

**BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR**

Ádám Katalin

MATEMATIKA PÉLDATÁR

IV. kötet

Sorok, függvénysorok



Műegyetemi Kiadó, 2000.

(Ötödik utánnomás)

Azonosító: **051201**

A Budapesti Műszaki Egyetem Természettudományi Kar

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

Felelős vezető: Veress János

Terjedelem: 19,8 (A/5) ív

Nyomtatta és kötötte: **Műegyetemi Nyomda**

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 002/2000

A konvergencia definíciójával és közvetlen következményével kapcsolatos feladatok

1. 1. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ teljesül.

Következik-e a sor konvergenciája az alábbi feltételek valamelyikéből?

- a) $a_n \rightarrow 0$.
- b) $a_n > 0$ és (S_n) korlátos.
- c) (S_n) -monoton csökkenő.
- d) $a_n > 0$ és (S_n) -nek van konvergens részsorozata.
- e) $(|S_n|)$ konvergens sorozat.

2. Konvergensek-e az alábbi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorok,
ha

a) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } n = k^2 \text{ (} k=1, 2, \dots \text{)} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } n = 5k \text{ (} k=1, 2, \dots \text{)} \\ \frac{1}{n^2} & \text{egyébként} \end{cases}$

c) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{ha } n = k^2 \text{ (} k=1, 2, \dots \text{)} \\ \frac{1}{n^2} & \text{egyébként} \end{cases}$

1. 2. d) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\log_2 n} & \text{ha } n = 2^k \quad (k=1, 2, \dots) \\ \frac{1}{2^n} & \text{egyébként} \end{cases}$

e) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\ln n} & \text{ha } n = k^2 \quad (k=1, 2, \dots) \\ \frac{1}{n^2} & \text{egyébként} \end{cases}$

2. 1. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$ sor konvergenciájának

szükséges és elégséges feltétele az (a_k) sorozat konvergenciája!
Mennyi a sor összege?

2. Hozzuk a következő sorokat

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \text{ alakra, és határozzuk meg a sorösszegeket,}$$

ha létezik!

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k-1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k+1})$

2. 2. d)
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k^2-1)}$$

e)
$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

f)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$$

g)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k-1)^2 (2k+1)^2}$$

3. Állapítsuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, számítsuk ki az összegüket!

a)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

b)
$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right)$$

c)
$$\sum_{k=3}^{\infty} \ln \left(1 - \left(\frac{2}{k} \right)^2 \right)$$

d)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

3.

e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k}$

f) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{-k}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{\frac{k}{2}}}$

h) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k}$

4. 1. Tegyük fel, hogy

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergens sorok, valamint

$a_k \leq c_k \leq b_k$ ($k > N$ esetén)

a) Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ sor is konvergens!

4. 1. b) Mit mondhatunk a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ sorról, ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok divergensek?

2. Az alábbi feltételek közül melyikből következik a

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergenciája?

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}) = 0$ minden p -re.

b) Minden ε -hoz és $p > 0$ -hoz van olyan N , hogy ha $n > N$, akkor

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

c) Minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N , hogy ha $n > N$, akkor tetszőleges p -re

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Váltakozó előjellű sorok

5. Állapítsuk meg, hogy az alábbi váltakozó előjellű sorok közül melyik konvergens és speciálisan Leibniz típusú, és melyik divergens!

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, ahol $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$

② $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \cdot \ln n}$

$$5. \textcircled{3} \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots +$$

$$+ \dots - \frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Műveletek sorokkal

6. 1. Következik-e a $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sor konvergenciája vagy divergenciája az alábbi feltételekből?

a) $\sum a_n$ konvergens és $\sum b_n$ divergens

b) $\sum a_n$ és $\sum b_n$ divergens

c) $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_k + b_k + \dots$ konvergens

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

6. 2. (d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

3. Az a, b, c paraméterek mely értékeire konvergens a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{c^n} \text{ sor és mennyi az összege?}$$

(4.) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor ha $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } n=k^2 \\ & (k=1, 2, \dots) \\ \frac{1}{2^n} & \text{különben} \end{cases}$

5. Lehet-e a $\sum a_n$ sor konvergens, ha a

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor divergens

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n|$ sor divergens?

6. a) Felhasználva a Riemann tétel bizonyításának módszerét, adjuk

meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2$ feltételesen konvergens sor

1, 5-höz konvergáló átrendezésének első tiz elemét!

b) Adjuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2$ feltételesen konvergens

sor divergenssé átrendezésének első tiz elemét.

c) Következik-e a $\sum a_n$ sor konvergenciája abból, hogy $a_n \rightarrow 0$ és van a részletösszege sorozatának konvergens részsorozata?

6. 7. a) A $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sor konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(α) Bizonyítsuk be, hogy a zárójelek elhagyásával keletkező sor is konvergens!

β) Igaz-e az állítás, ha az $a_n \rightarrow 0$ feltételt elhagyjuk?

b) Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra teljesül, az $a_n \rightarrow 0$ feltétel, és a sort k -asával zárójelezzük úgy, hogy a keletkező sor konvergens akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens és ugyanaz az összege.

c) Határozzuk meg a következő összegeket!

a) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$

b) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$

8. a) Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \rightarrow 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{(2^n)}$

és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorok azonos jellegűek, azaz

α) ha $\sum 2^n a_{(2^n)}$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ konvergens;

β) ha $\sum 2^n a_{(2^n)}$ divergens $\Rightarrow \sum a_n$ divergens.

b) Határozzuk meg, hogy az α paraméter mely értékeire konvergens, illetve divergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \cdot \log_2 n \text{ sort}$$

7. ①. Készítsük el a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ sor önmagával vett szorzatát

(négyzetes szorzatát) és Cauchy-szorzatát, és adjuk meg mindkettő összegét!

②. Számítsuk ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad \text{sorok Cauchy szorzatát!}$$

③. Igazoljuk, hogy az

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{és az} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

sorok divergenssek, Cauchy szorzatuk mégis konvergens!

④. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergens sor önmagával való

Cauchy szorzata divergens!

Abszolút-konvergenca vizsgálata

8. ①. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ ($a_n > 0$) és a $\sum b_n$ ($b_n > 0$) sorra

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ és $\sum b_n$ divergens, akkor a $\sum a_n$ sor is divergens.

8. ② Igaz-e, hogy minden $\sum a_n$ ($a_n > 0$) konvergens sorhoz van konvergens majoráns sor?

3. Keressünk megfelelő majoráns vagy minoráns sort a következő sorokhoz és állapítsuk meg, hogy konvergens-e!

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$$

b)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sin n}}{e^n}$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$$

f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}, \quad (0 < a < 1)$$

9. ① A $\sum a_n$ ($a_n > 0$) sorra ekvivalens-e az alábbi két feltétel:

a) van olyan $q < 1$, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ (ha $n > N$)

9. 1. b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1;$ (ha $n > N$)

② $\sum a_n$ ($a_n > 0$) konvergens. Teljesülhet-e végtelen sok n -re, hogy

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

b) $\sqrt[n]{a_n} > 1$

③ Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ ($a_n > 0$) sorra

a) $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens

b) $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens

c) $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens

d) $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor ebből nem következik a $\sum a_n$ sor

divergenciája.

④ Bizonyítsuk be, hogy ha egy sor konvergenciája hányados-kritériummal eldönthető, akkor gyök-kritériummal is az. Igaz-e ez fordítva?

10. A hányados-kritérium alkalmazásával döntsek el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

10. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

11. A gyökkritérium alkalmazásával döntsek el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

② $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n^2}$

11. ⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctgn})^n$

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{n\pi}{3}\right)^n$

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)^n$

12. Az integrálkritérium alkalmazásával döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$

② $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$

③ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n}{1 + \operatorname{ch}^2 n}$

13. 1. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0 \text{ és } a_n > 0, b_n > 0, \text{ akkor a } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok egyszerre konvergensek, illetve divergensek!

$$(\text{jelben: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n)$$

2. Konvergensek-e az alábbi sorok.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$$

$$\text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n - 1}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + 3\sqrt{n+1}}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n^2 + 1}$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n^\alpha} \quad \alpha \text{ tetszőleges}$$

13. 2. f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

g)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2 - 1} \right)^{n^2}$$

h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$$

Az alapvető kritériumokra vonatkozó vegyes feladatok

14. 1. Igaz-e, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a| \quad \text{sor konvergens?}$$

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) \quad (1 < a)$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[n]{a}) \quad (0 < a < 1)$$

14. (2.) d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)$$

f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2}{n}}\right)$$

g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

15. (1.) (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor $\sum a_n^2$ is konvergens.

b) Igaz-e az a)-beli állítás megfordítása?

c) Igaz-e az a)-beli állítás, ha $\sum a_n$ feltételesen konvergens?

(2.) Bizonyítsuk be, hogy ha

(a) $\sum a_n^2$ és $\sum b_n^2$ konvergens, akkor $\sum a_n b_n$ abszolút konvergens.

(b) $\sum a_n^2$ konvergens, akkor $\sum \frac{|a_n|}{n}$ is konvergens.

(c) $\sum a_n$ ($a_n > 0$) konvergens, akkor $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ is konvergens.

(d) $\sum a_n^2$ és $\sum b_n^2$ konvergens, akkor $\sum (a_n + b_n)^2$ is konvergens.

16. 1. Legyen $\sum a_n$ konvergens.

a) létezik-e mindig a $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ határérték?

b) ha létezik, mennyi lehet?

2. a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\sum a_n$ konvergens és $a_n > 0$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0.$$

b) Elhagyható-e az $a_n > 0$ feltétel, (ha $a_n > 0$)?

3. a) Lehet-e a $\sum a_n$ sor konvergens, ha végtelen sok n -re

$$a_n > \frac{1}{n} ?$$

b) Lehet-e a $\sum a_n$ sor divergens, ha végtelen sok n -re

$$a_n < \frac{1}{n^2} ?$$

4. Igaz-e, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens és $a_n > 0$, akkor

$$a_n < \frac{1}{n} \quad (\text{ha } n > N)?$$

Elhagyható-e az $a_n > 0$ feltétel?

Abszolút konvergencia eldöntésére vonatkozó
további kritériumok

17. 1. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ (ha $n > N$), akkor ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is az, ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is az. ($a_n > 0$)

(b) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ sor?

17. 2. a) Igazoljuk a következő állítást (Raabe-féle kritérium):

ha $a_n > 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \beta$, akkor

$\beta > 1$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens;

$\beta < 1$ esetén pedig divergens.

b) Milyen a -ra konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$ ($a > 0$) sor?

18. 1. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ sorra teljesül, hogy

$b_n \searrow 0$ és $\left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq K$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ sor konvergens!

118. ② Konvergencia-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \quad \text{sor?}$$

19. 1. a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, akkor a

$$\sum |\ln a_n - \ln a| \quad \text{és a} \quad \sum |a_n - a|$$

($a_n > 0$) sorok egyszerre konvergensek illetve divergensek!

b) Az $\ln x$ függvényen kívül milyen függvényre igaz még az a)-beli állítás?

2. a) Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) és a

$\sum \ln(1 + a_n)$ sorok egyszerre konvergensek illetve divergensek!

b) Az $\ln(1 + x)$ függvényen kívül milyen függvényre igaz még az állítás?

3. Bizonyítsuk be, hogy a $b_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ ($a_k > 0$) sorozat

akkor és csak akkor konvergens, amikor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens!

119. ④ Konvergensek-e az alábbi sorok?

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \ln(1 + \frac{1}{n}))$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (e - (1 + \frac{1}{n})^n)$

119. 4. (2.) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt{\cos \frac{1}{n}}\right)$

Maradéktag becslések.

20. [1.] Mutassuk meg, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorra vagy

a) $a_n > 0$, $a_n \leq b_n$ és ismerjük a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ összeget;
vagy

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Leibniz sor; vagy

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ -re alkalmazható az integrál kritérium, - akkor

meg tudjuk becsülni az $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ összegnek a sorösszeztől való eltérését.

2. Adjuk meg, hogy a következő sorokból hány tagot kell venni, hogy a sorösszeztől való eltérés legfeljebb 10^{-4} legyen!

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+1)!}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$

20. 2. c)
$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$$

③ a) Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q < 1 \quad (\text{ha } n > N),$$

akkor $|R_n| < |a_n| \frac{q}{1-q}$

b) Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < c_n \quad \text{és} \quad c_n \leq q < 1$$

(ha $n > N$),

akkor $|R_n| < |a_n| \frac{c_n}{1-c_n}$

c) Becsüljük meg azt a hibát, melyet elkövetünk, ha a

$$\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}$$

$$\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{2^n}$$

sorok összege helyett az első n tagjának összegét vesszük!

④ Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sorra $\frac{1}{n+1} < R_n < \frac{1}{n}$.

Paraméteres sorok

!21. 1. Vizsgáljuk meg, hogy a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\alpha} n^{\beta}} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

sor az α és β paraméterek mely értékeire konvergens és divergens!

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

b)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

c)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}$$

d)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^4}$$

e)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

f)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

21. 2. g)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^2}$$

h)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^5 \sqrt{n}}$$

i)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^3}$$

j)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

22. A paraméterek mely értékeire konvergensek az alábbi sorok?
 $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n\alpha}}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n^\beta}$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{\ln n}}$$

$$22. \quad (5.) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{\alpha}-1}}{n}$$

$$6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})^{\alpha}}{n^{\beta}}$$

$$7. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1n^{\alpha} (1 + \frac{1}{n})}{n^{\beta}}$$

$$8. \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1n^{\alpha} (1 + \frac{1}{n}) (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})^{\beta}$$

$$9. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin^{\alpha} \frac{1}{n} 1n^{\beta} (1 + \frac{1}{n})$$

$$10. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos \frac{1}{n})^{\alpha}}{n^{\beta}}$$

$$11. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1n^{\alpha} (1 + \frac{1}{n^2})}{(n\sqrt{n!})^{\beta} (\alpha > 0)}$$

$$12. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^{n^{\alpha}}$$

Vegyes feladatok

23. Döntsük el, hogy konvergensek-e illetve abszolút konvergensek-e az alábbi sorok!

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{1}{n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\pi + \frac{1}{n} \right)$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \cos \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} - 1 \right)$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$$

23. 9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n^2}$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e)^{-n}}{\sqrt{n}}$$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{n}}, \quad (a > 1)$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n+1}$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sin n}}{e^n}$$

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$$

$$23. \quad 18. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$$

$$19. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$$

$$20. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$$

$$(21) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^n)}$$

$$22. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-1}{\ln n} \right)^n$$

$$(23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$(24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{(2n)!}}$$

$$25. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n}$$

$$(26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log_b \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right) \quad (a > 0, \quad a, b \in \mathbb{R})$$

$$23. \textcircled{27} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$$

$$28. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$$

$$29. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}} \quad (a > 0, a \in \mathbb{R})$$

$$30. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n} \cdot (\ln n)^a} \quad (a > 0, a \in \mathbb{R})$$

$$31. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$$

$$32. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$\textcircled{33} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

$$34. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n$$

$$\textcircled{35} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\ln n}$$

$$\underline{23.} \quad 36. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$$

$$37. \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln a} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\textcircled{38.} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\textcircled{39.} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

$$40. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$$

$$41. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$$

$$42. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin n$$

$$43. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^n$$

$$44. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$$

$$23. \quad 45. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{2^n}$$

$$(46.) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{2^n}$$

$$47. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n^2} \right) n$$

Függvénysorok

Vezessük be a következő jelöléseket, rövidítéseket, elnevezéseket!
 I := zárt, nyílt korlátos vagy nem korlátos intervallum

$(f_n(x))$: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ függvénysorozat

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \text{ függvénysor}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ limeszfüggvény röviden } f_n(x) \rightarrow f(x)$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ összegfüggvény}$$

$$r_n(x) = f(x) - f_n(x) \text{ maradékfüggvény}$$

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \text{ maradékfüggvény}$$

- KT: = konvergencia tartomány, vagyis az a tartomány, melyben a függvénysorozat ill. függvénysor pontonként konvergens.
- AT: = abszolút konvergenciatartomány, vagyis az a tartomány, melyben a sorozat ill. a sor abszolút konvergens.
- {ET}: = egyenletes konvergenciatartomány halmaza, vagyis azon tartományok összessége, melyben a sorozat illetve a sor egyenletesen konvergens.
- ET: = ha létezik, az a legbővebb intervallum, melyben a sor ill. sorozat egyenletesen konvergens.

$f_n(x) \Rightarrow f(x)$ röviden jelöli, hogy $(f_n(x))$ függvénysorozat egyenletesen tart $f(x)$ függvényhez.

Pontonkénti konvergencia

24. Határozzuk meg a következő függvénysorok KT konvergenciatartományát!

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx}$$

$$2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx}$$

$$3. \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

$$5. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

24. 6.
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

⑦.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n+x}$$

8. A következő feladatoknál használjuk fel a 21. és 22.-es feladatok eredményét.

a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^x}$$

b)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^x}$$

c)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \ln n}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n^2}$$

Konvergenctartomány meghatározása

25. 1. a) Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1 \quad \text{minden } x \in (a,b)\text{-re és}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} > 1 \quad \text{minden } x \notin [a,b] \text{-re}$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor konvergenctartománya a és b végpontu intervallum.

b) Mit mondhatunk $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(a)|}$ ill. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(b)|}$ értékéről?

2. a) Igaz-e az 1. a)-beli állítás $\overline{\lim}$ -ra is, ha a limesz nem létezik?

ⓑ) igaz-e az 1. a)-beli állítás, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}$

helyett $\lim \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}$ szerepel?

Ⓐ Határozzuk meg a

$$\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \frac{x^4}{2^4} + \frac{x^5}{3^5} + \dots + \frac{x^{2k}}{2^{2k}} + \frac{x^{2k+1}}{3^{2k+1}} + \dots$$

sor konvergenctartományát!

Függvénysorozat egyenletes konvergenciája

27. Írjuk fel a következő függvénysorok részletösszeg-függvény sorozatát, annak limeszfüggvényét és KT konvergenciatartományát, valamint az $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ maradék függvényét.

$$\textcircled{1.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x)$$

$$2. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\cos x)^n$$

28. Határozzuk meg a következő függvénysorozatok KT konvergenciatartományát, és $f(x)$ limeszfüggvényét!

$$\textcircled{1.} \quad f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$$

$$2. \quad f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$3. \quad f_n(x) = \sin n x$$

$$4. \quad f_n(x) = \frac{x^n}{2^n}$$

$$\textcircled{5.} \quad f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}, \quad (x \geq 0)$$

$$\textcircled{6.} \quad f_n(x) = \frac{\frac{2}{n}x + n \ln x + x^5}{n^2 + n x^3 + \sin x}$$

Függvénysorozatok egyenletes-konvergencia kritériumai

29. 1. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha van olyan (c_n) numerikus sorozat, hogy $|r_n(x)| \leq c_n$ az I-ben (ha $n > N$) és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0, \text{ akkor } f_n(x) \implies f(x) \text{ I-ben!}$$

- b) Állapítsuk meg; igaz-e, hogy $f_n(x) \implies f(x)$ KT-n, ha

$$\alpha) f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

$$\beta) f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} x^n}{n}$$

$$\gamma) f_n(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{x}{n}$$

2. a) Bizonyítsuk be, hogy ha $f_n(x) \implies f(x)$ I-ben, akkor minden I-beli (x_n) pontsorozatra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n(x_n)| = 0.$$

- b) Bizonyítsuk be, hogy ha van olyan $(x_n) \subset I$ pontsorozat, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n(x_n)| \neq 0$ akkor $f_n(x) \not\implies f(x)$ I-ben.

- (c) Állapítsuk meg, hogy $f_n(x)$ egyenletesen konvergál-e a limesz függvényhez a konvergenciatartományán.

$$\alpha) f_n(x) = x^n - x^{2n}$$

$$\beta) f_n(x) = \frac{1}{nx}$$

$$\gamma) f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$$

29. 3. (a) Bizonyítsuk be, hogy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-ben akkor, és csak akkor, ha $\sup_{x \in I} |r_n(x)| = a_n$ numerikus sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(b) Állapítsuk meg, igaz-e, hogy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ KT-n, ha

$$\alpha) f_n(x) = x^n - x^{n+1} \quad (x \geq 0)$$

$$\beta) f_n(x) = \frac{\ln nx}{nx}$$

$$\gamma) f_n(x) = x e^{-nx}$$

4. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $f_n(x)$ folytonos (minden n-re) az $[a, b]$ -ben és itt $f(x)$ -hez tart, valamint $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ az (a, b) -ben, akkor $f(x)$ folytonos $[a, b]$ -ben!

b) Állapítsuk meg, igaz-e, hogy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ KT-n és a megadott I-intervallumon!

$$\alpha) f_n(x) = e^{-nx}, \quad I = (0, \infty)$$

$$\beta) f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \quad I = (0, \infty)$$

$$\gamma) f_n(x) = nx^n, \quad I = (-1, 1)$$

5. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyek igazak!

a) Ha nincs olyan $c_n \rightarrow 0$ numerikus sorozat, melyre

$$|r_n(x)| \leq c_n \quad (\text{ha } n > N), \text{ akkor } f_n(x) \not\rightrightarrows f(x).$$

Vagyis minden egyenletesen konvergens fv. sorozathoz van numerikus majoráns sorozat.

(b) Ha minden $(x_n) \subset I$ pontsorozatra $|r_n(x_n)| \rightarrow 0$, akkor

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ az I-ben.}$$

29. 5. c) Ha $f_n(x)$ folytonos minden n -re $[a, b]$ -ben, de $f(x)$ nem folytonos az a -ban, akkor $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$ (a, b) -ben
- d) Ha van olyan $(x_n) \subset I$ pontsorozat, melyre $r_n(x_n)$ divergens, akkor $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$ I -ben.

⑥. Bizonyítsuk be, hogy ha $(f_n(x))$ függvénysorozat konvergenciatarományja

a) (a, b)

b) $[a, b]$

és $d | r_n(x) |$ jeltartó, akkor

$$\frac{d}{dx}$$

a) $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$

b) $f_n(x) \rightarrow f(x)$

30. Állapítsuk meg, hogy az $(f_n(x))$ függvénysorozat egyenletesen konvergense a KT konvergenciatarományán, valamint a megadott I intervallumokon, és határozzuk meg {ET} egyenletes konvergenciataromány halmazt vagy ha van, azt az ET legbővebb intervallumot, melyben a sorozat egyenletesen konvergens!

①. $f_n(x) = \frac{x}{n}$; $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$

2 $f_n(x) = \frac{x + n}{n}$; $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$

③. $f_n(x) = \frac{1}{x + n}$; $I = [a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

4 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$; $I = (-\infty, a]$

⑤. $f_n(x) = x^n$; $I_1 = (-1, 1)$, $I_2 = [a, b]$ ($-1 < a < b < 1$, $a, b \in \mathbb{R}$)

20. ⑥. $f_n(x) = (x + \frac{1}{n})^n$; $I_1 = (-1, 1)$,
 $I_2 = [a, b] (-1 < a < b < 1, a, b \in \mathbb{R})$
- ⑦. $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$; $I = [a, b], a, b \in \mathbb{R}$
8. $f_n(x) = (1 + \frac{1}{xn})^n$; $I_1 = (0, \infty)$,
 $I_2 = [a, \infty), (a > 0, a \in \mathbb{R})$
9. $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$ $I_1 = [-\infty, -1)$,
 $I_2 = (-1, 1), I_3 = (1, \infty)$
10. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$; $I = (-1, 1)$
- ⑪. $f_n(x) = \frac{n^x}{x^n}$; $I_1 = (1, \infty); I_2 = [a, \infty), (a > 1);$
 $I_3 = (-\infty, -1]$
- ⑫. $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$; $I = [a, b] (a, b \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges})$
- ⑬. $f_n(x) = nx^n(1-x)$ $I_1 = (-1, 1) I_2 = (-1, a] (a < 1);$
- ⑭. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ $I = (-\infty, +\infty)$
15. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + n}$ $I = (e, \pi)$
- ⑯. $f_n(x) = n (\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x})$ $I = [a, \infty) (a > 0)$

30. (16) $f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) \quad I = [a, \infty) \quad (a > 0)$

17. $f_n(x) = \sin \frac{x}{n} \quad I = [a, b]$

(18) $f_n(x) = \frac{n}{x} \sin \frac{x}{n} \quad I = (0, a] \quad (a \in \mathbb{R})$

19. $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n} \quad I = [a, b] \quad (a, b \in \mathbb{R})$

20. $f_n(x) = \frac{x}{n} \sin \frac{x}{n} \quad I = [a, b] \quad (a, b \in \mathbb{R})$

(21) $f_n(x) = x^n e^{-nx} \quad I = (0, \infty)$

(22) $f_n(x) = nx e^{-nx} \quad I = [a, \infty) \quad (a > 0)$

23. $f_n(x) = e^{n(x-1)} \quad I = (-\infty, 1)$

24. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2} \quad I = [-a, a] \quad (a \in \mathbb{R})$

(25) $f_n(x) = \frac{\ln n^x}{n^x} \quad I = (0, \infty)$

26. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \quad I = (0, a] \quad (a \in \mathbb{R})$

(27) $f_n(x) = n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) \quad (x > 0); \quad I_1 = (0, 1],$

$$I_2 = [1, \infty); \quad I_3 = [1, d] \quad (d \in \mathbb{R})$$

(28) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n} \quad (x \geq 0); \quad I_1 = [0, 1]; \quad I_2 = [1, \infty)$

Operációk felcserélhetősége függvénysorozat esetén

31. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre, válaszunkat indokoljuk és töltsük ki a mellékelt szelvényt (igen = 1, nem = 0).

1. Lehetnek-e egy $f(x) = 0$ -hoz
a) konvergens
b) egyenletesen konvergens
függvénysorozat elemei nem korlátos függvények?
2. Lehetséges-e, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n(x) \neq \sup f(x)$
a) ha $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $(-\infty, \infty)$ -ben
b) ha $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ minden korlátos I -ben
3. Tarthatnak-e nem folytonos függvények egyenletesen folytonos függvényhez?
4. Tarthatnak-e differenciálható függvények egyenletesen nem differenciálható függvényhez? Vizsgáljuk meg ebből a szempontból az $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ függvénysorozatot!
5. Tegyük fel, hogy $f_n(x)$ -nek van primitív függvénye minden n -re és $F(x)$ -hez konvergálnak I -n, valamint $f_n(x) \Rightarrow f(x)$. Következik-e ebből, hogy $f(x)$ -nek is van primitív függvénye I -n?
6. Lehet-e egy függvénysorozat egyenletesen konvergens (a, b) -ben, ha az $[a, b]$ -ben nem konvergens?
- ⑦ a) Lehet-e egy folytonos függvényekből álló függvénysorozat konvergens $[a, b]$ -n, egyenletesen konvergens (a, b) -n, de nem egyenletesen konvergens $[a, b]$ -n.
b) Lehet-e egy $[a, b]$ -ben konvergens függvénysorozat egyenletesen konvergens (a, b) -ben, de nem egyenletesen konvergens $[a, b]$ -ben.

31. 8. Lehet-e, hogy $(f_n(x))$ konvergens $(-\infty, \infty)$ -en, egyenletesen konvergens tetszőleges $[a, b]$ -n, de nem egyenletesen konvergens $(-\infty, \infty)$ -en?

9. Igaz-e, hogy egyenletesen konvergens függvénysorozatok

a) összege,

b) szorzata

egyenletesen konvergens?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

32. 1. a) Lássuk be, hogy ha az $(f_n(x))$ függvénysorozat $f(x)$ limeszfüggvénye nem differenciálható x_0 -ban, akkor az $(f_n'(x))$ derivált függvénysorozat nem lehet egyenletesen konvergens az x_0 -at tartalmazó I intervallumban.

b) Egyenletesen konvergens-e az $(f_n'(x))$ függvénysorozat az I-ben, ha

$$\alpha) f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}; \quad I = [0, 2]$$

$$\beta) f_n(x) = \frac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}; \quad I = [-1, 1]$$

$$\gamma) f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx; \quad I = (-1, 1)$$

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi $(f_n(x))$ függvénysorozatok egyenletes konvergencia-tartományában az $f(x)$ limeszfüggvényre

$$(f(x))' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x).$$

nem teljesül mindenhol.

a) $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$

b) $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} x^n}{n}$

32. 2. c) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$

3. Mutassuk meg, hogy az $(f_n(x)) = \left(\frac{x}{1 + e^{-nx}}\right)$ függvénysorozat $f(x)$ limeszfüggvényére és az $(f'_n(x))$ függvénysorozat $g(x)$ limeszfüggvényére nem igaz, hogy $f'(x) = g(x)$ a $[-1, 1]$ -ben!

33. ①. Adjuk meg a és b értékét úgy, hogy a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

teljesüljön és hogy ne teljesüljön.

a) ha $f_n(x) = n x e^{-nx}$

b) ha $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$

c) ha $f_n(x) = n^3 x e^{-nx}$

d) ha $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^4}$

2. Az $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ függvénysorozat a $[0, 1]$ intervallumban milyen α -ra lesz:

- a) konvergens
b) egyenletesen konvergens

c) $\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$?

$$34. \quad 1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{x^2 + n^2} dx = ?$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = ?$$

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{e^{nx}} dx = ?$$

$$4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin \frac{x}{n}} dx = ?$$

$$5. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} x^2 e^{-nx} dx = ?$$

- 35) 1. a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges folytonosan differenciálható $g(x)$ függvényre, az

$$f_n(x) = n \left(g\left(x + \frac{1}{n}\right) - g(x) \right) = \frac{g\left(x + \frac{1}{n}\right) - g(x)}{\frac{1}{n} - 0}$$

függvénysorozat egyenletesen tart $g'(x)$ függvényhez minden $[a, b]$ -n!

- b) Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^x n \left[\ln \left(x + \frac{1}{n}\right) - \ln x \right] dx = \ln x$$

135. 12. Bizonyítsuk be, hogy

$$f_n(x) = \int_x^{x+\sum_{k=1}^n a_k} g(t) dt$$

függvénysorozat egyenletesen konvergens mindenhol, ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens numerikus sor és } g(x) \text{ folytonos függvény!}$$

Függvénysorok egyenletes konvergenciája

36. Határozzuk meg a következő sorok KT konvergenciatartományát!

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{xn^2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n^3}$

③. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

④. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}\right)$

37. 1. Igaz-e, hogy ha

$$a) \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \leq q < 1 \quad \text{ha} \quad n > N \quad x \in I\text{-re,}$$

37. 1. illetve

$$\text{b) } \sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq q < 1 \quad \text{ha} \quad n > N \quad x \in I\text{-re,}$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor abszolút és egyenletesen konvergens az I-n?

2. Igaz-e, hogy ha

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} < 1 \quad x \in I\text{-re,}$$

illetve

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1 \quad x \in I\text{-re}$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor abszolút és egyenletesen konvergens I-ben?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ($c_n > 0$) sor konvergens, és

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \quad x \in I \text{ -re,}$$

ha $n > N$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor abszolút és egyenletesen konvergens az I-n!

Függvénysor egyenletes-konvergencia kritériumai

38. 1. a) Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ egyenletesen konvergens az I-ben, ha $\sup_{x \in I} |f_n(x)| = a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor konvergens.
- b) Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományon!

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$$

$$\beta) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$$

$$\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{x^2 + n^3}$$

2. a) Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$$

egyenletesen konvergens I-n, akkor $f_n(x) \Rightarrow 0$ I-n.

- b) Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományukon!

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx}$$

38. 2. b) $\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$

3. a) Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens az $(a, b]$ -ben és $f_n(x)$ folytonos $[a, b]$ -ben minden n -re, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f(a)$ konvergens sor!

- b) Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergencia tartományban!

$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

$\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$

$\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n n!$

4. a) Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor az I -intervallumban Leibnitz sor, $|f_n(x)| \leq c_n$ (ha $n > N$) és

$c_n \rightarrow 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor egyenletesen konvergens I -ben!

38. 4. b) Határozzuk meg a következő sorok {ET} egyenletes konvergenciatartomány halmazát!

$$\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

$$\beta) \sum_{n=1}^{\infty} (\sin \mathcal{X} \left(\frac{1}{n} + n \right) + \sin \mathcal{X} \left(\frac{1}{n} - n \right))$$

5. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyek igazak! (Töltsük ki a mellékelt szelvényt. Igaz = 1, Hamis = 0)

- a) Ha nincs olyan $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens numerikus sor, hogy

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \text{az } I\text{-n,}$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor nem egyenletesen konvergens I -n.

(Weierstrass kritérium megfordítása.)

- b) Ha egy $[a, b]$ -ben folytonos függvényekből álló függvénysor a -ban divergens, akkor nem lehet egyenletesen konvergens (a, b) -ben.
- c) Ha van olyan $(x_n) \subset I$ pontsorozat, amelyre

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n) \text{ divergens sor, akkor a } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ függvénysor}$$

nem lehet egyenletesen konvergens I -n.

- d) Egy folytonos függvényekből álló függvénysor nem lehet egyenletesen konvergens (a, b) -ben, ha $[a, b]$ -ben nem egyenletesen konvergens.