

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Császár Ákosné

VALÓS EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA



Műegyetemi Kiadó, 2002.

(Kilencedik utánnymás)

Azonosító: **051315**

**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának**
megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

Felelős vezető: Hajdu István

Terjedelem: 21 (A/5) ív

Nyomta és kötötte:

Műegyetemi Nyomda

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 234/02

ELŐSZÓ

A Villamosmérnökkari Matematikai Tanszék által kiadásra kerülő új jegyzetsorozat célja röviden összefoglalni azt az anyagot, amit alapismeretként minden matematikából eredményesen leszigorlatozott villamosmérnökhallgatónak ismernie kell. A sorozat egyes kötetei egy-egy nagyobb témaegységet ölelnek fel, nagyrészt egymásra épülnek, a későbbiek hivatkoznak korábbi (új jegyzetsorozatbeli) jegyzetekre. Az egységes szerkezet megkönnyíti a hivatkozást. Egy félév során három-négy jegyzet kerül egészében vagy részben feldolgozásra.

A jegyzetek egyrészt többet, másrészt kevesebbet tartalmaznak az előadások anyagánál és azokat nem pótolhatják. Arra hivatottak, hogy az oktatott matematikaanyag leglényegesebb fogalmait, definícióit, tételeit, állításait szabatosan megfogalmazva rögzítsék, rendszerezék az előadáson hallottakat. A szereplő definíciókat, tételeket értelemszerűen mindenkinek tudnia kell a vizsgán, szigorlaton, az alkalmazásoknál, az életben.

A tételek kimondása előtt az azokban szereplő új fogalmakat értelmezzük (definiáljuk). Egy tétel kimondásánál közöljük azokat a feltételeket, amelyek mellett, amelyeknek következményeként a tétel állítása igaz. Azokat a feltételeket, amelyekből következik az állítás, elégőséges feltételeknek nevezzük. Ugyanaz az állítás többféle feltétel mellett is teljesülhet, több elégőséges feltétel is vonhatja maga után ugyanazt az állítást. Egy feltétel szükséges, ha az az állítás teljesülése esetén mindig fennáll.

Az alapvető állításokat kimondó tételeket bizonyítjuk, az ezekre épülő, vagy ezekkel analóg tételek bizonyítását többször mellőzzük. Kimondunk a jegyzetekben axiómákat. Ezek olyan alapvető megállapítások, melyek megfontolásaink kiindulópontjai, megállapodásszerűen elfogadjuk őket. Hogy ezek elfogadásának mi az alapja, arra itt nem térünk ki. Az axiómákból kiindulva a többi állítást, a konkrét tapasztalat széles körű általánosításait, csupán logikai eszközökkel igazoljuk (levezetjük). Megjegyzésekkel utalunk a jegyzetekben olyan témákra, melyek a leszűkített matematikai alapoktatáshoz kapcsolódnak, nem képezik a szigorlat anyagát, azonban a jegyzetek utolsó fejezetében megadott szakirodalom módot nyújt az érdeklődőknek arra, hogy ezekkel a témákkal behatóbban foglalkozzanak. A felsorolt szakirodalmi munkákban a jegyzetből kihagyott bizonyítások is megtalálhatók.

Az előadáson történhet csupán utalás a jegyzetben megtalálható tétel bizonyítására, de szerepelhet olyan állítás részletes igazolása is, melyre a jegyzet csak szakirodalmi utalást tesz. Az első tanulásnál általában elhagyható bizonyításokat, megjegyzéseket nagyobb margójú gépeléssel, baloldalt szaggatott vonással jelöljük meg, az alapvető fontosságú tételeket, definíciókat baloldalt két függőleges vonással, a tételeket aláhúzással emeljük ki a leglényegesebb alapanyagból.

A tárgyalt anyag elmélyítésére néhány érdekesebb feladatot is kitűzünk. Ott, ahol szükségesnek látszik, ezek megoldásához a jegyzet utolsó előtti fejezetében útmutatást adunk.

A definíciókat, tételeket, megjegyzéseket, feladatokat pontonként, az ábrákat folyamatosan számozzuk.

A bizonyítások befejezését a * jellel jelöljük.

A mindennapi életben is sokszor célszerű, hogy az általunk vizsgált dolgokat valahogyan elnevezzük, megszámozzuk, vagy egyértelműen megfeleltessük őket más elemeknek, így könnyítve meg a rájuk való hivatkozást. Pl. a TOTO szelvényeken az egyes mérkőzéseket megszámozták (sorszámozták a mérkőzéseket, ill. a mérkőzésekhez természetes számokat rendeltek) és a szelvények kiértékelésénél már csak azt nézik, ki mit tippelt, ill. milyen jelet írt az egyes mérkőzéseknek megfelelő sorszámú rovatba. Ebben az esetben tehát minden mérkőzésnek egy szám, és minden számnak egy mérkőzés felel meg, a számok és mérkőzések kölcsönösen egyértelműen (másképp egy-egyértelműen) megfelelnek egymásnak, vagy még másképp kifejezve, a megfeleltetés egyértelműen megfordítható.

Ha azt nézzük, hogy milyen tippet írtunk be az egyes mérkőzésekhez (ill. sorszámokhoz), láthatjuk, minden mérkőzéshez egy tippet (az 1, 2, X jelek valamelyikét) írtuk, de megfordítva, egyfajta tipp (jel)több mérkőzésnél (ill. sorszámánál) is szerepelhet, ugyanazzal a jellel jelölt tipphez több mérkőzés (ill. sorszám) is tartozhat. A tippek (jelek)hozzárendelése a mérkőzésekhez (sorszámokhoz) egyértelmű, de nem kölcsönösen egyértelmű.

A matematika különböző fejezeteinek tárgyalásánál sokszor szerepelnek majd kölcsönösen egyértelmű (egy-egyértelmű, egyértelműen megfordítható) megfeleltetések.

Több tétellel kapcsolatban felmerülhet a kérdés, hogy a tétel megfordítható-e? (Ezen azt értjük, hogy a tétel feltételének és állított következményének szerepe felcserélhető-e?) Például egy, középiskolai tanulmányokból ismert állítást mond ki a következő tétel:

Minden derékszögű négyszögben, melyben az átlók egymásra merőlegesek (feltétel) a szembenfekvő oldalak egyenlők egymással (következmény).

E tétel nem fordítható meg. Az olyan derékszögű négyszögekben ugyanis, amelyekben két-két szembenfekvő oldal megegyezik egymással, az átlók nem feltétlenül merőlegesek, mert tetszőleges téglalapok lehetnek.

Azt a tényt, hogy a fenti tétel nem fordítható meg, úgy is kifejezhetjük, hogy a tételben kimondott feltétel elégletes, de nem szükséges ahhoz,

hogy egy derékszögű négyszög szembenfekvő oldalai egymással egyenlők legyenek.

Szükséges, de nem elégséges feltétel egy szám 6-tal való oszthatóságára (következmény) az, hogy a szám páros legyen (feltétel). Nyilvánvaló, hogy minden 6-tal osztható szám páros (a feltétel szükséges), de attól, hogy a szám páros, még nem kell 6-tal oszthatónak lennie (a feltétel nem elégséges, pl. 12 osztható, 10 nem osztható 6-tal).

A Pitagorasz-tétel teljesülése a pozitív a , b , c számokból álló számhármásra, vagyis az

$$a^2 + b^2 = c^2$$

feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy " a " és " b " egy derékszögű háromszög két befogójának, " c " pedig ugyanezen derékszögű háromszög átfogójának mérőszáma legyen.

Ha ugyanis " a " és " b " egy derékszögű háromszög befogóinak, " c " pedig ugyanezen derékszögű háromszög átfogójának mérőszáma, akkor valóban

$$a^2 + b^2 = c^2$$

(a feltétel szükséges), és fordítva, belátható, hogy ha $a^2 + b^2 = c^2$ (a , b , c pozitív számok), akkor " a " és " b " egy derékszögű háromszög befogóinak, " c " pedig ugyanezen derékszögű háromszög átfogójának mérőszáma (a feltétel elégséges).

Ha egy tételben szükséges és elégséges feltételből következik egy állítás, akkor a tétel megfordítható. Az ilyen tételek megfogalmazásánál általában a következő nyelvi fordulatokat használjuk:

"...(feltétel)..." szükséges és elégséges ahhoz, hogy "... (következmény)..." legyen.

Ha "... (feltétel)..." , akkor "... (következmény)..." és viszont. Vagy: Állítás: Ha "... (feltétel)..." fennáll, akkor "... (következmény)..." is fennáll; ez az állítás megfordítható.

Vagy:

"...(következmény)..." akkor és csak akkor áll fenn, ha "... (feltétel)..." bekövetkezik.

Vagy:

"...(következmény)..." pontosan akkor, ha "... (feltétel)..." . Példánl:

Tétel. Legyen $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

(+)
$$a^2 + b^2 = c^2$$

akkor és csak akkor áll, ha "a" és "b" egy derékszögű háromszög befogóinak, "c" pedig ugyanezen derékszögű háromszög átfogója hosszúságának mérőszáma.

Nyilván (+) feltétel nem csak egy adott a, b, c számhármásra, hanem minden (+)-ot kielégítő nem-negatív számokból álló számhármásra adja meg következményként az állítást.

Tételek bizonyítása során gyakran használjuk a teljes indukciós bizonyítási eljárást, és alkalmazunk indirekt bizonyítást.

A teljes indukciós bizonyítási eljárás a következő alapgondolaton nyugszik:

Egy minden természetes "k" számra kimondott állítás igaz, ha az állítás k = 1-re igaz, továbbá abból a feltevésből, hogy k = n-re igaz, következik az állítás k = n + 1-re való teljesülése (az állítás n-ről (n + 1)-re "öröklődik").

Például 1 kisebb, mint $2^1 = 2$, 2 kisebb, mint $2^2 = 4$, 3 kisebb, mint $2^3 = 8$; vajon minden természetes k számra is igaz-e az állítás, hogy k kisebb, mint 2^k ? Feltevésünk igaz volta teljes indukcióval igazolható: az állítás k = 1-re igaz, ha pedig feltesszük, hogy k = n-re is igaz (azaz feltesszük, hogy n kisebb, mint 2^n), akkor, mivel $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n$, ez nagyobb kell, hogy legyen n + 1-nél, hiszen 2^n 1-nél és az indukciós feltétel miatt n-nél is nagyobb.

Az indirekt bizonyítási eljárás lényege abban áll, hogy nem az állítás helyességét bizonyítjuk közvetlenül, hanem azt mutatjuk meg, hogy az állítás tagadása logikai ellentmondásra vezet.

Bizonyítsuk ezzel a módszerrel, hogy $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként ($\sqrt{2}$ irracionális szám).

Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

ahol p és q egész szám (q ≠ 0), és a tört úgy van felírva, hogy p-nek és q-nak nincs közös osztója. (Egyszerűsítéssel ez mindig elérhető.) Ekkor

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

azaz

$$2q^2 = p^2,$$

tehát p^2 páros szám, így p-nek is párosnak kell lennie, 4 osztója
tehát p^2 -nek:

$$p^2 = 4p_1^2, \quad (p_1 \text{ egész szám})$$

vagyis

$$2q^2 = 4p_1^2,$$

azaz

$$q^2 = 2p_1^2.$$

Ez az utóbbi összefüggés azt jelentené, hogy q^2 páros, azaz q is páros; előbb azonban már láttuk, hogy p -nek párosnak kell lennie, vagyis ha q is páros, akkor van p -nek és q -nak közös osztója (ti. 2) ellentétben azzal a feltevessel, hogy nincsen közös osztójuk. Ellentmondásra jutva, állításunkat igazoltuk. *

Bizonyos, általánosan elterjedt jelölések használata nagy segítség a jegyzetelésnél, a fogalmak, állítások szabatos, tömör, áttekinthető megfogalmazásánál. Anélkül, hogy teljességre törekednénk, álljon itt néhány ilyen jelölésnek példákkal egybekötött felsorolása.

Minden (tetszőleges) valós szám négyzete nem-negatív:

$$\forall x : x^2 \geq 0.$$

Van (létezik) olyan valós szám, amelynek négyzete nem-pozitív:

$$\exists x : x^2 \leq 0,$$

tudniillik $x = 0$.

Ha x pozitív, akkor x egy valós szám négyzete:

$$x > 0 \Rightarrow x = a^2,$$

tudniillik van olyan " a " szám ($a = \sqrt{x}$), melyre $x = a^2$:

$$\text{ti. } \exists a : x = a^2.$$

Utóbbi állításunk nem fordítható meg. Igaz azonban a következő állítás:

x akkor és csak akkor négyzete egy valós számnak, ha nem-negatív:

$$x = a^2 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Ha egy szám pozitív és egynél kisebb abszolút értékű, akkor 0 és 1 közé esik:

$$(x > 0) \wedge (|x| < 1) \Rightarrow 0 < x < 1.$$

Ha nem okoz félreértést, a zárójelek elhagyhatók.

Ha egy szám vagy pozitív, vagy egynél kisebb abszolút értékű (rövidebben pozitív vagy egynél kisebb abszolút értékű), akkor nagyobb - 1-nél:

$$(x > 0) \vee (|x| < 1) \Rightarrow -1 < x.$$

A zárójelek itt is elhagyhatók.

Megjegyezzük, hogy ebben az értelmezésben a "vagy" nem jelent "kizáró vagy"-ot. (A mindennapos szóhasználatból élve: akár az egyik, akár a másik, akár mindkét tulajdonság fennállhat.)

Pl. $x = -0,5$ -re $-1 < x$, $|x| < 1$, de $x > 0$ nem áll;

$x = 0,2$ -re $-1 < x$, is, $|x| < 1$ is, $x > 0$ is áll;

$x = 3$ -ra $-1 < x$ és $x > 0$ áll, de $|x| < 1$ nem áll.

Az itt bevezetett jelölésekkel azt a tényt, hogy egy tételben megadott feltétel a következmény teljesülésének szükséges feltétele így jelölhetjük röviden:

"...(következmény)..." $\Rightarrow$ "... (feltétel)..."

Azt a tényt, hogy egy tétel következménye a feltételből következik (a feltétel elégséges) így jelölhetjük:

"...(feltétel)..." $\Rightarrow$ "... (következmény)..."

Végül az, hogy a tétel szükséges és elégséges feltételt ad meg a következmény teljesülésére, ebben az alakban is leírható:

"...(feltétel)..." $\Leftrightarrow$ "... (következmény)..."

I. BEVEZETÉS

1. Halmazelméleti alapfogalmak

A matematika és az alkalmazott tudományok különböző fejezeteiben más-más módon meghatározott elemek, objektumok összességének, halmazának tulajdonságait vizsgálják. A matematika különböző fejezetei közül az analízisben ezek az elemek legtöbbször valós vagy komplex számok, vektorok, függvények, halmazok, a valószínűségszámításban események, a geometriában pontok, egyenesek, síkok, görbék, felületek, de pl. logikai áramkörök esetében vezetési állapotok, stb. Anélkül, hogy elmélyednénk a halmazelmélet részletes megalapozásában, legkülönbözőbb helyeken alkalmazható eredményeinek részletező tárgyalásában, rövid áttekintést kívánunk adni az alábbiakban a legalapvetőbb halmazelméleti fogalmakról, elnevezésekről és eredményekről, amelyekre most legelőször is az analízis tárgyalásánál támaszkodni fogunk.

1.1. A halmaz (rendszer, osztály) fogalma és az, hogy egy dolog eleme egy halmaznak un. alapfogalom, ezeket más, egyszerűbb fogalmakkal nem definiáljuk. Adott egy halmaz, ha tudjuk, melyek az elemei, vagyis ha minden dologról egyértelműen eldönthető, hogy eleme-e a halmaznak, vagy sem.

Példa halmazokra a valós számok halmaza, a természetes (pozitív, egész) számok halmaza, az egész számok négyzeteinek (röviden négyzetszámoknak) halmaza - ennek pl. 4 eleme, -4 nem eleme -, a parallelogrammák halmaza, melynek pl. a négyzet eleme, a trapéz nem eleme.

1.2. A halmazokat általában nagybetűvel, elemeiket általában kisbetűvel jelöljük. Vizsgálatainkban gyakran szerepelnek majd olyan halmazok, melyeknek elemei számok, ezeket számhalmazoknak, ill. olyan halmazok, melyeknek elemei pontok, ezeket ponthalmazoknak nevezzük. Általában

R-rel jelöljük a valós számok halmazát,
N-nel a természetes számok halmazát,
Q-val a racionális számok halmazát.

Egy bizonyos vizsgálódás során szóba jövő összes elem halmazát alaphalmaznak, vagy térnek nevezzük, és legtöbbször E-vel jelöljük.

Azt a halmazt, amelynek nincs eleme, üres halmaznak nevezzük és így jelöljük: $\emptyset$.

Üres halmaz például azoknak a valós számoknak a halmaza, amelyeknek négyzete negatív; ugyanakkor azoknak a komplex számoknak a halmaza, amelyeknek négyzete negatív, nem üres halmaz.

1.3. Azt a tényt, hogy x eleme az A halmaznak, ill. x nem eleme a B halmaznak így jelöljük:

$$x \in A, \quad x \notin B.$$

(Más szavakkal "x A-beli elem", "x A-hoz tartozik", "x nem B-beli elem", "x B-n kívül van".)

1.4. Egy halmaz megadásánál azt a tulajdonságot kell megadnunk (ha lehetséges, formulával leírunk), amellyel az illető halmaz elemei és csak ezek az elemek rendelkeznek.

Pl. Legyen A a T tulajdonsággal rendelkező q elemek halmaza:

$$A = \{q : q \text{ a } T \text{ tulajdonsággal rendelkezik}\},$$

B jelentse a 2-nél kisebb abszolút értékű valós számok halmazát:

$$B = \{x : (|x| < 2) \wedge (x \in \mathbb{R})\} = \{x : |x| < 2, x \in \mathbb{R}\}$$

(mindkét jelölésmód használatos).

C jelentse a páros számok halmazát:

$$C = \{y : y = \pm 2k, k = 0, 1, 2, \dots\},$$

D jelentse a pozitív páros számok halmazát:

$$D = \{z : z = 2k, k \in \mathbb{N}\},$$

P jelentse a páratlan számok halmazát:

$$P = \{p : p \text{ páratlan szám}\} = \{p : p = \pm(2k-1), k \in \mathbb{N}\} = \{\pm 1, \pm 3, \dots\}.$$

Néha fel tudjuk sorolni a halmaz elemeit, pl.

$$V = \{0, 1\} \text{ a } 0 \text{ és } 1 \text{ számból álló kételemű halmaz,}$$

$$U = \{0\} \text{ az egyetlen } 0 \text{ számból álló (tehát nem üres) halmaz.}$$

1.5. Definíció. Ha az A halmaz minden eleme B -nek is eleme, akkor azt mondjuk, hogy A részhalmaza B -nek (B tartalmazza A -t). Ennek jelölése:

$$A \subset B, \text{ illetve } B \supset A.$$

Pl. 1.4. -ben $D \subset C$, $U \subset V$, $U \subset C$, $V \subset B$.
Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza:

$$\forall B : \emptyset \subset B.$$

A tartalmazás transzitiv:

$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C.$$

Pl. 1.4. -ben $(U \subset V) \wedge (V \subset B) \Rightarrow U \subset B$.

1.6. Definíció. A valódi részhalmaza B -nek, ha

$$x \in A \Rightarrow x \in B, \text{ de } \exists y : (y \in B) \wedge (y \notin A).$$

Szokás az irodalomban megkülönböztetésül azt, hogy A valódi részhalmaza B -nek $A \subset B$ -vel, míg azt, hogy C nem szükségszerűen valódi részhalmaza B -nek, a $C \subseteq B$ jelöléssel kifejezésre juttatni. Mi ezzel a megkülönböztetéssel itt nem élünk.

1.7. Definíció. Ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $A = B$, a két halmaz egyenlő egymással. ($A = B$ esetében A elemei ugyanazok, mint B elemei.)

A számok körében ismertek műveletek (összeadás, kivonás, szorzás, osztás), amelyekkel két számhoz adott módon egy harmadik számot rendelünk. Halmazok körében is értelmezhetünk műveleteket, amelyekkel két (vagy több) halmazhoz adott módon egy harmadik (további) halmazt rendelünk. Ezek a műveletek olyan műveleti szabályoknak tesznek eleget, amelyek a számok körében értelmezett bizonyos műveletekre és azok műveleti szabályaira sokban emlékeztetnek.

A halmazok közt értelmezett műveletek felhasználásával sokszor egyszerűsíthető lesz tárgyalásunk.

1.8. Definíció. Az A és B halmazok egyesítése (uniója) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek A és B közül legalább az egyik halmazba beletartoznak. Jelölése $A \cup B$. Tehát

$$A \cup B = \{c : (c \in A) \vee (c \in B)\}.$$

$$\text{Pl. az 1.4. -ben felsorolt halmazoknál } C \cup P = \{u : u = \underline{k(k-1)}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Jelentsen I egy tetszőleges halmast (pl. $I = \mathbb{R}$, vagy $I = \mathbb{N}$, vagy $I = \mathbb{Q}$) és rendeljünk minden $i \in I$ -hez egy A_i halmast. Az előbbiekhöz hasonlóan értelmezhető ezeknek az A_i halmazoknak egyesítése

$$\bigcup_{i \in I} A_i,$$

azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek legalább egy A_i halmazhoz tartoznak:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

Speciálisan, ha $I = \{1, 2, \dots, n\}$, akkor

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

ill. ha $I = \mathbb{N}$, akkor

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

Pl. $A_i = \{i\}$ ($i \in \mathbb{N}$). Ekkor

$$\bigcup_{i=1}^3 A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3\}, \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \{1, 2, \dots, n\}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}.$$

Nyilvánvaló, hogy ha

$$A \subset B, \quad \text{akkor } A \cup B = B.$$

E tényből következik, hogy

$$\forall B : \emptyset \cup B = B.$$

1.9. Definíció. Az A és B halmazok metszete (közös része) azoknak az elemeknek halmaza, amelyek A -ba is, B -be is beletartoznak. Jelölése $A \cap B$. Tehát

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Pl. az 1.4.-ben felsorolt halmazoknál $C \cap V = U$.

Az 1.8.-ban értelmezett A_i halmazok ($i \in I$) közös része

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

azoknak az elemeknek halmaza, amelyek minden egyes A_i halmaznak elemei:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{y : \forall i \in I \quad (y \in A_i)\}.$$

Speciálisan

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^n A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, & \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i &= \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \\ &= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots \end{aligned}$$

Legyen pl. $A_i = \{x : |x| < \frac{1}{i}, i \in \mathbb{N}\}$. Ekkor

$$\bigcap_{i=1}^3 A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_3, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = A_n, \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}.$$

Nyilván, ha

$$A \subset B, \text{ akkor } A \cap B = A,$$

és ebből következik, hogy

$$\forall B : \emptyset \cap B = \emptyset.$$

1.10. Definíció. Ha az A és B halmaznak nincs közös eleme, vagyis

$$A \cap B = \emptyset,$$

akkor az A és B halmaz diszjunkt.

Pl. az 1.4.-ben felsorolt halmazok közül $B \cap D = \emptyset$, $C \cap P = \emptyset$, $D \cap P = \emptyset$, $D \cap U = \emptyset$, $D \cap V = \emptyset$, $P \cap U = \emptyset$.

1.11. Definíció. Az A és B halmazok különbsége azoknak az A -beli elemeknek halmaza, amelyek nem tartoznak B -hez. Jelölése $A - B$ (vagy $A \setminus B$). Tehát

$$A - B = \{z : (z \in A) \wedge (z \notin B)\}.$$

Pl. az 1.4.-ben felsorolt halmazoknál $C - D = \{0, -2, -4, \dots\} = \{v : v = -2(k-1), k \in \mathbb{N}\}$.

1.12. $A \supset B$ esetén az $A - B$ halmazt B -nek A -ra vonatkozó kiegészítő, vagy komplementer halmazának, komplementumának is szokás nevezni és B -sal is jelölni (ennél az utóbbi jelölésnél azonban mindig meg kell mondani, hogy B -nek milyen halmazra vonatkozó komplementuma $\bar{B}$).

1.13. Definíció. Az A és B halmazok Descartes-szorzata (röviden szorzata) azoknak a rendezett pároknak halmaza, melyeknek első tagja A -nak, második tagja B -nek eleme (sorrend!). Jelölése $A \times B$. Tehát

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Pl. $C \times P$ (ahol C a páros, P a páratlan valós számok halmaza) a sík azon pontjainak halmaza, melyeknek első koordinátája (abszcisszája) páros, második koordinátája (ordinátája) páratlan szám.

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok Descartes-szorzata azoknak a rendezett n -eseknek halmaza, melyeknek i -edik "koordinátáját" A_i -ből vettük. Jelölése

$$\bigtimes_{i=1}^n A_i.$$

Tehát

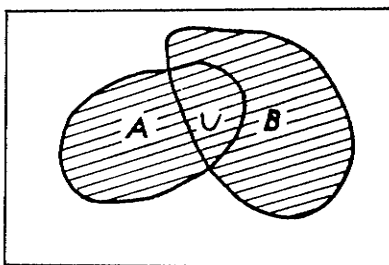
$$\bigtimes_{i=1}^n A_i = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i \ (i=1, 2, \dots, n)\}.$$

Ha itt $A = A_1 = A_2 = \dots = A_n$, akkor a halmazok Descartes-szorzatára

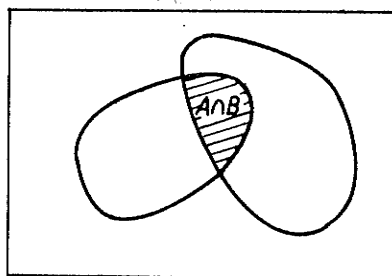
a következő rövid jelölést használjuk: $\bigtimes_{i=1}^n A_i = A^n$.

Speciálisan az R , $R \times R = R^2$, $R \times R \times R = R^3, \dots, R^n$ halmazokat egy-, két-, három-, ..., n -dimenziós térnek, elemeiket a tér pontjainak (vektorainak) nevezzük. Utalásunkra még visszatérünk.

A halmazműveleteket speciális síkbeli ponthalmazok esetében az 1-3. ábrán szemléltettük (A jelenti mindig a bal oldali, B pedig a jobb oldali halmazt.)



1. ábra



2. ábra

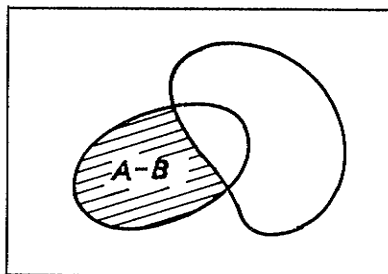
1.14. A halmazok közt értelmezett műveletek az alábbi műveleti szabályoknak tesznek eleget, ill. az alábbi fontosabb összefüggéseket elégítik ki:

- I. 1. $X \cup Y = Y \cup X$ (az egyesítés művelete kommutatív),
2. $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) = X \cup Y \cup Z$ (az egyesítés művelete asszociatív),

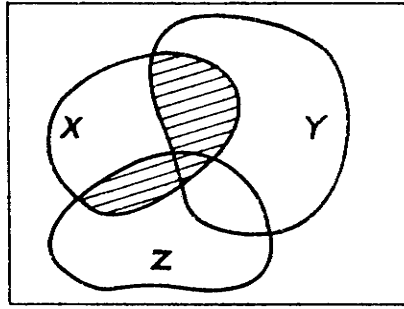
3. $X \cup X = X$.

- II. 1. $X \cap Y = Y \cap X$ (a metszetképzés művelete kommutatív),
2. $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z$ (a metszetképzés művelete asszociatív),
3. $X \cap X = X$.

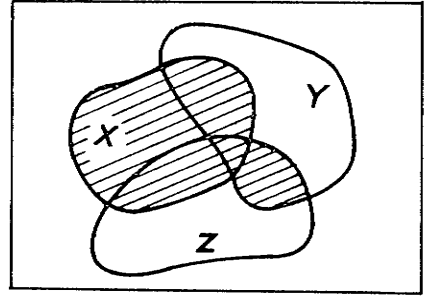
- III. 1. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (az egyesítés és metszetképzés művelete kielégíti a disztributív szabályt; szemléltetés a 4. ábrán).



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Levezethető még a fenti összefüggésekből az un. második disztributív szabály:

$$2. X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z). \quad (\text{Szemléltetés az 5. ábrán}).$$

A fentiekhez sorolható még néhány - az előzőekben már említett - összefüggés. Az alaphalmazt E -vel jelölve

$$\text{IV. 1. } X \cup \emptyset = X,$$

$$2. X \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$3. X \cup E = E,$$

$$4. X \cap E = X,$$

$$\text{V. 1. } X \cup \bar{X} = E,$$

$$2. X \cap \bar{X} = \emptyset.$$

Meg kívánjuk jegyezni, hogy a disztributív szabályok általánosabban is érvényesek:

$$X \cap \left(\bigcup_{i \in I} Y_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \cap Y_i),$$

$$X \cup \left(\bigcap_{i \in I} Y_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \cup Y_i).$$

Az I. -V. összefüggések nem mind függetlenek egymástól, részben egymásból levezethetők.

1.15. Sokszor jól felhasználhatók az un. de Morgan összefüggések, melyeket mindjárt általános alakjukban adunk meg:

$$a) X - \bigcup_{i \in I} Y_i = \bigcap_{i \in I} (X - Y_i),$$

$$b) X - \bigcap_{i \in I} Y_i = \bigcup_{i \in I} (X - Y_i).$$

Az a) összefüggést így igazolhatjuk: legyen

$$A = X - \bigcup_{i \in I} Y_i, \quad B = \bigcap_{i \in I} (X - Y_i).$$

Ha $x \in A$, akkor x eleme kell, hogy legyen X -nek, de nem tartozhat

$\bigcup_{i \in I} Y_i$ -hez, vagyis $x \notin Y_i$ ($\forall i \in I$), amiből következik, hogy

$\forall i \in I$ -re $x \in (X - Y_i)$, vagyis $x \in B$. Tehát beláttuk, hogy

$$A \subset B.$$

Másrészt, ha $y \in B$, vagyis $\forall i \in I$ -re $y \in (X - Y_i)$, akkor $y \in X$ és $y \notin Y_i$, tehát $y \notin \bigcup_{i \in I} Y_i$, és így $y \in A$, azaz

$$B \subset A.$$

Ezt a korábban nyert $A \subset B$ összefüggéssel egybevetve adódik, hogy $A = B$, amit igazolnunk kellett. *

1.16. Megjegyzés. Halmazalgebrának általában egy adott E halmaz részhalmazainak olyan rendszerét nevezzük, amelyhez $\emptyset$ (zéruselem) és E (egységelem) hozzátartozik, és amelyből az egyesítés, metszetképzés, komplementumképzés művelete nem vezet ki.

1.17. Megjegyzés. Általában, ha egy H halmaz elemei között értelmezhető három művelet, és ezeket a műveleteket halmazbeli elemekre alkalmazva mindig halmazbeli elemre jutunk (a három művelet nem vezet ki H -ből), és megadható H -n E ún. egységelem és $\emptyset$ ún. zéruselem úgy, hogy tetszőleges $X, Y, Z \in H$ mellett kielégüljenek az 1.14. alatti I.-V. összefüggések megfelelői, akkor a halmazok ilyen rendszerét Boole-algebrának nevezzük.

Boole-algebra például egy E alaphalmaz összes részhalmazainak rendszere az egyesítés, metszetképzés és komplementumképzés műveletével, E -t tekintve egységelemnek és az üres halmazt zéruselemnek, általánosabban Boole-algebra minden halmazalgebra ugyanezekkel a művele-

tekkel. További példák Boole-algebrára: az eseményalgebra, amellyel a valószínűségszámítás tárgyalása során foglalkozunk majd, az ún. kapcsolásalgebra, amellyel logikai áramkörök vizsgálatánál találkozunk, stb.

1.18. Feladatok.

1. Vizsgáljuk meg, milyen A és B halmazokra igazak az alábbi összefüggések:

a) $(A - B) \cup B = A,$

b) $(A \cup B) - B = A.$

2. Igazoljuk tetszőleges $X, Y, Z \subset E$ halmazokra a III.2. disztributív szabályt.

3. Igazoljuk, hogy 1.16. speciális eseteként tetszőleges A, B és B_i halmazokra

a) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$

b) $A - \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A - B_i)$

4. Legyen $A = \{1, 2\}, B = \{-1, 1\}, C = \{0\}, N$ a természetes számok halmaza. Adjuk meg

$A \times B, A \times C, A \times N, A \times B \times C$ elemeit.

5. A Boole-algebra I-III. összefüggései közül melyek teljesülnek az összeadás és szorzás műveletének szokott értelmezésével

a) N -en,

b) Q -n,

c) $R - Q$ -n,

d) R -en,

e) a komplex számok halmazán,

f) térvektorok halmazán, ha a szorzás műveletén a skaláris szorzást értjük,

g) térvektorok halmazán, ha a szorzás műveletén a vektoriális szorzást értjük.

2. Reláció, leképezés, függvény

2.1. A halmazelméleti alapfogalmak tárgyalása során több jól használható fogalmat vezettünk be. Il. egy elemnek adott halmazhoz való tartozását, ill. adott halmazhoz való nemtartozását, amit így jelöltünk:

$$c \in A, \text{ ill. } c \notin B.$$

Az $\in$ jel tehát a c elem és az A (ill. B) halmaz bizonyos kapcsolatát juttatja kifejezésre. További, szintén az előző pontban bevezetett jelöléssel, két halmaz egymással való speciális kapcsolatára utaltunk, nevezetesen arra, hogy melyik halmaznak (jelöljük ezt A -val) minden eleme a másikkal (jelölje ezt B) is eleme, röviden: A részhalmaza B -nek:

$$A \subset B \quad (B \supset A) \Leftrightarrow \forall x : (x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

2.2. A valós számok körében is találkoztunk már olyan jelekkel, amelyek két-két szám közötti kapcsolatot juttattak kifejezésre ($<$, $>$, $=$). R -et a derékszögű koordinátarendszer x -tengelyének, ill. y -tengelyének pontjaival szemléltetve $R \times R$ a sík pontjaival szemléltethető. Az $x = y$ ($x, y \in R$) kapcsolatban álló pontok a koordinátarendszer "szögfelező egyenesének" pontjaival szemléltethetők, az $x = y$ kapcsolat tehát meghatározza a sík ($R \times R$) egy részhalmazát (ti. a szögfelező egyenes pontjait), és megfordítva $R \times R$ -nek egy meghatározott részhalmaza (a szögfelező egyenes pontjai) egyértelműen jellemezhetők az $y = x$ kapcsolattal.

Teljesen hasonló módon látható be, hogy az $y < x$ kapcsolat $R \times R$ "szögfelező alatt levő félsíkjának" pontjait határozza meg, és megfordítva, a félsík pontjai az $y < x$ kapcsolattal jellemezhetők.

Ugyanakkor az $y > x$ kapcsolat $R \times R$ "szögfelező felett levő félsíkjának" pontjait jellemzi, és megfordítva, e félsík pontjait és csak ezeket az $y > x$ kapcsolattal adhatjuk meg.

Ha az előbbi félsík pontjait kiegészítjük a szögfelező egyenes pontjainak halmazával, akkor $R \times R$ ezen részhalmazának pontjait az $y \geq x$ (vagyis $(y > x) \vee (y = x)$) kapcsolat jellemzi egyértelműen.

A "szögfelező alatti félsík pontjait a szögfelező egyenes pontjaival kiegészítve" adódó $H \subset R \times R$ halmazt az $y \leq x$ (vagyis $(y < x) \vee (y = x)$) kapcsolattal adhatjuk meg, és megfordítva az $y \leq x$ kapcsolat $R \times R$ pontjai közül H pontjaival szemléltethető.

2.3. Jelentsenek $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$, ... vektorokat (a háromdimenziós tér vektorait, vagy speciálisan síkvektorokat, komplex számokat, valós számokat). Itt beszélhetünk pl. az

$$|\underline{x}| = |\underline{y}|$$

kapcsolatról, amely tehát két vektort (komplex számot, valós számot) akkor és csakis akkor fűz össze egymással, ha abszolút értékük megegyezik. Ezzel a kapcsolattal is egyértelműen megadtuk $S \times S$ -nek egy részhalmazát, ahol $S = \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$ a komplex számok esetében, $\mathbb{R}$ a valós számok esetében).

Az előző példákban szereplő két-két elemet összefűző kapcsolatot általában relációnak nevezik. Pontosabban:

2.4. Legyen A és B két halmaz. Egy adott kétargumentumu (kérváltozós) reláció (röviden reláció) $A \times B$ egy adott részhalmaza. Ezt a részhalmazt K -val jelölve ez azt jelenti, hogy az $x \in A$ és $y \in B$ elemet az adott reláció akkor és csak akkor kapcsolja össze, ha $(x, y) \in K$.

Ilyen relációk voltak az $\in, \subset, <, >, =, \geq, \leq$ jelekkel, ill. a 2.3-ban megadott kapcsolatok.

Először $A \times A$ részhalmazaiival, tehát speciális relációkkal foglalkozunk. Ilyen relációk $A \times A$ -n az un. rendező relációk, és az un. ekvivalenciarelációk.

Annak érdekében, hogy e relációk tulajdonságait áttekinthető formában összefoglalhassuk, jelöljük azt a tényt, hogy egy adott reláció az x és y elemet összekapcsolja x K y -nal, és nevezzük a relációt röviden K -nak.

2.5. Definíció. A K reláció részben rendezi A -t, ha a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- a) $a K b \wedge b K c \Rightarrow a K c$ ($a, b, c \in A$), azaz K tranzitív,
- b) $a K b, b K a, a = b$ ($a, b \in A$) közül legfeljebb az egyik kapcsolat áll fenn. (K irreflexív.)

Ilyen reláció volt 2.1.-ben a $\subset$ jellel megadott kapcsolat, de csak akkor, ha részhalmazon valódi részhalmazt értünk, vagyis $A \subset B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \wedge \exists y \in B : y \notin A$ ($A, B \subset E$). Ha ui. A minden eleme B -hez, B minden eleme pedig C -hez is hozzátartozik ($C \subset E$), nyilván $\forall x \in A$ -ra $x \in C$, azaz $A \subset C$; tetszőleges A és B halmazokra ($A, B \subset E$) pedig nyilván $A \subset B, B \subset A, A = B$ közül nem állhat fenn kettő (lehetséges, hogy ezen kapcsolatok egyike sem áll fenn).

2.6. Definíció. A K reláció rendezi A -t (K rendező reláció $A \times A$ -n, A a K relációval rendezett halmaz), ha K a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- a) $a K b \wedge b K c \Rightarrow a K c$ ($a, b, c \in A$), azaz K tranzitív,
 b) $a K b, b K a, a = b$ ($a, b \in A$) közül pontosan egy kapcsolat áll fenn. (K trichotóm.)

Ilyen rendező reláció $R \times R$ -en a 2.2.-ben $<$ ill. $>$ jellel megadott kapcsolat. R tehát a $<$ relációval rendezett halmaz.

Lehetséges, (és az irodalomban szokásos) a félig rendező és rendező relációt másképp is definiálni. Az így értelmezett relációkra a nem valódi tartalmazás, ill. a 2.2.-ben tárgyalt $\leq$ ($\geq$) relációk a legkézenfekvőbb példák, úgy is mondhatjuk, hogy ezekről mintázhatók az alábbi definíciók:

2.5.⁺ K részben rendezi A -t, ha

- a) $a K b \wedge b K c \Rightarrow a K c$ ($a, b, c \in A$) (K tranzitív),
 b) $a K b \wedge b K a \Leftrightarrow a = b$.

2.6.⁺ K rendező reláció $A \times A$ -n, ha

- a) tranzitív,
 b) $a K b \wedge b K a \Leftrightarrow a = b$,
 c) $a K b$ és $b K a$ közül legalább az egyik mindig fennáll.

Mi a jegyzetben a továbbiakban rendező reláción mindig a 2.6.-ban értelmezett relációt értjük. Okoskodásaink értelemszerűen a 2.6.⁺-ban definiált relációra is átvihetők.

Általában, ha egy A halmaz az $A \times A$ -n megadott K relációval rendezett halmaz, azt mondjuk, hogy $a \in A$ megelőzi $b \in A$ -t akkor és csak akkor, ha $a K b$. Ezt az elnevezést részben rendezett halmazok esetében is használhatjuk. Jelentse pl. A az R részhalmazainak rendszerét. Ezt a $\subset$ reláció (lásd 2.5.) részben rendezi, és pl. a természetes számok halmaza megelőzi a racionális számok halmazát, mert $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

2.7. Definíció. K ekvivalenciareláció $A \times A$ -n, ha a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- a) $a K b \wedge b K c \Rightarrow a K c$ ($a, b, c \in A$), azaz K tranzitív,
 b) $a K b \Rightarrow b K a$ ($a, b \in A$), azaz K szimmetrikus,
 c) $a \in A \Rightarrow a K a$, azaz K reflexív.

Ilyen ekvivalenciarelációra példát 2.3.-ban adtunk meg. További példaként tekintsük azt a K_5 relációt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -en, amely az 5-tel való osztásnál azonos maradékot adó természetes számokat kapcsolja össze (pl. K_5 6, 13 K_5 38, ...). Ez a reláció $\mathbb{N}$ elemeit az

$$N_i = \{x : x = 5k + i, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

diszjunkt halmazokba csoportosítja. Ezt a tulajdonságot fogalmazzuk meg általánosságban a következő tétel:

2.8. Tétel. Minden $A \times A$ -n adott ekvivalenciareláció diszjunkt halmazokra (un. ekvivalenciaosztályokra) bontja fel az A halmazt.

A tételt nem bizonyítjuk.

Ezután a relációknak egy fontos speciális típusával foglalkozunk, melyet függvénynek nevezünk.

2.9. Definíció. Az $A' \subset A$ halmazon értelmezett, B -be vezető f függvény olyan reláció $A \times B$ -n, amely minden $x \in A'$ -nek egy és csak egy $y \in B$ elemet feleltet meg ($\forall x \in A'$ -höz pontosan egy $y \in B$ elemet rendel), amelyre $x f y$, az A' -höz nem tartozó x -ekhez pedig egyetlen ilyen y sem tartozik.

Az $A' \subset A$ halmaz az f függvény értelmezési tartománya, jelölése sokszor D_f f értékkészlete pedig azoknak az y -oknak a halmaza, amelyek legalább egy $x \in A'$ -höz tartoznak:

$$\{y : \exists x \in A' \ (x f y)\} = B' \subset B.$$

Az f által $c \in A'$ -höz rendelt $b \in B'$ értéket f c helyhez tartozó helyettesítési értékének nevezzük és $f(c)$ -vel jelöljük.

Azt a tényt, hogy az f függvény $x \in A'$ -höz egy $y \in B'$ értéket rendel így jelölhetjük:

$$y = f(x), \quad x \xrightarrow{f} y, \quad (\text{vagy } x \mapsto y), \quad x f y.$$

Különböző függvények jelölésére természetesen különböző betűket ($g, h, \varphi, \dots$) használunk.

Foglalkozni fogunk olyan speciális függvényekkel, melyeknek értelmezési tartománya a természetes számoknak valamilyen véges $\{1, 2, \dots, n\}$ részhalmaza, vagy maga N . Ezeknél a függvényeknél a k helyen ($k \in N$) felvett függvényértéket indexezett betűvel, pl. a_k -val jelöljük.

2.10. Definíció. Az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazon, ill. $\forall k \in N$ -re értelmezett f függvényt véges, ill. végtelen sorozatnak nevezzük és így jelöljük:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \text{ill.} \quad (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots),$$

rövidebben (a_n) .

2.11. Mint előbb láttuk, az f függvény A' értelmezési tartományának minden eleméhez a

$$B' = \{b : b = f(a), a \in A'\}$$

értékkészlet halmazának egy elemét rendeli, $\forall x \in A'$ -t egy-egy $y \in B'$ -be visz át, transzformál, képez le, sőt azt is mondhatjuk, az A' halmazt B' -re képezi le. Az A' halmaz f függvény által létesített leképezésénél adódó képét a függvény helyettesítési értékére bevezetett jelöléshez hasonlóan $f(A')$ -vel jelölve, f értékkészlete a leképezés (transzformáció) képhalmaza

$$B' = f(A') \subset B.$$

A fenti jelölések mellett általában azt mondjuk, hogy az f függvény az A' halmazt a B halmazba képezi le, és ezt így jelöljük:

$$f : A' \rightarrow B.$$

2.12. Definíció. Az f függvény által nyújtott $f : A' \rightarrow B$ leképezés kölcsönösen egyértelmű, ha $a_1 \in A'$, $a_2 \in A'$ és $a_1 \neq a_2$ esetén

$$f(a_1) \neq f(a_2).$$

Ekkor nyilván minden $b \in B' = f(A')$ elemhez egy és csak egy $a \in A'$ tartozik, amelyre

$$f(a) = b,$$

beszélhetünk tehát az f függvény által létesített leképezés megfordításáról, az un. inverz leképezésről:

2.13. Definíció. Ha $f(A') = B$ és $a_1, a_2 \in A'$, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, akkor azt a kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést, amely minden $b \in B$ elemhez azt az $a \in A'$ elemet rendeli, amelyre $b = f(a)$, az f függvény inverz függvényének nevezzük és általában f^{-1} -gyel jelöljük.

f^{-1} értelmezéséből következik, hogy f^{-1} értelmezési tartománya B , értékkészlete pedig A' . f^{-1} -et, illetve az általa nyújtott leképezést szoktuk inverz leképezésnek is nevezni.

2.14. Definíció. Ha $f: A' \rightarrow B$ és $C \subset B$, akkor $f^{-1}(C)$ -vel jelöljük és C inverz képének nevezzük mindazoknak az $x \in A'$ elemeknek halmazát, melyekre $f(x) \in C$:

$$f^{-1}(C) = \{x : x \in A', f(x) \in C\}.$$

2.15. Legyen K reláció $A \times B$ -ben, és $A' \subset A$ álljon azokból az x -ekből, amelyekhez létezik olyan $y \in B$, hogy $x K y$. Ekkor az utóbbi y -ok (nemüres) halmazát hozzárendelhetjük x -hez, s így egy $f: A' \rightarrow B$ függvényt értelmezhetünk, ahol H jelöli a B halmaz nem-üres részhalmazainak rendszerét. Legyen pl. $A = B = \mathbb{R}$, és $x K y \Leftrightarrow x = \sin y$; ekkor $A' = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$, és minden $x \in A'$ -hez végtelen sok y tartozik, amelyre $x K y$. Vagy, ha ismét $A = B = \mathbb{R}$, $x K y \Leftrightarrow x = y^2$, akkor $A' = \{x : x \geq 0\}$, és adott $x \in A'$ -hoz $y = \sqrt{x}$ és $y = -\sqrt{x}$ tartozik. Így ebben a példában $f(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\} (x \geq 0)$, az előbbiben $f(x) = \{y : x = \sin y\} (-1 \leq x \leq 1)$. Az ilyen függvényt, amely A' minden eleméhez B -nek egy nemüres részhalmazát rendeli, szokás A' -ből B -be vezető többsértékű függvénynek nevezni. Látható, hogy minden $A \times B$ -beli reláció meghatároz egy ilyen függvényt, s megfordítva, így előállnak az összes A' -ből B -be vezető többsértékű függvények (ti. $f: A' \rightarrow H$ az $x K y \iff y \in f(x)$ relációból). Más szóval a többsértékű függvények valójában relációk, így a függvényfogalom ilyen általánosítása nélkülözhető. Mi a továbbiakban a függvény szót mindig a 2.9.-ben megadott értelemben használjuk.

2.16. Feladatok.

1. Rendezhető-e $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ a $<$ relációval?
2. Adjunk meg egy olyan relációt, amely R -et $\mathbb{N}$ -be viszi át.
3. Adjunk meg egy olyan relációt, amely R -et $\{-1, 0, 1\}$ -be viszi át.
4. Adjunk meg egy olyan relációt, amely R -et az $\{x : -1 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$ halmazba viszi át.
5. Legyen $f: A \rightarrow B$; igazoljuk, hogy $X_1, X_2 \subset A \Rightarrow f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
6. Legyen $f: A \rightarrow B$. Igaz-e, hogy $X_1, X_2 \subset A \Rightarrow f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.

7. Legyen $f: A \rightarrow B$; igazoljuk, hogy $Y_1, Y_2 \subset B \Rightarrow f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
8. Legyen $f: A \rightarrow B$. Igaz-e, hogy $Y_1, Y_2 \subset B \Rightarrow f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

3. Valós számok

Előtanulmányainkban a szám fogalmát fokozatosan bővítettük. Kiindulva a számlálás eredményeit kifejező ún. természetes számokból (az 1, 2, 3, ... számokból) a kivonás műveletével kapcsolatban megismertük a zérust és a negatív egész számokat: 0, -1, -2, A természetes számok, a zérus és a negatív egész számok neve közösen egész szám. (A természetes számokat szokás még pozitív egész számoknak is nevezni.) Később az osztás műveletével kapcsolatban tovább bővítettük a szám fogalmát a törtek megismerésével. Ilyen törtek pl. $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{3}$, Az egész számok és tört számok közös neve racionális szám. Racionális számok tehát a $\frac{p}{q}$ alakú törtek, ahol $q \neq 0$, q és p egész szám. Végül megismertük a nem-racionális valós számokat; ezeket irracionális számoknak neveztük. Ilyenek pl. $\sqrt{2}$, π , $\sin 2$, $\lg 2$. Azt, hogy $\sqrt{2}$ (az egy-ségnyi befogóju egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójának mérőszáma) nem racionális szám, a bevezetőben indirekt bizonyítási eljárással igazoltuk.

A valós számok halmazát $\mathbb{R}$ -rel jelöljük.

Az alábbiakban felsoroljuk a valós számoknak azokat az alaptulajdonságait (axiómáit), amelyeknek ismeretét feltételezzük, és amelyekre támaszkodva minden további tulajdonság szabatosan levezethető. Az egyszerűbb fogalmazás érdekében eltekintünk attól, hogy az axiómarendszer független legyen, megengedjük tehát azt, hogy az axiómarendszer egyes axiómái a rendszer más axiómáiból részben levezethetők legyenek.

3.1. A valós számok körében ($\mathbb{R}$ -ben) értelmezve van az összeadás és szorzás (jele $+$ és $\cdot$). ($a \cdot$ jel, ha nem okoz félreértést, el is hagyható), azaz minden $a \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbb{R}$ elempárhoz hozzá van rendelve egyetlen $(a+b) \in \mathbb{R}$ és egyetlen $(a \cdot b) \in \mathbb{R}$. Az ezekre vonatkozó tulajdonságokat 1^0 - 9^0 -ben foglaljuk össze.

A valós számok halmaza a $<$ relációval rendezhető, a rendezéssel kapcsolatosak a 10^0 - 13^0 axiómák.

Végül az axiómarendszert az un. Archimédész-féle (14^0) és Cantor-féle (15^0) axiómával tesszük teljessé.

A valós számok axiómarendszere:

1^0 $a + b = b + a$ (az összeadás kommutatív).

2^0 $(a + b) + c = a + (b + c)$ (az összeadás asszociatív).

3^0 Létezik egyetlen szám (ezt 0 -val jelöljük), amelyre teljesül, hogy

$$a + 0 = a, \text{ ha } a \in \mathbb{R}.$$

4^0 Minden $a \in \mathbb{R}$ számhoz létezik pontosan egy olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre

$$a + x = 0.$$

Az így értelmezett x -et $(-a)$ -val jelöljük.

5^0 $a \cdot b = b \cdot a$ (a szorzás kommutatív).

6^0 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (a szorzás asszociatív).

7^0 Létezik egyetlen szám, amelyet 1 -gyel jelölünk ($1 \neq 0$), amelyre teljesül, hogy

$$1 \cdot a = a, \text{ ha } a \in \mathbb{R}.$$

8^0 Minden $a \neq 0$ -hoz létezik egyetlen $x \in \mathbb{R}$, amelyre

$$a \cdot x = 1.$$

Az így értelmezett x -et az $a \neq 0$ szám reciprokának nevezzük és $\frac{1}{a}$ -val jelöljük.

9^0 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (az összeadás és szorzás disztributív).

10^0 Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számpárra az

$a < b, b < a, a = b$ relációk közül pontosan egy teljesül (2.6.b).

11^0 Ha $a < b$ és $b < c$ (röviden $a < b < c$), akkor $a < c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) (2.6.a).

12^0 Ha $a < b$, akkor $a + c < b + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) (a rendezés monoton).

13^0 Ha $a < b$ és $c > 0$, akkor $a \cdot c < b \cdot c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

14^o Tetszőleges $b > 0$ számhoz található b -nél nagyobb n természetes szám. (Archimédész-féle axióma.)

15^o Ha minden $n \in \mathbb{N}$ számnak megfeleltetünk egy $I_n = \{x : a_n \leq x \leq b_n, x \in \mathbb{R}\}$ halmazt (röviden $[a_n, b_n]$ zárt intervallumot, ezt 3.9.-ben értelmezzük majd), oly módon, hogy

$$a_k \leq a_{k+1}, \quad b_k \geq b_{k+1}, \quad (k \in \mathbb{N})$$

akkor

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset. \quad (\text{Cantor-féle axióma.})$$

3.2. Megjegyzés. A 4^o és 8^o tulajdonság következtében beszélhetünk a valós számok körében a kivonás és osztás műveletéről, amit a következőképpen értelmezzünk:

$$a - b = a + (-b),$$

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \quad \text{ha } b \neq 0.$$

3.3. Megjegyzés.

$a < b$ és $b > a$ jelentése azonos,

$a \leq b$ jelentése: $a < b$ vagy $a = b$,

$a \geq b$ jelentése: $a > b$ vagy $a = b$.

3.4. Megjegyzés. A rendezésre vonatkozóan könnyű belátni, hogy igazak az alábbi állítások (szokás ezeket az "egyenlőtlenségekkel való számolás szabályai"-nak is nevezni):

a) Minden $a \in \mathbb{R}$ számra az

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0$$

tulajdonságok közül pontosan egy teljesül. ($a > 0 \Leftrightarrow (-a) < 0$.)

b) $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$. Speciálisan

$$a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b > 0.$$

c) $0 \leq a < b \wedge 0 \leq c < d \Rightarrow ac < bd$. Speciálisan

$$a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow ab > 0.$$

d) $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$. Speciálisan

$$a < b \Rightarrow -a > -b.$$

$$e) 0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b},$$

$$a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b},$$

$$a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

f) Ha n pozitív egész szám, és $0 < a < b$, akkor

$$a^n < b^n.$$

3.5. Megjegyzés. A 3.1.-ben felsorolt 1^0 - 13^0 tulajdonságok lehetővé teszik a valós számok nevezetesebb - a bevezetésben felsorolt - részhalmazainak értelmezését:

Pozitív szám $a \in \mathbb{R}$, ha $a > 0$,

negatív szám $b \in \mathbb{R}$, ha $b < 0$.

Természetes szám a 7^0 axiómában szereplő 1 számból ismételt összeadással keletkező

$$1, 1+1 = 2, 1+1+1 = 3, \dots$$

szám. Ezek halmazát $\mathbb{N}$ -nel jelöltük.

Egész számok a természetes számok, ezek (-1) -szeresei és a 0 ($\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x : x = -y, y \in \mathbb{N}\}$).

Racionális számok a $\frac{p}{q}$ alakban felírható számok, ahol p, q egész, $q \neq 0$. Ezek halmazát $\mathbb{Q}$ -val jelöljük.

Irracionális számok a nemracionális valós számok. Ezek halmaza tehát $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

3.6. Megjegyzés. Azt a tényt, hogy a valós számok a 3.1.-ben felsorolt 1^0 - 13^0 tulajdonsággal bírnak, úgy is kifejezhetjük, hogy a valós számok rendezett testet alkotnak. (Általában egy rendezett H halmazt, az elemei közt értelmezett 1^0 - 13^0 tulajdonságoknak eleget tevő $+$ és $\cdot$. H -ből ki nem vezető műveletekkel ($1 \in H, 0 \in H$) rendezett testnek nevezünk.) $\mathbb{R}$ -ben az Archimédész-féle axióma is teljesül, ezért röviden azt mondjuk, hogy $\mathbb{R}$ archimédészien rendezett test.

Archimédészien rendezett test pl. a racionális számok halmaza is, amelyre azonban nem érvényes 15^0 (a Cantor-féle axióma). Innen látszik, hogy az 10^0 - 14^0 axiómák rendszere még nem elégséges a valós számok egyértelmű jellemzéséhez.

A 14^0 és 15^0 axióma szemléletesebbé tétele végett néhány- egyébként is hasznos - fogalmat kell bevezetnünk.

3.7. Definíció. $a \in \mathbb{R}$ abszolút értékét, $|a|$ -et így értelmezzük:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0, \\ -a, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

A definíció következménye, hogy $x \in \mathbb{R}$ -re

$$|x| = +\sqrt{x^2} = \sqrt{x^2},$$

ill.

$$-|a| \leq x \leq |a| \Leftrightarrow |x| \leq |a|.$$

Az abszolút érték értelmezéséből következnek az alábbi tulajdonságok:

- a) $|a| \geq 0$, és $|a| = 0$ csak ha $a = 0$.
- b) $|a| = |-a|$.
- c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- d) $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$ és így c) miatt $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
- e) $|a + b| \leq |a| + |b|$, ill. általánosabban
 $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|,$

amit rövidebben így jelölhetünk:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Szavakban: összeg abszolút értéke nem nagyobb a tagok abszolút értékének összegénél.

$$f) |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Szokás $|a - b|$ -t a és b eltérésének is nevezni.

g) Ha $0 < a < b$, akkor $a^n < b^n$, ($n \in \mathbb{N}$), (7. feladat), speciálisan $a^2 < b^2$. Megfordítva: $a^2 < b^2 \Rightarrow |a| < |b|$ (9. feladat).

3.7. e. bizonyítása:

A teljes indukciós bizonyítási eljárást alkalmazzuk az általánosabb állítás igazolására. Az állítás $n = 2$ -re igaz, hiszen az abszolút érték értelmezéséből folyóan

$$-|a_1| \leq a_1 \leq |a_1|,$$

$$-|a_2| \leq a_2 \leq |a_2|,$$

és így 3.4.b. értelmében

$$-(|a_1| + |a_2|) \leq a_1 + a_2 \leq (|a_1| + |a_2|),$$

ami pedig épp azt jelenti, hogy

$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|.$$

Tegyük fel, hogy az állítás n tagú összeg esetében igaz, vagyis

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|,$$

és lássuk be, hogy akkor $n+1$ tagú összegre is igaz lesz. Mivel kéttagú összegre már beláttuk az állítás igaz voltát, írható:

$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} a_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| + |a_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|,$$

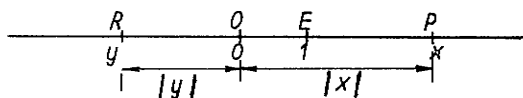
amit bizonyítani akartunk.*

3.7.f. igazolását feladatként tűzzük ki.

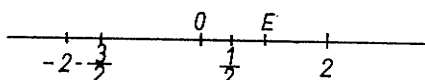
3.8. A valós számok szemléltetése.

Vegyünk fel egy egyenest, jelöljünk ki rajta egy O pontot és egy E pontot, az $\overline{OE}$ távolságot válasszuk távolságegységnek és tekintsük az

0-ból E felé haladó irányt pozitív haladási iránynak. Ezen egyenes pontjai és a valós számok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető: az egyenes minden pontjának egy és csak egy valós szám, a pont "koordinátája" és fordítva, minden valós x számnak az egyenes egy, és csak egy pontja felel meg, amely $\overline{OE}$ egységben mérve 0-tól x távolságban, $x > 0$ esetén a pozitív haladás irányában, $x < 0$ esetén az ellenkező irányban fekszik. Ezért sokszor "az x valós számnak megfelelő P pont" helyett röviden " x pont"-ról fogunk beszélni. (6. ábra)



6. ábra

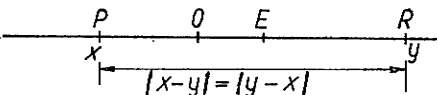


7. ábra

Legkönnyebb persze a $p \in \mathbb{N}$ -nek megfelelő P pontok ($p \in \mathbb{N}$) "képét" meghatároznunk, csupán p -szer kell egymás után felmérnünk 0-ból az $\overline{OE}$ távolságot pozitív haladási irányban. A negatív egész számok képe hasonlóképp nyerhető, csak az ellenkező irányban kell 0-ból kiindulva ($q < 0$, $-q \in \mathbb{N}$ esetén $|q|$ -szor) felmérnünk $\overline{OE}$ -t. Ha p, q egész, $q \neq 0$, akkor a $\frac{p}{q}$ racionális szám képét úgy nyerhetjük, hogy először az $\overline{OE}$ egységnyi hosszúságú szakaszt $|q|$ egyenlő részre osztjuk, majd az osztással nyert kicsiny szakaszt mérjük fel 0-ból kiindulva $|p|$ -szer, ha $\frac{p}{q} > 0$, a pozitív haladás, $\frac{p}{q} < 0$ esetén pedig az ellenkező irányban. A 7. ábrán $x = 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ képét jelöltük be.

Az eddig leírtak alapján könnyű belátni, hogy ha x és y racionális számok és $x < y$, akkor az x -nek megfelelő P pontból az y számnak megfelelő R pontba pozitív irányú haladással juthatunk el, és ha E-t 0-tól jobbra vettük fel, akkor R P-től jobbra fekszik az egyenesen. P-nek R-től való távolságát $|x - y| = |y - x|$ adja. (8. ábra)

Nyilvánvaló, hogy a racionális koordinátájú pontok nem töltik ki az egyenest, hiszen pl. 0-ból pozitív haladási irányban felmérve az egységnyi befogóju egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogóját, olyan ponthoz jutunk az egyenesen, amely nem rendelkezik racionális koordinátával, mert különben $\sqrt{2}$ racionális szám volna, pedig tudjuk, irracionális. Be lehet látni, hogy az egyenes racionális koordinátával még nem rendelkező pontjai egyértelműen elláthatók irracio-



8. ábra

nális számokkal mint koordinátákkal úgy, hogy továbbra is érvényben maradjon a hozzárendelésnek az a tulajdonsága, hogy a kisebb koordinátájú pontból a nagyobb koordinátájú pontba pozitív haladási irányban jutunk el.

Ha egy egyenes pontjaihoz az itt leírt módon valós számokat rendelünk mint koordinátákat, akkor az egyenest számegyenesnek nevezzük.

A valós számok "helyét" meg tudjuk adni a számegyenesen. A velük való számolást megkönnyíti az a tény, hogy minden valós szám tetszőleges pontossággal megközelíthető racionális számokkal, sőt, véges tizedes törttel. Ennek igazolására még visszatérünk a II. fejezetben (4.8.-11.). Itt csak azt mutatjuk meg, hogy ha pl. $\sqrt{2}$ értékét századnyi pontossággal (0,01-nél nem nagyobb hibával) akarjuk meghatározni, így járhatunk el: első közelítésben

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

Osszuk fel az $x = 1$ és $y = 2$ számok közötti szakaszt a számegyenesen 10 egyenlő részre, és keressük meg, melyik két szomszédos osztópont közé esik $\sqrt{2}$ (az egyik osztóponttal egyenlő is lehetne, akkor máris megkaptuk a vizsgált szám pontos értékét)

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

Eljárásunkat tovább ugyanígy folytatjuk: most az 1,4 és 1,5 számok közötti szakaszt osztjuk fel 10 egyenlő részre, és megkeressük, melyik két osztópont közé esik $\sqrt{2}$:

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

Akár 1,41-gyel, akár 1,42-vel közelítjük meg $\sqrt{2}$ értékét, a közelítésnél elkövetett hiba $< 10^{-2}$, vagyis a közelítő érték a kívánt pontosságu.

A számegyenesen fekvő ponthalmazok (számhalmazok) közül külön elnevezést adunk az alábbi típusú halmazoknak:

3.9. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Azon $x \in \mathbb{R}$ számok összességét, amelyekre $a \leq x \leq b$, $[a, b]$ zárt intervallumnak nevezzük, és így jelöljük: $[a, b]$. Tehát

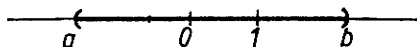
$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}. \quad (9. \text{ ábra})$$

3.10. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Azon $x \in \mathbb{R}$ számok összességét, amelyekre $a < x < b$, a, b nyílt intervallumnak nevezzük, és így jelöljük: (a, b) . Tehát

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}. \quad (10. \text{ ábra})$$



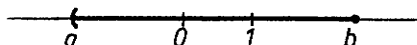
9. ábra



10. ábra



11. ábra



12. ábra

3.11. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Azon $x \in \mathbb{R}$ számok összességét, amelyekre $a \leq x < b$, a, b alulról félig zárt intervallumnak nevezzük és így jelöljük: $[a, b)$. Tehát

$$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}. \quad (11. \text{ ábra})$$

3.12. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Azon $x \in \mathbb{R}$ számok összességét, amelyekre $a < x \leq b$, a, b felülről félig zárt intervallumnak nevezzük, és így jelöljük: $(a, b]$. Tehát

$$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}. \quad (12. \text{ ábra})$$

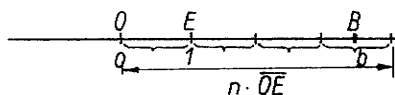
A fenti definíciókban (3.9. - 3.12.) a -t és b -t az intervallum végpontjainak nevezzük.

A számegyenes és az intervallum fogalmának segítségével az Archimédész-féle (3.1.14^o) és Cantor-féle (3.1.15^o) axiómák még így is átfogalmazhatók:

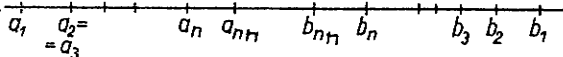
3.13. Feleljen meg a számegyenesen a 0 számnak az O , 1-nek az E , és a $b > 0$ számnak a B pont (13. ábra). Ekkor az Archimédész-féle axióma értelmében van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$n \overline{OE} > \overline{OB}.$$

3.14. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ számnak megfeleltetünk egy $[a_n, b_n]$ zárt intervallumot oly módon, hogy $a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_k$ ($k \in \mathbb{N}$), akkor ezeknek az "egymásba skatulyázott" zárt intervallumoknak (14. ábra) van közös pontja ($\exists x \in \mathbb{R} : x \in [a_n, b_n]$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re).



13. ábra



14. ábra

3.15. Az Archimédész-féle axiómának következményei az alábbi állítások:

- a) Ha $a > 0$, $b > 0$, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $na > b$.
- b) Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
- c) Minden (a, b) intervallumban van egy, sőt akárhány racionális szám. (Az állítások bizonyítását feladatként tűzzük ki.)

3.16. Megjegyzés. Azt a tényt, hogy tetszőleges (a, b) intervallumban végtelen sok racionális szám van, úgy is szokták kifejezni, hogy a racionális számok a számegyenesen mindenütt sűrűn helyezkednek el. Ebből következik - mint később a II. fejezetben látni fogjuk - hogy tetszőleges valós szám racionális számmal tetszőleges pontossággal megközelíthető.

3.17. A Cantor-féle axióma fontos szerepet játszik az alábbi állítások bizonyításában:

- a) Minden (a, b) intervallumban van végtelen sok irracionális szám.
- b) Ha $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$, akkor egy és csakis egy olyan $b > 0$ szám létezik, amelyre $b^k = a$. Ezt a számot így jelöljük:

$$b = \sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}.$$

Állításaink bizonyítására itt nem térünk ki.

3.18. Megjegyzés. Az Archimédész-féle és a Cantor-féle axióma sem egymásból, sem a valós számok 3.1.-ben felsorolt 1^0 - 13^0 tulajdonságaiból nem következik.

3.19. Megjegyzés. A valós számok alaptulajdonságait összefoglalva röviden a következőt mondhatjuk:

A valós számok ún. archimédészien rendezett testet alkotnak, és teljesül R-ben a Cantor-féle axióma.

3.20. Megjegyzés. Más tárgyalási módot követve, az 1^0 - 15^0 alaptulajdonságok helyett más (vagy részben más) axiómákból is kiindulhatunk, akkor ezekre támaszkodva bizonyítható pl. az Archimédész-féle, vagy a Cantor-féle axióma. (5.13.5. feladat.)

3.21. Feladatok.

- 1. A valós számok 3.1.-ben felsorolt alapösszefüggéseiben ha csak azt tesszük fel, hogy van 0 , 1 , és $\forall a \in \mathbb{R}$ -hez tartozik $-a$, ill.

$a \neq 0$ esetén $\frac{1}{a}$, mellyel 3.1.3^o, 3.1.4^o, 3.1.7^o, 3.1.8^o teljesül, bizonyítsuk, hogy ebből következik, hogy csak egy $0, 1, -a, \frac{1}{a}$ létezik.

2. Igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}$ -re $0 \cdot a = 0$.

3. Igazoljuk, hogy $(a, b \in \mathbb{R} \wedge a \cdot b = 0 \wedge a \neq 0) \Rightarrow b = 0$.

4. Igazoljuk, hogy $x < y, a, b > 0$ esetén

$$x < \frac{ax + by}{a + b} < y.$$

5. Igazoljuk, hogy ha $b_1, \dots, b_n$ tetszőleges pozitív számok, akkor

$$\sqrt[n]{b_1 \cdot \dots \cdot b_n} \leq \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha

$$b_1 = \dots = b_n.$$

6. Igazoljuk, hogy $x > -1$ esetén fennál $n > 1$ ($n \in \mathbb{N}$)-re

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Milyen x -re áll egyenlőség?

7. Igazoljuk, hogy $0 < a < b$ ($n \in \mathbb{N}$) esetén fennáll:

$$a^n < b^n.$$

8. Igazoljuk 3.7.f.-et.

9. Igazoljuk 3.7.g.-t.

10. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}$ kielégíti az Archimédész-féle axiómát, de nem elégíti ki a Cantor-féle axiómát.

11. Igazoljuk 3.15. állításait.

4. Halmazok számossága

Az előző pontban láttuk, hogy minden (a, b) intervallumban végtelen sok racionális szám van, és ugyanez mondható az irracionális számokról is. Feltehető-e mármost a kérdés, hogy mi van "több", racionális, vagy irracionális szám? Egyáltalán, mit kell a "több" fogalmán értenünk, ha a vizsgált halmazok nem véges elemszámúak? Annak érdekében, hogy kérdéseinkre válaszolni tudjunk, nézzük meg először, hogyan célszerű hasonló esetben véges elemszámú halmazoknál eljárunk.

Ha egy teremben például igen sok fiú és leány tartózkodik, akkor annak megállapítására, hogy kik vannak többen, a fiúk-e, vagy pedig a lányok, legcélszerűbb eljárás párba állítani őket. Így anélkül, hogy a párok számát megállapítsunk, abból a tényből, hogy fiúk (fiú) vagy lányok (lány) maradtak pár nélkül, megállapítható, kik vannak többen.

A véges halmazoknál követett okoskodás mintájára fogalmazhatjuk meg tehát a következő definíciót:

4.1. Definíció. Ha két halmaz, A és B között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre (A és B kölcsönösen egyértelműen leképezhető egymásra), akkor az A és B halmazt egyenlő számosságúnak (ekvivalensnek) nevezzük és ezt a tényt így jelöljük:

$$A \sim B.$$

Például a számegyenes pontjainak halmaza ekvivalens a valós számok halmazával (lásd 3.8.).

4.2. A 4.1.-ben definiált ekvivalenciareláció rendelkezik a 2.7.-ben felsorolt tulajdonságokkal:

- a) $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (tranzitív),
- b) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (szimmetrikus),
- c) $A \sim A$ (reflexív).

Ekvivalens halmazok például N és a pozitív páros számok halmaza: $Y = \{y : y = 2k, k \in N\}$, ugyanis pl. $x \in N$ -nek $y = 2x$, és ennek inverzeként $y \in Y$ -nak $x = \frac{y}{2}$ feleltethető meg egyértelműen. Ugyan-
így látható be, hogy a pozitív páratlan számok X halmaza ekvivalens N -nel, vagyis a) értelmében a pozitív páros számok halmazával. Egy halmaz tehát speciálisan saját valódi részhalmazával is lehet ekvivalens. (Pl. $Y \sim N$.)

A négyzetszámok halmaza, $A = \{x : x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$, nyilván ekvivalens a természetes számok halmazával ($A \sim \mathbb{N}$), ugyanakkor a természetes számok és a valós számok halmazát vizsgálva, $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$ ($\mathbb{N}$ nem ekvivalens $\mathbb{R}$ -rel). Ezt később bizonyítjuk, most arra utalunk csak, hogy $\mathbb{N}$ minden elemét önmagának megfeleltetve $\mathbb{N}$ -et kölcsönösen egyértelműen leképezhetjük $\mathbb{R}$ -nek egy (valódi) részhalmazára.

Kézenfekvő ezért a következő elnevezésben megállapodnunk:

4.3. Definíció. Egy H halmaz nagyobb számosságú, mint a Z halmaz, (Z kisebb számosságú halmaz, mint H), ha Z ekvivalens H -nak egy H' részhalmazával, de nem ekvivalens H -val:

$$(Z \sim H' \subset H) \wedge Z \not\sim H$$

A 4.2.-ben említett példa eredményét így írhatjuk le:

$$Y \sim \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \wedge \mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}.$$

Ugyancsak 4.2. példán láttuk, hogy az a tény, hogy $X \subset \mathbb{N}$ és $Y \sim X$ nem zárja ki azt, hogy $Y \sim \mathbb{N}$ legyen, lényeges volt tehát 4.3.-ban a $Z \not\sim H$ kikötés.

Bizonyítható mármost az alábbi nevezetes tétel:

4.4. Bernstein-féle ekvivalencia tétel. Ha két halmaz mindegyike ekvivalens a másik valamely részhalmazával, akkor a két halmaz egymással is ekvivalens:

$$A \sim B' \subset B \sim A' \subset A \Rightarrow A \sim B.$$

(Lásd 4.18.3. példa.)

A tétel bizonyításával itt nem foglalkozunk.

A halmazokat ezek után számosságuk szerint osztályozhatjuk.

4.5. Definíció. Az A halmaz véges, ha van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy A ekvivalens az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazzal, vagy ha üres ($A = \emptyset$).

Ezzel egyenértékű definíció a következő:

A véges, ha A elemeit tartalmazza egy $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ sorozat. (A elemeit fel tudjuk sorolni.)

Véges pl. a 10-nél kisebb abszolút értékű egész számok halmaza, ez pl. az $\{1, 2, \dots, 19\}$ halmazzal hozható kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe.

4.6. Definíció. Ha nincsen olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre az $A \neq \emptyset$ halmaz ekvivalens volna az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazzal, akkor az A halmazt végtelen számosságúnak, röviden végtelennek mondjuk.

Végtelen halmaz pl. maga $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\{x : |x| < 1, x \in \mathbb{R}\}$, stb. 4.2.-ben utaltunk már arra (és 4.10.-ben bizonyítjuk is), hogy $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$, van tehát a végtelen halmazok között különböző számosságú halmaz. Ezért a végtelen halmazoknak két alapvető típusát különböztetjük meg:

4.7. Definíció. Ha a végtelen számosságú halmaz ekvivalens $\mathbb{N}$ -nel megszámlálhatóan végtelennek, különben nem-megszámlálhatóan végtelennek mondjuk.

A természetes számok halmazának számosságát (és így minden megszámlálhatóan végtelen halmaz számosságát) $\aleph_0$ -al (olv. alef null, - $\aleph$ a héber ábécé első betűje -) jelölik.

A 4.2.-beli példánál maradva, akár a páros, akár a páratlan pozitív számok halmazának számossága tehát $\aleph_0$.

Tetszőleges (tehát akár véges, akár végtelen) A halmaz számosságáról a következőt mondhatjuk:

4.8. Definíció. Egy halmaz megszámlálható, ha véges, vagy megszámlálhatóan végtelen. Ez könnyen láthatóan azt jelenti, hogy a megszámlálható halmaz elemeit egy végtelen

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

sorozat tartalmazza.

4.9. A halmazokat számosságuk szerint tehát kétféleképpen csoportosíthatjuk:

1^o megszámlálható és nem megszámlálható halmazok, ill.

2^o véges és végtelen számosságú (ezen belül megszámlálható és nem megszámlálható) halmazok.

(Általában inkább az 1^o alatti csoportosítást használjuk.)

Mielőtt annak vizsgálatába kezdenénk, milyen közös tulajdonságok jellemzik a megszámlálható (véges vagy végtelen) halmazokat, meg kell néznünk, valóban tudunk-e példát adni nem-megszámlálhatóan végtelen halmazra, van-e olyan halmaz, amelynek számossága nagyobb $\aleph_0$ -nál? Bizonyítsuk be először ezért a következő állítást:

4.10. Tétel. A valós számok halmaza nem megszámlálható.

Bizonyítás. Indirekt bizonyítási eljárást használunk. Tegyük fel, hogy az összes valós szám halmaza megszámlálható, tehát egy végtelen $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ sorozatba rendezhető. Megmutatjuk, hogy ez nem

lehetséges, meg tudunk ugyanis adni olyan $y \in \mathbb{R}$ számot, amely minden x_n -től különbözik, nem szerepel tehát a sorozat elemei között. Ennek érdekében olyan egymásba skatulyázott zárt intervallumokat fogunk megadni, amelyeknek a Cantor-axióma miatt (3.1.15^o) létező közös pontja az x_n -ek közt nem szerepel, ezt a pontot jelöljük majd y -nal.

Legyen tehát $I_1 = [a_1, b_1]$ olyan zárt intervallum, amely nem tartalmazza x_1 -et: $x_1 \notin [a_1, b_1]$; $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$ olyan zárt részintervalluma I_1 -nek, amely nem tartalmazza x_2 -t, és így tovább. Ha tehát $I_1, I_2, \dots, I_n$ olyan egymásba skatulyázott zárt intervallumok, hogy $x_i \notin [a_i, b_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), akkor legyen I_{n+1} olyan zárt részintervalluma I_n -nek, amely nem tartalmazza x_{n+1} -et (ilyen biztosan létezik). Eljárásunkat folytatva így olyan

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$$

egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozatra jutunk, amelynél minden n -re

$$x_n \notin I_n,$$

amiből következik, hogy az intervallumsorozat Cantor-axióma miatt biztosan létező közös pontja, y , nem szerepelhet az $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ sorozat elemei között. Ezzel ellentmondásra jutottunk, állításunkat tehát bizonyítottuk.*

4.11. A valós számok halmazát - és a vele ekvivalens halmazokat - kontinuum számosságú halmaznak nevezzük; ezt a számosságot $\aleph$ -fel (olv. alef) jelöljük.

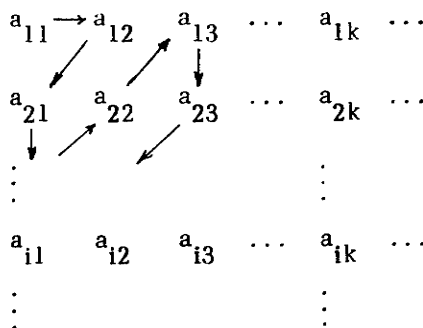
Megszámlálható halmazokra a következő állítások mondhatók ki:

4.12. Tétel. Az üres halmaz véges. Minden véges halmaz megszámlálható. Véges halmaz minden részhalmaza véges. Megszámlálható halmaz minden részhalmaza megszámlálható.

4.13. Tétel. Véges halmazok véges sorozatának egyesítése véges. Megszámlálható halmazok (véges, vagy végtelen) sorozatának egyesítése is megszámlálható.

Bizonyítás. Véges halmazok véges sorozata esetében elég a halmazok elemeit tartalmazó véges sorozatok elemeit egymás után írni, az így adódó sorozat elemei nyilván tartalmazzák az egyesített halmaz elemeit. A továbbiakban elég csak a végtelen sorozat esetével foglalkoznunk, hiszen

véges sorozat helyett az egyik tag megismétlésével mindig végtelen sorozatra juthatunk. Ha mármost A_i elemeit tartalmazza az $(a_{i1}, a_{i2}, \dots)$ sorozat, akkor az



táblázatban minden $n \in \mathbb{N}$ -re csak véges számú olyan tag van, amelyben $i + j = n$. Írjuk le sorban ezeket $n = 2, 3, \dots$ esetére. A keletkező

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{41}, \dots$$

sorozat $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ elemeit mind tartalmazza, tehát az $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ halmaz megszámlálható.*

4. 13. -hoz hasonlóan bizonyítható a következő állítás:

|| 4. 14. Tétel. A racionális számok halmaza $(\mathbb{Q})$ megszámlálható. (lásd 4. 13., $a_{ik} = \frac{i}{k}$)

Feladatként tűzzük ki az alábbi állítások igazolását:

|| 4. 15. Tétel. Ha az A_i halmazok $(i = 1, 2, \dots, n)$ megszámlálható (speciálisan végesek), akkor Descartes-szorzatuk, $\bigtimes_{i=1}^n A_i$, is megszámlálható (speciálisan véges).

|| 4. 16. Tétel. Minden végtelen halmaz tartalmaz megszámlálhatóan végtelen részhalmazt.

4. 17. Tétel. Tetszőleges végtelen H halmaz összes részhalmazai közül álló halmazrendszer számossága nagyobb mint a H halmaz számossága.

4.18. Feladatok.

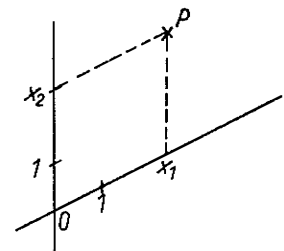
1. Adjunk példát halmazokra, melyeknek számossága $\aleph_0$, ill. $\aleph$
2. Van-e olyan halmaz, amelynek számossága nagyobb a kontinuum számosságnál?
3. Vizsgáljuk meg az $\{x : |x| < 1, x \in \mathbb{R}\}$ halmaz számosságát.
4. Igazoljuk a 4.14. tételt. Mennyi $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ számossága?
5. Igazoljuk a 4.15. tételt.
6. Igazoljuk a 4.16. tételt.
7. Igazoljuk a 4.17. tételt.

5. Ponthalmazok. Számhalmazok.

5.1. A 3.8.-ban részletezett módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető egy egyenes pontjai és a valós számok között, ezek halmaza, $\mathbb{R}$, tehát egy egyenes pontjainak halmazával, más szóval lineáris pontthalmazzal szemléltethető. Ha az egyenes pontjaihoz a 3.8.-ban leírt módon rendeltünk valós számokat, mint koordinátákat, akkor az egyenest számegyenesnek neveztük és megállapodtunk abban is, hogy ilyenkor "az x valós számnak megfelelő P pont" helyett röviden " x pont"-ról beszélünk.

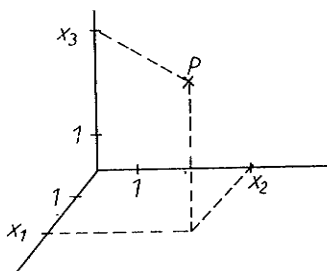
Hasonló módon szemléltethetők $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ elemei a sík (kétdimenziós tér) pontjaival, két nem párhuzamos számegyenest véve fel, és az egyiket a Descartes-szorzat első, a másikon pedig második tényezőjét szemléltetve (1.13.) (15. ábra)

Ugyanilyen kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ elemei és a tér (háromdimenziós tér) pontjai között három nem egy síkban fekvő, egymást egy pontban metsző számegyenes segítségével. Minden (x_1, x_2, x_3) rendezett számhármasnak, vagyis $\mathbb{R}^3$ minden elemének megfelel a tér egy pontja, melynek koordinátái a három egy ponton átmenő, nem egy síkban fekvő számegyenessel megadott koordináta-rendszerben (általában derékszögű Descartes-féle koordináta-rendszerben) x_1, x_2



15. ábra

és x_3 megfordítva, minden (x_1, x_2, x_3) koordinátájú pontnak megfelel



16. ábra

az $R \times R \times R$ Descartes-szorzatnak az az eleme, amelynél az első halmazból vett elem x_1 , a másodikból vett x_2 , a harmadikból vett pedig x_3 (16. ábra).

Hasonlóképpen beszélhetünk - most másképpen - a tényleges geometriai szemlélettől elvonatkoztatva - arról, hogy R^n elemei az "n dimenziós tér pontjai"-val szemléltethetők, ill. hozhatók kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe (1. 13.).

$R, R^2, R^3, \dots, R^n$ elemei helyett - az előbb részletezett kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésre való tekintettel - a továbbiakban röviden az egy, két, három, ..., n-dimenziós tér (speciálisan az $R' \subset R$ számhalmaz helyett a megfelelő lineáris tér) pontjairól, ill. pontthalmazáról beszélünk majd.

R^n -ben ($n = 1, 2, \dots$) beszélhetünk két pont távolságáról, egy pont környezetéről, vizsgálhatjuk a tér egy részhalmazának és egy pontjának egymáshoz viszonyított helyzetét. Ilyen "topológiai" (helyzetgeometriai) kapcsolatokkal általánosságban később, a többváltozós függvények analízisének tárgyaló jegyzetben foglalkozunk majd. Most speciálisan lineáris pontthalmazok, vagyis számhalmazok esetében vizsgáljuk a legalapvetőbb kapcsolatokat.

Speciális lineáris pontthalmazokról, a zárt, nyílt, félig zárt intervallumokról beszéltünk már (3. 9. - 3. 12.). Természetesen nemcsak ilyen speciális lineáris pontthalmazokkal találkozunk majd. Említsünk meg itt csak néhány további: $Q, R - Q, \{x : 2 < |x| < 3, x \in R\}, \{y : |y| \leq 2, y \in Q\}, \{z : |z| \geq 2, z \in R\} \cap \{u : |u| \leq 3, u \in R\}, (2, 3) \cup (3, 4], [2, 3) \cup \left\{\frac{3}{2}, 4\right\}$.

Az analízis vizsgálataiban legtöbbször olyan pontthalmazok szerepelnek, melyeknek pontjai a halmaz egy pontjára nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Az ilyen halmazok könnyen megadhatók, jellemezhetők a "távolság" fogalmának segítségével

5. 2. Definíció. Az x és y pont távolsága ($x, y \in R$), ill. ahogy a 3. 7. f. -ben neveztük, eltérése:

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y)^2}$$

E távolság-fogalom a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$1^o) d(x, y) \geq 0,$$

$$2^o) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$\begin{aligned} 3^o \quad d(x, y) &= d(y, x), \\ 4^o \quad d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall z \in \mathbb{R}\text{-re.} \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőtlenséget "háromszög-egyenlőtlenségnek" nevezik.

A távolság-fogalom segítségével az $a \in \mathbb{R}$ pont körül szimmetrikusan elhelyezkedő pontok halmaza így jellemezhető:

5.3. Definíció. $a \in \mathbb{R}$ ε -sugarú környezete, $K(a, \varepsilon)$, azoknak az $x \in \mathbb{R}$ pontoknak a halmaza, melyek a -tól ε -nél kisebb távolságban vannak:

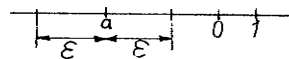
$$K(a, \varepsilon) = \{x : d(a, x) < \varepsilon, \quad a, x \in \mathbb{R}\}.$$

Másképp kifejezve magunkat

$$K(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad (\varepsilon > 0, \text{ valós szám}). \quad (17. \text{ ábra})$$

Vizsgálatainkban szerepelnek majd ettől kevésbé eltérő szimmetrikus környezetek is:

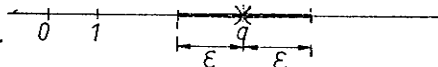
5.4. Definíció. $a \in \mathbb{R}$ ε -sugarú pontozott (vagy átszurt) környezete, $\dot{K}(a, \varepsilon)$, azoknak az a -tól különböző $x \in \mathbb{R}$ pontoknak a halmaza, melyek a -tól ε -nél kisebb távolságban vannak:



17. ábra

$$\dot{K}(a, \varepsilon) =$$

$$= \{x : 0 < d(a, x) < \varepsilon, \quad a, x \in \mathbb{R}\}.$$



18. ábra

Másképp kifejezve magunkat:

$$\dot{K}(a, \varepsilon) = K(a, \varepsilon) - \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon). \quad (18. \text{ ábra})$$

5.5. Definíció. Az $X \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos, ha tetszőleges $a \in X$ -re van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in X$ -re

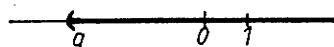
$$d(a, x) < k.$$

Korlátos halmaz pl. $(-2, 4)$, $(-10\,000, 100\,000]$, $\{1, 2, 3, 7\}$, $[1, 4]$.
 $\{x : 0 < |x| < 2, \quad x \in \mathbb{R}\}.$

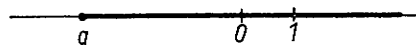
5.6. Nem korlátos halmaz $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Sokszor szerepelnek majd az alábbi típusú nemkorlátos lineáris pontthalmazok, ezért külön jelölést és elnevezést is célszerű velük kapcsolatban bevezetnünk:

1^o Valamely $a \in \mathbb{R}$ -nél nagyobb valós számok halmaza:

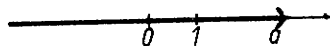
$$\{x : x > a, \quad a \in \mathbb{R}\} = \{x : a < x < +\infty\} = (a, +\infty)$$



19. ábra



20. ábra



21. ábra



22. ábra

(olv. a , plusz végtelen, ill. $a, +\infty$ intervallum). (19. ábra)

2^o Valamely $a \in \mathbb{R}$ -nél nem kisebb (ill. nagyobb, vagy egyenlő) valós számok halmaza:

$$\{x : x \geq a, \quad x, a \in \mathbb{R}\} = \{x : a \leq x < +\infty\} = [a, +\infty)$$

(olv. $a, +\infty$ alulról zárt intervallum). (20. ábra)

3^o Valamely $a \in \mathbb{R}$ -nél kisebb valós számok halmaza:

$$\{x : x < a, \quad x, a \in \mathbb{R}\} = \{x : -\infty < x < a\} = (-\infty, a)$$

(olv. mínusz végtelen, a , ill. $-\infty, a$ intervallum). (21. ábra.)

4^o valamely $a \in \mathbb{R}$ -nél nem nagyobb (ill. kisebb, vagy egyenlő) valós számok halmaza:

$$\{x : x \leq a, \quad x, a \in \mathbb{R}\} = \{x : -\infty < x \leq a\} = (-\infty, a]$$

(olv. $-\infty, a$ felülről zárt intervallum). (22. ábra) (a -t most is az intervallum egyik végpontjának mondjuk.)

5^o A fentihez hasonló jelöléssel írható végül:

$$\mathbb{R} = \{x : -\infty < x < +\infty\} = (-\infty, +\infty)$$

(olv. mínusz végtelen, plusz végtelen intervallum).

Az itt felsorolt 1^o-5^o típusú intervallumokat szokás végtelen (ill. nemkorlátos) intervallumoknak is nevezni.

Az 5.5.-ben definiált korlátos halmazoknál törekszünk általában a halmazokat lehetőleg szűk korlátok közé szorítani. Számhalmazoknál maradván, általában arra törekszünk, hogy a "legrövidebb" olyan intervallumot adjuk meg, amely az eredeti korlátos halmazt még részhalmazként tartalmazza. De nem-korlátos halmazoknál is felvethető a kérdés, milyen $a \in \mathbb{R}$ -re lesz még a vizsgált halmaz része valamilyen 1^o-4^o típusú nemkorlátos halmaznak (5.6.). Célszerű ezért bevezetnünk a következő fogalmakat:

5.7. Definíció. A H lineáris pontthalmaz felülről korlátos, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy

$$x \in H \Rightarrow x \leq k.$$

k -t H felső korlátjának nevezzük.

5.8. Definíció. A H lineáris pontthalmaz alulról korlátos, ha van olyan $p \in \mathbb{R}$, hogy

$$x \in H \Rightarrow x \geq p.$$

p -t H alsó korlátjának nevezzük.

5.9. Tétel. Ha a H lineáris pontthalmaz alulról is, felülről is korlátos, akkor korlátos.

Ha egy halmaz felülről (alulról) korlátos, akkor sok felső (alsó) korlátja van. A "legjobb" felső (alsó) korlátra külön elnevezést vezetünk be:

5.10. Definíció. A felülről korlátos H halmaz legkisebb felső korlátját felső határnak (szuprémum) nevezzük és így jelöljük: $\sup H$.

5.11. Definíció. Az alulról korlátos H halmaz legnagyobb alsó korlátját alsó határnak (infimum) nevezzük és így jelöljük: $\inf H$.

Nyilván $\sup H$ ($\inf H$) lehet eleme H -nak, de nem kell, hogy eleme legyen. Pl. a természetes számok reciprocai halmazának (ez alulról és felülről is korlátos) felső korlátja minden $x \geq 1$ szám, alsó korlátja minden $x \leq 0$ szám, felső határa 1 (ez egyszersmind eleme a halmaznak), alsó határa 0 (ez nem eleme a halmaznak).

Alapvető jelentőségű mármost a következő tétel:

5.12. Tétel. Felülről korlátos nem üres számhalmaznak mindig van felső határa, alulról korlátos nem üres számhalmaznak mindig van alsó határa.

Bizonyítás. Elég a bizonyítást a felülről korlátos esetre elvégeznünk, alulról korlátos nem üres halmazokra az állítás hasonlóan igazolható.

Legyen tehát b_0 a számhalmaznak egy felső korlátja, a_0 pedig olyan szám, amely nem felső korlát. Osszuk az $[a_0, b_0]$ intervallumot két egyenlő részre, és jelöljük $[a_1, b_1]$ -gyel a keletkező két intervallum közül azt, amelynek egyik végpontja felső korlát, a másik pedig nem felső korlát. Így folytatva az eljárást az egymásba skatulyázott

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \dots$$

intervallumokat nyerjük, melyekben a_n nem felső korlát, b_n azonban felső korlát, és

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

A Cantor-axióma (3.1.15^o) értelmében van olyan F szám, melyre

$$a_n \leq F \leq b_n$$

minden n -re fennáll. Megmutatjuk, hogy F a vizsgált halmaz felső határa.

Először azt látjuk be, hogy F felső korlát. Ha ugyanis x a számhalmazhoz tartozik, akkor, mivel b_n felső korlát

$$x \leq b_n,$$

azaz

$$x - F \leq b_n - F \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n},$$

és így $(b_0 - a_0 > 0)$

$$\frac{x - F}{b_0 - a_0} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{minden } n\text{-re.}$$

Mivel azonban $2^n > n$ (az előszóban teljes indukcióval igazolt állítás), azaz $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$, azért $\inf\{x : x = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\} = \inf\{y : y = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

$= 0$, ellenkező esetben ugyanis ellentmondásba jutnánk az Archimédész

féle axiómával (3.1.14^o, ill. 3.15.b)) $\frac{x - F}{b_0 - a_0} \leq 0$, azaz $x - F \leq 0$,

tehát $x \leq F$ adódik, F tehát valóban felső korlátja a számhalmaznak. F azonban a számhalmaz legkisebb felső korlátja. Ha ui. F' is felső korlát, akkor, mivel a_n a konstrukció értelmében nem felső korlát,

$$a_n < F',$$

így $F - a_n > F - F'$, továbbá

$$F - a_n \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n},$$

tehát $b_0 - a_0 > 0$ -val átosztva még mindig áll

$$\frac{F - F'}{b_0 - a_0} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}\text{-re, amiből}$$

az előbb részletezett gondolatmenettel adódik, hogy

$$F - F' \leq 0, \quad \text{tehát} \quad F \leq F',$$

F tehát a legkisebb felső korlát, a felső határ.*

5.13. Feladat.

1. Mutassuk meg, hogy az $\{x : x = \frac{m}{n}, \quad 0 < m < n, \quad m, n \in \mathbb{N}\} = A$ halmazban nincs legkisebb és legnagyobb elem.

2. Legyen $A, B \subset (0, +\infty)$, $C = \{x : x = y + z, \quad y \in A, \quad z \in B\}$,
 $D = \{u : u = z \cdot y, \quad y \in A, \quad z \in B\}$.

Igazoljuk, hogy

- a) $\sup C = \sup A + \sup B$,
- b) $\inf C = \inf A + \inf B$,
- c) $\sup D = \sup A \cdot \sup B$,
- d) $\inf D = \inf A \cdot \inf B$.

3. Határozzuk meg $\sup \{x : x = \frac{3^n - 2^n}{6^n}, \quad n \in \mathbb{N}\}$, ill. $\inf \{x : x = \frac{3^n - 2^n}{6^n}, \quad n \in \mathbb{N}\}$ értékét.

4. Határozzuk meg $\{\sup x : x = \frac{n+1}{n \cdot 3^n}, \quad n \in \mathbb{N}\}$, ill. $\inf \{x : x = \frac{n+1}{n \cdot 3^n}, \quad n \in \mathbb{N}\}$ értékét.

5. Ha az Archimédész-féle és a Cantor-féle axióma helyett az 5.12. tétel tekintenénk a valós számok halmazát jellemző alaptulajdonságnak, igazoljuk, hogy 5.12.-ből 3.1.14^o és 15^o következik.

II. SOROZATOK

1. A végtelen számsorozat fogalma, megadása

1.1. Sokszor találkozunk a mindennapi életben is olyan problémával, hogy valamilyen objektum mérőszámát csak közelítéssel, de "tetszőleges pontossággal való közelítéssel" tudjuk meghatározni. Ilyen mérőszám lehet pl. tranziens jelenséget vizsgálva, a feszültséget mérve, ennek mérőszáma, vagy valamilyen területnek, vagy térfogatnak mérőszáma.

Hogy mi egy téglalap területe, azt az elemi geometriából ismerjük. Vajon hogyan lehet egy görbe vonal által határolt idom, pl. egy kör területét definiálni?

A kör területét a beirt, vagy körülirt szabályos n -szögek területének segítségével a következőképpen értelmeztük:

A kör területe az a szám, amelyhez a körbe irt (vagy a kör köré irt) szabályos n -szögek t_n területe közeledik, ha n értékét "minden határon túl" növeljük. Másképp megfogalmazva, a kör területe az a T szám, amelyet a

$$t_3, t_4, t_5, \dots, t_n, \dots$$

számsorozat elemei "tetszőleges pontossággal megközelítenek", amelytől elég nagy n -re t_n eltérése "tetszőlegesen kicsi", ill. elég nagy n -re a $T \approx t_n$ közelítés hibája "tetszőlegesen kicsi".

Lényegében hasonló gondolatmenettel a gömb térfogatát (köbtartalmát) a következőképpen értelmeztük: Szeleteljük fel a gömböt párhuzamos síkokkal n egyforma magasságú gömbszeletre ($n = 1, 2, \dots$) és jelöljük v_n -nel a gömbszeletekbe irt n darab egyenes körhenger térfogatának összegét. A gömb térfogata, V , az a szám, amelyhez a

$$v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$$

számsorozat elemei "minden határon túl" közelednek, ha n értékét "minden határon túl" növeljük.

E példákban minden n természetes számhoz egy a_n számot rendeltünk (egy számsorozatot adtunk meg) és a közös probléma az volt, hogy ez a végtelen sok szám együttesen meghatározza-e egyetlen A számot, amelyhez az a_n számok "minden határon túl közelednek".

Kérdés, hogyan lehet ezt a közeledést pontosan értelmezni, és ezután olyan elméletet kialakítani, amellyel ezt a matematika, egyéb tudományok, alkalmazások számára használhatóvá lehet tenni.

A sorozat fogalmával már 1.2.10. -ben találkoztunk. Ismételjük meg itt is, speciálisan valós számok sorozatára (röviden számsorozatra) ezt a definíciót:

1.2. Definíció. A számsorozat a természetes számok halmaza $\mathbb{N}$ értelmezett valós értékű függvény:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

A k helyen ($k \in \mathbb{N}$) felvett függvényértéket a_k -val jelöljük, és a sorozat k -adik elemének nevezzük (k a_k indexe). Magát a végtelen számsorozatot $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ -nel, vagy rövidebben (a_n) -nel jelöljük. Használni fogjuk néha a számsorozat jelölésére a zárójelmentes

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

jelölést is. Számsorozat helyett sokszor röviden sorozatról beszélünk majd, ha ez nem okozhat félreértést.

1.3. Egy számsorozatot legegyszerűbben úgy adhatunk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re valamilyen utasítással (legegyszerűbb esetben képlettel) adjuk meg a sorozat n -edik elemének, a_n -nek értékét, vagyis a sorozatot értelmező f függvény helyettesítési értékét:

$$a_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Például

$$a_n = \frac{1+n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{az } (2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots) \text{ sorozatot,}$$

$$b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{az } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \dots\right) \text{ sorozatot,}$$

$$c_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{az } (-1, 1, -1, 1, \dots) \text{ sorozatot,}$$

$$d_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{az } (1, 4, 9, \dots, n^2, \dots) \text{ sorozatot,}$$

$e_n = (-2)^n$, $n \in \mathbb{N}$ a $(-2, 4, -8, \dots, (-2)^n, \dots)$ sorozatot,

$f_n = (-n)^3$, $n \in \mathbb{N}$ a $(-1, -8, \dots, (-n)^3, \dots)$ sorozatot,

$$g_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ páros } (n = 2k, k \in \mathbb{N}), \\ \frac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan } (n = 2k-1, k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

az $(1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \dots, \frac{1}{2k-1}, 2k, \dots)$ sorozatot adja meg, míg a

h_n az n -edik prímszám ($n \in \mathbb{N}$) utasítással a $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots)$ sorozatot adtuk meg.

Legutóbbi példánk mutatja, mennyire helytelen volna egy sorozat első néhány elemének felírásával megadottnak képzelni a sorozatot, hiszen az első néhány elem után akárhogyan folytathatjuk tovább a sorozat elemeit.

Az előbbi (b_n) sorozatot így is megadhattuk volna:

$$b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot b_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

(a sorozat minden eleme az öt megelőzőből $(-\frac{1}{2})$ -del való szorzással kapható meg). Ugyanílyen típusu megadás pl.

$$i_1 = \sqrt{2}, \quad i_{n+1} = \sqrt{2+i_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ennek a sorozatnak első néhány eleme $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$. Az ilyen megadást, amelynél a sorozat n -edik elemét bizonyos előző, n -nél kisebb indexű elemekkel határozzuk meg egyértelműen, rekurzív megadásnak nevezzük.

Összefoglalva tehát az előbb mondottakat, egy sorozatot adott, ha minden $n \in \mathbb{N}$ -re ismerjük a sorozat n -edik elemét, illetve ismerünk valamilyen eljárást, mellyel a_n -et ($n \in \mathbb{N}$) ki tudjuk számítani, meg tudjuk határozni.

2. Számsorozat határértéke

2.1. Az előző pontban több számsorozatot soroltunk fel. 1.1.-ben láttuk, hogy egy számsorozat lényeges tulajdonsága, hogy van-e olyan szám, amelyhez a számsorozat elemei "minden határon túl közelednek", van-e a

számsorozatnak "határértéke", és ha igen, mi ez a "határérték". Szükséges tehát a számsorozat határértékének fogalmát - mely az analízis egyik legalapvetőbb fogalmának, a határérték-fogalomnak legegyszerűbb speciális esete - pontosan értelmeznünk.

Nézzük meg először, mi mondható az 1.3.-ban felsorolt sorozatokról, melyikről "látszik úgy", hogy van "határértéke".

Az $a_n = \frac{1+n}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ sorozat ($n \in \mathbb{N}$) elemei 1-hez "tartanak" abban az értelemben, hogy ha n nagy, akkor $\frac{1}{n}$ értéke "nagyon kicsi", s így $1 + \frac{1}{n}$ értéke "nagyon közel van" 1-hez, pontosabban 1 akármilyen kicsiny környezetét véve, ha n elég nagy, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ ebbe a környezetbe esik bele.

a $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozat elemei, az előbbi értelemben 0-hoz "tartanak".

Az 1.3.-beli (c_n) , (d_n) , (e_n) , (f_n) , (g_n) , (h_n) sorozatokhoz nem található olyan szám, amelyhez a sorozat elemei a fenti értelemben "tartanak", az (i_n) sorozatról pedig így "ránézéssel" ("intuitív módon") semmit sem tudunk mondani.

Lényegében az $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatra - mint speciális esetre - elmondott tulajdonság pontos megfogalmazásával adjuk meg a határérték definícióját:

2.2. Definíció. Az (a_n) számsorozat határértéke az A szám, ha A minden $K(A, \varepsilon)$ környezetéhez van olyan $N(\varepsilon)$ index, hogy $n > N(\varepsilon)$ esetén

$$a_n \in K(A, \varepsilon).$$

A tehát akkor határértéke az (a_n) sorozatnak, ha a sorozat elég nagy indexű ("elég távoli") elemei mind beleesnek az A szám tetszőleges (kis) ε -sugarú környezetébe.

Az, hogy adott esetben mit nevezünk "elég nagy index"-nek, függ a $K(A, \varepsilon)$ környezet sugarától, az $\varepsilon > 0$ szám megválasztásától.

Az előbb már utaltunk arra, hogy az 1.3.-beli (c_n) , (d_n) , (e_n) , (f_n) , (g_n) , (h_n) sorozatnak - definíciónk értelmében - nincs határértéke.

2.3. Definíció. Ha egy sorozatnak van határértéke, akkor a sorozatot konvergensnek, ellenkező esetben (ha nincs határértéke) divergensnek mondjuk.

2.4. Gyakran használt elnevezések: a 2.2. definícióban szereplő $\varepsilon > 0$ szám hibakorlát (hiszen $K(A, \varepsilon)$ sugaránál, ε -nál kisebb hibával közelítik meg az (a_n) sorozat elég nagy indexű elemei az A határértéket), a $N(\varepsilon)$ számnak pedig, amelynél nagyobb indexű (a_n) -beli elemek ε -nál kisebb hibával közelítik meg A -t, küszöbindex a neve.

2.5. Azt a tényt, hogy az (a_n) sorozat konvergens, és határértéke A , így jelölhetjük:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \text{ vagy } a_n \rightarrow A, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Ezzel a jelöléssel a 2.2. definíció röviden így írható fel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \iff \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N(\varepsilon): a_n \in K(A, \varepsilon),$$

amennyiben $n > N(\varepsilon)$.

Speciálisan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \text{ mert } \left(1 + \frac{1}{n}\right) \in K(1, \varepsilon), \text{ ill.}$$

$$1 - \varepsilon < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon, \text{ ha } n > N > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0, \text{ mert } \left(-\frac{1}{n}\right) \in K(0, \varepsilon), \text{ ill.}$$

$$-\varepsilon < \left(-\frac{1}{n}\right) < \varepsilon, \text{ ha } n > N = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Általános módszer egy számsorozat konvergenciájának vizsgálatára, és konvergencia esetén a határérték meghatározására, csak speciális sorozatok esetében adható meg. Az alább felsorolásra kerülő tételek azonban sokszor megkönnyítik a "határértékszámítás" problémájának megoldását.

2.6. Tétel. Az (a_n) sorozat akkor és csak akkor tart A -hoz, ha tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ mellett véges sok kivételtől eltekintve a sorozat minden eleme beleesik A ε -sugarú környezetébe, $K(A, \varepsilon)$ -ba.

Bizonyítás. A feltétel szükséges, hiszen a 2.2. definíció értelmében, 2.5. jelöléseit használva, a tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz a N küszöbindexet megválasztva, $K(A, \varepsilon)$ -on kívül legfeljebb csak a sorozat első N eleme $(a_1, \dots, a_{N-1}, a_N)$, vagyis véges sok elem eshet.

Másképp a feltétel elégleges is, hiszen ha adott $\varepsilon > 0$ mellett az (a_n) sorozatnak csak véges számú eleme esik $K(A, \varepsilon)$ -on kívül, akkor ha e véges sok elem közül a legnagyobb indexűnek az indexe N' , akkor $n > N'$ esetén $a_n \in K(A, \varepsilon)$, a sorozat a 2.2. definíció értelmében konvergens.*

Nagyon lényeges, hogy 2.6.-ban ne azt hangsúlyozzuk, hogy végtelen sok a_n esik $K(A, \varepsilon)$ -on belül, hanem azt, hogy csak véges sok eleme a sorozatnak eshet $K(A, \varepsilon)$ -on kívül, pontosabban véges sok index szolgáltató $K(A, \varepsilon)$ -on kívül eső elemet. Az 1.3.-beli (c_n) sorozatnál pl. minden páros indexű elem $K(-1, 1)$ -en kívül és $K(1, 1)$ -en belül esik, ezért divergens a sorozat, míg a (g_n) sorozatnál tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra végtelen sok (különböző) elem esik $K(0, \varepsilon)$ -ba, de $K(0, \varepsilon)$ -on kívül is, ezért nem konvergens a sorozat.

Szükséges, de nem elég feltételét mondja ki a konvergenciának a 2.8. tétel, melynek kimondásához előzőleg egy fogalmat kell még bevezetnünk:

2.7. Definíció. Egy számsorozat korlátos, ha a számsorozat elemeiből álló számhalmaz korlátos (lásd I.5.5.).

Amennyiben egy sorozat elemeiből álló halmazt, pontosabban a sorozat elemeiként előforduló számok összességét meg akarjuk adni, vigyáznunk kell arra, hogy egy számhalmaznak egy szám vagy eleme, vagy nem eleme; nincs értelme annak, hogy egy szám többször legyen eleme egy halmaznak, míg egy sorozatban többször is előfordulhat ugyanaz a szám.

Pl. az $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat elemeiből álló halmaz $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, a

$c_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat elemeiből álló halmaz a kételemű $\{1, -1\}$

halmaz.

||

2.8. Tétel. Minden konvergens számsorozat korlátos.

A tétel állítása 2.6.-ból közvetlenül adódik.*

Arra, hogy a 2.8. tétel állítása nem fordítható meg, példa a $c_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat, amely korlátos, de nem konvergens.

A továbbiakban a konvergens sorozatok fontosabb tulajdonságait megadó állításokat sorolunk fel.

Bevezetőként álljon egy fontos definíció:

||

2.9. Definíció. Ha egy számsorozat bizonyos elemeit elhagyjuk, de úgy, hogy még mindig végtelen sok elem maradjon, s a megmaradó elemeket az eredeti sorrendben egymás után írjuk, az eredeti számsorozatnak egy részsorozatát nyerjük.

Pl. az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat részsorozata az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozatnak.

Általánosságban az $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ számsorozat egy részsorozatát így jelöljük:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_r}, \dots \text{ ill. } (a_{n_r}).$$

Rövidebben kifejezve, ha $a_n = f(n)$ ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$), akkor $a_{n_r} = f(n_r)$,
 $\{n_1, n_2, \dots, n_r, \dots\} \subset \mathbb{N}$, és $n_i < n_k$, ha $i < k$.

Feladatként tűzzük ki a 2.6. alapján könnyen igazolható alábbi két tétel bizonyítását:

2.10. Tétel. Minden konvergens sorozatnak pontosan egy határértéke lehet. (Ha (a_n) -nek van határértéke, akkor azt a sorozat egyértelműen határozza meg.)

2.11. Tétel. Minden konvergens számsorozat részsorozatai is konvergenssek és az eredeti számsorozatával egyező határértékhez tartanak.

A konvergencia, a határérték fogalmából közvetlenül adódó állításokat mond ki a következő tétel:

2.12. Tétel. Egy konvergens számsorozat határértéke nem változik meg, ha

- a) a sorozat akárhány elemét felcseréljük egymással,
- b) a sorozatba véges sok elemet beiktatunk, vagy megváltoztatunk,
- c) a sorozat minden elemét véges sokszor megismételjük.

Konvergens sorozatok határértékének kiszámítását könnyítik meg az alábbi állítások:

2.13. Tétel. Ha (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B,$$

akkor az $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, ill. $B \neq 0$ esetén az $(\frac{a_n}{b_n})$ sorozat is konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Bizonyítás.

Az összegre vonatkozó állítás igazolása:

Az (a_n) és (b_n) sorozat konvergenciája miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan n_1 , ill. n_2 küszöbindex, hogy

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } n > n_1,$$

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } n > n_2.$$

A két egyenlőtlenséget összeadva, és az n_1 és n_2 számok közül a nagyobbikat N -nel jelölve

$$|a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon \quad \text{adódik, ha } n > N.$$

Alkalmazva azonban az összeg abszolút értékére vonatkozó I. 3. 10. e) egyenlőtlenséget

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq$$

$$\leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N$$

adódik, ez pedig ε tetszőleges volta miatt azt mutatja, hogy $n \rightarrow \infty$ esetén

$$a_n + b_n \rightarrow A + B. *$$

A különbségre vonatkozó állítás folyamánya az összegre vonatkozónak és a következő megjegyzésnek:

ha $b_n \rightarrow B$, akkor $cb_n \rightarrow cB$, ha $n \rightarrow \infty$ ($c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$)

($|cb_n - cB| = |c| |b_n - B| < \varepsilon$, ha $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{|c|}$, ami (b_n) konvergenciája miatt bizonyos N küszöbindextől fenn kell, hogy álljon.)*

A szorzatra vonatkozó állítást az előzők felhasználásával így igazoljuk:

Legyen $a_n - A = c_n$, $b_n - B = d_n$, ekkor $a_n \cdot b_n = (A + c_n)(B + d_n) = AB + c_n B + A d_n + c_n d_n$, és itt $c_n \rightarrow 0$, $d_n \rightarrow 0$, $c_n B \rightarrow 0$, $A d_n \rightarrow 0$, és $c_n d_n$ is 0-hoz tart, mert ha n olyan nagy, hogy

$$|c_n| < \varepsilon, \text{ és } |d_n| < 1, \text{ akkor } |c_n d_n| < \varepsilon$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra. Így tehát valóban $n \rightarrow \infty$ esetén

$$a_n b_n \rightarrow AB + 0 + 0 + 0 = AB. *$$

A hányadosra vonatkozó szabály igazolására elég megmutatni, hogy $b_n \rightarrow B \neq 0$ esetében

$$\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{B},$$

hiszen erre az általános eset a szorzásra vonatkozó szabály alapján vissza-vezethető.

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - b_n|}{|b_n B|} < \varepsilon$$

hiszen $b_n \rightarrow B \neq 0$ miatt, ha n elég nagy $|b_n| > \frac{|B|}{2}$ és tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra a számláló így becsülhető: $|b_n - B| < \frac{B^2 \varepsilon}{2}$. A szorzásra vonatkozó szabályt az $a_n \rightarrow A$, $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{B}$ esetre alkalmazva végül is adódik:

$$a_n \frac{1}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} \rightarrow A \frac{1}{B} = \frac{A}{B}, \text{ ha } n \rightarrow \infty. *$$

2.14. Tétel. 2.13. feltételei mellett, ha

$$a_n \leq b_n, \text{ akkor } A \leq B.$$

2.15. Tétel. 2.13. feltételei mellett, ha még $A = B$, akkor az "összefésült"

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

sorozat is konvergens és határértéke A .

2.13. egyik állítása tovább általánosítható.

2.16. Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, (b_n) sorozat pedig korlátos,
akkor az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Az utóbbi tételek bizonyítását is feladatként tűzzük ki.

2.17. Feladatok.

1. Igazoljuk, hogy az $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat határértéke 0.

2. Igazoljuk, hogy az $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat határértéke 1.

3. Igazoljuk a 2.8., 2.10., 2.11., 2.12., 2.14., 2.15., 2.16. tételek állításait.

4. Igazoljuk, hogy ha $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $a_n \leq b_n \leq c_n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, akkor a (b_n) sorozat is konvergens, és tart az (a_n) és (c_n) sorozat közös határértékéhez.

3. Divergens számsorozatok

3.1. Az 1.3.-ban felsorolt divergens sorozatok közül a $d_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, azaz $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$ és az $f_n = (-n)^3$, $n \in \mathbb{N}$, azaz $-1, -8, -27, \dots, -n^3, \dots$ sorozat azt a szabályosságot mutatja, hogy az első elég távoli elemei akármilyen nagy számnál mind nagyobbak, a második elég távoli elemei pedig akármilyen kicsiny (ill. nagy abszolút értékű negatív) számnál kisebbek. Az ilyen sorozatokat plusz végtelenhez divergáló sorozatoknak (a sorozat divergens voltának kihangsúlyozása érdekében, vagy egyszerűen plusz végtelenhez tartó), a második esetben mínusz végtelenhez divergáló (mínusz végtelenhez tartó) sorozatoknak nevezzük.

Pontosabban megfogalmazva a következő definíció adható:

3.2. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az (a_n) sorozat plusz végtelenhez tart, ha bármely P számhoz található olyan N küszöbindex, hogy

||

$$a_n > P, \text{ ha } n > N.$$

(A N küszöbindex megválasztása függ természetesen P megadásától.)

||

3.3. Definíció. Akkor mondjuk, hogy a (b_n) sorozat tart a mínusz végtelenhez, ha bármely M számhoz található olyan N küszöbindex, hogy

$$b_n < M, \text{ ha } n > N.$$

(A N küszöbindex megválasztása függ természetesen M megadásától.)

3.4. Az előző pontban a határérték fogalmának bevezetésénél $n \rightarrow \infty$ azt jelezte, hogy a konvergens (a_n) sorozat elemei az A határértékhez akkor közelednek minden határon túl, ha az n index (a pozitív egész számokon át) végtelenhez tart. Ezért mellőzhettük a precízebb $n \rightarrow +\infty$ jelölést. Ennek mintájára

azt a tényt, hogy az (a_n) sorozat plusz végtelenhez tart, így jelölhetjük:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \text{ ill. } a_n \rightarrow +\infty, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

illetve azt a tényt, hogy a (b_n) sorozat mínusz végtelenhez tart, így jelölhetjük:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty, \text{ ill. } b_n \rightarrow -\infty, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Konvergens sorozatok mintájára a 3.2.-ben, ill. 3.3.-ban értelmezett speciális divergens sorozatokra könnyen igazolható állítások sorozata adható meg. (Az állítások bizonyítását itt is feladatként tűzzük ki.)

3.5. Tétel. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ akkor és csakis akkor, ha tetszőleges

P számnál kisebb elem csak véges sok van az (a_n) sorozatban.

3.6. Tétel. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ akkor és csakis akkor, ha tetszőleges

M számnál nagyobb elem csak véges sok van a (b_n) sorozatban.

3.7. Tétel. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ esetében az (a_n) sorozat alulról kor-

látos (a sorozat elemeiből álló számhalmaz alulról korlátos (1.5.8. és 2.7.).

3.8. Tétel. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ esetében a (b_n) sorozat felülről kor-
látos.

3.9. Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ és a (b_n) sorozat alulról korlátos,
akkor az $(a_n + b_n)$ sorozat plusz végtelenhez tart. (A (b_n) sorozattól
sem konvergenciát, sem $+\infty$ -hez való tartást nem kívántunk itt!)

3.10. Tétel. Ha 3.9. feltételei mellett még pozitív alsó korlátja is
van a (b_n) sorozatnak, akkor az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat plusz végtelenhez tart.

3.11. Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\infty$. Ebből
következik, hogy

3.12. Tétel. A plusz végtelenhez tartó sorozatokra kimondott állítá-
sok megfelelői minusz végtelenhez tartó sorozatokra is igazak.

3.13. Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$. (A felté-
tel értelmében véges sok tagtól eltekintve az (a_n) sorozat elemei akár-
milyen nagy P számnál nagyobbak, tehát nem lehetnek 0-val egyenlők,
véges sok tagtól eltekintve tehát biztosan képezhető az $(\frac{1}{a_n})$ sorozat.)
Megfordítva

3.14. Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, és $b_n > 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = +\infty$.

3.15. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy bármely (a_n) sorozatra a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ (A
véges), $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ tulajdonságok közül legfeljebb
egy állhat fenn.

2. Legyen $p_k(n) = a_0 + a_1 n + \dots + a_k n^k$, $(a_i \in \mathbb{R}, (i = 1, 2, \dots, k)$
 $a_k \neq 0)$.

Ekkor igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k(n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{ha } a_k < 0. \end{cases}$$

3. Legyen

$$p_k(n) = a_0 + a_1 n + \dots + a_k n^k, \quad (a_k \neq 0),$$

$$q_j(n) = b_0 + b_1 n + \dots + b_j n^j, \quad (b_j \neq 0), \quad (\text{az együtthatók mindkét}$$

esetben valósak). Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_k(n)}{q_j(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k}{b_j n^j} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j > k, \\ +\infty, & \text{ha } j < k \text{ és } \frac{a_k}{b_j} > 0, \\ -\infty, & \text{ha } j < k \text{ és } \frac{a_k}{b_j} < 0, \\ \frac{a_k}{b_j}, & \text{ha } j = k. \end{cases}$$

4. Igazoljuk, a 3.5.-3.11. és 3.13.-3.14. állításokat.

4. Monoton sorozatok

4.1. A konvergens számsorozatoknak mind az elmélet, mind a gyakorlat szempontjából különleges fontossága van. Nem szükséges mindig a konvergens sorozat határértékét ismernünk, megelégszünk azzal, hogy a konvergencia tényét felismerve, a határértéket a sorozat elég távoli elemével megközelítjük. Nyenkor persze elengedhetetlen a közelítés hibájának megbecslése. Keresünk tehát olyan feltételeket, amelyek csupán a konvergencia tényének megállapításához elégségesek és viszonylag könnyen kezelhetők. A korlátosság ténye ilyen feltétel volna, de - mint 2.8.-ban láttuk - ez általában csak szükséges, de nem elégséges feltétel arra nézve, hogy a sorozat konvergens legyen. Mint már korábban utaltunk arra, speciális sorozatok esetében a korlátosság ténye elégséges feltétele is a konvergenciának. Ilyen sorozatok pl. az un. monoton sorozatok, ezek vizsgálatával fogunk az alábbiakban foglalkozni. E sorozatokat így definiáljuk:

4.2. Definíció. Az (a_n) sorozat monoton növekvő, ha

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \dots$$

ill. a (b_n) sorozat monoton fogyó, (csökkenő), ha

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_{n-1} \geq b_n \geq \dots$$

Ha a 4.2. definícióban az egyenlőségi jeleket kizárjuk, az (a_n) (ill. (b_n)) sorozatot szigorúan monoton növekedőnek (fogyónak) nevezzük.

4.3. Azt a tényt, hogy az (a_n) sorozat monoton növekedőleg tart A-hoz, ill. a (b_n) sorozat monoton fogyólag tart B-hez, így is jelölhetjük:

$$a_n \nearrow A, \text{ ill. } b_n \searrow B \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Monoton sorozatokra igaz mármost a következő állítás:

4.4. Tétel. Monoton növekedő (fogyó) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha felülről (alulról) korlátos, és konvergencia esetén határértéke megegyezik a sorozat elemeiből alkotott halmaz felső (alsó) határával.

Bizonyítás. Ha (a_n) monoton növekvő, alulról nyilván korlátos (egy alsó korlát a_1 , így ha a feltétel értelmében felülről is korlátos, nyilván korlátos. Hasonlóképpen okoskodhatunk monoton fogyó sorozat esetén. 2.8. értelmében tudjuk, hogy ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos is, tehát a 4.4. állítás feltétele a konvergenciának szükséges feltétele.

A feltétel elégségességét csak monoton növekedő (a_n) sorozatra bizonyítjuk (monoton fogyó sorozat esetén a bizonyítás hasonlóképpen történik).

Tegyük fel tehát, hogy (a_n) monoton növekedő és felülről korlátos, jelöljük továbbá a sorozat elemeiből álló halmaz l. 5. 12. értelmében létező felső határát A -val.

Bizonyítjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = A.$$

Mivel A felső határ, $a_n \leq A$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re, de tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra $A - \varepsilon$ már nem felső korlát (A a legkisebb felső korlát, a felső határ), így tehát van olyan n_0 index, melyre

$$a_{n_0} > A - \varepsilon,$$

és a sorozat monoton növekedő volta miatt minden $n > n_0$ -ra is

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

|(A-val együtt $A + \varepsilon$ is felső korlátja a sorozatnak), vagyis

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha } n \geq n_0,$$

amivel be is bizonyítottuk, hogy $a_n \rightarrow A$.*

Az előző pontban tárgyaltakból közvetlenül adódik monoton, nem korlátos sorozatokra a következő állítás:

4.5. Tétel. Monoton növekedő (fogyó) felülről (alulról) nem korlátos sorozat plusz (minusz) végtelenhez tart.

4.6. A 4.4. tétel alkalmazásaként példaként végezzük el az 1.3.-ban rekurzív formulával megadott

$$i_1 = \sqrt{2}, \quad i_{n+1} = \sqrt{2 + i_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergenciájának vizsgálatát (ez mindeddig nyitott kérdés maradt). Tudva, hogy a sorozat konvergens, határértékét is meg tudjuk majd határozni.

Okoskodásunk első lépéseként - teljes indukcióval - bizonyítjuk, hogy a sorozat monoton növekedő. Második lépésként, ugyancsak teljes indukcióval, a korlátosságot, és ezzel a sorozat konvergenciáját (4.4.) igazoljuk.

$$i_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = i_2, \quad \text{és ha } i_{n-1} < i_n, \quad \text{akkor}$$

$$i_{n+1} = \sqrt{2 + i_n} > \sqrt{2 + i_{n-1}} = i_n,$$

vagyis a sorozat monoton növekedő. Bizonyítsuk, hogy pl. 3 felső korlátja a sorozatnak:

$$i_1 = \sqrt{2} < 3, \quad \text{és ha } i_n < 3, \quad \text{akkor}$$

$$i_{n+1} = \sqrt{2 + i_n} < \sqrt{2 + 3} < \sqrt{2 + 7} = 3.$$

A bizonyítottakból következik, hogy az (i_n) sorozat konvergens. Jelöljük határértékét A -val. Az

$$i_{n+1} = \sqrt{2 + i_n}$$

rekurzív formulából $n \rightarrow \infty$ esetén az A határértékre vonatkozó alábbi egyenlet adódik:

$$A = \sqrt{2 + A}.$$

Megoldva az egyenletet

$$A^2 = 2 + A, \quad A^2 - A - 2 = 0, \quad A_{1,2} = \begin{cases} 2, \\ -1 \end{cases}$$

adódik. Mivel a sorozat elemei pozitívak, -1 nem lehet határérték, vagyis az (i_n) sorozat határértéke 2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = 2.$$

4.7. Lényegében hasonló okoskodással is vizsgálható a következő példa: legyen

$$a_n = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (x \text{ rögzített}).$$

Az (a_n) sorozat rekurzív formulával is megadható:

$$a_1 = x, \quad a_{n+1} = x a_n.$$

Ha feltesszük, hogy van a sorozatnak határértéke, az csak az

$$A = x \cdot A$$

egyenlet megoldása, vagyis $x \neq 1$ esetén $A = 0$ lehet. $x = 1$ esetén speciálisan az $1, 1, \dots, 1, \dots$ (ill. $a_n = 1, n \in \mathbb{N}$) 1 -hez konvergáló sorozat adódik. $x \neq 1$ esetén tehát ha konvergens a sorozat, akkor csak 0 -hoz tarthat. Ez a helyzet $|x| < 1$ esetén, amikor is $0 < x < 1$ esetén monoton fogyó és alulról korlátos (egy alsó korlát pl. -1) a sorozat. $-1 < x < 0$ esetén $|a_n| = |x|^n$, úgyhogy ekkor is $a_n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

$1 < x$ esetén a sorozat monoton növekedő, de felülről nem korlátos, tehát plusz végtelenhez tart, $x < -1$ értékekre pedig a sorozat nem konvergens, de még speciálisan plusz vagy minusz végtelenhez sem tart. Összefoglalva eredményeinket, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| < 1, \\ 1, & \text{ha } x = 1, \\ +\infty, & \text{ha } x > 1, \\ \text{divergens,} & \text{ha } x \leq -1. \end{cases}$$

Az eddig tárgyaltakra támaszkodva a végtelen tizedes törteket így értelmezhetjük:

4.8. Definíció. Legyen $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n} = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

pozitív véges tizedes törtek monoton növekedő és felülről korlátos, tehát konvergens sorozatot alkotnak (egy felső korlát pl. $a_0 + 1$, hiszen tetsző-

leges nagy n -re $\frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} < \frac{9}{10} (1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}}) =$

$$= \frac{9}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} < 1). \text{ A sorozat határértékét így jelöljük:}$$

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

és végtelen tizedestörtnek nevezzük.

$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ szakaszos végtelen tizedes tört, ha van olyan $p \in \mathbb{N}$, hogy egy $i \in \mathbb{N}$ -től kezdve $a_i = a_{i+p}$. Pl. $0,333\dots = \frac{1}{3}$,
 $8,1252525 = 8,1 + \frac{5}{198}$

Negatív véges tizedestörtek monoton fogyó, alulról korlátos sorozatának határértékeként értelmezhetők hasonlóképpen a negatív végtelen tizedestörtek:

$$-a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_0, a_1 \dots a_n)$$

Megfordítva, minden x számhoz létezik egy olyan végtelen tizedes tört, amelynek értéke x . Okoskodásunkat $x \geq 0$ esetre végezzük. Tegyük fel, hogy x az a_0 és $a_0 + 1$ egész számok közé esik:

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

Osszuk fel az $[a_0, a_0 + 1)$ intervallumot 10 egyenlő részre. Essék x a_0, a_1 és $a_0, a_1 + \frac{1}{10}$ közé:

$$a_0, a_1 \leq x < a_0, a_1 + 0,1.$$

Az eljárást tovább folytatva a következő egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} a_0, a_1 a_2 \leq x < a_0, a_1 a_2 + 0,01, \\ \vdots \\ a_0, a_1 a_2 \dots a_n \leq x < a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n} \\ \vdots \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségek bal oldalán álló véges tizedes törtek sorozata nyilván az x határértékhez tart, hiszen a sorozat elég távoli elemeinek x -től való eltérése tetszőlegesen kicsinnyé tehető:

$$\left| a_0, a_1 a_2 \dots a_n - x \right| < \frac{1}{10^n} < \varepsilon, \quad \text{ha } n > \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Az egyenlőtlenségek bal oldalán álló véges tizedes törteket az x végtelen tizedestört közelítő törtjeinek nevezzük.

$x < 0$ esetén értelemszerűen hasonlóképpen okoskodhatunk.

Előfordulhat az is (mint pl. $x = \frac{1}{4} = 0,25$ esetében), hogy valamilyen indextől kezdve $a_n = 0$. Ilyenkor is beszélhetünk (formálisan) végtelen tizedestörtről (példánkban pl. $0,2500\dots0\dots$).

4.9. Az előző okoskodásban megadtuk, hogyan rendelünk egy végtelen tizedestörthöz valós számot, és megfordítva, hogyan rendelhetünk egy valós számhoz végtelen tizedestörtet. E hozzárendelések egyike sem egy-egyértelmű leképezés a végtelen tizedestörtek és nemnegatív valós számok halmaza között.

Az első hozzárendeléssel (pozitív számoknál maradvá) az $a_0, a_1 a_2 \dots a_n 0\dots0\dots$ és $a_0, a_1 a_2 \dots a'_n 9\dots9\dots$ ($a'_n = a_n - 1$) végtelen tizedestörtekhez ugyanazt az értéket rendeltük, hiszen

$$\frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \dots + \frac{9}{10^{n+m}} = \frac{9}{10^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{m-1}}\right) =$$

$$= \frac{9}{10^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{10^m}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+m}} \rightarrow \frac{1}{10^n}, \quad \text{ha } m \rightarrow \infty.$$

A második hozzárendelésnél hasonlóképpen az

$$x = a_0, a_1 \dots a_n$$

valós számhoz az

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n 0 \dots 0 \dots \quad \text{ill. az} \quad a_0, a_1 a_2 \dots a_n' 9 \dots 9 \dots \quad (a_n' = a_n - 1)$$

végtelen tizedes törtet is rendelhetjük.

Ha x pozitív racionális szám, akkor előállítható $x = \frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q egész szám. Elvégezve p -nek q -val való osztását, szakaszos végtelen tizedes törthöz (vagy véges tizedes törthöz, amely a 4. 9. -ben elmondottak alapján mindig tekinthető szakaszos végtelen tizedes törtnek is) jutunk:

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 0,2499\dots 9\dots; \quad \frac{1}{9} = 0,11\dots 1\dots$$

Állításunk meg is fordítható, igaz tehát a következő tétel:

4. 10. Tétel. Az x szám akkor és csak akkor racionális, ha szakaszos végtelen tizedes törttel állítható elő.

A tétel bizonyítását feladatként tűzzük ki.

4. 11. 4. 8. -ban láttuk, hogy minden végtelen tizedes tört tetszőleges pontossággal megközelíthető véges tizedes törttel, vagyis utóbbiak halmaza a számegyenesen mindenütt sűrű (I. 3. 15. c), I. 3. 16.). Minden végtelen nem szakaszos tizedes tört (ami 4. 10. értelmében nem állít elő racionális számot, vagyis irracionális számot állít elő) és minden végtelen szakaszos

tizedes tört (vagyis racionális szám) előbbi eredményeink alapján tetszőleges pontossággal megközelíthető véges tizedes törttel, speciális, könnyen kezelhető racionális számmal.

4.12. Feladatok.

1. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $(n \in \mathbb{N})$ sorozat monoton növekedő és felülről korlátos (egy felső korlát pl. 3).

2. Bizonyítsuk be, hogy a $b_n = \sqrt[n]{q}$ ($q > 1$), $(n \in \mathbb{N})$ sorozat monoton fogyó és korlátos.

3. Igazoljuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4. Igazoljuk a 4.10. tétel állítását.

5. Cauchy-féle konvergenciakritérium

5.1. Fejezetünk második pontjában definiáltuk, mit jelent azt, hogy egy (a_n) sorozat konvergens. E definícióban és későbbi konvergencia-vizsgálataink során is nehezítette okoskodásunkat az a tény, hogy kiinduló lépésként ki kellett találnunk, mi a sorozat határértéke, melyik az a szám, amelytől - bizonyíthatóan - a konvergens sorozat elég távoli elemei tetszőlegesen kevéssel térnek el.

Mint mondtuk, sokszor elegendő csupán a konvergencia tényét eldönteni, a határérték pontos ismerete helyett megelégszünk annak csupán adott pontosságu megközelítésével. Elégséges feltételeket kell tehát keresnünk egy sorozat ismeretében határértékének létezésére.

Ilyen kritérium volt az előző pontban speciálisan monoton sorozatok esetére a korlátosság. Tetszőleges sorozat esetére a határérték tényleges értékét mellőző szükséges és elégséges konvergencia-kritériumot ebben a pontban adunk meg.

A kritérium előkészítésére önmagában is érdekes tételeket kell először kimondanunk.

5.2. Tétel. Minden számsorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás. Nevezzük az (a_n) sorozatban az a_i elemet csucsnak, ha utána már nincsen nála nagyobb elem a sorozatban. Két eset lehetséges: vagy végtelen sok csucs van a sorozatban, és akkor ezek (a_n) -nek monoton fogyó részsorozatát adják, vagy csak véges sok csucs van. Utóbbi esetben legyen a_{s_1} olyan elem, amely a legutolsó (legnagyobb indexű) csucs

után következik. Kell, hogy legyen a sorozatban a_{s_1} -nél nagyobb a_{s_2} elem (különben a_{s_1} csúcs volna, feltételünkkel ellentétben), ezután ismét egy a_{s_2} -nél nagyobb a_{s_3} elem, egy ennél nagyobb a_{s_4} , stb. Nyilván (a_{s_i}) az (a_n) sorozat monoton növekedő részsorozata. Ezzel állításunkat igazoltuk.*

Az 5.2. tételre támaszkodva könnyen bizonyítható az alábbi fontos, ugynevezett

5.3. Bolzano-Weierstrass-tétel. Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. 5.2.-ben láttuk, hogy minden számsorozatnak van monoton részsorozata. Ha az eredeti sorozat korlátos, akkor a monoton részsorozat is az, a monoton és korlátos részsorozat pedig konvergens (4.4.).*

Ezek után rátérhetünk a Cauchy-féle konvergenciakritérium megfogalmazására, bizonyítására.

5.4. Cauchy-féle konvergenciakritérium. Az (a_n) számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha bármely pozitív ε számhoz található olyan N index, hogy

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \text{ ha } n, m > N.$$

Másképp megfogalmazva, egy sorozat konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele, hogy tetszőleges, elég távoli elemei egymástól, bárhogyan választott hibakorlátnál kevesebbel különbözzenek.

Bizonyítás. A Cauchy-féle konvergenciakritérium az (a_n) sorozat konvergenciájának szükséges feltétele. Ha ui. $\varepsilon > 0$ -hoz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ esetén a N küszöbindexet úgy választjuk, hogy

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ha } n > N, \text{ ill. } |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ha } m > N,$$

akkor $n > N, m > N$ esetén 1.3.7. e) értelmében

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tehát a Cauchy-féle konvergenciafeltétel kielégül.

Bizonyítsuk be, hogy a feltétel elégséges is. Tegyük fel, hogy (a_n) kielégíti a Cauchy-féle konvergenciakritériumot. Lássuk be először, hogy

ekkor az (a_n) sorozat korlátos. Ebből ugyanis 5.3. értelmében következik, hogy akkor van (a_n) -nek konvergens részsorozata, és a Cauchy-kritérium alkalmazásával csak azt kell ezután még bizonyítani, hogy (a_n) elég távoli elemei e konvergens részsorozat határértékétől tetszőlegesen kevéssel térhetnek csak el, vagyis a részsorozat határértéke egyszersmind (a_n) határértéke, a sorozat tehát konvergens.

Ha mi. adott $\varepsilon > 0$ -hoz alkalmasan választott N mellett

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \text{ valahányszor } n > N, m > N,$$

akkor pl. $|a_n - a_{N+1}| < \varepsilon$, vagyis

$$a_{N+1} - \varepsilon < a_n < a_{N+1} + \varepsilon,$$

tehát az $|a_1|, \dots, |a_N|, |a_{N+1} - \varepsilon|, |a_{N+1} + \varepsilon|$ számok legnagyobbját K -val jelölve

$$|a_n| \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}\text{-re.}$$

tehát az (a_n) sorozat valóban korlátos.

Jelöljük a korlátos (a_n) -ből kiválasztható konvergens részsorozatot (a_{n_r}) -rel, ennek határértékét A -val. Megmutatjuk, hogy $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Válasszuk meg ugyanis adott $\varepsilon > 0$ -hoz az N küszöbindexet úgy, hogy $n > N, m > N$ -re

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

fennálljon, majd az n_r indexet úgy, hogy egyrészt $n_r > N$ legyen, másrészt

$$|a_{n_r} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

legyen (ez (a_{n_r}) konvergenciája miatt megtehető). Ekkor

$$\begin{aligned} |a_n - A| &= |(a_n - a_{n_r}) + (a_{n_r} - A)| \leq |a_n - a_{n_r}| + \\ &+ |a_{n_r} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

amivel a Cauchy-feltétel elégséges voltát is bebizonyítottuk.*

5.5. A Cauchy-féle konvergenciakritérium segítségével lássuk be például az alábbi sorozatok konvergenciáját (divergenciáját):

$$1. a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{konvergens,}$$

ti. kielégíti a Cauchy-feltételt; legyen $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, ekkor

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \dots + \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad \text{ha } n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

$$2. b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

divergens, mert pl. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ esetén

$$b_{2N} - b_N = \left| \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} \right| > N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

a Cauchy-feltétel tehát nem teljesül.

5.6. Megjegyzés. Három további fogalom bevezetésével egészíthetjük még ki a sorozatokról itt elmondottakat.

1^o. Definíció. A az (a_n) sorozat sűrűsödési értéke (torlódási értéke), ha minden $K(A, \varepsilon)$ -ban végtelen sok eleme van (a_n) -nek. Ez másképp kifejezve azt jelenti, hogy van (a_n) -nek olyan (a_{n_r}) részsorozata, amelyre

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a_{n_r} = A.$$

Ha (a_n) konvergens sorozat, akkor nyilvánvalóan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ sűrűsödési érték. Másrészt a divergens $0, 1, 0, 1, \dots$ sorozatnak pl. 0 is, 1 is sűrűsödési értéke. Monoton, nem korlátos sorozatok esetében $+\infty$, ill. $-\infty$ szimbólumok tekinthetők a sorozat sűrűsödési értékeinek. Jelöljük S -sel adott (a_n) sorozat sűrűsödési értékeinek halmazát.

2^o. Definíció. $\sup S$ -t az (a_n) sorozat limes superiorjának ($\limsup a_n$, ill. $\overline{\lim} a_n$) nevezzük.

3^o. Definíció. $\inf S$ -t az (a_n) sorozat limes inferiorjának $(\liminf a_n, \text{ ill. } \underline{\lim} a_n)$ nevezzük.

$$(\sup S = +\infty, \text{ ha } +\infty \in S, \sup S = -\infty, \text{ ha } S = \{-\infty\})$$

$$\inf S = -\infty, \text{ ha } -\infty \in S, \inf S = +\infty, \text{ ha } S = \{+\infty\}.$$

E fogalmak lehetővé teszik a sorozatok elméletének elmélyültebb tárgyalását.

5.7. A sorozatok konvergenciájáról, divergenciájáról (plüss végtelenhez, ill. mínusz végtelenhez tartásáról), szükséges és elégséges, ill. csak szükséges feltételekről a következő összefoglalás és áttekintés adható meg:

	def. $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N(\varepsilon)$: ill. $\forall P$ -hez $N(P)$:	$\Longleftrightarrow$	$\implies$
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$	$ a_n - A < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon)$	$ a_n - a_m < \varepsilon, \quad n, m > N(\varepsilon)$ $ a_n - A > \varepsilon$, véges sok n -re	(a_n) korlátos
$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$	$b_n > P, \quad n > N(P)$	$P: b_n < P$ véges sok n -re	(b_n) alulról korl.
$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$	$c_n < P, \quad n > N(P)$	$\forall P: c_n > P$ véges sok n -re	(c_n) felülről korl.

III. VALÓS EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

1. A valós egyváltozós függvény fogalma, általános tulajdonságai

1.1. Foglalkoztunk már általánosságban a függvény fogalmával, definiáltuk a függvény értelmezési tartományát, értékkészletét, helyettesítési értékét (1.2.9.). A most következőkben speciálisan olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete egyaránt a valós számok halmazának egy-egy részhalmaza. Ismételjük el erre a speciális esetre az I. fejezetben általánosságban megadott definíciókat.

1.2. Definíció. Legyen $T \subset \mathbb{R}$. f a T -n értelmezett valós egyváltozós függvény (pontosabban valós egyváltozós valós értékű függvény), ha minden $x \in T$ számhoz egy és csak egy valós számot rendel.

Az f függvény által x -hez rendelt értéket $f(x)$ -szel jelöljük, és az x -hez tartozó függvényértéknek, vagy helyettesítési értéknek nevezzük. T az f függvény értelmezési tartománya, az $x \in T$ számokhoz tartozó $y = f(x)$ értékek összességét f -nek T -hez tartozó értékkészletének nevezzük és $f(T)$ -vel jelöljük. Tehát

$$f : T \rightarrow f(T) ,$$

$$f(T) = \{ y : \exists x \in T \quad (y = f(x)) \} .$$

A valós egyváltozós függvény tehát valós számok halmazát képezi le, transzformálja, viszi át valós számok halmazára.

A továbbiakban valós egyváltozós valós értékű függvény helyett röviden csak függvényről beszélünk.

A függvény, ill. a függvény helyettesítési értékének jelölésére természetesen használhatjuk az I. fejezetben bevezetett többi jelölést is: $y = f(x)$,

$$\begin{matrix} f \\ x \mapsto y, \quad x \mapsto y. \end{matrix}$$

Az f függvény T értelmezési tartományának elemeit független változó értékeknek, az $f(T)$ értékkészlet elemeit pedig függő változó értékeknek (függvényértékeknek) is nevezzük.

1.3. Megjegyzés. Ha nem adunk meg külön egy olyan T halmazt, amelynek - pl. az f függvény által létesített - leképezését vizsgáljuk, akkor bármely módon megadott f függvény esetében értelmezési tartománynak mindig azt a maximális értelmezési tartományt nevezzük, amelyen f az adott utasítással értelmezhető, és ezt jelöljük D_f -fel.

1.4. A számsorozatokhoz hasonlóan többféle típusu utasítással adhatunk meg egy függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 1, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \end{cases}$$

$p(x)$ = a legnagyobb egész szám amely $\leq x$.

képlettel (speciális, egyszerű utasítással) adtuk meg pl. az alábbi függvényeket:

$$f_1(x) = x^2, \quad g_1(x) = \frac{1}{x}, \quad h_1(x) = \sqrt{x}.$$

Táblázattal, grafikonnal főképp mérési eredményeknél szoktuk a függő és független változó összetartozó értékeit megadni. Gyakrabban használt - egyébként képlettel, vagy más utasítással is megadható - függvényeknek táblázattal történő megadása (függvénytáblázatok) a gyakorlati szakember számára igen fontos. A táblázattal történő megadás előnye könnyű, gyors kezelhetősége, hátránya, hogy általában nem tartalmazza egy táblázat sem a számoláshoz szükséges összes független változó értéket és a hozzá tartozó függvényértéket, emiatt pontossága korlátozott.

A gyakrabban szereplő függvényekre alkalmas, általánosan elterjedt jelölést használunk. Pl. a fent utasítással megadott függvények esetében

$f(x) = \operatorname{sgn} x$ ill. $\operatorname{sg} x$ (olv. szignum x , vagyis x előjele),

$g(x) = |x|$ (olv. x abszolút értéke, I. 3. 7. -ben már szerepelt),

$h(x)$ -et Dirichlet-függvénynek nevezik, erre itt nem vezetünk be jelölést,

$p(x) = [x]$ (entier x , olv. antyié x , jelentése: x egész része).

1.5. Egy f függvényt általában síkbeli Descartes-féle (derékszögű) koordináta-rendszerben szemléltetünk a következő módon: Tekintsük a koordinátatengelyek által kifeszített síkban (az un. koordinátasíkban) azokat a $P(x, y)$ pontokat, amelyekre $x \in D_f$ (D_f -vel jelöljük ismét az f függ-

vény értelmezési tartományát), és $y=f(x)$. Ezeknek a pontoknak az összességét, vagyis az

$$\{(x, y) : y = f(x), \quad x \in D_f\}$$

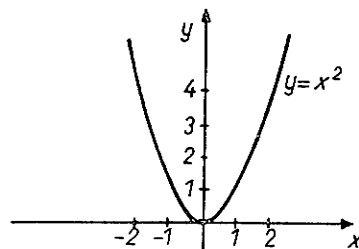
ponthalmazt az f függvény görbéjének (képének, grafikonjának, néha gráfjának) nevezzük. Az f függvény görbéjének egyenlete (vagyis az az összefüggés, ami a függvénygörbe pontjait egyértelműen jellemzi) ugyanakkor $y = f(x)$.

Az 1.4.-ben megadott f_1, g_1, h_1, f, g, p függvények görbéit a 23.-28. ábrákon rajzoltuk meg, h -t nem tudjuk szemléltetni.

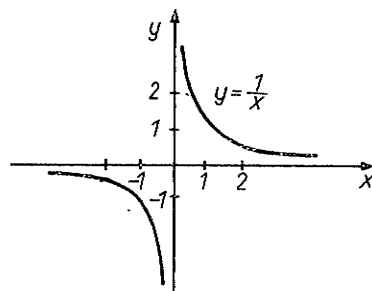
1.6. Megjegyzés. Az irodalomban a görbe fogalmának más értelmezésével is találkozhatunk. Eszerint a görbe speciális leképezés. Erre a kérdésre később még visszatérünk.

1.7. A képlettel megadható függvényeket megadhatjuk explicit és implicit alakban. Explicit alakban történő megadáskor az x független változó és y függő változó közötti kapcsolat az y -ra megoldott egyenlettel van megadva. Pl. $y = \frac{1}{x}$. Implicit alaku megadásnál a két változó, y és x között egy egyenletet adunk meg, amely azonban nincs y -ra megoldva, és egy adott x -hez egyértelműen azt az y -t rendeljük hozzá, amely x -szel együtt az egyenletet kielégíti, pl. $y = x - y^3$. Az utóbbi megadással kapcsolatban több bonyolult probléma léphet fel, melyekkel a későbbiekben is csak részben tudunk foglalkozni. (Lásd "Valós többváltozós függvények differenciálszámítása" jegyzet.)

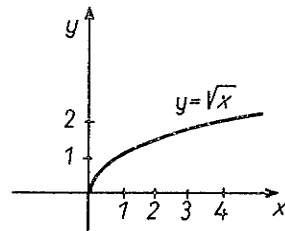
1.8. Gyakran következtetünk egyszerű függvények viselkedéséből a segítségükkel értelmezett bonyolultabb függvények



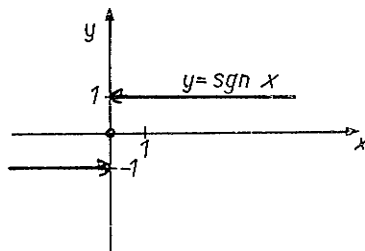
23. ábra



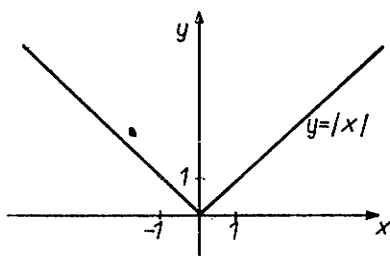
24. ábra



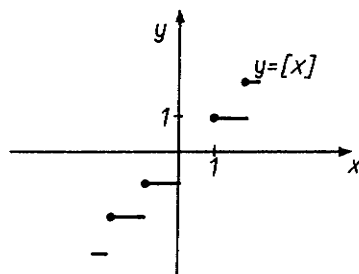
25. ábra



26. ábra



27. ábra



28. ábra

viselkedésére, ill. gyakran vezetjük vissza bonyolultabb függvények vizsgálatát olyan egyszerűbb függvények vizsgálatára, amelyekből azok felépíthetők. Ezért célszerű megadnunk az alábbi definíciókat:

1.9. Definíció. $f \equiv g$, ha értelmezési tartományuk megegyezik ($D_f = D_g$) és minden $x \in D_f$ -re

$$f(x) = g(x) .$$

Szokás ilyenkor azt is mondani, hogy D_f -en f azonosan egyenlő g -vel. Pl. az $|x| < 1$ esetében értelmezett

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + \dots + x^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

és az $x \neq 1$ -re, tehát $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ -ben értelmezett

$$g(x) = \frac{1}{1 - x}$$

függvény nem egyenlő (nem azonos) egymással. Ha azonban csak $T = \{x : |x| < 1\}$ -ben vizsgáljuk őket, ott egyenlők (azonosak).

1.10. Definíció. Ha f és g értelmezési tartománya megegyezik ($D_f = D_g$), akkor az $f + g$ összegfüggvény az a D_f -en értelmezett függvény, amelyre

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) .$$

Hasonlóképpen értelmezhető a cf , $f \cdot g$ és $g(x) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ c -szeres ($c \in \mathbb{R}$), szorzat, ill. hányados-függvény. Általánosabban,

$D_f \neq D_g$ esetén $D_f \cap D_g$ tekinthető $f+g$, fg , ill. $\{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}$ esetén $\frac{f}{g}$ értelmezési tartományának.

1.11. Definíció. Legyen g D -n, f pedig $g(D)$ -n értelmezett függvény. Ekkor az $f \circ g$ közvetett (összetett) függvény értelmezése:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in D.$$

Másképp kifejezve, g D -t $g(D)$ -re, f $g(D)$ -t $f(g(D))$ -re, $f \circ g$ pedig D -t $f(g(D))$ -re képezi le.

Pl. az $f(t) = \sin t$ és $g(x) = 2x - 1$ függvények közvetett függvénye

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(2x - 1),$$

míg a fenti függvények $g \circ f$ közvetett függvénye

$$(g \circ f)(t) = g(f(t)) = 2 \sin t - 1, \quad \text{ill. a független változót } x\text{-szel}$$

jelölve

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \sin x - 1.$$

Elképzelhető, hogy az $f \circ g$ közvetett függvény "belső függvényének", értelmezési tartománya D -nél bővebb halmaz, $D \subset D_g$ a D -re való "le-szűkítés" azért történt, hogy $g(D)$ f értelmezési tartományába essen. Pl. legyen

$$f(t) = \frac{1}{|t|}, \quad g = 3x - 1.$$

$f \circ g$ értelmezési tartománya $D_{f \circ g} = (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$, holott g értelmezési tartománya $\mathbb{R}$ volt.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{|3x - 1|}.$$

Mint példáinknál is láthattuk, általában

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Közvetett függvények szemléltetésénél sokszor jól használható az előtanulmányokból ismert függvénytranszformáció. Ezzel itt részletesebben nem kívánunk foglalkozni.

1.12. Megismerkedtünk I. 2.13. -ban az inverz függvény fogalmával. Ismételjük meg most speciálisan valós egyváltozós valós értékű függvényre (röviden függvényre) ezt a definíciót.

1.13. Definíció. Legyen f értelmezési tartománya D_f , $f(D_f) = B$, $(D_f, B \subset \mathbb{R})$, és tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in D_f$,
 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Ekkor azt a hozzárendelést, amely minden $y \in B$ elemhez azt az $x \in D_f$ elemet rendeli, amelyre $y = f(x)$, az f függvény inverz függvényének nevezzük és általában f^{-1} -gyel jelöljük.

Az 1.13. -ban megadott feltételek azt fejezik ki, hogy az f függvény kölcsönösen egyértelmű módon képezi le a D_f halmazt a B halmazra; ekkor beszélhetünk az inverz leképezésről, az utóbbit létesítő függvényt jelöltük f^{-1} -gyel.

Pl.

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

értelmezési tartománya $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. $b = \frac{1}{a-2}$ akkor és csak akkor, ha $a = \frac{1}{b} + 2$, tehát az inverz függvény $\varphi = f^{-1}$
 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ -ben van értelmezve és képlettel így adhatjuk meg:

$$\varphi(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 2.$$

Ha az f függvény D_f -en nem elégíti ki 1.13. feltételeit, akkor, amennyiben megadható olyan $T \subset D_f$, hogy ezen az 1.13. -ben foglaltak fennállnak, T -n beszélhetünk a függvény inverzéről.

Pl. $f(x) = x^2$ esetében $T = \{x : x \geq 0\}$ -n $f_1(x) = f(x) = x^2$ -nek van inverze, $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$; ugyanakkor $T' = \{x : x \leq 0\}$ -n $f_2(x) = f(x) = x^2$ -nek is van inverze, $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Az inverz függvény értelmezéséből azonnal adódnak az alábbi állítások:

1.14. Tétel. Tegyük fel, hogy a D_f -en értelmezett f függvénynek van D_f -n f^{-1} inverze és $f(D_f) = B$. Ekkor

a) $f^{-1}(B) = D_f$,

b) $\varphi = f^{-1}$ -nek $B = f(D_f)$ -hez tartozó inverze f ,

c) $(f \circ f^{-1})(b) = b$, ha $b \in B$; $(f^{-1} \circ f)(a) = a$, ha $a \in D_f$,

d) az f és f^{-1} függvények görbéi egymásnak az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképei.

Utolsó állításunk abból a tényből következik, hogy 1.5. értelmében az f függvény görbéje az

$$\{(x, y) : y = f(x), \quad x \in D_f\}$$

halmaz, míg f^{-1} görbéje az

$$\begin{aligned} & \{(y, x) : x = f^{-1}(y), \quad y \in f(D_f) = B\} = \\ & = \{(y, x) : y = f(x), \quad x \in D_f\} \end{aligned}$$

ponthalmaz, az (x, y) és (y, x) pontok pedig egymásnak az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképei.*

1.15. A 23.-28. ábrákon megrajzoltuk néhány függvény görbáját. Az ábrákról a függvények néhány tulajdonsága olvasható le, tulajdonságok, amelyeket először pontosan definiálnunk kell, (ez történik meg az alábbiakban), majd olyan feltételeket kell keresnünk, amelyek adott függvény esetében alkalmasak annak megvizsgálására, hogy a függvény rendelkezik-e ezen tulajdonságok valamelyikével. Ilyen feltételekről a IV. fejezetben lesz szó.

1.16. Definíció. Az f függvény páros, ha minden $x \in D_f$ -re $(-x) \in D_f$ és

$$f(x) = f(-x).$$

A definícióból következik, hogy páros függvény görbéje a függő változó tengelyére szimmetrikus. Páros függvény pl. $y = |x|$, $y = x^2$, általában $y = x^n$, ha $n = \pm 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

1.17. Definíció. Az f függvény páratlan, ha minden $x \in D_f$ -re $(-x) \in D_f$ és

$$f(x) = -f(-x).$$

A definícióból következik, hogy páratlan függvény görbéje a koordináta-rendszer kezdőpontjára szimmetrikus. Páratlan függvény pl.

$y = \frac{1}{x}$, általában $y = x^n$, ha $x = \pm(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$.

1.18. Megjegyzés. A legtöbb függvény se nem páros, se nem páratlan. Pl. $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$ se nem páros, se nem páratlan.

1.19. Definíció. Az f függvény periodikus, ha van olyan $p \neq 0$, hogy minden $x \in D_f$ -re $(x \pm kp) \in D_f$ ($k \in \mathbb{N}$) és

$$f(x \pm kp) = f(x).$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a függvény p szerint periodikus. A gyakorlatban általában perióduson azt a legkisebb pozitív számot értjük (ha ilyen van), amely az előbbi értelemben periódus. Pl. az $f(x) = x - [x]$ függvény minden egész szám szerint periodikus, ennél a függvéynél mondhatjuk, hogy a periódus $p = 1$. A Dirichlet-függvéynél (1.4. $h(x)$) periódus minden racionális szám, ezek között azonban nincs legkisebb pozitív szám, ezért kellett általánosabban megfogalmaznunk a periodikusság értelmezését.

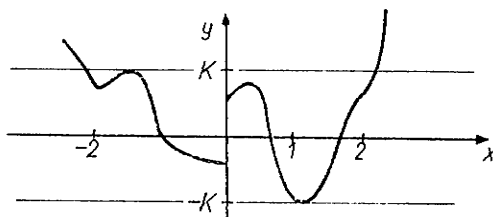
1.20. Definíció. Az f függvény $T \subset D_f$ -ben korlátos (alulról, ill. felülről korlátos), ha az

$$\{y : y = f(x), x \in T\}$$

halmaz korlátos (alulról, ill. felülről korlátos).

Korlátos pl. $y = \operatorname{sgn} x$, a Dirichlet-függvény, alulról korlátos $y = x^2$, $y = |x|$, nem korlátos $y = [x]$.

1.21. Megjegyzés. Ha az f függvény D_f -ben korlátos és korlátja K , akkor a függvény görbéje az $y = -K$ és az $y = K$ egyenesek közötti sávban helyezkedik el. A 29. ábrán egy $(-2, 2)$ -ben korlátos függvény grafikonját rajzoltuk meg.



29. ábra

1.22. Definíció. Az f függvény monoton növekvő (fogyó, csökkenő) az I intervallumban ($I \subset D_f$), ha

$$x_1 \in I, x_2 \in I \text{ és } x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$(x_1 \in I, x_2 \in I \text{ és } x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Ha a fenti képletben $f(x_1) < f(x_2)$ (ill. $f(x_1) > f(x_2)$) áll, akkor az f függvényt I -ben szigorúan monoton növekedőnek (fogyónak) mondjuk.

Pl. $f(x) = \sqrt{x}$ egész értelmezési tartományában szigorúan monoton növekedő, $f(x) = [x]$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ monoton növekedő, $f(x) = \frac{1}{x}$ szigorúan monoton fogyó $x < 0$ ill. $x > 0$ esetében, $y = x^2$, $y = |x|$ szigorúan monoton fogyó, ha $x < 0$, szigorúan monoton növekedő, ha $x \geq 0$, a Dirichlet függvény egyetlen intervallumban sem monoton (növekedő vagy fogyó).

A függvénygörbék alaki viszonyaival kapcsolatban a következő fogalmakat vezethetjük be:

1.23. Definíció. Az f függvény görbéjének $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ pontjait összekötő egyenes-szakaszt a függvénygörbe hurjának nevezzük. A hur egyenesének egyenlete

$$a = h_{x_1 x_2}(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

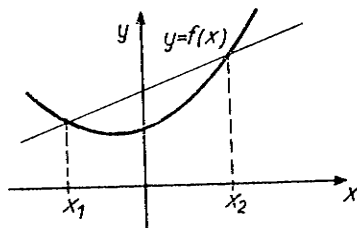
1.24. Definíció. Az f függvény alulról nézve konvex (konkáv) az I intervallumban, ha minden $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ és $x \in (x_1, x_2)$ esetén

$$f(x) \leq h_{x_1 x_2}(x)$$

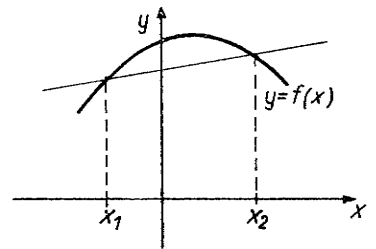
$$(f(x) \geq h_{x_1 x_2}(x)).$$

Szemléletesen kifejezve magunkat, alulról konvex függvény görbéje megfelelő hurja alatt (konkavitás esetén felett) helyezkedik el: 30., 31. ábra. (Konvex (konkáv) helyett domború (homorú) is mondhatunk.)

1.25. Megjegyzés. Szokás még - a monotonitáshoz hasonlóan - az I -ben szigorúan konvex ill. konkáv függvény fogalmát is definiálni, ettől azonban mi itt eltekintünk.



30. ábra



31. ábra

A továbbiakban ha röviden konvex (konkáv) f -ről beszélünk, ezen mindig az adott I intervallumban alulról konvex (konkáv) függvényt kell értenünk.

1.26. Megjegyzés. Egyszerű függvények esetében közvetlenül a definícióból kiindulva is bizonyíthatjuk a függvény adott intervallumbeli konvexitását, konkavitasát, monotonitását. Ennél azonban könnyebben kezelhető módszert adunk ilyen jellegű vizsgálatokra - mint már említettük - a IV. fejezetben.

A monoton függvények értelmezéséből közvetlenül adódik az alábbi állítás igaz volta:

1.27. Tétel. Ha a g függvény valamilyen $(a, b) = I$ intervallumban, f pedig $g(I)$ -ben monoton, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is monoton (a, b) -ben, és pedig monoton növekvő, ha f és g ugyanazon értelemben monotonak (mindkettő mon. növ., vagy mindkettő mon. fogyó), és monoton fogyó, ha f és g ellenkező értelemben monoton. Ennek igazolását feladatként tűzzük ki.

1.28. Feladatok.

1. Mi mondható az $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ függvények párosaságáról ill. páratlanságáról, (monotonitásáról), ha

- a) f is, g is páros ill. páratlan (mon. növ., ill. mon. fogyó)
- b) f páros, g páratlan (f mon. növ., g mon. fogyó).

2. Függvény határértéke

2.1. A számsorozatoknak - tehát speciális függvényeknek - értelmeztük már határértékét a II. fejezetben. Mielőtt általánosabban foglalkoznánk a függvény határértékének értelmezésével, célszerű néhány példával rávilágítanunk a határérték értelmezésének célszerű módjára és annak szükségességére.

2.2. Ha egy test egyenletes mozgást végez és t idő alatt s utat tesz meg, akkor sebessége $v = \frac{s}{t}$. Ha a test mozgása nem egyenletes, akkor $s(t)$ ill. $s(t_0)$ -al jelölve a t ill. t_0 pillanatig megtett ut mérőszámát, a $t - t_0$ időtartam alatti átlagsebessége

$$(*) \quad \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} .$$

(Ez az átlagsebesség annak az egyenletes mozgást végző testnek a sebessége, amely $t - t_0$ idő alatt $s(t) - s(t_0)$ utat tesz meg.) t -vel t_0 -hoz közelítve (vagyis a $t - t_0$ időtartamot rövidítve)(*) viselkedése jellemzője lesz a test t_0 pillanatbeli mozgásának. Ha pl. $s(t) = t^2$, $t_0 = 3$, akkor

$$\frac{t^2 - 9}{t - 3} = t + 3 \quad (t \neq 3) ,$$

vagyis a $t_0 = 3$ pillanathoz közeli t pillanatokra a mozgó test átlagsebességének nagysága 6-hoz "közeli" érték, célszerű ezt a $t_0 = 3$ pillanatbeli sebesség értékének tekintenünk.

2.3. Az f függvény görbéjének c abszcisszáju pontjához tartozó érintőjét a következőképpen célszerű értelmeznünk:

Tekintsük a görbe $(x, f(x))$ és $(c, f(c))$ pontjain átmenő hurját. x értékét c -hez közelítve az adódó hurok "határhelyzeteként" adódó egyenest célszerű a görbe érintőjének tekinteni. (Azt, hogy ezen pontosabban mit kell értenünk, és hogy mikor van ilyen "határhelyzetű" egyenes, később részletezzük.)

Például az $y = \frac{1}{x}$ függvény görbéjéhez a $(c, \frac{1}{c})$ pontban illeszkedő érintő egyenletét az előbbi gondolatmenet értelmében az

$$y - f(c) = m(x - c) ,$$

ill.

$$y = m(x - c) + \frac{1}{c}$$

összefüggéssel jellemezhetjük, ahol m az $(x, \frac{1}{x})$, $(c, \frac{1}{c})$ görbeponthoz tartozó hur meredekségének "határhelyzete", ha x -szel tartunk a c -hez (eközben $x < c$ és $x > c$ is lehet) (32. ábra). Mivel e hurok meredeksége

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{c}}{x - c} = - \frac{1}{xc}$$

és az utóbbi érték, ha x már elég közel van c -hez, tetszőlegesen keveset tér el $-\frac{1}{c^2}$ -től:

$$\left| -\frac{1}{xc} - \left(-\frac{1}{c}\right) \right| = \frac{1}{|c|} \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|c|} \frac{|x-c|}{|cx|} < \frac{1}{c} \frac{2|c|}{2} |x-c| < \varepsilon$$

ha $|x-c| < \frac{|c|^3 \varepsilon}{2} = \delta$ (ekkor nyilván $|x| > \frac{|c|}{2}$, ha $\varepsilon > 0$ kicsi, amit az első becslésnél felhasználtunk), az érintő meredekségének $-\frac{1}{2c}$ vehető, s így az érintő egyenlete

$$y = -\frac{1}{2} (x-c) + \frac{1}{c}.$$

2.4. Az

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$$

függvény $x=1$ esetére nincs értelmezve. Ha azonban $x=1$ -hez tetszőlegesen közel fekvő x értékekre kiszámítjuk a függvény értékét, az mind közelebb kerül 2-höz, tetszőleges pontossággal megközelíti a 2 értéket:

$$f(3) = 10,$$

$$f(2) = 5,$$

$$f(1,1) = 1,21$$

$$f(0) = 1,$$

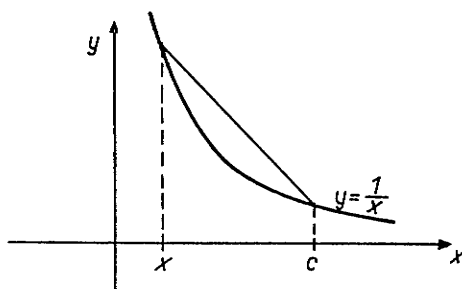
$$f(0,5) = 1,25,$$

$$f(0,9) = 1,81,$$

$$f(0,95) = 1,9025,$$

$$f(0,98) = 1,9604,$$

$$f(0,999) = 1,998001, \dots$$



32. ábra

Be lehet bizonyítani, hogy ha x -et minden határon túl közelítjük 1-hez, vagyis x beleesik 1-nek alkalmas

$$U = \dot{K}(1, \delta)$$

környezetébe, akkor f tetszőlegesen pontossággal megközelíti 2-t (beleesik 2-nek tetszőlegesen

$$V = K(2, \varepsilon)$$

környezetébe). (Lásd 2.7.)

Példáinkból kézenfekvően adódik mármint a következő definíció:

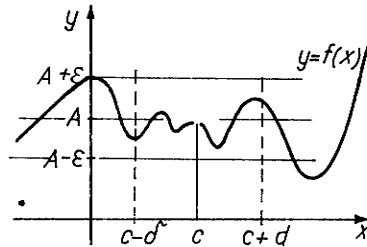
2.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a c helyen A , ha bármely pozitív ε -hoz létezik olyan pozitív δ , hogy

$$f(x) \in V = K(A, \varepsilon) \quad \text{valahányszor} \quad x \in U = \dot{K}(c, \delta),$$

ill. másképp felírva

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{valahányszor} \quad 0 < |x - c| < \delta(\varepsilon).$$

A definíció annak az állításnak precíz megfogalmazása, hogy a c helyhez elég közeli, de c -től különböző x helyeken $f(x)$ tetszőlegesen kevéssel tér el az A értéktől. A definícióban magán az $x = c$ helyen felvett függvényérték nem is szerepel, $f(x)$ -nek itt nem is kell értelmezve lennie, viszont a hely kicsiny δ -sugarú pontozott környezetében már értelmezve kell lennie a függvénynek.



33. ábra

A 2.5. definíciónak geometriai átfogalmazása kézenfekvő: ha az f függvény határértéke a c helyen A , akkor a c -hez "elég közeli" x -ekre a függvény görbéje az $y = A + \varepsilon$ és $y = A - \varepsilon$ egyenesek közötti sávban kell, hogy elhelyezkedjen (33. ábra).

2.6. Azt a tényt, hogy az f függvény határértéke a c helyen A , így jelöljük:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A, \quad \text{ill.} \quad f(x) \rightarrow A, \quad \text{ha} \quad x \rightarrow c.$$

Bevezető példáinkban tehát a következő határértékek szerepeltek:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = v(t_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{c}}{\frac{x}{x-c}} = -\frac{1}{c^2} = m,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = 2.$$

2.7. Bizonyítsuk be, hogy az előbb utolsónak felsorolt határérték valóban létezik és értéke 2.

A határérték definíciójának értelmében $x \neq 1$, függvényünk számlálóját és nevezőjét egyszerűsíthetjük $(x-1)$ -gyel:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1).$$

$(x^2 + 1)$ 2-től való eltérése így becsülhető: $x \rightarrow 1$ esetén

$$|x^2 + 1 - 2| = |x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1| < \delta |x + 1| < \delta(\delta + 2) < \varepsilon,$$

ahol ε tetszőlegesen kicsinnyé tehető δ alkalmas megválasztásával. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Adott $\varepsilon > 0$ -hoz $\delta > 0$ (függvényeltérést kifejező hibakorláthoz megengedhető független változó eltérés, pl. mérési pontatlanság) így számítható ki: előbbi példánknál legyen $\varepsilon = 10^{-2}$, vagyis

$$|x^2 + 1 - 2| < 10^{-2}, \text{ ill.}$$

$$|x^2 - 1| < 10^{-2}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$x > 1 \text{ esetén } x^2 < 1,01, \text{ azaz } 1 < x < \sqrt{1,01},$$

míg $x < 1$ esetén $1 - x^2 < 0,01$, azaz $\sqrt{0,99} < x < 1$. Mivel $\sqrt{0,99}$ és $\sqrt{1,01}$ közül az utóbbi áll közelebb 1-hez, ezért

$$\delta = \sqrt{1,01} - 1 \approx 0,00499.$$

Állíthatjuk tehát, hogy $x \in U = \dot{K}(1, \delta)$ esetén $f(x) \in V = K(2, 10^{-2})$. Más adott ε hibakorláthoz hasonlóképpen számítható ki a megfelelő δ .

2.8. A függvény határértékének most bevezetett fogalma visszavezethető számsorozatok határértékének ismert fogalmára (II. fejezet), így a határérték kiszámítására ott kapott eredményeink függvény határértékének kiszámítására is felhasználhatók lesznek. Igaz ugyanis a következő

2.9. Tétel. Az f függvény határértéke a c helyen akkor és csakis akkor A , ha van olyan $\delta > 0$, hogy $K(c, \delta) \subset D_f$, és minden c -hez konvergáló (x_n) sorozat esetében $x_n \in D_f$ a megfelelő függvényértékekből képezett $(f(x_n))$ sorozat A -hoz tart.

Bizonyítás. A tételben kimondott feltétel szükséges. Ha ugyanis adott ε -hoz megadható olyan δ , hogy

$$(*) \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{valahányszor} \quad 0 < |x - c| < \delta \quad \text{és}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c, \quad \text{akkor van olyan } N \text{ küszöbindex, hogy}$$

$$|x_n - c| < \delta \quad \text{valahányszor} \quad n > N, \quad \text{vagyis ezekre az } n\text{-ekre}$$

$$(*) \text{ értelmében } |f(x_n) - A| < \varepsilon, \quad \text{ami azt jelenti, hogy}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A,$$

vagyis az $(f(x_n))$ sorozat valóban A -hoz tart.

A tételben kimondott feltétel azonban elégséges is. Ha ui. megfordítva, $n \rightarrow \infty$ esetén $x_n \rightarrow c$ ($x_n \neq c$) mindig maga után vonja, hogy

$f(x_n) \rightarrow A$, akkor $f(x)$ határértéke az c helyen csak A lehet. Tegyük fel ennek ellenkezőjét, vagyis, hogy alkalmas pozitív ε -hoz nem lehet megfelelő δ -t találni úgy, hogy $(*)$ kielégüljön, vannak tehát olyan x_n helyek, melyekre pl.

$$0 < |x_n - c| < \frac{1}{n} \quad \text{de} \quad |f(x_n) - A| \geq \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha ez lehetséges volna, akkor ezek az x_n -ek olyan c -hez konvergáló abszcisszasorozatot alkotnának, amely abszcisszákhöz tartozó függvényértékek sorozata nem tart A -hoz, a feltétellel ellentétben. Ellentmondásra jutva tehát, a tételben kimondott állítás megfordítása is igaz, a tételben szereplő feltétel elégséges is.*

Megjegyezzük, hogy a függvény határértékére bevezetett 2.6. jelölés tulajdonképpen erre a 2.9. tételre utal.

A számsorozatok határértékére vonatkozó II. 2.13. tételből azonnal következnek az alábbi állítások:

2.10. Tétel. Ha $x \rightarrow c$ esetében $f(x) \rightarrow A$, $g(x) \rightarrow B$, akkor

$$f(x) + g(x) \rightarrow A + B, \quad f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B \quad \text{és} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}, \quad \text{ha } B \neq 0.$$

Bizonyítás. A feltétel értelmében bármely (x_n) sorozatra

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B$, az utóbbi szám-
sorozatokra pedig II. 2.13. értelmében

$$f(x_n) + g(x_n) \rightarrow A + B, \quad f(x_n) \cdot g(x_n) \rightarrow A \cdot B, \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$$

és ez a 2.9. tétel értelmében az állítást adja.*

2.11. Előfordulhat speciálisan az az eset, hogy az A határérték $V = K(A, \varepsilon)$ környezetébe csupán c -hez elég közeli, de c -nél nagyobb x -ekhez (vagy c -nél kisebb x -ekhez) tartozó függvényértékek esnek bele. Ez a helyzet pl. az $y = \operatorname{sgn} x$ függvénynél az $x = 0$ helyen. Ilyenkor speciálisan jobb oldali, ill. bal oldali határértékről beszélünk, melynek definíciója a határérték általános 2.5. alatti definíciójából értelemszerűen adódik:

2.12. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény jobb oldali határértéke (bal oldali határértéke) a c helyen A , ha bármely pozitív ε -hoz létezik olyan pozitív δ , hogy

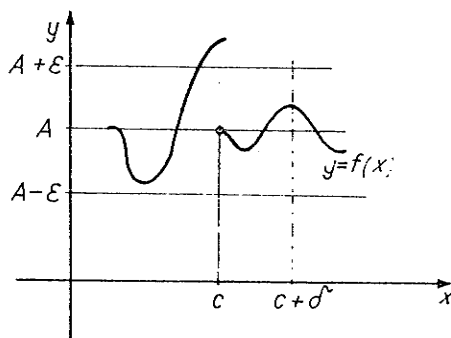
$f(x) \in V = K(A, \varepsilon)$, valahányszor $x \in U = \{x : 0 < x - c < \delta\}$ (34. ábra)

$(f(x) \in V = K(A, \varepsilon))$, valahányszor $x \in U = \{x : 0 < c - x < \delta\}$ (35. ábra)

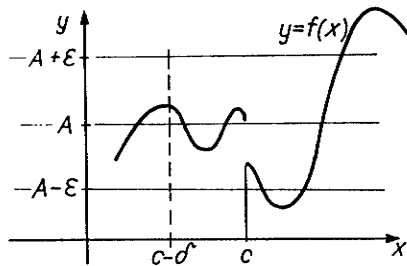
ill. másképp felírva

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{valahányszor } 0 < x - c < \delta,$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{valahányszor } 0 < c - x < \delta. \quad (\delta = \delta(\varepsilon))$$



34. ábra



35. ábra

Az c helyhez tartozó jobb oldali (ill. bal oldali) határértéket így jelöljük:

$$\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c+0),$$

$$(\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c-0)),$$

(speciálisan $0+0$ helyett $+0-0$, $0-0$ helyett $-0-0$ is írhatunk) e jelöléssel arra utalva, hogy a 2.9. tételnek

megfelelő (x_n) sorozatok jobb oldali határérték esetében c -nél nagyobb (bal oldali határérték esetében pedig kisebb) számokból kell, hogy álljanak.

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1.$$

Közvetlenül belátható mármost az alábbi állítás igaz volta:

2.13. Tétel. Az f függvénynek a c helyen akkor és csak akkor van határértéke, ha van jobb és bal oldali határértéke, és ezek megegyeznek egymással.

(A c helyen vett jobb oldali (vagy bal oldali) határérték nem kell, hogy megegyezzen a c -beli függvényértékkel, sőt, a függvénynek nem is kell értelmezve lennie c -ben.)

2.14. Előfordulhat az az eset is, hogy az A szám $V = K(A, \mathcal{E})$ környezetébe csak az elég nagy (kicsi) x értékekhez tartozó függvényértékek esnek bele, vagyis a számsorozatokról bevezetett jelöléssel $x \rightarrow +\infty$ (ill. $x \rightarrow -\infty$) esetében áll

$$f(x) \rightarrow A.$$

Az ilyen "végtelenben vett" határértéket így definiáljuk:

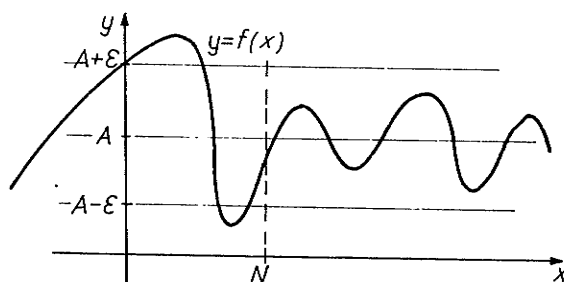
2.15. Definíció. Az f függvénynek plusz végtelenben ($+\infty$ -ben) határértéke A , ha bármely pozitív $\mathcal{E}$ -hoz létezik olyan N szám, hogy

$$|f(x) - A| < \mathcal{E}, \text{ valahányszor } x > N \text{ } (N = N(\mathcal{E})),$$

ill.

$$f(x) \in V = K(A, \varepsilon), \quad \text{valahányszor } x \in U = \{x : x > N(\varepsilon)\}$$

(az itt megadott U halmazt plusz végtelen környezetének is nevezik).
(36. ábra)



36. ábra

2.16. Definíció. Az f függvénynek minusz végtelenben határértéke A , ha bármely pozitív ε -hoz létezik olyan P szám, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{valahányszor } x < P \quad (P = P(\varepsilon)),$$

ill.

$$f(x) \in V = K(A, \varepsilon), \quad \text{valahányszor } x \in U = \{x : x < P(\varepsilon)\}$$

(az itt megadott U halmazt minusz végtelen környezetének is nevezik).
(37. ábra)

A "végtelenben vett" határértékeket a végesben vett határérték mintájára jelölhetjük:

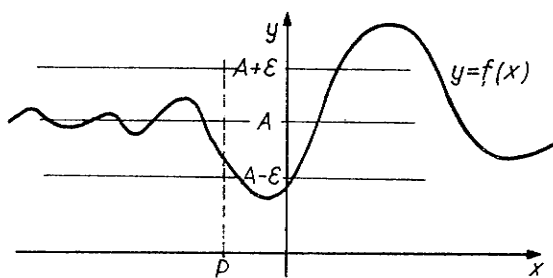
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \quad \text{ill. } f(x) \rightarrow A, \quad \text{ha } x \rightarrow +\infty,$$

illetve

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \quad \text{ill. } f(x) \rightarrow A, \quad \text{ha } x \rightarrow -\infty.$$

Pl.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 4}{5 - 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{4}{x}}{\frac{5}{x} - 4} = \frac{3 - 0}{0 - 4} = -\frac{3}{4}.$$



37. ábra

(A számításnál felhasználtuk, hogy $x \neq 0$ feltételezhető, ha $x \rightarrow +\infty$, továbbá azt a tényt, hogy 2.10. értelmében a határértéket "alkotó elemenkénti" határérték számításával nyerhetjük.)

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{3+x}{1+2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x} + 1}{\frac{1}{x} + 2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

2.17. Plusz végtelen, ill. mínusz végtelen előbb értelmezett környezeteknek fogalmát és a divergens, de plusz vagy mínusz végtelenhez tartó sorozatoknál mondottakat (II.3.2. és II.3.3.) felhasználva kézenfekvő a véges c helyen vett, c -ben speciálisan jobb oldali ill. bal oldali, vagy a "végtelenben vett" plusz végtelen, vagy mínusz végtelen határértéket az alábbi módon értelmezni:

2.18. Definíció. f -nek c -ben vett (c -ben vett jobb oldali, c -ben vett bal oldali, plusz végtelenben vett, mínusz végtelenben vett) határértéke plusz végtelen, ha tetszőleges N -re

$$f(x) \in V = \{y : y > N\} \text{ valahányszor } x \in U = \dot{K}(c, \delta(N)),$$

$$(x \in U = \{x : 0 < x - c < \delta(N)\},$$

$$x \in U = \{x : 0 < c - x < \delta(N)\},$$

$$x \in U = \{x : x > Q(N)\},$$

$$x \in U = \{x : x < M(N)\}).$$

2.19. Definíció. f -nek mínusz végtelen a határértéke c -ben (c -ben jobbról véve ($c+0$ -ban), c -ben balról véve ($c-0$ -ban), $+\infty$ -ben, $-\infty$ -ben), ha tetszőleges P -re $f(x) \in V = \{y : y < P\}$ valahányszor $x \in U$, ahol U az előbb részletesen megadott környezetek egyike, melyekben δ , Q , M ebben az esetben P -től függ.

Eddigi eredményeinket a következő definícióval foglalhatjuk össze:

2.20. Definíció. Legyen $\alpha = c, c+0, c-0, +\infty$, vagy $-\infty$,
 $\beta = A, +\infty$ vagy $-\infty$. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$, ha f értelmezve van

α -nak egy környezetében (α -t kivéve), és β minden V környezetéhez található α -nak olyan U környezete, hogy ha $x \in U$ ($x \neq \alpha$), akkor $f(x) \in V$.

A 2.20. definíció teljesülésének szükséges és elégséges feltételét - általánosságban - a következő tétel mondja ki:

2.21. Tétel. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$ akkor és csakis akkor áll fenn, (előbbi

jelöléseinkkel), ha α -nak egy U környezete, magát α -t kivéve, része D_f -nek, és tetszőleges abszcisszasorozatra, melyre $x_n \rightarrow \alpha$, $x_n \neq \alpha$, $x_n \in D_f$, teljesül $f(x_n) \rightarrow \beta$. (Itt $x_n \rightarrow c+0$ azt jelenti, hogy $x_n > c$ és $x_n \rightarrow c$, $x_n \rightarrow c-0$ jelentése: $x_n < c$ és $x_n \rightarrow c$, $x_n \rightarrow +\infty$ ill. $x_n \rightarrow -\infty$ jelentése pedig már korábbról ismert.)

A tétel ilyen általános formában is a 2.9. tétel bizonyításában követett gondolatmenettel igazolható.

Határértékek kiszámításánál sokszor felhasználjuk az összetett függvény határértékének kiszámítására szolgáló alábbi fontos tételt:

2.22. Tétel. Ha $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \beta$, $\lim_{u \rightarrow \beta} f(u) = \gamma$ ($\alpha = c, c+0, c-0, +\infty, -\infty$, $\beta = A, +\infty, -\infty$, $\gamma = B, +\infty, -\infty$) és α környezetében $x \neq \alpha$ esetén $g(x) \neq \beta$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(g(x)) = \gamma.$$

Tételünk még tovább is általánosítható: ha - a fenti jelölésekkel - β véges, és $\lim_{u \rightarrow \beta} f(u) = \gamma$, és kikötjük, hogy α környezetében $x \neq \alpha$ esetén, ha $u \rightarrow \beta+0$, $g(x) > \beta$, ill. ha $u \rightarrow \beta-0$, $g(x) < \beta$, akkor fennáll

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(g(x)) = \gamma.$$

A tétel állítása 2.21.-re támaszkodva igazolható.

2.23. Megjegyzés. $\alpha = c, c+0, c-0, +\infty, -\infty$ esetében

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$$

meghatározásánál akár

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$$

esetében, akár

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \pm \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \pm \infty$$

esetében kritikus határérték-esetek adódnak, közvetlenül nem tudunk az alkotó elemek határértékéből a hányados határértékére következtetni. Mivel ilyen határértékek gyakran adódnak, célszerű egyes speciális esetekre külön elnevezést és jelölést bevezetni.

2.24. Definíció. $\alpha = c, c + 0, c - 0, +\infty, -\infty$ esetében, ha

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0, \quad \text{és} \quad g(x) \neq 0 \quad \alpha \text{ alkalmas pont-}$$

zott környezetében, (vagy pedig

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \pm \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \pm \infty),$$

akkor

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \text{esetén azt mondjuk, hogy } f(x) \text{ } x \rightarrow \alpha \text{-ra}$$

aszimptotikusan egyenlő $g(x)$ -szel és ezt így jelöljük:

$$f(x) \sim g(x).$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{esetén azt mondjuk, hogy } f \text{ gyorsabban tart}$$

0-hoz mint g (g lassabban tart 0-hoz, mint f), (ill. f lassabban tart végtelenhez, mint g (g gyorsabban tart végtelenhez mint f)) és ezt így jelöljük:

$$f(x) = o(g(x))$$

(olvasd: $f(x)$ egyenlő kis ordó $g(x)$).

2.25. Megjegyzés. 2.24. jelöléseivel ha csak azt tudjuk, hogy $\frac{f(x)}{g(x)}$ korlátos α pontozott környezetében, akkor ezt így jelölhetjük: $f(x) = O(g(x))$ (olvasd: $f(x)$ egyenlő nagy ordó $g(x)$). Ezzel a jelöléssel azt juttatjuk kifejezésre, hogy f és g egyenlő "nagyságrendűek".

2.26. Az előbbieket felhasználásával oldható meg az alábbi két példa:

1. Legyen $f(x) = x^n - 1$, $g(x) = x^m - 1$, $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)} = \frac{n}{m},$$

hiszen $x \neq 1$, ezért egyszerűsíthetünk $(x-1)$ -gyel, a számlálóban pedig az egyszerűsítés után n , a nevezőben pedig m tag maradt, melyeknek mindegyike 1-hez tart.

2. Legyen $f(x) = x^n - 10$, $g(x) = x^m - 1$, $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^n - 10}{x^m - 1} = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = m, \text{ ekkor tehát } f \sim g, \\ 0, & \text{ha } n < m, \text{ ekkor tehát } f = o(g), \\ +\infty, & \text{ha } n > m \text{ (} x \rightarrow -\infty \text{ esetén csak, ha } n-m=2k), \\ -\infty, & \text{ha } n > m, \text{ } n-m=2k-1 \text{ és } x \rightarrow -\infty \text{ (} k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

2.27. Feladatok

1. Határozzuk meg $+0$, -0 , $+\infty$, $-\infty$ -ben $\frac{[x]}{x}$ határértékét.

2. Létezik-e f és g határértéke 0-ban, ha

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \\ \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, \text{ } p\text{-nek és } q\text{-nak nincs közös osztója} \\ & \text{és } q > 0, \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \neq 0, \\ 1, & \text{ha } t = 0. \end{cases}$$

3. Folytonos függvény

3.1. Fizikai vizsgálat során számítást végezve a számítás alapjául szolgáló kiindulási adatok rendszerint mérés eredményei, és így pontatlanok, a valódi értéktől többé-kevésbé eltérnek. Mégis, a számítás elvégzésére az ad elvi alapot, hogy feltesszük, ha a kiindulási adatok kevéssel térnek el a tényleges értéktől, akkor a számítás eredménye is kevéssel fog eltérni a keresett mennyiség valódi értékétől, és minél pontosabbak a kiindulási adatok, annál pontosabb lesz az eredmény is.

Pl. a szabadon eső test által megtett út mérőszámát az esés t idejének ismeretében az $s(t) = \frac{g}{2}t^2$ összefüggés alapján számíthatjuk. Itt a t időnek "kis" változása a közben megtett út hosszúságának "kis" változását vonja maga után.

Ha az $y = 3x + 4$ függvény $x = \sqrt{2}$ helyen felvett értékét akarjuk meghatározni, feladatunkat közelítéssel úgy oldjuk meg, hogy $\sqrt{2}$ közelítő véges tizedestörtjeit: 1,4, 1,41, 1,414, ... helyettesítjük be a függvénybe, és azzal a feltevessel élünk, hogy a kapott függvényértékek: 8,2, 8,23, 8,242, ..., minden határon túl megközelítik az $x = \sqrt{2}$ helyen felvett függvényértéket, $y = 3\sqrt{2} + 4$ értékét.

E feltevés a legegyszerűbb esetben - amikor egyetlen kiindulási adat szerepel - pontosan megfogalmazva azt jelenti, hogy ha a kiindulási adatot x -szel, a számításnak ettől függő eredményét $f(x)$ -szel jelöljük, akkor az $f(x)$ függvény olyan tulajdonságu legyen, hogy ha x elég közel van a kiindulási adat valódi b értékéhez, akkor $f(x)$ is tetszőlegesen közel legyen az $f(b)$ értékhez. Ha egy függvény ezzel a tulajdonsággal rendelkezik, akkor a függvényt a b helyen folytonosnak nevezik.

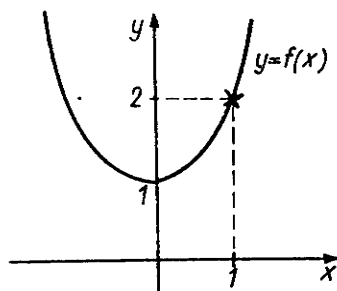
3.2. Definíció. Az f függvény folytonos a b helyen, ha ott értelmezve van, létezik (véges) határértéke, és ez megegyezik az $f(b)$ függvényértékkel:

$$f(b) = \lim_{x \rightarrow b} f(x).$$

Nem folytonos pl.

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$$

az $x = 1$ helyen, mert ott nincs értelmezve, annak ellenére, hogy, mint azt 2.7.-ben láttuk, van határértéke. (38. ábra.)



38. ábra

Ugyancsak nem folytonos $y = \operatorname{sgn} x$ az $x = 0$ helyen, mert van helyettesítési értéke, de nincs határértéke (csak jobb és bal oldali határértéke van, de ezek különbözők) (26. ábra).

$f(x) = |x|$ folytonos $x = 0$ -ban (de egyezsersmind minden $x \in \mathbb{R}$ -re folytonos), mert

$$|0| = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |x|, \quad (27. \text{ ábra}).$$

A folytonosság definíciójából és a határértékre vonatkozó 2.9., 2.10., 2.22. tételekből következnek az alábbi állítások:

3.3. Tétel. f akkor és csak akkor folytonos a b helyen, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $\delta > 0$, hogy fennálljon

$$f(x) \in K(f(b), \varepsilon),$$

valahányszor

$$x \in K(b, \delta(\varepsilon)).^*$$

3.4. Tétel. Az f függvény akkor és csak akkor folytonos a b helyen, ha b -nek egy környezete része D_f -nek, és minden olyan (x_n) sorozatra, melyre $x_n \in D_f$, $x_n \rightarrow b$, a megfelelő függvényértékekből képezett $(f(x_n))$ sorozat $f(b)$ -hez tart.^{*}

3.5. Tétel. Ha f és g a b helyen folytonos függvények, akkor ugyanitt $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ és $g(b) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is folytonos.^{*}

3.6. Tétel. Ha a g függvény értékkészlete az f függvény értelmezési tartományába esik, g a β helyen, f pedig a $g(\beta)$ helyen folytonos, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is folytonos a β helyen.

Bizonyítás. Minden (x_n) sorozatra $x_n \rightarrow \beta$ ($n \rightarrow \infty$) esetén g β -beli folytonossága miatt $g(x_n) \rightarrow g(\beta)$, tehát az f függvény $g(\beta)$ -beli folytonossága miatt $f(g(x_n)) \rightarrow f(g(\beta))$, vagyis $f \circ g$ folytonos a β helyen, amint azt állítottuk.^{*}

3.7. Mivel az $f = \text{állandó}$, és $g = x$ függvények nyilván minden x -re folytonosak, a 3.5. tételt alkalmazva adódik, hogy a racionális függvények mindenütt, ahol értelmezve vannak (nevezőjük nem zérus), folytonosak. Gyakorlásul persze közvetlenül sem nehéz belátni pl. $y = x^2$, ill. $y = \frac{1}{x}$ folytonosságát tetszőleges b helyen (a második példánál $b \neq 0$).

3.8. Előfordulhat, hogy egy f függvényt a b helyen folytonosság szempontjából vizsgálva b környezeteiből csak bizonyos értékek (speciálisan pl. csak b -nél nagyobb, vagy b -nél kisebb értékek) jönnek számításba (pl. b egy I intervallum végpontja, és a függvényt az intervallumon kívül nem értelmeztük, vagy csak az intervallumon belüli helyeken felvett függvényértékek jönnek számításba). Ilyen esetekre a folytonosság 3.2.-beli, és a jobb, ill. bal oldali határérték 2.12.-beli definíciójából közvetlenül adódnak az alábbi értelmezések:

3.9. Definíció. Az f függvény a b helyen jobbról (balról) folytonos, ha ott értelmezett, van (véges) jobb (bal) oldali határértéke és ez megegyezik az $f(b)$ függvényértékkel:

$$f(b) = \lim_{x \rightarrow b+0} f(x) = f(b+0) \quad (f(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b-0)) .$$

3.2.-ből és 3.9.-ből következik az alábbi tétel:

3.10. Tétel. Az f függvény az $x = b$ helyen akkor és csak akkor folytonos, ha jobbról is, balról is folytonos.

Az $y = \operatorname{sgn} x$ függvény $x = 0$ -ban sem jobbról, sem balról nem folytonos, mert

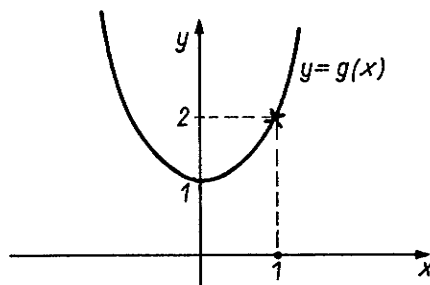
$$\operatorname{sgn} 0 = 0 \neq \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \operatorname{sgn} 0 = 0 \neq \lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1. \quad (26. \text{ ábra})$$

Az $y = [x]$ függvény az egész abszcisszájú helyeken jobbról folytonos, balról azonban nem folytonos, tehát nem is folytonos:

$$[k] = k = \lim_{x \rightarrow k+0} [x] = k, \quad [k] = k \neq \lim_{x \rightarrow k-0} [x] = k-1 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

és ugyanez a helyzet az $x = -k$ ($k \in \mathbb{N}$) helyeken. (28. ábra)

A felsorolt példák felvetik azt a kérdést, hogy ha egy f függvény egy b helyen nem folytonos, mondhatunk-e valami lényegeset viselkedéséről. Nyilván más jellegű $y = \operatorname{sgn} x$, $y = [x]$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{2^x}$ viselkedése $x = 0$ -ban (ahol egyik függvény sem folytonos).



39. ábra

3.11. Definíció. Ha f értelmezve van egy $\dot{K}(b, \varepsilon)$ -ban és nem folytonos a b helyen, akkor b szakadási helye f -nek.

Ha tehát a 3.2. definícióban szereplő három kikötés bármelyike nem teljesül, de f értelmezve van egy $\dot{K}(b, \varepsilon)$ -ban, akkor f -nek szakadási helye b .

3.12. Definíció. b megszüntethető szakadási helye f -nek, ha f értelmezett egy $\dot{K}(b, \varepsilon)$ környezetben, $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ létezik (véges), de f nem folytonos b -ben.

Pl. az

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x - 1} \quad \text{és a} \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \neq 1, \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

függvényeknek (38. és 39. ábra) $x = 1$ megszüntethető szakadási helye. Az elnevezést indokolja, hogy - példánknál maradva - a

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \neq 1, \\ 2 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x), & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

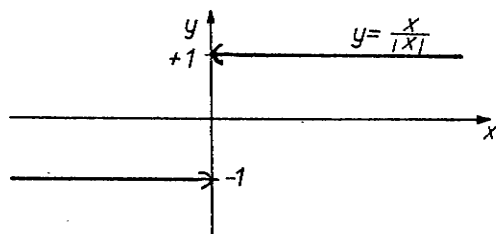
$f(x)$ -től "kevésbé különböző" függvény már folytonos $x = 1$ -ben ($h(x) = x^2 + 1$). Ezt így is mondják, hogy f folytonossá tehető a megszüntethető szakadási helyen, mert értelmezhető egy olyan függvény, mely a szakadási helytől eltekintve f -fel megegyezik, f szakadási helyén pedig helyettesítési értéke f határértéke.

3.13. Definíció. b ugráshelye f -nek, ha b -ben van f -nek véges jobb és bal oldali határértéke és ezek különbözők:

$$f(b-0) \neq f(b+0).$$

Ebben az esetben is közömbös, hogy magán a b helyen f értelmezett-e, és ha igen, megegyezik-e helyettesítési értéke valamelyik határértékkal.

Ugráshelye $x = 0$ az $y = \operatorname{sgn} x$ (26. ábra) és az $y = \frac{x}{|x|}$ függvénynek (utóbbi $x \neq 0$ esetében megegyezik $\operatorname{sgn} x$ -szel, lásd 40. ábra), $y = [x]$ -nek pedig az $x = \pm(k-1)$, $k \in \mathbb{N}$ helyek ugráshelyei (28. ábra).

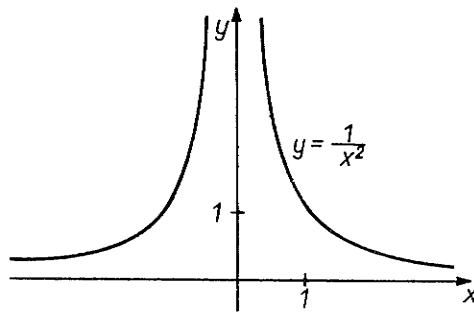


40. ábra

3.14. Megjegyzés. A

megszüntethető szakadási helyet

és az ugráshelyet közös néven elsőfajú szakadási helynek is nevezik. Minden másfajú szakadási helyet másodfajú szakadási helynek nevezünk. (Speciális másodfajú szakadási helyek azok, ahol a függvénynek (esetleg egyoldali) végtelen határértéke van.)



41. ábra

Pl. minden x helyen másodfajú szakadása van a Dirichlet-függvénynek (1.4. $h(x)$) és

$x = 0$ -ban az $y = \frac{1}{x}$ (24. ábra)

és az $y = \frac{1}{x^2}$ (41. ábra) függvénynek.

A sorozatokhoz hasonlóan függvények esetében is a monotonitás igen "hasznos" tulajdonság, ezt is mutatja az alábbi tétel:

3.15. Tétel. Monoton függvénynek más szakadása, mint ugrása nem lehet.

Bizonyítás. Legyen f (a, b) -ben pl. monoton növekedő, és $x_0 \in (a, b)$. Ekkor az $\{f(x) : x \in (a, x_0)\}$ halmaz felülről korlátos, egy felső korlátja ui $f(x_0)$. E számhalmaz felső határát A -val jelölve, bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan x_1 , hogy $a < x_1 < x_0$ és $f(x_1) > A - \varepsilon$, s ekkor $x_1 < x < x_0$ esetén $A - \varepsilon < f(x) \leq A$. Eszerint $A = f(x_0 - 0)$. Ugyanígy látható be, hogy $f(x_0 + 0)$ is létezik és egyenlő az (x_0, b) intervallumban felvett függvényértékek halmazának alsó határával (e halmaznak egy alsó korlátja $f(x_0)$). Így $f(x_0 - 0)$ és $f(x_0 + 0)$ létezik, véges, és $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$. Ebből az állítás adódik.

Hasonló a bizonyítás monoton fogyó függvény esetében.*

Lényegében hasonló gondolatmenettel igazolható a monoton függvényekre vonatkozó következő állítás :

3.16. Tétel. Ha f (a, b) -ben monoton növekvő (fogyó), akkor létezik $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ és egyenlő f (a, b) -beli értékkészletének alsó (felső)

határával), ha ez az értékkészlet alulról (felülről) korlátos, ill. $-\infty$ -nel ($+\infty$ -nel) ha az értékkészlet alulról (felülről) nem korlátos. Ugyanígy $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$

egyenlő az értékkészlet felső (alsó) határával, ill. $+\infty$ -nel ($-\infty$ -nel) aszerint, hogy az értékkészlet felülről (alulról) korlátos-e, vagy sem.

Eddig csak lokálisan (adobb b helyen) vizsgáltuk a függvényeket folytonosság szempontjából, kézenfekvően adódik ezután az intervallumbeli folytonosság definíciója:

3.17. Definíció. Az f függvény az (a, b) nyílt intervallumban folytonos, ha annak minden pontjában folytonos.

3.18. Definíció. Az f függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos, ha (a, b) -ben folytonos, az " a " helyen jobbról, a " b " helyen balról folytonos.

Speciális nyílt halmazok a környezetek. Ezekkel kapcsolatban a következő mondható:

3.19. Definíció. Az f függvény a b hely környezetében folytonos, ha van olyan $\delta > 0$, hogy f folytonos $K(b, \delta) = (b - \delta, b + \delta)$ -ban.

Abból, hogy egy függvény adott helyen folytonos, nem következik még, hogy a hely környezetében is folytonos. Pl. az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény az $x = 0$ helyen folytonos, de bármely $x \neq 0$ helyen szakadós (nincs határértéke), és így $x = 0$ környezetében sem folytonos.

A folytonos függvények alaptulajdonságait az alábbi tételekben foglalhatjuk össze:

3.20. Tétel. (Bolzano tétele) Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumban, akkor itt felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket.

Bizonyítás. Legyen c egy, az $f(a)$ és $f(b)$ függvényértékek közé eső érték, és tegyük fel, hogy pl.

$$f(a) < c < f(b).$$

Megmutatjuk, hogy van olyan hely $[a, b]$ -ben, ahol f épp a c értéket veszi fel. Legyen ugyanis

$$H = \{x : f(x) < c, \quad x \in [a, b]\}$$

H -nak b biztosan egy felső korlátja, tehát a H halmaz felülről korlátos, nem üres ($a \in H$), így I.5.12. értelmében van felső határa, jelöljük ezt x_0 -al:

$$x_0 = \sup H.$$

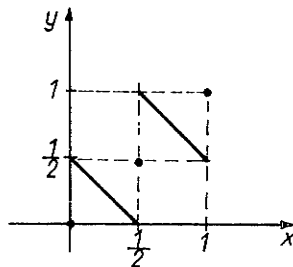
Megmutatjuk, hogy $f(x_0) = c$. Ha ui. $f(x_0) < c$ állna, akkor x_0 -tól jobbra is volnának c -nél kisebb függvényértéket adó helyek, hiszen f $[a, b]$ -ben, és így az x_0 helyen is folytonos, ami ellentmond a $\sup H = x_0$ feltételnek. Másrészt ha azt tennénk fel, hogy $f(x_0) > c$, akkor f foly-

tonossága miatt x_0 egy $K(x_0, \delta)$ környezetében is teljesülnie kell az $f(x) > c$ feltételnek, amiből következnek, hogy a H halmaznak volna x_0 -nál kisebb felső korlátja, ti. $\infty \in (x_0 - \delta, x_0)$, ellentmondásban a $\sup H = x_0$ kikötéssel. Így tehát csak $f(x_0) = c$ állhat, amivel állításunkat igazoltuk.*

A Bolzano-tétel megfordítása nem igaz. Abból, hogy f $[a, b]$ -ben minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti függvényértéket felvesz, általában nem következik, hogy a függvény folytonos $[a, b]$ -ben. Ezt a tényt pl. a következő példán mutathatjuk be:

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0, \\ \frac{1}{2} - x, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2} - x, & \text{ha } \frac{1}{2} < x < 1, \\ 1, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$



42. ábra

(42. ábra). Ez a függvény $[0, 1]$ -ben minden $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$ közötti függvényértéket felvesz, de az $x = 0$, $x = 1$ és $x = \frac{1}{2}$ helyen nem folytonos, így $[0, 1]$ -ben sem az.

A Bolzano-tétel alkalmazásokban (pl. egyenletek közelítő megoldásánál, (V. 4.)) jól használható egyszerű következménye az alábbi állítás:

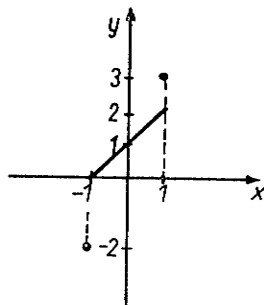
3.21. Tétel. Ha valamely $[a, b]$ -ben folytonos függvénynek az $x = a$ és $x = b$ helyeken felvett értékei ellenkező előjelűek, akkor van (a, b) -ben legalább egy olyan ξ hely, melyre $f(\xi) = 0$.

Könnyű példát mutatni arra is, hogy ha f csak (a, b) -ben folytonos (de már $[a, b]$ -ben nem az), 3.20. és akkor 3.21. állítása sem kell, hogy igaz legyen.

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{ha } x = -1, \\ x + 1, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ 3, & \text{ha } x = 1. \end{cases} \quad (43. \text{ ábra})$$

Az f függvény $[-1, 1]$ -ben nem folytonos
 ($(-1, 1)$ -ben az), nem vesz fel ezért szükségképpen
 minden $f(-1) = -2$ és $f(1) = 3$ közti értéket,
 pl. a 0 értéket nem veszi fel $(-1, 1)$ -ben.

Önmagában is érdekes tényt fejez ki a későbbiekben jól felhasználható alábbi állítás:



43. ábra

3.22. Tétel. Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumban, akkor ott korlátos.

Bizonyítás. Indirekt uton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a $H = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ halmaz pl. felülről nem korlátos. Ekkor szükségképpen kell, hogy legyenek $[a, b]$ -ben olyan $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ helyek, melyekre $f(x_1) > 1, f(x_2) > 2, \dots, f(x_n) > n, \dots$. Az (x_n) sorozat azonban korlátos,

$(x_n \in [a, b] \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq x_n \leq b)$. A Bolzano-Weierstrass-tétel

(II.5.3.) értelmében tehát van konvergens részsorozata; jelöljük ezt

(x_{n_i}) -vel, határértékét x_0 -lal. x_0 azonban $[a, b]$ -hez tartozik, tehát

x_0 -ban f folytonos, ami ellentmond annak, hogy $x_{n_i} \rightarrow x_0, f(x_{n_i}) \rightarrow +\infty$.

Feltehető a kérdés, hogy ha már tudjuk, hogy az $[a, b]$ -ben folytonos f függvény ott korlátos, vagyis a $H = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ halmaz korlátos, van-e olyan hely $[a, b]$ -ben, ahol f a $\sup H$ ill. $\inf H$ értéket felveszi. Mielőtt az erre vonatkozó fontos tételt kimondanánk, először egy kézenfekvő elnevezést adunk meg:

3.23. Definíció. Ha f értelmezve van egy T halmazon, és a $H = f(T)$ értékkészletnek van legnagyobb (legkisebb) értéke, akkor ezt az f függvény T -n felvett maximumának (minimumának) nevezzük és így jelöljük:

$$\max_{x \in T} f(x) = \max_{x \in T} f(x) (= \sup H) \quad (\min_{x \in T} f(x) = \min_{x \in T} f(x) (= \inf H)).$$

Ha $\alpha \in T$ esetén

$$\max_{x \in T} f(x) = f(\alpha) \quad (\min_{x \in T} f(x) = f(\alpha)),$$

akkor α -t az f függvény T halmazbeli maximum- (minimum-) helyének nevezzük. Közös néven a T halmazbeli maximum- ill. minimum-helyet T halmazbeli szélsőértékhelynek vagy $T = D_f$ esetén abszolút

szélsőérték helynek nevezzük. Természetesen egy T halmazon egy függvénynek több szélsőérték helye is lehet.

3.24. Tétel. Weierstrass tétel

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumban, akkor van $[a, b]$ -ben olyan α ill. β hely, hogy

$$f(\alpha) = \max_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(\beta) = \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

Bizonyítás. Mivel f $[a, b]$ -ben korlátos, 3.22. értelmében beszélhetünk értékkészletének A alsó és F felső határáról (3.23. jelöléseivel: $A = \inf H$, $F = \sup H$). Megmutatjuk, hogy van olyan α ill. β hely $[a, b]$ -ben, melyre $f(\alpha) = F$, $f(\beta) = A$. Ha ui. pl. nem volna olyan hely, amelyre $f(\alpha) = F$, akkor a

$$g(x) = \frac{1}{F - f(x)}$$

függvény is folytonos volna $[a, b]$ -ben, és így 3.22. értelmében korlátos lenne, létezne tehát olyan $K > 0$ szám, ($g > 0$) melyre

$$\frac{1}{F - f(x)} < K \quad (x \in [a, b]).$$

Ebből az egyenlőtlenségből azonban $F - f(x) > 0$ -val való átszorzás és rendezés után

$$f(x) < F - \frac{1}{K} \quad (x \in [a, b])$$

adódna, volna tehát f -nek az F felső korlátjánál kisebb felső korlátja, ami nem lehetséges. Ellentmondásra jutva, igazoltuk, hogy kell a kívánt tulajdonsággal bíró α helynek lennie $[a, b]$ -ben, vagyis a tétel állítása igaz. Hasonlóan igazolható indirekt uton a kívánt tulajdonságú β hely létezése.*

Arra vonatkozóan, hogy az $[a, b]$ -ben folytonos f függvény pontosan hol, és hány helyen veszi fel $[a, b]$ -beli szélsőértékét, a Weierstrass-tétel semmit sem mond ki. Ennek a kérdésnek vizsgálatára később (V.1.) még visszatérünk.

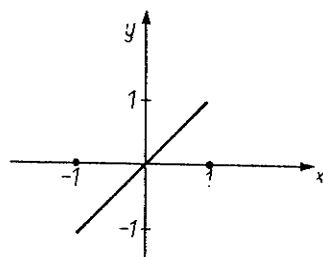
3.25. Megjegyzés. A Weierstrass-tétel állítása az (a, b) nyílt intervallumban folytonos f függvényre általában már nem igaz. Pl. az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{ha } |x| = 1 \end{cases}$$

függvény (44. ábra) nem teljesíti a tétel állítását.

Lényeges volt előző tételeinkben az a tény is, hogy végesben fekvő, tehát korlátos zárt intervallumokban $[a, b]$ -ben tettük fel, hogy a függvény folytonos. Pl. a $(0, +\infty)$ -ben folytonos $y = \frac{1}{x}$ függvény sehol sem veszi fel $(0, +\infty)$ -ben legnagyobb, ill. legkisebb értékét.

Természetesen lehetséges, hogy egy szakadós függvényre is igaz pl. a Weierstrass-tétel állítása (a tétel elégséges, de nem szükséges feltételt ad meg arra nézve, hogy egy függvény legnagyobb ill. legkisebb értékét felvegye). Pl.

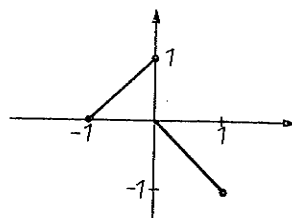


44. ábra

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } -1 \leq x \leq 0, \\ -x, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

szakadós $[-1, 1]$ -ben (45. ábra) és mégis $f(0) = 1$, ill. $f(1) = -1$ az f függvény $[-1, 1]$ -beli maximuma ill. minimuma.

3.26. Az a tény, hogy f (a, b) -ben, vagyis tetszőleges $x_0 \in (a, b)$ helyen folytonos, azt jelentette, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz megadható volt olyan megfelelő (de nyilván ε -től is, x_0 -tól is függő) $\delta > 0$, hogy



45. ábra

$$(*) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{hacsak } |x - x_0| < \delta.$$

A gyakorlatban főként a közelítő számítások miatt az volna a jó, ha adott ε hibakorláthoz olyan közös, az (a, b) -ben felvett helytől független δ (megengedett x -beli eltérés) volna megadható, amelyre $(*)$ teljesül, ill. az $f(x) \approx f(x_0)$ közelítés hibája az adott $\varepsilon > 0$ -nál kisebb.

Definiáljuk tehát először ezt a hasznos tulajdonságot, majd keressünk olyan függvényeket, amelyek ezzel a tulajdonsággal rendelkeznek.

3.27. Definíció. Az f függvény egyenletesen folytonos az A halmazon, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan (közös, az A -ban felvett helytől független) $\delta > 0$, amelyre teljesül

|| ha $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Igaz mármost a következő tétel:

|| 3.28. Tétel. Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumban, akkor ott egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Tegyük fel a tétel állításával ellentétben, hogy alkalmas $\varepsilon > 0$ -hoz nem lehet a tételnek megfelelő $\delta > 0$ -t találni, tehát vannak $[a, b]$ -ben olyan $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots a_n, b_n; \dots$ pontpárok, amelyekre

$$|a_1 - b_1| < \frac{1}{2} \text{ és } |f(a_1) - f(b_1)| \geq \varepsilon,$$

$$|a_2 - b_2| < \frac{1}{2} \text{ és } |f(a_2) - f(b_2)| \geq \varepsilon,$$

$\vdots$

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{n} \text{ és } |f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon,$$

$\vdots$

Az $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ számsorozat korlátos, van tehát konvergens részsorozata (II.5.3.): $a_{n_i} \rightarrow \alpha$, és $\alpha \in [a, b]$. Mivel azonban az

$|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$ egyenlőtlenség így is felírható:

$$a_n - \frac{1}{n} < b_n < a_n + \frac{1}{n},$$

az (a_{n_i}) részsorozat elemeinek megfelelő pontpárok (b_{n_i}) sorozata is α -hoz kell, hogy tartson. Mivel $\alpha \in [a, b]$, e helyen f folytonos, vagyis szükségképpen

$$f(a_{n_i}) \rightarrow f(\alpha), \quad f(b_{n_i}) \rightarrow f(\alpha),$$

ami ellentmond az

$$|f(a_{n_i}) - f(b_{n_i})| \geq \varepsilon$$

feltevésnek. Ellentmondásra jutva, állításunkat igazoltuk.*

3.29. Megjegyzés. Könnyű példát mutatni arra, hogy a nyílt intervallumban folytonos függvény nem kell, hogy ott egyenletesen folytonos legyen.

Pl. az $y = \frac{1}{x}$ függvény $(0, 1)$ -ben folytonos, és tetszőleges $a \in (0, 1)$, $b \in (0, 1)$ -re

$$|f(a) - f(b)| = \left| \frac{a - b}{ab} \right|.$$

Adjuk meg az $\varepsilon > 0$ számot (hibakorlátot) és legyen

$$a = \frac{\varepsilon}{n}, \quad b = \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

Ekkor

$$|f(a) - f(b)| = \frac{\left| \frac{\varepsilon}{n} - \frac{\varepsilon}{n+1} \right|}{\frac{\varepsilon^2}{n(n+1)}} = \frac{1}{\varepsilon} > 1 > \varepsilon, \quad \text{hacsak } \varepsilon < 1.$$

Szavakban kifejezve, ha n elég nagy, a 0 hely bármely környezetében van két olyan egymáshoz tetszőlegesen közel fekvő a és b hely, hogy a kívánt $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$ egyenlőtlenség nem teljesül.

A Bolzano-tétel (3.20.) felhasználásával igazolható az alábbi tétel:

3.30. Tétel. Ha f egy I tetszőleges típusu intervallumban folytonos és szigorúan monoton, akkor értékkészlete egy J intervallum, f^{-1} inverz függvénye a J intervallumban folytonos és az f függvénnyel azonos értelemben szigorúan monoton.

Bizonyítás. Legyen pl. f I -ben szigorúan monoton növekedő. Ha f I -ben korlátos, jelöljük értékkészletének alsó és felső határát m -mel és M -mel. Ekkor $m < y < M$ esetén van I -ben olyan x_1 és x_2 hely, hogy $f(x_1) < y < f(x_2)$ és a Bolzano-tétel szerint, amely f feltételezett folytonossága miatt alkalmazható, x_1 és x_2 között, tehát ugyancsak I -ben olyan x hely is, ahol $f(x) = y$. Így f értékkészlete tartalmazza a (m, M) intervallumot, ezen felül tartalmazhatja még az intervallum valamelyik, vagy mindkét végpontját, de m -nél kisebb, vagy M -nél nagyobb értékeket - ezek értelmezése miatt - nem tartalmazhat. Így az értékkészlet egy m és M végpontu nyílt, zárt, vagy félig zárt intervallum. Hasonlóképpen adódik I -ben alulról (felülről) korlátos f értékkészletére az $(m, +\infty)$ vagy $[m, +\infty)$ $((-\infty, M)$ vagy $(-\infty, M]$)

intervallum, míg sem alulról, sem felülről nem korlátos f esetében a $(-\infty, +\infty)$ intervallum.

Jelöljük a fenti esetek bármelyikében az f I -beli értékkészleteként adódó intervallumot J -vel. f szigorú monotonitása miatt a függvény I különböző helyein különböző értékeket vesz fel, úgyhogy (lásd 1. 13.) létezik a J -ben értelmezett $x = f^{-1}(y)$ inverz függvény. Ez is szigorúan monoton növekvő, hiszen ha

$$y_1 \in J, y_2 \in J, y_1 < y_2, \text{ akkor } x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) = x_2,$$

mert

$$x_1 \geq x_2 \text{ esetén } y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2 \text{ adódnék.}$$

De f^{-1} monotonitásából már következik folytonossága is. Ha ui. f^{-1} nem volna J -ben mindenütt folytonos, akkor valahol ugrása volna, és az ugrás helyén vett bal és jobb oldali határértékek közötti intervallum elemei (legfeljebb egy kivételével) nem tartoznának értékkészletéhez, holott f^{-1} értékkészlete J -ben az f függvény I értelmezési tartományával azonos, vagyis egy intervallummal, amelyből egyetlen közbeeső hely sem maradhat ki.*

3.31. A 3.30. Tételben elégséges feltételt adtunk arra nézve, hogy az $[a, b]$ -ben értelmezett f függvénynek legyen inverze. Az f -re tett folytonossági és szigorú monotonitási feltétel azonban nem szükséges az inverz függvény létezéséhez. Pl. $[0, 1]$ -ben legyen

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 1 - x, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

f nyilván nem monoton, az $x = \frac{1}{2}$ pont kivételével nem folytonos, mivel azonban az $[0, 1]$ intervallumnak önmagára való egy-egyértelmű leképezését adja, inverz függvénye létezik.

3.32. Feladatok.

1. Igazoljuk, hogy ha f az I intervallumban folytonos, akkor ugyanott $|f|$ is folytonos. Megfordítható-e az állítás?

2. Mutassuk meg, hogy a $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ véges határérték létezésének szükséges és elégséges feltétele (un. Cauchy-feltétel):

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \text{ tetszőleges } \varepsilon > 0\text{-ra, ha } x_1, x_2 \in \dot{K}(a, \delta).$$

Hogyan fogalmazható meg a Cauchy-feltétel $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ véges határérték létezésére?

3. Következik-e az f és g függvények I -beli egyenletes folytonosságából f, g I -beli egyenletes folytonossága?

4. Vizsgáljuk meg egyenletes folytonosság szempontjából az $y = \frac{1}{x^2}$ függvényt a $(0, 1]$ ill. $[1, +\infty)$ intervallumokban.

5. Bizonyítsuk be, hogy az $[a, b]$ -ben folytonos f függvény szakaszonként lineáris függvénnyel tetszőleges adott ε hibakorláton belül megközelíthető $[a, b]$ -ben.

6. Bizonyítsuk be, hogy az $[a, b]$ -ben monoton függvénynek legfeljebb megszámlálható sok szakadási helye lehet $[a, b]$ -ben.

7. Igazoljuk, hogy minden harmadfoku polinomnak legalább egy valós gyöke van. Általánosítsuk az állítást!

4. Elemi függvények

Ebben a pontban - még mindig nem teljességre törekedve - az analízis legegyszerűbb függvénytípusaival, az ún. elemi függvényekkel fogunk foglalkozni.

4.1. Elsőként vizsgáljuk meg az

$$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvény viselkedését. (A függvényt szokás (pozitív, egész kitevős) hatványfüggvénynek nevezni.

A függvény értelmezési tartománya

$$D_f = \mathbb{R}$$

értékkészlete

$$f(D_f) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{ha } n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \{y : y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}, & \text{ha } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

A függvény $(-\infty, +\infty)$ -ben folytonos 3.6. ill. 3.7. alapján. Mivel $(-x)^n = (-1)^n x^n$, az

$$f(x) = x^n \text{ függvény} \begin{cases} \text{páratlan,} & \text{ha } n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \text{páros,} & \text{ha } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

A függvény monotonitásával kapcsolatban a következő mondható:

$$f(x) = x^n \begin{cases} \text{szigoruan monoton növekedő,} & \text{ha } n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \begin{cases} x < 0 & \text{esetén szigoruan monoton fogyó,} \\ x \geq 0 & \text{esetén szigoruan monoton növekedő,} \end{cases} & \text{ha } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ennek igazolását feladatként tűzzük ki. Később (IV.4.3.1^o, 2^o) bizonyítjuk majd az alábbi állításokat:

$$f(x) = x^n \begin{cases} \begin{cases} x < 0 & \text{esetén konkáv,} \\ x \geq 0 & \text{esetén konvex,} \end{cases} & \text{ha } n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \text{konvex,} & \text{ha } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Mivel

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty, & \text{ha } n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}, \\ +\infty, & \text{ha } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

a függvény értékkészletével kapcsolatban kicsit részletesebben a következőket mondhatjuk:

$$f[0, +\infty) = [0, +\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N}\text{-re,}$$

$$f(-\infty, 0] = \begin{cases} (-\infty, 0], & \text{ha } n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}, \\ [0, +\infty), & \text{ha } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

vagyis $n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}$ esetén $f(x) = x^n$ sem alulról, sem felülről nem korlátos, $n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}$ esetén pedig alulról korlátos, felülről nem korlátos.

A 3.30. Tétel értelmében a $[0, +\infty)$ -ben szigoruan monoton növekedő és folytonos $f(x) = x^n$ függvénynek van tehát $[0, +\infty)$ -ben folytonos és ugyancsak szigoruan monoton növekedő f^{-1} inverze. Ennél $n = 2k-1$ $k \in \mathbb{N}$ esetén még több is mondható: ekkor f -nek $(-\infty, +\infty)$ -ben, tehát

a függvény egész értelmezési tartományán van folytonos, szigorúan monoton növekedő inverze. Az $f(x) = x^n$ függvény inverzét így jelöljük:

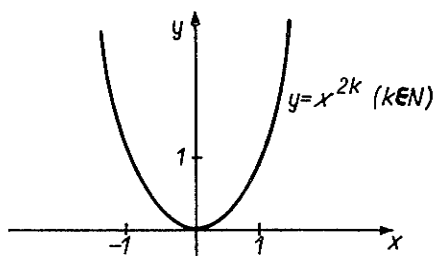
$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Ezt $x > 0$ esetén így is szoktuk jelölni:

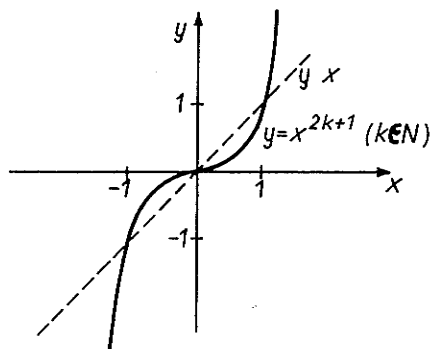
$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}.$$

($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ esetén az $f(x) = x^n$ ($x \in (-\infty, 0)$) szigorúan monoton fogyó, folytonos függvény ugyanezen tulajdonságokkal rendelkező inverzét így jelöljük: $f^{-1}(x) = -\sqrt[n]{x}$.)

A fent részletezett tulajdonságok felhasználásával az $f(x) = x^n$ függvény görbáját a 46. és 47. ábrán szemléltettük.



46. ábra



47. ábra

4.2. Definíció. Racionális egész függvénynek, vagy n -ed-foku polinomnak nevezzük a

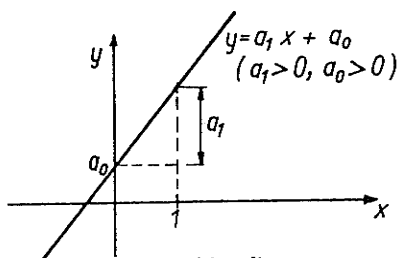
$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

függvényt, ahol $a_i \in \mathbb{R}$ ($i=1, \dots, n$) és $a_n \neq 0$.

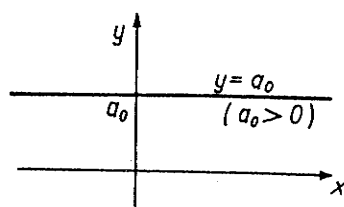
(A függvény megadásánál szereplő $\sum_{i=0}^n$ jel jelentése: olyan $(n+1)$ -tagú összeg, melynek tagjai az $i = 0, i = 1, \dots, i = n$ helyettesítéssel adódó $a_0, a_1 x, \dots, a_n x^n$ kifejezések.) Speciálisan

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

neve lineáris függvény (a függvény görbéje ugyanis egyenes, lásd 48. ill. 49. ábra; ez $a_1 = 0$ esetén párhuzamos az x tengellyel, $a_1 \neq 0$ esetén



48. ábra



49. ábra

átmegy a $(0, a_0)$, $(1, a_0 + a_1)$ ponton, az x tengely pozitív irányával bezárt szögének tangense (az egyenes meredeksége) a_1 .

A racionális egész függvények az $f_0 =$ állandóból és az $f_i = x^i$ ($i \in \mathbb{N}$) függvényekből összeadással és szorzással állnak elő, így öröklük "össze-
tevéők" sok tulajdonságát. $f(x) = p_n(x)$ értelmezési tartománya

$$D_f = \mathbb{R},$$

ugyanitt folytonos is (3.7.). Speciális esetektől eltekintve se nem páros, se nem páratlan. Monotonitási intervallumainak, konvexitásának, konkavitásának vizsgálata általánosságban, elemi módszerekkel nehézkes (kivéve az $n = 2$ esetet), így erre majd IV.4.-ben térünk vissza.

Annak érdekében, hogy a $p_n(x)$ függvény értékkészletéről valamit mondhassunk, állapítsuk meg a függvény határértékét plusz végtelenben és mínusz végtelenben:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } a_n > 0, \\ -\infty, & \text{ha } a_n < 0 \end{cases}$$

míg $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$ esetében ugyanezzel az átalakítással adódik:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p_n(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{ha } a_n > 0, \\ +\infty, & \text{ha } a_n < 0. \end{cases}$$

Ebből, a függvény folytonosságára való tekintettel, következik, hogy a függvény értékkészlete

$$p_n(D_f) = \mathbb{R}, \quad \text{ha } n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ esetében megegyezik $p_n(x)$ $+\infty$ -ben és $-\infty$ -ben vett határértéke, így $a_n > 0$ esetében felülről, $a_n < 0$ esetében pedig alulról biztosan nem korlátos. A Weierstrass-tételből (III. 3. 24.) következik, hogy a másik irányban korlátos a függvény, $p_{2k}(x)$ értékészletét általában nehézkes megállapítani.

4.3. Definíció. Racionális törtfüggvénynek nevezzük két polinom hányadosát:

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m},$$

ahol $a_i \in \mathbb{R}$, $(i=0, \dots, n)$, $a_n \neq 0$, $b_j \in \mathbb{R}$ $(j=0, \dots, m)$, $b_m \neq 0$.

$f(x)$ értelmezve van minden olyan x helyen, ahol nevezője nem 0, vagyis értelmezési tartománya

$$D_f = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge q_m(x) \neq 0\}.$$

D_f -ben $f(x)$ folytonos (3.7.)

Monotonitásáról, konvexitásáról, konkavitásáról, értékészletéről általánosságban elemi módszerekkel kevés mondható.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} h(x),$$

ahol

$$h(x) = \frac{\frac{a_0}{a_n x^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1}{\frac{b_0}{b_m x^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + 1} \rightarrow 1, \text{ ha } x \rightarrow +\infty,$$

és így

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } n > m, \quad a_n \cdot b_m > 0, \\ -\infty, & \text{ha } n > m, \quad a_n \cdot b_m < 0, \\ 0, & \text{ha } n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{ha } n = m. \end{cases}$$

Hasonló állítás igazolható $x \rightarrow -\infty$ esetében, ekkor $a + \infty$ és $-\infty$ határérték függ n -m páros vagy páratlan voltától, a_n, b_m előjelétől.

4.4. Kicsit részletesebben térjünk ki az

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

speciális racionális törtfüggvény vizsgálatára.

$c = 0$ esetében (akkor kell, hogy $d \neq 0$ legyen) az

$$f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d} \quad \text{ill.} \quad f(x) = \frac{b}{d}$$

elsőfoku (0-adfoku) racionális egész függvény (lineáris függvény) adódik.

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f(D_f) = \mathbb{R} \quad \text{ill.} \quad \frac{b}{d}$$

A függvény monoton növekvő (fogyó), ha $\frac{a}{d} > 0$ ($\frac{a}{d} < 0$).

$c \neq 0$ esetében a következő átalakítást végezhetjük el:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{1}{c} \frac{ax + b}{x + \frac{d}{c}} = \frac{1}{c} \frac{ax + a \frac{d}{c} - a \frac{d}{c} + b}{x + \frac{d}{c}} = \\ &= \frac{1}{c} \left(a + \frac{b - \frac{ad}{c}}{x + \frac{d}{c}} \right) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{x + \frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

Ha tehát $bc = ad$, akkor speciális esetként állandó függvény adódik.

$$(D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}, \quad f(D_f) = \frac{a}{c}).$$

Ha $c \neq 0$, $ab - bc \neq 0$, akkor

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{A}{x + \frac{d}{c}} \quad (A = \frac{bc - ad}{c^2})$$

lineáris törtfüggvény adódik, melynek értelmezési tartománya:

$$D_f = (-\infty, -\frac{d}{c}) \cup (-\frac{d}{c}, +\infty).$$

Mivel a függvény görbéje $y = \frac{1}{x}$ görbájéből x irányu $\frac{d}{c}$ nagyságu eltolással, y irányu A -szoros nyújtással és $\frac{a}{c}$ nagyságu eltolással nyerhető, a függvény értékkészlete

$$f(D_f) = (-\infty, \frac{a}{c}) \cup (\frac{a}{c}, +\infty),$$

továbbá a függvény $A > 0$ (azaz $bc > ad$ esetén) $(-\infty, -\frac{d}{c})$ -ben is, $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ -ben is szigorúan monoton fogyó, $(-\infty, -\frac{d}{c})$ -ben konkáv, $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ -ben konvex (50. ábra). $A < 0$, (azaz $bc < ad$ esetén) a függvény $(-\infty, -\frac{d}{c})$ -ben is, $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ -ben is szigorúan monoton növekedő, $(-\infty, -\frac{d}{c})$ -ben konvex, $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ -ben konkáv (51. ábra).

Mivel $y = \frac{1}{x}$ képe egyenlőszáru hiperbola, melynek aszimptotái a koordinátatengelyek, és az ebből $\sqrt{|A|}$ -szoros nagyítással, esetleg tükrözéssel, eltolással adódó görbe is hiperbola, azt is mondhatjuk, hogy

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0, \quad bc \neq ad)$$

képe hiperbola, melynek aszimptotái az

$$x = -\frac{d}{c} \quad \text{és} \quad y = \frac{a}{c}$$

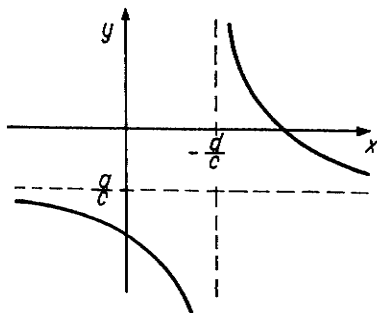
egyeneselek.

4.5. Az

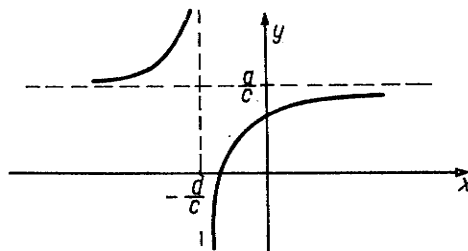
$$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvények vizsgálata visszavezethető a 4.1.-ben tárgyalt

$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) függvények vizsgálatára. Ezt feladatként tűzzük ki, itt csak annyi álljon, hogy e függvények értelmezési tartománya



50. ábra



51. ábra

$$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

4.6. Megjegyzés. Az általános hatványfüggvény $(f(x) = x^a, a \in \mathbb{R})$ vizsgálatára IV.4.25.-ben térünk ki.)

4.7. Az exponenciális függvény fogalmára a hatványozás fogalmának általánosítása vezet.

Legyen a pozitív szám, de $a \neq 1$. Ha $x > 0$ egész, akkor az a^x hatványt így értelmeztük:

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_x$$

Az így értelmezett $f(x) = a^x$ függvény kielégíti az

$$(*) \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

$$(**) \quad (f(x))^y = f(xy)$$

függvényegyenleteket $(a^{x+y} = a^x \cdot a^y; (a^x)^y = a^{xy})$.

Értelmet adtunk az a^x hatványnak akkor is, ha $x = 0$, vagy $x < 0$ egész:

$$a^0 = 1, \quad a^x = \frac{1}{a^{-x}},$$

és ezután a $(*)$ és $(**)$ függvényegyenletek bármely egész x és y kitevőre igaznak bizonyultak.

Értelmeztük az a^x hatványnak akkor is, ha x tetszőleges racionális szám. $x = \frac{p}{q}$ (p és q egész szám, $q > 0$) esetén

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Kimutatható, hogy bárhogyan is írjuk fel az előbbi módon az x racionális számot két egész szám hányadosaként, a^x -re mindig ugyanaz az érték adódik és $(*)$, valamint $(**)$ tetszőleges racionális kitevő esetében fennáll.

Annak érdekében, hogy az a^x hatványt bármilyen $x \in \mathbb{R}$ kitevőre definiálhassuk, közelítsük meg az x számot racionális x_n számokból álló számsorozattal. Ha sikerült belátnunk, hogy a megfelelő (a^{x_n}) sorozat $x_n \rightarrow x$ esetében konvergens, és határértéke csak x -től függ,

tehát független az x -hez tartó (x_n) ($x_n \in \mathbb{Q}$) sorozat speciális megválasztásától, akkor az (a^{x_n}) sorozat határértékét tekinthetjük a^x értékének. E cél érdekében először a racionális számok halmazán értelmezett a^x függvényre mondunk ki állításokat, amelyek - látni fogjuk - $x \in \mathbb{R}$ esetében is érvényben maradnak, majd $x_n \rightarrow 0$, ill. $x_n \nearrow x$ ($x_n \searrow x$), $x_n \in \mathbb{Q}$ sorozatokra igazolva (a^{x_n}) konvergenciáját jutunk el a^x egyértelmű értelmezéséhez.

4.8. Tétel. Tetszőleges racionális $x_1 < x_2$ -re

$$a^{x_1} < a^{x_2}, \text{ ha } a > 1 \text{ és } a^{x_1} > a^{x_2}, \text{ ha } 0 < a < 1.$$

4.9. Tétel. Ha (x_n) racionális számoknak $x = 0$ -hoz tartó sorozata, akkor a megfelelő (a^{x_n}) sorozat 1-hez (a^0 -hoz) tart.

4.10. Tétel. Ha (x_n) racionális számoknak monoton ($a > 1$ esetén monoton növekedő, $0 < a < 1$ esetén monoton fogyó) sorozata, akkor a megfelelő (a^{x_n}) sorozat konvergens.

4.11. Tétel. Az (a^{x_n}) sorozat határértéke független az x -hez tartó (x_n) sorozat ($x_n \in \mathbb{Q}$) speciális választásától. Jelöljük ezt a határértéket a^x -szel.

4.12. Tétel. A 4.11. értelmében egyértelműen meghatározott a^x függvény ($x \in \mathbb{R}$) $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekedő, $0 < a < 1$ esetén szigorúan monoton fogyó, és eleget tesz a (*), (**) függvény-egyenletnek.

4.13. Tétel. Az a^x függvény ($x \in \mathbb{R}$) minden x -re folytonos.

4.14. Tétel. Az a^x ($x \in \mathbb{R}$) függvény konvex.

4.8. Bizonyítása. Ha $x < y$ ($x, y \in \mathbb{Q}$), mivel

$$a^y = a^x a^{y-x},$$

ezért, ha $a > 1$, akkor $a^{y-x} > 1$, és így $a^y > a^x$,

míg ha $a < 1$, akkor $a^{y-x} < 1$, és így $a^y < a^x$. *

4.9. Bizonyítása. Legyen $a > 1$ ($0 < a < 1$ esetén a bizonyítás hasonló lépésekben történik). Mivel a^x ($x \in \mathbb{Q}$) monoton növekvő, elég belátnunk, hogy

$$\frac{1}{a^{2^n}} \rightarrow 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

mert ha ez igaz, akkor

$$\frac{1}{a^{2^n}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{a^{2^n}}}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

és ha (x_n) tetszőleges 0-hoz tartó számsorozat ($x_n \in \mathbb{Q}$), akkor bizonyos k indextől kezdve

$$-\frac{1}{2^n} < x_k < \frac{1}{2^n}$$

és a^x ($x \in \mathbb{Q}$) előbb bizonyított monotonitása miatt

$$-\frac{1}{2^n} < a^{x_k} < \frac{1}{2^n},$$

tehát két korlátjával együtt a^{x_k} is tart 1-hez, ha kitevője a racionális számok halmazán 0-hoz tart. Bizonyítsuk tehát, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{2^n}} = 1.$$

Mivel az $(\frac{1}{2^n})$ sorozat monoton fogyólag tart 0-hoz, az

$$a_n = a^{\frac{1}{2^n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat is monoton fogyó és alulról korlátos (hiszen $a_n > 1$). Jelöljük az utóbbi sorozat határértékét A -val. Mivel

$$a_{n+1} = a^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a_n},$$

azért az A határérték ki kell, hogy elégítse az

$$A = \sqrt{A}, \quad \text{ill.} \quad A^2 = A$$

egyenletet. Ennek megoldásai $A = 0$ és $A = 1$. A határérték azonban csak $A = 1$ lehet, hiszen a sorozat elemei mind 1-nél nagyobbak. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.*

4.10. Bizonyítása. Legyen $a > 1$. Ha $(x_n) \nearrow x$ ($x_n \in \mathbb{Q}$), akkor (a^{x_n}) szintén monoton növekedő és korlátos, mert ha $y > x$, $y \in \mathbb{Q}$, akkor az (a^{x_n}) sorozat minden elemére

$$a^{x_1} \leq a^{x_n} < a^y,$$

tehát (II.4.4.) az (a^{x_n}) sorozat konvergens.*

4.11. bizonyítása. Legyen (x_n) egy x -hez monoton növekedőleg, (x'_n) pedig egy x -hez tetszőlegesen tartó, racionális számokból álló sorozat. Mivel

$$a^{x'_n} = a^{x_n} \cdot a^{x'_n - x_n}$$

és a 4.9. állítás értelmében $(x'_n - x_n) \rightarrow 0$ esetében $a^{x'_n - x_n} \rightarrow 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x'_n - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} \cdot 1,$$

amivel igazoltuk, hogy $x_n \rightarrow x$ esetében az (a^{x_n}) sorozat határértéke független az x -hez tartó (x_n) sorozat speciális választásától, a határértéket, melyet a^x -szel jelölünk, egyértelműen értelmeztük.*

4.12. igazolását feladatként tűzzük ki.

4.13. bizonyítása. Célszerű először azt igazolni, hogy a^x az $x = 0$ helyen folytonos, ebből könnyen következik majd tetszőleges x helyen a folytonosság.

Az $x = 0$ helyen való folytonosság igazolása a 4.9. állítás bizonyításánál követett lépésekkel adódik, ezért feladatként tűzzük ki. Erre a tényre támaszkodva, mondhatjuk tehát, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|a^h - a^0| = |a^h - 1| < \varepsilon, \text{ ha } |h| < \delta.$$

Ekkor azonban tetszőleges x helyre

$$|a^{x+h} - a^x| = a^x |a^h - 1| < a^x \varepsilon = \eta, \text{ ha } |h| < \delta$$

vagyis tetszőleges η hibakorláttal megközelíti a^{x+h} az a^x függvényértéket, ha $|a^h - 1| < \varepsilon = \frac{\eta}{a^x}$, ami mindig elérhető, ha $|h|$ elég

kicsi. Ezzel tetszőleges x helyre igazoltuk a^x folytonosságát.*

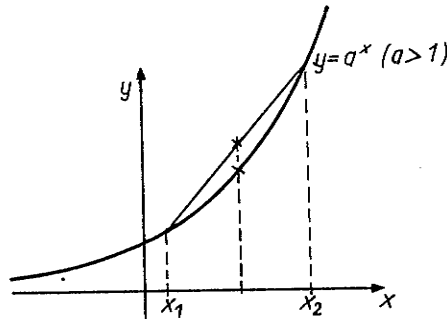
4.14. bizonyítása. Be akarjuk látni, hogy a^x görbéje tetszőleges x_1 és x_2 abszcisszaértékek közötti intervallumban az x_1 és x_2 abszcisszájú görbepontokat összekötő hur alatt fekszik. Legyen $x_1 < x_2$;

akkor az $[x_1, x_2]$ intervallum felezőpontjához, az $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ abszcisszához tartozó görbepont ordinátája

$$a^{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)} = \sqrt{a^{x_1} \cdot a^{x_2}}.$$

A számtani és mértani közép ismert egyenlőtlensége értelmében azonban

$$\sqrt{a^{x_1} \cdot a^{x_2}} < \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2},$$



52. ábra

vagyis az $[x_1, x_2]$ intervallum felezőpontjához tartozó görbepont valóban az x_1 és x_2 abszcisszájú görbepontokat összekötő húr alatt fekszik (52. ábra). Más szóval, ha $y = h(x)$ jelöli az (x_1, a^{x_1}) és (x_2, a^{x_2}) görbeponton áthaladó húr egyenletét, akkor $a^{x_3} < h(x_3)$ ($x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$).

Ismételjük meg ezt az okoskodást az $[x_1, x_3]$ és $[x_3, x_2]$ szakaszokra, a megfelelő hurok egyenletét $y = h_1(x)$ -szel és $y = h_2(x)$ -szel jelölve. Azt kapjuk, hogy az $x_4 = \frac{x_1+x_3}{2}$ pontban $a^{x_4} < h_1(x_4) < h(x_4)$, az $x_5 = \frac{x_3+x_2}{2}$ pontban pedig $a^{x_5} < h_2(x_5) < h(x_5)$. Folytatva az eljárást, az $a^x < h(x)$ egyenlőtlenség igaznak bizonyul minden olyan x helyen, amelyre $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{m}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $m=1, 2, \dots, 2^n-1$). Látható, hogy bármely $x \in (x_1, x_2)$ ponthoz található olyan (c_k) sorozat, amelynek elemei az előbbi alaku helyek és $c_k \rightarrow x$; ezért (a^x) folytonosságát is felhasználva $a^x \leq h(x)$ adódik.

4.15. A 4.11.-ben definiált a^x exponenciális függvény előzőekben bizonyított tulajdonságait néhány kiegészítéssel soroljuk most fel:

$f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \in \mathbb{R}$) értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$.

Ha $a > 1$, akkor a függvény szigoruan monoton növekedő,

Ha $0 < a < 1$, akkor a függvény szigoruan monoton fogyó,

a függvény folytonos és konvex,

kielégíti a 4.7.-beli (*) és (**) függvényegyenletet.

Annak érdekében, hogy a függvény értékészletét is megadhassuk, még egy állítást kell bizonyítanunk:

4.16. Tétel. Legyen $a > 1$, ekkor $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, ha pedig $0 < a < 1$, akkor $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

| Bizonyítás. Az állítás a^x monoton volta miatt abból következik, hogy ha x egész számokon át tart $+\infty$ -hez, ill. $-\infty$ -hez, az állított határértékek adódnak.*

4.17. Az előbbi állításnál valamivel több is mondható. Minthogy a^x folytonos függvény, két tetszőleges függvényérték közti bármely értéket felveszi, pontosabban, mivel a^x szigorúan monoton, azért minden pozitív értéket felvesz, és csak egy helyen vesz fel minden értéket.

a^x értékkészlete tehát $(0, +\infty)$ intervallum.

A 4.17.-ben mondottak értelmében van $f(x) = a^x$ -nek $\mathbb{R}$ -en f^{-1} inverze.

4.18. Definíció. $f(x) = a^x$ inverze $f^{-1}(x) = \log_a x$. (olv. "a" alapú logaritmus x) ($a > 0$, $a \neq 1$)

$$\log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x,$$

vagyis $\log_a x$ az a kitevő, amelyre az "a" alapot emelnünk kell, hogy eredményül x -et kapjuk.

(Implicit alakban az $y = \log_a x$ függvényt $x = a^y$ alakban is megadhatjuk.)

A 4.15.-4.17.-ben összefoglaltakból következik, hogy a $\log_a x$ függvény értelmezési tartománya

$$D_{\log_a x} = (0, +\infty),$$

értékkészlete $\mathbb{R}$.

$\log_a x$ $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekedő,

$0 < a < 1$ esetén szigorúan monoton fogyó,

$(0, +\infty)$ -ben folytonos és konkáv (ha $a > 1$), ill. konvex (ha $0 < a < 1$) (53. ábra). Az utóbbi két állítás bizonyítását feladatként tűzzük ki, az előbbieket 3.30.-ból következnek.

A $\log_a$ függvény a következő függvényegyenleteket elégíti ki:

$$1^o f(xy) = f(x) + f(y), \quad \text{azaz} \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (x > 0, y > 0)$$

$$2^o f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y), \quad \text{azaz} \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (x > 0, y > 0)$$

$$3^o f(x^y) = y \cdot f(x), \quad \text{azaz} \quad \log_a(x^y) = y \cdot \log_a x \quad (x > 0).$$

Sokszor használjuk még a különböző alapú logaritmusok átszámítására vonatkozó alábbi összefüggést:

$$4^o \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Az utóbbi összefüggést legtöbbször a $b = 10$ esetén adódó 10-es-alapu logaritmusra való átszámításra használjuk, hiszen $\log_{10} x$ értékei függvény-

táblázatokból kiolvashatók. (Szokás a $\log_{10} x = \lg x$ jelölést is használni.)

Az 1^o-3^o összefüggéseket az exponenciális függvény 4.7.-beli (*) és (**) függvényegyenletére hivatkozva könnyű igazolni. Legyen

$$\log_a x = t, \quad (\text{azaz } x = a^t),$$

$$\log_a y = u, \quad (\text{azaz } y = a^u),$$

akkor

$$xy = a^t \cdot a^u = a^{t+u}, \quad \text{azaz } t+u = \log_a (xy),$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a^t}{a^u} = a^{t-u}, \quad \text{azaz } t-u = \log_a \frac{x}{y},$$

$$x^y = (a^t)^y = a^{ty}, \quad \text{azaz } ty = \log_a (x^y),$$

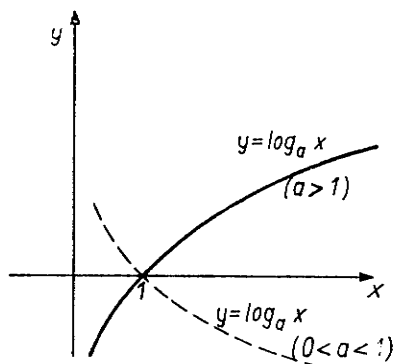
a másodiknak nyert összefüggésekbe t és u értékét behelyettesítve az állított 1^o-3^o összefüggésre jutunk. 4^o igazolása érdekében legyen ismét

$$\log_a x = t, \quad \text{azaz } a^t = x.$$

Ekkor

$$\log_b x = \log_b a^t = t \cdot \log_b a \quad (\text{alkalmaztuk 3^o-t}),$$

innen pedig $\log_b a$ -val átosztva ($\log_b a \neq 0$, hiszen $a > 1$, vagy $0 < a < 1$), t értékét visszahelyettesítve



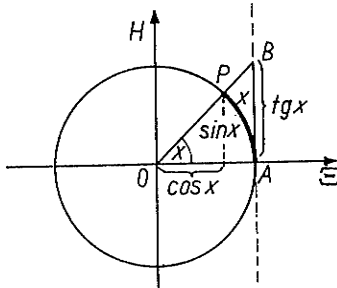
53. ábra

$$t = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

adódik.

4.19. A trigonometrikus függvényeket a következőképpen értelmezzük: Felvesszünk a síkban egy derékszögű koordinátarendszert, majd ebben megrajzoljuk a $(0,0)$ középpontu $r=1$ sugarú kört. E körvonal $(1,0)$ pontjából kiindulva mérjük fel először a

$$0 \leq x < 2\pi$$



54. ábra

hosszuságú körívet pozitív (azaz az óramutató járásával ellenkező) irányban. Így a körvonal P pontjába jutunk el.

4.20. Definíció. P abszcisszája $\cos x$, ordinátája $\sin x$, ott, ahol $\cos x \neq 0$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, míg ott, ahol $\sin x \neq 0$ $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ (54. ábra).

Könnyen látható, hogy az 54. ábrán megrajzolva az egységsugarú körhöz az $A = (1,0)$ pontbeli érintőt, ha OP meghosszabbításának az érintővel való metszéspontját B-vel jelöljük, akkor $AB = \operatorname{tg} x$. A ctg függvény vizsgálatával, $\operatorname{ctg} x$ szemléltetésével, a továbbiakban itt nem foglalkozunk, hiszen az erre vonatkozó eredmények a trigonometrikus függvények vizsgálatából könnyen adódnak.

A 4.20. definícióval értelmeztük a trigonometrikus függvényeket a $0 \leq x < 2\pi$ intervallumban ($\operatorname{tg} x$ -et a $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k=1,2$ esetre). Tetszőleges $x > 0$ -ra periodikusan terjesztjük ki a függvények értelmezését, hiszen az x és $x + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) hosszúságú körívnek ugyanaz a P pont felel meg a körvonalon:

$$(*) \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

A tg függvény is periodikus 2π szerint, de már π szerint is az:

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$$

Ha $x < 0$, akkor az $|x|$ hosszúságú körívet az $(1,0)$ pontból negatív (azaz az óramutató járásával megegyező) irányban mérve, jutunk el ahhoz a P ponthoz, amelynek koordinátái $(\cos x, \sin x)$.

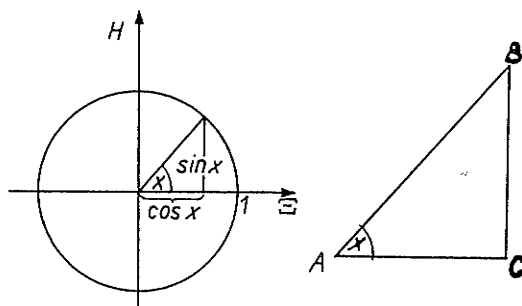
A trigonometrikus függvények értelmezéséből közvetlenül adódik, hogy

$$(\ast\ast) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

4.21. Megjegyzés. Ha x hegyesszög ($0 < x < \frac{\pi}{2}$), olyan ABC derékszögű háromszöget rajzolva, melynek egyik, pl. A -nál levő szöge x és az egységsugarú körben felvéve egy olyan ABC -höz hasonló háromszöget, melynek egyik befogója az abszcisszatengelyre esik, A pedig $(0, 0)$ -ba, a háromszögek hasonlóságát felhasználva

$$\sin x = \frac{CB}{AB}, \quad \cos x = \frac{AC}{AB}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{CB}{AC}$$

adódik. (55. ábra). Eredményünk tehát szavakban kifejezve azt jelenti, hogy derékszögű háromszögben $\sin x$ az x hegyesszöggel szemben



55. ábra

fekvő befogó és az átfogó hányadosaként, $\cos x$ az x hegyesszög mellett fekvő befogó és az átfogó hányadosaként, $\operatorname{tg} x$ az x hegyesszöggel szemben fekvő befogó és az x hegyesszög mellett fekvő befogó hányadosaként számítható ki. Általános értelmezésünkéből tehát ez a speciális - csak hegyesszögek esetében érvényes - értelmezés speciális esetként adódik.

4.22. Mielőtt rátérnénk a trigonometrikus függvények menetének részletes vizsgálatára, részben értelmezésükből közvetlenül adódó, részben könnyen igazolható (sokszor egymásból következő) olyan összefüggéseket sorolunk fel, melyeket a trigonometrikus függvények analízise során lépten-nyomon felhasználunk.

$$1^{\circ} \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$2^{\circ} \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$3^{\circ} \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$4^{\circ} \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$

$$5^{\circ} \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$6^{\circ} \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

$$7^{\circ} \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y},$$

$$8^{\circ} \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y},$$

$$9^{\circ} \sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$10^{\circ} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$11^{\circ} \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$12^{\circ} \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$13^{\circ} \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x},$$

$$14^{\circ} \sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)),$$

$$15^{\circ} \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y)),$$

$$16^{\circ} \sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)).$$

Bizonyítás.

1^o Mivel $(\cos x, \sin x)$ a $(0, 0)$ középpontu egységnyi sugarú körvonalnak pontja, kielégíti annak egyenletét.

2^0 1^0 -ből $\cos^2 x \neq 0$ -val való osztás révén adódik.
 3^0 - 6^0 Elég a 6^0 összefüggést igazolnunk, mert a trigonometrikus függvények értelmezéséből következik, hogy

$$\cos(-y) = \cos y, \quad \sin(-y) = -\sin y,$$

erre való tekintettel pedig 6^0 -ból 5^0 , ill. 3^0 -ból 4^0 következik. 3^0 -t 6^0 -ból (xx) alkalmazásával nyerjük, mert ha 6^0 igaz, akkor

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x + y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y = \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{aligned}$$

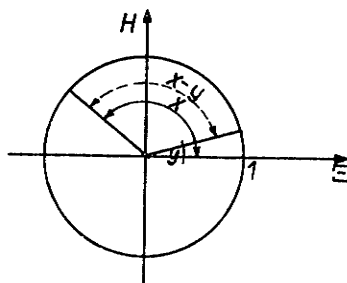
6^0 így igazolható: legyen (56. ábra).

$$\underline{r}_1 = \cos x \cdot \underline{i} + \sin x \cdot \underline{j},$$

$$\underline{r}_2 = \cos y \cdot \underline{i} + \sin y \cdot \underline{j}.$$

Ekkor az $\underline{r}_1$ és $\underline{r}_2$ egységvektorok által bezárt szög koszinusza

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \underline{r}_1 \underline{r}_2 = \cos x \cos y + \\ &+ \sin x \sin y, \end{aligned}$$



56. ábra

amit bizonyítani akartunk. x

7^0 3^0 és 5^0 -ből a $\cos x \cos y \neq 0$ kifejezéssel hányadosuk számlálóját és nevezőjét végigosztva adódik. x

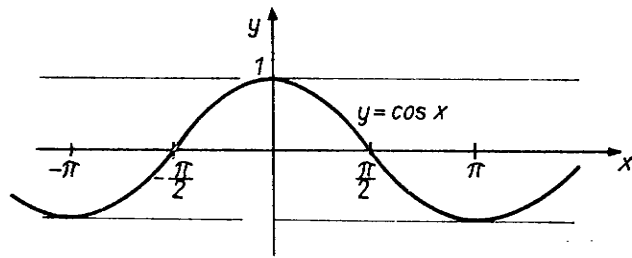
8^0 hasonlóképpen nyerhető 4^0 és 6^0 -ból. x

9^0 3^0 -ból $x = y$ esetében,

10^0 5^0 -ből $x = y$ esetében adódik. Hasonlóképpen nyerhető 7^0 -ból $x = y$ esetében a $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ összefüggés. x

11^0 ill. 12^0 az 1^0 és 10^0 összefüggésből összeadással ill. kivonással és kettővel való osztással adódik. x

13^0 -t 12^0 és 1^0 osztásával nyerjük. x



58. ábra

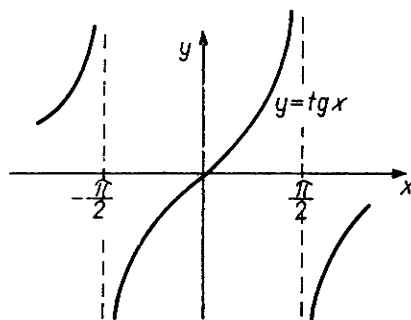
c) $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. A függvény értelmezési tartománya:
 $D_f = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, értékkészlete $\mathbb{R}$. A függvény páratlan ($\sin x$ páratlansága, $\cos x$ párossága folytán):

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$

és már π szerint periodikus:

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$$

ami 7° alkalmazásával közvetlenül adódik.



59. ábra

Célszerű a függvényt egy periódusban, a páratlanság miatt $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -ben vizsgálni.

A függvény folytonos, szigorúan monoton növekedő, $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ -ben alulról konkáv, $[0, \frac{\pi}{2})$ -ben konvex. (59. ábra)

$$\lim_{x \rightarrow +\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Állításaink a $\sin$ és $\cos$ függvény tulajdonságaiból következnek.

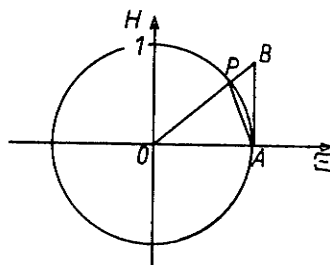
4.24. A későbbiekben fontos szerepe lesz a következő határértéknek:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Bizonyítás. A $\frac{\sin x}{x}$ függvény párossága miatt $\left(\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}\right)$ elég belátnunk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ha ugyanis ez igaz, akkor a bal oldali határérték is csak 1 lehet az $x = 0$ helyen, ezek közös értéke pedig az $x = 0$ -beli határérték. Legyen tehát $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ekkor a trigonometrikus függvények értelmezése miatt a 60. ábrán látható OAP háromszög, OAP körcikk és OAB háromszög területének összehasonlításával adódik:



60. ábra

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{2} \cdot x < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Az egyenlőtlenséget $\frac{x}{\sin x} > 0$ -val végigszorozva adódik:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Mivel $\cos x$ $x = 0$ -ban folytonos, $x \rightarrow +0$ esetén $\cos x \rightarrow \cos 0 = 1$ tehát $\frac{x}{\sin x}$ s így reciproka is $x \rightarrow +0$ esetében - (két 1 -hez tartó korlát közé szorítva) 1-hez kell, hogy tartson, amit bizonyítani akarunk. *

4.25. A trigonometrikus függvényeknek sok fontos alkalmazása van a matematikában, a természettudományokban, a technikában. Szinte minden problémánál, ahol periodikus jelenségekről van szó, előfordulnak.

A periodikus jelenségek közül legegyszerűbbek a harmonikus rezgések. Ezekben valamely mennyiség - például a rezgő pont távolsága az egyensúlyi helyzettől - a következő törvény szerint függ a t időtől:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

E függvény értelmezési tartománya általában $\{t : t > 0\}$, értékkészlete $[-A, A]$. Az A állandót a rezgés amplitudójának, $(\omega t + \varphi_0)$ -t a rezgés fázisának, ennek $t = 0$ -beli értékét, φ_0 -t kezdeti fázisnak, a függvény periódusának $(\frac{2\pi}{\omega})$ -nak reciprokát, $\frac{\omega}{2\pi}$ értékét, ami az időegység alatti rezgések számát adja meg, rezgésszámnak, vagy frekvenciának, ω -t körfrekvenciának nevezzük.

Harmonikus rezgések ábrázolásánál a függvénytranszformáció ismert szabályait alkalmazzuk. $(y = A \sin(\omega t + \varphi_0))$ görbét $y = \sin x$ görbéből $A > 0$ esetén y irányu A -szoros, x irányu $\frac{1}{\omega}$ -szoros nyújtással és ezután x irányu $\frac{\varphi_0}{\omega}$ nagyságú $(-\frac{\varphi_0}{\omega} > 0$ esetén balra történő) eltolással nyerjük.)

Gyakran fordul elő harmonikus rezgések összege, azaz ilyen alakú függvény:

$$y = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

(a harmonikus rezgést végző pontra olyan erő hat, amely a mozdulatlan pontot harmonikus rezgésre kényszerítené). Feladatként tűzzük ki az alábbi tétel igazolását:

4.26. Tétel. Harmonikus rezgőmozgások eredője harmonikus rezgőmozgás, ha az összetevő rezgések frekvenciája megegyezik, periodikus, de nem harmonikus, ha az összetevő rezgések frekvenciája különböző ugyan, de viszonyuk racionális számmal adható meg.

4.27. A trigonometrikus függvények inverzeit, az un. ciklometrikus függvényeket a 4.23.-ban összefoglaltak alapján így értelmezhetjük:

a) $f(x) = \sin x$ a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ számközben szigorúan monoton növekedő, folytonos függvény és $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$. Van tehát az

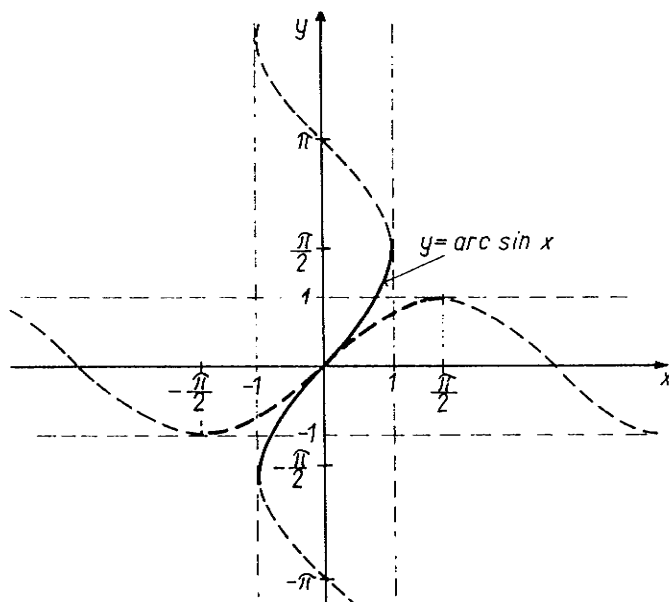
$f(x) = \sin x$ függvénynek $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ -en inverze, amelyre a következő jelölést vezetjük be:

$$f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

$\arcsin x$ jelenti tehát azt az ívet (szöget) mely $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ -be esik és szinusza x :

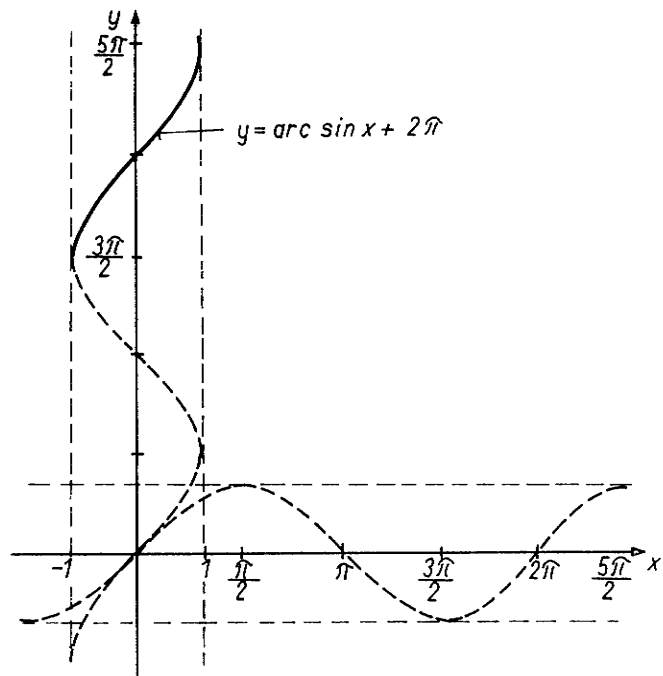
$$\sin(\arcsin x) = x \quad (x \in [-1, 1]).$$

Az $f^{-1}(x) = \arcsin x$ függvény értelmezési tartománya a $[-1, 1]$, értékkészlete a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallum, a függvény páratlan, szigorúan monoton növekedő és folytonos, $[-1, 0]$ -ban konkáv, $[0, 1]$ -ben konvex. Ezek a tulajdonságok az inverz függvényről általánosságban mondottakból következnek (3.30.). A konvexitás-konkavitás elemi módszerekkel nehezebben bizonyítható, erre a IV. fejezetben térünk vissza. A függvény görbéje a 61. ábrán látható.

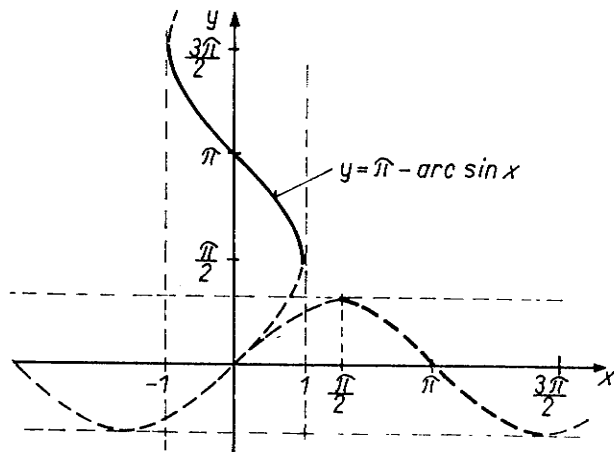


61. ábra

Ha az $y = \sin x$ függvényt a $\left[-\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi, \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right]$ ($k \in \mathbb{N}$) intervallumban (a 62. ábrán speciálisan a $\left[3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban) vizsgáljuk, az ott is szigorúan monoton, folytonos, van tehát inverze, melyet az előbb értelmezett $\arcsin x$ függvényvel így fejezhetünk ki: $\arcsin x \pm 2k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$), (a 62. ábrán $g(x) = \arcsin x + 2\pi$).



62. ábra



63. ábra

Hasonlóképpen az $y = \sin x$ függvényt a $\left[\frac{\pi}{2} \pm 2(k-1)\pi, 3\frac{\pi}{2} \pm 2(k-1)\pi\right]$ ($k \in \mathbb{N}$) intervallumban (a 63. ábrán speciálisan a $\left[\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right]$ számközben) vizsgálva az inverz függvény: $\pi - \arcsin x \pm 2(k-1)\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) (a 63. ábrán $h(x) = \pi - \arcsin x$).

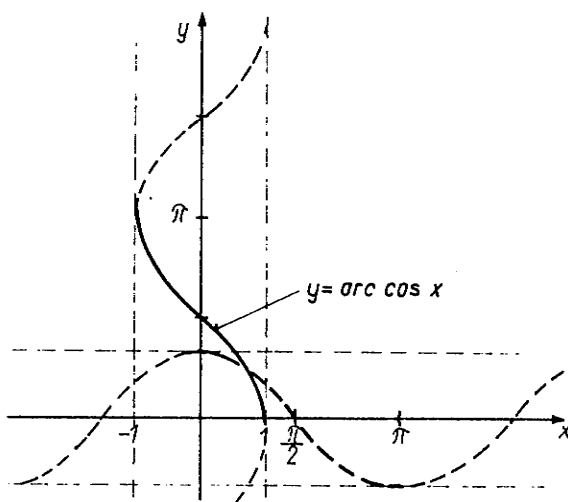
b) $f(x) = \cos x$ a $D = [0, \pi]$ intervallumban szigorúan monoton fogyó, folytonos függvény, $f(D) = [-1, 1]$, így létezik D -n f inverze, melyre a következő jelölést vezetjük be:

$$f^{-1}(x) = \arccos x.$$

$\arccos x$ jelenti tehát azt a $[0, \pi]$ -be eső ívet (szöget), amelynek koszinusza x :

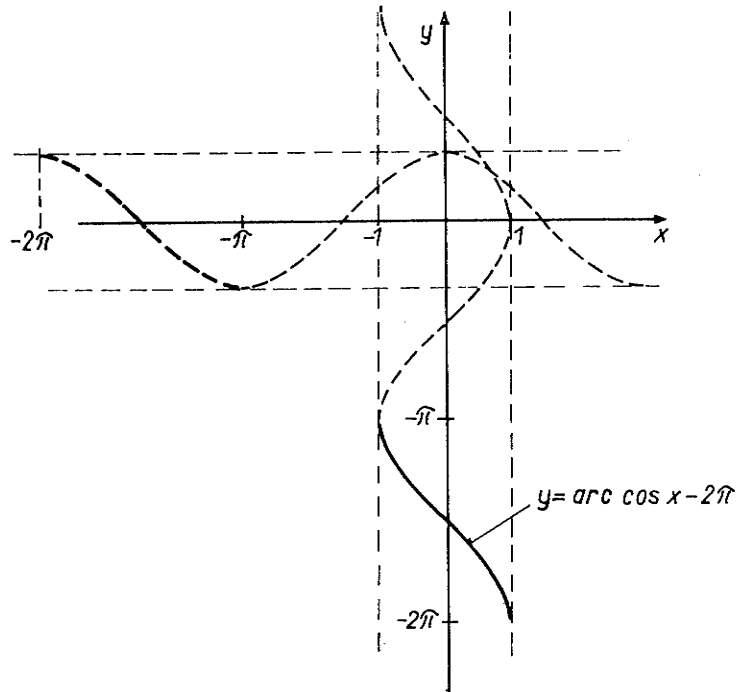
$$\cos(\arccos x) = x \quad (x \in [-1, 1]).$$

Az $f^{-1}(x) = \arccos x$ függvény értelmezési tartománya a $[-1, 1]$, értékkészlete a $[0, \pi]$ intervallum, itt a függvény szigorúan monoton fogyó, folytonos, $[-1, 0]$ -ban konvex, $[0, 1]$ -ben konkáv. Utóbbit később bizonyítjuk, az előző tulajdonságok az inverz függvényről általánosságban elmondottakból következnek (3.30, 64. ábra).



64. ábra

$[0 \pm 2k\pi, \pi \pm 2k\pi]$ -ben ($k \in \mathbb{N}$) $y = \cos x$ inverze $\arccos x \pm 2k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$), míg $[-\pi \pm 2(k-1)\pi, \pm 2(k-1)\pi]$ -ben $y = \cos x$ inverze $-\arccos x \pm 2(k-1)\pi$ ($k \in \mathbb{N}$). A 65. és 66. ábrán speciálisan $y = \cos x$, $x \in [-2\pi, -\pi]$ inverzeként a $k(x) = \arccos x - 2\pi$, ill. $y = \cos x$, $x \in [-\pi, 0]$ inverzeként az $m(x) = -\arccos x$ függvényt szemléltettük.



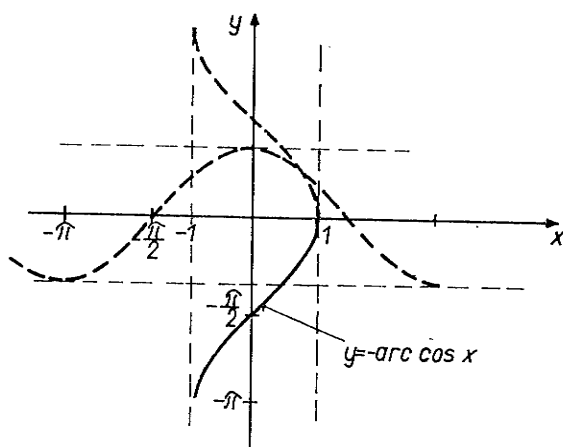
65. ábra

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -ben szigorúan monoton növekedő, folytonos, értékkészlete $(-\infty, +\infty)$. Létezik tehát D -n inverze, ezt így jelöljük:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ jelenti tehát azt a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -be eső ívet (szöveget), amelynek tangense x :

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = x \quad (x \in \mathbb{R}).$$



66. ábra

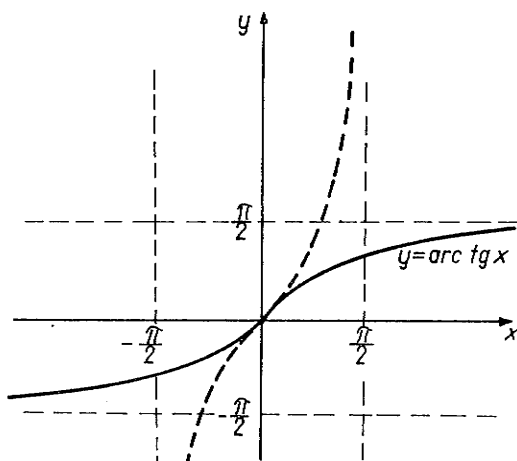
Az $f^{-1}(x) = \arctg x$ függvény értelmezési tartománya a $(-\infty, +\infty)$ intervallum, értékkészlete

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a függvény

páratlan, szigorúan monoton növekedő és folytonos (3.30), $(-\infty, 0)$ -ban konvex, $(0, +\infty)$ -ben konkáv. Utóbbi bizonyítására a IV. fejezetben visszatérünk (67. ábra).

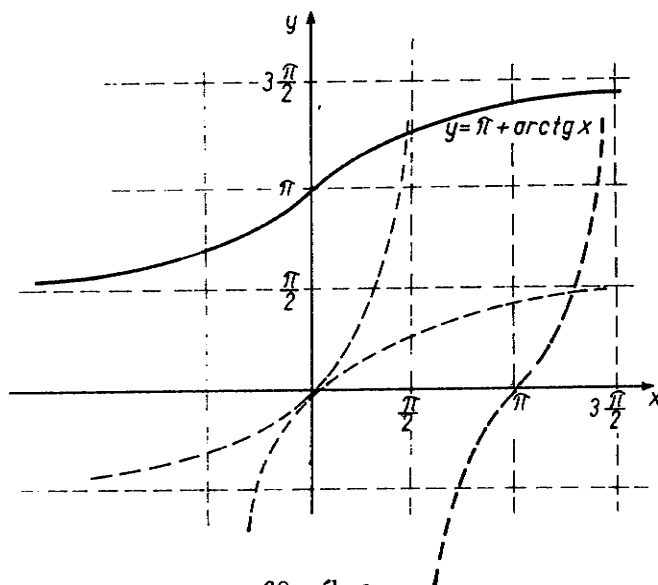
$(-\frac{\pi}{2} \pm k\pi, \frac{\pi}{2} \pm k\pi)$ -

ben $y = \arctg x$ inverze (az előbbiekhöz hasonló okoskodással adódóan) $\arctg x \pm k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$).



67. ábra

A 68. ábrán $y = \arctg x$ ($x \in (-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})$) inverzeként a $\varphi(x) = \arctg x + \pi$ függvényt szemléltettük.



68. ábra

4.28. Feladatok.

1. Vizsgáljuk meg az $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) függvény viselkedését monotonitás szempontjából.
2. Vizsgáljuk meg az $f(x) = \frac{1}{x^n}$ függvény viselkedését monotonitás szempontjából.
3. Bizonyítsuk be, hogy $y = \frac{1}{x}$, ill. $y = \frac{A}{x}$ egyenlőszáru hiperbola.
4. Bizonyítsuk be, hogy $y = a^x$ $0 < a < 1$ esetén monoton fogyó, $a > 1$ esetén monoton növekedő, ($a \in \mathbb{R}$).
5. Bizonyítsuk be, hogy $y = a^x$ kielégíti az $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, ill. $(a^x)^y = a^{xy}$ összefüggéseket ($a \in \mathbb{R}$).
6. Bizonyítsuk be, hogy $y = \log_a x$ $0 < a < 1$ esetén konvex, $a > 1$ esetén konkáv.
7. Mutassuk meg, hogy az $y = a^x$ és az $y = a^{-x}$ görbe egymásnak tükörképe az y tengelyre nézve. Hogyan kapható meg $y = a^x$ -ből $y = b^x$ ($a > 0$, $b > 0$; $a \neq 1$, $b \neq 1$)?
8. Mutassuk meg, hogy az $y = \log_a x$ és $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ görbe egymásnak tükörképe az x tengelyre nézve. Hogyan kapható meg $y = \log_a x$ -ből $y = \log x$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$)?

9. Bizonyítsuk be, hogy harmonikus rezgőmozgások eredője harmonikus, ha az összetevő rezgések frekvenciája megegyezik, és periodikus, ha a rezgések frekvenciájának viszonya racionális.
10. Bizonyítsuk be, hogy $\arcsin x$ és $\arctg x$ páratlan függvény, $\arccos x$ azonban sem nem páros, sem nem páratlan.
11. Igazoljuk, hogy

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{ ill.}$$

$$\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

IV. FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLÁSA

1. Differenciálhányados

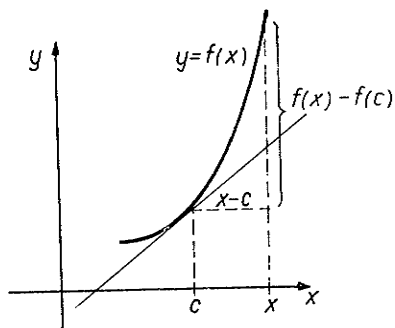
1.1. A határérték fogalmának bevezetésénél láttuk (III.2.2.), hogy a nem egyenletes mozgást végző, t idő alatt $s(t)$ utat megtevő test t_0 pillanatbeli sebességét a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

határérték adta meg.

Hasonlóképpen az f függvény görbéjének $x = c$ abszcisszájú pontjában az érintő meredekségét

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$



69. ábra

szolgáltatta (69. ábra).

Ha változó intenzitású áram tölt fel egy kondenzátort, és a t_n időpontig szállított töltésmennyiség $q(t_n)$, akkor a t_0 pillanatbeli áramot közelítőleg megadja

$$\frac{q(t_n) - q(t_0)}{t_n - t_0}$$

míg e hányados határértéke $t_n \rightarrow t_0$ esetén a t_0 pillanatbeli áram pontos értékének tekinthető:

$$\lim_{t_n \rightarrow t_0} \frac{q(t_n) - q(t_0)}{t_n - t_0} = i(t_0).$$

A fenti példákban követett okoskodás közös matematikai tartalma a következő:

Egy f függvényre vizsgáljuk a függvényérték változására jellemző

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

határértéket. Ha ez a határérték létezik, akkor ezt tekintjük a függvény $x = c$ pont körüli változásának sebességét kifejező számadatnak, és az f függvény $x = c$ pontbeli differenciálhányadosának nevezzük.

1.2. Definíció. Legyen f értelmezve a c hely valamely környezetében. f differenciálható a c helyen, ha létezik (véges)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

határérték. Ezt a határértéket az f függvény c -beli differenciálhányadosának, vagy deriváltjának nevezzük.

Az f függvény c -beli differenciálhányadosát így jelöljük:

$$f'(c), \text{ ill. } \dot{f}(c), \left[\frac{d f(x)}{dx} \right]_{x=c}, \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=c}, \frac{df}{dx}(c), (Df)(c)$$

vagy az $y = f(x)$ jelölés mellett

$$y'(c), \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=c}$$

Az

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

un. különbségi hányadost, vagy differenciahányadost másképp is jelölhetjük. Ezekkel a jelölésekkel a derivált

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \text{ ill. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

1.3. Amint azt a második bevezető példában bemutattuk, a differenciálhányados geometriai jelentése a vizsgált f függvény görbéjéhez

a $(c, f(c))$ pontban illesztett érintő meredeksége. Ennek ismeretében, az érintő egyenlete könnyen felírható:

$$y = f'(c)(x - c) + f(c).$$

1.4. Definíció.

$$\lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \left(\lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right)$$

az f függvény c -beli bal oldali (jobb oldali) deriváltja.

Például $y = |x|$ $x = 0$ -beli jobb ill. bal oldali deriváltja

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h|}{h} = +1, \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1.$$

1.5. Tétel. f a c helyen akkor és csakis akkor differenciálható, ha jobbról is, balról is differenciálható és jobb valamint bal oldali differenciálhányadosa megegyezik.

A határértékről elmondottak értelmében (III.2.13.) állításunk nyilvánvaló.

Pl. az $|x|$ függvény $x = 0$ -ban jobbról is, balról is differenciálható - mint előbb láttuk - e deriváltak azonban különbözők, így (bár pl. a függvény $x = 0$ -ban is folytonos) $x = 0$ -ban $|x|$ nem differenciálható. E példából látható, hogy a folytonosság a differenciálhatóságnak nem elégséges feltétele. Látni fogjuk azonban, hogy szükséges feltétel. Mielőtt ezt tételben kimondanánk, adjunk meg egy szükséges és elégséges feltételt a differenciálhatóságra:

1.6. Tétel. f akkor és csakis akkor differenciálható a c helyen, ha a c és $c + h$ helyekhez tartozó megváltozása az

$$\Delta f = f(c + h) - f(c) = A h + \varepsilon h$$

alakban adható meg, ahol az A csak c -től függő (h -től független) állandó, és $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$. Az A állandó f c -beli differenciálhányadosa:

$$A = f'(c).$$

A (x) összefüggést másképp még $\Delta f = Ah + o(h)$ alakban is írhatjuk (III. 2.24), ill. a $h = x - c$ jelöléssel és átrendezéssel

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \varepsilon(x)(x - c)$$

adódik, ahol $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow c$, tehát $\varepsilon(x-c) = o(x-c)$. Az így átfogalmazott állítás azt mutatja, hogy a differenciálható f függvény c -ben jól közelíthető meg lineáris függvénnyel.

Bizonyítás. A tételben kimondott feltétel szükséges, hiszen ha f a c helyen differenciálható, akkor

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c),$$

ami másképp így is írható

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) + \varepsilon,$$

ahol $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$. h -val átszorozva, utóbbi eredményünkből a tételben kimondott (x) feltétel adódik.

A tételben kimondott feltétel elégséges is. Ha ui. a (x) összefüggés fennáll, akkor abban $h \neq 0$ -val végigosztva

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = A + \varepsilon$$

adódik, s innen $h \rightarrow 0$ esetén, mivel ekkor $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = A = f'(c)$$

adódik, ami azt jelenti, hogy f a c helyen differenciálható.

1.7. Megjegyzés. Definiálhattuk volna f c -beli differenciálhatóságát és c -beli differenciálhányadosát az 1.6.-beli (x) összefüggés fennállásával is, ekkor az 1.4. definíció állítása fogalmazható meg úgy, mint a differenciálhatóság szükséges és elégséges feltétele.

Az 1.6. tétel segítségével könnyen igazolható az alábbi állítás:

1.8. Tétel. Ha f differenciálható a c helyen, akkor ott folytonos is. (A folytonosság a differenciálhatóságnak szükséges feltétele.)

Bizonyítás. Ha f differenciálható, akkor 1.6. (x) értelmében

$$|f(c+h) - f(c)| = |f'(c)h + \varepsilon h| = |f'(c) + \varepsilon| \cdot |h| < \eta$$

ha $|h|$ már elég kicsiny, ami γ tetszőleges volta miatt épp azt jelenti, hogy $\lim_{h \rightarrow 0} f(c+h) = f(c)$, vagyis f folytonos a c helyen.

Az előbbiekből értelemszerűen adódik f (a,b) -beli, ill $[a,b]$ -beli differenciálhatóságának definíciója.

1.9. Definíció. f (a,b) -ben differenciálható, ha minden $x \in (a,b)$ helyen differenciálható.

1.10. Definíció. f $[a,b]$ -ben differenciálható, ha (a,b) -ben differenciálható, $x = a$ -ban jobbról, $x = b$ -ben balról differenciálható.

1.11. Definíció. Az f függvény differenciálhányados (vagy derivált) függvényének nevezzük, és f' -vel jelöljük azt a függvényt, amely mindazon x helyen van értelmezve, ahol f differenciálható, és értéke itt $f'(x)$. Tehát $D_f \subset D_{f'}$.

Természetesen attól, hogy f differenciálható c -ben, nem kell, hogy ott f' is differenciálható legyen. Ha azonban ez a helyzet, a következő értelmezéssel, elnevezéssel és jelöléssel élünk:

1.12. Definíció. Ha az f' derivált függvény differenciálható c helyen, differenciálhányadosát az f függvény c -beli másodrendű (második) differenciálhányadosának nevezzük és így jelöljük:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = f''(c) = \ddot{f}(c) = \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right]_{x=c} = \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{x=c} = (D^2 f)(c).$$

(az utóbbi jelölésnél $y = f(x)$).

Ha $f'(c)$ létezik, f -et c -ban kétszer differenciálhatónak mondjuk.

Hasonlóképpen értelmezhető a c -beli k -szori differenciálhatóság, a k -adik (k -adrendű) derivált, melynek jelölése (nehogy össze tévesszük a k -adik hatvány jelölésével)

$$f^{(k)}(c) = \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=c} = \left[\frac{d^k y}{dx^k} \right]_{x=c} = (D^k f)(c).$$

Az egységes jelölés érdekében szokás magát f -et $f^{(0)}$ -sal is jelölni.

2. Differenciálási szabályok

Először - tulajdonképpen egyszerű határértékszámítási feladatként - néhány elemi függvény deriváltját határozzuk meg, ezt követően differenciálható függvények összegének, állandószorosának, szorzatának, hányadosának, az összetett és az inverz függvény differenciálási szabályának levezetését adjuk meg, végül ezek felhasználásával kiegészítjük az elemi függvények körét, meghatározzuk minden elemi függvény deriváltját.

2.1. Tétel. Az $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) függvény $(-\infty, +\infty)$ -ben differenciálható és deriváltja

$$f'(x) = n x^{n-1}.$$

Bizonyítás. Állításunk igazolásánál felhasználjuk az

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

közvetlenül is könnyen belátható, ismert, azonosságot.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1})}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} ((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}) = n x^{n-1}, \end{aligned}$$

hiszen az összeg - melynek határértékét számítjuk - n tagból áll, és mindegyik tag $h \rightarrow 0$ esetében x^{n-1} -hez tart.

Az előbbi gondolatmenet $n = 0$ esetében nem alkalmazható, ekkor azonban közvetlenül adódik, hogy $f = x^0 = 1$ deriváltja

$$f' = 0,$$

hiszen a különbségi hányados azonosan 0 , így szükségképpen határértéke, a derivált is 0 . Tehát "formálisan" a 2.1. szabály ebben az esetben is helyes eredményt ad. Meg fogjuk látni, hogy teljes általánosság-

ban, tetszőleges valós kitevő esetén is ez lesz a helyzet (erre az általános hatványfüggvény (x^a , $a \in \mathbb{R}$) fogalmának bevezetése után térünk majd ki).

2.2. Tétel. $f(x) = \sin x$ ($-\infty, +\infty$) -ben differenciálható és deriváltja

$$f'(x) = \cos x.$$

Bizonyítás. Felhasználva a III.4.22.3^o összefüggést adódik:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{1 - \cos h}{h} \right) = \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 = \cos x \end{aligned}$$

hiszen III.4.24. értelmében

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} &= 1, \quad \text{és} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin \frac{h}{2} = 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

(utóbbi okoskodásunkban felhasználtuk a III.4.22.12^o összefüggést, és azt a tényt, hogy $\sin x$ folytonos, tehát $h \rightarrow 0$ esetén

$$\sin \frac{h}{2} \rightarrow \sin \frac{0}{2} = \sin 0 = 0).$$

Teljesen hasonló módon igazolható, hogy

2.3. Tétel. $f(x) = \cos x$ ($-\infty, +\infty$) -ben differenciálható és deriváltja

$$f'(x) = -\sin x.$$

Általánosságban a következő differenciálási szabályokat mondhatjuk ki:

2.4. Tétel. Ha f és g differenciálható, akkor ugyanott $f + g$ is differenciálható, és deriváltja

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

A tétel állítása nem fordítható meg, mutassuk meg alkalmas példával, lehetséges, hogy $f + g$ differenciálható, de f és g külön-külön nem az.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x), \end{aligned}$$

hiszen a feltétel értelmében az összeg két tagjának határértéke külön-külön létezik. $\times$

2.5. Tétel. Ha f differenciálható, és c állandó, akkor ugyanott cf is differenciálható, és

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

Bizonyítás.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x).$$

2.6. Megjegyzés. 2.1., 2.4., 2.5. következményeként állíthatjuk, hogy a polinomok mindenütt differenciálhatók, tagonkénti deriválással számítható ki a differenciálhányados, amely az eredeti polinomnál egy-egy alacsonyabb fokszámú polinom lesz. Pl.

$$(5x^4 - 3x^2 + \sqrt{2}x - \pi)' = 20x^3 - 6x + \sqrt{2}.$$

2.7. Tétel. Ha f és g differenciálhatók, akkor ugyanott $f \cdot g$ is differenciálható és

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) \cdot g(x+h)) - (f(x) \cdot g(x))}{h} = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} + \frac{f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \right) = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \\ & = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \end{aligned}$$

hiszen feltevésünk értelmében f is, g is differenciálható, és g differenciálhatóságából következik folytonossága (1.8.), tehát ha $h \rightarrow 0$ akkor $g(x+h) \rightarrow g(x)$. Ezzel állításunkat igazoltuk. $\times$

2.8. Tétel. Ha f és g differenciálhatók, akkor ugyanott - feltéve, hogy a vizsgált helyen $g \neq 0$ - $\frac{f}{g}$ is differenciálható és deriváltja

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

Bizonyítás. Közvetlenül azt fogjuk belátni, hogy ott, ahol $g(x) \neq 0$ és g differenciálható,

$$\left[\frac{1}{g(x)} \right]' = - \frac{g'(x)}{g(x)^2},$$

hiszen ebből a szorzat differenciálási szabályát alkalmazva állításunk már adódik.

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} (-1) \left(\frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = - \frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x), \end{aligned}$$

hiszen g differenciálhatóságából következik folytonossága, így tehát $h \rightarrow 0$ mellett $g(x+h) \rightarrow g(x)$. $\times$

2.9. Megjegyzés. A 2.1. és 2.4.-2.8. tételek értelmében állíthatjuk, hogy a racionális egész és törtfüggvények mindenütt, ahol értelmezve vannak, differenciálhatók.

2.10. Megjegyzés. A $\sin x$, a $\cos x$ függvény, valamint a tört differenciális szabályának ismeretében ki tudjuk számítani a $\operatorname{tg} x$ differenciálhányadosát.

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

(az utolsó lépésben alkalmaztuk a trigonometrikus függvények un. négyzetes összefüggését (III.4.22.1^o)).

2.11. Tétel. (Az összetett függvény differenciálási szabálya, az un. láncszabály.) Ha g a c helyen és f a $g(c)$ helyen differenciálható, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is differenciálható a c helyen és deriváltja

$$(D(f \circ g))(c) = (Df)(g(c)) \cdot (Dg)(c),$$

vagy a g függvény és így az $f \circ g$ függvény független változóját x -szel jelölve:

$$\left[\frac{d(f \circ g)(x)}{dx} \right]_{x=c} = \left[\frac{d(f(g(x)))}{dx} \right]_{x=c} = \left[\frac{df(g)}{dg} \right]_{g=g(c)} \cdot \left[\frac{dg(x)}{dx} \right]_{x=c}$$

Bizonyítás. Az állítás bizonyítása igen egyszerű, ha még azt is feltesszük, hogy $g'(c) \neq 0$, amiből következik, hogy a c hely kis környezetében a g függvény különbségi hányadosa, ill. annak számlálója nullától különböző, tehát az $f \circ g$ függvény különbségi hányadosában bővíthetünk $g(x) - g(c) \neq 0$ -val:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} &= \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right) = \\ &= \left[\lim_{\substack{u \rightarrow b \\ u=g(x) \\ b=g(c)}} \frac{f(u) - f(b)}{u - b} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{df}{du} \right]_{u=g(x)} \cdot \left[\frac{dg}{dx} \right]_{x=c} = \left[\frac{df}{dg} \right]_{g=g(c)} \cdot \left[\frac{dg}{dx} \right]_{x=c},$$

amit bizonyítani akartunk. $(g(x))$ folytonossága miatt áll, hogy $x \rightarrow c$ esetén $u = g(x) \rightarrow g(c) = b$.)

Az előbbi megszorító $g'(c) \neq 0$ kikötést nem téve, állításunk így igazolható:

Az $u = g(x)$, $b = g(c)$ jelöléssel, mivel f a b helyen a fel-tétel értelmében differenciálható

$$\frac{f(u) - f(b)}{u - b} \rightarrow f'(b), \quad \text{ill.} \quad \frac{f(u) - f(b)}{u - b} - f'(b) \rightarrow 0, \quad \text{ha} \\ u \rightarrow b,$$

így a következő, a b helyen folytonos "segédfüggvény" értelmezhető:

$$h(u) = \begin{cases} \frac{f(u) - f(b)}{u - b} - f'(b), & \text{ha } u \neq b, \\ 0, & \text{ha } u = b. \end{cases}$$

Ezzel a segédfüggvénnyel kifejezve $f \circ g$ különbségi hányadosának számlálója

$$f(g(x)) - f(g(c)) = f(u) - f(b) = h(u)(u - b) + f'(b)(u - b),$$

tehát

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{h(g(x))(g(x) - g(c)) + f'(b)(g(x) - g(c))}{x - c}$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} \left(h(g(x)) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + f'(b) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right) =$$

$$= 0 \cdot g'(c) + f'(b) \cdot g'(c) = \left[\frac{df}{du} \right]_{u=b} \left[\frac{du}{dx} \right]_{x=c} = \left[\frac{df}{dg} \right]_{g=g(c)} \left[\frac{dg}{dx} \right]_{x=c},$$

hiszen g differenciálhatóságából következő folytonossága miatt $x \rightarrow c$ esetében $u = g(x) \rightarrow g(c) = b$, míg ekkor az $u = b$ -ben folytonos $h(u) \rightarrow h(b) = 0$. *

2.12. Példák.

Az eddig megismert differenciálási szabályok alkalmazásával számítsuk ki az alábbi függvények első differenciálhányadosát:

$$1^o y = (x^2 - 2x + 3)^8.$$

$$y = f \circ g, \text{ ahol } f = g^8, \text{ és } g = x^2 - 2x + 3, \text{ tehát}$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \left[\frac{df}{dg} \right]_{g=x^2-2x+3} \cdot \frac{dg}{dx} = [8g^7]_{g=x^2-2x+3} \cdot (2x - 2) = \\ &= 8(x^2 - 2x + 3)^7 (2x - 2). \end{aligned}$$

$$2^o y = \sin x^3.$$

$$y = f \circ u, \text{ ahol } f = \sin u, \text{ és } u = x^3, \text{ tehát}$$

$$\frac{df}{dx} = \left[\frac{df}{du} \right]_{u=x^3} \cdot \frac{du}{dx} = [\cos u]_{u=x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

$$3^o y = \sin^3 x = (\sin x)^3.$$

$$y = f \circ u, \text{ ahol } f = u^3, \text{ és } u = \sin x, \text{ tehát}$$

$$\frac{df}{dx} = \left[\frac{df}{du} \right]_{u=\sin x} \cdot \frac{du}{dx} = [3u^2]_{u=\sin x} \cdot \cos x = 3\sin^2 x \cos x.$$

Alkalmazható a láncszabály többszörösen összetett függvény esetében is, ilyenkor, vagy ha pl. egy tört számlálója, nevezője összetett függvény, sokszor mellőzzük az előbbi részletesebb kírást:

$$4^o y = \cos^2(3x - 1).$$

$$y = f \circ u, \text{ ahol } f = u^2, u = \cos t, t = 3x - 1, \text{ tehát}$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \left[\frac{df}{du} \right]_{u=\cos(3x-1)} \cdot \left[\frac{du}{dt} \right]_{t=3x-1} \cdot \frac{dt}{dx} = \\ &= [2u]_{u=\cos(3x-1)} \cdot [(-\sin t)]_{t=3x-1} \cdot 3 = -6 \cos(3x-1) \cdot \sin(3x-1). \end{aligned}$$

$$5^o \quad y = \frac{x^2 \cos 3x - 1}{\sin \frac{1}{x}}$$

$$y' = \frac{(x^2 \cos 3x - 1)' \cdot \sin \frac{1}{x} - (x^2 \cos 3x - 1) \left(\sin \frac{1}{x}\right)'}{\left(\sin \frac{1}{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{(2x \cos 3x - x^2 \sin 3x \cdot 3) \sin \frac{1}{x} - (x^2 \cos 3x - 1) \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\sin^2 \frac{1}{x}}.$$

E példában szerepelt az $\frac{1}{x} = x^{-1}$ függvény is, melynek deriváltjaként $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ adódott, formálisan tehát a 2.1. differenciálási szabály érvényben maradt. A törtfüggvény differenciálási szabályának, ill. a speciális $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ szabálynak felhasználásával könnyen igazolható, hogy általánosságban is

$$6^o \quad y = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad \text{deriváltja}$$

$$y' = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}.$$

2.13. Tétel. (Az inverz függvény differenciálási szabálya.)

Ha f szigorúan monoton és folytonos a c hely egy $K(c, \delta)$ környezetében, c -ben differenciálható és $f'(c) \neq 0$, akkor a fentételek miatt létező inverze, f^{-1} (mely III.3.30 értelmében $b = f(c)$ egy $K(b, \varepsilon)$ környezetében szintén szigorúan monoton és folytonos) differenciálható $b = f(c)$ -ban, és deriváltja

$$f^{-1}{}'(b) = f^{-1}{}'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Bizonyítás. Ha $x \in K(c, \delta)$, $y = f(x)$, ill. $x = f^{-1}(y)$, akkor f^{-1} b -beli folytonossága miatt

$$x = f^{-1}(y) \rightarrow c = f^{-1}(b), \quad \text{ha } y \rightarrow b,$$

az f^{-1} függvény különbségi hányadosának határértéke tehát

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}} = \frac{1}{f'(c)}.$$

($f'(c) \neq 0$, ezért a c -hez elég közeli x helyekre $y \neq b$, tehát mivel f^{-1} szigorúan monoton, $x \neq c$, s így a különbségi hányadosban végzett átalakítás minden további kikötés nélkül elvégezhető volt.)

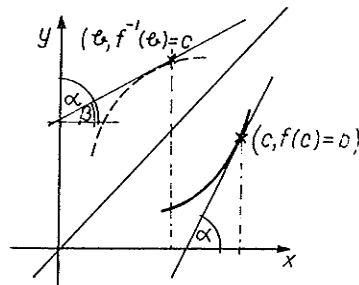
2.14. Megjegyzés. A differenciáhányados geometriai jelentéséből következik, hogy az

$$f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(c)}$$

összefüggés azt fejezi ki, hogy az f függvény görbéjéhez az $(c, f(c))$ pontban, illetve inverzéhez, f^{-1} -hez a $(b, f^{-1}(b))$ pontban illeszkedő érintő abszcisszatengellyel bezárt szögeire, α -ra és β -ra

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

vagyis α és β egymás pótszögei.
(70. ábra)



70. ábra

2.15. Megjegyzés. Az inverz függvény differenciálási szabályának levezetésében szereplő c hely helyett tetszőleges x helyre, [amennyiben van olyan $K(x, \tilde{y})$ környezet, melyben f szigorúan monoton, folytonos, $f'(x) \neq 0$] az $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ jelöléssel mondható, hogy az $f^{-1}(y)$ inverz függvény differenciálható és deriváltja

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \left[\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} \right]_{x=f^{-1}(y)} \quad \text{ill. röviden} \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

2.16. Az $f(x) = x^n$ ($x > 0$, $n \in \mathbb{N}$) függvény inverzének, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ -nek deriváltja a 2.15. megjegyzés értelmében

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1},$$

láthatjuk tehát, hogy formálisan a 2.1. differenciálási szabály most is érvényes.

A láncszabály alkalmazásával még több is mondható. Legyen $y = x^a$, ahol $a = \frac{p}{q}$ (p, q egész és relatív prim). Ekkor összetett függvényünk

$$y = \varphi \circ u, \quad \varphi = u^p, \quad u = x^{\frac{1}{q}}$$

alakban is felírható, tehát

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \left[\frac{d\varphi}{du} \right]_{u=x^{\frac{1}{q}}} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{du}{dx} = \left[pu^{p-1} \right]_{u=x^{\frac{1}{q}}} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q} - 1} \\ &= \frac{p-1}{q} \cdot \frac{1-q}{q} \cdot x^{\frac{1}{q} - 1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q} - 1} = ax^{a-1}. \end{aligned}$$

Ha a tetszőleges racionális kitevő akkor tehát igaz, hogy

$$(x^a)' = ax^{a-1}.$$

Mint később látni fogjuk, a tetszőleges valós kitevőre értelmezett általános hatványfüggvény is a fenti differenciálási szabályt követi.

2.17. Az inverz függvény differenciálási szabályának alkalmazásával határozhatjuk meg a trigonometrikus függvények III.4.27.-ben értelmezett inverzeinek, az un. ciklometrikus függvényeknek differenciálhányadosát.

a) Az $f(x) = \sin x$ ($x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) függvény inverzének az $f^{-1}(x) = \arcsin x$ függvénynek (III.4.27.) deriváltja a 2.15. értelmében

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(A négyzetgyököket azért kell pozitív előjellel venni, mert $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -ben a koszinusz függvény pozitív.)

b) Az $f(x) = \cos x$ ($x \in (0, \pi)$) függvény inverzének az $f^{-1}(x) = \arccos x$ függvénynek hasonlóképpen adódik a deriváltja:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^{-1}(x) &= \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

(A négyzetgyököket ismét azért kellett pozitív előjellel venni, mert $(0, \pi)$ -ben a szinusz függvény pozitív. A deriváltat egyébként az $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ azonosság felhasználásával is megkaphattuk volna.)

c) Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ ($x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) függvény inverzének, az $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ függvénynek (III.4.27.) deriváltja

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

2.18. A III.4.11.-ben definiált a^x ($a > 0$, $a \in \mathbb{R}$) exponenciális függvény differenciálhatóságát, majd inverzének, a $\log_a x$ függvénynek differenciálhatóságát az alábbiakban fogjuk bebizonyítani.

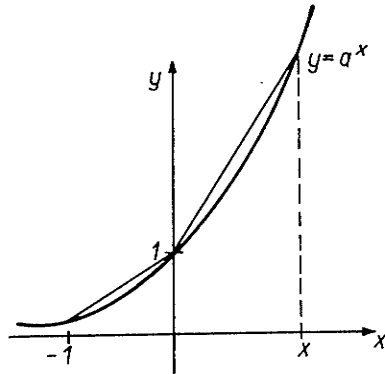
2.19. Tétel. a^x ($a > 0$, $a \in \mathbb{R}$) minden x helyen differenciálható.

Bizonyítás. Először azt látjuk be, hogy a^x az $x = 0$ helyen differenciálható, ebből könnyen adódik majd tetszőleges x helyre a differenciálhatóság.

Az a^x függvény x és 0 helyekhez tartozó különbségi hányadosa

$$\frac{a^x - a^0}{x - 0} = \frac{a^x - 1}{x}$$

az a^x függvény konvex volta miatt $x > 0$ esetén monoton növekedő, és ha x jobbról tart 0 felé ($x \rightarrow +0$), nagyobb marad, mint pl. az $y = a^x$ görbe $x = -1$ és $x = 0$ abszcisszáju pontjait összekötő húr meredeksége



71. ábra

$$\frac{a^{-1} - 1}{-1}$$

(71. ábra). Kell tehát, hogy a fenti különbségi hányadosnak $x \rightarrow +0$ esetén véges (jobb oldali) határértéke legyen, azaz létezik

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^x - 1}{x} = C_a,$$

ahol C_a -val jelöltük a^x -nek a 0 helyhez tartozó jobb oldali differenciálhányadosát. A fentiekből az is kitűnik, hogy $a > 1$ esetén $C_a > 0$.

Belátjuk, hogy $x = 0$ -ban a^x bal oldali differenciálhányadosa is C_a . Ha ugyanis $x < 0$, a $-x = h$ jelöléssel ($h > 0$)

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{a^{-h} - 1}{-h} = \frac{1 - a^{-h}}{h} = \frac{1}{h} \frac{a^h - 1}{h},$$

és így

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \frac{a^h - 1}{h} = \frac{1}{a^0} C_a = C_a,$$

hiszen a^x folytonossága miatt $h \rightarrow +0$ esetén $a^h \rightarrow a^0 = 1$.

Bebizonyítottuk tehát, hogy a^x az $x = 0$ helyen jobbról is, balról is differenciálható, jobb ill. bal oldali deriváltja megegyezik, (C_a), tehát a^x differenciálható $x = 0$ -ban és

$$\left[\frac{d a^x}{dx} \right]_{x=0} = C_a.$$

C_a pontos értékét még nem ismerjük. Ennek meghatározásáról még e pontban szó lesz (lásd 2.25.).

Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ helyre a^x differenciálhatóságát így igazoljuk: az x és $x + h$ helyekhez tartozó különbségi hányados

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{(x+h) - x} = a^x \frac{a^h - 1}{h} \rightarrow a^x \cdot C_a, \text{ ha } h \rightarrow 0,$$

amint azt az előbb bebizonyítottuk. Tehát

$$\frac{d a^x}{dx} = a^x \cdot C_a,$$

vagyis az a^x függvény differenciálhányadosa az a^x függvényértékkel arányos.

2.20. Speciálisan az 1^x ($x \in \mathbb{R}$), ill. $f(x) = 1$ függvényénél a deriváltban szereplő C_1 együttható zérus. Annak érdekében, hogy beláthassuk, van olyan alapu exponenciális függvény, melynél a deriváltban szereplő arányossági tényező éppen 1, vagyis melynek deriváltja maga a függvény, a következő tételt bizonyítjuk:

2.21. Tétel. Ha az a^x exponenciális függvény alapja befutja a pozitív valós számok összességét, akkor az a^x exponenciális függvény deriváltjában szereplő C_a szám (a^x deriváltja $x = 0$ -ban) minden valós értéket felvesz.

Bizonyítás. Legyen c tetszőleges valós szám. Azt állítjuk, hogy pl. az

$$a = 2^{\frac{c}{C_2}}$$

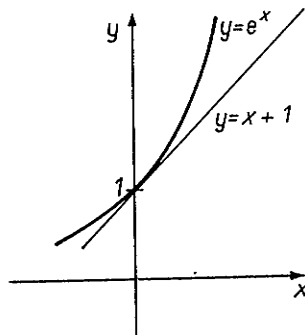
számhoz éppen $C_a = c$ tartozik. Valóban

$$C_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{\frac{c}{C_2} h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{\frac{ch}{C_2}} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{ch}{C_2} - 1}{\frac{c}{C_2} h} \cdot \frac{c}{C_2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2^u - 1}{u} \cdot \frac{c}{C_2} = C_2 \frac{c}{C_2} = c,$$

amint azt állítottuk.

2.22. Definíció. Annak az exponenciális függvénynek az alapját, melynek $x = 0$ -ban a differenciáhányadosa 1 (vagy más-
képp kifejezve, melynek deriváltjában az arányossági tényező 1) e -vel jelöljük, és a kapott függvényt e alapú exponenciális függvénynek (később röviden az exponenciális függvénynek) nevezzük. Más alap esetén hangsúlyozottan "a alapú exponenciális függvény"-ről beszélünk.



72. ábra

$$\frac{d e^x}{dx} = e^x,$$

$$\left[\frac{d e^x}{dx} \right]_{x=0} = 1.$$

$y = e^x$ görbéhez tehát $x = 0$ -ban 45°-os irányszögű érintő illeszkedik (az érintő egyenlete $y = x + 1$) (72. ábra).

Mint később látni fogjuk: $e = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = 2,718\dots$
 e irracionális szám.

2.23. $f(x) = e^x$ szigorúan monoton, folytonos, deriváltja $e^x > 0$, van tehát $\mathbb{R}$ -ben szigorúan monoton, folytonos inverze

$$f^{-1}(x) = \log_e x$$

vagy rövidebben $\ln x$. Ezt a függvényt természetes logaritmusnak (logaritmus naturálisnak) is nevezik. Deriváltja (lásd 2.15.):

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Eredményünket felhasználva az $y = \ln x = \log_e x$ függvényhez $x = 1$ -ben illeszkedő érintő meredeksége

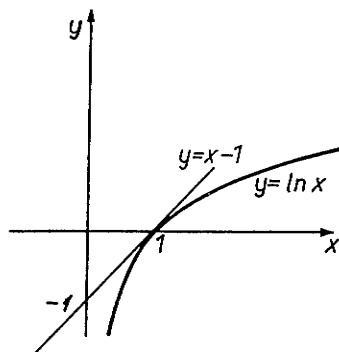
$$\left[\frac{d \ln x}{dx} \right]_{x=1} = \left[\frac{1}{x} \right]_{x=1} = 1,$$

tehát az érintő egyenlete

$$y = x - 1.$$

Mivel $e > 1$, $y = \ln x$ szigorúan monoton növekedő, folytonos, konkáv (lásd III.4.15-4.17) (73. ábra).

2.24. $y = \ln x$ deriváltjának ismeretében könnyen kiszámítható tetszőleges $a > 0$, $a \neq 1$ alap ($a \in \mathbb{R}$) esetében $y = \log_a x$ deriváltja, nem kell mást tennünk, mint a III.4.18. 4^o azonossággal átírni az a alapu logaritmust e alapu logaritmusra:



73. ábra

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a},$$

vagyis

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{d \frac{\ln x}{\ln a}}{dx} = \frac{1}{\ln a} \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}.$$

2.25. Az a^x exponenciális függvényről 2.19.-ben beláttuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ helyen differenciálható, és deriváltja

$$(a^x)' = C_a \cdot a^x,$$

ahol

$$C_a = \left[\frac{d a^x}{dx} \right]_{x=0},$$

ennek az állandónak azonban tényleges értékét még nem adtuk meg. Az e^x , $\ln x$ függvény és az eddig megismert differenciálási szabályok segítségével most meg tudjuk már határozni a C_a állandó értékét.

Nyilván $a = e^{\ln a}$ ($\ln a = \log_e a$), vagyis

$$a^x = e^{x \ln a},$$

tehát

$$\begin{aligned} \frac{d a^x}{dx} &= \frac{d e^{x \ln a}}{dx} = e^{x \ln a} (x \ln a)' = \ln a e^{x \ln a} = \\ &= \ln a \cdot a^x. \end{aligned}$$

Mint láthatjuk, $C_a = \ln a$.

2.26. Definíció. Az e^x és $\ln x$ függvény segítségével (a 2.25.-ben követett okoskodáshoz hasonlóan) értelmezzük a pozitív x -ekre tetszőleges valós μ kitevőre értelmezett x^μ (általánosított hatványfüggvényt):

$$x^\mu = e^{\mu \ln x}.$$

Mint monoton, ill. folytonos függvényekből összetett függvény x^μ nyilván monoton és folytonos (részletes függvénymenetvizsgálat 4.25.-ben), deriváltja a láncszabály alkalmazásával

$$\frac{d x^\mu}{dx} = \frac{d e^{\mu \ln x}}{dx} = e^{\mu \ln x} \frac{\mu}{x} = x^\mu \frac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1}.$$

Látjuk tehát, hogy a hatványfüggvény racionális kitevőjű hatványokra érvényes differenciálási szabálya az általánosított hatványfüggvényre is érvényes.

2.27. Az $\ln x$ függvény differenciálhányadosának segítségével megmutatjuk, hogy

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e,$$

ahol e a természetes logaritmus alapszáma (az exponenciális függvény alapja) és u tetszőlegesen tart plusz, vagy mínusz végtelenhez. (A II.4.12.1. feladatban speciálisan azt kellett belátni, hogy

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ létezik és véges, tehát a fenti határérték létezik, ha

u a pozitív egész számokon keresztül tart a plusz végtelenhez. Most ennél sokkal többet igazolunk.)

III.4.18.3^o értelmében

$$\ln(1 + \frac{1}{u})^u = u \ln(1 + \frac{1}{u}) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{u})}{\frac{1}{u}} = \frac{\ln(1 + \frac{1}{u}) - \ln 1}{\frac{1}{u}},$$

hiszen $\ln 1 = 0$. Az itt felírt kifejezés azonban az $\ln x$ függvény $x = 1$ és $x = 1 + \frac{1}{u}$ helyekhez tartozó különbségi hányadosa. Ha $u \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow +\infty$ vagy $u \rightarrow -\infty$), akkor $\frac{1}{u} \rightarrow 0$, a fenti különbségi hányados pedig $\ln x$ $x = 1$ helyen vett deriváltjához tart:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{1}{u})^u &= \lim_{\substack{h = \frac{1}{u} \\ h \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 + h) - \ln 1}{h} = \left[\frac{d \ln x}{dx} \right]_{x=1} = \\ &= \left[\frac{1}{x} \right]_{x=1} = 1. \end{aligned}$$

Igy tehát

$$(1 + \frac{1}{u})^u = e^{\ln(1 + \frac{1}{u})^u} \rightarrow e^1 = e,$$

amint azt állítottuk.

Megjegyezzük, hogy az $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat igen lassan konvergál, ezért ezzel a határértékkel nem célszerű a természetes logaritmus alapszámát közelítőleg kiszámítani. Gyakorlatilag is alkalmas eljárást e kiszámítására később fogunk csak megismerni.

2.28. Az 1.6. tétel értelmében f akkor és csakis akkor differenciálható a c helyen, ha a c és $c + \Delta x$ helyekhez tartozó megváltozása a következő alakban írható fel:

$$\Delta f = f(c + \Delta x) - f(c) = A \Delta x + \mathcal{E} \Delta x,$$

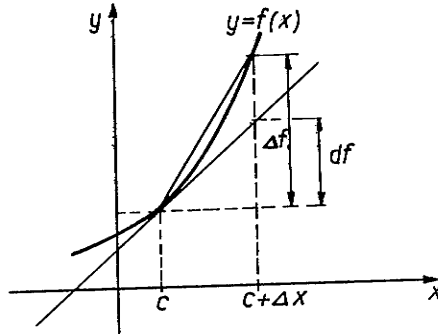
ahol $A = f'(c)$ és $\mathcal{E} \rightarrow 0$, ha $\Delta x \rightarrow 0$. Ez az összefüggés - mint ott mondtunk - azt fejezi ki, hogy a c helyen differenciálható függvény közel lineáris, c közelében jól megközelíthető lineáris függvénnyel.

2.29. Definíció. Az f függvény c és $c + \Delta x$ helyekhez tartozó megváltozásának főrészt, $f'(c) \Delta x$ -et, az f függvény c helyhez tartozó differenciáljának nevezzük és így jelöljük:

$$df = f'(c) \Delta x = df(c).$$

A $\Delta f \approx df$ közelítés azt fejezi ki, hogy c -ben differenciálható függvényünket c , kis környezetében az

$$y = f'(c)(x - c) + f(c)$$



74. ábra

lineáris függvénnyel közelítjük meg, $f(c)$ és $c + \Delta x$ helyekhez tartozó megváltozása helyett az utóbbi lineáris függvénynek e helyekhez tartozó megváltozásával, $f'(c) \Delta x$ -szel számolunk (74. ábra).

Mivel az $y = x$ lineáris függvény esetében bármely c helyen

$$\Delta y = (c + \Delta x) - c = \Delta x,$$

és így a $dy = dx$ differenciál megegyezik a $\Delta y = \Delta x$ függvény-megváltozással, $\Delta x = dx$, vagyis tetszőleges differenciálható f függvény c helyhez tartozó differenciálját az

$$f'(c) dx = df$$

alakban is felírhatjuk.

2.30. A differenciált függvény-megváltozás, ill. függvényérték közelítő kiszámítására használjuk. A folytonos függvények esetében alkalmazható $f(c) \approx f(c + \Delta x)$ közelítésnél nyilván pontosabb a differenciálható f függvényre itt megadott $f(c + \Delta x) \approx f(c) + f'(c) \Delta x$ közelítés. Ne feledkezzünk azonban sosem meg arról, hogy a közelítés abszolút, vagy relatív (százalékos) hibáját megbecsüljük.

Tegyük fel, hogy egy mérésnél a pontos c érték helyett a közelítő $c + \Delta x$ mérési eredményre jutottunk. A mérési eredménnyel tovább számolva (vagyis a mérési eredményt egy feltételezetten differenciálható f függvénybe behelyettesítve), kérdezzük, milyen hibát okoz számolásunk végeredményében a mérésnél elkövetett pontatlanság.

A keresett abszolút hiba

$$\Delta f = f(c + \Delta x) - f(c),$$

ennek közelítő értéke

$$df = f'(c) \Delta x.$$

A százalékos (relatív) hiba pontos értéke

$$\frac{\Delta f}{f(c)} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{f(c)},$$

ennek közelítő értéke

$$\frac{df}{f(c)} = \frac{f'(c)}{f(c)} \Delta x.$$

A függvényérték differenciál segítségével történő közelítő kiszámítására példaként határozzuk meg $\sqrt{4,01}$ közelítő értékét.

Az $y = \sqrt{x}$ függvény $x = 4$ és $x = 4,01$ helyekhez tartozó megváltozása

$$\Delta y = \sqrt{4,01} - \sqrt{4} = \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \right]_{x=4} 0,01 + \varepsilon 0,01 = \frac{1}{4} 0,01 + \varepsilon 0,01.$$

Ezen megváltozás főrésze, a differenciál

$$dy = \frac{0,01}{4},$$

vagyis

$$\sqrt{4,01} - \sqrt{4} \approx \frac{0,01}{4},$$

$$\sqrt{4,01} \approx 2 + 0,0025 = 2,0025.$$

Az abszolút hiba közelítőleg

$$dy = \frac{0,01}{4} = 0,0025,$$

míg a relatív hiba közelítőleg

$$\frac{dy}{\sqrt{4}} = \frac{0,0025}{2} = 0,00125,$$

vagyis számolásunk kb. 0,125% pontosságúnak tekinthető.

2.31. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény $x = 0$ -ban differenciálható. Mi mondható a függvény folytonosságáról?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha f az a helyen differenciálható, akkor

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Következik-e az itt szereplő határérték létezéséből f differenciálhatósága?

3. Igazoljuk, hogy ha f és g n -szer differenciálható, akkor $(f+g)$ és (fg) is n -szer differenciálható, és

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)},$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \quad (\text{Leibniz-szabály})$$

ahol az un. binomiális együttható értéke

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

4. Adjunk példát olyan f és g függvényre, melyek nem differenciálhatók, de $(f+g)$ valamint $(f \cdot g)$ differenciálható.

5. Igazoljuk, hogy az

$$y'' = ay$$

összefüggésnek ($y = y(x)$) $a > 0$ esetén $y = c_1 e^{\sqrt{a}x} + c_2 e^{-\sqrt{a}x}$,
 $a = 0$ esetén $y = c_1 x + c_2$, $a < 0$ esetén ($a k^2 = -a$ jelöléssel)
 $y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$ tesz eleget, ahol $c_1 c_2$ tetszőleges állandók.

3. A differenciálszámítás középértéktételei

A függvénynek és deriváltjainak tulajdonságait, ezek kapcsolatát vizsgálva, lépten-nyomon az alább ismertetendő középértéktételek kerülnek alkalmazásra.

3.1. Rolle-tétel. Ha $f[a, b]$ -ben folytonos és (a, b) -ben differenciálható, továbbá

$$f(a) = f(b) = 0,$$

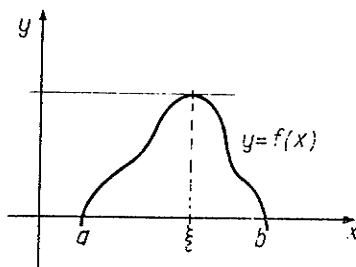
akkor van a és b között olyan ξ hely, melyre fennáll

$$f'(\xi) = 0.$$

A tétel geometriai tartalma a következő: a mondott feltételek mellett van a és b között olyan ξ hely, amelyben az f függvény görbéjéhez illeszkedő érintő párhuzamos az x -tengellyel (75. ábra).

Bizonyítás. Ha $f = 0$ az egész $[a, b]$ intervallumban, akkor bármely a és b közötti ξ megfelel a tételben mondottaknak. Ha f nem azonosan 0, akkor felvesz vagy csak pozitív, vagy csak negatív, vagy pozitív és negatív értékeket is. Ha pl. - mint a 7. ábrán - pozitív értékeket is felvesz,

Weierstrass tétele (III.3.24.) értelmében fel kell, hogy vegyen egy maximális $f(\xi)$ értéket $[a, b]$ -ben. $f(\xi) > 0$, így nem lehet sem a -val sem b -vel egyenlő: $a < \xi < b$. A feltevés szerint $f'(\xi)$ létezik, és minthogy



75. ábra

$$\xi < x \text{ esetén } \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0,$$

$$\xi > x \text{ esetén } \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0,$$

azért a fenti különbségi hányadosok határértéke $x \rightarrow \xi$ esetén ≤ 0 és ≥ 0 egyszerre csak úgy lehet, ha

$$f'(\xi) = 0,$$

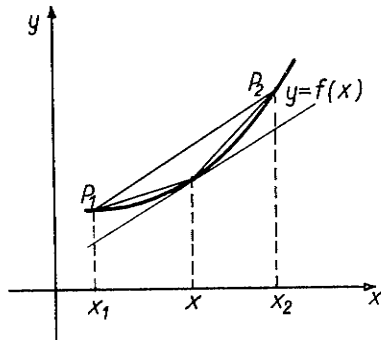
amint azt állítottuk.

Hasonlóképpen igazolható az állítás, ha f csak negatív értékeket vesz fel (a, b) -ben. x

Szokás még a tételt $f(a) = f(b) \neq 0$ esetre is megfogalmazni. A Rolle-tételnek általánosítása a

3.2. Lagrange-féle középértéktétel. Ha f $[a, b]$ -ben folytonos és (a, b) -ben differenciálható, akkor van a és b között olyan ξ hely, melyre fennáll:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad (\xi \in (a, b)).$$



76. ábra

A tétel geometriai tartalma: a mondott feltételek mellett van a és b között olyan ξ hely, amelyben az f függvény görbéjéhez illeszkedő érintő párhuzamos a görbe $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ pontjait összekötő hural (76. ábra $a = x_1$, $b = x_2$, $\xi = x$ jelölések).

Az előbb bizonyított Rolle-tétel nyilván $f(a) = f(b) = 0$ választással adódó speciális esete a Lagrange-féle középértéktételnek.

Bizonyítás. A tétel bizonyítását a Rolle-tételre (3.1.) vezetjük vissza. A Lagrange-féle középértéktétel feltételeit kielégítő f függvényből a

Rolle-tétel feltételeit kielégítő g függvényre juthatunk a következőképpen:

az f függvény görbéjének A és B pontját összekötő húr egyenlete:

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a),$$

a

$$g(x) = f(x) - h(x)$$

un. "segédfüggvényre" tehát

$$g(a) = g(b) = 0.$$

A Rolle-tételt alkalmazva (g nyilván folytonos $[a, b]$ -ben és differenciálható (a, b) -ben) kell, hogy legyen olyan $\xi \in (a, b)$, melyre

$$g'(\xi) = f'(\xi) - h'(\xi) = 0,$$

vagyis

$$f'(\xi) = h'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\xi \in (a, b))$$

amit bizonyítani akartunk. $\times$

A Lagrange-féle középértéktételnek fontos következményei a következő állítások:

3.3. Tétel. Ha f folytonos $[a, b]$ -ben, differenciálható (a, b) -ben és ott $f'(x)$ azonosan 0, akkor f azonosan állandó $(\equiv c)$ $[a, b]$ -ben.

Bizonyítás. 3.2.-ből következik, hogy minden $[a, b]$ -beli x_1 és x_2 -höz található olyan $\xi \in (x_1, x_2)$, amelyre

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2},$$

tehát $f'(\xi) = 0$ miatt $f(x_1) = f(x_2)$, ami az állítást adja. $\times$

3.4. Tétel. Ha f és g folytonos $[a, b]$ -ben, differenciálható (a, b) -ben és

$$f'(x) = g'(x), \quad \text{ha } x \in (a, b),$$

akkor $[a, b]$ -ben f és g egymástól csak egy additív állandóban tér el, vagyis alkalmas c -re

$$f(x) \equiv g(x) + c \quad (x \in [a, b]).$$

Bizonyítás. A $h(x) = f(x) - g(x)$ függvényre alkalmazzuk a 3.3. tételt. $\times$

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy a 3.4. tétel feltételeiben az áll, hogy minden $x \in (a, b)$ -re $f'(x) = g'(x)$; ha csak egyes pontokban egyeznek meg a deriváltak, abból nem következik még a tétel állítása.

3.5. Tétel. (Cauchy-féle középértéktétel)

Ha f és g $[a, b]$ -ben folytonos és (a, b) -ben differenciálható függvények, továbbá (a, b) -ben $g'(x) \neq 0$, akkor van a a és b között olyan ξ hely, melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\xi \in (a, b)).$$

Ez a tétel $g(x) = x$ választással speciális esetként nyilván a Lagrange-féle középértéktételt adja.

3.5. ugyanakkor többet mond ki annál, ami külön-külön az f és g függvényre alkalmazott Lagrange-féle középértéktételből adódna. Ekkor ugyanis csak azt állithatnánk, hogy van olyan $\xi_1 \in (a, b)$ és $\xi_2 \in (a, b)$ hely, melyre

$$f(b) - f(a) = f'(\xi_1)(b - a),$$

$$g(b) - g(a) = g'(\xi_2)(b - a),$$

vagyis ($g' \neq 0$)

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)},$$

de semmi sem biztosítja azt, hogy $\xi_1 = \xi_2$.

Bizonyítás. Alkalmas segédfüggvény bevezetésével igazoljuk állításunkat. Legyen

$$h(x) = f(x) + \lambda g(x),$$

és válasszuk meg λ -t úgy, hogy $h(a) = h(b)$ legyen. (Ekkor ugyanis a Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva $h'(\xi) = 0$ ($\xi \in (a, b)$)-ből átrendezéssel az állítás adódik.)

$$h(b) - h(a) = f(b) - f(a) + \lambda (g(b) - g(a)) = 0,$$

ha

$$\lambda = - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

($g(b) - g(a) \neq 0$, különben

3.2. értelmében valahol (a, b) -ben $g'(x) = 0$ volna a feltétellel ellentétben.) Ha tehát

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x),$$

akkor erre az $[a, b]$ -ben folytonos, (a, b) -ben differenciálható függvényre 3.2.-t alkalmazva, kell, hogy legyen olyan $\xi \in (a, b)$, melyre

$$h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0,$$

azaz

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (\xi \in (a, b)),$$

és ezt kellett igazolnunk. $\times$

3.6. Feladatok

1. Legyen $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ $(-1, 1)$ -ben. Teljesül-e a Rolle-tétel állítása?
2. Legyen f n -szer differenciálható (a, b) -ben és $x_i \in (a, b)$, $i=0, \dots, n$. Ha $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$, akkor $f^{(n)}(x)$ -nek van gyöke (x_0, x_n) -ben. ($\exists \xi \in (x_0, x_n) : f^{(n)}(\xi) = 0$.)
3. Mutassuk meg, hogy $p_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ -nek n gyöke van $(-1, 1)$ -ben.
4. Mutassunk példát olyan függvényre, amely (a, b) -ben differenciálható, de a Lagrange-tétel nem teljesül rá.
5. Legyen $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$; $g(c) = g'(c) = \dots = g^{(n-1)}(c) = 0$, f és g a c helyen n -szer differenciálható és $g^{(n)}(c) \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$.

5. Igazoljuk az

$$|\arctan a - \arctan b| < |a - b| \quad (a \neq b)$$

egyenlőtlenséget.

4. Differenciálható függvények vizsgálata

Ebben a pontban differenciálható függvények tetszőleges, értelmezési tartományukba eső, I intervallumbeli, illetve $c \in D_f$ pontbeli viselkedését vizsgáljuk. Részben a már korábban bevezetett I -beli monotonitás (III.1.22), konvexitás- konkavitás (III.1.24) tulajdonságának fennállására, részben az ebben a pontban értelmezésre kerülő $c \in D_f$ -beli (un. lokális) tulajdonságok fennállására igyekszünk majd a deriváltfüggvény segítségével könnyen kezelhető elégséges feltételeket megadni.

Szólunk majd röviden a függvényvizsgálat kiegészítéseként az egyenesvonalu aszimptota meghatározásának módjáról, anélkül, hogy ezen speciális eseten túlmenően az aszimptotakeresés részleteibe bocsátkoznánk. Ezt az elemi függvények most már kiegészített körének vizsgálata követi.

4.1. Tétel. Ha f az $I \subset D_f$ intervallumban differenciálható, akkor ahhoz, hogy f I -ben monoton növekvő (fogyó) legyen, szükséges és elégséges, hogy minden $x \in I$ -re $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) fennálljon.

Bizonyítás. Az, hogy a tételben kimondott feltétel szükséges, világos, hiszen monoton növekvő függvény esetében I tetszőleges két helyére felírt különbségi hányados mindig ≥ 0 (monoton fogyó függvény esetében ≤ 0), s így a határértékként adódó differenciálhányados is csak ≥ 0 (≤ 0) lehet.

A tételben kimondott feltétel elégséges voltát így láthatjuk be:

Legyen pl. minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$. Ha $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ és $x_1 < x_2$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint kell, hogy legyen olyan $\xi \in (x_1, x_2)$ hely, melyre

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

ugyhogy

$$f(x_2) \geq f(x_1),$$

ami épp azt fejezi ki, hogy f monoton növekvő I -ben (III. 1.22.). Hasonlóképpen látható be, hogy ha $f'(x) \leq 0$, akkor f monoton fogyó. x

Megjegyezzük még, hogy ha I -ben $f' \geq 0$ és véges számú hely kivételével $f' > 0$, akkor f I -ben szigorúan monoton növekvő. Álli-

tásunk igazolására csak azt kell meggondolnunk, hogy ellenkező esetben f egy egész intervallumban állandó volna, s így f' végtelen sok helyen volna 0.

Hasonlóképpen igaz, hogy ha I -ben $f' \leq 0$ és véges számú hely kivételével $f' < 0$, akkor f I -ben szigorúan monoton fogyó.

Pl. $1^\circ y = x^{2k-1}$ ($k \in \mathbb{N}$) esetében

$$y' = (2k-1)x^{2k-2}, \text{ tehát } (-\infty, +\infty) \text{-ben}$$

$$y' \geq 0, \quad (x = 0 \text{ kivételével } y' > 0), \text{ s így}$$

$$y \text{ } (-\infty, +\infty) \text{-ben szigorúan monoton növekedő.}$$

$2^\circ y = x^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$) esetében

$$y' = 2kx^{2k-1}, \text{ tehát } y' \begin{cases} < 0, & \text{ha } x < 0, \\ \geq 0, & \text{ha } x \geq 0, \text{ ill.} \\ > 0, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

így tehát $y = x^{2k}$ $(-\infty, 0)$ -ban szigorúan monoton fogyó, $[0, +\infty)$ -ben szigorúan monoton növekedő.

3° Az $y = \cos x$ függvényénél a párosság és periodicitás miatt a függvényt csak $[0, \pi]$ -ben vizsgálva, mivel itt $y' = -\sin x \leq 0$ (ill. $x = 0$ és $x = \pi$ kivételével < 0), $y = \cos x$ $[0, \pi]$ -ben szigorúan monoton fogyó.

4.2. Tétel. Ha f az $I \subset D_f$ intervallumban differenciálható, akkor ahhoz, hogy I -ben konvex (konkáv) legyen, szükséges és elégséges, hogy f' az I -ben monoton növekedő (fogyó) legyen.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f I -ben konvex (hasonlóképpen okoskodhatunk, ha f konkáv). Ekkor minden $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ és $x \in (x_1, x_2)$ esetén (lásd III.1.24.)

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1),$$

tehát $(x - x_1 > 0)$

$$* \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

ill. az $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ pontokon átmenő hur egyenletének felírásában az első pont szerepét a másodiknak adva át

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1),$$

tehát mivel $(x - x_1) < 0$

$$(xx) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

(x) és (xx) összekapcsolásával tehát a következő, a 76. ábrán szemléltetett, egyenlőtlenségláncra jutottunk:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Ha mármost $x \rightarrow x_1$, akkor (x) -ből

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

ill. $x \rightarrow x_2$ esetén (xx) -ből

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

adódik, vagyis két utóbbi részeredményünket összekapcsolva

$$f'(x_1) \leq f'(x_2),$$

tehát f' I -ben valóban monoton növekedő.

Ha, megfordítva, f' monoton növekedő I -ben, akkor minden $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $x \in (x_1, x_2)$ -re fenn kell, hogy álljon a (x) és (xx)

egyenlőtlenség, hiszen a Lagrange-féle középértéktétel szerint kell, hogy legyen olyan $\xi \in (x_1, x)$ és $\eta \in (x, x_2)$, hogy

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

$$f'(\eta) = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2},$$

ahol $\xi < x < \eta$ és így f' feltételezett monoton növekedő volta miatt

$$f'(\xi) \leq f'(\eta),$$

azaz

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

amely egyenlőtlenségből I.3.21.4. alkalmazásával a (x) és (xx) egyenlőtlenségre jutunk, s ezzel f konvexitását bizonyítottuk. *

Hasonlóképpen bizonyítható, hogy ha f' monoton fogyó I -ben, akkor f ott konkáv.

A bizonyítás során talált

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

egyenlőtlenség azt mutatja, hogy differenciálható konvex függvény görbéje az érintő felett, vagy rajta halad. Hasonlóképpen adódik, hogy differenciálható konkáv függvény görbéje az érintő alatt, vagy rajta halad.

Amennyiben $f \in I \subset D_f$ -ben kétszer differenciálható, a 4.1. és 4.2. tétel összekapcsolásával f I -beli konvexitását (konkavitását) könnyebb az alábbi állítás alkalmazásával vizsgálni:

4.3. Tétel. Ha f az $I \subset D_f$ intervallumban kétszer differenciálható, akkor ahhoz, hogy itt konvex (konkáv) legyen, szükséges és elégséges, hogy minden $x \in I$ esetén $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) fennálljon.

Például $y = x^{2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$),
 $y' = (2k+1)x^{2k}$,

$$y'' = (2k+1)2kx^{2k-1} \begin{cases} < 0, & \text{ha } x < 0, \\ \geq 0, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$$

tehát a y $(-\infty, 0)$ -ban alulról konkáv, $[0, +\infty)$ -ben pedig konvex. ($y = x$ esetében $y'' = 0$, ez konvexnek is, konkávnak is tekinthető.)

$$2^\circ y = x^{2k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$y' = 2kx^{2k-1},$$

$$y'' = 2k(2k-1)x^{2k-2} \geq 0,$$

y $(-\infty, +\infty)$ -ben alulról konvex.

$$3^\circ y = \cos x, \quad x \in [0, \pi].$$

$$y' = -\sin x,$$

$$y'' = -\cos x \begin{cases} < 0, & \text{ha } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \geq 0, & \text{ha } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

tehát a függvény $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ -ben konkáv, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ -ben konvex.

4.4. Általában egy függvény $I \subset D_f$ intervallumbeli menetének (monotonitásának, konvexitásának, konkavitásának) vizsgálatát lokális (helyi) vizsgálattal kell kiegészíteni, de sokszor elegendő lokális vizsgálatra szorítkoznunk, mellőzhető az általános függvéymenet vizsgálata. Ilyen irányú vizsgálatainkat néhány fogalom bevezetésével kell kezdenünk:

4.5. Definíció. Az f függvény a c helyen növekedő (fogyó), ha van olyan pozitív δ , hogy

$$c - \delta < x_1 < c < x_2 < c + \delta$$

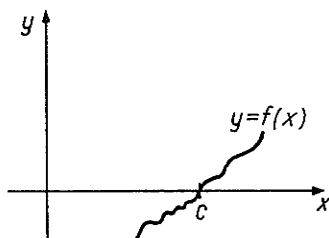
esetén

$$f(x_1) < f(c) < f(x_2)$$

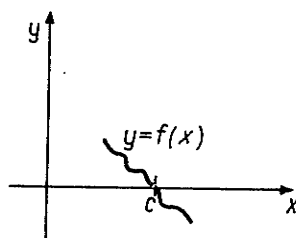
$$(f(x_1) > f(c) > f(x_2)).$$

Ezt a fogalmat élesen meg kell különböztetnünk a $(c - \delta, c + \delta)$ intervallumban monoton növekedő függvény fogalmától. Az, hogy f c -ben növekedő, $f(x) = 0$ esetében pl. azt jelenti, hogy c -hez közeli, c -nél kisebb abszcisszájú helyeken f negatív, c -nél nagyobb abszcisszájú helyeken pedig pozitív értékeket vesz fel, de a függvény-

értékek nagyságáról semmit sem mondunk. A 77. ábrán $f(c) = 0$ esetben c -ben növekedő, a 78. ábrán pedig c -ben fogyó függvényt szemléltettünk.



77. ábra



78. ábra

Ha f c -ban differenciálható, akkor deriváltjának előjeléből következtethetünk f c -beli viselkedésére. Ezt mondja ki az alábbi

4.6. Tétel. Ha f a c helyen növekvő (fogyó) és differenciálható, akkor $f'(c) \geq 0$ ($f'(c) \leq 0$). Ha $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), akkor f az c helyen növekvő (fogyó).

Bizonyítás. Ha f a c helyen növekvő, akkor a c és $(c+h) \in (c-\delta, c+\delta)$ (ahol δ a 4.5. definícióbeli pozitív szám) helyekhez tartozó különbségi hányadosa

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$

(ti. $h < 0$ esetén a számláló is, a nevező is negatív, $h > 0$ esetében pedig a számláló is, a nevező is pozitív), így a különbségi hányados határértéke is csak ≥ 0 lehet. Azt ellenben, hogy a fenti különbségi hányados $(c+h) \in (c-\delta, c+\delta)$ esetében mindig pozitív - amiből következik, hogy f c -ben növekvő - csak akkor állíthatjuk, ha $f'(c) > 0$.

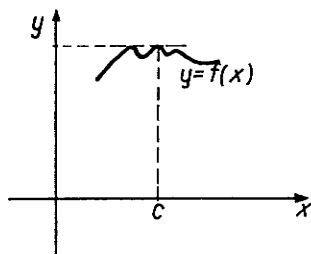
Hasonlóképpen okoskodhatunk c -ben fogyó f függvény esetében. $\times$

4.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy f -nek a c helyen lokális (helyi) maximuma van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy

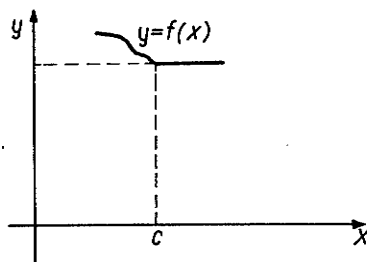
$$c - \delta < x < c + \delta$$

esetén

$$f(x) \leq f(c). \quad (79. \text{ ábra})$$



79. ábra



80. ábra

Azt mondjuk, hogy f -nek a c helyen lokális (helyi) minimuma van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy

$$c - \delta < x < c + \delta$$

esetén

$$f(x) \geq f(c). \quad (80. \text{ ábra})$$

A lokális (helyi) maximum és minimum közös neve lokális (helyi) szélsőérték.

Differenciálható f függvény esetében könnyű megadni a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltételét:

4.8. Tétel. Ha f a c helyen differenciálható és ott helyi szélsőértéke van, akkor

$$f'(c) = 0.$$

Bizonyítás. Ha $f'(c) \neq 0$ állna, akkor f a c helyen növekedő, vagy fogyó volna, tehát c -hez tetszőlegesen közel felvenne $f(c)$ -nél nagyobb és kisebb függvényértékeket is, így nem volna f -nek helyi szélsőértéke. *

Arra, hogy a 4.8. tétel feltétele nem elégséges a helyi szélsőérték létezésére, könnyű példát mutatni. $y = x^3$ $(-\infty + \infty)$ -ben szigorúan monoton növekedő, sehol sem lehet tehát helyi szélsőértéke, és mégis

$$\left[\frac{d x^3}{dx} \right]_{x=0} = \left[3x^2 \right]_{x=0} = 0.$$

A helyi szélsőérték létezésére elégséges feltételt ad meg a

4.9. Tétel. Ha f a c hely környezetében differenciálható, $f'(c) = 0$ és f' a c helyen növekvő (fogyó), akkor f -nek a c helyen lokális minimuma (maximuma) van.

Bizonyítás. Tegyük fel pl., hogy f' növekvő a c helyen. Ekkor alkalmas $\delta > 0$ -ra

$$c < x \leq c + \delta$$

esetén

$$f'(x) > f'(c) = 0,$$

míg

$$c - \delta \leq x < c$$

esetén

$$f'(x) < f'(c) = 0.$$

Igy f $[c, c + \delta]$ -ban monoton növekvő, $[c - \delta, c]$ -ban monoton fogyó. Ezért

$$c - \delta \leq x \leq c + \delta$$

esetén

$$f(x) \geq f(c),$$

tehát f -nek a c helyen lokális minimuma van (pontosabban az is kiderül, hogy $c - \delta < x < c + \delta$ esetén $x \neq c$ mellett határozottan $f(x) > f(c)$).

Hasonlóképpen látható be a tétel állítása akkor, ha f' fogyó a c helyen. $\times$

Azt a tényt, hogy $f'(c) = 0$ f c -beli szélsőértéke létezésének nem elégséges feltétele, jól megvilágítja az alábbi könnyen igazolható állítás:

4.10. Tétel. Ha f $K(c, \varepsilon)$ -ben differenciálható, $f'(c) = 0$, és alkalmas $\delta > 0$ -ra $c - \delta \leq x \leq c + \delta$, $x \neq c$ esetén $f'(x) > 0$ (vagy $f'(x) < 0$), akkor f -nek a c helyen nincs szélsőértéke.

Bizonyítás. A feltételből következik, hogy $[c - \delta, c + \delta]$ -ban f szigorúan monoton növekedő (fogyó), s így nem lehet c -ban szélsőértéke.

Összefoglalva eddigi eredményeinket kimondhatjuk tehát:

4.11. Tétel. Ha f' a c hely környezetében állandó előjelű, akkor f -nek nincs szélsőértéke a c helyen, ha pedig f' a c helyen előjelet vált, akkor f -nek lokális minimuma vagy maximuma van a c helyen aszerint, hogy f növekvő, vagy fogyó a c helyen.

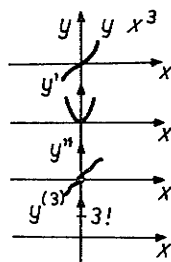
Mivel egy függvény előjelváltását nem mindig könnyű megállapítani, azért sokszor jobban használható a szélsőérték létezésére elégséges feltételt biztosító következő tétel:

4.12. Tétel. Ha f a c helyen r -szer differenciálható ($r = 2, 3, \dots$) és $f'(c) = \dots = f^{(r-1)}(c) = 0$, $f^{(r)}(c) \neq 0$, akkor f -nek a c helyen nincs szélsőértéke, ha r páratlan és lokális szélsőértéke van, ha r páros, a szélsőérték minimum vagy maximum aszerint, hogy $f^{(r)}(c) > 0$, vagy $f^{(r)}(c) < 0$, ($r = 2k$).

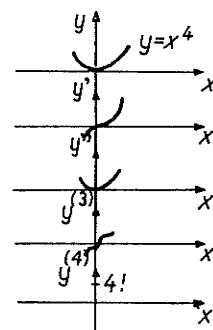
Bizonyítás. Tegyük fel pl., hogy $f^{(r)}(c) > 0$. Ekkor $f^{(r-1)}(x)$ növekvő a c helyen, és minthogy $f^{(r-1)}(c) = 0$, azért $f^{(r-2)}(c) = 0$ miatt a c helyhez közeli $x \neq c$ mellett $f^{(r-2)}(x) > 0$. Ez annyit jelent, hogy alkalmas $\delta > 0$ -ra $f^{(r-3)}(x)$ szigorúan monoton növekvő $[c - \delta, c + \delta]$ -ban, s így $f^{(r-3)}(c) = 0$ folytán $f^{(r-4)}(x)$ -nek a c helyen lokális minimuma van. Hasonlóan következtetve tovább, páros r esetén az adódik, hogy f -nek a c helyen lokális minimuma van, páratlan r esetén pedig f $[c - \delta, c + \delta]$ -ban szigorúan monoton növekvő, tehát nincs szélsőértéke a c helyen.

Hasonló az okoskodás $f^{(r)}(c) < 0$ esetén. x

A fenti okoskodás egyes lépéseit az $y = x^3$ és $y = x^4$ függvény esetében az $x = 0$ helyen a 81. és 82. ábrán szemléltettük.



81. ábra



82. ábra

4.13. Megjegyzés. A lokális (helyi) szélsőérték fogalmától meg kell különböztetni f $I \subset D_f$ intervallumbeli maximális (minimális) függvényértékének (intervallumbeli maximumának ill. minimumának) fogalmát.

4.14. Tétel. Ha az f függvénynek van valamely $I \subset D_f$ intervallumban maximális (minimális) függvényértéke akkor ez az I -ben felvett lokális maximumok (minimumok), és amennyiben I zárt, vagy

félig zárt, I végpontjaiban vagy szóbajövő végpontjában felvett függvényértékek közül a legnagyobb (legkisebb).

Az intervallumbeli maximum (minimum) hely tehát nem kell, hogy lokális maximum (minimum) hely legyen, ha azonban f I -beli maximumát (minimumát) I belső pontjában veszi fel, akkor ott egyszer - s mind lokális szélsőértéke is van a függvénynek.

Az előbbiekből következik, hogy I -ben differenciálható f függvény I -beli szélsőértéke $f' = 0$ I -be eső gyökhelyein (4.8.) vagy (amennyiben I -hez tartoznak) I végpontjaiban lehet.

4.15. Példák. 1^o $y = x^{2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$). $y(0) = 0$, az első - a 0 helyen el nem tűnő - derivált $y^{(2k+1)}(x) = (2k+1)!$, mivel pedig ez páratlanadik derivált, a függvénynek nincs szélsőértéke $x = 0$ -ban. $I = [-1, 1]$ -ben $x = -1$ I -beli minimum-, $x = 1$ I -beli maximum-helye a függvénynek.

2^o $y = x^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$). $y(0) = 0$, az első - a 0 helyen el nem tűnő - derivált $y^{(2k)}(x) = (2k)!$, és mivel ez párosadik derivált és pozitív, a függvénynek $x = 0$ -ban lokális minimuma van. $I = [-1, 2]$ esetében $x = 0$ az I -beli minimum, $x = 2$ az I -beli maximum helye.

3^o $y = \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Mivel $y' = -\sin x = 0$, ha $x = 0, \pi, 2\pi$, és ezeken a helyeken $y'' = -\cos x$ rendre a $-1, 1, -1$ értéket veszi fel, $x = 0$ és $x = 2\pi$ lokális és $I = [0, 2\pi]$ -beli maximum, $x = \pi$ pedig I -beli minimum és lokális minimumhely.

Az f függvény lokális vizsgálatához még egy kiegészítő megjegyzést kell tennünk.

4.16. Definíció. Azokat a pontokat, amelyek a folytonos f -nek egy konvex és egy konkáv szakaszát választják el egymástól, inflexiós pontoknak nevezzük.

E definícióból és a függvényvizsgálatról eddig elmondottakból közvetlenül adódik az alábbi állítás:

4.17. Ha f az inflexiós pont környezetében differenciálható, akkor f' -nek az inflexiós pontban szélsőértéke van. (Ti. az inflexiós pont f' monoton növekedő és monoton fogyó szakaszát választja el egymástól.)

Ezzel az állítással visszavezettük az inflexiós pont keresésének problémáját - differenciálható függvény esetében - f' szélsőértékhely-keresésének problémájára. Kimondható tehát a 4.8., 4.11., 4.12. tétel megfelelője (f -et f' -vel helyettesítve):

4.18. Tétel. Ha f a c helyen kétszer differenciálható és f -nek c inflexiós pontja, akkor $f'(c) = 0$, (szükséges feltétel).

Ha $f'(c) = 0$ és c környezetében f' állandó előjelű, akkor f -nek a c helyen nincs inflexiós pontja; ha f' a c helyen előjelet váltva lesz 0 , akkor f -nek c -ben inflexiós pontja van (elégletes feltétel).

Ha $f''(c) = \dots = f^{(r-1)}(c) = 0$, $f^{(r)}(c) \neq 0$, és r páratlan, akkor f -nek a c helyen inflexiós pontja van, (elégletes feltétel).

Pl. $1^0 y = x^{2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$), $y(0) = \dots = y^{(2k)}(0) = 0$,
 $y^{(2k+1)} = (2k+1)! \neq 0$, $x = 0$ inflexiós pont.

$2^0 y = x^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$). $y(0) = \dots = y^{(2k-1)}(0) = 0$, $y^{(2k)} = (2k)! \neq 0$,
 $x = 0$ -ban nincs inflexiója a függvénynek.

$3^0 y = \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. $y'' = -\cos x = 0$, ha
 $x = \frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$. E helyeken $y^{(3)} = +\sin x \neq 0$, tehát e helyek inflexiós pontok.

4.19. Összefoglalva eddigi eredményeinket, valamely függvény vizsgálatán f értelmezési tartományának, esetleges párosságának, páratlanságának, periodikusságának, folytonosságának megállapítása után monoton növekedő és fogyó szakaszainak, lokális szélsőértékeinek, konvex és konkáv szakaszainak, inflexiós pontjainak felkutatását, és ezek alapján a görbe alakjának megállapítását értjük. Ehhez járul még D_f határpontjaiban f D_f -re szorítkozva vett határértékének (amennyiben D_f nem korlátos, f végtelenben vett határértékének) meghatározása, ill. az esetleg létező egyenesvonalu aszimptota meghatározása (erről 4.20)-ban lesz szó). A fent vázolt feladatok megoldásához differenciálható f függvény esetében f' és f'' zérushelyeit, jeltartási intervallumait célszerű meghatározni. Az utóbbi feladatot egyszerűsíti az a tény, hogy deriválható (tehát folytonos) függvény két szomszédos zérushely közötti intervallumban állandó előjelű.

Mielőtt példán illusztrálnánk az itt elmondottakat, értelmezzük az f -hez pl. plusz végtelenben simuló egyenesvonalu aszimptotát - és amennyiben ez létezik - határozzuk meg egyenletét.

4.20. Ha van olyan $g(x) = Ax + B$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (Ax + B)) = 0,$$

akkor g -t f aszimptotájának nevezzük. Ha van f -nek ilyen egyenesvonalu (lineáris) aszimptotája, akkor

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x} \right) \right) = 0$$

folytán szükségképpen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x} \right) = 0,$$

azaz

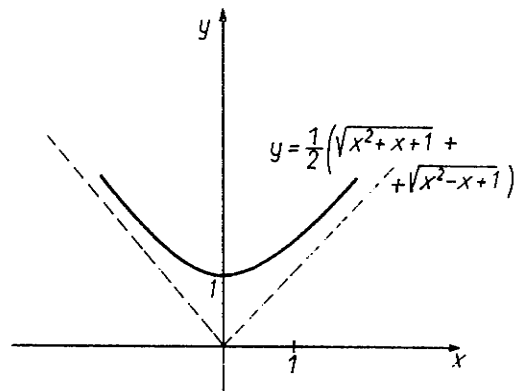
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

A véges $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ határérték létezése azonban az aszimptota létezésének csak szükséges, de nem elégséges feltétele. f -nek akkor van lineáris aszimptotája, ha még a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - Ax)$$

határérték is véges, ez adja meg a lineáris g függvényben szereplő B állandó értékét.

Hasonlóképp értelmezhető $-\infty$ -ben f aszimptotája. Pl. $y = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})$ aszimptotája $+\infty$ -ben $y = x$, $-\infty$ -ben $y = -x$, amint az egyszerű számolással adódik (83. ábra).



83. ábra

4.21. Példák függvénymenet-vizsgálatra.

$$1^0 \quad y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0).$$

A függvény nincs értelmezve az $x = -\frac{d}{c}$ helyen. Általában a függvény nem páros, nem páratlan.

$$y' = \frac{a(cx + d) - c(ax + b)}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2},$$

$y' \neq 0$ és előjele megegyezik $ad - bc$ előjelével.

$$y'' = \frac{-2c(ad - bc)}{(cx + d)^3}$$

s így y'' előjele megegyezik $-c(ad - bc)(cx + d)$ előjelével. Mivel $-c(cx + d)$ előjele $x > -\frac{d}{c}$ esetén negatív, $x < -\frac{d}{c}$ esetén pozitív, a függvény menetéről a következő táblázat készíthető:

	$ad - bc > 0$		
	$-\infty < x < -\frac{d}{c}$	$x = -\frac{d}{c}$	$-\frac{d}{c} < x < +\infty$
$f'(x)$	+		+
$f''(x)$	+		-
$f(x)$	mon. növ. konvex	nincs ért.	mon. növ. konkáv

	$ad - bc < 0$		
	$-\infty < x < -\frac{d}{c}$	$x = -\frac{d}{c}$	$-\frac{d}{c} < x < +\infty$
$f'(x)$	-		-
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	mon. fogyó konkáv	nincs ért.	mon. fogyó konvex

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{x(cx + d)} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax + b}{cx + d} - 0 \cdot x \right) = \frac{a}{c},$$

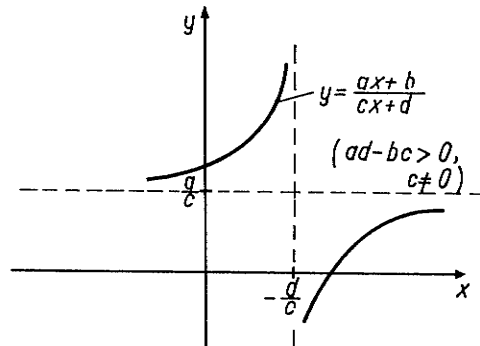
tehát a lineáris aszimptota egyenlete $+\infty$ -ben ill. $-\infty$ -ben

$$y = \frac{a}{c}.$$

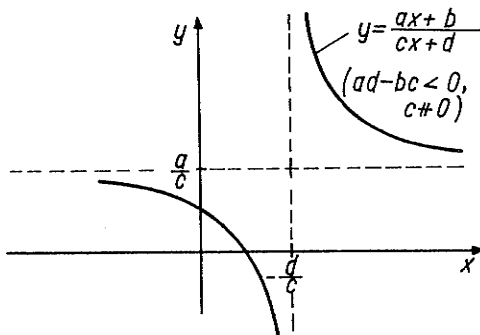
Könnyű belátni, hogy az

$x = -\frac{d}{c}$ helyen a függvény

jobb oldali határértéke
 $ad-bc > 0$ esetén $-\infty$,
 $ad-bc < 0$ esetén pedig
 $+\infty$ és hogy e pontban a bal
oldali határérték a jobb olda-
lival ellenkező előjelű végtel-
len. A függvényt a 84., 85.
ábrán szemléltettük.



84. ábra



85. ábra

$$2^o f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 3}.$$

A függvény minden $x \in \mathbb{R}$ -
re értelmezve van, mert
nevezőjének nincs valós
zérushelye. A függvény sem
nem páros, sem nem párat-
lan.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, az aszim-

tota tehát $+\infty$ -ben és
 $-\infty$ -ben is $y = 0$. Egyéb-
ként

$$f(x) > 0.$$

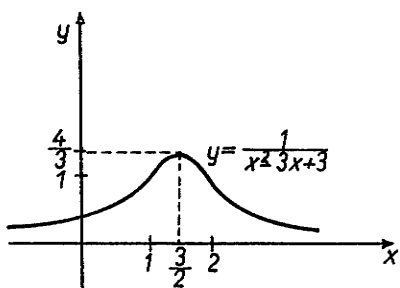
$$f'(x) = \frac{-2x + 3}{(x^2 - 3x + 3)^2},$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 - 3x + 3)^2 - (-2x + 3)2(x^2 - 3x + 3)(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 3)^4} =$$

$$= \dots = \frac{6x^2 - 18x + 12}{(x^2 - 3x + 3)^3}.$$

f' és f'' nevezője mindig pozitív, így előjelviszonyaik csupán szám-
lálójuk előjelviszonyaitól függenek. Mivel $-2x+3 = 0$, ha $x = 1,5$, és
itt pozitívból negatívba megy át $(-2x+3)$, továbbá az $y = 6x^2 - 18x + 12$
konvex parabola az x -tengelyt $x = 1$ és $x = 2$ -nél metszi, a két
gyök helye között $y < 0$, különben ≥ 0 , a függvény menetéről tehát az
alábbi táblázat készíthető:

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 1,5)$	$(1,5, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	-	-
$f''(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	mon. növ. konvex	mon. növ. konkáv	mon. fogyó konkáv	mon. fogyó konvex



86. ábra

$x = 1$ és $x = 2$ inflexiós pont,
 $f(1) = f(2) = 1$, $x = 1,5$ -nél
 f -nek maximuma van, a maxi-
mális függvényérték $f(1,5) = \frac{4}{3}$,
ez f -nek $\mathbb{R}$ -ban abszolút ma-
ximuma. (86. ábra.)

Foglalkozunk végezetül az
elemi függvények menetének vizs-
gálatával.

4.22. Trigonometrikus függvények

f	$y_1 = \sin x$	$y_2 = \cos x$	$y_3 = \operatorname{tg} x$
D_f	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k egész
$f(D_f)$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$
periódus	2π	2π	π

	páratlan	páros	páratlan
	elég $[0, \pi]$ -ben vizsgálni	elég $[0, \pi]$ -ben vizsgálni	elég $[0, \frac{\pi}{2}]$ -ben vizsgálni
f'	$y'_1 = \cos x$	$y'_2 = -\sin x$	$y'_3 = \frac{1}{\cos x}$
$f' > 0$	$[0, \frac{\pi}{2})$ -ben		$[0, \frac{\pi}{2})$ -ben
$f' < 0$	$(\frac{\pi}{2}, \pi]$ -ben	$(0, \pi)$ -ben	
f''	$y''_1 = -\sin x$	$y''_2 = -\cos x$	$y''_3 = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$
$f'' > 0$		$(\frac{\pi}{2}, \pi)$ -ben	$(0, \frac{\pi}{2})$ -ben
$f'' < 0$	$(0, \pi)$ -ben	$(0, \frac{\pi}{2})$ -ben	
f mon. növ.	$(0, \frac{\pi}{2})$ -ben		$(0, \frac{\pi}{2})$ -ben
f mon. fogyó	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$ -ben	$(0, \pi)$ -ben	
f konvex		$(\frac{\pi}{2}, \pi)$ -ben	$(0, \frac{\pi}{2})$ -ben
f konkáv	$(0, \pi)$ -ben	$(0, \frac{\pi}{2})$ -ben	
f max	$\frac{\pi}{2}$	0	
f min	$(3 \frac{\pi}{2})$	π	
f infl.	0, π	$\frac{\pi}{2}$	0
(57. ábra)		(58. ábra)	(59. ábra)

4.23. Ciklometrikus függvények (trigonometrikus függvények inverzei).

f	$y_1 = \arcsin x$	$y_2 = \arccos x$	$y_3 = \operatorname{arctg} x$
D_f	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$
$f(D_f)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
	páratlan		páratlan
	elég $[0, 1]$ -ben vizsgál.		elég $[0, +\infty)$ -ben vizsgál.
f'	$y'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y'_2 = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y'_3 = \frac{1}{1+x^2}$
$f' > 0$	$[0, 1]$ -ben		$[0, +\infty)$ -ben
$f' < 0$		$[-1, 1]$ -ben	
f''	$y''_1 = \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$	$y''_2 = \frac{-x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$	$y''_3 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$
$f'' > 0$	$[0, 1]$ -ben	$[-1, 0)$ -ben	
$f'' < 0$		$(0, 1]$ -ben	$(0, +\infty)$ -ben
f mon. növ.	$[0, 1]$ -ben		$[0, +\infty)$ -ben
f mon. f.		$[-1, 1]$ -ben	
f konvex	$[0, 1]$ -ben	$[-1, 0)$ -ben	
f konkáv		$(0, 1]$ -ben	$(0, +\infty)$ -ben
f absz. max	$x=1$	$x=-1$	
f absz. min	$(x=-1)$	$x=1$	
f infl.	$x=0$	$x=0$	$x=0$
	(61. ábra)	(64. ábra)	(67. ábra) aszimptota $y = \pm \frac{\pi}{2}$

4.24. Exponenciális és logaritmus függvény

f	$y_1 = e^x$	$y_2 = a^x$	$y = \ln x$	$y = \log_a x$
D_f	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
$f(D_f)$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
f'	$y'_1 = e^x$	$y'_2 = \ln a \cdot a^x$	$y'_3 = \frac{1}{x}$	$y'_4 = \frac{1}{\ln a \cdot x}$
$f' > 0$	$\mathbb{R}$ -en	$\mathbb{R}$ ha $a > 1$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$ ha $a > 1$
$f' < 0$		$\mathbb{R}$ ha $0 < a < 1$		$(0, +\infty)$ ha $0 < a < 1$
f''	$y''_1 = e^x$	$y''_2 = (\ln a)^2 a^x$	$y''_3 = -\frac{1}{x^2}$	$y''_4 = -\frac{1}{\ln a \cdot x^2}$
$f'' > 0$	$\mathbb{R}$ -en	$\mathbb{R}$		$(0, +\infty)$ ha $0 < a < 1$
$f'' < 0$			$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$ ha $a > 1$
mon. növ.	$\mathbb{R}$ -en	ha $a > 1$	$(0, +\infty)$ -ben	ha $a > 1$ $(0, +\infty)$ -ben
f mon.f.		ha $0 < a < 1$		ha $0 < a < 1$ $(0, +\infty)$ -ben
f konvex	$\mathbb{R}$ -en	$\mathbb{R}$ -en		ha $0 < a < 1$ $(0, +\infty)$ -ben
f konkáv			$(0, +\infty)$ -ben	ha $a > 1$ $(0, +\infty)$ -ben

(72. ábra)(52. ábra)

(73. ábra)(53. ábra)

szélsőérték, inflexió nincs.

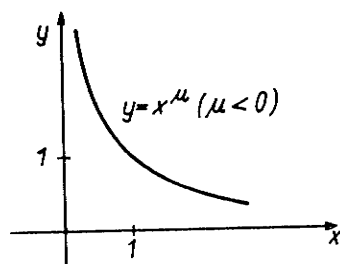
4.25. Általánosított hatványfüggvény.

$$y = x^\mu \quad (\mu \in \mathbb{R}). \quad \text{Értelmezés (2.26): } x^\mu = e^{\mu \ln x}$$

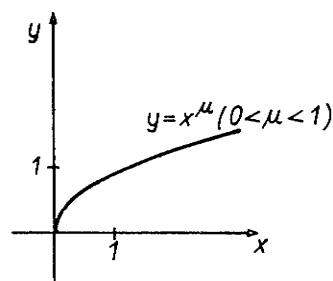
$$D_f = (0, +\infty) \quad \text{Speciálisan } \mu = n \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ -re } D_f = \mathbb{R}$$

$$y' = \mu x^{\mu-1} = \mu e^{(\mu-1)\ln x},$$

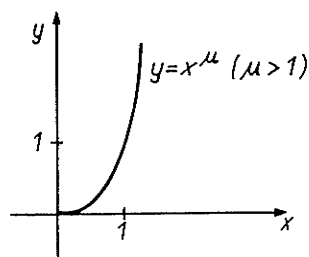
$$y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2} = \mu(\mu-1)e^{(\mu-2)\ln x}$$



87. ábra



88. ábra



89. ábra

$\mu < 0$	$0 < \mu < 1$	$\mu > 1$
y' -	+	+
y'' +	-	+
y mon. f. konvex	mon. növ. konkáv	mon. növ. konvex
límy 0 $x \rightarrow \infty$	$+\infty$	$+\infty$
límy $+\infty$ $x \rightarrow +0$	0	0

(87. ábra) (88. ábra) (89. ábra)

$\mu = 0$ esetében $y = 1$, $\mu = 1$ esetében $y = x$ adódik.

4.26. Hiperbolikus függvények.

Definíció:

f	$y_1 = \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$y_2 = \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$y_3 = \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$
D_f	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(D_f)$	$[1, +\infty)$	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$
	páros	páratlan	páratlan
f'	$y'_1 = \text{sh } x$	$y'_2 = \text{ch } x$	$y'_3 = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$
$f' > 0$	$(0, +\infty)$ -ben	$\mathbb{R}$ -en	$\mathbb{R}$ -en
$f' < 0$	$(-\infty, 0)$ -ban		

f''	$y_1'' = \operatorname{ch} x$	$y_2'' = \operatorname{sh} x$	$y_3'' = \frac{-2\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}$
$f'' > 0$	$\mathbb{R}$ -en	$(0, +\infty)$ -ben	$(-\infty, 0)$ -ban
$f'' < 0$		$(-\infty, 0)$ -ban	$(0, +\infty)$ -ben
f mon. növ.	$(0, +\infty)$ -ben	$\mathbb{R}$ -en	$\mathbb{R}$ -en
f mon. f.	$(-\infty, 0)$ -ban		
f konvex	$\mathbb{R}$ -en	$(0, +\infty)$ -ben	$(-\infty, 0)$ -ban
f konkáv		$(-\infty, 0)$ -ban	$(0, +\infty)$ -ben
f min	$x = 0$		
f infl.		$x = 0$	$x = 0$

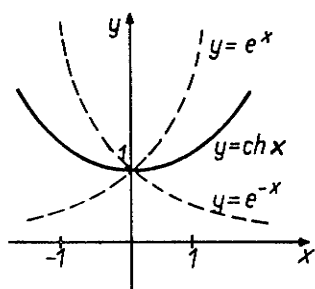
(90. ábra)

(91. ábra)

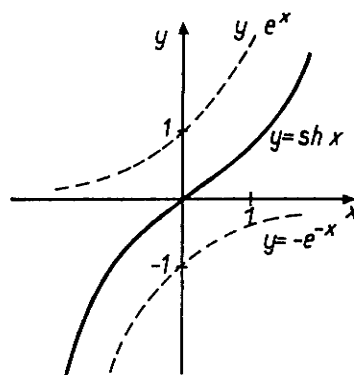
(92. ábra)

$y = \operatorname{th} x$ aszimptotája $+\infty$ -ben $y = 1$, $-\infty$ -ben $y = -1$.

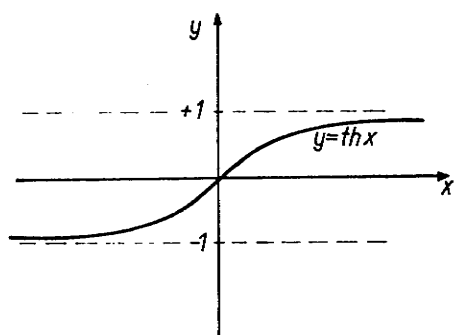
Ez 4.20. alkalmazásával egyszerű határérték-számítással adódik.



90. ábra



91. ábra



92. ábra

Megjegyzések. A hiperbolikus függvények deriváltjainak meghatározásánál az ismert differenciálási szabályok alkalmazásán kívül a hiperbolikus függvények közt fennálló, egyben elnevezésüket is indokoló

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

összefüggést kell felhasználnunk. Ezt az összefüggést a benne szereplő függvények exponenciális alakjainak behelyettesítésével könnyen igazolhatjuk. Az összefüggés geometriai tartalma: az uv -sík $P(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$

koordinátájú pontja rajta fekszik az $u^2 - v^2 = 1$ egyenletű hiperbolán.

A trigonometrikus függvények négyzetes összefüggésére emlékeztető fenti képletet kívül megadhatók, és az exponenciális alak behelyettesítésével könnyen igazolhatók még az alábbi "addíciós képletek"

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

illetve ezekből $x = y$ esetben adódik

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

Az utóbbi összefüggést a $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ összefüggéshez hozzáadva, ill. levonva rendezéssel a

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$

kapcsolatra jutunk.

Az $y = \operatorname{ch} x$ görbét szokás lánCGörbének is nevezni, mert a két pontján felfüggesztett és csak saját súlya által terhelt nyújthatatlan fonnálnak ez az egyensúlyi helyzete.

4.27. Hiperbolikus függvények inverzei (area függvények)

A $[0, +\infty)$ -ben szigorúan monoton ch függvény inverze $\operatorname{ar ch}$. Eszerint $y = \operatorname{ar ch} x$ jelentése: $x = \operatorname{ch} y$. Az $\operatorname{ar ch}$ függvény értelmezési tartománya $[1, +\infty)$, értékkészlete $[0, \infty)$. Megadhatjuk ezt a függvényt logaritmikus alakban a következő megfontolás segítségével:

$$x = \operatorname{ch} y, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

Innen átrendezéssel az

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) + 1 = 0$$

egyenletre jutunk, melynek megoldása

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \quad (e^y \geq 1,$$

mert $y \geq 0$ ezért a gyököknek csak a pozitív előjelét vehetjük). Innen

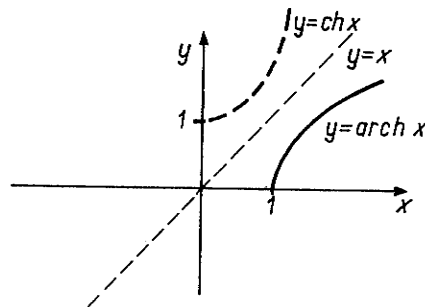
$$y = \operatorname{ar ch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Akár ebből az alakból, akár az inverz függvény differenciálási szabályának alkalmazásával

$$\frac{d \operatorname{ar ch} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

és ebből

$$\frac{d^2 \operatorname{ar ch} x}{dx^2} = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$



93. ábra

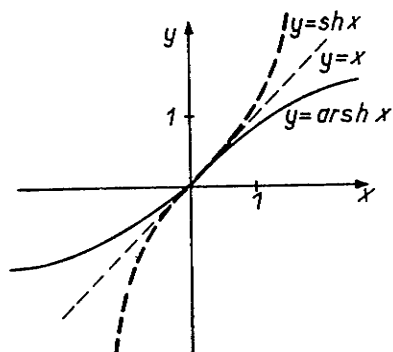
adódik, tehát az $[1, +\infty)$ -ben értelmezett $\operatorname{ar ch}$ függvény ott szigorúan monoton növekedő ($f' > 0$) és konkáv ($f'' < 0$). (93. ábra.)

Teljesen hasonlóképpen adódik, hogy az $\mathbb{R}$ -en szigorúan monoton sh függvény inverze $\operatorname{ar sh}$ és jelentése: $\operatorname{sh} y = x$. Ez a függvény $\mathbb{R}$ -en értelmezett, logaritmikus alakja az

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

összefüggésből adódó

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$



94. ábra

egyenlet megoldásaként adódik

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}, \text{ azaz}$$

$$y = \operatorname{ar sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

(Az egyenlet megoldásánál azért állhat csak pozitív előjellel a gyök, mert $|x| < \sqrt{x^2 + 1}$ és $e^y > 0$.)

Az előbbiekhöz hasonlóan adódik:

$$\frac{d \operatorname{ar sh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{d^2 \operatorname{ar sh} x}{dx^2} = \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}},$$

vagyis $\operatorname{ar sh} x$ szigorúan monoton növekedő, $x < 0$ esetén konvex, $x > 0$ esetén konkáv (94. ábra).

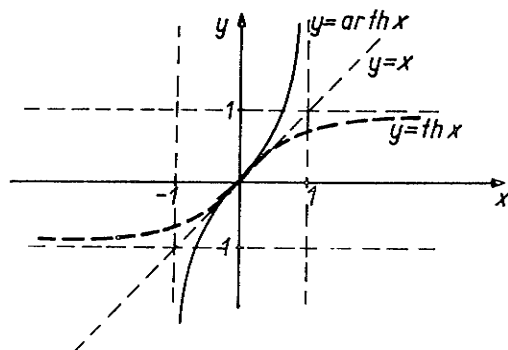
Az $\mathbb{R}$ -en szigorúan monoton növekedő th függvény inverze $\operatorname{ar th}$. (Értelmezési tartomány: $(-1, 1)$, $y = \operatorname{ar th} x$ jelentése $\operatorname{th} y = x$,

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \text{ -ből } e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}, \text{ ill. } y = \operatorname{ar th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

adódik. Közvetlenül innen is számítható a $((-1, 1)$ -ben értelmezett!) $\operatorname{ar th} x$ függvény deriváltja:

$$\frac{d \operatorname{ar th} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \quad \text{ s így } \frac{d^2 \operatorname{ar th} x}{dx^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2},$$

tehát $y' > 0$ $(-1, 1)$ -ben, s így y ott szigorúan monoton növekedő, $(-1, 0)$ -ban konkáv, $(0, 1)$ -ben konvex (95. ábra).



95. ábra

4.28. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy az

$$f = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \\ 2x, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$$

függvény $x = 0$ -ban lokálisan növekedő, de nincs olyan intervallum, amelyben monoton volna.

2. Igazoljuk az

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad (x > 0)$$

egyenlőtlenséget.

3. Igazoljuk az

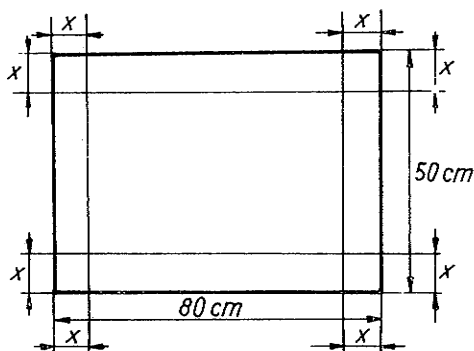
$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1)$$

egyenlőtlenséget.

V. A DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

1. Szélsőértékszámítás

IV.4.-ben említettük, hogy sokszor nem szükséges az adott f függvény teljes menetét megvizsgálnunk, megelégszünk azzal, ha f adott I intervallumbeli maximumát és minimumát ismerjük, illetve tudjuk, hogy hol veszi fel I -ben f ezeket az értékeket. (IV.4.14.) Az erre a kérdéskörre szorítkozó feladatokat nevezzük szélsőérték-feladatoknak. Ezek megoldásában a lokális szélsőértékek meghatározására szolgáló IV.4.8., - IV.4.12. tételeket használjuk.



96. ábra

1.1. Példa. 50 cm x 80 cm nagyságú bádoglemezből felül nyitott viztartályt akarunk készíteni úgy, hogy négy sarkából négy négyzetet kivágunk és a kapott négy téglalapot felhajtjuk. Készíthető-e ez a viztartály 20 literesre? (96. ábra.)

Távolságegységnek dm-t választva, jelöljük x -szel a levágott négyzetek élhosszát, K -val a tartály köbtartalmát. Feladatunk matematikai lényege tehát az a kérdés, hogy a

$$K = x(5 - 2x)(8 - 2x)$$

függvény $I = \{x : 0 \leq x \leq 2,5\}$ -beli abszolút maximuma nem kevesebb-e 20-nál?

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dx} &= (5 - 2x)(8 - 2x) + x(-2)(8 - 2x) + x(5 - 2x)(-2) = \\ &= \dots = 4(3x^2 - 13x + 10) \end{aligned}$$

$$\frac{dK}{dx} = 0, \text{ ha } x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{6} = \frac{13 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{10}{3} \\ 1. \end{cases}$$

Ezen értékek közül nyilván csak $x = 1$ jön számításba, mert $x = \frac{10}{3} \notin I$. $x = 1$ csakugyan lokális maximumot szolgáltat, mert

$$K(1) = 1 \cdot (5-2) (8-2) = 18, \quad K(0) = K(2,5) = 0;$$

tehát a tartály maximális köbtartalma $18 \text{ dm}^3 = 18 \text{ liter}$, a bádoglemez-ből 20 literes tartály nem készíthető.

1.2. Példa. Egy 4 m szélességű torony alján 2 m magas ajtó van. Bevihető-e a toronyba 8 m hosszú létra?

Számítsuk ki, hogy abban a helyzetben, amikor a létra egyik vége a talajon fekszik, másik vége pedig a torony átellenes falához ér (lásd 97. ábra), milyen magasan van a létrának az ajtó síkjába eső pontja. A létra bevihető a toronyba, ha ez a h -val jelölt magasság nem haladja meg a 2 métert, miközben a létra talajon fekvő végpontjának a torony átellenes falától mért x távolsága 8-tól 4-ig változik.

A 97. ábráról leolvasható, hogy

$$\frac{h}{x-4} = \frac{\sqrt{8^2 - x^2}}{x},$$

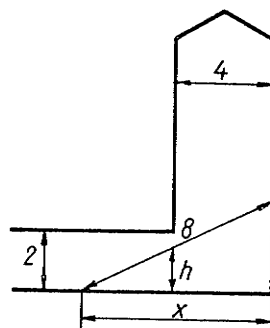
azaz

$$h = \left(1 - \frac{4}{x}\right) \sqrt{64 - x^2}.$$

Azt kérdezzük tehát, hogy $I = \{x : 4 \leq x \leq 8\}$ esetén a h függvény maximuma nem haladja-e meg 2-t.

Mivel $h(4) = h(8) = 0$, és $x \in (4, 8)$ esetében $h(x) > 0$, a h függvény maximumát I belsejében kell, hogy felvegye, tehát a $(4, 8)$ -beli maximum egyben lokális maximum is.

$$\frac{dh}{dx} = \frac{4}{x^2} \sqrt{64 - x^2} + \left(1 - \frac{4}{x}\right) \frac{-x}{\sqrt{64 - x^2}} = 0,$$



97. ábra

ha

$$4(64 - x^2) - x^2(x - 4) = 0,$$

$$x^3 = 256,$$

$$x \approx 6,35.$$

Az $x = \sqrt[3]{256} \approx 6,35$ helyen - anélkül, hogy a második derivált előjeléből erre következtetnénk - biztosan állíthatjuk, hogy $h(x)$ I - beli maximumát veszi fel, mivel tudjuk, hogy ezt I belsejében veszi fel, és csak ott veheti fel, ahol $h'(x) = 0$.

$$h(\sqrt[3]{256}) \approx (1 - \frac{4}{6,35}) \sqrt{64 - 6,35^2} \approx 0,37 \sqrt{23,7} \approx 1,8,$$

a létra tehát bevihető a toronyba.

2. A L'Hospital-szabály

Ismert határértékű függvényekből racionális műveletekkel felépített függvények határértékét általában úgy számítottuk ki, hogy az alkotó elemek határértékeiből következtettünk a függvény határértékére. Pl.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg x}{\operatorname{th} x} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}.$$

Nem tudunk azonban az alkotó elemek határértékének ismeretében közvetlenül az összetett kifejezés határértékére következtetni azokban az esetekben, amikor az alkotó elemekben elvégzett határátmenettel formálisan a " $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 " kifejezések valamelyike adódna. Pl. az $\frac{x}{x}$, $\frac{2x}{x}$, $\frac{x}{2}$, $\frac{x^3}{x}$ kifejezések mindegyikében $x \rightarrow +\infty$

esetében a számláló is, a nevező is $+\infty$ -hez tart, ugyanakkor a kifejezések határértéke 1, 2, 0, $+\infty$. Alkalmas megfontolással - mint ahogyan azt a bevezető példában tettük - ilyenkor meghatározhatjuk az ilyen típusu határértékeket is, sok esetben azonban mint pl.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$, ($n > 0$) meghatározásánál célszerű a l'Hospital-szabályt alkalmazni e speciális határértékek kiszámítására.

2.1. Tétel. Legyen $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható α -nak egy pontozott környezetében, itt $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ és

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0,$$

vagy

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow \alpha} |g(x)| = +\infty.$$

Ekkor ha

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta,$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta.$$

Itt $\alpha = a, a+0, a-0, +\infty, -\infty$, $\beta = b, +\infty, -\infty$ lehet (a, b véges).

Bizonyítás.

A bizonyítást először abban a speciális esetben adjuk meg, amikor $\alpha = a$ (véges) és

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) = g(a) = 0.$$

Ekkor ugyanis a Cauchy-féle középértéktételt alkalmazva (IV.3.5.) létezik olyan $\xi \in (x, a)$, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Mivel pedig $x \rightarrow a$ esetén $\xi \rightarrow a$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

adódik, amit bizonyítanunk kellett.

Az általános esetben, amikor $f(\alpha)$ és $g(\alpha)$ nincs értelmezve, vagy határértékük $\neq 0$, annak érdekében, hogy a speciális esetben alkalmazott okoskodás lényeges részét alkalmazhassuk, alkalmas x' -vel $\frac{f(x)}{g(x)}$ -et a következő alakba írjuk át:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(x')}{g(x) - g(x')} \cdot \frac{g(x) - g(x')}{g(x)} + \frac{f(x')}{g(x)} = \\ &= \frac{f(x) - f(x')}{g(x) - g(x')} \left(1 - \frac{g(x')}{g(x)}\right) + \frac{f(x')}{g(x)} = \\ &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(1 - \frac{g(x')}{g(x)}\right) + \frac{f(x')}{g(x)}, \end{aligned}$$

ahol a Cauchy-féle középértéktételt alkalmaztuk, vagyis $\xi \in (x, x')$.

A tétel feltételei mellett azt kell tehát belátnunk, hogy minden (x_n) sorozathoz, melynél $x_n \rightarrow \alpha$, van olyan (x'_n) ($x'_n \rightarrow \alpha$) sorozat, hogy

$$(x) \quad \frac{f(x'_n)}{g(x'_n)} \rightarrow 0 \quad \text{és} \quad \frac{g(x'_n)}{g(x_n)} \rightarrow 0.$$

Ekkor ugyanis az előbbi átalakítással

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow \alpha} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} &= \lim_{\substack{x_n \rightarrow \alpha \\ x'_n \rightarrow \alpha}} \left[\frac{f(x_n) - f(x'_n)}{g(x_n) - g(x'_n)} \left(1 - \frac{g(x'_n)}{g(x_n)}\right) + \frac{f(x'_n)}{g(x_n)} \right] = \\ &= \lim_{\substack{x_n \rightarrow \alpha \\ x'_n \rightarrow \alpha \\ \xi_n \rightarrow \alpha}} \left[\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \left(1 - \frac{g(x'_n)}{g(x_n)}\right) + \frac{f(x'_n)}{g(x_n)} \right] = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\xi_n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \quad (\xi_n \in (x_n, x'_n), \text{ ill. } \xi_n \in (x'_n, x_n))$$

A kívánt (x_n) ill. (x'_n) sorozatokat másképp konstruáljuk meg

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

ill.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)| = +\infty$$

esetében.

a) Tetszőleges ∞ -hoz tartó (x_n) sorozatra minden k -hoz van olyan n_k , hogy

$$\left| \frac{f(x_{n_k})}{g(x_{n_k})} \right| < \frac{1}{k}, \quad \left| \frac{g(x_{n_k})}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k},$$

hiszen rögzített k mellett

$$\frac{f(x_n)}{g(x_k)} \rightarrow 0, \quad \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \rightarrow 0.$$

(Feltehető, hogy $n_k > n_{k-1}$.) Ha mármost

$$x'_k = x_{n_k} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

az (x_n) és (x'_n) sorozatra $(*)$ teljesül, állításunkat igazoltuk.

$$\text{b) Minden } (x_n) \text{ sorozatra } \lim_{x_n \rightarrow \infty} |g(x_n)| = +\infty, \text{ ezért tehát}$$

minden k -hoz van olyan n_k , hogy

$$\left| \frac{f(x_k)}{g(x_m)} \right| < \frac{1}{k} \quad \text{és} \quad \left| \frac{g(x_k)}{g(x_m)} \right| < \frac{1}{k}, \quad \text{ha } m \geq n_k.$$

Feltehető, hogy $n_k > n_{k-1}$. Ha tehát minden (x_n) sorozathoz azt az (x'_n) sorozatot választjuk, melynél

$$x'_n = x_k, \quad \text{ha } n_k < n \leq n_{k+1},$$

akkor ismét fennáll (x) , s így állításunkat igazoltuk. $\times$

2.2. Megjegyzés. A

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x)$$

határérték meghatározására, ahol

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)| = +\infty,$$

az $f \cdot g$ függvényt az

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, \quad \text{vagy} \quad \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

alakba írjuk át és határértékének kiszámítására ebben az alakban használhatjuk a 2.1. szabályt.

2.3. Megjegyzés.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$$

meghatározására, ahol

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty,$$

célszerű az

$$u(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad v(x) = \frac{1}{g(x)}$$

jelölést bevezetnünk. Ekkor ugyanis

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{u(x)} - \frac{1}{v(x)} = \frac{v(x) - u(x)}{u(x) \cdot v(x)},$$

ahol a számláló is, a nevező is $x \rightarrow \infty$ esetén 0-hoz tart, vagyis a l'Hospital-szabály eredeti alakjában (2.1.) használható.

2.4. Megjegyzés. Ha $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, akkor

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)}$ meghatározására szintén használhatjuk a l'Hospital-

szabályt ($f^g = e^{g \ln f}$), és itt az exponenciális függvény folytonossága miatt elég $g \ln f$ határértékét meghatározni.

2.5. Példák. Láttuk, hogy az exponenciális függvény, a logaritmus függvény és $\mu > 0$ esetén a hatványfüggvény $x \rightarrow \infty$ esetében a végtelenhez tart. Felvethető a kérdés, melyik tart közülük "erősebben" "gyorsabban" a végtelenhez, mint a másik. (Általában $x \rightarrow \infty$ esetén f erősebben tart végtelenhez, mint g , ha $\frac{f}{g} \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$).

Belátjuk, hogy az exponenciális függvény gyorsabban tart végtelenhez, mint a hatványfüggvény, utóbbi pedig gyorsabban tart végtelenhez, mint a logaritmus függvény. Mivel $a^x = e^{x \ln a}$, $\log_a x = \ln x \cdot \frac{1}{\ln a}$ elég azt megmutatnunk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\mu}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\mu} = 0.$$

Második állításunkat könnyebb belátni:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\mu} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\mu)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu x^\mu} = 0$$

($\mu > 0$).

Az első állítás igaz voltát a l'Hospital-szabály ismételt alkalmazásával tudjuk csak belátni. Annyiszor alkalmazzuk a szabályt, ameddig a derivált hatványfüggvény kitevője (a számlálóban) nem vált át negatívra. Pl.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\pi}}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi x^{\pi-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(\pi-1)x^{\pi-2}}{e^x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)x^{\pi-3}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)x^{\pi-4}}{e^x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)}{x^{4-\pi} \cdot e^x} = 0.
\end{aligned}$$

$x \rightarrow +0, \mu > 0$ esetében $x^\mu \rightarrow 0$ (tehát $\frac{1}{x^\mu} \rightarrow \infty$) és $\ln x \rightarrow -\infty$.
Ugyanekkor

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +0} (x^\mu \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\mu}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\mu x^{-\mu}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-x^\mu}{\mu} = 0,
\end{aligned}$$

($\mu > 0$). x^μ tehát erősebben tart $x \rightarrow +0$ esetén 0-hoz, mint $\ln x$ a $-\infty$ -hez.

3. Taylor-polinom

A differenciálhányados bevezetésénél említettük, hogy a c pontban differenciálható f függvény ott "közel lineáris", ami alatt azt kellett érteni, hogy $K(c, \delta)$ -ban az

$$\ell(x) = f'(c)(x - c) + f(c)$$

lineáris függvénnyel (mellyel az f görbéjéhez c -ben illeszkedő érintő egyenletét adtuk meg) közelíthető meg. E közelítés "jóságát" azzal tudjuk kimutatni, hogy nemcsak

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - \ell(x)) = 0,$$

hanem még

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - c} = 0$$

is érvényes.

Felvethetjük mármost a kérdést, hogy ha f c -ben n -szer differenciálható, melyik lesz az az n -edfoku $p_n(x)$ polinom, melyre, a közelítés "jószágának" jellemzőjeként, nemcsak $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - p_n(x))$, hanem még $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - c)^n} = 0$.

Itt csak lokálisan, a c abszcisszáju pont környezetében közelítünk, ennek a közelítésnek jószágát vizsgáljuk. Intervallumbeli optimális közelítés kérdésének vizsgálatára itt nem térünk ki (más polinomok lesznek erre megfelelőbbek).

3.1. Definíció. Ha f a c helyen n -szer differenciálható, akkor azt az n -edfoku $p_n(x)$ polinomot, melyre

$$(*) \quad p(c) = f(c), \quad p'(c) = f'(c), \quad \dots, \quad p^{(n)}(c) = f^{(n)}(c),$$

f c -hoz tartozó n -edfoku Taylor-polinomjának nevezzük.

3.2. A $(*)$ feltételből könnyen adódik (n -szeri deriválással és a deriváltakba $x = c$ értéket helyettesítve), hogy f n -edfoku

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - c)^k$$

Taylor-polinomjának együtthatói az un. Taylor-együtthatók:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Ha ugyanis $p_n(x)$ -et az $(x - c)$ hatványai szerint rendezett alakban felírjuk:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (x - c)^k, \end{aligned}$$

akkor

$$p'_n(x) = a_1 + a_2 \cdot 2(x - c) + \dots + a_n \cdot n(x - c)^{n-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k \cdot k(x - c)^{k-1},$$

$$p''_n(x) = a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x - c) + \dots + a_n \cdot n \cdot (n-1)(x - c)^{n-2} =$$

$$= \sum_{k=2}^n a_k \cdot k(k-1)(x - c)^{k-2},$$

.

.

.

$$p_n^{(n-1)}(x) = a_{n-1} \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1 + a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2(x-c) =$$

$$= \sum_{k=n-1}^n a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-(n-2))(x - c)^{k-(n-1)},$$

$$p_n^{(n)}(x) = a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = a_n \cdot n!,$$

tehát

$$p_n(c) = a_0,$$

$$p'_n(c) = a_1,$$

$$p''_n(c) = a_2 \cdot 2,$$

.

.

.

$$p_n^{(k)}(c) = a_k \cdot k!,$$

.

.

.

$$p_n^{(n)}(c) = a_n \cdot n!,$$

vagyis

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(c)}{k!} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, n),$$

hiszen a 3.1.-beli feltétel értelmében $p^{(k)}(c) = f^{(k)}(c)$
 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ esetén.

Igaz mármost, hogy azok közül a $p_n(x)$ n -edfoku polinomok
 közül, melyekre $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - p_n(x)) = 0$, a $T_n(x)$ Taylor polinom
 közelíti meg - a bevezetőben megfogalmazott értelemben - legerősebb-
 ben az f függvényt $K(c, \delta)$ -ban:

3.3. Tétel. A c helyen n -szer differenciálható f
 függvényhez tartozó n -edfoku

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

Taylor-polinomra, és csak erre az n -edfoku polinomra érvé-
 nyes:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - c)^n} = 0.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a IV.3.6.5. feladat állítását $f(x)$ helyett
 $f(x) - T_n(x)$ -re, $g(x)$ helyett $(x-c)^n$ -re. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-c)^n} = \frac{0}{n!} = 0.$$

Viszont, hogy egy $q_n(x)$ polinomra

$$q_n(c) = q'_n(c) = q_n^{(k-1)}(c) = 0, \quad q_n^{(k)}(c) \neq 0 \quad (k \leq n),$$

akkor IV.3.6.5. -t (n helyett k -val) az $f(x) = q_n(x)$
 $g(x) = (x-c)^k$ szereposztásban alkalmazva

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{q_n(x)}{(x-c)^k} = \frac{q_n^{(k)}(c)}{k!} \neq 0.$$

Ezért egy n -edfokú $p_n(x) \neq T_n(x)$ polinomra valamely $k \leq n$ mellett

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{p_n(x) - T_n(x)}{(x-c)^k} \text{ véges és } \neq 0,$$

és így

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{p_n(x) - T_n(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{p_n(x) - T_n(x)}{(x-c)^k} \cdot \frac{1}{(x-c)^{n-k}} \right)$$

nem lehet 0 (csak véges 0-tól különböző szám, ha $k = n$, vagy $\pm \infty$, ha $k < n$). Ilyenkor tehát

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-c)^n} = 0$$

is lehetetlen. x

Arra nézve, hogy az $f(x) - T_n(x)$ különbség hogyan becsülhető meg (ezzel adjuk meg az $f(x) \approx T_n(x)$ közelítés hibáját), a következőt mondhatjuk:

3.4. Tétel. Ha f $(n+1)$ -szer differenciálható $[a, b]$ -ben, akkor minden $x \in (a, b)$ -hez van olyan x -től függő $\xi \in (c, x)$, ill. $\xi \in (x, c)$, melyre

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1} \quad (c \in (a, b))$$

(Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal).

E tétel alkalmazásával, ha c és x között $|f^{(n+1)}| < K$, a $T_n(x)$ Taylor-polinommal való közelítés hibájára a következő becslés adható:

$$|f(x) - T_n(x)| < \frac{K}{(n+1)!} (x - c)^{n+1}.$$

Bizonyítás. A 3.4. tétel bizonyítására vezessük be a

$$g(x) = f(x) - T_n(x) + C(x - c)^{n+1}$$

jelölést, ahol C -t úgy választjuk, hogy rögzített $x_0 \in (a, b)$ esetén $g(x_0) = 0$ legyen, tehát

(xxx)

$$C = \frac{T_n(x_0) - f(x_0)}{(x_0 - c)^{n+1}}.$$

Mivel

$$g(c) = g'(c) = \dots = g^{(n)}(c) = 0,$$

A Rolle-tételt (IV.3.1.) ismételten alkalmazva (legyen $c < x_0$)

$g(c) = g(x_0) = 0$ miatt $\exists \xi_1 \in (c, x_0)$, hogy $g'(\xi_1) = 0$,

$g'(c) = g'(\xi_1) = 0$ miatt $\exists \xi_2 \in (c, \xi_1)$, hogy $g''(\xi_2) = 0$,

.

.

.

$g^{(n)}(c) = g^{(n)}(\xi_n) = 0$ miatt $\exists \xi_{n+1} \in (c, \xi_n)$, hogy

$$g^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 0.$$

Mivel azonban értelmezése következtében

$$g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) + C(n+1)!$$

és innen $x = \xi$ esetén $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ miatt

$$C = -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

(xxx) folytán

$$f(x_0) - T_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x_0 - c)^{n+1}.$$

A Taylor-formula alkalmazásával könnyen levezethető a

3.5. Binomiális tétel:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$f(x) = (x + b)^n$$

f n -edfokú polinóm, tehát megegyezik pl. az $a = 0$ helyhez tartozó n -edfokú Taylor-polinómjával. Írjuk fel ezt a polinómot, majd végezzük el az $x = a$ helyettesítést, ezzel a kívánt összefüggésre jutunk.

$$f(x) = (x + b)^n, \quad f(0) = b^n,$$

$$f'(x) = n(x + b)^{n-1}, \quad f'(0) = n \cdot b^{n-1},$$

·
·
·

$$f^{(k)}(x) = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(x + b)^{n-k}, \quad f^{(k)}(0) = \\ = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)b^{n-k},$$

·
·
·

$$f^{(n)}(x) = n!, \quad f^{(n)}(0) = n!,$$

vagyis

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)b^{n-k}}{k!} = \binom{n}{k} b^{n-k}$$

(ahol az $\binom{n}{k}$ ún. binomiális együtthatót a fenti módon értelmezzük).
Így

$$(x + b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^{n-k} \cdot x^k,$$

illetve az $x = a$ helyettesítéssel a bizonyítandó

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^{n-k} a^k$$

összefüggésre jutunk. x

4. Egyenletek közelítő megoldása

4.1. Tekintsük az

$$(*) \quad f(x) = 0$$

egyenletet (f adott függvény).

Ha f n -edfoku polinom, akkor a $(*)$ egyenletet n -edfoku algebrai egyenletnek nevezzük. Ha f a független változóból és állandókból az alapműveletek és gyökvonások segítségével állt elő, akkor a $(*)$ egyenletet irracionális egyenletnek nevezzük, egyéb f esetében $(*)$ transzcendens egyenlet. Pl.

$$3x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 = 0 \quad \text{negyedfoku algebrai egyenlet,}$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x^3 + x = 0 \quad \text{irracionális egyenlet,}$$

$$e^x + x = 0 \quad \text{transzcendens egyenlet.}$$

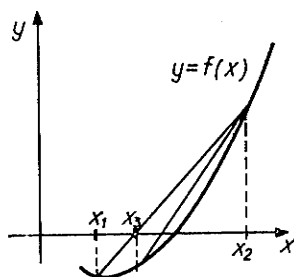
Az $f(x) = 0$ egyenletet megoldani annyit tesz, mint megkeresni azokat az x értékeket (ha ilyenek egyáltalában léteznek), melyekre $f(x) = 0$, vagyis más szóval, melyek a $(*)$ egyenletet kielégítik. Az ilyen x értékek az egyenlet megoldásai, vagy gyökei.

Az alábbiakban csak a valós gyökök meghatározásának problémájával foglalkozunk.

Az első és másodfoku algebrai egyenletek megoldása az ismert képletek segítségével nem okoz nehézséget. A harmad- és negyedfoku algebrai egyenletek megoldására is ismeretesek képletek, melyek az egyenlet együtthatóiból az alapműveletek és gyökvonások véges számu alkalmazásával az egyenlet gyökeit megadják, ezek a képletek azonban lényegesen bonyolultabbak, mint a másodfoku egyenlet megoldását szolgáló képlet. Tetszőleges ötödfoku, vagy ennél magasabb fokú algebrai egyenletre azonban ilyen véges sok algebrai műveletet tartalmazó megoldó képlet nem adható meg. Az ilyen egyenletek, és általában az irracionális és transzcendens egyenletek megoldásait csak közelítő pontossággal tudjuk előállítani, és a fent említett képletek bonyolult volta miatt, általában már a harmad- és negyedfoku algebrai egyenletek megoldásánál is az alább ismertetendő közelítő megoldási módszereket szoktuk használni.

4.2. Hurmódszer (latinul regula falsi). Alapgondolata, hogy ha x_1 és x_2 két olyan érték, melyekre a $(*)$ egyenlet bal oldalán álló folytonos f függvény ellenkező előjeltű, akkor az $y = f(x)$ görbének

az x_1 és x_2 abszcisszájú pontjain áthaladó hurja (az $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ pontokon áthaladó egyenes) az x tengelyt olyan pontban metszi, amely a (x) egyenlet gyökéhez közel fekszik. E metszéspont abszcisszáját x_3 -mal jelölve, eljárásunkat úgy folytatjuk, hogy az $(x_3, f(x_3))$ pontot a kiindulásul szolgáló x_1 és x_2 abszcisszájú pontok közül azzal párosítjuk (ennek abszcisszáját majd x_4 -gyel jelöljük), melyben az f függvény értéke az $f(x_3)$ értéktől előjelben



98. ábra

különbözik. A második lépésben e két ponton áthaladó hur x tengellyel való metszéspontját számítjuk ki, ezt x_5 -tel jelöljük, és így folytatjuk eljárásunkat az előbbi mintájára. (Lásd 98. ábra.)

Például az

$$f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

egyenlet megoldásánál, mivel

$$f(0) = -2, f(1) = +2,$$

a hurmódszert az $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ választással kezdjük el alkalmazni. Mivel általában az $(x_n, f(x_n))$, $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ pontokon áthaladó hur egyenlete

$$y = f(x_n) + \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} (x - x_n),$$

mig e hur x tengellyel való metszéspontja

$$x = x_{n+2} = x_n - \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} f(x_n) \quad (n=1, 2, \dots)$$

a számítást a következő táblázatban célszerű összefoglalni, elrendezni (ha a két választott abszcisszához tartozó ellenkező előjelű függvényérték közül az egyik abszolút értékben lényegesen kisebb a másiknál, megkíséreljük az egyik, vagy mindkét abszcisszáat másik, a keresett gyök-helyhez közelebb fekvővel helyettesíteni):

x_n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	$\frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} f(x_n)$	x_{n+2}
0	1	-2	2	-0,5	0,5
0,5	1	-0,875	2	-0,152	0,652
0,652	0,8	-0,29	0,5	-0,054	0,706
0,706	0,8	-0,03	0,5	-0,005	0,711

A számításnál kerekített értékeket adtunk meg. A második lépésben kapott $x_5 = 0,652$ abszcissza behelyettesítésével $f(x_5) = -0,29$

adódott, ami lényegesen kisebb abszolút értékű, mint az $x_2 = x_4 = 1$ helyhez tartozó $f(1) = 2$ helyettesítési érték. Ezért x_6 -nak 1 helyett 0,8-at választottunk, melyre $f(0,8) = 0,5$ még mindig pozitív, de abszolút értéke kevesebb, mint $f(0,652) = -0,29$ -től. Számításunk utolsó értékeként adódó $x = 0,711$ értéket függvényünkbe behelyettesítve, kerekítéssel egy gyökre

$$f(0,711) \approx 0$$

adódik.

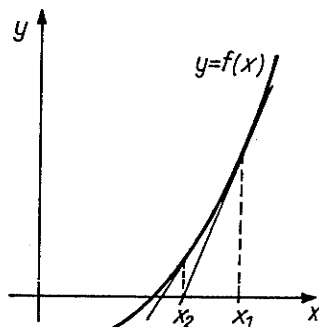
4.3. Érintőmódszer (Newton-módszer). E módszer alkalmazásánál az $f(x) = 0$ egyenlet gyökének egy közelítő x_1 értékéből indulunk ki, és egy további közelítő értéket f görbéjéhez az x_1 abszcisszájú pontban húzott

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

egyenletű érintő x tengellyel való metszéspontja

$$x = x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

szolgáltat (99. ábra). Eljárásunkat - mely nyilván csak $f' \neq 0$ esetében alkalmazható - tovább folytatva, a közelítő gyök-értékek



99. ábra

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)})$$

sorozatának konvergenciájáról a következő tétel mondható ki:

4.4. Tétel. Ha ξ gyöke az $f(x) = 0$ egyenletnek és a ξ és x_1 abszcisszáik közötti szakaszon $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$, továbbá $f(x_1)$ és $f'(x_1)$ megegyező előjelűek, $f'(x)$ folytonos, akkor az érintőmódszerrel kapott (x_n) sorozat a ξ gyökhöz konvergál.

Bizonyítás. Minthogy a folytonos f' függvény ξ és x_1 között nem tűnik el, azért itt állandó előjelű. Ugyanez mondható $f''(x)$ -ről is.

Legyen pl. $\xi < x_1$, $f'(x_1) > 0$, $f''(x_1) > 0$, és a feltevés szerint egyszersmind $f(x_1) > 0$. Ekkor f görbéje a $\xi \leq x < x_1$ szakaszon konvex és növekvő (ezt az esetet szemléltettük a 99. ábrán). Mivel $\xi < x_2 < x_1$, $\xi < x_3 < x_2$, ..., az (x_n) sorozat monoton fogyó, és alulról korlátos ($x_n \geq \xi$, $n \in \mathbb{N}$), tehát véges határértékhez tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \geq \xi.$$

A sorozat képzési törvénye szerint azonban

$$(xx) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

és $n \rightarrow \infty$ esetében $x_{n+1} \rightarrow x_0$, $x_n \rightarrow x_0$, továbbá f , f' folytonossága miatt $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, $f'(x_n) \rightarrow f'(x_0)$, tehát mivel (xx) -ből

$$f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1}),$$

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n)(x_n - x_{n+1}) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

ξ és x_1 között azonban - feltevésünk értelmében - $f(x) > 0$, tehát $(\xi \leq x_0 < x_1) f(x_0) = 0$ csak úgy állhat, ha $\xi = x_0$, amivel igazoltuk, hogy

$$x_n \rightarrow \xi, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Természetesen hasonló az okoskodás, ha $f''(x)$ és $f'(x)$ előjele a többi három lehetséges kombinációt mutatja. x

4.5. Példaként oldjuk meg az

$$e^x + x = 0$$

transzcendens egyenletet.

$$f(x) = e^x + x, \quad f(0) = 1, \quad f(-1) = e^{-1} - 1 < 0,$$

tehát -1 és 0 között van az egyenletnek gyöke. Több gyöke az egyenletnek nem is lehet, mert f monoton növekedő $\mathbb{R}$ -en ($f' = e^x + 1 > 0$), így legfeljebb egy helyen veheti fel a zérus értéket. Minthogy $f'(x) = e^x > 0$, azért kiinduló értéknek $x_1 = 0$ -t választjuk. A számítást alkalmasan rendezve

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}$
0	1	1	0,5	-0,5
-0,5	0,106	1,606	0,066	-0,566
-0,566	0,002	1,568	0,001	-0,567

Az $x_4 = -0,567$ érték a fenti kerekítéssel jó közelítés a gyökre.

4.6. Iteráció, vagy szukcesszív approximáció (sorozatos közelítés). Ez a közelítő eljárás az

$$x = g(x)$$

alakban megadott egyenletek gyökeinek közelítő meghatározására alkalmazható. (Ha egyenletünk $0 = f(x)$ alakú, ebből $x = x + f(x)$ adódik, tehát $g = x + f(x)$.)

Az egyenlet egy x_1 közelítő gyökéből kiindulva

$$x_2 = g(x_1)$$

lesz a következő, majd

$$x_3 = g(x_2),$$

.

.

.

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

.

.

.

közelítő gyök. Az így adódó (x_n) sorozat konvergenciájáról a következő állítás mondható ki:

4.7. Tétel. Ha ξ az $x = g(x)$ egyenletnek gyöke, továbbá egy $K(\xi, \delta)$ -ban g differentiálható és $|g'(x)| \leq q < 1$, és $x_1 \in K(\xi, \delta)$, akkor a közelítő gyök-értékek (x_n) sorozata az egyen- let ξ gyökéhez konvergál.

Bizonyítás. Mivel

$$\xi = g(\xi),$$

azért

$$x_2 - \xi = g(x_1) - g(\xi) = (x_1 - \xi)g'(\eta_1)$$

a Lagrange-féle középértéktétel (IV.3.2.) értelmében, ahol η_1 a ξ és x_1 számok közé esik. Ezért - a feltétel értelmében -

$$|g'(\eta_1)| \leq q,$$

tehát

$$|x_2 - \xi| \leq q |x_1 - \xi|,$$

vagyis még inkább áll, hogy

$$|x_2 - \xi| < |x_1 - \xi| \leq \delta,$$

tehát $x_2 \in K(\xi, \delta)$. Előbbi okoskodásunk tehát x_1 helyett x_2 -vel is elvégezhető, s így

$$|x_3 - \xi| \leq q |x_2 - \xi| \leq q^2 |x_1 - \xi|$$

adódik, illetve tovább folytatva eljárásunkat, általában

$$|x_n - \xi| \leq q^{n-1} |x_1 - \xi|.$$

Minthogy $0 < q < 1$, azért $q^{n-1} \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, és így annál inkább

$$|x_n - \xi| \rightarrow 0, \text{ azaz } x_n \rightarrow \xi, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

amit bizonyítani akartunk. *

Megjegyezzük még, hogy mivel g inverzét g^{-1} -gyel jelölve)

$$x = g(x) \quad \text{és} \quad x = g^{-1}(x)$$

gyökei megegyeznek, az iterációs eljárás pedig csak $|g'| \leq q < 1$ esetén konvergál, amennyiben ez a feltétel nem teljesülne, és g^{-1} ismert, az eredeti egyenlet helyett az $x = g^{-1}(x)$ egyenletet oldjuk meg iterációval (ha ui. $|g'| > 1$, akkor inverzére $|g^{-1}| < 1$).

4.8. Oldjuk meg például a

$$2x = \cos x$$

transzcendens egyenletet:

$$x = 0,5 \cos x,$$

tehát

$$g(x) = 0,5 \cos x, \quad g'(x) = -0,5 \sin x, \quad |g'(x)| \leq 0,5$$

minden x -re, x_1 tehát tetszőlegesen választható, az iterációs eljárás mindig konvergálni fog. Legyen pl.

$$x_1 = 0.$$

Ekkor számításunk:

x_n	$(x_n)^0$	$\cos x$	$0,5 \cos x = x_{n+1}$
0	0^0	1	0,5
0,5	$28,6^0$	0,878	0,439
0,439	$25,2^0$	0,905	0,453
0,453	$26,0^0$	0,899	0,450
0,450	$25,8^0$	0,9	0,450

Látható, hogy

$$0,5 \cos 0,450 \approx 0,450$$

vagyis a keresett gyök

$$x \approx 0,450.$$

VI. AJÁNLOTT IRODALOM

- A.F. Bermant: Matematikai Analízis (I-II) (Tankönyvkiadó, 1951)
- Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai (Műszaki könyvkiadó, 1978)
- B. P. Gyemidovics: Matematikai analízis feladatgyűjtemény (Tankönyvkiadó, 1971).

VII. ÚTMUTATÁS A FELADAT MEGOLDÁSHOZ

I. Bevezetés

- 1.18.1. a) $B \subset A$; b) $A \cap B = \emptyset$.
- 1.18.2. Megmutatjuk, hogy a jobb oldali halmaz részhalmaza a bal oldalinak és viszont.
- 1.18.3. a) és b) mint 1.18.2.
- 1.18.4. $(1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1); (1, 0), (2, 0);$
 $\{x : x = (1, n) \vee (2, n), n \in \mathbb{N}\};$
 $(1, -1, 0), (1, 1, 0), (2, -1, 0), (2, 1, 0).$
- 1.18.5. a) I.1, I.2, II.1, II.2, III.1.
 b) mint a)
 c) az összeadás és szorzás művelete kivezethet $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ -ből
 (pl. $(-\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2} = 1, (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1$).
 d) mint a)
 e) mint a)
 f) a szorzás művelete kivezet a halmazból.
 g) I.1, I.2. III.1.
- 2.16.1. Igen.
- 2.16.2. Pl. $y = \lfloor |x| \rfloor + 1$ (az $|x|$ -ban foglalt legnagyobb egész számot jelöljük $\lfloor |x| \rfloor$ -kel),
 $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{N}$, ill. $x \mapsto \lfloor |x| \rfloor + 1$.
- 2.16.3. $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ ($x \in \mathbb{R} - \{0\}$) és $0 \mapsto 0$.
- 2.16.4. $x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$ ($x \in \mathbb{R}$).
- 2.16.5. Ha y az $f(X_1 \cup X_2)$ képhalmaznak eleme, akkor vagy X_1 -beli, vagy X_2 -beli elem képe, tehát eleme $f(X_1) \cup f(X_2)$ -nek is, $f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2)$; ha viszont $u \in f(X_1) \cup f(X_2)$,

akkor vagy X_1 -beli, vagy X_2 -beli elem képe, s így képe valamely $X_1 \cup X_2$ -beli elemnek, tehát $f(X_1 \cup X_2) \supset f(X_1) \cup f(X_2)$.

2.16.6. Nem.

2.16.7. Hasonló 2.16.5.-höz.

2.16.8. Hasonló 2.16.5.-höz.

3.21.1. Ha $0' \neq 0$ -ra is állna $3.1.3^0 \Rightarrow 0 = 0 + 0' = 0'$, ellentmondás; ha $1' \neq 1$ -re is állna $3.1.7^0 \Rightarrow 1 = 1' \cdot 1 = 1'$, ellentmondás; $a + x = a + y = 0 \Rightarrow x = x + 0 = x + a + y = 0 + y = y$, tehát $x \neq y$ nem állhat; $a \cdot x = a \cdot x = 1 \Rightarrow x = x \cdot 1 = x \cdot (ay) = y(ax) = y \cdot 1 = y$, tehát $x \neq y$ nem állhat.

3.21.2. $0 \cdot a + 1 \cdot a = (0 + 1)a = 1 \cdot a = a$, így $0 \cdot a + a + (-a) = a + (-a) \Rightarrow 0 \cdot a = 0$ hiszen csak egy 0 van.

3.21.3. Mivel $a \neq 0$, létezik $\frac{1}{a}$, $b = b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot \frac{1}{a}) = \frac{1}{a} (a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$, hiszen a feltétel szerint $ab = 0$.

3.21.5. Az állítást a teljes indukciós bizonyítási eljárás alábbi módosításával igazoljuk:

1^0 Igazoljuk, hogy az állítás $n = 2$ -re fennáll.

2^0 Igazoljuk, hogy ha az állítás $n = 2^k$ -ra igaz, akkor 2^{k+1} -re is igaz (ezzel minden $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ -re igazoltuk az állítást).

3^0 Igazoljuk, hogy ha az állítás egy n számra igaz, akkor minden n -nél kisebb $p \in \mathbb{N}$ számra is igaz (ezzel a közléső, nem 2^k alakú számokra is igazolva lesz az állítás).

1^0 $n=2$ -re $\sqrt{b_1 b_2} \leq \frac{b_1 + b_2}{2}$ ($b_1 > 0$, $b_2 > 0$), igaz, mert az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, négyzetreemelés után pedig $(b_1 - b_2)^2 \geq 0$ adódik. (= áll, ha $b_1 = b_2$.)

2^0 Tegyük fel, hogy

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt[2^k]{b_1 \cdot \dots \cdot b_{2^k}} \leq \frac{b_1 + \dots + b_{2^k}}{2^k} \\ & \sqrt[2^k]{b_{2^{k+1}} \cdot \dots \cdot b_{2^{k+1}}} \leq \frac{b_{2^{k+1}} + \dots + b_{2^{k+1}}}{2^k} \end{aligned} \right\} (+)$$

E két egyenlőtlenség bal oldalán álló két számra alkalmazva az 1^o-ban már bebizonyított egyenlőtlenséget, és ezután alkalmazva a (+) összefüggést adódik, hogy

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[2^k]{b_1 \cdot \dots \cdot b_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{b_{2^k+1} \cdot \dots \cdot b_{2^{k+1}}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt[2^k]{b_1 \cdot \dots \cdot b_{2^k}} + \sqrt[2^k]{b_{2^k+1} \cdot \dots \cdot b_{2^{k+1}}} \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b_1 + \dots + b_{2^k}}{2^k} + \frac{b_{2^k+1} + \dots + b_{2^{k+1}}}{2^k} \right) = \frac{b_1 + \dots + b_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}, \end{aligned}$$

igaz tehát az állítás, ha $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

3^o Belátjuk, hogy ha n -re igaz az állítás, akkor $p < n$ -re ($p \in \mathbb{N}$) is teljesül. Vezessük be a következő jelölést:

$$s = \frac{b_1 + \dots + b_p}{p}, \quad m = \sqrt[p]{b_1 \cdot \dots \cdot b_p},$$

ekkor a $b_1 \cdot \dots \cdot b_p \cdot s^{n-p}$ n -tényezős szorzatra 2^0 -t alkalmazva egyszerű számolással

$$b_1 \cdot \dots \cdot b_p \cdot s^{n-p} \leq \left(\frac{b_1 + \dots + b_p + (n-p)s}{n} \right)^n = \dots =$$

$$= \left(\frac{ps + (n-p)s}{n} \right)^n = s^n, \text{ azaz}$$

$$m^p \cdot s^{n-p} \leq s^n, \quad m^p \leq s^p,$$

tehát valóban $m \leq s$.

Az, hogy mikor áll az egyenlőtlenségben egyenlőség, könnyen igazolható.

- 3.21.6. Teljes indukcióval bizonyíthatunk: $n = 2$ -re igaz az állítás,
 $(1+x)^n \geq 1 + nx \Rightarrow (1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \geq$
 $\geq 1 + (n+1)x$ ($nx^2 \geq 0$, $x = 0$ -nál $=0$, ekkor az egyenlőtlenségben az egyenlőség jele érvényes).
- 3.21.7. $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + a^{n-2}b + a^{n-1}) > 0$.
- 3.21.8. Az $a-b = c$ jelöléssel 3.7.e. felhasználásával ($a=b+c$), ha $|a| > |b|$; az $|a| < |b|$ esetet az előbbire betűcserével vizsgálva vezethetjük.
- 3.25.10. Az, hogy $\mathbb{Q}$ kielégíti az Archimédész-axiómát triviális. Racionális végpontú egymásba skatulyázott intervallumok, melyeknek nincs közös racionális pontja pl. a $\sqrt{2}$ közelítő egészes tizedestörtjeivel megadott intervallumok, azaz $I_1 = [1, 2]$, $I_2 = [1, 4, 1, 5]$, $I_3 = [1, 41, 1, 42]$, ...
 ahol I_n hosszúsága $\frac{1}{10^{n-1}}$ és amely intervallumoknak egyetlen közös pontja, $\sqrt{2}$, irracionális.
 Általában, ha $I_n = [a_n, b_n]$ és $I_n \supset I_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ -re, továbbá nincs olyan pozitív szám, amelynél minden $b_n - a_n$ nagyobb, akkor az egymásbaskatulyázott $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$ zárt intervallumsorozatnak pontosan egy közös pontja van. (Egymásba skatulyázott nyílt intervallumsorozatnak nem kell, hogy legyen közös pontja.
 pl. $(0, 1) \supset (0, \frac{1}{2}) \supset (0, \frac{1}{4}) \supset \dots (0, \frac{1}{2^n}) \supset \dots$ esetén nincs közös pont.)
- 3.25.11.a) Az Archimédész-axióma szerint $\frac{b}{a} > 0$ -hoz $\exists n \in \mathbb{N}$:
 $\frac{b}{a} < n$; innen $a > 0$ -val átszorozva kapjuk az állítást. -
 b) Mivel $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, erre alkalmazva 14^o -et $\exists n \in \mathbb{N}$:
 $\frac{1}{\varepsilon} < n$, és $\varepsilon/n > 0$ -val szorozva az állításra juthatunk. -
 c) Elég azt bizonyítani, hogy speciálisan $0 < a < b$ esetén $\forall (a, b)$ -ben van egy rac. szám. Tí. $\Rightarrow n \in \mathbb{N}$: (a, b) -t n részre bontva fel, minden részintervallumban van egy, tehát (a, b) -ben n különböző rac. szám.
- 4.18.1. $\chi_{\mathbb{Q}}$ számosságú pl. $\{x : x = \frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{N}\}$,
 $\{y : y = k^2, k \in \mathbb{N}\}$, $\{z : z = (-2)^n, n \in \mathbb{N}\}$, χ számosságú pl. a 4.18.2. halmaz.

4.18.2. Igen, 4.17. értelmében pl. az R összes részhalmazzaiból álló halmazrendszer számossága $> \aleph$.

4.18.3. A halmaz kölcsönösen egyértelműen leképezhető R -re, ezért ekvivalens R -rel. (Pl. egy R -et egyértelműen $(-1, 1)$ -be leképező függvény $\frac{x}{1+|x|}$, és alkalmazzuk 4.4.-et.)

4.18.4. Lásd 4.13. $R - Q \sim R$.

4.18.5. Teljes indukcióval bizonyítunk. Tekintsünk egy $\bigtimes_{i=1}^n A_i$ elemait

tartalmazó sorozatot. Ha $a \in A_{n+1}$, akkor az előbbi sorozat

$\bigtimes_{i=1}^n A_i$ elemait tartalmazó tagjait egészítsük ki vele,

$(a_1, \dots, a_n, a) \in \bigtimes_{i=1}^{n+1} A_i$, a többi tagot hagyjuk változatlanul.

Ezt minden $a \in A_{n+1}$ -re elvégezve megszámlálható sok megszámlálható sorozatra jutunk, melyeknek egyesítése is megszámlálható (4.13.).

4.18.6. Legyen H végtelen, akkor az $a_1 \in H$, $a_2 \in H - \{a_1\}$, ..., $a_n \in H - \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$, ... elemek (ilyenek biztosan vannak, mert H végtelen) megszámlálható végtelen részhalmazát adják H -nak.

4.18.7. Jelöljük H összes részhalmazainak halmazát 2^H -val. H nyilván ekvivalens 2^H egy részhalmazával ($x \in H$ -nak az egy-elemű $\{x\} \in 2^H$ -t kell csak megfeleltetnünk). H és 2^H azonban már nem ekvivalens. Tegyük fel ennek ellenkezőjét, tehát, hogy $\exists f: H \rightarrow 2^H$, vagyis $x \in H$ és $f(x) \in 2^H$ közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Nevezzük T -tulajdonságúnak azokat az $x \in H$ elemeket, amelyek nem esnek a hozzájuk rendelt $f(x)$ részhalmazba. A T -tulajdonságú elemek H -nak egy H_0 részhalmazát alkotják. Ekkor $x_0 \in H_0$ és $x_0 \notin H_0$ is ellentmondásra vezet (T -tulajdonság!).

5.13.1. $\inf A = 0 \notin A$, $\sup A = 1 \notin A$.

5.13.3. $\frac{1}{6}$, ill. 0 .

5.13.4. $\frac{2}{3}$, ill. 0.

5.13.5. Ha volna olyan $x > 0$ szám, amelyhez nem található nála nagyobb $n \in \mathbb{N}$, akkor x felső korlátja $\mathbb{N}$ -nek. Legyen y a legkisebb felső korlát. Ekkor van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $k > y - 1$, s ekkor $(k+1) \in \mathbb{N}$, $(k+1) > y$, ellentmondás. Az egymásba skatulyázott $[a_n, b_n]$ intervallumok alsó végpontjai korlátos számhalmazt alkotnak (b_n felső korlát), a felső határ a keresett, minden egyes intervallumba beletartozó szám.

II. Sorozatok

$$2.17.1. a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

$$2.17.2. a_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n}.$$

2.17.3. 2.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és adott $\varepsilon > 0$ mellett a véges sok

$K(A, \varepsilon)$ -on kívül eső elem közül a legnagyobb vagy $A + \varepsilon$ felső korlát, míg az előbbi véges sok elem legkisebbike és $A - \varepsilon$ között a kisebbik alsó korlát.

2.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \neq A^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, |A - A^+| = \varepsilon$ mellett

$K(A, \frac{\varepsilon}{3})$ -ba ill. $K(A^+, \frac{\varepsilon}{3})$ -ba is véges sok elemről elte-

kintve bele kellene esnie (a_n) elemeinek, ami lehetetlen, hiszen a két környezet diszjunkt.

2.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ mellett $a_n \in K(A, \varepsilon)$ ha $n > N(\varepsilon)$,

de akkor ezen a környezeten kívül (a_{n_r}) -nek is csak véges sok eleme eshet, tehát A kell, hogy (a_{n_r}) határértéke legyen.

2.12. Változatlanul csak véges sok elem esik a határérték adott ε sugarú környezetén kívül.

2.14. Ha a feltevessel ellentétben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A > B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

állna, akkor volna olyan C szám, melyre $B < C < A$, és elég nagy n -ekre $b_n < C$ ill. $C < a_n \Rightarrow b_n < a_n$ ellentmondás.

2.15. $K(A, \varepsilon)$ -on kívül az "összefésztett" sorozatnak is csak véges sok eleme esik.

- 2.16. Ha $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $|b_n| < K$, akkor az (a_n) sorozatnál a külöbindexet úgy választva, hogy az ennél nagyobb indexekre tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett $a_n < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{K}$ legyen, $|a_n b_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. $K = \varepsilon$ adódik.
- 2.17.4. $A = \lim a_n = \lim c_n$ miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra $n > N(\varepsilon)$ esetén $a_n, b_n, c_n \in K(A, \varepsilon)$.
- 3.15.1. Akár A -nak és $+\infty$ -nek, akár A -nak és $-\infty$ -nek, akár $+\infty$ -nek és $-\infty$ -nek van diszjunkt környezete.
- 3.15.2. $p_k(n) = n^k (a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^k})$.
- 3.15.3. Emeljük ki a számlálóból n^k -t, a nevezőből n^j -t.
- 3.15.4. 3.9. Ha minden n -re $b_n > B$, és P adott, akkor elég nagy n -re $a_n > P - B$.
- 3.10. Ha minden n -re $b_n > B > 0$, és P adott, akkor elég nagy n -re $a_n > \frac{P}{B}$.
- 4.12.1. A 3.21.5. egyenlőtlenséget $b_1 = \dots = b_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_{n+1} = 1$ esetre alkalmazva adódik a monotonitás;
 $a_{b_1} = \dots = b_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_{n+1} = b_{n+2} = \frac{1}{2}$ esetre alkalmazva pedig a korlátosság.
- 4.12.2. $q > 1$ folytán $q^{n+1} > q^n$, ebből $n(n+1)$ -dik gyököt vonva
 $\sqrt[n]{q} > \sqrt[n+1]{q}$.
- 4.12.3. $n = 4$ -től kezdve a 4.12.1.-ben igazoltak szerint $(1 + \frac{1}{n})^n < n$, azaz $(\frac{n+1}{n})^n < n$, $(n+1)^n < n^{n+1}$. $n(n+1)$ -dik gyökvonással adódik, hogy az $(\sqrt[n]{n})$ sorozat monoton fogyó, és 1 nyilván alsó korlát, a sorozat konvergens. A páros indexű elemekből képezett részsorozat limesze a 3.21.6. egyenlőtlenség szerint nyert $(1 + (\sqrt[2n]{2n} - 1))^n \geq 1 + n(\sqrt[2n]{2n} - 1)$ összefüggésből $\frac{\sqrt{2n} - 1}{n} \geq \sqrt[2n]{2n} - 1 > 0$ alapján 1-nek adódik.

4.12.4. Először belátjuk, hogy ha x szakaszos végtelen tízjegyű törttel állítható elő, akkor x racionális szám.

Legyen az $a_0, a_1, a_2, \dots$ végtelen tízjegyű törtben a szakaszos rész első jegye a_k és legyen a szakasz p -jegyű, tehát

$$a_k = a_{k+p} = a_{k+2p} = \dots,$$

$$a_{k+1} = a_{k+1+p} = a_{k+1+2p} = \dots,$$

.

.

.

$$a_{k+p-1} = a_{k+p-1+p} = a_{k+p-1+2p} = \dots$$

Vezessük be az $a_0, a_1, a_2, \dots$ végtelen tízjegyű tört közelítő véges tízjegyű törtjeire a következő jelölést:

$$b_{k-1} = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1},$$

$$b_k = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k = b_{k-1} + \frac{a_k}{10^k},$$

.

.

.

$$b_{k+p-1} = b_{k-1} + \frac{a_k}{10^k} + \dots + \frac{a_{k+p-1}}{10^{k+p-1}},$$

.

.

.

$$b_{k+2p-1} = b_{k+p-1} + \frac{a_{k+p}}{10^{k+p}} + \dots + \frac{a_{k+2p-1}}{10^{k+2p-1}} =$$

$$= b_{k+p-1} + \frac{1}{10^p} \left(\frac{a_k}{10^k} + \dots + \frac{a_{k+p-1}}{10^{k+p-1}} \right).$$

Rövidebben, a zárójeles kifejezést q -val jelölve:

$$b_{k+p-1} = b_{k-1} + q,$$

$$b_{k+2p-1} = b_{k-1} + q + \frac{1}{10^p} q,$$

.

.

.

$$b_{k+np-1} = b_{k-1} + q + \frac{1}{10^p} q + \dots + \frac{1}{10^{(n-1)p}} q =$$

$$= b_{k-1} + q \frac{1 - 0,1^{np}}{1 - 0,1^p}$$

.

.

.

A $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 0,1^{np}}{1 - 0,1^p}$ határértéket S -sel jelölve, a közelítő törtek konvergens sorozatának

$$b_{k+p-1}, b_{k+2p-1}, \dots, b_{k+np-1}, \dots$$

részsorozata a $b_{k-1} + qS$ határértékhez tart, így a közelítő törtek sorozatának határértéke, az x szám értéke is ez kell, hogy legyen (2.11.):

$$x = b_{k-1} + qS.$$

Itt b_{k-1} , q , S racionális, tehát valóban x is racionális.
Megfordítva, ha $m, q \in \mathbb{N}$, akkor az $\frac{m}{q}$ osztást a következőképpen végezzük el:

$$m = a_0 q + r_0, \quad a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad r_0 \in M, \quad \text{ahol}$$

$$M = \{0, 1, \dots, q-1\}, \quad \text{majd}$$

$$10r_0 = a_1 q + r_1, \quad a_1 \in D, \quad r_1 \in M, \quad \text{ahol } D = \{0, 1, \dots, 9\},$$

ugyanis $r_0 < q$ folytán $a_1 < 10$. Folytatva

$$10r_1 = a_2 q + r_2, \quad a_2 \in D, \quad r_2 \in M,$$

s általában

$$10r_n = a_{n+1}q + r_{n+1}, \quad a_{n+1} \in D, \quad r_{n+1} \in M.$$

Mivel az r_n számok a véges M halmazból valók, van közöttük olyan, amely egy korábbival megegyezik, mondjuk $r_{k+p} = r_k$. Ekkor

$$10r_k = a_{k+1}q + r_{k+1}, \quad 10r_{k+p} = a_{k+p+1}q + r_{k+p+1}$$

következtében $a_{k+1} = a_{k+p+1}$, $r_{k+1} = r_{k+p+1}$, és folytatólag

$$a_{n+p} = a_n, \quad r_{n+p} = r_n \quad (n > k).$$

Eszerint az $a_0, a_1, a_2, \dots$ végtelen tizedestört szakaszos. Mivel pedig

$$\frac{m}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{r_1}{10q} = \dots =$$

$$= a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{r_n}{10^n q},$$

világos, hogy ez a szakaszos végtelen tizedestört $\frac{m}{q}$ -t állítja elő:

$$0 \leq \frac{r_n}{q} < 1, \quad \frac{r_n}{10^n q} \rightarrow 0.$$

III. Valós egyváltozós függvények

1.28.1. Célszerű a következő rövidítéseket és jelöléseket használni:

- ps = páros,
- ptl = páratlan,
- s = semmi sem állítható,
- $f \nearrow$ = f monoton növekedő
- $g \searrow$ = g monoton fogyó.

	f+g	f-g	f.g	f o g
ha f ps, g ps akkor	ps	ps	ps	ps
ha f ptl, g ptl "	ptl	ptl	ps	ptl
ha f ps, g ptl "	s	s	ptl	ps
ha f ↗, g ↗ "	↗	s	s	↗
ha f ↘, g ↘ "	↘	s	s	↗
ha f ↗, g ↘ "	s	↗	s	↘

2.27.1. $0, +\infty, 1, 1$.

2.27.2. Nem.

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$x_n \in \mathbb{Q}$ esetén $f(x_n) = 0$, $x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $x_n \rightarrow 0$ esetén $f(x_n) = 1$.

3.32.1. Lásd I.3.7.f; nem, pl. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$, $|f(x)| \equiv 1$.

3.32.2. $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, ha $x_1, x_2 > N(\varepsilon)$.

3.32.3. Nem. Pl. $f(x) = g(x) = x$ $\mathbb{R}$ -en.

3.32.4. $(0, 1]$ -ben nem, $[1, +\infty)$ -ben igen.

3.32.5. $\varepsilon > 0$ -hoz az egyenletes folytonosságnak megfelelő $\delta(\varepsilon)$ -t választva, a δ -nál közelebb fekvő abszcisszákhöz tartozó görbepontokat kössük össze hurokkal.

3.32.6. Ha c szakadási hely, legyen $y \in \mathbb{Q}$ $f(c-0)$ és $f(c+0)$ közt, és vegyük észre, hogy így különböző racionális helyekhez különböző racionális számokat választottunk.

3.32.7. Minden páratlan fokszámú polinomnak $+\infty$ -ben és $-\infty$ -ben ellenkező előjelű végtelen a határértéke.

4.28.3. Az $(x, \frac{1}{x})$ pontnak a $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ponttól és a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ponttól mért távolsága között a különbség $2\sqrt{2}$.

4.28.4. Tetszőleges $x_1 < x_2$ esetén x_1 -hez ill. x_2 -höz tartó racionális elemű sorozatot tekintünk.

4.28.5. Az első összefüggés bizonyítására x -hez ill. y -hoz tartó racionális elemű sorozatokat tekintünk. A második összefüggés az elsőből következik, ha $y \in \mathbb{N}$, majd ha $y = 0$, ill. y negatív egész szám, azután ha $y \in \mathbb{Q}$. Tetszőleges y -ra 4.13. felhasználásával igazolhatjuk az állítást (4.13. bizonyításában csak az első összefüggést használtuk ki).

4.28.6. Visszavezethető az a^x konvexitásáról szóló tételre.

4.28.9. 4.22.14^o következménye.

IV. Függvények differenciálása

2.31.1. A függvény csak a 0 helyen folytonos.

2.31.2. Irjuk a számlálót $f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)$ alakban. Tekintsük az $|x|$ függvényt a 0 helyen.

2.31.3. n szerinti teljes indukció.

2.31.4. $f = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}, g = -f.$

3.6.1. Nem, aminek az az oka, hogy a függvény a 0 helyen nem differenciálható.

3.6.2. Alkalmazzuk n -szer a Rolle-tételt.

3.6.3. $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n$ -nek és első $n-1$ deriváltjának is gyöke -1 és $+1$, és ezért a Rolle-tétel n -szer alkalmazható.

3.6.4. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 0, \\ x^2, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$

3.6.5. A Cauchy-féle középértéktétel $n-1$ -szeres alkalmazásával

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \dots = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(c)}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - g^{(n-1)}(c)}.$$

3.6.6. Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt.

4.28.2. $f(x) = x - \sin x$ deriváltja nemnegatív, $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ második deriváltja pozitív $x > 0$ esetén.

4.28.3. x^n konvex.

VIII. JELÖLÉSEK, TÁRGYMUTATÓ

1. Jelölések

$\forall \dots$	minden . . . (előszó)
$\exists \dots$	van olyan . . . (előszó)
$\dots \Rightarrow \dots$	ha . . . , akkor . . . (előszó)
$\dots \Leftrightarrow \dots$	. . . akkor és csak akkor . . . , ha (előszó)
$\dots \vee \dots$	. . . vagy . . . (előszó)
$\dots \wedge \dots$	. . . és . . . (előszó)
$a \in A$	a elemez az A halmaznak (I.1.3.)
$a \notin A$	a nem eleme az A halmaznak (I.1.3.)
$A \subset B$	A részhalmaza B -nek (I.1.5.)
$\{a_1, \dots, a_n\}$	az $a_1, \dots, a_n$ elemekből álló halmaz (I.1.4.)
$\{x : T\}$	a T tulajdonságu x elemek halmaza (I.1.4.)
$\emptyset$	üres halmaz (I.1.2.)
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza (I.1.2.)
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza (I.1.2.)
$\mathbb{Q}$	a racionális számok halmaza (I.1.2.)
$\bigcup_{i=1}^n A_i$ (ill. $A \cup B$)	$A_1, \dots, A_n$ (ill. A és B) egyesítése (I.1.8.)
$\bigcap_{i=1}^n A_i$ (ill. $A \cap B$)	$A_1, \dots, A_n$ (ill. A és B) metszete (I.1.9.)
$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (ill. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$)	megszámlálható sok halmaz egyesítése (metszete (I.1.8-9.))
$A - B$ ($A \setminus B$)	A és B különbsége (I.1.11.)

$\bar{A}$	A komplementuma (általában az összes szóba- jövő elem halmazára, a térre, E -re, azaz $E - A$) (I.1.12.)
$\bigcap_{i=1}^n A_i$	$A_1, \dots, A_n$ Descartes-szorzata (szorzata) (I.1.13.)
$x K y$	az x és y elemet az adott K reláció összekapcsolja (I.2.4.)
$[a, b]$	zárt intervallum (I.3.9.)
(a, b)	nyílt intervallum (I.3.10.)
$(a, b]$	balról nyílt, jobbról zárt intervallum (I.3.12.)
$[a, b)$	balról zárt, jobbról nyílt intervallum (I.3.11.)
$(-\infty, a)$	balról végtelen, nyílt intervallum (I.5.6.3 ^o)
$(-\infty, a]$	balról végtelen, zárt intervallum (I.5.6.4 ^o)
$(a, +\infty)$	jobbról végtelen, nyílt intervallum (I.5.6.1 ^o)
$[a, +\infty)$	jobbról végtelen, zárt intervallum (I.5.6.2 ^o)
$(-\infty, +\infty)$	az összes valós szám halmaza (I.5.6.5 ^o)
$K(a, \delta)$	a δ -sugaru környezete, az $(a - \delta, a + \delta)$ inter- vallum (I.5.3.)
$\dot{K}(a, \delta)$	a δ -sugaru pontozott környezete, $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$. (I.5.4.)
$d(x, y)$	az x és y pont távolsága (I.5.2.)
$A \sim B$	az A halmaz ekvivalens (egyenlő számosságú) a B halmazzal (I.4.1.)
$A \not\sim B$	A nem ekvivalens B -vel (I.4.2.)
$\aleph_0$	(alef null) N , azaz minden megszámlálható vég- telen halmaz számossága (I.4.7.)
$\aleph$	(alef) kontinuum számosság (R számossága) (I.4.11.)
$\sup H$	H felső határa (szuprémuma) ($H \subset R$) (I.5.10.)
$\inf H$	H alsó határa (infimuma) ($H \subset R$) (I.5.11.)
(a_n)	végtelen sorozat (I.2.10.)

(a_{n_r})	az (a_n) sorozat részsorozata (II.2.9.)
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$	számsorozat határértéke (II.2.5.)
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$	$+\infty$ -hez divergáló számsorozat (II.3.4.)
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$	$-\infty$ -hez divergáló számsorozat (II.3.4.)
$a_n \nearrow a$	monoton növekedő, a -hoz konvergáló számsorozat (II.4.3.)
$a_n \searrow a$	monoton fogyólag a -hoz konvergáló számsorozat (II.4.3.)
$\limsup a_n = \overline{\lim} a_n$	limesz superior (II.5.6.2 ^o)
$\liminf a_n = \underline{\lim} a_n$	limesz inferior (II.5.6.3 ^o)
$x \xrightarrow{f} y$	$y = f(x)$ (III.1.2.)
D_f	az f függvény értelmezési tartománya (III.1.3.)
$f(A)$	f -nek A -hoz tartozó értékkészlete (III.1.2.)
f^{-1}	az f függvény inverze (III.1.13.)
$f \circ g$	összetett függvény (g a belső, f a külső) függvény (III.1.11.)
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	f határértéke az a helyen (III.2.6.)
$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$	f jobb oldali határértéke az a helyen (III.2.12.)
$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$	f bal oldali határértéke az a helyen (III.2.12.)
$f'(c)$	differenciálhányados (derivált) (IV.1.2.)
$\left[\frac{df}{dx} \right]_{x=c}$	differenciálhányados (derivált) (IV.1.2.)
f'	f deriváltfüggvénye (IV.1.11.)
$f''(c)$	másodrendű derivált (IV.1.12.)

$$\left[\frac{d^2 f}{dx^2} \right]_{x=c}$$

másodrendű derivált (IV.1.12.)

$$f^{(k)}(c)$$

k -adrendű derivált (IV.1.12.)

$$f^{(k)}$$

k -adik deriváltfüggvény (IV.1.12.)

$$df$$

differenciál (IV.2.29.)

2. Tárgymutató

abszolút érték és tulajdonságai I.3.7.
 alaphalmaz I.1.2.
 alsó határ I.5.11.
 alsó korlát I.5.8.
 alulról korlátos számhalmaz I.5.8.
 Archimédész-féle axióma I.3.13.
 archimédészien rendezett test I.3.6.
 aréa függvények IV.4.27.
 aszimptota IV.4.4.
 aszimptotikusan egyenlő III.2.24.
 asszociatív I.1.14. I.3.1.
 axióma (előszó)
 bal oldali differenciálhányados IV.1.4.
 bal oldali határérték III.2.12.
 balról folytonos függvény III.3.9.
 Bernstein-féle ekvivalencia tétel I.4.4.
 Bolzano-tétel III.3.20.
 Bolzano-Weierstrass-tétel II.5.3.
 Boole-algebra I.1.17.
 Cantor-féle axióma I.3.1.15⁰, I.3.15.
 Cauchy-féle konvergenciakritérium II.5.4.
 Cauchy-féle közéértéktétel IV.3.5.
 ciklometrikus függvények III.4.27. IV.4.23.
 cos (koszínusz) függvény III.4.19-23. IV.4.22.
 de Morgan azonosság, I.1.16.
 Descartes-szorzat I.1.13.
 derivált függvény IV.1.11.
 differenciálhányados függvény IV.1.11.
 differenciálhányados (c pontbeli) IV.1.2.
 differenciálhatóság (c pontban) IV.1.2.
 differenciálhatóság (intervallumban) IV.1.9-10.

differenciálási szabályok IV.2.1.-11. IV.2.13.
 diszjunkt halmazok I.1.10.
 disztributivitás I.1.14., I.3.1.
 divergens számsorozat II.2.3. II.3.2-3.
 egy-egyértelmű leképezés (megfeleltetés) (előszó) I.2.12.
 egyértelmű megfeleltetés (előszó)
 egyenletes folytonosság III.3.27.
 egyesítés (halmazoké) I.1.8.
 egyenlőtlenségek I.3.4. I.3.7.g.
 elem (halmazé I.1.3; sorozaté II.1.2.)
 elsőfajú szakadási hely III.3.14.
 ekvivalencia osztályok I.2.8.
 reláció I.2.7.
 ekvivalens halmazok I.4.1.
 eltérés (két számé) I.5.2.
 értékkészlet III.1.2.
 értelmezési tartomány III.1.2.
 érintő egyenlete IV.1.3.
 érintő módszer V.4.3.
 e (természetes alapú logaritmus alapszáma) IV.2.22. IV.2.27.
 exponenciális függvény III.4.7-16. IV.2.19-22. IV.4.24.
 felső korlát I.5.7.
 felső határ I.5.10.
 felülről korlátos számhalmaz I.5.7.
 folytonosság egy pontban III.3.2.
 folytonosság intervallumban III.3.17-18.
 függvény I.2.9. III.1.2.
 függvény határértéke III.2.5. III.2.12. ... III.2.21.
 görbe (függvényé) III.1.5.
 gyök V.4.1.
 halmaz I.1.1.
 halmazalgebra I.1.16.
 halmaz eleme I.1.1.
 harmonikus rezgés III.4.25.
 határérték (függvényé) III.2.21.
 határérték (sorozaté) II.2.2.
 határérték és műveletek (sorozatra) II.2.13. II.3.9-11.
 határérték és műveletek (függvényre) III.2.10.
 hatványfüggvény IV.4.25. speciálisan III.4.1.
 helyettesítési érték (függvényé) I.2.9.
 hiperbolikus függvények IV.4.26.
 hurmódster V.4.2.

index II.1.2.
 infimum I.5.11.
 inflexiós pont IV.4.16.
 intervallum I.3.9-12. I.5.6.
 inverz függvény I.2.13. III.1.13.
 irracionális szám I.3.5.
 irreflexív reláció I.2.5.
 iteráció V.4.6.
 jobb oldali differenciálhányados IV.1.4.
 jobb oldali határérték III.2.12.
 jobbról folytonos függvény III.3.9.
 komplementer halmaz I.1.12.
 kommutativitás I.1.14. I.3.1.
 konkáv függvény III.1.24.
 kontinuum számosság I.4.11.
 konvergens számsorozat II.2.3.
 konvex függvény III.1.24.
 korlátos függvény III.1.20.
 korlátos számhalmaz I.5.5.
 korlátos számsorozat II.2.7.
 környezet I.5.3.
 környezet (pontosított) I.5.4.
 közvetett függvény III.1.11.
 küszöbindex II.2.4.
 kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés (előszó) I.2.12.
 Lagrange-féle középértéktétel IV.3.2.
 láncszabály IV.2.11.
 Leibniz szabály IV.2.31.3.
 leképezés I.2.11.
 l'Hospital szabály V.2.1.
 limesz inferior II.5.6.
 limesz superior II.5.6.
 lineáris ponthalmaz I.5.1.
 lineáris függvény III.4.2.
 lineáris törtfüggvény III.4.4.
 logaritmusfüggvény III.4.18. IV.2.23-24. IV.4.24.
 lokálisan fogyó függvény IV.4.5.
 lokálisan növekedő függvény IV.4.5.
 lokális maximumhely IV.4.7.
 lokális minimumhely IV.4.7.
 lokális szélsőérték hely IV.4.7.

magasabb rendű differenciálhányados IV.1.12.
magasabb rendű derivált IV.1.12.
másodfajú szakadási hely III.3.14.
másodrendű differenciálhányados IV.1.12.
maximális függvényérték (intervallumban) IV.4.14. V.1.
maximális értelmezési tartomány III.1.3.
megszámlálható halmaz I.4.8.
mindenütt sűrű halmaz I.3.16.
minimális függvényérték (intervallumban) IV.4.14. V.1.
monoton csökkenő függvény III.1.22.
monoton csökkenő sorozat II.4.2.
monoton növekedő függvény III.1.22.
monoton növekedő sorozat II.4.2.
monoton sorozat konvergenciaviselkedése II.4.4-5..
nagyobb számosságú halmaz I.4.3.
nem-megszámlálható halmaz I.4.7.
összetett függvény III.1.11.
ordo (kis ordó III.2.24. nagy ordo III.2.25.)
páratlan függvény III.1.17.
páros függvény III.1.16.
periodikus függvény III.1.19.
polinom III.4.2.
pontozott környezet I.5.4.
racionális függvény III.4.2-3.
racionális szám I.3.5.
reflexív reláció I.2.7.
rekurzív megadás II.1.3.
reláció (kétargumentumu) I.2.4.
rendezés I.2.6. (I.2.6.+)
rendezett test I.3.6.
részben rendezés I.2.5. (I.2.5.+)
részhalmaz I.1.5.
részsorozat II.2.9.
Rolle-tétel IV.3.1.
sin (szinusz) függvény III.4.19-23. IV.4.22.
sorozat I.2.10.
sűrűsödési érték (sorozaté) II.5.6.
szakadási hely III.3.11.
szakaszos végtelen tizedes tört II.4.8.
számosság I.4.1-2.
számegyenés I.3.8.

számhalmaz I.5.1.
 számsorozat II.1.2.
 számsorozat határértéke II.2.2.
 számsorozat sűrűsödési értéke II.5.6.
 számtani-mértani közép egyenlőtlenség I.3.21.5.
 szélsőértékhely (lokális) IV.4.7.
 szélsőértékhely (intervallumbeli) IV.4.14.
 szimmetrikus reláció I.2.7.
 szupremum I.5.10.
 szükséges feltétel (előszó)
 szükséges és elégséges feltétel (előszó)
 tg (tangens) függvény III.4.20-23. IV.4.22.
 Taylor-formula V.3.1. (polinom)
 Taylor-formula a Lagrange-maradéktaggal V.3.4.
 tér I.1.2.
 természetes szám I.3.5.
 torlódási érték (sorozatnál) II.5.6.
 többértékű függvény (leképezés) I.2.15.
 tranzitív I.2.5.
 trichotomia I.2.6.
 trigonometrikus függvények III.4.20-23. IV.4.22.
 trigonometrikus függvények inverzei III.4.27. IV.4.23.
 ugráshely III.3.13.
 üres halmaz I.1.2.
 valós számok axiómarendszere I.3.1.
 valós egyváltozós, valós értékű függvény III.1.2.
 véges halmaz I.4.5.
 végtelen halmaz I.4.6.
 végtelen sorozat I.2.10.
 végtelen tizedestört II.4.8.

Weierstrass tétel III.3.24.

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó	3
I. Bevezetés	9
1. Halmazelméleti alapfogalmak	9
2. Reláció, leképezés, függvény	19
3. Valós számok	25
4. Halmazok számossága	36
5. Ponthalmazok. Számhalmazok	44
II. Sorozatok	48
1. A végtelen számsorozat fogalma, megadása	48
2. Számsorozatok határértéke	50
3. Divergens számsorozatok	57
4. Monoton sorozatok	60
5. Cauchy-féle konvergenciakritérium	67
III. Valós egyváltozós függvények	72
1. A valós egyváltozós függvény fogalma, általános tulajdonságai	72
2. Függvény határértéke	81
3. Folytonos függvény	93
4. Elemi függvények	107
IV. Függvények differenciálása	138
1. Differenciálhányados	138
2. Differenciálási szabályok	143
3. A differenciálszámítás középértéktételei	163
4. Differenciálható függvények vizsgálata	168
V. A differenciálszámítás néhány alkalmazása	192
1. Szélsőértékszámítás	192
2. A l'Hospital szabály	194
3. Taylor polinom	200
4. Egyenletek közelítő megoldása	207
VI. Ajánlott irodalom	215

VII. Utmutatás a feladatmegoldáshoz	216
VIII. Jelölések, tárgymutató	228
1. Jelölések	228
2. Tárgymutató	231

Kedves Jegyzethasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. **Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:**

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői díjazást kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V_2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*.

A jegyzet címe: **VALÓS EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMITÁSA**

A jegyzet szerzője: **Császár Ákosné**

A jegyzet azonosítója: **051315**

Melyik tárgyhöz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75 %):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(a túloldalon folytatható)

