  tagja beleesik, melynél  $n > N$ :

$$|z_n - z_0| < \varepsilon, \text{ valahányszor } n > N.$$

A Cauchy-féle konvergenciakritérium értelmében a  $z_1, \dots, z_n, \dots$  sorozat akkor és csak akkor konvergál  $z_0$ -hoz, ha tetszőleges  $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan  $N = N(\varepsilon)$ , hogy  $n, m > N(\varepsilon)$  esetében

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

A valós, vagy komplex tagu  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$  sor konvergens, ha  $s_n = \sum_{k=1}^n z_k$  részletösszegeinek sorozata konvergens. Ekkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ , vagyis a részletösszegek sorozatának határértéke a sor összegét adja meg.

Amennyiben a  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$  sor is konvergens, a  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  sort abszolút konvergensenek mondjuk. Az abszolút konvergens sorok tagjainak sorrendjét megváltoztatva a sor összege nem változik. (Az abszolút konvergenciából a sor konvergenciája következik.)

Pozitív valós tagu sorok konvergenciájának (vagyis tetszőleges valós vagy komplex tagu sorok abszolút konvergenciájának) vizsgálatára a következő konvergencia-kritériumokat ismertük meg: majoráns-kritérium, hányados-kritérium (speciálisan D'Alembert-féle kritérium), Cauchy-féle gyök-kritérium, Cauchy-féle integrál-kritérium.

Tetszőleges sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  legyen. Valós tagu, váltakozó előjelű sorok esetében, ha a tagok abszolút értéke monoton csökkenő, akkor az, hogy a tagok 0-hoz tartanak, a konvergenciának szükséges és elégséges feltétele.

Ha egy számsorozat, vagy sor nem konvergens, divergensenek mondjuk. Beszéltünk még speciálisan  $\infty$ -hez (valós számok esetében  $+\infty$ , ill.  $-\infty$ )-hez divergáló sorozatokról is.

Ha egy végtelen sor tagjai a  $z$  komplex (speciálisan az  $x$  valós) változó függvényei beszélünk. A  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots$  függvénysor a  $z$  helyen konvergens, ha megadható egy olyan  $S(z)$  függvény, hogy

$$\left| S(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| < \varepsilon$$

tetszőleges kicsiny adott  $\varepsilon > 0$ -ra, hacsak  $n$  egy  $\varepsilon$ -tól és a  $z$  helytől függő  $N = N(\varepsilon, z)$  számnál nagyobb. Azon  $z$  helyek összessége, melyre a sor konvergens, a függvénysor konvergenciatartományát alkotja.

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$  a  $z$  helyen abszolút konvergens, ha ott  $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)|$  konvergens.

A  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$  függvénysor egy tartományban (valós  $x$  változó esetében egy  $a < x < b$  intervallumban) egyenletesen konvergál az  $S(z)$  függvényhez, ha a tartományba tartozó  $z$  helytől függetlenül megadható a tetszőlegesen kicsiny  $\varepsilon > 0$ -hoz olyan csupán  $\varepsilon$ -tól függő  $N = N(\varepsilon)$

szám, hogy  $\left| S(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| < \varepsilon$  minden a vizsgált tartományba

eső  $z$ -re, hacsak  $n > N(\varepsilon)$ . Az egyenletes konvergencia vizsgálatára az un. Weierstrass-féle kritériumot ismertük meg. Folytonos függvények egyenletesen konvergens sorának összege folytonos, a sor tagonként integrálható, reguláris függvények egyenletesen konvergens sora tagonként differenciálható.

Speciálisan az alábbi függvénysorokkal foglalkoztunk behatóbban:

Valós tagu hatványsorok. Az  $x = a$  helyhez tartozó, vagy  $(x - a)$  hatványai szerint haladó valós tagu hatványsornak nevezzük a

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = a_0 + a_1 (x-a) + \dots + a_n (x-a)^n + \dots$$

függvénysort. E hatványsor konvergenciatartománya az  $x = a$  helyre szimmetrikus intervallum (vagy csak  $x = a$ -ra, vagy  $|x-a| < r$ -re ( $r > 0$ )) vagy minden  $x$ -re konvergens a sor), melynek belsejébe abszolút konvergens, és minden belső részintervallumban egyenletesen konvergens a sor.

Egy akárhányszor differenciálható  $f(x)$  függvény Taylor-során azt a

(\*) hatványsort értjük, amelyben az együtthatók:  $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$  un.

Taylor-együtthatók. Ekkor a (\*) sort Taylor-sornak nevezzük. Ha az  $a$  és  $x_0$  helyek közötti intervallumban  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$  minden  $n$ -re, akkor  $f(x)$ -nek az  $a$  helyhez tartozó Taylor-sora az  $x_0$  helyen konvergens, és

$$\left| f(x_0) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x_0 - a)^k \right| = |R_n(x_0)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x_0 - a|^{n+1}.$$

Nevezetesebb hatványsorként megemlítettük  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  minden  $x$ -re konvergens, és  $(1+x)^\alpha$   $|x| < 1$ -re konvergens (binomiális) sorát.

### Komplex hatványsorok. Foglalkoztunk

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k; \quad b) \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{1}{(z - z_0)^k}; \quad c) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

tipusu hatványsorokkal. E sorok konvergenciatartománya mindig  $z_0$ -ra szimmetrikus tartomány, és pedig

$$a) 0 < |z - z_0| < r; \quad b) |z - z_0| > r; \quad c) r < |z - z_0| < R,$$

ahol  $r$  és  $R$  elfajulhat  $0$ -vá, ill.  $+\infty$ -né.

Ha  $f(z)$  a  $z_0$  helyen reguláris, akkor Taylor-sora az az a) típusu hatványsor, melynek együtthatói  $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ .

Ha  $f(z)$  a  $r < |z - z_0| < R$  körgyűrűtartományban reguláris (speciálisan, ha  $f(z)$ -nek  $z_0$  izolált szinguláris helye), Laurent-sora az a c) típusu hatványsor, melynek együtthatóira:  $c_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_K \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$ ,

ahol  $K$   $z_0$  középpontu  $r < |z - z_0| < R$ -ben futó körvonal pozitív irányu befutás mellett. Speciálisan  $c_{-1} = \text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_K f(z) dz$ .

Ha  $z_0$   $f(z)$ -nek izolált szinguláris helye, akkor a  $z_0$  helyhez tartozó Laurent-sorból kiolvasható, hogy  $f(z)$ -nek  $z_0$  milyen természetű

szinguláris helye (megszüntethető szingularitása, pólusa, vagy lényeges szingularitása van-e  $f(z)$ -nek).

A függelékben szerepelnek ezen kívül speciális függvénysorként a trigonometrikus sorok, ill. a periodikus  $f(x)$  függvény Fourier-sorának fogalma.

#### 4. Differenciálegyenletek

(Matematika I/3. jegyzet 231-359 oldal.)

Röviden összefoglalva e témakörben speciális első- és másodrendű differenciálegyenletekkel és elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerekkel foglalkoztunk.

Az  $y' = f(x, y)$  alaku elsőrendű differenciálegyenleteknél (pl. szeparálható, elsőrendű lineáris, exakt egyváltozós multiplikátorral exakttá tehető, helyettesítéssel szeparálható differenciálegyenletre vezető) az  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltételnek eleget tevő megoldás egzisztenciájának és unicitásának biztosítását szolgáló elégséges feltétel  $f(x, y)$  és  $\frac{\partial f}{\partial y}$

folytonossága az  $(x, y) \in T$  helyeken, ahol

$$T = \{ (x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}.$$

Az  $y'' = f(x, y, y')$  alaku másodrendű differenciálegyenleteknél hasonlóképpen  $f(x, y, y')$ , ill. e függvény parciális deriváltjainak folytonossága  $(x_0, y_0, y'_0)$  környezetében biztosítja a differenciálegyenlet

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$  kezdeti feltételeket kielégítő megoldásának létezését és unicitását. E differenciálegyenlet-típuson belül speciálisan

$y'' = f(x, y)$ , ill.  $y'' = f(y, y')$  típusu hiányos, ill.  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$  típusu lineáris másodrendű differenciálegyenletekkel foglalkoztunk. A legutóbbinak speciális esetenként megemlítettük az  $ay'' + by' + cy = f(x)$  általános alakkal megadható állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenleteket, melyeknek megoldására a függelékben a Laplace-transzformáció alkalmazásával még egy másik módszert is ismertettünk.

Az elsőrendű differenciálegyenletrendszerek, speciálisan az elsőrendű lineáris állandó együtthatós (homogén és inhomogén) differenciálegyenlet-rendszerek megoldásának problémájával is foglalkoztunk (a függelékben ezen utóbbiakra is adtunk a Laplace-transzformáció alkalmazásaként újabb megoldási módszert). Megmutattuk továbbá, hogy tetszőleges  $n$ -edrendű explicit differenciálegyenlet megoldása elsőrendű differenciálegyenletrendszer megoldására vezethető vissza.

## IRODALOMJEGYZÉK

1. A. F. Bermant: Matematikai analízis I-II.
2. B. A. Fuksz - B. V. Sabat: Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk.
3. I. A. Gelfajn: Vektornij analiz i teorija polja.
4. E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen.
5. M. I. Kontorovics: Operátorszámítás és nemstacionárius jelenségek elektrotechnikai alkalmazásai.
6. Pach Zs. Pálné - Frey Tamás: Vektor- és tenzoranalízis
7. Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei
8. V. I. Szmirnov: Kursz vizsej matyematyiki I-V.
9. V. V. Sztjepanov: A differenciálegyenletek tankönyve.





## TARTALOMJEGYZÉK

|                                                                                                                        | Oldal |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <br><b>VEKTORANALIZIS</b>                                                                                              |       |
| 1. Vektor-vektorfüggvény divergenciája . . . . .                                                                       | 3     |
| 2. Gauss-Osztrogradszkij-tétel, síkbeli Gauss-Osztrogradszkij-tétel, Green-tétel . . . . .                             | 11    |
| 3. Vektor-vektorfüggvény rotációja. Vektorpotenciál . . . . .                                                          | 27    |
| 4. Stokes tétele. Potenciálkeresés . . . . .                                                                           | 38    |
| 5. Skalár-vektorfüggvény gradiensének Ignatowsky-féle definíciója . . . . .                                            | 58    |
| 6. Általános (görbevonalu) koordináták . . . . .                                                                       | 62    |
| 7. A gradiens kiszámítása görbevonalu koordinátarendszerben . . . . .                                                  | 71    |
| 8. A divergencia kiszámítása görbevonalu ortogonális koordinátarendszerben . . . . .                                   | 73    |
| 9. A rotáció kiszámítása görbevonalu ortogonális koordinátarendszerben . . . . .                                       | 83    |
| <br><b>KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN</b>                                                                                         |       |
| 10. Komplex számok . . . . .                                                                                           | 89    |
| 11. Komplex tagu sorozat és sor . . . . .                                                                              | 103   |
| 12. Komplex változós függvény . . . . .                                                                                | 117   |
| 13. Komplex változós függvény differenciálhatósága és regularitása. Harmonikus függvények . . . . .                    | 124   |
| 14. Komplex változós függvények által létesített leképezések. Körtartó és konformis leképezés . . . . .                | 135   |
| 15. Az exponenciális függvény és annak Riemann-felülete. A logaritmus függvény. Az általános hatványfüggvény . . . . . | 156   |
| 16. Komplex változós integrál . . . . .                                                                                | 165   |
| 17. A Cauchy-féle integrálformula és következményei . . . . .                                                          | 178   |
| 18. Komplex függványsorok . . . . .                                                                                    | 184   |
| 19. Komplex hatványsorok . . . . .                                                                                     | 189   |
| 20. Laurent-sor . . . . .                                                                                              | 194   |

|                                                                                                                                                              | Oldal |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 21. Residuum-tétel .....                                                                                                                                     | 206   |
| 22. Schwarz-Christoffel-formula .....                                                                                                                        | 222   |
| 23. Komplex potenciál .....                                                                                                                                  | 228   |
| <br>DIFFERENCIÁLEGYENLETEK                                                                                                                                   |       |
| 24. A differenciálegyenletek fogalma és osztályozása .....                                                                                                   | 231   |
| 25. Elsőrendű differenciálegyenletek .....                                                                                                                   | 235   |
| 26. Egzisztencia- és unicitási tételek .....                                                                                                                 | 274   |
| 27. Implicit alaku elsőrendű differenciálegyenletek .....                                                                                                    | 285   |
| 28. Elsőrendű differenciálegyenletek közelítő megoldása ..                                                                                                   | 290   |
| 29. Elsőrendű differenciálegyenletrendszerek. $n$ -edrendű explicit differenciálegyenletek .....                                                             | 293   |
| 30. Másodrendű hiányos differenciálegyenletek .....                                                                                                          | 299   |
| 31. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek .....                                                                                                         | 305   |
| 32. Másodrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek .....                                                                                   | 316   |
| 33. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletrendszerek                                                                                              | 331   |
| <br>FÜGGELÉK                                                                                                                                                 |       |
| 34. Fourier-sorok .....                                                                                                                                      | 361   |
| 35. Fourier-integrál; Fourier-transzformáció .....                                                                                                           | 377   |
| 36. A Laplace-transzformáció fogalma és műveleti szabályai ..                                                                                                | 380   |
| 37. Az impulzusfüggvény Laplace-transzformáltja .....                                                                                                        | 393   |
| 38. A Laplace-transzformáció megfordítása .....                                                                                                              | 396   |
| 39. A Laplace-transzformáció alkalmazása közönséges, állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek és differenciálegyenletrendszerek megoldására ..... | 408   |
| 40. Operátor-impedancia .....                                                                                                                                | 416   |
| ÖSSZEFOGLALÁS .....                                                                                                                                          | 423   |



