BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Ádám Katalin

MATEMATIKA PÉLDATÁR
IV. kötet
Sorok, függvénysorok

Műegyetemi Kiadó, 2000.

(Ötödik utánnyomás)

Azonosító: **051201**

A **Budapesti Műszaki Egyetem Természettudományi Kar**
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Veress János
Terjedelem: 19,8 (A/5) ív
Nyomtatta és kötötte: **Műegyetemi Nyomda**
Felelős vezető: Frigy Ottó
Munkaszám: 002/2000

A konvergencia definíciójával és közvetlen következményeivel kapcsolatos feladatok

1\. 1. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorra $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ teljesül.

Következik-e a sor konvergenciája az alábbi feltételek valamelyikéből?

a) $a_n \searrow 0$.

b) $a_n > 0$ és (S_n) korlátos.

c) (S_n)-monoton csökkenő.

d) $a_n > 0$ és (S_n)-nek van konvergens részsorozata.

e) $(|S_n|)$ konvergens sorozat.

2\. Konvergensek-e az alábbi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorok, ha

a) $$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } n = k^2 \ (k=1,2,\dots) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

b) $$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } n = 5k \ (k=1,2,\dots) \\ \frac{1}{n^2} & \text{egyébként} \end{cases}$$

c) $$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{ha } n = k^2 \ (k=1,2,\dots) \\ \frac{1}{n^2} & \text{egyébként} \end{cases}$$

1\. 2. d) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\log_2 n} & \text{ha } n = 2^k \quad (k=1,2,\dots) \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{egyébként} \end{cases}$

e) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln n} & \text{ha } n = k^2 \quad (k=1,2,\dots) \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{egyébként} \end{cases}$

2\. $\boxed{1.}$ Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$ sor konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele az (a_k) sorozat konvergenciája! Mennyi a sor összege?

2\. Hozzuk a következő sorokat

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$$ alakra, és határozzuk meg a sorösszegeket,

ha létezik!

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k-1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k+1})$

2. 2. d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k^2-1)}$

e) $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$

3. Állapitsuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, számitsuk ki az összegüket!

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$

c) $\sum_{k=3}^{\infty} \ln\left(1 - \left(\frac{2}{k}\right)^2\right)$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

3. e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{-k}$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{\frac{k}{2}}}$

$\boxed{\text{h)}}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k}$

4. 1. Tegyük fel, hogy

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergens sorok, valamint

$$a_k \leq c_k \leq b_k \quad (k > N \text{ esetén})$$

$\boxed{\text{a)}}$ Bizonyítsuk be, hogy a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ sor is konvergens!

4. 1. b) Mit mondhatunk a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ sorról, ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ és a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok divergensek?

2. Az alábbi feltételek közül melyikből következik a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergenciája?

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}) = 0$ minden p-re.

b) Minden ε-hoz és $p > 0$-hoz van olyan N, hogy ha $n > N$, akkor

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

c) Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy ha $n > N$, akkor tetszőleges p-re

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Váltakozó előjelű sorok

5. Állapitsuk meg, hogy az alábbi váltakozó előjelü sorok közül melyik konvergens és speciálisan Leibniz tipusu, és melyik divergens!

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, ahol $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}$

5. 3. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots +$

$+ \ldots \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Műveletek sorokkal

6\. 1. Következik-e a $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sor konvergenciája vagy divergenciája az alábbi feltételekből?

a) $\sum a_n$ konvergens és $\sum b_n$ divergens

b) $\sum a_n$ és $\sum b_n$ divergens

c) $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_k + b_k + \ldots$ konvergens

2\. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

6. 2. d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right)$

3. Az a, b, c paraméterek mely értékeire konvergens a

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{c^n}$ sor és mennyi az összege?

4. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor ha $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } n=k^2 \\ & (k=1,2,\ldots) \\ \frac{1}{n^2} & \text{különben} \end{cases}$

5. Lehet-e a $\sum a_n$ sor konvergens, ha a

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor divergens

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n|$ sor divergens?

6. a) Felhasználva a Riemann tétel bizonyításának módszerét, adjuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2$ feltételesen konvergens sor 1,5-höz konvergáló átrendezésének első tiz elemét!

b) Adjuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2$ feltételesen konvergens sor divergenssé átrendezésének első tiz elemét.

c) Következik-e a $\sum a_n$ sor konvergenciája abból, hogy $a_n \to 0$ és van a részletösszegsorozatának konvergens részsorozata?

6. 7. a) A $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ sor konvergens és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

α) Bizonyitsuk be, hogy a zárójelek elhagyásával keletkező sor is konvergens!

β) Igaz-e az állitás, ha az $a_n \to 0$ feltételt elhagyjuk?

b) Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra teljesül, az $a_n \to 0$ feltétel, és a sort k-asával zárójelezzük ugy, hogy a keletkező sor konvergens akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens és ugyanaz az összege.

c) Határozzuk meg a következő összegeket!

a) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$

!b) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$

8. a) Bizonyitsuk be, hogy ha $a_n \searrow 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{(2^n)}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorok azonos jellegüek, azaz

α) ha $\sum 2^n a_{(2^n)}$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ konvergens;

β) ha $\sum 2^n a_{(2^n)}$ divergens $\Rightarrow \sum a_n$ divergens.

b) Határozzuk meg, hogy az α paraméter mely értékeire konvergens, illetve divergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \cdot \log_2 n$$

sort!

7. (1.) Készitsük el a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ sor önmagával vett szorzatát (négyzetes szorzatát) és Cauchy-szorzatát, és adjuk meg mindkettő összegét!

(2.) Számitsuk ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$ sorok Cauchy szorzatát!

(3.) Igazoljuk, hogy az

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{és az} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

sorok divergensek, Cauchy szorzatuk mégis konvergens!

(4.) Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergens sor önmagával való Cauchy szorzata divergens!

Abszolut-konvergencia vizsgálata

8. (1.) Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ és a $\sum b_n$ $(b_n > 0)$ sorra

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens.

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ és $\sum b_n$ divergens, akkor a $\sum a_n$ sor is divergens.

8. 2. Igaz-e, hogy minden $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ konvergens sorhoz van konvergens majoráns sor?

3. Keressünk megfelelő majoráns vagy minoráns sort a következő sorokhoz és állapitsuk meg, hogy konvergens-e!

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$$

b) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}.\mathrm{th}\ n}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sin n}}{e^n}$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$$

f) $$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}, \quad (0 < a < 1)$$

9. 1. A $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ sorra ekvivalens-e az alábbi két feltétel:

a) van olyan $q < 1$, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ (ha $n > N$)

9\. 1. b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$; (ha $n > N$)

2\. $\sum a_n$ ($a_n > 0$) konvergens. Teljesülhet-e végtelen sok n-re, hogy

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

b) $\sqrt[n]{a_n} > 1$

3\. Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ ($a_n > 0$) sorra

a) $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens

b) $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens

c) $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens

d) $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor ebből nem következik a $\sum a_n$ sor divergenciája.

4\. Bizonyitsuk be, hogy ha egy sor konvergenciája hányados-kritériummal eldönthető, akkor gyök-kritériummal is az. Igaz-e ez forditva?

10\. A hányados-kritérium alkalmazásával döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

1\. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

10. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n . n!}{n^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

11. A gyökkritérium alkalmazásával döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok:

$\boxed{1.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}$

11. (5.) $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{arctg}\,n)^n$

(6.) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{n\pi}{3})^n$

(7.) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+(-1)^n}{n})^n$

12. Az integrálkritérium alkalmazásával döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$

(2.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.\ln n}$

(3.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha \in R)$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\, n}{1+\mathrm{ch}^2 n}$

13. 1. Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorra

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0$ és $a_n > 0$, $b_n > 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok egyszerre konvergensek, illetve divergensek!

(jelben: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$)

2. Konvergensek-e az alábbi sorok.

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$$

b) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n - 1}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + 3\sqrt{n} + 1}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n^2 + 1}$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n^\alpha}$$ α tetszőleges

13\. 2. f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2 - 1}\right)^{n^2}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$

Az alapvető kritériumokra vonatkozó vegyes feladatok

14\. 1. Igaz-e, hogy ha $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, akkor a

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a|$ sor konvergens?

2\. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)$ $(1 < a)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[n]{a})$ $(0 < a < 1)$

14. (2.) d) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \sin \frac{1}{n})$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (e - (1 + \frac{1}{n^2})^{n^2})$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (e - (1 + \frac{1}{n})^n)$

15. (1.) (a) Bizonyitsuk be, hogy ha $\sum a_n$ abszolut konvergens, akkor $\sum a_n^2$ is konvergens.

b) Igaz-e az a)-beli állitás megforditása?

c) Igaz-e az a)-beli állitás, ha $\sum a_n$ feltételesen konvergens?

(2.) Bizonyitsuk be, hogy ha

(a) $\sum a_n^2$ és $\sum b_n^2$ konvergens, akkor $\sum a_n b_n$ abszolut konvergens.

(b) $\sum a_n^2$ konvergens, akkor $\sum \frac{|a_n|}{n}$ is konvergens.

(c) $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ konvergens, akkor $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ is konvergens.

(d) $\sum a_n^2$ és $\sum b_n^2$ konvergens, akkor $\sum (a_n + b_n)^2$ is konvergens.

16\. 1. Legyen $\sum a_n$ konvergens.

a) létezik-e mindig a $\lim\limits_{n\to\infty} n\, a_n$ határérték?

$\boxed{\text{b)}}$ ha létezik, mennyi lehet?

$\boxed{2.}$ a) Bizonyitsuk be, hogy ha $\sum a_n$ konvergens és $a_n \searrow 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0.$$

b) Elhagyható-e az $a_n \searrow 0$ feltétel, (ha $a_n > 0$)?

3\. a) Lehet-e a $\sum a_n$ sor konvergens, ha végtelen sok n-re

$$a_n > \frac{1}{n} \quad ?$$

b) Lehet-e a $\sum a_n$ sor divergens, ha végtelen sok n-re

$$a_n < \frac{1}{n^2} \quad ?$$

4\. Igaz-e, hogy ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens és $a_n \searrow 0$, akkor

$$a_n < \frac{1}{n} \quad (\text{ha } n > N)?$$

Elhagyható-e az $a_n \searrow 0$ feltétel?

Abszolut konvergencia eldöntésére vonatkozó további kritériumok

17\. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ (ha $n > N$), akkor ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is az, ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is az. ($a_n > 0$)

!b) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n\, n!}{n^n}$ sor?

!! $\boxed{17.\ 2.}$ a) Igazoljuk a következő állitást (Raabe-féle kritérium):

ha $a_n > 0$ és $\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \beta$, akkor

$\beta > 1$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens;

$\beta < 1$ esetén pedig divergens.

b) Milyen a-ra konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$ $(a > 0)$ sor!

!18\. $\boxed{1.}$ Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ sorra teljesül, hogy

$b_n \searrow 0$ és $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq K$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, b_k$ sor konvergens!

!18. 2. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \quad \text{sor?}$$

19. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, akkor a

$$\sum | \ln a_n - \ln a | \quad \text{és a} \quad \sum | a_n - a |$$

$(a_n > 0)$ sorok egyszerre konvergensek illetve divergensek!

b) Az $\ln x$ függvényen kivül milyen függvényre igaz még az a)-beli állitás?

2. a) Bizonyitsuk be, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ és a $\sum \ln (1 + a_n)$ sorok egyszerre konvergensek illetve divergensek!

b) Az $\ln (1 + x)$ függvényen kivül milyen függvényre igaz még az állitás?

3. Bizonyitsuk be, hogy a $b_n = \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + a_k)$ $(a_k > 0)$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, amikor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens!

!19. 4. Konvergensek-e az alábbi sorok?

1. a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

!19. 4. (2.) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt{\cos \frac{1}{n}}\right)$

Maradéktag becslések.

20. $\boxed{1.}$ Mutassuk meg, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorra vagy

a) $a_n > 0$, $a_n \leq b_n$ és ismerjük a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ összeget;

vagy

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Leibniz sor; vagy

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$-re alkalmazható az integrál kritérium, - akkor

meg tudjuk becsülni az $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ összegnek a sorösszegtől való eltérését.

2. Adjuk meg, hogy a következő sorokból hány tagot kell venni, hogy a sorösszegtől való eltérés legfeljebb 10^{-4} legyen!

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+1)!}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$

20. 2. c) $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$

(3) a) Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1 \qquad (\text{ha} \quad n > N),$$

akkor $|R_n| < |a_n| \dfrac{q}{1-q}$

b) Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < c_n \qquad \text{és} \qquad c_n \leq q < 1$$

$$(\text{ha} \quad n > N),$$

akkor $|R_n| < |a_n| \dfrac{c_n}{1-c_n}$

c) Becsüljük meg azt a hibát, melyet elkövetünk, ha a

α) $\sum_{n=o}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}$

β) $\sum_{n=o}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} n}{2^n}$

sorok összege helyett az első n tagjának összegét vesszük!

(4.) Bizonyitsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ sorra $\dfrac{1}{n+1} < R_n < \dfrac{1}{n}$.

Paraméteres sorok

!21. 1. Vizsgáljuk meg, hogy a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\alpha} n^{\beta}} \qquad (\alpha, \beta \in R)$$

sor az α és β paraméterek mely értékére konvergens és divergens!

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

b) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

c) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}$$

d) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^4}$$

e) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

f) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

21. 2. g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^2}$

h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^5 \sqrt{n}}$

i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^3}$

j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

22. A paraméterek mely értékeire konvergensek az alábbi sorok? ($\alpha, \beta \in R$)

$\boxed{1.}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n^{\alpha}}}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^{\alpha}}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n^{\beta}}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\alpha} n}$

22. 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})^{\alpha}}{n^{\beta}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\alpha}(1+\frac{1}{n})}{n^{\beta}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{\alpha}(1+\frac{1}{n})\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})^{\beta}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{\alpha}\frac{1}{n}\,\ln^{\beta}(1+\frac{1}{n})$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos\frac{1}{n})^{\alpha}}{n^{\beta}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\alpha}(1+\frac{1}{n^2})}{(\sqrt[n]{n!})^{\beta}}$ $(\alpha > 0)$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\frac{1}{\sqrt{n}})^{n^{\alpha}}$

Vegyes feladatok

23. Döntsük el, hogy konvergensek-e illetve abszolut konvergensek-e az alábbi sorok!

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{1}{n}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\pi + \frac{1}{n}\right)$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \cos \sqrt{\frac{1}{n}}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} - 1\right)$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$$

23. 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e)^{-n}}{\sqrt{n}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$, $(a > 1)$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln (n+1)}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sin n}}{e^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$

23. 18. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$$

19. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$$

20. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$$

21. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln (n^n)}$$

22. $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-1}{\ln n}\right)^n$$

23. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

24. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}}$$

25. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n}$$

26. $$\sum_{n=1}^{\infty} \log_{b^n} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right) \quad (a > 0, \quad a, b \in R)$$

23. 27. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$$

28. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln (n!)}$$

29. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}} \qquad (a > o,\ a \in R)$$

30. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n} \cdot (\ln n)^a} \qquad (a > o,\ a \in R)$$

31. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$$

32. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

33. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

34. $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$$

35. $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\ln n}$$

23. 36. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln a}$ $\quad (a \in R)$

38. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$ $\quad (\alpha \in R)$

39. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^{n}}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{1}{n})^{n}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$

23. 45. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{2^n}$$

46. $$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{2^n}$$

47. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n^2} \right)^n$$

Függvénysorok

Vezessük be a következő jelöléseket, rövidítéseket, elnevezéseket!
I : = zárt, nyilt korlátos vagy nem korlátos intervallum

$(f_n(x))$: $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , $f_n(x)$, ... függvénysorozat

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$ függvénysor

$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ limeszfüggvény röviden $f_n(x) \longrightarrow f(x)$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$ összegfüggvény

$r_n(x) = f(x) - f_n(x)$ maradékfüggvény

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$ maradékfüggvény

KT: = konvergencia tartomány, vagyis az a tartomány, melyben a függvénysorozat ill. függvénysor pontonként konvergens.

AT: = abszolut konvergenciatartomány, vagyis az a tartomány, melyben a sorozat ill. a sor abszolut konvergens.

{ET}: = egyenletes konvergenciatartomány halmaz, vagyis azon tartományok összessége, melyben a sorozat illetve a sor egyenletesen konvergens.

ET : = ha létezik, az a legbővebb intervallum melyben a sor ill. sorozat egyenletesen konvergens.

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ röviden jelöli, hogy $(f_n(x))$ függvénysorozat egyenletesen tart $f(x)$ függvényhez.

Pontonkénti konvergencia

24. Határozzuk meg a következő függvénysorok KT konvergenciatartományát!

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx}$$

3. $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

24. 6. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n+x}$

8. A következő feladatoknál használjuk fel a 21. és 22.-es feladatok eredményét.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^x}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^x}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \ln n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x}{n})^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x}{n})^{n^2}$

Konvergenciatartomány meghatározása

25. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1 \quad \text{minden } x \in (a,b)\text{-re és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} > 1 \quad \text{minden } x \notin [a,b] \text{-re}$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor konvergenciatartománya a és b végpontu intervallum.

b) Mit mondhatunk $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(a)|}$ ill. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(b)|}$ értékéről?

2. a) Igaz-e az 1. a)-beli állitás $\overline{\lim}$-ra is, ha a limesz nem létezik?

b) igaz-e az 1. a)-beli állitás, ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}$

helyett $\overline{\lim} \dfrac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}$ szerepel?

26. Határozzuk meg a

$$\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \frac{x^4}{2^4} + \frac{x^5}{3^5} + \ldots + \frac{x^{2k}}{2^{2k}} + \frac{x^{2k+1}}{3^{2k+1}} + \ldots$$

sor konvergenciatartományát!

Függvénysorozat egyenletes konvergenciája

27. Irjuk fel a következő függvénysorok részletösszeg-függvény sorozatát, annak limeszfüggvényét és KT konvergenciatartományát, valamint az $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ maradék függvényét.

1. $$\sum_{n=o}^{\infty} x^n (1-x)$$

2. $$\sum_{n=o}^{\infty} (\cos x)^n$$

28. Határozzuk meg a következő függvénysorozatok KT konvergenciatartományát, és f(x) limeszfüggvényét!

1. $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$

2. $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$

3. $f_n(x) = \sin n x$

4. $f_n(x) = \frac{x^n}{2^n}$

5. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}, \quad (x \geq 0)$

6. $f_n(x) = \frac{n^2 x + n \ln x + x^5}{n^2 + n x^3 + \sin x}$

Függvénysorozatok egyenletes-konvergencia kritériumai

29. 1. (a) Bizonyitsuk be, hogy ha van olyan (c_n) numerikus sorozat, hogy $|r_n(x)| \leq c_n$ az I-ben (ha $n > N$) és

$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, akkor $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-ben!

b) Állapitsuk meg; igaz-e, hogy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ KT-n, ha

α) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$

β) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x^n}{n}$

(γ) $f_n(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{x}{n}$

2. a) Bizonyitsuk be, hogy ha $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-ben, akkor minden I-beli (x_n) pontsorozatra

$$\lim_{n\to\infty} |r_n(x_n)| = 0 .$$

b) Bizonyitsuk be, hogy ha van olyan $(x_n) \subset I$ pontsorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} |r_n(x_n)| \neq 0$ akkor $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ I-ben.

(c) Állapitsuk meg, hogy $f_n(x)$ egyenletesen konvergál-e a limesz függvényhez a konvergenciatartományán.

α) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$

β) $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$

γ) $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}$

29. 3. a) Bizonyitsuk be, hogy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ I-ben akkor, és csak akkor, ha $\sup_{x \in I} |r_n(x)| = a_n$ numerikus sorozatra $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

b) Állapitsuk meg, igaz-e, hogy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ KT-n, ha

α) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ $(x \geq 0)$

β) $f_n(x) = \dfrac{\ln nx}{nx}$

γ) $f_n(x) = x\, e^{-nx}$

4. $\boxed{a)}$ Bizonyitsuk be, hogy ha $f_n(x)$ folytonos (minden n-re) az $[a,b]$-ben és itt f(x)-hez tart, valamint $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ az (a,b)-ben, akkor f(x) folytonos $[a, b]$-ben!

b) Állapitsuk meg, igaz-e, hogy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ KT-n és a megadott I-intervallumon!

α) $f_n(x) = e^{-nx}$, $I = (0, \infty)$

β) $f_n(x) = \mathrm{arctg}\, nx$, $I = (0, \infty)$

γ) $f_n(x) = nx^n$, $I = (-1, 1)$

5. Döntsük el, hogy a következő állitások közül melyek igazak!

a) Ha nincs olyan $c_n \to 0$ numerikus sorozat, melyre $|r_n(x)| \leq c_n$ (ha $n > N$), akkor $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$.

Vagyis minden egyenletesen konvergens fv. sorozathoz van numerikus majoráns sorozat.

$\boxed{b)}$ Ha minden $(x_n) \subset I$ pontsorozatra $|r_n(x_n)| \to 0$, akkor $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ az I-ben.

29. 5. c) Ha $f_n(x)$ folytonos minden n-re $[a,b]$-ben, de $f(x)$ nem folytonos az a-ban, akkor $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ (a,b)-ben

d) Ha van olyan $(x_n) \subset I$ pontsorozat, melyre $r_n(x_n)$ divergens, akkor $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ I-ben.

6. Bizonyitsuk be, hogy ha $(f_n(x))$ függvénysorozat konvergenciatartománya

a) (a,b)

b) $[a,b]$

és $\dfrac{d\,|\,r_n(x)\,|}{dx}$ jeltartó, akkor

a) $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$

b) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

30 Állapitsuk meg, hogy az $(f_n(x))$ függvénysorozat egyenletesen konvergens-e a KT konvergenciatartományán, valamint a megadott I intervallumokon, és határozzuk meg $\{ET\}$ egyenletes konvergenciatartomány halmazt vagy ha van, azt az ET legbővebb intervallumot, melyben a sorozat egyenletesen konvergens!

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$; $I = [a,b]$, $a,b \in R$

2 $f_n(x) = \dfrac{x+n}{n}$ $I = [a,b]$, $a,b \in R$

3. $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$; $I = [a,\infty)$, $a \in R$, $a > 0$

4 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$; $I = (-\infty, a]$

5. $f_n(x) = x^n$ $I_1 = (-1,1)$, $I_2 = [a,b]$ $(-1 < a < b < 1 \quad a,b \in R)$

20. 6. $f_n(x) = (x + \frac{1}{n})^n$; $I_1 = (-1, 1)$,

$I_2 = [a, b]$ $(-1 < a < b < 1, \quad a, b \in R)$

7. $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$; $I = [a, b]$, $a, b \in R$

8. $f_n(x) = (1 + \frac{1}{xn})^n$; $I_1 = (0, \infty)$,

$I_2 = [a, \infty)$, $(a > 0, \quad a \in R)$

9. $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$ $I_1 = [-\infty, -1)$,

$I_2 = (-1, 1)$, $I_3 = (1, \infty)$

10. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$; $I = (-1, 1)$

11. $f_n(x) = \frac{n^x}{x^n}$; $I_1 = (1, \infty)$; $I_2 = [a, \infty)$, $(a > 1)$;

$I_3 = (-\infty, -1]$

12. $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$; $I = [a, b]$ $(a, b \in R$ tetszőleges)

13. $f_n(x) = nx^n(1-x)$ $I_1 = (-1, 1)$ $I_2 = (-1, a]$ $(a < 1)$;

14. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ $I = (-\infty, +\infty)$

15. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + n}$ $I = (e, \pi)$

16. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ $I = [a, \infty)$ $(a > 0)$

30. 16. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ $I = [a, \infty)$ $(a > 0)$

17. $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$ $I = [a,b]$

18. $f_n(x) = \frac{n}{x}\sin\frac{x}{n}$ $I = (0,a]$ $(a \in R)$

19. $f_n(x) = n\sin\frac{x}{n}$ $I = [a,b]$ $(a,b \in R)$

20. $f_n(x) = \frac{x}{n}\sin\frac{x}{n}$ $I = [a,b]$ $(a,b \in R)$

21. $f_n(x) = x^n e^{-nx}$ $I = (0, \infty)$

22. $f_n(x) = nx\, e^{-nx}$ $I = [a, \infty)$ $(a > 0)$

23. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ $I = (-\infty, 1)$

24. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ $I = [-a, a]$ $(a \in R)$

25. $f_n(x) = \dfrac{\ln n^x}{n^x}$ $I = (0, \infty)$

26. $f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$ $I = (0, a]$ $(a \in R)$

27. $f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$ $(x > 0)$; $I_1 = (0,1]$,

$I_2 = [1, \infty)$; $I_3 = [1,d]$ $(d \in R)$

28. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}$ $(x \geq 0)$; $I_1 = [0,1]$; $I_2 = [1, \infty)$

Operációk felcserélhetősége függvénysorozat esetén

31. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre, válaszunkat indokoljuk és töltsük ki a mellékelt szelvényt (igen = 1, nem = 0).

1. Lehetnek-e egy $f(x) = 0$-hoz

   a) konvergens

   b) egyenletesen konvergens

   függvénysorozat elemei nem korlátos függvények?

2. Lehetséges-e, hogy $\lim_{n\to\infty} \sup f_n(x) \neq \sup f(x)$

   a) ha $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, $(-\infty, \infty)$-ben

   !b) ha $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ minden korlátos I-ben

3. Tarthatnak-e nem folytonos függvények egyenletesen folytonos függvényhez?

4. Tarthatnak-e differenciálható függvények egyenletesen nem differenciálható függvényhez? Vizsgáljuk meg ebből a szempontból

   az $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ függvénysorozatot!

5. Tegyük fel, hogy $f_n(x)$-nek van primitív függvénye minden n-re és $F(x)$-hez konvergálnak I-n, valamint $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Következik-e ebből, hogy $f(x)$-nek is van primitív függvénye I-n?

6. Lehet-e egy függvénysorozat egyenletesen konvergens (a, b)-ben, ha az $[a, b]$-ben nem konvergens?

7. a) Lehet-e egy folytonos függvényekből álló függvénysorozat konvergens $[a, b]$-n, egyenletesen konvergens (a, b)-n, de nem egyenletesen konvergens $[a, b]$-n.

   b) Lehet-e egy $[a, b]$-ben konvergens függvénysorozat egyenletesen konvergens (a, b)-ben, de nem egyenletesen konvergens $[a, b]$-ben.

31\. 8. Lehet-e, hogy $(f_n(x))$ konvergens $(-\infty, \infty)$-en, egyenletesen konvergens tetszőleges $[a,b]$-n, de nem egyenletesen konvergens $(-\infty, \infty)$-en?

9\. Igaz-e, hogy egyenletesen konvergens függvénysorozatok

a) összege,
b) szorzata

egyenletesen konvergens?

32\. 1. a) Lássuk be, hogy ha az $(f_n(x))$ függvénysorozat $f(x)$ limeszfüggvénye nem differenciálható x_o-ban, akkor az $(f_n'(x))$ derivált függvénysorozat nem lehet egyenletesen konvergens az x_o-at tartalmazó I intervallumban.

b) Egyenletesen konvergens-e az $(f_n'(x))$ függvénysorozat az I-ben, ha

α) $f_n(x) = \sqrt[n]{(1 + x^n)}$; $I = [0,2]$

β) $f_n(x) = \dfrac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}$; $I = [-1,1]$

γ) $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$; $I = (-1,1)$

2\. Mutassuk meg, hogy az alábbi $(f_n(x))$ függvénysorozatok egyenletes konvergencia-tartományában az $f(x)$ limeszfüggvényre

$$(f(x))' = \lim_{n \to \infty} f_n'(x) .$$

nem teljesül mindenhol.

a) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$

b) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x^n}{n}$

32. 2. c) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$

3. Mutassuk meg, hogy az $(f_n(x)) = \left(\dfrac{x}{1 + e^{-nx}}\right)$ függvénysorozat $f(x)$ limeszfüggvényére és az $(f_n'(x))$ függvénysorozat $g(x)$ limeszfüggvényére nem igaz, hogy $f'(x) = g(x)$ a $[-1, 1]$-ben!

33. 1. Adjuk meg a és b értékét ugy, hogy a

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx) = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dx$$

teljesüljön és hogy ne teljesüljön.

a) ha $f_n(x) = n\, x\, e^{-nx}$

b) ha $f_n(x) = n^2 x\, e^{-nx}$

c) ha $f_n(x) = n^3 x\, e^{-nx}$

d) ha $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^4}$

2. Az $f_n(x) = n^{\alpha} x\, e^{-nx}$ függvénysorozat a $[0, 1]$ intervallumban milyen α-ra lesz:

a) konvergens

b) egyenletesen konvergens

c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$?

34. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{x^2+n^2}\,dx = ?$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{1} \frac{x^n}{1+x}\,dx = ?$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{1} \frac{x^n}{e^{nx}}\,dx = ?$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin \frac{x}{n}}\,dx = ?$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} x^2 e^{-nx}\,dx = ?$

35. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy tetszőleges folytonosan differenciálható $g(x)$ függvényre, az

$$f_n(x) = n\left(g(x+\frac{1}{n}) - g(x)\right) = \frac{g(x+\frac{1}{n}) - g(x)}{\frac{1}{n} - 0}$$

függvénysorozat egyenletesen tart $g'(x)$ függvényhez minden $[a,b]$-n!

b) Bizonyitsuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{x} n\left[\ln(x+\frac{1}{n}) - \ln x\right]dx = \ln x$$

!35. !2. Bizonyitsuk be, hogy

$$f_n(x) = \int_x^{x+\sum_{k=1}^{n} a_k} g(t)\,dt$$

függvénysorozat egyenletesen konvergens mindenhol, ha

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens numerikus sor és g(x) folytonos függvény!

Függvénysorok egyenletes konvergenciája

36. Határozzuk meg a következő sorok KT konvergenciatartományát!

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n^2}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{xn^2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n^3}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}\right)$$

37. 1. Igaz-e, hogy ha

a) $\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \leq q < 1$ ha $n > N$ $x \in I$-re,

37. 1. illetve

b) $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq q < 1$ ha $n > N$ $x \in I$-re,

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor abszolut és egyenletesen konvergens az I-n?

2. Igaz-e, hogy ha

a) $\lim_{n \to \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} < 1$ $x \in I$-re,

illetve

b) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1$ $x \in I$-re

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor abszolut és egyenletesen konvergens I-ben?

3. Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ $(c_n > 0)$ sor konvergens, és

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \qquad x \in I\text{ -re,}$$

ha $n > N$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor abszolut és egyenletesen konvergens az I-n!

Függvénysor egyenletes-konvergencia kritériumai

(38) 1. a) Bizonyitsuk be, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ egyenletesen konvergens az I-ben, ha $\sup_{x \in I} |f_n(x)| = a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor konvergens.

b) Állapitsuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományon!

α) $\sum_{1}^{\infty} x^n e^{-nx}$

β) $\sum_{1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$

γ) $\sum_{1}^{\infty} \sin \frac{x}{x^2 + n^3}$

2. a) Bizonyitsuk be, hogy ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$$

egyenletesen konvergens I-n, akkor $f_n(x) \rightrightarrows 0$ I-n.

b) Állapitsuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományukon!

α) $\sum_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx}$

38. 2. b) β) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{n}$

3. a) Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens az $(a,b]$-ben és $f_n(x)$ folytonos $[a,b]$-ben minden n-re, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f(a)$ konvergens sor!

b) Állapitsuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergencia tartományban!

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x}}$

β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$

γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{n} n!$

4. a) Bizonyitsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor az I-intervallumban Leibnitz sor, $|f_n(x)| \leq c_n$ (ha $n > N$) és $c_n \to 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor egyenletesen konvergens I-ben!

38. 4. b) Határozzuk meg a következő sorok $\{ET\}$ egyenletes konvergenciatartomány halmazát!

$$\alpha)\quad \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

$$\beta)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \pi \left(\frac{1}{n} + n\right) + \sin \pi \left(\frac{1}{n} - n\right)\right)$$

5. Döntsük el, hogy a következő állitások közül melyek igazak! (Töltsük ki a mellékelt szelvényt. Igaz = 1, Hamis = 0)

a) Ha nincs olyan $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens numerikus sor, hogy

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \text{az I-n,}$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor nem egyenletesen konvergens I-n. (Weierstrass kritérium megforditása.)

b) Ha egy $[a, b]$-ben folytonos függvényekből álló függvénysor a -ban divergens, akkor nem lehet egyenletesen konvergens (a, b)-ben.

c) Ha van olyan $(x_n) \subset I$ pontsorozat, amelyre

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n)$ divergens sor, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor nem lehet egyenletesen konvergens I -n.

d) Egy folytonos függvényekből álló függvénysor nem lehet egyenletesen konvergens (a, b)-ben, ha $[a, b]$-ben nem egyenletesen konvergens.