



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Császár Ákosné

**VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK
DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA**



Műegyetemi Kiadó, 2005.

Szerző:
Császár Ákosné dr.

(Ötödik utánnnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **051354**

**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának**
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 13,3(A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 127/05

I. PONTHALMAZOK AZ M -DIMENZIÓS (EUKLIDESZI) TÉRBEN

1. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

Eddigi vizsgálataink során olyan függvényekkel foglalkoztunk, amelyek a valós számok R halmazán változó x mennyiséghez rendeltek $f(x)$ függvényértékeket. Az ilyen függvények beható tanulmányozását az indokolta, hogy a matematika különböző fejezeteiben, de a fizikai és egyéb alkalmazásokban is számtalan olyan jelenség található, ahol egy mennyiség értéke egy másik mennyiség értékének ismeretében válik meghatározottá, egy változó mennyiség értéke, egy másik változó mennyiség értékétől függ. Pl. a kocka térfogata függ a kocka élének hosszúságától, a nehézségi erőterben, adott helyen, $v_0 = 0$ kezdősebességgel szabadon eső test által megtett út nagysága függ az esés idejének hosszúságától, stb.

Mind a matematikában, mind az alkalmazások területén bőven találhatunk azonban példát olyan jelenségekre, amelyekben egy mennyiség értékének ismeretéhez egynél több másik mennyiség számértékét kell ismerni. Pl. az x , y oldalélű téglalap t területe és k kerülete x és y ismeretében

$$t = xy, \quad \text{illetve} \quad k = 2x + 2y;$$

az a , b , c oldalélű téglatest /egyenes hasáb/ v térfogata

$$v = abc;$$

ha egy vezető végpontjai között az elektromos feszültség U , a vezető ellenállása R , akkor a benne folyó áram erőssége

$$I = \frac{U}{R};$$

ha az előbbi vezetőkben az áram t ideig folyik, akkor

$$W = \frac{U^2}{R} t$$

munkát végez, stb.

A felsorolt esetekben a képletek bal oldalán álló mennyiség értékének meghatározásához két ill. a hasáb térfogata, valamint a vezetőkben folyó áram munkájának esetében három további mennyiség értékének ismerete volt szükséges. Példáinkban tehát nem egy, hanem két, ill. három adott szám határoz meg egy további számértéket. Ha a térben /háromdimenziós tér/ vizsgáljuk a hőmérséklet változását, akkor – a tér pontjait derékszögű koordinátarendszerbeli x , y , z koordinátáikkal jellemezve – a hőmérséklet adott pontbeli értéke a pont x , y , z koordinátájától fog függni, ezek ismeretében adható meg valamilyen összefüggés /képlet/ segítségével a hőmérséklet értéke. A hőmérséklet értéke azonban már négy mennyiség értékétől fog függni /és ezek ismeretében más képlettel adható meg/ ha a hőmérséklet változását adott térrészben nem csak egy adott pillanatban, hanem egy időközön belül vizsgáljuk.

Az ilyen hozzárendeléseket két-,három-,... változós függvényeknek nevezzük, az ilyen többsváltozós függvények vizsgálatával fogunk az alábbiakban foglalkozni. Vizsgálatainkban az egyváltozós függvények analízisében követett utat járjuk majd újra végig, az ott bevezetett fogalmakat, tételeket igyekszünk majd megfelelő formában többsváltozós függvényekre átvinni.

Elsőként azt nézzük meg, helyes volt-e az előbbi példákban szereplő kapcsolatokat függvénynek neveznünk, összhangban áll-e ez az elnevezés a korábban bevezetett általános függvényfogalommal /Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása, I.2.9./.

A téglalap oldalélei, /ill. ezek hosszúsága/ x és y pozitív valós számokkal adhatók meg, amikor tehát a téglalap területének, ill. kerületének kerestük a mérőszámát, az (x, y) rendezett számpárokhoz, vagyis az $R^2 = R \times R$ tér bizonyos elemeihez rendeltünk pontosan egy valós számot.

Ugyancsak rendezett számpárokhoz, R^2 bizonyos elemeihez rendeltünk pontosan egy-egy valós számot az $I = \frac{U}{R}$ utasítással, itt a számpárok első, ill. második eleme a mért feszültség ill. ellenállás érték volt. A téglatest térfogatanak meghatározásakor, ill. az áram munkájának számításánál valós számokból álló rendezett számhármashoz /a téglatest éleinek hosszúságához, ill. a feszültség, az ellenállás és az idő mérőszámához/ rendeltünk egy és csak egy valós számot /a térfogat, ill. a munka mérőszámát/, ezek tehát $A' \subset R^3$ -en értelmezett R -be vezető függvények voltak. A hőmérséklet változását adott térrészben egy időközön belül vizsgálva rendezett számnégyesekhez rendeltünk pontosan egy valós számot; a hőmérséklet értéke egy $B' \subset R^4$ -en értelmezett R -be vezető f függvény adta meg.

Példáinkban tehát valóban függvények szerepeltek, melyeknek értékkészlete mindig valamilyen $B \subset R$ halmaz volt, ezért valós értékű függvényeknek kellene őket pontosabban neveznünk. Megállapodunk abban, hogy az alábbiakban /amig erre vonatkozó külön utalást nem teszünk/ függvény alatt mindig valós értékű függvényt értünk. A függvények értelmezési tartománya R^2 , R^3 , R^4 adott részhalmaza volt. Ezeket R^2 , R^3 esetében a sík, ill. a háromdimenziós tér pontjainak részhalmazával szemléltethetjük /ezekkel hozhatók kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe/. Hasonlóképpen beszélhetünk – most már a tényleges geometriai szemlélettől elvonatkoztatva – arról, hogy R^4 és általánosságban R^m elemei "az m -dimenziós tér pontjaival" szemléltethetők, /kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozhatók/ az $f: A' \rightarrow B \subset R$ m -változós függvény $A' \subset R^m$ pontjaihoz rendel valós számokat.

Az m -változós ($m = 2, 3, 4, \dots$) függvények értelmezési tartománya tehát az m -dimenziós tér (R^m) egy részhalmazának tekinthető. Az egyváltozós függvények analizisénél követett gondolatmenethez hasonlóan most is a vizsgálatokat a függvények értelmezési tartományának, azaz az m -dimenziós térben fekvő ponthalmazoknak vizsgálatával, az azokra vonatkozó fogalmak, tételek ismertetésével kell megkezdünk.

2. M-DIMENZIÓS TÉR. TÁVOLSÁG (CAUCHY-EGYENLŐTLENSÉG) KÖRNYEZET. SZAKASZ

2.1. DEFINÍCIÓ. Az m -dimenziós tér (R^m) a valós számok halmazának önmagával vett m -szeres Descartes-szorzata, vagyis az $(x_1, \dots, x_m)$ rendezett szám m -esek / m -tagu sorozatok/ halmaza, ahol $x_i \in R$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Az elnevezést indokolja, hogy – mint láttuk /Algebra jegyzet 4. fejezet/ – a rendezett szám m -esek vektorteret alkotnak.

Az $m = 2$, ill. $m = 3$ esetében adódó tényleges geometriai szemléletre hivatkozva R^m elemeit az m -dimenziós tér pontjainak nevezzük, és azt mondjuk, hogy az $x_1, \dots, x_m$ számok az $x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$ pont koordinátái. Akár R -ben, akár az R^m ($m > 1$) térben a tér elemeinek /pontjainak/ jelölésére általában kis betűt használunk /a geometriában szokásos nagy betűs: $A, B, \dots, P$, ill. helyzetvektorral történő megadás esetén, $\underline{a}, \underline{b}, \dots, \underline{r}, \dots, \underline{x}, \dots$ jelölés helyett/.

2.2. Az m -dimenziós tér két pontja akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha megfelelő koordinátáik egyenlők.

Tehát, ha $x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in R^m$,
 $x = y$ akkor és csak akkor, ha $x_i = y_i$ ($i = 1, \dots, m$).

2.3. R^m általános definíciójából $m = 3$, ill. $m = 2$, ill. $m = 1$ esetében speciálisan a közönséges tér, ill. egy sík, ill. egy egyenes pontjaival kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozható rendezett számhármassok, ill. számpárok, ill. számok halmaza adódik. Ezekben a három, ill. két, ill. egydimenziós terekben értelmezni tudjuk két pont távolságát, amely távolságfogalom az $m = 1$ esetre már ki-mondott /Valós egyváltozós függvények differenciálszámítá-sa, I.5.5./ tulajdonságokkal rendelkezik.

Tudjuk, hogy T-ben $x \in R$, $y \in R$ távolsága

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y)^2};$$

R^2 -ben, vagyis a síkon $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ távolsága

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

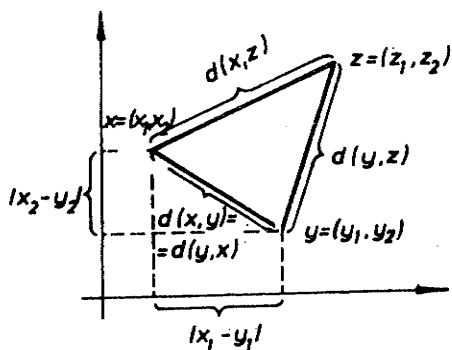
R^3 -ben, vagyis a térben $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ távolsága

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

Ennek alapján kézenfekvő a következő értelmezés:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{2.4. DEFINÍCIÓ. Az } R^m \text{ tér } x = (x_1, \dots, x_m) \text{ és} \\ y = (y_1, \dots, y_m) \text{ pontjának távolsága} \\ d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}. \end{array} \right.$$

Az így bevezetett távolság rendelkezik a közönséges tér-ből /síkból ill. egyenesen/ ismert távolság következő lénye-ges tulajdonságaival:



1. ábra

2.5. Tétel. Tetszőle- ges $x, y, z \in \mathbb{R}^m$ pontokra

- 1° $d(x, y) \geq 0$,
- 2° $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- 3° $d(x, y) = d(y, x)$,
- 4° $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A tétel geometriai tartal-
mát az 1. ábrán szemlélt-
tettük.

Bizonyítás. 1°, 2°, 3° a távolság értelmezéséből köz-
vetlenül adódik. 4° igazolására vezessük be $x = (x_1, \dots, x_m)$
 $y = (y_1, \dots, y_m)$ $z = (z_1, \dots, z_m)$ megfelelő koordinátáinak
különbségére az

$$a_i = x_i - y_i, \quad b_i = y_i - z_i$$

jelöléseket. Ekkor a bizonyítandó

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - z_i)^2}$$

egyenlőtlenség a

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

alakban írható, s ehelyett nyilván elég igazolni a négy-
zetre emeléssel adódó

$$\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m a_i b_i + \sum_{i=1}^m b_i^2 \leq \sum_{i=1}^m a_i^2 +$$

$$+ 2 \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} + \sum_{i=1}^m b_i^2$$

egyenlőtlenséget. Ez fennáll, hiszen a Bunyakovszkij-Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség értelmében /Algebra jegyzet 7. fejezet/

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}.$$

Ezzel a távolság 4° alatti tulajdonságát kifejező ún. "háromszög-egyenlőtlenség"-re jutunk. Az utóbbi elnevezést az $m=2$, ill. $m=3$ esetében adódó konkrét geometriai tartalom indokolja /1.1. ábra: a háromszög egyik oldala sem lehet nagyobb másik két oldalának összegénél/. *

Az 1. ábráról olvasható le speciálisan $m=2$ esetére az alábbi megjegyzés geometriai tartalma:

2.6. MEGJEGYZÉS. Az R^m m -dimenziós tér két pontjának távolságát a pontok koordinátaival alulról és felülről a következő egyenlőtlenséggel becsülhetjük meg:

Ha $x, y \in R^m$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, akkor

$$|x_j - y_j| \leq d(x, y) \leq \sum_{i=1}^m |x_i - y_i| \quad (j = 1, \dots, m).$$

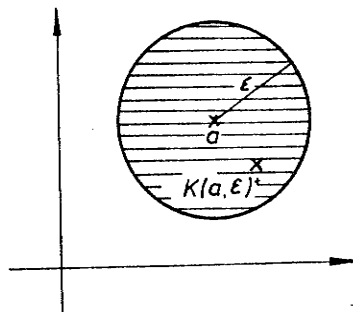
$$\text{Ti. } (x_j - y_j)^2 \leq \sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 = d^2(x, y) \leq \sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 +$$

$$+ 2 \sum_{i < j} |x_i - y_i| |x_j - y_j| = \left(\sum_{i=1}^m |x_i - y_i| \right)^2,$$

és innen gyökvonással adódik az állítás.

A lineáris pontthalmazok elméletéhez hasonlóan vezethetők be a távolságfogalom segítségével R^m -ben a következő fogalmak:

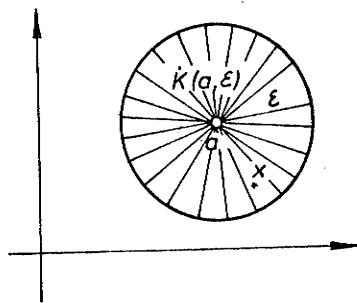
2.7. DEFINÍCIÓ. $a \in \mathbb{R}^m$ ϵ -sugaru környezete, $K(a, \epsilon)$, azoknak az $x \in \mathbb{R}^m$ pontoknak a halmaza, amelyek a -tól ϵ -nál kisebb távolságban vannak:



2. ábra

$$K(a, \epsilon) = \{x: d(a, x) < \epsilon, x \in \mathbb{R}^m\}.$$

/Szokás ezt a környezetet a középpontu ϵ sugaru m -dimenziós gömbnek nevezni./ /Az $m = 2$ esetre lásd a 2. ábrát/



3. ábra

2.8. DEFINÍCIÓ. $a \in \mathbb{R}^m$ ϵ -sugaru pontozott /átszurt/ környezete, $\dot{K}(a, \epsilon)$, azoknak az a -tól különböző $x \in \mathbb{R}^m$ pontoknak a halmaza, amelyek a -tól ϵ -nál kisebb távolságban vannak:

$$\begin{aligned} \dot{K}(a, \epsilon) &= K(a, \epsilon) - \{a\} = \\ &= \{x: 0 < d(a, x) < \epsilon, x \in \mathbb{R}^m\}. \end{aligned}$$

/Az $m=2$ esetre lásd a 3. ábrát./

A háromdimenziós tér (x_1, x_2, x_3) pontjából az (y_1, y_2, y_3) pontba vezető szakasz – mint tudjuk – azokból a (z_1, z_2, z_3) pontból áll, amelyekre

$$z_i = x_i + t(y_i - x_i) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad i = 1, 2, 3.$$

Kézenfekvő tehát a következő megállapodás:

2.9. DEFINÍCIÓ. Az $x, y \in \mathbb{R}^m$ pontokat összekötő szakasz azoknak a $z \in \mathbb{R}^m$ pontoknak a halmaza, amelyekre az

$$x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m), z = (z_1, \dots, z_m)$$

jelöléssel

$$z_i = x_i + t(y_i - x_i) \quad (0 \leq t \leq 1, \quad i = 1, \dots, m).$$

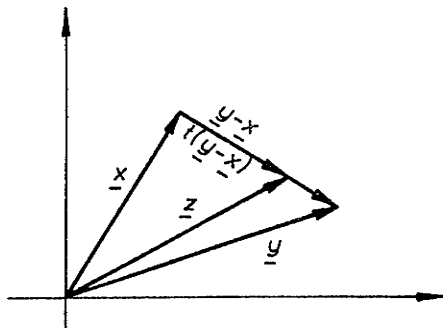
2.10. MEGJEGYZÉS. A tér pontjai és egy rögzített pontból hozzájuk mutató vektorok /az ún. helyzetvektorok/ – amint az az algebrából ismeretes – egymással kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozhatók. Ennek mintájára R^m pontjainak is megfeleltethetünk "m-dimenziós vektorokat", ezekre is értelemszerűen általánosíthatjuk a vektorműveleteket, beszélhetünk két m-dimenziós vektor összegéről, $t \in R$ számmal /skalárral/ való szorzatáról, igazolhatjuk ezekre a műveletekre a háromdimenziós esetben megismert műveleti szabályokat. Az $x, y \in R^m$ pontokat összekötő szakasz – a pontoknak megfelelő m-dimenziós vektorokat $\underline{x}$, $\underline{y}$ -nal jelölve – nyilván azoknak az m-dimenziós $\underline{z}$ vektoroknak halmaza, melyekre

$$\underline{z} = \underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

/Az $m=2$ esetre lásd a 4. ábrát./

Az euklideszi térben az ugynevezett euklideszi norma segítségével /Algebra jegyzet 7. fejezet/ bevezetett általánosított abszolút érték

fogalmát felhasználva $x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$ esetén a megfelelő $\underline{x}$ vektor abszolút értéke



4. ábra

$$|\underline{x}| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nyilvánvalóan $|\underline{x}| \geq 0$, $|\underline{x}| = 0$ $\Leftrightarrow \underline{x} = (0, \dots, 0)$,

$|\underline{tx}| = |t| |\underline{x}|$ ($t \in \mathbb{R}$), $d(\underline{x}, \underline{y}) = |\underline{x} - \underline{y}|$ /azaz az $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$

és $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ pontok távolsága a megfelelő $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorok különbségének abszolút értéke/, és a 2.5.4^o háromszög-

egyenletlenséget a $(0, \dots, 0), \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$ pontokra alkal-

mazva, a megfelelő m -dimenziós vektorokra $|\underline{x} + \underline{y}| \leq |\underline{x}| + |\underline{y}|$ adódik.

2.14. Feladatok.

1. Igazoljuk, hogy $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^m$ esetén $|d(\underline{x}, \underline{y}) - d(\underline{y}, \underline{z})| \leq d(\underline{x}, \underline{z})$.
2. Bizonyítsuk be, hogy a 2.5.4^o alatti háromszög-egyenlőtlenségben pontosan akkor áll egyenlőség, azaz $d(\underline{x}, \underline{z}) = d(\underline{x}, \underline{y}) + d(\underline{y}, \underline{z})$, ha $\underline{y}$ rajta fekszik az $\underline{x}$ -ből $\underline{z}$ -be vezető szakaszon ($\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^m$).

3. PONTSOROZAT KONVERGENCIÁJA $\mathbb{R}^m$ -BEN

Az általános függvényfogalom speciális eseteként megemlítettük, hogy minden sorozat tulajdonképpen a természetes számok halmazán értelmezett f függvény, a sorozat n -edik eleme $a_n = f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Az (a_n) valós számsorozat a természetes számok halmazán értelmezett valós értékű függvény ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$), általánosabban tehát a következőket mondhatjuk:

3.1. DEFINÍCIÓ. Ha $\underline{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}) \in \mathbb{R}^m$ ($n \in \mathbb{N}$), akkor $(\underline{a}_n)$ /az m -dimenziós tér pontjaiból álló sorozat,

rövidebben pontsorozat R^m -ben/ a természetes számok halmaza-
zán értelmezett R^m -be vezető függvény $f : N \rightarrow R^m$, ahol a
sorozat n -edik eleme $a_n = f(n)$ ($n \in N$).

A valós számsorozatokhoz hasonlóan értelmezhetjük ezek-
nek az általánosabb sorozatoknak konvergenciáját:

3.2. DEFINÍCIÓ. Legyen $a_n \in R^m$ ($n \in N$). Akkor mondjuk,
hogy az (a_n) pontsorozat az $a \in R^m$ limeszponthoz tart
/az (a_n) pontsorozat határértéke $a \in R^m$ /, ha a sorozat
minden elég nagy indexű /elég távoli/ eleme beleesik az
"a" pont tetszőleges /kis/ ε -sugarú környezetébe:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0(\varepsilon)$, hogy $a_n \in K(a, \varepsilon)$ $n > N_0(\varepsilon)$ esetén.

/A tetszőleges $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz tartozó N_0 küszöb-
index megválasztása természetesen függ ε -tól./

Azt a tényt, hogy az (a_n) pontsorozat határértéke "a",
így jelöljük

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \text{illetve } a_n \rightarrow a, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Az (a_n) pontsorozat konvergens, ha van limeszpontja /ha-
tárértéke/, különben divergens.

Jellemezhetjük természetesen (a_n) konvergenciáját a-
hoz a környezet fogalmának mellőzésével a távolság fogal-
mára támaszkodva is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a : \forall \varepsilon > 0 \text{-hoz } \exists N_0, \text{ melyre } d(a, a_n) < \varepsilon, \\ \text{ha } n > N_0.$$

Az R^m -beli (a_n) pontsorozatok konvergenciájának vizs-
gátatát visszavezethetjük a számsorozatok konvergencia-
vizsgálatára, a köztük fennálló alábbi kapcsolatok segít-
ségével:

3.3. Tétel. Ha $a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}) \in R^m$,
 $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$, akkor a következő állítások
 egyenértékűek:

- 1° $a_n \rightarrow a$, ha $n \rightarrow \infty$,
- 2° $d(a, a_n) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$,
- 3° $a_{ni} \rightarrow a_i$, ha $n \rightarrow \infty$ minden i -re ($i=1, 2, \dots, m$).

Bizonyítás. A 3.2. definíció értelmében $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ épp azt jelenti, hogy az (a_n) pontsorozat minden elég nagy indexű eleme "a" tetszőlegesen kicsiny sugarú környezetébe esik, vagyis a $d(a, a_n)$ elemekből álló számsorozat /melynek elemei nem-negatívak/ 0-hoz tart: $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$.

A 2.6. megjegyzésből közvetlenül adódik, hogy $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$, hiszen a_n minden koordinátája "a" megfelelő koordinátájától legfeljebb $d(a, a_n)$ -nel térhet el /lásd 2.6./, és így $d(a, a_n) \rightarrow 0$ esetén a megfelelő koordináták nem-negatív eltérése is 0-hoz kell, hogy tartson:

$\forall_i : 0 \leq |a_{ni} - a_i| \leq d(a, a_n)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), tehát $n \rightarrow \infty$ esetén

$d(a, a_n) \rightarrow 0 \Rightarrow |a_{ni} - a_i| \rightarrow 0$, azaz $a_{ni} \rightarrow a_i$,

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$.

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$, mert ismét 2.6.-ra hivatkozva

$0 \leq d(a, a_n) \leq \sum_{i=1}^m |a_{ni} - a_i| \rightarrow 0$, ha $a_{ni} \rightarrow a_i$ ($i=1, \dots, m$),

és akkor szükségképpen $d(a, a_n) \rightarrow 0$, vagyis tetszőleges $\epsilon > 0$ -hoz található olyan N_0 küszöbindex, hogy $n > N_0$ esetén $d(a, a_n) < \epsilon$, azaz $a_n \in K(a, \epsilon)$, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a : 3^\circ \Rightarrow 1^\circ. *$$

A limeszpont egyértelműségével kapcsolatban a következőt mondhatjuk ki:

3.4. Tétel. Ha (a_n) konvergens pontsorozat R^m -ben, akkor csak egy limeszpontja lehet, tehát $a_n \rightarrow a$ és $a_n \rightarrow b$ esetén szükségképpen $a = b$.

Bizonyítás. Az R^m -ben bevezetett távolság-fogalomra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva /2.5.4°/:
 $0 \leq d(a,b) \leq d(a,a_n) + d(a_n,b) \rightarrow 0$ a feltétel értelmében, tehát $d(a,b) = 0$, azaz $a = b$. *

A 3.3. tétel értelmében egy R^m -beli pontsorozat konvergenciájának vizsgálatát visszavezethetjük a pontok koordinátáiból álló m darab számsorozat konvergenciájának vizsgálatára; ha ezek valamennyien konvergenssek, akkor limeszeikből felírhatjuk azt a rendezett szám m -est, amely pontsorozatunk határértéke. A fenti gondolatmenetből azonban az is következik, hogy a számsorozatok konvergenciájáról szóló elemi tételek pontsorozatokra is érvényben maradnak, kimondható tehát:

3.5. Tétel. Egy konvergens (a_n) pontsorozat határértéke nem változik meg, ha

- a. a sorozat akárhány elemét felcseréljük egymással,
- b. a sorozatba véges sok elemet beiktatunk, vagy megváltoztatunk, vagy elhagyunk,
- c. a sorozat minden tagját véges sokszor megismételjük.

3.6. Tétel. Az (a_n) pontsorozat akkor és csak akkor tart a -hoz, ha tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ mellett véges sok kivételtől eltekintve, a sorozat minden eleme belesik a ε -sugarú környezetébe $K(a,\varepsilon)$ -ba.

A számsorozatokra kimondott megfelelő tétellel egyezően igazolható ez a tétel. A lényeg most is az, hogy (a_n) -

nek véges sok eleme esik $K(a, \varepsilon)$ -n kivül, és nem az, hogy végtelen sok elem esik $K(a, \varepsilon)$ -on belül.

A számsorozatokhoz hasonlóan értelmezhető $\mathbb{R}^m$ -beli pontsorozat részsorozat, ill. analóg állítás fogalmazható meg a részsorozat konvergenciájáról:

3.7. DEFINÍCIÓ. Ha az (a_n) pontsorozat bizonyos elemeit /véges, vagy végtelen sokat/ elhagyunk, de úgy, hogy még mindig végtelen sok elem maradjon, akkor a megmaradó elemeket az eredeti sorrendben egymás után írva az eredeti pontsorozatnak egy részsorozatát nyerjük. /Ezt (a_{n_r}) -rel jelöljük./

3.8. Tétel. Ha (a_n) konvergens pontsorozat, melynek limeszpontja "a", akkor (a_n) minden (a_{n_r}) részsorozata is konvergens és a-hoz tart.

Az itt elmondottaknak mintegy megfordításaként most is igaz a következő állítás:

3.9. Tétel. Ha (a_n) és (b_n) konvergens pontsorozat $\mathbb{R}^m$ -ben és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a,$$

akkor az $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ pontsorozat is konvergens és határértéke "a".

Végül pontsorozatokra is fennáll a konvergencia szükséges és elégséges feltételét megadó, a limeszpont ismeretét mellőző Cauchy-féle konvergenciakritérium:

3.10. Tétel. Az $\mathbb{R}^m$ -beli (a_n) pontsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz mindig megadható olyan $N_0(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy

$$n_1, n_2 > N_0(\varepsilon) \text{ esetén } d(a_{n_1}, a_{n_2}) < \varepsilon.$$

/A pontsorozat elég távoli elemei tetszőlegesen kicsiny távolságban vannak egymástól./

Bizonyítás. A fentétel szükséges, mert ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N_0(\varepsilon)$, hogy $n_1, n_2 > N_0$ esetén $d(a, a_{n_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$, $d(a, a_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$, és így 2.5.4° alapján $d(a_{n_1}, a_{n_2}) \leq d(a_{n_1}, a) + d(a, a_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Másrészt a feltétel elégséges is, mert ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan N_0 küszöbindex, hogy $n_1, n_2 > N_0$ esetén $d(a_{n_1}, a_{n_2}) < \varepsilon$, akkor az $a_{n_1} = (a_{n_1 1}, a_{n_1 2}, \dots, a_{n_1 m})$, $a_{n_2} = (a_{n_2 1}, a_{n_2 2}, \dots, a_{n_2 m})$ jelöléssel 2.6. értelmében a megfelelő koordináták eltérése is ε alatt marad:

$$|a_{n_1 i} - a_{n_2 i}| \leq d(a_{n_1}, a_{n_2}) < \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

vagyis az $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ki}, \dots$ sorozatra a Cauchy-feltétel teljesül, s így létezik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ki} = a_i \quad \text{minden } i = 1, \dots, m\text{-re.}$$

Ekkor azonban 3.3.3° értelmében az egyes koordináták hatarértékéből képezett $(a_1, \dots, a_m)$ rendezett szám m -es az (a_n) pontsorozat limesze:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= (\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k1}, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k2}, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{km}) = (a_1, a_2, \dots, a_m) = \\ &= a \in R^m. \quad * \end{aligned}$$

3.11. Feladatok.

1. Igazoljuk a 3.9. tétel állítását.
2. Legyen $a_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+m} \right) \in \mathbb{R}^m$.

Vizsgáljuk meg, konvergens-e az (a_n) sorozat, és ha igen, mi a limeszpontja.

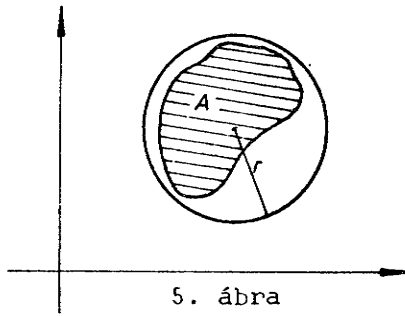
4. KORLÁTOS PONTHALMAZ. ÁTMÉRŐ, BOLZANO-WEIERSTRASS-TÉTEL

Számsorozatok esetében láttuk, hogy a korlátosság a sorozat konvergenciájának szükséges /de általában nem elégséges/ feltétele. Bebizonyítottuk továbbá, hogy minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata. Ezeknek az állításoknak a megfelelői tetszőleges $\mathbb{R}^m$ -beli pontsorozatok esetében is igazak. Ezek kimondását, igazolását a korlátosság definíciójának kimondásával kell vezetnünk.

4.1. DEFINÍCIÓ. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^m$ korlátos pontthalmaz, ha a $\{d(x,y): x,y \in A\} = B$ számthalmaz korlátos. A B halmaz felső határát (A) átmérőjének nevezzük és $\delta(A)$ -val jelöljük.

Az üres halmazt is korlátosnak tekintjük, és megállapítás szerint $\delta(\emptyset) = 0$.

A 4.1. definíció $m=1$ esetén a számegyenesen a szokott értelemben korlátos számthalmaz definícióját szolgáltatja, az átmérő pedig a korlátos számthalmazt lefedő legrövidebb intervallum hosszúsága. $m=2$ ill. $m=3$ esetében a korlátosság ténye nem fejezi ki, hogy a pontthalmaz belefoglalható alkalmas n sugarú körlemezbe ill. gömbbe. / $m=2$ esetére lásd az 5. ábrát./



Korlátos ponthalmazokra a következő állításokat mondhatjuk ki:

4.2. Tétel. Ha $A \subset C$ és C korlátos, akkor A is korlátos, és $\delta(A) \leq \delta(C)$. *

4.3. Tétel. Ha A és C korlátos, akkor $A \cup C$ is korlátos és $a \in A, c \in C$ esetén $\delta(A \cup C) \leq \delta(A) + d(a, c) + \delta(C)$.

Bizonyítás. Ha $x \in A, y \in C$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség értelmében $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, c) + d(c, y) \leq \delta(A) + d(a, c) + \delta(C)$, vagyis az $A \cup C$ halmazból tetszőlegesen vett két elem távolságának felső korlátja $\delta(A) + d(a, c) + \delta(C)$; e távolságok halmazának felső határa nem lehet e felső korlátnál nagyobb. *

4.4. Tétel. Az $A \subset \mathbb{R}^m$ ($A \neq \emptyset$) halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha pontjainak összes koordinátái korlátos számhalmazt alkotnak.

A tétel bizonyítását feladatként tűzzük ki.

Értelmezhetnők egy $\mathbb{R}^m$ -beli pontsorozat korlátosságát a tagjainak koordinátáiból álló számhalmazok korlátosságával, célszerűbb azonban a 4.3, és 4.4. tétel értelmében ezzel egyenértékű alábbi értelmezést kimondani:

4.5. DEFINÍCIÓ. Az (a_n) ($a_n \in \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$) pontsorozat korlátos, ha az elemeiből álló $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponthalmaz korlátos.

Korlátos pontsorozatokra a következő tételek mondhatók ki:

4.6. Tétel. Ha (a_n) ($a_n \in \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$) konvergens, akkor korlátos.

Bizonyítás. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ esetén tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra

$\exists N_0 : a_n \in K(A, \varepsilon)$ ha $n > N_0$. Legyen

$$r = \max \{d(a_{N_0+1}, a_1), \dots, d(a_{N_0+1}, a_{N_0})\},$$

akkor $2(\varepsilon + r)$ biztosan felső korlátja a

$\{d(x, y) : x, y \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}\}$ számhalmaznak. *

4.7. Tétel. /Bolzano-Weierstrass-féle tétel/

Minden korlátos (a_n) ($a_n \in \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$) pontsorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Legyen $a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nm})$. (a_n) korlátossága miatt az első koordinátákból álló számsorozat is korlátos, és így a korlátos számsorozatokra kimondott Bolzano-Weierstrass-tétel értelmében /Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása II.5.2/ kiválasztható e sorozatból egy konvergens részsorozat. Jelöljük a $(a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots)$ -ből kiválasztott konvergens részsorozatot $(a_{k_11}, a_{k_21}, \dots)$ -vel, és (b_n) -nel (a_n) -nek azt a részsorozatát, melynél az első koordináták az $(a_{k_11}, a_{k_21}, \dots)$ sorozatnak elemei. A (b_n) sorozatra tehát a következő mondhatók:

- 1° (b_n) részsorozata (a_n) -nek,
 2° (b_n) első koordinátáinak sorozata konvergens; legyen ezen első koordinátákból képezett sorozat limesze $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{k1} = q_1$.
 3° (b_n) korlátos, tehát második koordinátáinak (b_{k2}) sorozata is korlátos, kiválasztható tehát utóbbiból konvergens részsorozat. Jelöljük ennek határértékét q_2 -vel.

(c_n) -nel jelölve (b_n) -nek azt a részsorozatát, amelyben a második koordináták a (b_{k2}) -ből kiválasztott konvergens részsorozatnak elemei, (a_n) -nek olyan részsorozatára jutottunk, melyben az első koordináták /ezek $(a_{k_{n1}})$ egy részsorozatának elemei/ q_1 -hez, a második koordináták pedig q_2 -höz tartanak.

Az eljárást folytatva az m -edik lépésben (a_n) -nek olyan (u_n) részsorozatára jutunk, amelyben már az m -edik koordináták is konvergens sorozatot alkotnak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{km} = q_m,$$

és – mint konvergens sorozatok részsorozatai – a többi koordinátákra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{ki} = q_i \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

Ekkor tehát (u_n) a korlátos (a_n) pontsorozatnak konvergens részsorozata, mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \vec{q} = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{R}^m. *$$

A tételre egy egyszerűbb bizonyítást 5.9.-ben adunk.

4.8. Feladatok.

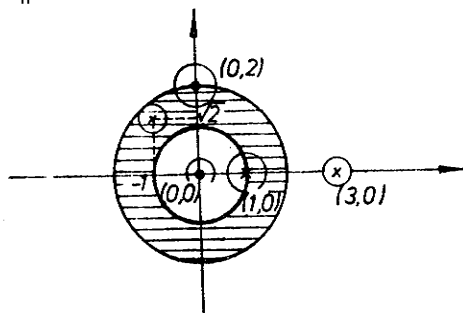
1. Igazoljuk a 4.4. tétel állítását.
2. Igazoljuk, hogy $a \in \mathbb{R}^m$ ε -sugarú környezetének átmérője $K(a, \varepsilon) = 2\varepsilon$.

5. BELSŐ, KÜLSŐ, HATÁR-, TORLÓDÁSI, IZOLÁLT PONT, NYILT HALMAZ, ZÁRT HALMAZ; CANTOR ÉS BOREL TÉTELE

A valós egyváltozós függvények differenciálszámítása c. jegyzet bevezetésében foglalkoztunk már speciális lineáris ponthalmazokkal, nyílt és zárt intervallumokkal. Ezek végpontjainak, az intervallumba eső, vagy az intervallumon kívül fekvő pontoknak az intervallumhoz viszonyított helyzetét jellemezhetjük a környezet fogalmának segítségével. Altalánosságban, $\mathbb{R}^m$ -beli ponthalmazokra, ilyen kérdések vizsgálatával fogunk most foglalkozni.

5.1. DEFINÍCIÓ. Legyen $x \in \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^m$.

- 1° x belső pontja A -nak ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy
 $K(x, \varepsilon) \subset A$;
- 2° x külső pontja A -nak, ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy
 $K(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$;
- 3° x határpontja A -nak, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra
 $K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ és $K(x, \varepsilon) - A \neq \emptyset$;
- 4° x torlódási pontja A -nak, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra
 $\dot{K}(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$;
- 5° x izolált pontja A -nak, ha $x \in A$, de olyan $\varepsilon > 0$, hogy
 $\dot{K}(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.



6. ábra

Legyen

$$A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\} \cup (3, 0).$$

Ennek a ponthalmaznak például

$(0, 0)$ külső pontja, $(-1, \sqrt{2})$

belső pontja $(1, 0)$ is, $(0, 2)$

is határpontja, bár az első

hozzátartozik, a második nem

tartozik a halmazhoz, az ed-

dig felsorolt pontok valamenny-

nyien torlódási pontjai A-nak, míg $(3,0)$ izolált pontja az A halmaznak. /6. ábra/

Az $x = 0$ pont a $B = \left\{-\frac{1}{2}\right\}^n : n \in \mathbb{N}$ halmaznak és a

$C = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ halmaznak is torlódási pontja, de egyiknek sem eleme. A $\{0,1\}$ halmaznak 0 is, 1 is izolált pontja.

A definícióból közvetlenül adódnak a következő állítások:

5.2. Tétel. Bármely $A \subset \mathbb{R}^m$ halmazra és bármely $x \in \mathbb{R}^m$ pontra az alábbi három lehetőség közül pontosan egy teljesül:

- 1° x belső pontja A-nak,
- 2° x külső pontja A-nak,
- 3° x határpontja A-nak. *

5.3. Tétel. Ha $A \subset \mathbb{R}^m$ és A-nak $\mathbb{R}^m$ -re vonatkozó komplementumát B-vel jelöljük ($B = \mathbb{R}^m - A$), akkor

- 1° A külső pontjai azonosak B belső pontjaival,
- 2° A határpontjai azonosak B határpontjaival. *

5.4. Tétel. Minden korlátos végtelen halmaznak van torlódási pontja.

Bizonyítás. Legyen $A \subset \mathbb{R}^m$ korlátos. Speciálisan $m=1$ esetén ez azt jelenti, hogy van olyan $[a_0, b_0]$ intervallum, hogy $A \subset [a_0, b_0]$. Felezzük el az $[a_0, b_0]$ intervallumot és jelöljük $[a_1, b_1]$ -gyel azt az így nyert intervallumot, amelybe A-nak végtelen sok eleme esik /a felezéssel nyert egyik intervallum biztosan ilyen/. $[a_1, b_1]$ -et újból felezve azt a részintervallumot, amelybe A-nak végtelen sok pontja esik - legalább az egyik ilyen - jelöljük $[a_2, b_2]$ -vel, ... Az így nyert egymásba skatulyázott intervallumok egy c pontra zsugorodnak össze.

Ez a c pont A -nak torlódási pontja, mert bármely $K(c, \epsilon)$ környezete c -nek magában foglalja bizonyos indextől kezdve valamennyi $[a_n, b_n]$ intervallumot, vagyis A -nak végtelen sok pontját, $K(c, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.
 m -dimenziós esetben a bizonyítás menete ugyanez, ekkor intervallumok m -szeres Descartes-szorzata tartalmazza A -t, ezt kell 2^m -edelni. *

Pontsorozatok konvergenciája a torlódási pont fogalmával így hozható kapcsolatba:

5.5. Tétel. Az x pont akkor és csak akkor torlódási pontja az $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaznak, ha kiválasztható A -ból olyan végtelen pontsorozat, amelynek elemei mind különbözők, és a sorozat x -hez konvergál.

Bizonyítás. A feltétel elégséges volta nyilvánvaló. A szükségesség belátásához legyen x egy torlódási pont és tekintsük x -nek $\epsilon_1 = 1$ sugaru környezetét. Ebben kell, hogy legyen A -beli x -től különböző pont, jelöljük ezt a_1 -gyel. Legyen $\epsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, d(a_1, x)\}$ és $a_2 \in K(x, \epsilon_2) \cap A$ /ilyen a_2 pont kell, hogy legyen, hiszen x torlódási pontja A -nak/. Tovább folytatva eljárásunkat $a_n \in K(x, \epsilon_n) \cap A$ az n -edik környezetből kiválasztott pont /itt $\epsilon_n = \min\{\frac{1}{n}, d(a_{n-1}, x)\}$ /. Az a_n pontsorozat nyilván x -hez konvergál. *

5.6. MEGJEGYZÉS. A torlódási pont fogalmának, ill. az 5.4. tételnek felhasználásával is bizonyítható a Bolzano-Weierstrass-féle tétel, vagyis az a tény, hogy minden korlátos (a_n) pontsorozatnak van konvergens részsorozata /4.7./.

Ha ugyanis az (a_n) sorozatban végtelen sok tag egyenlő, akkor ezek egy triviálisan konvergens részsorozatot adnak meg. Ha ez nem áll, akkor végtelen sok különböző tag, kell, hogy legyen (a_n) elemei között. Ezek a

feltétel értelmében korlátos végtelen B halmazt alkotnak, amelynek az 5.4. tétel értelmében kell, hogy legyen torlódási pontja. Ehhez a torlódási ponthoz azonban 5.5. értelmében kiválasztható B elemeiből egy hozzá konvergáló (b_n) pontsorozat, melynek pontjai az (a_n) sorozatnak elemei. Könnyen látható, hogy a (b_n) sorozatból kiválasztható (a_n) -nek egy konvergens részsorozata. *

Az 5.1.-ben adott definíció értelmében A belső pontjai mind A-hoz tartoznak, A külső pontjai pedig nem tartoznak A-hoz. A határpontjai tartozhatnak A-hoz, de nem kell, hogy A-beli pontok legyenek, általában egy halmazhoz határpontjai részben hozzátartoznak, részben nem. Persze előfordulhat az a két szélső lehetőség is, hogy A-nak minden határpontja A-hoz tartozik, vagy A-nak egy határpontja sem tartozik az A halmazhoz, erre a két esetre külön elnevezést vezetünk be.

5.7. DEFINÍCIÓ. Az $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaz nyílt, ha egyetlen határpontját sem tartalmazza és zárt, ha minden határpontját tartalmazza.

Nyílt halmaz pl. $\mathbb{R}$ -ben minden nyílt intervallum, $\mathbb{R}^m$ -ben $a \in \mathbb{R}^m$ minden $K(a, \varepsilon)$, ill. $\dot{K}(a, \varepsilon)$ környezete; zárt halmaz $\mathbb{R}$ -en minden zárt intervallum, $\mathbb{R}^m$ -ben az $[a_i, b_i] (i=1, \dots, m)$ zárt intervallumok Descartes-szorzataként előálló

$$\prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$$

un. m -dimenziós téglá. Ugyanakkor $\mathbb{R}^2$ -ben az (a, b) nyílt intervallum, vagyis a $B = \{(x_1, x_2) : a < x_1 < b, x_2 = 0\}$ halmaz sem nem nyílt, sem nem zárt.

Az 5.7. definícióból értelemszerűen adódnak a következő állítások:

5.8. Tétel. $A \subset \mathbb{R}^m$ akkor és csak akkor nyílt, ha minden $x \in A$ belső pontja A -nak. *

5.9. Tétel. Bármely $A \subset \mathbb{R}^m$ halmazra egyenértékűek a következő állítások:

- 1° A zárt halmaz,
- 2° A tartalmazza minden torlódási pontját,
- 3° ha $a_n \in A$ és az (a_n) pontsorozat limessze x , akkor $x \in A$. *

5.10. Tétel. Egy $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaz akkor és csak akkor nyílt ha komplementuma, $\mathbb{R}^m - A$ zárt, és viszont. *

5.11. Tétel. Minden véges halmaz zárt. *

5.12. Tétel. Az üres halmaz nyílt és zárt is tekinthető. Az egész tér $(\mathbb{R}^m)$ nyílt és zárt is tekinthető.

Mint mondtuk, egy tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaz általában sem nem nyílt, sem nem zárt. Felvethető azonban a kérdés, megadható-e egy "legsűkebb", az A halmazt részhalmazként tartalmazó zárt halmaz, ill. egy "legbővebb" nyílt halmaz, amely még részhalmaza A -nak. Ezzel a kérdéssel kapcsolatos a következő definíció.

5.13. DEFINÍCIÓ. Az $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaz belső pontjaiból álló halmazt A belsejének nevezzük és $\text{int } A$ -val jelöljük,

A külső pontjainak halmaza A külseje,

A határpontjainak halmaza A határa,

A belső és határpontjainak egyesítése A lezárása, ezt $\bar{A}$ -sal jelöljük. /Az utóbbi jelölés bevezetésének alkalmazásakor természetesen vigyáznunk kell arra, hogy az A halmaz komplementer halmazát ne jelöljük - az irodalomban egyébként szokásos módon - $\bar{A}$ -sal./

Most is közvetlenül adódnak a definícióból a következő állítások:

5.14. Tétel. Ha $A \subset B \subset R^m$, akkor $\text{int } A \subset \text{int } B$, $\bar{A} \subset \bar{B}$. *

5.15. Tétel. Tetszőleges $A, B \subset R^m$ halmazokra $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

5.16. Tétel. Bármely $A \subset R^m$ halmazra $\text{int } A$ a legbővebb A -ban foglalt nyílt halmaz, $\bar{A}$ a legszűkebb A -t tartalmazó zárt halmaz.

5.16.-ból következik.

5.17. Tétel. $A = \text{int } A$ akkor és csak akkor, ha A nyílt, $A = \bar{A}$ akkor és csak akkor, ha A zárt. *

Felvethető a kérdés, hogy nyílt, ill. zárt halmazokkal műveleteket végezve /azok egyesítését, metszetét, Descartes-szorzatát képezve/ eredményként mikor kaphatunk újra nyílt ill. zárt halmazt. Igazak a következő állítások:

5.18. Tétel.

- 1° R^m -ben véges számú nyílt halmaz metszete nyílt, véges számú zárt halmaz egyesítése zárt.
- 2° R^m -ben nyílt halmazok tetszőleges egyesítése nyílt, zárt halmazok tetszőleges metszete zárt.
- 3° Ha $R^m = R^p \times R^q$ ($p+q=m$), $A \subset R^p$, $B \subset R^q$, akkor ha A és B nyílt /zárt/, akkor $A \times B$ is nyílt /zárt/.

Bizonyítás.

- 1° Két halmazra az állítás 5.15-ből és 5.17-ből következik, és ebből az általános eset teljes indukcióval adódik.
- 2° Ha $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ és minden A_i halmaz nyílt, akkor $x \in A$ esetén alkalmas $i \in I$ -re $x \in A_i$, és mivel A_i feltétele-

zetten nyílt, van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $K(x, \varepsilon) \subset A$, így $x \in \text{int } A$ és A nyílt. A zárt halmazokra vonatkozó állítás az előbbiből az 5.3. és 5.10. tételekre való tekintettel következik.

3° igazolásához azt kell belátnunk, hogy $\text{int}(A \times B) = \text{int } A \times \text{int } B$, $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Legyen $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, $c = (a, b) \in \mathbb{R}^m$. Ekkor $\varepsilon > 0$ esetén $K(a, \varepsilon) \times K(b, \varepsilon) \subset K(c, 2\varepsilon) \subset K(a, 2\varepsilon) \times K(b, 2\varepsilon)$, vagyis $K(a, 2\varepsilon) \subset A$, $K(b, 2\varepsilon) \subset B$ esetén $K(c, 2\varepsilon) \subset A \times B$, így $\text{int } A \times \text{int } B \subset \text{int}(A \times B)$.

Másrészt $K(c, 2\varepsilon) \subset A \times B$ esetén $K(a, \varepsilon) \subset A$, $K(b, \varepsilon) \subset B$, így $\text{int}(A \times B) \subset \text{int } A \times \text{int } B$, amivel az első állítást igazoltuk.

Ha $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, akkor $\xi \in A \cap K(a, \varepsilon)$, $\eta \in B \cap K(b, \varepsilon)$ esetén $(\xi, \eta) \in (A \times B) \cap K(c, 2\varepsilon)$, azaz $c = (a, b) \in \overline{A \times B}$,

$$(*) \quad \overline{A} \times \overline{B} \subset \overline{A \times B}.$$

Másrészt, ha $c = (a, b) \in \overline{A \times B}$, és $(\xi, \eta) \in (A \times B) \cap K(c, 2\varepsilon)$, akkor $(\xi, \eta) \in (A \times B) \cap [K(a, 2\varepsilon) \times K(b, 2\varepsilon)] = [A \cap K(a, 2\varepsilon)] \times [B \cap K(b, 2\varepsilon)]$, tehát $\xi \in A \cap K(a, 2\varepsilon)$, $\eta \in B \cap K(b, 2\varepsilon)$ és $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, azaz $\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$ amit (*)-gal összevetve a második állítás adódik. *

Könnyű példát mutatni arra, hogy megszámlálható sok nyílt halmaz metszete nem kell, hogy nyílt legyen:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{i}, \frac{1}{i} \right] = \{0\},$$

és az utóbbi halmaz nem nyílt /zárt/.

Eddigi pontthalmazelméleti ismereteink birtokában kimondhatunk és igazolhatunk két olyan nevezetes tételt, amelyet a valós és komplex analízisben egyaránt jól felhasználhatunk.

5.19. Tétel. /Cantor-féle metszettétel/

Ha $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ nem-üres, korlátos, zárt halmazok sorozata R^m -ben, akkor

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset.$$

/Ez a tétel általánosítása a Cantor-axióma állításának (Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása I.3.18.) az itteni korlátos, zárt halmazok helyett ott egydimenziós intervallumok szerepeltek./

Bizonyítás. Válasszuk ki minden K_i halmazból /ezek nem-üresek/ egy elemet: $x_n \in K_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Az így nyert (x_n) sorozat elemei a feltétel értelmében mind elemei a korlátos K_1 halmaznak, van tehát 4.7. értelmében e sorozatnak konvergens (x_{n_k}) részsorozata. Jelöljük ennek határértékét x -szel. Mivel $n < n_k$ esetén $x_{n_k} \in K_{n_k} \subset K_n$ és K_n zárt, 5.9.3° miatt $x \in K_n$ minden n -re, a K_i halmazok metszete tehát biztosan tartalmazza x -et, nem lehet üres.*

5.20. Tétel. /Borel-féle befedési tétel/

Ha $K \subset R^m$ korlátos, zárt halmaz, a G_i ($i \in I$) halmazok nyíltak és

$$K \subset \bigcup_{i \in I} G_i$$

/megszámlálható, vagy nem megszámlálhatóan végtelen sok nyílt halmaz egyesítésével be tudjuk fedni a korlátos, zárt K halmazt/, akkor a G_i halmazok közül már véges számú is befedi K -t.

| Bizonyítás. Igazoljuk a tétel állítását először abban
| a speciális esetben, amikor K zárt $[a_i, b_i]$ intervallu-
| mok m -szeres Descartes-sorozata, un. m -dimenziós zárt
| téglák R^m -ben. Legyen

$$K \subset \bigcup_{i \in I} G_i \quad (G_i \text{ nyílt, } i \in I),$$

és tegyük fel a tétel állításával ellentétben, hogy nem választható ki K ezen befedéséből véges befedés. Ezt a tulajdonságot a K m -dimenziós zárt téglá 2^m -edelésével előálló részekből legalább az egyik kell, hogy örökölje. Ezt a zárt halmazt újból 2^m -edelve ismét legalább az egyik rész nem fedhető be véges sok nyílt halmazzal, és így tovább. Az így kiválasztott zárt halmazok a Cantor-féle metszettel /5.19./ értelmében egy $x \in K$ pontot kell, hogy tartalmazzanak, mivel pedig a 2^m -edelések révén átmérőik 0-hoz tartó sorozatot alkotnak, azt is mondhatjuk, hogy egy $x \in K$ pontra zsugorodnak rá. x nyilván benne kell, hogy feküdjön legalább egy befedő G_i halmazban, jelöljük ezt G_k -vel. Mivel G_k nyílt, alkalmas $\varepsilon > 0$ -ra $K(x, \varepsilon) \subset G_k$.

$K(x, \varepsilon)$ azonban tartalmazza kellő számú lépés után a 2^m -edeléssel nyert és kiválasztott m -dimenziós zárt téglákat, így azok – a feltevéssel ellentétben – az egyetlen nyílt G_k halmazzal befedhetők. Ellentmondásra jutva igazoltuk, hogy speciálisan minden m -dimenziós zárt téglá nyílt befedéséből kiválasztható véges nyílt befedés.

Legyen most K tetszőleges korlátos zárt halmaz R^m -ben. Mivel K korlátos, belefoglalható egy korlátos, zárt m -dimenziós T téglába.

$$K \subset \bigcup_{i \in I} G_i \quad (G_i \text{ nyílt, } i \in I) \text{ esetén } T \subset \left(\bigcup_{i \in I} G_i \right) \cup (R^m - K),$$

ahol $R^m - K$ nyílt, mivel K zárt és $\left(\bigcup_{i \in I} G_i \right) \cup (R^m - K)$ az

egész teret, tehát a T zárt m -dimenziós téglát is befedi. Az előbb bizonyítottak értelmében e bővített befedésből kiválasztható egy T -t befedő véges befedés. Ez a véges rendszer, sőt, ha elemei közt $R^m - K$ szerepelne, akkor az ennek elhagyása után visszamaradó szűkebb

| véges rendszer lefedi K-t, amivel állításunkat igazol-
 | tuk. *

5.21. Feladatok.

1. Igazoljuk az 5.15. tétel állítását.
2. Igazoljuk az 5.16. tétel állítását.
3. Igazoljuk, hogy tetszőleges korlátos $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaznak és A lezárásának átmérője megegyezik $\delta(A) = \delta(\bar{A})$.
4. Határozzuk meg az $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaz belső, külső, határ-, torlódási, izolált pontjait, ha
 - a. $A = K(x, \epsilon)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\epsilon > 0$,
 - b. $A = \dot{K}(x, \epsilon)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\epsilon < 0$,
 - c. $A = \bar{K}(x, \epsilon)$, /az a. alatti halmaz lezárása/,
 - d. $A = \bar{\dot{K}}(x, \epsilon)$ /a b. alatti halmaz lezárása/,
 - e. $A = \bigcap_{i=1}^m [a_i, b_i]$, $a_i < b_i$ ($i = 1, \dots, m$),
 - f. $A = \bigcap_{i=1}^m (a_i, b_i)$, $a_i < b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$),
 - g. $A = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in \mathbb{N} \text{ } (i = 1, \dots, m)\}$,
 - h. $A = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in \mathbb{Q} \text{ } (i = 1, \dots, m)\}$,
 / $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza/.
5. Bizonyítsuk be, hogy $x \in \mathbb{R}^m$ akkor és csak akkor torlódási pontja az $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaznak, ha minden $\epsilon > 0$ -re $A \cap K(x, \epsilon)$ végtelen halmaz.
6. Bizonyítsuk be, hogy bármely $A \subset \mathbb{R}^m$ halmazra A külseje nyílt, A határa zárt, A torlódási pontjainak halmaza zárt.
7. Igazoljuk, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^m$, A nyílt, B zárt, akkor $A-B$ nyílt.
8. Igazoljuk, hogy bármely $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaznak csak megszámlálható sok izolált pontja lehet.

II. A TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ÁLTALÁNOS TULAJDONSÁGAI

1. m-VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ÉS LEKÉPEZÉS, SZEMLÉLTETÉS, TÖBBVÁLTOZÓS ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK ÉS LEKÉPEZÉS

Bevezetésként I.1.-ben néhány konkrét példából kiindulva eljutottunk tulajdonképpen már a többváltozós függvények értelmezéséhez, és utaltunk arra is, hogy ez az értelmezés összhangban áll a korábban bevezetett általános függvényfogalommal /melynek részletesen már vizsgált speciális esete az $f : A \rightarrow B$, $A, B \subset \mathbb{R}$ valós egyváltozós függvény/. Pontosan megfogalmazva

1.1. DEFINÍCIÓ. Legyen $H \subset \mathbb{R}^m$. f a H halmazon értelmezett valós m -változós függvény /pontosabban valós m -változós valós értékű függvény/, ha minden

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in H \quad (x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m)$$

rendezett szám m -eshez $/H \subset \mathbb{R}^m$ minden pontjához/ egy és csak egy valós számot rendel.

Másképp kifejezve az f m -változós függvény olyan utasítás, amely egy $H \subset \mathbb{R}^m$ halmaz minden egyes eleméhez egy valós számot rendel hozzá.

Az f függvény által az $x \in H$ ponthoz rendelt számot $f(x)$ -szel jelöljük, ez az x ponthoz tartozó függvényérték, vagy helyettesítési érték. A H halmaz az f függvény értelmezési tartománya $/D_f$ -fel is jelöljük/, az

$$f(H) = \{f(x) : x \in H\} \subset \mathbb{R}$$

halmaz pedig f értékkészlete.

Most is használni fogjuk a valós egyváltozós függvények analízisében bevezetett jelöléseket:

$$f : H \rightarrow f(H), \quad \text{illetve} \quad f : D_f \rightarrow f(D_f).$$

Az x ponthoz rendelt $f(x)$ függvényértéket röviden y -nal jelölve, a függvény helyettesítési értékének további használatos jelölései:

$$y = f(x), \quad x \xrightarrow{f} y, \quad x \mapsto y,$$

illetve az x pontot koordinátaival adva meg: $x = (x_1, \dots, x_m)$, a kettős zárójelet elhagyva

$$f(x) = f((x_1, \dots, x_m)) = f(x_1, \dots, x_m).$$

1.2. MEGJEGYZÉS. Speciálisan, ha $m=2$, az $f:H \rightarrow B$ ($H \subset \mathbb{R}^2$, $B \subset \mathbb{R}$) függvényt valós kétváltozós függvénynek nevezzük, és értelmezési tartományának elemeit /a sík pontjait/ koordinátaival $(x_1, x_2) \in H$, ill. $(x, y) \in H$ alakban is megadhatjuk /az utóbbi megadásnál persze már nem használhatjuk x -et az értelmezési tartomány pontjának, y -t az értékkészlet pontjának jelölésére. Ennél a megadásnál szokás az (x, y) ponthoz rendelt $f(x, y)$ függvényértéket z -vel jelölni/. A kétváltozós függvény helyettesítési értékének lehetséges jelölése tehát: $y = f(x_1, x_2)$, $x = (x_1, x_2) \xrightarrow{f} y$, $(x_1, x_2) \mapsto y$,

$$\text{ill.} \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \xrightarrow{f} z, \quad (x, y) \mapsto z.$$

Hasonló módon $m=3$ esetén $f:H \rightarrow B$ ($H \subset \mathbb{R}^3$, $B \subset \mathbb{R}$) valós háromváltozós függvény, értelmezési tartományának elemeit /a háromdimenziós euklideszi tér pontjait/ koordinátaival $(x_1, x_2, x_3) \in H$, ill. $(x, y, z) \in H$ alakban is megadhatjuk, és így a helyettesítési érték lehetséges jelölései:

$$y = f(x_1, x_2, x_3), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{f} y, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto y, \\ \text{ill.}$$

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \xrightarrow{f} u, \quad (x, y, z) \mapsto u.$$

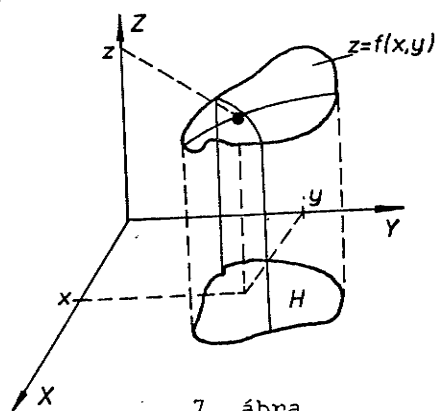
1.3. MEGJEGYZÉS. Az egyváltozós esethez hasonlóan többféle típusu utasítással adhatunk meg egy m -változós függvényt.

Képlettel adtuk meg az $x \in D_f$ pont koordinátái segítségével az $f(x)$ számot az I.1. bevezetésben felsorolt függvényeknél. Nyilván az így megadott függvények a legjobban "kezelhetők", de nem ilyen típusu pl. az a $H = N \times N$ -en értelmezett f függvény, amely $x = (m, n) \in H$ -hoz az m és n számok legnagyobb közös osztóját rendeli függvényérték-ként.

Előfordulhat, hogy valamely utasítással megadott függvénynél nem jelöltük ki a függvény értelmezési tartományát. Ilyenkor értelmezési tartománynak az összes olyan $x \in \mathbb{R}^m$ pontok halmazát tekintjük, amelyekre a megfogalmazott utasítás értelmes.

1.4. MEGJEGYZÉS. Az f és g függvény egyenlő /azonosan egyenlő/ ha értelmezési tartományuk megegyezik ($D_f = D_g$) és annak minden pontjához mindkét függvény ugyanazt a függvényértéket rendeli [$\forall x \in D_f = D_g : f(x) = g(x)$].

1.5. Az egyváltozós függvények szemléltetéséhez hasonlóan a kétváltozós $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^2$) függvény azoknak az $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pontoknak a halmazával szemléltethető, amelyekre $(x, y) \in H$ és $z = f(x, y)$. Ennek az alakzatnak egyenlete



7. ábra

/az analitikus geometriában szokásos értelemben/ $z=f(x,y)$.

/7. ábra/ Ennek általánosításaként az m -változós $f:H \rightarrow R$
($H \subset R^m$) függvény grafikonján az R^{m+1} tér

$$\{(x_1, \dots, x_m, y) : (x_1, \dots, x_m) \in H, y = f(x_1, \dots, x_m)\}$$

részalmazát értjük.

1.6. MEGJEGYZÉS. Nem foglalkozunk itt azzal a kérdéssel, mit értünk általánosságban felületen és hogyan lehet megadni egy felületet. A $z = f(x,y)$ egyenlőségnek eleget tevő (x,y,z) pontok halmaza sok f függvény esetében felületet ad. Általánosabban felülethez juthatunk a

$$H = \{(x,y,z) : \phi(x,y,z) = 0\}$$

ponthalmaz megadásával, ha ϕ alkalmas kikötéseknek elegettevő függvény /lásd V. fejezet/. Ennek a megadásnak a $z = f(x,y)$ alakú megadás nyilván az a speciális esete, amikor $\phi(x,y,z) = z - f(x,y)$.

1.7. MEGJEGYZÉS. A $z = f(x,y)$ alakú egyenlettel megadható felületek szemléltetésének legegyszerűbb módja az ún. szintvonalak segítségével történő ábrázolás. Pl. a térképeken látunk szintvonalakat, vagyis olyan görbéket, amelyek mentén a magasság /egy harmadik változó értéke/ állandó. Pl. 100 méteres magasság-emelkedésként tüntetve fel szintvonalakat, e görbék sűrűségéből következtetni lehet a hegy meredekségére, el tudjuk képzelni a felszín változását.

Általánosságban geometriailag az $f(x,y) = c$ szintvonal $\{c \in f(D_f)\}$ a $z = f(x,y)$ egyenletű felület $z=c$ sikkal való metszetének vetülete az xy síkon. Példaként határozzuk meg néhány egyszerűbb felület szintvonalait, szemléltessük annak egyenletét megadó $z = f(x,y)$ összefüggést.

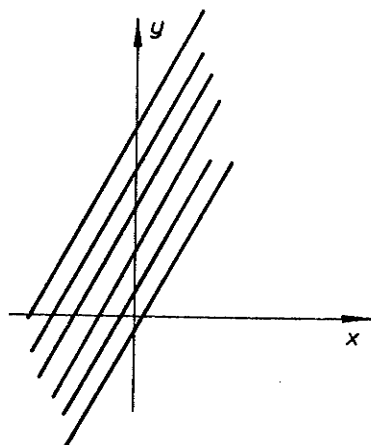
$$1^\circ z = 2x - y + 3.$$

A szintvonalak

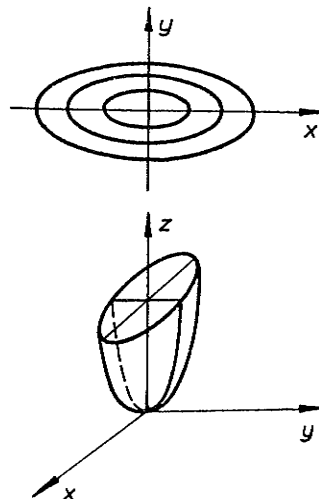
$$c = 2x - y + 3, \text{ illetve } y = 2x + 3 - c$$

egyenletű egyenesek /8. ábra/. A felület sík.

$$2^\circ z = x^2 + 4y^2. /9. \text{ ábra}/$$



8. ábra



9. ábra

A színtvonalak

$$c = x^2 + 4y^2, \text{ illetve } \frac{x^2}{(\sqrt{c})^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2} = 1$$

egyenletű ellipszisek ($c > 0$). Megnézve a felület koordinátasíkokkal és azokkal párhuzamos síkokkal való metszetgörbéit $z = x^2$ ($z = x^2 + 4a^2$), ill. $z = 4y^2$ ($z = b^2 + 4y^2$) adódik, e metszetek tehát parabolák, ezért általánosságban a

$$(*) \quad z = a^2x^2 + b^2y^2$$

egyenletű felületeket elliptikus paraboloidoknak nevezzük.

Speciálisan $a = b$ esetén $(*)$ -ből

$$z = a^2x^2 + a^2y^2$$

adódik, ennek $z = c$ -vel való metszeteiként szintvonalaknak körök adódnak, a felület un. forgási paraboloid.

3° Hasonlóképpen a

$$z = a^2x^2 - b^2y^2, \text{ ill. a } z = -a^2x^2 + b^2y^2$$

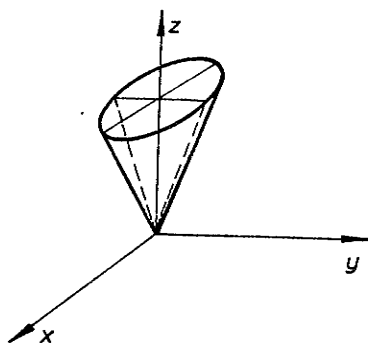
felületek koordinátasíkokkal párhuzamos metszeteiként hiperbolák és parabolák adódnak, a felületeket hiperbolikus paraboloidoknak nevezzük.

$$4^\circ z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

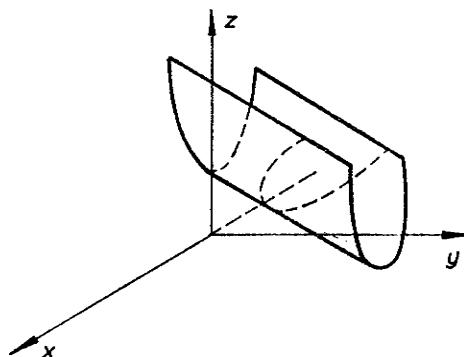
szintvonalainak egyenlete

$$c = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{ill.} \quad c^2 = x^2 + y^2,$$

ezek tehát $(0,0)$ középpontu c sugaru körök, a felület tehát forgásfelület. A másik két koordinátasíkkal párhuzamos síkokkal való metszetgörbék $z = |x|$ ($z^2 - x^2 = a^2$, $z > 0$) ill. $z = |y|$ ($z^2 - y^2 = b^2$, $z > 0$), a felület forgáskúp /10. ábra/



10. ábra



11. ábra

$$5^\circ z = x + 2y^2 + 1.$$

A szintvonalak $c = x + 2y^2 + 1$, ill. $x = -2y^2 + c - 1$ egyenletű parabolák. A másik két koordinátasíkkal párhuzamos

mos síkokkal való metszetgörbék egyenlete $z = 2y^2 + 1$ ($z = a + 2y^2 + 1$), ill. $z = x + 1$ ($z = x + 2b^2 + 1$), tehát parabolák és egyenesek, a felületet parabolikus hengernek nevezzük /11. ábra/.

6° A felületek színtvonalak, ill. koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal való metszetek segítségével történő szemléltetését nemcsak $z = f(x,y)$, hanem $F(x,y,z) = 0$ alakban megadott alakzatok esetében is alkalmazzuk.

$$\text{Pl.: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - d^2 = 0$$

esetében ellipszisek /speciálisan körök/ adódnak, a felületet ellipszoidnak /speciálisan forgási ellipszoidnak, gömbnek/ nevezzük.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - d^2 = 0$$

egyköpenyű hiperboloid /speciálisan egyköpenyű forgási hiperboloid/,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - d^2 = 0$$

kétköpenyű /forgási/ hiperboloid.

Az itt tárgyalt felületek un. másodrendű felületek. Ezek egyenlete a legáltalánosabb alakban

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{33}z^2 + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (a_{ik} \text{ állandó, } i,k = 1,2,3,4).$$

1.8. Olyan utasítások mellett, amelyek az R^m tér bizonyos pontjaihoz valós számot rendelnek egyértelműen, találhatunk olyanokat is, amelyek R^m pontjaihoz egy-egy R^p ($p > 1$)-beli pontot rendelnek /pl. az R^2 sík pontjainak egy síkbeli

egyenesre való tükrözése, görbe paraméteres egyenletrendszerének megoldása/. Így jutunk el a következő általánosabb fogalomhoz.

1.9. DEFINÍCIÓ. Legyen $m, p \in \mathbb{N}$. $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$ m -változós $\mathbb{R}^p$ -be vezető leképezés, ha $H \subset \mathbb{R}^m$ és f minden $x \in H$ ponthoz egy és csak egy $f(x) \in \mathbb{R}^p$ pontot rendel.

$f(x)$ az x pontnak az f leképezésnél származó képe, képpontja, a H halmaz f értelmezési tartománya, az

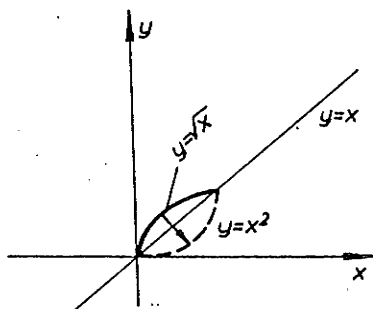
$$f(H) = \{f(x) : x \in H\} \subset \mathbb{R}^p$$

halmaz pedig f értékkészlete. /Ez a fogalom általánosítása a homogén lineáris leképezésnek (lineáris operátornak), lásd Algebra jegyzet 8. fejezet /

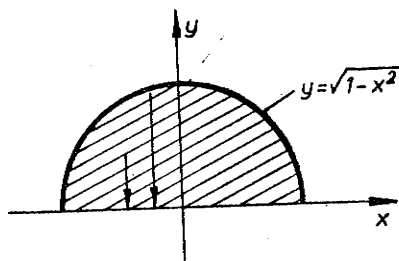
Természetesen az 1.9. definícióban $m < p$, $m = p$ és $m > p$ is fennállhat. Az első esetre példa a $[0,1]$ intervallumot egy térbeli egyenesszakasz pontjaiba átvivő, az 1.10 megjegyzésben kirészletezett leképezés. Az $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$ görbeszakasz pontjait az $y = x$ egyenesre tükrözve az $y = x^2$ görbe $0 \leq x \leq 1$ íve adódik, ez a tükrözés olyan transzformáció, amelynél $m=p=2$ /12. ábra/. Ha az

$$\{(x,y) : 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$$

halmaz pontjait az $y=0$ egyenletű egyenesre /az x tengelyre/ vetítjük, akkor ennél a transzformációnál $m=2$, $p=1$, /13. ábra/



12. ábra



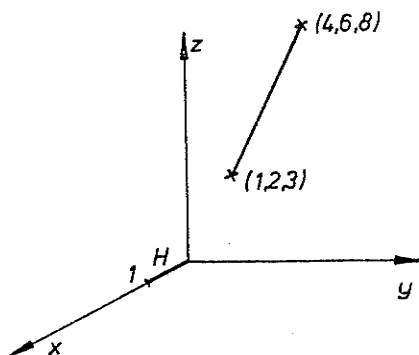
13. ábra

1.10. MEGJEGYZÉS. Az 1.1. és 1.9. definíció egybevetéséből adódik, hogy az m -változós függvény az m -változós leképezésnek az a speciális esete, mikor $p=1$. Megfordítva, ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$, $H \subset \mathbb{R}^m$, akkor az $x \in H$ ponthoz rendelt $f(x) \in f(H) \subset \mathbb{R}^p$ képpontot koordinátaival adhatjuk meg; e rendezett szám p -es minden elemét egy-egy m -változós

$$f_k : H \rightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1, \dots, p)$$

függvény adja meg, azaz $f(x) = [f_1(x), \dots, f_p(x)]$.

Az $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$ leképezés megadása tehát p darab m -változós $f_k : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, p$) függvény megadásával egyenértékű. Pl. az $(1, 2, 3)$ és $(4, 6, 8)$ pontokat összekötő egyenesszakasz pontjai az $\underline{r}_1 = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$, $\underline{r}_2 = 4\underline{i} + 6\underline{j} + 8\underline{k}$, $\underline{r} = x_1\underline{i} + x_2\underline{j} + x_3\underline{k}$ jelöléssel az $\underline{r} = \underline{r}_1 + t(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$, $0 \leq t \leq 1$ összefüggéssel egyértelműen jellemezhetők. A fenti kapcsolat azonban úgy is felfogható, mint a zárt $[0, 1]$ intervallumot, vagyis a $H = \{t : 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{R}$ halmazt a fenti egyenesszakasz pontjaiba, azaz az $f(H) \subset \mathbb{R}^3$ halmazba vivő leképezés. /14. ábra/



14. ábra

Ezt a leképezést megadhatjuk azáltal, hogy megadjuk minden $t \in H$ értékhez rendelt képpont x_1, x_2, x_3 koordinátáját, illetve azokat az f_1, f_2, f_3 függvényeket, amelyekre, minden $t \in H$ -ra $f_1(t) = x_1, f_2(t) = x_2, f_3(t) = x_3$.

A fenti példánál ezek a függvények a következő képlettel adhatók meg:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + 3t, \\x_2 &= 2 + 4t, \\x_3 &= 3 + 5t.\end{aligned}$$

Ennél a példánál tehát 3 darab egyváltozós függvény megadásával volt egyenértékű az $f : H \rightarrow R^3$ ($H = [0,1] \subset R$) leképezés megadása /vesd össze: Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása, III. 1.6./.

Mivel az 1.10 megjegyzés értelmében láttuk, hogy a függvény a leképezésnek speciális esete, célszerű általánosabban leképezésekre /és nem csak függvényekre/ megfogalmazni azokat a fogalmakat, amelyeknek segítségével bonyolultabb leképezések /többváltozós függvények/ vizsgálatát egyszerűbb leképezések /függvények/ vizsgálatára visszavezethetjük, amelyekből azok felépíthetők.

1.11. DEFINÍCIÓ. Ha f és g értelmezési tartománya megegyezik ($D_f = D_g$), akkor $f + g$, cf ($c \in R$), $f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ ($x \in D_g$) esetén $\frac{f}{g}$ ugyancsak D_f -en értelmezett, és ha $x \in D_f$, akkor

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), (cf)(x) = c \cdot f(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1.12. DEFINÍCIÓ. Legyen $f : H \rightarrow R^p$, ($H \subset R^m$), $g : K \rightarrow R^q$, [$f(H) \subset K \subset R^p$]. Ekkor f és g összetétele $(g \circ f) = h$ az a $h : H \rightarrow R^q$ leképezés, amelyre

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] \quad (x \in H).$$

1.13. MEGJEGYZÉS. Az egyváltozós összetett függvény fogalmának bevezetésekor tett észrevételek most is igazak, az ott használt elnevezések most is használhatók:

A $(g \circ f)$.leképezésnél f -et belső leképezésnek, g -t külső leképezésnek nevezzük;

általában $g \circ f \neq f \circ g$, vagyis a külső és belső leképezés szerepe nem cserélhető fel /sőt az is lehetséges, hogy a formálisan megadható két összetett leképezés közül csak az egyiknek van értelme/,

a $(g \circ f)$ összetett leképezés értelmezési tartománya lehet az f belső leképezés értelmezési tartományánál szűkebb halmaz is /ugyanis az $f(x) \in D_g$ összefüggést lehet, hogy nem minden $x \in D_f$ elégíti ki, csupán egy szűkebb $H \subset D_f$ halmazba tartozó x -ekre lesz $f(x) \in D_g$ /.

Feleltesse meg pl. az f leképezés minden $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ pontnak az $y = 0$ egyenletű egyenesre való vetületét, x_1 -et g pedig x_1 -nek $\sqrt{x_1} \in \mathbb{R}$ -et.

$t = f(x_1, x_2) = x_1$, $g(t) = \sqrt{t}$, ill. $(g \circ f)(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$.
 f értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}^2$, értékkészlete $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$,
 g értelmezési tartománya $D_g = \{t : t \geq 0\}$, $g \circ f$ értelmezési tartománya tehát nem $\mathbb{R}^2$, csupán:

$$D_{g \circ f} = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Ennél a példánál az $f \circ g$ leképezésről nem is beszélhetünk.

2. m-VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

Az egyváltozós függvény véges helyen vett véges határértékének, speciálisan jobb ill. bal oldali véges határértékének, valamint végtelen határértékének fogalmát a környezet fogalmának segítségével közös definícióval tudtuk megadni /Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása II.2.15. ill. 2.22./ . Az egyváltozós függvény /egyelőre véges/ határértékének fogalmát többváltozós függvényekre /ill. általánosabban leképezésekre/ úgy visszük át mármost,

hogy az speciális esetként a valós egyváltozós függvény jobb ill. bal oldali határértékét is magában foglalja.

Emlékeztetünk arra, hogy az egyváltozós függvénynek a határérték "helyén" nem kellett értelmezve lennie, csupán annak tetszőlegesen kicsiny sugaru pontozott környezetében. Ez I.5.1. értelmében azt jelenti, hogy a határérték "helye" a függvény értelmezési tartományának torlódási helye kell, hogy legyen.

Előfordulhat, hogy egy f függvénynél egy D_f -nél szűkebb A halmaz pontjaiban vizsgáljuk f viselkedését, ilyen $x \in A$ pontokra kérdezzük, hogy $x \rightarrow a$ ($x \in A$) esetén van-e olyan $b \in \mathbb{R}$, amelyet az $f(x)$ függvényértékek tetszőleges pontossággal megközelítenek? Legyen pl.

$$(*) \quad f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & \text{az} \\ A = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\} \text{ halmazon,} \\ 0, & \text{a} \\ B = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 1\} \text{ halmazon.} \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}^3$, pl. $(1,0,0)$ -ban a függvényérték 1, ezt azonban nem közelítik meg tetszőleges pontossággal az $(1,0,0)$ pont kis környezetében fekvő tetszőleges pontokban felvett függvényértékek. Ugyanez a helyzet, ha D_f helyett a BCD_f halmazra szorítkozunk. Ha azonban csupán az $A \subset D_f$ halmaz pontjaiban vizsgáljuk f viselkedését, akkor mondhatjuk, hogy az A halmaz $(1,0,0)$ kis környezetébe eső pontjaiban felvett függvényértékek tetszőlegesen kevésel térnek el az 1 értéktől. /Egyébként a B halmazra szorítkozva, $(1,0,0)$ környezetében minden függvényérték 0, így ezek a $b = 0$ értéktől térnek el tetszőlegesen kevésel, ill. egyeznek meg vele./

Mindezek előrebocsajtása után a következőképpen értelmezhetjük egy többváltozós f függvény véges helyen, egy, az értelmezési tartományánál esetleg szűkebb A halmazra szorítkozva vett véges határértékét:

2.1. DEFINÍCIÓ. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset H \subset \mathbb{R}^m$ és $a \in \mathbb{R}^m$ A-nak torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy a $b \in \mathbb{R}$ pont f-nek határértéke az a pontban A-ra szorítkozva, jelben

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b,$$

ha b-nek minden $K(b, \epsilon)$ környezetéhez megadható a-nak olyan $\dot{K}(a, \delta)$ pontozott környezete, hogy $x \in \dot{K}(a, \delta) \cap A$ esetén $f(x) \in K(b, \epsilon)$. Pl. a bevezető (*) példában

$$\lim_{\substack{x \rightarrow (1,0,0) \\ x \in A}} f(x) = 1; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow (1,0,0) \\ x \in B}} f(x) = 0.$$

Másképp kifejezve magunkat, a definíció értelmében $f(x)$ határértéke A-ból vett, a-hoz tartó x-ekre b, ha minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy olyan A-ból vett, a-tól különböző x-ekre, melyek a-tól δ -nál kisebb távolságra vannak [$0 < d(a, x) < \delta$] $f(x)$ mindig ϵ -nél kisebb távolságban van b-től [$d(f(x), b) < \epsilon$], ill. $|f(x) - b| < \epsilon$.

2.2. MEGJEGYZÉS. A 2.1. definíció értelmetlenné válna, ha A-nak nem volna a-nak minden pontozott környezetében pontja, ezért tettük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^m$ torlódási pontja A-nak.

2.3. MEGJEGYZÉS. Ha van olyan $\delta > 0$, hogy $\dot{K}(a, \delta) \subset A$, akkor

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b \quad \text{helyett} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

írható és röviden f-nek az a pontban vett határértékéről beszélünk. Ezt az indokolja, hogy ebben az esetben a határérték létezése és értéke A választásától nem függ.

Ismételjük el erre az esetre a 2.1. alatti általánosabb definíciót:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall K(b, \varepsilon)$ -hoz megadható $\dot{K}(a, \delta)$ úgy, hogy

$x \in \dot{K}(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in K(b, \varepsilon)$. Pl. a bevezető (*) példában

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$x \rightarrow 0$

2.4. MEGJEGYZÉS. A 2.1. definícióból következik, hogy – az egyváltozós esethez hasonlóan – beszélhetünk f $a \in \mathbb{R}^m$ -ben vett határértékéről / A -ra szorítkozva vett határértékéről/ anélkül, hogy a -ban f értelmezve volna, nem kell tehát, hogy $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset H \subset \mathbb{R}^m$ esetén $a \in H$ legyen.

2.5. MEGJEGYZÉS. m -változós függvény helyett általánosabban az $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$ leképezésre ($A \subset H \subset \mathbb{R}^m$) teljesen hasonló módon értelmezhető f $a \in \mathbb{R}^m$ -ben A -ra szorítkozva vett határértéke:

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b \in \mathbb{R}^p \Leftrightarrow \forall K(b, \varepsilon)$ -hoz megadható $\dot{K}(a, \delta)$ úgy,

hogy $x \in \dot{K}(a, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in K(b, \varepsilon)$.

Ezzel szemben végtelen határértékről – az egyváltozós esethez hasonlóan – csak m -változós függvények /és nem általánosabban leképezések/ esetében beszélhetünk.

2.6. DEFINÍCIÓ. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset H \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$ torlódási pontja A -nak. Ekkor az f függvény határértéke az $a \in \mathbb{R}^m$ pontban A -ra szorítkozva $+\infty$ /ill. $-\infty$ /, jelben

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = +\infty \quad \left[\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = -\infty \right]$$

ha $+\infty$ -nak minden $\dot{K}(+\infty, N) = K(+\infty, N)$ környezetéhez / $-\infty$ -nek minden $\dot{K}(-\infty, P) = K(-\infty, P)$ környezetéhez/ megadható a -nak olyan $\dot{K}(a, \delta)$ pontozott környezete, hogy

$$x \in \dot{K}(a, \delta) \cap A \quad \text{esetén} \quad f(x) \in K(+\infty, N) \quad f(x) \in K(-\infty, P).$$

Másképp kifejezve magunkat, a definíció értelmében az f függvény határértéke A -ból vett a -hoz tartó x -ekre $+\infty$ / $-\infty$ /, ha minden A -ból vett, a -hoz elég közeli, de a -tól különböző x -re /amelyre tehát $0 < d(a, x) < \delta$ /, mindig $f(x) > N$ [$f(x) < P$] akárhogyan adtuk is meg N (P) értékét. / δ megválasztása természetesen N ill. P megadásától függ. / Pl.

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} e^{\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}} = +\infty, \text{ mert } e^{\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}} > N, \text{ ha}$$

$$\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{d^2(x, 0)} > \ln N, \text{ ill. } d(x, 0) > \frac{1}{\sqrt{\ln N}} = \delta.$$

m -változós függvények adott pontban vett /adott halmazra szorítkozva adott pontban vett/ akár véges, akár végtelen határértékét most is az egyváltozós esethez hasonlóan kapcsolatba hozhatjuk sorozatok /pontosorozatok/ határértékével. Igaz ugyanis a következő állítás:

2.7. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$ torlódási pontja A -nak, $b \in \mathbb{R}$ /de b lehet $+\infty$, ill. $-\infty$ is/. Ekkor

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$$

akkor és csak akkor áll, ha minden olyan (x_n) pontosorozat, amelyre $x_n \in A$, $x_n \neq a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, fennáll

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

Bizonyítás. Ha $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz

megadható olyan $\delta > 0$, hogy $x \in \dot{K}(a, \delta) \cap A$ esetén $f(x) \in K(b, \varepsilon)$, azaz $f[\dot{K}(a, \delta) \cap A] \subset K(b, \varepsilon)$; ha még $x_n \rightarrow a$, akkor az előbbi $\delta > 0$ -hoz található olyan N_0 küszöbindex, hogy $n > N_0$ esetén

$x_n \in \dot{K}(a, \delta) \cap A$, vagyis $n > N_0$ mellett $f(x_n) \in K(b, \epsilon)$ a tetszőleges $\epsilon > 0$ -ra, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Megfordítva, igazoljuk, hogy ha minden (x_n) pontsorozatra, melynél $x_n \in A$, $x_n \neq a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, egyszersmind $[f(x_n)]$ is konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$, akkor $f(x)$ határértéke a -ban A -ra szorítkozva is b kell, hogy legyen. Tegyük fel ugyanis, hogy valamely $\epsilon > 0$ -hoz nincs olyan $\delta > 0$, amelyre $f[\dot{K}(a, \delta) \cap A] \subset K(b, \epsilon)$ teljesül. Ekkor ha $\delta = \frac{1}{n}$, van olyan $x_n \in \dot{K}(a, \frac{1}{n}) \cap A$, hogy $f(x_n) \notin K(b, \epsilon)$, $(n \in \mathbb{N})$.

Ez azt jelenti, hogy van olyan (x_n) sorozat, melynek elemeire $x_n \in A$, $x_n \neq a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ és $f(x_n)$ ugyanakkor nem tart b -hez $n \rightarrow \infty$ esetén/, ami ellentmond kiinduló feltevésünknek $\forall x_n \rightarrow a$ esetén $f(x_n) \rightarrow b$ /. Ezzel állításunkat igazoltuk. *

2.8. MEGJEGYZÉS. A 2.7. tételben lényeges volt, hogy minden olyan (x_n) sorozatot figyelembe vegyünk, amelyre $x_n \in A$, $x_n \neq a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Legyen ugyanis $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ az alábbi képlettel értelmezve:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Ha olyan (x_n, y_n) pontsorozatokat tekintünk, amelyeknek elemei valamilyen $m \in \mathbb{N}$ -re mind egy $y = mx$ egyenesen fekszenek, akkor ilyen pontsorozatokra

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n \cdot y_n}{x_n^2 + y_n^4} = \frac{m^2 \cdot x_n^2 \cdot x_n}{x_n^2 + m^4 x_n^4} = \frac{m^2 \cdot x_n}{1 + m^4 x_n^2} \rightarrow 0$$

(ha $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$);

$m=0$ esetén /azaz az x tengely mentén/ triviálisan

$$f(x_n, 0) = \frac{0}{x_n^2 + 0} = 0, \text{ azaz } 0\text{-hoz tart, ha } x_n \rightarrow 0, \text{ hason-}$$

lőképpen az y tengely mentén, vagyis az $x=0$ egyenesen fekvő pontsorozatokra $f(0, y_n) = \frac{0}{0+y_n^4}$, azaz 0-hoz tart, ha

$y_n \rightarrow 0$. Ugyanakkor az $y = \sqrt{x}$ egyenletű parabolaív pontjainból álló (x_n, y_n) pontsorozatokra

$$f(x_n, y_n) = f(x_n, \sqrt{x_n}) = \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_n^2} = \frac{1}{2},$$

azaz $\frac{1}{2}$ -hez tart, ha a pontsorozat $(0,0)$ -hoz konvergál. Különböző pontsorozatokra tehát $(x_n, y_n) \rightarrow (0,0)$ esetében más határérték adódik, és így

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ nem létezik.}$$

2.9. MEGJEGYZÉS. A 2.7. tétel feltételei és jelölései

mellett, ha $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm}) \in A$, $x_n \neq a = (a_1, \dots, a_m)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ azt jelenti, hogy $n \rightarrow \infty$ esetén $x_{ni} \rightarrow a_i$ minden i -re ($i=1, \dots, m$) /I.3.3. tétel/. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ azonban csak akkor létezik, ha minden a -hoz tartozó (x_n) sorozatra /amikor is minden ilyen sorozat n -edik elemének minden koordinátája egyszerre tart $a = (a_1, \dots, a_m)$ megfelelő koordinátájához/ teljesül a megfelelő $[f(x_n)]$ sorozat azonos határértékhez való tartása. Nem képezhető tehát f határértéke úgy, hogy először csak az egyik, majd a második, majd

... az m -edik koordinátával tartunk $a = (a_1, \dots, a_m)$ megfelelő koordinátájához, az ilyen ún. "iterált" határérték létezhet akkor is, amikor f -nek nincs az adott helyen határértéke. /Ez nem meglepő, hiszen pl. kétváltozós esetben az ilyen "iterált" határátmenet azt jelenti, hogy olyan pontsorozatokkal tartunk $a = (a_1, a_2)$ -hez, melyek a derékszögű koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamos egyenes szakaszokon fekszenek, tehát speciális a -hoz tartó pontsorozatok.

Legyen pl. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a következő képlettel megadva:

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}.$$

E függvénynek nincs határértéke $(0,0)$ -ban, mert az $y = mx$ ($m \neq 1$) egyeneseken fekvő pontsorozatokra m értékétől függően más-más határérték adódik $(x,y) \rightarrow (0,0)$ esetén:

$$f(x, mx) = \frac{x + mx}{x - mx} = \frac{1 + m}{1 - m},$$

és ez az m -től függő érték lesz f határértéke is $x \rightarrow 0$ esetén /amikor is az (x, mx) pontok sorozata $(0,0)$ -hoz tart/. Ugyanakkor az "iterált" határértékek léteznek $(0,0)$ -ban:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{-y} \right) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x} \right) = 1.$$

Az m -változós függvény határértékére 2.1.-ben bevezetett jelölés hallgatólagosan feltételezte, hogy - az ottani jelölések mellett - f -nek az $a \in \mathbb{R}^m$ torlódási pontban A -ra szorítkozva csak egy határértéke lehet. Ez most már be is tudjuk bizonyítani:

2.10. Tétel. Legyen $f : H_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : H_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset H_1 \cap H_2 \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$ torlódási pontja A -nak, $b, c \in \mathbb{R}$ / b, c akár $+\infty$, akár $-\infty$ is lehet/ és tegyük fel, hogy a -hoz elég "közel" /alkalmas $\delta > 0$ mellett $x \in A \cap \dot{K}(a, \delta)$ esetén/ $f(x) = g(x)$, továbbá

$$\begin{array}{ll} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b, & \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} g(x) = c. \end{array}$$

Ekkor $b=c$. Egy függvénynek tehát A -nak valamely torlódási pontjában A -ra szorítkozva nem lehet két különböző határértéke.

Bizonyítás. Mivel $a \in \mathbb{R}^m$ torlódási pontja A -nak, minden $n \in \mathbb{N}$ -hez található olyan x_n , melyre $x_n \in A \cap \dot{K}\left(a, \frac{1}{n}\right)$. Ekkor $x_n \in A$, $x_n \neq a$, $x_n \rightarrow a$ /ha $n \rightarrow \infty$ /, tehát a 3.7. tétel értelmében $f(x_n) \rightarrow b$, $g(x_n) \rightarrow c$ /ha $n \rightarrow \infty$ / . De ha már $x_n \in \dot{K}(a, \delta)$ akkor $f(x_n) = g(x_n)$, azaz szükségképpen $b = c$. *

A számsorozatokra vonatkozó tételekből azonnal következnek a következő állítások:

2.11. Tétel. Ha $f : H_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : H_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset H_1 \subset H_2 \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$ torlódási pontja A -nak továbbá

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} g(x) = c, \quad (b, c \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} (f(x) + g(x)) = b + c, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c,$$

és ha $x \in A$ esetén $g(x) \neq 0$, $c \neq 0$, akkor

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} . *$$

2.12. MEGJEGYZÉS. Ugyancsak a számsorozatokról mondottakra támaszkodva megfogalmazhatók olyan tételek is, amelyek $f+g$, $f \cdot g$ ill. $\frac{f}{g}$ határértékét olyan esetekben adják meg, amikor f ill. g határértéke $+\infty$ ill. $-\infty$.

Ugyancsak pontsorozatok, ill. számsorozatok határértékének fogalmára, valamint a 2.5. megjegyzésre és a 2.7. tételre hivatkozva igazolható az összetett leképezés határértékéről szóló alábbi tétel.

2.13. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $f(H) \subset K \subset \mathbb{R}^p$, $A \subset H \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$ torlódási pontja A -nak, $h = (g \circ f) : H \rightarrow \mathbb{R}$.

Ha $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b \notin f(A)$ alkalmas $\delta > 0$ -ra $K(b, \delta) \subset K$ és

$\lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \in f(A)}} g(y) = c$ / $c \in \mathbb{R}$, de $+\infty$ vagy $-\infty$ is lehet/, akkor

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} h(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} (g \circ f)(x) = c.$ *

2.14. Feladatok.

- Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, $H = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$
 $[(x,y) \in H]$, $A = \{(x,y) : y = 2x \ (x \in \mathbb{R})\} \cap H$. Mutassuk meg, hogy $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} f(x,y)$ létezik és véges, ugyanakkor $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0)}} f(x,y)$ nem létezik.
- Fogalmazzuk meg részletesen a 2.12. megjegyzés állításait.
- Bizonyítsuk be, hogy $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset B \subset H \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$ torlódási pontja A-nak és $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in B}} f(x) = b$ akkor egyszersmind $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$, fordítva azonban az utóbbi határérték létezéséből nem következik a $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in B}} f(x)$ határérték létezése. Adjunk példát az utóbbi állítás igazolására.
- Adjunk példát arra, hogy a 2.13. tétel jelöléseivel az állítás nem feltétlenül igaz, ha elejtjük a $b \notin f(A)$ kikötést.

3. m-VÁLTOZÓS FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA

3.1. A folytonosság fogalmával a valós egyváltozós függvények analizisében már foglalkoztunk. Most is, tehát tetszőleges m -változós $f: H \rightarrow R$ ($H \subset R^m$) függvény esetében, f -nek azt a tulajdonságát kívánjuk jellemezni, amely biztosítja, hogy az $a = (a_1, \dots, a_m) \in H \subset D_f$ ponthoz "közeli" $x = (x_1, \dots, x_m) \in H \subset D_f$ pontokban felvett $f(x)$ függvényértékek "tetszőleges pontossággal" megközelítik az $f(a)$ függvényértéket. Ha f ilyen tulajdonsággal rendelkezik, akkor az f függvényt az $a = (a_1, \dots, a_m) \in H \subset D_f$ pontban most is folytonosnak mondjuk.

Az egyváltozós függvények folytonosságánál előadódottak olyan speciális esetek is, amikor $f: A \rightarrow B$ ($A, B \subset R$), $a \in A$ mellett az a helynek nem tetszőleges, hanem pl. csak jobb vagy bal oldali elég kicsiny sugarú környezetébe eső x -ekre kívántuk, hogy $f(x)$ tetszőlegesen előírt kis hibával közelítse meg az $f(a)$ függvényértéket. Ez az eset adódik, ha az f függvényt csak valamilyen I intervallumban vizsgáljuk, és ezen I intervallum végpontjaiban szeretnénk tudni, hogy az intervallumra szorítkozva folytonos-e a függvény. Célszerű ezért az m -változós f függvény adott pontbeli folytonosságát olyan általános formában definiálni, hogy ez az értelmezés speciális esetként ne csak az egyváltozós függvény adott pontbeli folytonosságát, hanem az ottani bal, ill. jobb oldali folytonosságot is megadja.

3.2. DEFINÍCIÓ. Legyen $f: H \rightarrow R$ ($H \subset R^m$) és $a \in A \subset H$. Azt mondjuk, hogy f A -ra szorítkozva folytonos az $a \in A$ pontban, ha $f(a)$ -nak minden $K[f(a), \varepsilon]$ környezetéhez megadható a -nak olyan $K(a, \delta)$ környezete, hogy $x \in A \cap K(a, \delta)$ esetén $f(x) \in K[f(a), \varepsilon]$.

Másképp kifejezve magunkat, a definíció értelmében f az $a \in A \subset \mathbb{R}^m$ pontban A -ra szorítkozva folytonos, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $x \in A$ és $d(a, x) < \delta$ /azaz $|a - x| < \delta$ / esetén $d[f(a), f(x)] < \varepsilon$ /azaz $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ /.

3.3. MEGJEGYZÉS. Ha a 3.2. definícióban $a \in \text{int } A$ / $\forall$ elég kicsi $\delta > 0$ -ra $K(a, \delta) \subset A$ / akkor azt mondjuk, hogy /az ottani jelölésekkel/ f a -ban folytonos. Pl.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2, & \text{ha } (x_1, x_2) \in A = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \\ 0 & \text{ha } (x_1, x_2) \in B = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 > 1\} \end{cases} \quad \text{esetén } f$$

$(0, 0)$ -ban folytonos, $(1, 0)$ -ban A -ra szorítkozva folytonos.

3.4. MEGJEGYZÉS. m -változós függvény helyett általánosabban az $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$ leképezésre ($A \subset \mathbb{R}^m$) teljesen hasonló módon értelmezhető az f leképezés $a \in A$ pontban A -ra szorítkozva vett folytonossága, csupán ekkor a $K[f(a), \varepsilon]$ környezetek nem intervallumok, hanem ún. " p -dimenziós, $f(a)$ középpontú gömbök" lesznek /lásd I.2.7./

A határérték és a folytonosság kapcsolatáról mármost a következőt állíthatjuk:

3.5. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A \subset \mathbb{R}^m$. f akkor és csak akkor folytonos A -ra szorítkozva az a pontban, ha vagy izolált pontja $a \in A$ az A halmaznak, vagy torlódási pontja A -nak és $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$. *

Általánosabban, folytonos leképezésekre, hasonló állítás igaz.

A 3.5. tételből, a határértékszámításnál elmondottak értelmében közvetlenül adódik a következő állítás:

3.6. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow R$, $a \in A \subset H \subset R^m$. f akkor és csak akkor folytonos A -ra szorítkozva az $a \in A$ pontban, ha minden olyan (x_n) sorozatra, amelyre $x_n \in A$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ fennáll $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Bizonyítás. Ha $a \in A$ torlódási pontja A -nak, az állítás 3.5.-ből és 2.7.-ből következik. Ha $a \in A$ izolált pontja A -nak akkor és csak akkor kapunk a -hoz tartó (x_n) sorozatot; ha $x_n = a$ minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ -ra. Ezekre az n -ekre az n $f(x_n) = f(a)$, vagyis a megfelelő függvényértékek sorozata, $(f(x_n))$, triviálisan $f(a)$ -hoz tart. /Ezért nem voltak a 3.6. és 2.7.-beli állítások (x_n) sorozatra tett feltételei teljesen megegyezők; most az A halmaznak esetleges izolált pontjára gondolva, mellőznünk kellett az $x_n \neq a$ kikötést./ *

Megint az egyváltozós függvények nyílt, ill. zárt intervallumokban értelmezett folytonosságára gondolva tetszőleges m -változós függvénynek valamely A halmazon vett folytonosságát így értelmezhetjük:

3.7. DEFINÍCIÓ. Legyen $f : H \rightarrow R$, $A \subset H \subset R^m$. Azt mondjuk, hogy f folytonos az A halmazon, ha minden $a \in A$ pontban A -ra szorítkozva folytonos.

Hasonló állítás mondható ki függvények helyett általánosabban leképezésekre is.

Többváltozós függvények esetében is célszerű bonyolultabb függvények folytonossági vizsgálatát egyszerűbb függvények folytonossági vizsgálatára visszavezetni. Az egyváltozós esethez hasonlóan kimondható és könnyen igazolható az erre utaló alábbi tétel:

3.8. Tétel. Legyen $f : H_1 \rightarrow R$, $g : H_2 \rightarrow R$, $a \in A \subset H_1 \cap H_2 \subset R^m$. Ha f és g folytonos $a \in A$ -ban A -ra szorítkozva, akkor

ugyanaz áll az $f+g$, az $f \cdot g$, sőt ha $x \in A$ esetén $g(x) \neq 0$, akkor még az $\frac{f}{g}$ függvényre is. *

3.9. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : K \rightarrow \mathbb{R}^q$, $f(H) \subset K \in \mathbb{R}^p$, $a \in A \subset H \subset \mathbb{R}^m$. Ha f az $a \in A$ pontban A -ra szorítkozva, g pedig az $f(a)$ pontban $f(A)$ -ra szorítkozva folytonos, akkor a $h = g \circ f$ összetett leképezés a -ban A -ra szorítkozva folytonos.

Bizonyítás. Ha $x_n \in A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, akkor $f(x_n) \in f(A)$, f feltételezett folytonossága miatt $f(x_n) \rightarrow f(a)$ ($n \rightarrow \infty$), vagyis g $f(a)$ -beli folytonossága miatt

$$h(x_n) = g[f(x_n)] \rightarrow g[f(a)] = h(a) \quad \text{ha } n \rightarrow \infty. \quad *$$

3.10. MEGJEGYZÉS. Az előbbi két tétel segítségével győződhetünk meg általában a képlettel megadható többváltozós függvények értelmezési tartományukbeli folytonosságáról. Kiindulva az

$$(*) \quad f(x) = c \quad (\text{állandó})$$

és az

$$(**) \quad f(x_1, \dots, x_m) = x_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

alakú $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek a 3.7. definíció értelmében $\mathbb{R}^m$ -ben vett folytonosságából, azonnal következik pl. hogy az m -változós racionális egész függvények / m -változós polinomok, ezek a (*) és (**) típusú függvényekből véges számú összeadással és szorzással állnak elő/ $\mathbb{R}^m$ -ben folytonosak. Hasonlóképpen könnyen adódik, hogy a (*) és (**) alakú függvényekből véges sok összeadással, szorzással és osztással előálló ún. m -változós racionális függvények értelmezési tartományukban folytonosak.

3.9. alkalmazásával látható be pl., hogy rögzített $a \in \mathbb{R}^m$ esetén az $f(x) = d(x, a)$ ($x \in \mathbb{R}^m$) képlettel értelmezett függvény /távolság/ folytonos $\mathbb{R}^m$ -ben.

3.11. A zárt intervallumon folytonos valós egyváltozós függvények alaptulajdonságait néhány nevezetes, fontos, jól felhasználható tételben foglaltuk össze. Ezek részben a $H \subset \mathbb{R}^m$ korlátos zárt halmazon folytonos $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ m-változós függvényekre, részben az $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$ ugyanitt folytonos leképezésekre is általánosíthatók.

A Bolzano-tétel értelmében az $I = [a, b]$ -ben folytonos $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ valós egyváltozós függvény I-ben minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket felvesz. Ez a tétel már $\mathbb{R}$ -nek tetszőleges korlátos, zárt H részhalmazán folytonos $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}$) függvény esetében értelmét veszti, m-változós függvényekre, leképezésekre ebben a formában nyilván nem általánosítható. /Erre a fejezet végén még visszatérünk./

Weierstrass tétele értelmében az $I = [a, b]$ -ben folytonos $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felveszi I-ben legnagyobb ill. legkisebb értékét, másképp fogalmazva állításunkat, van $f(I)$ -nek legnagyobb és legkisebb eleme. Az állítás a folytonos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ való korlátosságából következett, amely tényt külön tételben is megfogalmaztuk. Ez a tulajdonság tetszőleges m-változós leképezésre is általánosítható, igaz ugyanis a következő állítás:

3.12. Tétel. Ha $H \subset \mathbb{R}^m$ korlátos zárt halmaz, $H \subset K$ és $f : K \rightarrow \mathbb{R}^p$ H-n folytonos leképezés, akkor az $f(H) \subset \mathbb{R}^p$ halmaz korlátos és zárt /f tehát korlátos K-n/.

Bizonyítás. $p = 1$ /azaz m-változós valós függvény esetében/ az állítást indirekt uton bizonyítjuk.

Ha az $f(H)$ számhalmaz nem volna korlátos, akkor volnának olyan $x_n \in H$ pontok, hogy $f(x_n) > n$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re. A H-beli, azaz korlátos (x_n) sorozatnak a Bolzano-Weierstrass-

tétel /I.4.7./ értelmében van konvergens (x_{n_k}) részsorozata, jelöljük ennek határértékét x -szel $(x_{n_k} \rightarrow x)$. H zárt-sága miatt $x \in H$ /I.5.9.3°/ és 3.6 értelmében $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ ami ellentmond az $f(x_{n_k}) > n_k$ $n_k \in \mathbb{N}$, azaz $|f(x_{n_k})| \rightarrow +\infty$ fel-tételnek.

Az általános esetben, ha $a \in \mathbb{R}^p$ rögzített, és $g(x) = d[f(x), a](x \in H)$, akkor 3.10.-beli utalásunk ér-telmében $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos H -n, tételünk már bizonyí-tott része értelmében tehát korlátos is. Amennyiben $|g(x)| \leq M$, nyilván az $f(H)$ halmaz I.4.1.-ben értelme-zett átmérője $\delta(f(H)) \leq 2M$, $f(H)$ tehát korlátos halmaz. $f(H)$ zártságát mindjárt általánosságban az $f : K \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($H = \bar{H} \subset K$) folytonos leképezésre igazoljuk.

Be kell látnunk, hogy ha $a \in \mathbb{R}^p - f(H)$, akkor csak külső pontja lehet $f(H)$ -nak. Legyen ezért $a \in \mathbb{R}^p - f(H)$.

I.2.5.2° értelmében ekkor az előbb értelmezett $g(x) = d[f(x), a](x \in H)$ függvény H -n nem veheti fel a 0 ér-téket, $\frac{1}{g}$ is folytonos itt, és az előbb bizonyítottak értelmében korlátos H -n, azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$\frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad g(x) \geq \varepsilon,$$

amiből következik, hogy a ezen ε -sugarú környezete nem metszheti $f(H)$ -t; $K(a, \varepsilon) \cap f(H) = \emptyset$, a valóban külső pont-ja $f(H)$ -nak. *

Weierstrass tételének állítása tetszőleges m -változós függ-vényre ezek után könnyen átvihető /mivel $\mathbb{R}^p$ -ben nincs ren-dezés értelmezve, p -változós leképezésekre a tétel nem ál-talánosítható/.

3.13. Tétel. /Weierstrass tétele/

Ha $H \subset \mathbb{R}^m$ korlátos, zárt halmaz, $H \subset K$ és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folyto-nos H -n, akkor $f(H)$ -nak van legkisebb és legnagyobb eleme.

Bizonyítás. 3.12. értelmében $f(H)$ korlátos, zárt halmaz, $f(H) \neq \emptyset$, van tehát alsó ill. felső határa /Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása I.5.15/, amely $f(H)$ zártsága miatt egyszersmind eleme $f(H)$ -nak. *

További nevezetes tulajdonsága volt a zárt intervallumon folytonos egyváltozós függvényeknek az egyenletes folytonosság ténye. Értelmezzük ezért előshör általánosságban leképezésekre az értelmezési tartományba eső halmazon való egyenletes folytonosság fogalmát.

3.14. DEFINÍCIÓ. Legyen $A \subset \mathbb{R}^m$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$. Az f leképezés egyenletesen folytonos az A halmazon, ha minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $d[f(x), f(y)] < \epsilon$, amennyiben $d(x, y) < \delta$.

Speciálisan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos $A \subset \mathbb{R}^m$ esetén az A halmazon, ha minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, amennyiben $d(x, y) < \delta$.

Például az $f(x) = d(x, a)$ ($a \in \mathbb{R}^m$) függvény $\mathbb{R}^m$ -ben egyenletesen folytonos. Ennek bizonyítását feladatként tűzzük ki.

Általánosságban most is érvényes a következő állítás:

3.15. Tétel. Ha $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ egyenletesen folytonos az $A \subset \mathbb{R}^m$ halmazon, akkor folytonos is A -n.

A tétel megfordítása - az egyváltozós függvényeknél ismeretett példára hivatkozva - könnyen látható, hogy nem igaz.

Az egyváltozós függvényekhez hasonlóan igaz ellenben a következő általánosabb állítás:

3.16. Tétel. Ha $H \subset \mathbb{R}^m$, H korlátos, zárt és $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$ folytonos H -n, akkor f egyenletesen folytonos H -n.

Bizonyítás. Az egyváltozós függvények speciális eseténél követett módon most is indirekten okoskodunk. Tegyük fel, hogy valamely $\varepsilon > 0$ -hoz nem található a 3.14. definíció most H -ra vonatkozó feltételének megfelelő $\delta > 0$. Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz található olyan két $x_n, y_n \in H$ pont, amelyre $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, de ugyanakkor $d[f(x_n), f(y_n)] \geq \varepsilon$.

Az (x_n) pontsorozat korlátos, I.4.7. értelmében van tehát konvergens (x_{n_k}) részsorozata. Jelöljük ennek

limeszét x -szel. H zártsága miatt $\lim x_{n_k} = x \in H$

/I.5.9.3°/; és a háromszög-egyenlőtlenség értelmében

/I.2.5.4°/ $0 \leq d(y_{n_k}, x) \leq d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x)$, itt

pedig az előbbiek értelmében mindkét tag 0-hoz tart,

amiből I.2.5.2° értelmében $y_{n_k} \rightarrow x$ következik, és így

f folytonossága miatt $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$, $f(y_{n_k}) \rightarrow f(x)$.

Ekkor azonban $d[f(x_{n_k}), f(y_{n_k})] \leq d[f(x_{n_k}), f(x)] +$

$+ d[f(x), f(y_{n_k})] \rightarrow 0$, ami ellenmond a tetszőleges $n_k \in \mathbb{N}$ -

re tett $d[f(x_{n_k}), f(y_{n_k})] \geq \varepsilon$ feltételnek. *

A Bolzano-tétel általánosítása érdekében először a

síkgörbe definíciójánál már említett /Valós egyválto-

zós függvények differenciálszámítása III.1.6./ álta-

lánosabb értelmezést kell megadnunk.

3.17. DEFINÍCIÓ. $\mathbb{R}^m$ -beli folytonos görbének nevezzük a számegegyenes valamely zárt $I = [\alpha, \beta]$ intervallumának $\mathbb{R}^m$ -be vezető $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ folytonos leképezését. A $C = \varphi(I) = \varphi([\alpha, \beta]) \in \mathbb{R}^m$ halmaz elemeit a görbe pontjainak, speciálisan $\varphi(\alpha)$ -t kezdőpontjának, $\varphi(\beta)$ -t végpontjának nevezzük.

3.18. Az előbbi pontos értelmezés helyett sokszor - tulajdonképpen pontatlanul - a következő szóhasználattal élünk:

A 3.17-ben értelmezett C halmaz a görbe /pontosan: a görbe pontjaiból álló halmaz C ;

a $C \subset H$ reláció azt fejezi ki, hogy a C görbe a H halmazban fekszik /pontosan: a görbe pontjai H -ban fekszenek/;

minden folytonos görbe korlátos és zárt /pontosan: folytonos görbe pontjainak halmaza korlátos és zárt; ez 3.12. és 3.17. következménye/.

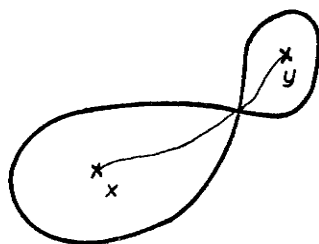
3.19. MEGJEGYZÉS. A 3.17. definíció értelmében minden szakasz $\mathbb{R}^m$ -ben /értelmezést lásd I.2.10. ill. 11/ folytonos görbe.

Bolzano tétele mármost így általánosítható:

3.20. Tétel. Legyen $A \subset \mathbb{R}^m$, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ pedig olyan folytonos görbe, amelyre $\varphi(\alpha) \in A$, $\varphi(\beta) \in A$. Ekkor a görbének van A határával közös pontja.

Szemléletesen kifejezve magunkat a tétel állítása értelmében a halmaz egy pontjából egy, a halmazon kívüli pontba, folytonos görbe mentén csak úgy juthatunk el, hogy közben átlépjük a halmaz határát /I.5.13./. A tétel tehát szemléletesen indokolja a halmaz határpontja, ill. halmaz határa elnevezést.

$m=1$ esetben $A = (-\infty, c)$ vagy $A = (c, +\infty)$ választással az egyváltozós függvényekre vonatkozó Bolzano-tételre jutunk. /Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása, III.3.22./ A tétel bizonyítását általánosságban feladatként tűzzük ki. *



15. ábra

3.21. MEGJEGYZÉS. A Bolzano-tétel másképp is általánosítható. Ennek érdekében vezessük be a következő elnevezést:

A B halmaz ivszerűen összefüggő, ha tetszőleges $x \in B$, $y \in B$ pontjára az egyik pontból a másikba egy B -beli

/B pontjaiból áll/ folytonos görbén eljuthatunk. /15. ábra/.

Ha most B ívszerűen összefüggő halmaz, az f függvény folytonos B -n, $a, b \in B$, és $f(a) < c < f(b)$, akkor van olyan $x \in B$, hogy $f(x) = c$.

Ennek belátására egy a -ból b -be vezető B -beli folytonos $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow B$ görbét veszünk, és $f \circ \varphi$ -re alkalmazzuk az egyváltozós Bolzano-tételt.

3.22. Feladatok.

1. Vizsgáljuk meg az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^\alpha}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény $(0,0)$ pontbeli folytonosságát, ill. külön-külön az egyes változókbeli folytonosságát, $\alpha = 1$ és $\alpha = 2$ esetén.

2. Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \geq 1, \\ c, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Folytonos-e ez a függvény $(0,0)$ -ban?

3. Legyen $f: H \rightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in A \subset H \subset \mathbb{R}^m$ és $x \in H$ -ra $f(x) = [f_1(x), \dots, f_p(x)]$.

Bizonyítsuk be, hogy f akkor és csak akkor folytonos A -ra szorítkozva az $a \in A$ pontban, ha ugyanez áll mind-egyik f_k függvényre ($k=1, \dots, p$) /lásd 3.4. és 1.10./

4. Igazoljuk, hogy ha $f: H \rightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in A \subset B \subset H \subset \mathbb{R}^m$ és f az a pontban B -re szorítkozva folytonos, akkor ugyanitt A -ra szorítkozva is folytonos.

5. Bizonyítsuk be a 3.20. tételt.
6. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^m$, és $x \in \mathbb{R}^m$ esetén
- $$d(x, A) = \inf \{d(x, z) : z \in A\}$$
- /az x pontnak az A halmaztól való távolsága/. Ez $\mathbb{R}^m$ -en folytonos, sőt egyenletesen folytonos.
7. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $\mathbb{R}^m$ -en, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ -re az
- $$\{x \in \mathbb{R}^m : f(x) > c\} \quad \text{és} \quad \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) < c\}$$
- halmazok nyíltak, az
- $$\{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \leq c\} \quad \text{és} \quad \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \geq c\}$$
- halmazok zártak. /E halmazokat f nivóhalmazainak is szokás nevezni./
8. Milyen értelemben fordítható meg a 7. feladat állítása?
9. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = d(x, a)$ ($a \in \mathbb{R}^m$) függvény $\mathbb{R}^m$ -ben egyenletesen folytonos.
10. Bizonyítsuk be a 3.16. tételt a Borel-féle befedési tétel /I.5.20./ alkalmazásával.

III. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA

1. PARCIÁLIS DERIVÁLTAK

Az egyváltozós függvények differenciálhányadosának fogalmát változatlan formában többváltozós függvényekre nem lehet átvinni. A különbségi hányadost /differenciahányadost/ ugyanis úgy képeztük, hogy a független változó megváltozásához tartozó függvénymegváltozást osztottuk a független változó megváltozásával, utóbbi pedig $f : H \rightarrow R$ ($H \subset R^m$, $m > 1$) esetén értelmetlen, hiszen R^m pontjainak különbségét nem értelmeztük. Nem segít ezen az sem, ha I.2.10.-ben tett megjegyzésünk szerint R^m pontjainak "m-dimenziós vektorokat" feleltetünk meg kölcsönösen egyértelműen, ezek között vektorműveleteket értelmezzünk, mert ekkor az R^m -beli pontok különbségének a megfelelő vektorok különbsége felel meg, viszont a vektorral osztani nem tudunk a különbségi hányados nem képezhető.

Hasznosítani tudjuk azonban többváltozós függvények elméletében az egyváltozós függvények analízisében megismert fogalmakat, tételeket, ha a többváltozós függvényeket abban a speciális esetben vizsgáljuk, amikor változói egy kivételével rögzítettek /állandók/. Gyakran előfordul pl. hogy az R ellenállása vezetőben U feszültségű áram t idő alatt végzett munkáját szolgáltató

$$W = \frac{U^2}{R} t$$

összefüggést olyan feladatok megoldásánál használjuk, ahol pl. rögzített ellenállás és idő mellett szolgáltatja azt

az eredményt, hogy a munka a feszültség négyzetével egyenesen arányos, ill. rögzített ellenállás és feszültség mellett a munka a munkavégzés idejével egyenesen arányos, ill. rögzített feszültség és idő mellett a munka az ellenállással fordítottan arányos. E példában követett gondolatmenet lényege az, hogy az $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $H \subset \mathbb{R}^m$ függvény $a = (a_1, \dots, a_m)$ pontbeli viselkedése helyett az egyváltozós

$$(*) \quad f_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m) \\ (i = 1, \dots, m)$$

függvényeket vizsgáljuk az $x_i = a_i$ helyen /itt $a_1, \dots, a_m$ rögzített zámok/, és az így kapott egyváltozós függvény viselkedéséből próbálunk az m -változós f függvény viselkedésére következtetni.

A (*) függvények differenciálhatósága esetén jutunk például a következő fogalomhoz:

1.1. DEFINÍCIÓ. Legyen $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ m -változós függvény ($H \subset \mathbb{R}^m$). Az f függvény az $a = (a_1, \dots, a_m) \in \text{int } H$ pontban x_i szerint parciálisan differenciálható, ha az

$$f_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

függvény az $x_i = a_i$ helyen differenciálható. Az

$$f'_i(a_i) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f_i(x_i) - f_i(a_i)}{x_i - a_i}$$

deriváltat az f függvény x_i szerinti parciális differenciálhányadosának /röviden parciális deriváltjának/ nevezzük és így jelöljük

$$f'_i(a_i) = f'_{x_i}(a) = f_{x_i}(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x=a} = \left(\partial_{x_i} f \right)_{x=a}.$$

/Mivel a parciális derivált jelölésénél az indexként irt x_i ugyis utal már arra, hogy parciális deriváltról van szó, az egyváltozós esetben szokásos vessző a jelölésből elhagyható; amennyiben az egyváltozós $\frac{df}{dx}$ "tört alakú" jelölést kívánjuk alkalmazni, a "d" betű helyett a külön e célra bevezetett "∂" jellel utalunk arra, hogy parciális deriváltat kívánunk jelölni:

$$\left(\frac{d f_i(x_i)}{dx_i} \right)_{x_i=a_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x=a}$$

(itt $x = (x_1, \dots, x_m) = (a_1, \dots, a_m) = a$).

1.2. DEFINÍCIÓ. 1.1. jelöléseivel f x_i szerint parciálisan differenciálható /parciálisan deriválható/ az $A \subset \text{int } H$ halmazon, ha minden $a \in A$ pontban x_i szerint parciálisan differenciálható.

1.3. DEFINÍCIÓ. Ha $f : H \rightarrow R$ ($H \subset R^m$), akkor az f függvény x_i szerinti parciális deriváltfüggvénye azaz $f_{x_i} : H_i \rightarrow R$ függvény, melynek értelmezési tartománya, H_i , azoknak az $x = (x_1, \dots, x_m) \in \text{int } H$ pontoknak a halmaza amelyekben f x_i szerint parciálisan differenciálható és értéke az $x = (x_1, \dots, x_m) \in H_i$ helyen

$$f_{x_i}(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x_1, \dots, x_m)$$

1.4. MEGJEGYZÉS. Ha f a vizsgált helyen mindegyik változója szerint parciálisan differenciálható, akkor annyi parciális deriváltjáról beszélhetünk, ahány változós függvény f . Ezek kiszámításánál alkalmazhatjuk az egyváltozós függvények differenciálási szabályait /a parciális derivált definíciója értelmében/, vigyázva arra, hogy pl. f_{x_i} kiszá-

mitásakor csak az x_i változót tekintjük változónak a többi x_j -t ($j \neq i$) pedig állandónak tekintjük. Pl.

$$f(x,y,z) = 3xy - y^2z + \frac{z}{x}$$

esetén

$$f_x = 3y - \frac{z}{x^2}, \quad f_y = 3x - 2yz, \quad f_z = -y^2 + \frac{1}{x},$$

bármely $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$ helyen.

Ezek a parciális deriváltfüggvények /röviden parciális deriváltak/ változóik szerint ismét parciálisan differenciálható többváltozós függvények, parciális deriváltjaikat értelemszerűen az eredeti f függvény másodrendű parciális deriváltjainak nevezzük. Általánosságban megfogalmazva ezt, a következőt mondhatjuk:

1.5. DEFINÍCIÓ. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) és az f_{x_i} parciális deriváltfüggvény értelmezési tartománya $H_i \subset \text{int } H$. Ha $a = (a_1, \dots, a_m) \in \text{int } H_i$ és f_{x_i} az $a \in \text{int } H_i$ pontban x_j szerint parciálisan differenciálható, akkor f_{x_i} -nek x_j szerinti parciális deriváltját e pontban így jelöljük:

$$f_{x_i x_j}(a) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_{x=a} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right]_{x=a}$$

Ezeket az f függvény másodrendű parciális deriváltjainak nevezzük.

/A másodiknak, ill. harmadiknak bevezetett jelölés ugy áll elő, hogy az

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

függvény x_j változója szerinti parciális deriválását az

az eléje irt $\frac{\partial}{\partial x_j}$ szimbolummal, a parciális deriválás műveleti jelével juttatjuk kifejezésre, és így keletkező $\frac{\partial \partial f}{\partial x_j \partial x_i}$ kifejezésben az egymás mellé kerül ∂ jeleket formálisan ∂^2 -tel helyettesítjük. Hasonló módon indokolható az

$$f_{x_i x_i}(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x=a} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)_{x=a} \text{ jelölés. /}$$

1.6. Felvethető a kérdés, hogy lényeges-e a parciális deriválások sorrendje /ez az indexes jelölésmód esetén balról jobbra, a tört alaku jelölésmódnál jobbról balra haladt/? Ennek a kérdésnek vizsgálatára 5.7.-ben még visszatérünk.

Altalában kimondható, hogy egy m -változós függvénynek m^2 másodrendű parciális deriváltja lehet /olyan helyen, ahol mindegyik létezik/, ezek közül az

$$f_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

alakukat tiszta másodrendű parciális deriváltaknak, az

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

alakukat ($i \neq j$) vegyes másodrendű parciális deriváltaknak nevezzük. Utóbbiak között sokszor megegyezők vannak /az egymástól csupán a deriválás sorrendjében eltérő parciális deriváltak sokszor megegyeznek/. Erre vonatkozó elégséges feltételt 5.7.-ben adunk majd meg. Pl.

$f(x,y,z) = 3xy - y^2z + \frac{z}{x}$ esetén bármely $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$ helyen

$$f_{xx} = \frac{2z}{x^3}, \quad f_{xy} = 3, \quad f_{xz} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$f_{yx} = 3, \quad f_{yy} = -2z, \quad f_{yz} = -2y,$$

$$f_{zx} = -\frac{1}{x^2}, \quad f_{zy} = -2y, \quad f_{zz} = 0.$$

1.7. MEGJEGYZÉS. Az előzők mintájára értelmezhetők egy m -változós függvény harmad-, negyed-, ..., n -edrendű parciális deriváltjai, és ezeket akár az indexes, akár a tört alakú jelöléssel jelölhetjük. Pl. az $f : H \rightarrow R$ ($H \subset R^5$) öt-változós függvény hatodrendű parciális deriváltja

$$f_{x_1 x_1 x_1 x_1 x_1 x_1} = \frac{\partial^6 f}{\partial x_1^6}, \quad f_{x_1 x_2 x_4 x_1 x_3 x_2}, \text{ stb.}$$

1.8. MEGJEGYZÉS. Egy többváltozós függvény és annak /esetleg magasabbrendű/ parciális deriváltjai között megadott összefüggést parciális differenciálegyenletnek nevezzük. Annak vizsgálatára, hogy mikor, milyen feltételek mellett oldható meg egy adott parciális differenciálegyenlet /adható meg az egyenletet kielégítő és a feltételeknek is megfelelő függvény/, mikor egyértelmű a megoldás, itt nem térhetünk ki. A legismertebb és legegyszerűbb parciális differenciálegyenleteknél azonban meggyőződhetünk arról /behelyettesítéssel/, hogy egy függvény valóban megoldása-e az egyenletnek.

Pl. a síkbeli Laplace-féle differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{egyik megoldása } f(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2} \\ [(x,y) \neq (0,0)].$$

Valóban $f(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$ tiszta másodrendű parciális deriváltjai, mivel

$$f_x = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f_y = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$f_{xx} = \frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

és hasonlóképp

$$f_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

ezek összege pedig valóban 0.

1.9. MEGJEGYZÉS. Ha egy egyváltozós függvény adott pontban differenciálható volt, akkor ebből következett adott pontbeli folytonossága is /Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása IV.1.8./. Egy többváltozós függvénynek azonban létezhetnek parciális deriváltjai anélkül, hogy folytonos volna. Pl. ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

akkor f -nek $\mathbb{R}^2$ -ben mindenütt léteznek parciális deriváltjai, $(0,0)$ -ban is

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0 = f_x(0,0),$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0-0}{k} = 0 = f_y(0,0),$$

ugyanakkor $f(0,0)$ -ban nem folytonos /II.3.21.1. feladat/. Ez a megjegyzés is rávilágít arra a tényre, hogy egy többváltozós függvény parciális deriváltjainak létezése /röviden a függvény parciális differenciálhatósága/ semmiképpen sem tekinthető a valós egyváltozós függvény differenciálhatóságát megfelelően általánosító fogalomnak. Ez a tény nem

meglepő, ha meggondoljuk, hogy egy függvény parciális differenciálhatósága $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^2$ ill. $H \subset \mathbb{R}^3$) esetén adott $a \in H$ pontban csak az f függvény $a \in H$ ponton áthaladó, a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesen felvett értékein múlik, a többi $x \in K(a, \epsilon) \cap H$ értékhez tartozó függvényértékre semmiféle megszorítást nem tartalmaz /analóg okoskodással élhetünk tetszőleges m -változós függvény esetében is/. A parciális differenciálhatóság helyett más, megfelelőbb általánosítást a következő pontban adunk meg.

1.10. Feladatok.

1. Igazoljuk, hogy a térbeli $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ Laplace-féle parciális differenciálegyenletet kielégíti az

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{/ill. } u = \frac{1}{|\underline{r}|} \text{ függvény}$$

$$[(x,y,z) \neq (0,0,0)].$$

2. $u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}$ $u(0,t) = u(d,t) = 0$ feltételt kielégítő megoldásai pl. az $u(x,t) = \sin \frac{k\pi}{d} x (a_k \cos \frac{k\pi}{d} t + b_k \sin \frac{k\pi}{d} t)$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots, a_k, b_k$ állandók) függvények. Igazoljuk állításunkat.

2. DIFFERENCIÁLHATÓSÁG (TOTÁLIS DIFFERENCIÁLHATÓSÁG)

2.1. Az egyváltozós függvény differenciálhatóságának megadtuk olyan szükséges és elégséges feltételét, amely azon a tényen alapult, hogy adott helyen differenciálható függvény ott jól megközelíthető lineáris függvénnyel. Pontosabban megfogalmazva a tételt /Valós egyváltozós függvények

differentiálszámítása IV. 1.6./ f az $a \in D_f$ helyen akkor és csak akkor differenciálható, ha

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x-a),$$

ahol A állandó x -től nem függ és $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow a$. Azt is beláttuk, hogy $A = f'(a)$.

Az itt idézett tétel így is megfogalmazható:

$f : H \rightarrow R$ ($H \subset D_f \subset R$) az $a \in \text{int } H$ helyen akkor és csak akkor differenciálható, ha található hozzá olyan lineáris $\ell(x) = Ax + B$ függvény, hogy $f(a) = \ell(a)$, azaz $f(a) = Aa + B$, $B = f(a) - Aa$, így $\ell(x) = f(a) + A(x-a)$, és $f(x)$ -nek $\ell(x)$ -től való eltérése: $f(x) - \ell(x) = r(x)$ az $x=a$ helyen még $(x-a)$ -val elosztva is 0-hoz tart /azaz $r(x) = \varepsilon(x)(x-a)$ alakban írható, ahol $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ /.
 $x \rightarrow a$

Tömörítve feltételeinket, olyan A szám létezését kívánjuk, amelyre $f(x) - \ell(x) = f(x) - f(a) - A(x-a) = r(x)$, illetve $f(x) - f(a) = A(x-a) + r(x)$, ahol $r(a) = 0$, és $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$.

Az utóbbi feltétel nyilván még $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{|x-a|} = 0$, ill. a távolság-fogalom felhasználásával $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{d(a,x)} = 0$ alakban is felírható.

Ebben a formában nem okoz már nehézséget a differenciálhatóság fogalmát többváltozós esetre általánosítani, azt kell csak még meggondolnunk, hogy az m -változós lineáris függvény általános alakja:

$$\ell(x) = \sum_{i=1}^m A_i x_i + B, \text{ ahol: } x = (x_1, \dots, x_m),$$

és az $a = (a_1, \dots, a_m)$ jelöléssel az $f(a) = \ell(a)$ kikötés most a

$$B = f(a) - \sum_{i=1}^m A_i a_i$$

képlethez vezet, vagyis az $f(a) = \ell(a)$ kikötésnek eleget tevő m -változós lineáris függvény

$$\ell(x) = f(a) + \sum_{i=1}^m A_i (x_i - a_i).$$

2.2. DEFINÍCIÓ. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$). Az f függvény az $a \in \text{int } H$ pontban totálisan differenciálható /röviden: differenciálható/, ha léteznek olyan $A_1, \dots, A_m$ számok, hogy

$$(*) \quad f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^m A_i (x_i - a_i) + r(x),$$

ahol $r(a) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{d(a, x)} = 0$.

(*) oszlop- és sorvektorok segítségével még a következő alakban is felírható:

$$(**) \quad f(x) - f(a) = (A_1 \dots A_m) \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_m - a_m \end{pmatrix} + r(x).$$

ahol $r(a) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{d(a, x)} = 0$.

2.3. DEFINÍCIÓ. A 2.2.-ben értelmezett f függvényt /totálisan/ differenciálhatónak mondjuk az $A \subset \text{int } H$ halmazon, ha minden $a \in A$ pontban /totálisan/ differenciálható.

A 2.2 definícióból közvetlenül leolvasható az alábbi állítás:

2.4. Tétel. Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) /totálisan/ differenciálható az $a \in \text{int } H$ pontban, akkor ott folytonos is. *

Egyváltozós esetben a differenciálható f függvényt megközelítő lineáris függvényben szereplő együttható épp f adott pontbeli differenciálhányadosa volt. m -változós függvény esetében a következő állítható:

2.5. Tétel. Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) /totálisan/ differenciálható az $a \in \text{int } H$ pontban, akkor itt mindegyik változója szerint parciálisan is differenciálható és a 2.2. definícióban szereplő A_i számokra $A_i = f_{x_i}(a)$ ($i=1, \dots, m$)

Bizonyítás. Ha $a = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$,
 $x = (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$, akkor $d(a, x) = |x_i - a_i|$,
 azaz a differenciálható f függvényre a 2.2. definíció értelmében az $a \in \text{int } H$ pont alkalmas $K(a, \delta)$ környezetébe eső x -ekre

$$\frac{f(x) - f(a)}{x_i - a_i} = A_i + \frac{r(x)}{x_i - a_i}$$

és mivel a differenciálhatóság következtében

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{d(a, x)} = 0, \text{ azaz } \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{r(x)}{|x_i - a_i|} = 0,$$

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(x) - f(a)}{x_i - a_i} = A_i$$

adódik, amint állítottuk /a baloldali határérték $f_{x_i}(a)/$. *

2.6. MEGJEGYZÉS. A 2.4. és 2.5. tétel mutatta, hogy az m -változós függvények 2.2.-ben definiált /totális/ differenciálhatósága valóban tekinthető az egyváltozós függvényeknél bevezetett megfelelő fogalom általánosításának. Ezért a "totális" jelzőt, amit eddig a parciális differenciálhatóság fogalmától való megkülönböztetésül használtunk, a továbbiakban elhagyjuk, differenciálható függvény

mindig a 2.2.-ill. 2.3.-ban értelmezett tulajdonságu függvényt jelent majd.

2.7. MEGJEGYZÉS. 2.5.-ből következik, hogy ha f az a pontban differenciálható /2.2. definíció, annak jelöléseivel/, akkor a definícióban szereplő A_i számok és az

$$r(x) = f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^m A_i(x_i - a_i)$$

függvény f által egyértelműen meg van határozva. Biztosan teljesül ez a feltétel, ha $x \in K(a, \delta)$ esetén $r(x)$ a következő alakban írható:

$$r(x) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i(x)(x_i - a_i), \text{ ahol } \lim_{x \rightarrow a} \epsilon_i(x) = 0$$

Ekkor ugyanis $|x_i - a_i| \leq d(a, x)$ miatt $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{d(a, x)} = 0$ biztosan teljesül. Az $\epsilon_i(x)$ függvények végtelen sokféleképpen választhatók meg, csak azt kötjük ki róluk, hogy $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon_i(x) = 0$ legyen!

Ezek után megadhatjuk az m -változós $f: H \rightarrow R$ ($H \subset R^m$) függvény $a \in \text{int } H$ pontbeli differenciálhatóságának egy szükséges és elégséges, de a gyakorlat szempontjából nem túl jól használható feltételét. /Jobban kezelhető feltételt a következő pontban adunk majd meg./

2.8. Tétel. $f : H \rightarrow R$ ($H \subset R^m$) az $a \in \text{int } H$ pontban akkor és csak akkor differenciálható, ha a -nak egy $K(a, \delta)$ környezetében léteznek olyan $\epsilon_i : K(a, \delta) \rightarrow R$ függvények, hogy itt

$$(*) \quad f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(a)(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^m \epsilon_i(x)(x_i - a_i)$$

és

$$\lim_{x \rightarrow a} \epsilon_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Bizonyítás. A feltétel elégséges /lásd 2.7./. A szükségesség igazolásához definiáljuk az $\epsilon_i(x)$ függvényt a következőképpen

$$\epsilon_i(x) = \begin{cases} \frac{r(x)(x_i - a_i)}{(d(a,x))^2}, & \text{ha } x \neq a, \\ 0, & \text{ha } x = a. \end{cases}$$

Nyilván ekkor, ha

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^m A_i(x_i - a_i) + r(x), \quad [A_i = f_{x_i}(a)],$$

és 2.2. feltételei teljesülnek,

$$\lim_{x \rightarrow a} \epsilon_i(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{r(x)}{d(a,x)} \frac{x_i - a_i}{d(a,x)} \right] = 0$$

/ui. $|x_i - a_i| \leq d(a,x)$, és 2.2. értelmében $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{d(a,x)} = 0$.*

2.9. MEGJEGYZÉS. 2.8.-ben is felhasználhatjuk a 2.2.-ben említett sor- és oszlopvektoros jelölést:

f akkor és csak akkor differenciálható az a pontban, ha itt minden változója szerint parciálisan differenciálható, és létezik olyan x -től függő $\underline{\epsilon}(x) = (\epsilon_1(x) \dots \epsilon_m(x))$ vektor hogy

$$f(x) - f(a) = (f_{x_1}(a) \dots f_{x_m}(a)) \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_m - a_m \end{pmatrix} + (\epsilon_1(x) \dots \epsilon_m(x)) \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_m - a_m \end{pmatrix} \quad \text{ahol } \lim_{x \rightarrow a} |\underline{\epsilon}(x)| = 0.$$

Az $(f_{x_1}(a) \dots f_{x_m}(a))$ vektort $[\text{grad } f]_{(a)}$ -val szokták jelölni.

2.10. Feladatok.

1. Vizsgáljuk meg, hogy $\mathbb{R}^2$ -en folytonos-e, parciálisan differenciálható-e, ill. differenciálható-e f , ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Igazoljuk, hogy ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$), és $a \in \text{int } H$ -ban f is, g is differenciálható, akkor ugyanitt $f+g$, $f-g$, cf ($c \in \mathbb{R}$) is differenciálható.
3. Mutassuk meg, hogy a gradiens homogén lineáris operátor.

3. FOLYTONOS DIFFERENCIÁLHATÓSÁG

Az előzőekben láttuk, hogy a differenciálhatóság erősebb kikötés a parciális differenciálhatóságnál, hiszen az utóbbiból a folytonosság sem következik, ami viszont a differenciálhatóságnak szükséges de nem elégséges feltétele. /A függvény folytonossága már egyváltozós függvények esetében sem volt elégséges feltétele a differenciálhatóságnak./ Bebizonyítjuk, hogy többváltozós függvényes esetében az összes parciális deriváltak folytonossága már elégséges feltétele a differenciálhatóságnak.

3.1. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$), $a \in \text{int } H$. Ha az f függvény alkalmas $\delta > 0$ -ra $K(a, \delta)$ -ban mindegyik változója szerint parciálisan differenciálható, és f_{x_i} az $a = (a_1, \dots, a_m)$ pontban folytonos ($i=1, \dots, m$), akkor itt f differenciálható.

Bizonyítás. Legyen $x \in K(a, \delta)$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1, \dots, x_m) - f(a_1, \dots, a_m) = \\ &= f(x_1, a_2, \dots, a_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m) + \\ &+ f(x_1, x_2, a_3, \dots, a_m) - f(x_1, a_2, \dots, a_m) + \dots + \\ &+ f(x_1, \dots, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, \dots, a_m) + \dots + \\ &+ f(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) - f(x_1, \dots, x_{m-1}, a_m), \end{aligned}$$

és itt két-két szomszédos tag éppen f egy-egy egyenes szakaszon /I.2.10/ vett megváltozását adja meg; e szakaszok mindegyikén csak egy változó változik, a többi rögzített, f tehát itt tulajdonképpen egyváltozós függvény, amelyre a Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva /a feltételek miatt ez lehetséges/

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f_{x_1}(a_1 + t_1(x_1 - a_1), a_2, \dots, a_m)(x_1 - a_1) + \\ &+ f_{x_2}(x_1, a_2 + t_2(x_2 - a_2), a_3, \dots, a_m)(x_2 - a_2) + \dots + \\ &+ f_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i + t_i(x_i - a_i), a_{i+1}, \dots, a_m)(x_i - a_i) + \\ &+ \dots + f_{x_m}(x_1, \dots, x_{m-1}, a_m + t_m(x_m - a_m))(x_m - a_m) \end{aligned}$$

($0 \leq t_i \leq 1$, $i = 1, \dots, m$) adódik. Mivel azonban az itt szereplő parciálisok mind beleesnek $K(a, \delta)$ -ba és a -ban feltételezetten folytonosak, mindegyik a megfelelő $(a_1, \dots, a_m)$ pontbeli parciális deriválttól tetszőlegesen kevés el, vagyis

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= (f_{x_1}(a) + \varepsilon_1)(x_1 - a_1) + (f_{x_2}(a) + \varepsilon_2)(x_2 - a_2) + \\ &+ \dots + (f_{x_m}(a) + \varepsilon_m)(x_m - a_m) = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(a)(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i(x_i - a_i). \end{aligned}$$

és itt $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon_i(x) = 0$, a 2.8. megjegyzés értelmében tehát f valóban differenciálható az $a \in \text{int } H$ helyen. *

3.2. MEGJEGYZÉS. A 3.1. tétel feltételeinek eleget tevő f függvényt szokás az $x=a$ pontban folytonosan differenciálható függvénynek nevezni. Ha f egy nyílt $B \subset H$ halmaz minden pontjában folytonosan differenciálható, akkor a B halmazon folytonosan differenciálhatónak mondjuk.

Ebből a megjegyzésből 3.1.-re való tekintettel adódik mármint a következő állítás:

3.3. Tétel. Ha $f : H \rightarrow R$ és a nyílt $B \subset H$ halmaz minden pontjában f mindegyik parciális deriváltja folytonos, akkor f a B halmazon differenciálható. *

3.4. MEGJEGYZÉS. Általában a 3.1. tételt alkalmazva állapítjuk meg egy többváltozós függvényről annak differenciálhatóságát. Pl. az elemi függvényekből felépített többváltozós függvényeknél azok parciális deriváltjai is elemi függvényekből épülnek fel, folytonosságuk II.3.8. és II.3.9. alapján igazolható.

Hangsúlyozni szeretnénk, hogy a folytonos differenciálhatóság a differenciálhatóságnak elégséges, de nem szükséges feltétele. Erre világít rá a 3.6.1. feladat.

Tovább általánosítva a differenciálhatóság fogalmát a következőt mondhatjuk:

3.5. DEFINÍCIÓ. Legyen $f : H \rightarrow R^p$ ($H \subset R^m$). $a \in \text{int } H$, és $x \in H$ esetén $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$. Ekkor az f leképezés az $a \in \text{int } H$ pontban differenciálható, ha itt az f_k ($k=1, \dots, p$) függvények mindegyike differenciálható.

Az f leképezés differenciálhatóságából következik annak folytonossága, továbbá, hogy a

$$\left[\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right]_{x=a}$$

parciális deriváltak léteznek ($k=1, \dots, p$), belőlük az

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m} \end{bmatrix}_{x=a} = \underline{D}(a)$$

un. Jacobi-féle mátrix képezhető.

3.6. MEGJEGYZÉS. A többváltozós függvényekhez hasonlóan egy többváltozós leképezést egy nyílt halmazon differenciálhatónak mondunk, ha annak minden pontjában differenciálható, és ez biztosan teljesül, ha a Jacobi-féle mátrix elemei a nyílt halmazon folytonosak.

3.7. Feladatok.

1. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény mindenütt differenciálható, de a $(0,0)$ pontban nem folytonosan differenciálható.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$), és $f \in K(a, \delta)CH$ -ben parciálisan differenciálható $x_2, \dots, x_m$ szerint, az a pontban $f_{x_2}, \dots, f_{x_m}$ folytonos, továbbá f itt még x_1 szerint is parciálisan differenciálható, akkor f az a pontban differenciálható.

4. TÖBBVÁLTOZÓS ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA (LÁNCZABÁLY)

Az előző pontokban értelmeztük többváltozós függvények és általában többváltozós leképezések differenciálhatóságát /2.8. és 3.5./. Ezekre támaszkodva felvethetjük most már a kérdést, mikor differenciálható egy összetett többváltozós függvény, hogyan határozhatók meg parciális deriváltjai. Egyváltozós függvények esetében a hasonló jellegű probléma az ún. láncszabályhoz vezetett, kérdés, milyen alakban vihető át ez a szabály többváltozós függvényekre.

4.1. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) $a \in \text{int } H$ -ban differenciálható leképezés, $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ [$f(H) \subset K \subset \mathbb{R}^p$] pedig $b = f(a) \in \text{int } K$ -ban differenciálható függvény. Ekkor az összetett $h = g \circ f$ függvény is differenciálható $a \in \text{int } H$ -ban, és az

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_m), & a &= (a_1, \dots, a_m), \\ f &= (f_1, \dots, f_p), & f(x) &= y, \quad f(a) = b, \\ f_k(x) &= y_k, \quad f_k(a) = b_k, & \frac{\partial f_k}{\partial x_i} &= f_{kx_i} \quad (k=1, \dots, p; i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

jelölésekkel

$$h_{x_i}(a) = \sum_{k=1}^p g_{y_k}(b) \cdot f_{kx_i}(a),$$

ill. más jelöléssel:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial h}{\partial x_i} \right]_{x=a} &= \left[\frac{\partial g(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_p(x_1, \dots, x_m))}{\partial x_i} \right]_{x=a} = \\ &= \sum_{k=1}^p \left[\frac{\partial g}{\partial y_k} \right]_{y=f(a)=b} \cdot \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right]_{x=a}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A 2.8. megjegyzés értelmében azt kell megmutatnunk, hogy a -nak egy $K(a, \delta)$ környezetében h parciálisan differenciálható, és e környezetben léteznek olyan $\varepsilon_i : K(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, hogy itt

$$h(x) - h(a) = \sum_{i=1}^m h_{x_i}(a)(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i(x)(x_i - a_i)$$

és

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_i(x) = 0 \quad (i=1, \dots, m).$$

Mivel

$$h(x) - h(a) = g(f(x)) - g(f(a)) = g(y) - g(b),$$

és g differenciálható b -ben, 2.8. értelmében

$$\begin{aligned} g(y) - g(b) &= \sum_{k=1}^p g_{y_k}(b)(y_k - b_k) + \sum_{k=1}^p \eta_k(y_k - b_k) = \\ (*) \quad &= \sum_{k=1}^p g_{y_k}(b)(f_k(x) - f_k(a)) + \sum_{k=1}^p \eta_k(f_k(x) - f_k(a)) \end{aligned}$$

és itt $x \rightarrow a$ esetén, amikor minden $y_k \rightarrow b_k$ / f differenciálható leképezés, vagyis az f_k függvények differenciálhatók /3.5./, amiből folytonosságuk következik/

$$(**) \quad \eta_k(y) \rightarrow 0 \quad (k = 1, \dots, p).$$

Az f_k függvények a feltétel értelmében differenciálhatók a -ban, ismét 2.8. értelmében

$$f_k(x) - f_k(a) = \sum_{i=1}^m f_{kx_i}(a)(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^m \delta_i(x_i - a_i)$$

és itt $x \rightarrow a$ esetén

$$(***) \quad \delta_i(x) \rightarrow 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Utóbbi eredményünket $(*)$ -ba behelyettesítve, alkalmasan rendezve a következőt kapjuk:

$$h(x)-h(a) = g(y)-g(b) = \sum_{k=1}^m g_{y_k}(b) \left[\sum_{i=1}^m f_{kx_i}(a)(x_i-a_i) \right] + r(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^p g_{y_k}(b) \cdot f_{kx_i}(a) \right\} (x_i-a_i) + r(x) = \sum_{i=1}^m A_i(x_i-a_i) + r(x),$$

ahol $r(x)$ minden tagjában (x_i-a_i) az $x \rightarrow a$ esetében (**) és (***) értelmében 0-hoz tartozó $\eta_k(y)$, ill. $\delta_i(x)$ függvények valamelyikével ezek szorzatával, vagy ezek állandószerosával, van megszorozva, vagyis

$$\sum_{i=1}^m \epsilon_i(x)(x_i-a_i) \text{ alakú, ahol } \lim_{x \rightarrow a} \epsilon_i(x) = 0 \text{ (} i=1, \dots, m \text{).}$$

Ez azonban 2.7. értelmében azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{d(a,x)} = 0, \quad r(a) = 0,$$

vagyis 2.2. értelmében h differenciálható, 2.5. értelmében mindegyik változója szerint parciálisan differenciálható és

$$A_i = h_{x_i}(a) \quad (i=1, \dots, m). \quad *$$

4.2. MEGJEGYZÉS. A parciális deriváltak tört alakú je-lölésénél jobban kitűnik a többváltozós láncszabálynak az egyváltozós láncszabállyal való analógiája, bár ekkor nem tudjuk egyszerűen feltüntetni, hogy az egyes parciális deriváltakat hol kell tekinteni:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad [y_k = f_k(x)].$$

4.3. MEGJEGYZÉS. Az a tény, hogy két differenciálható többváltozós függvény összege, különbsége, szorzata, és ha a nevező nem 0, hányadosa is differenciálható /2.10.2. feladat/ a többváltozós láncszabály alkalmazásával is adó-dik, csupán a

$$g(y_1, y_2) = y_1 + y_2, \quad g(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2, \quad g(y_1, y_2) = \frac{y_1}{y_2}$$

függvényre /külső függvény/ kell 4.1.-et alkalmazni.

4.4. MEGJEGYZÉS. A 2.9.-ben bevezetett deriváltvektor /gradiens/ és 3.5.-ben bevezetett Jacobi-féle mátrix segítségével a láncszabály értelmében az összetett függvény deriváltvektora /gradiense/

$$\left[\text{grad } h \right]_{(a)} = \left[\text{grad } g \right]_{f(a)} \underline{D}(a)$$

alakban is felírható, ahol $\underline{D}$ a belső (f) leképezés Jacobi-féle mátrixa.

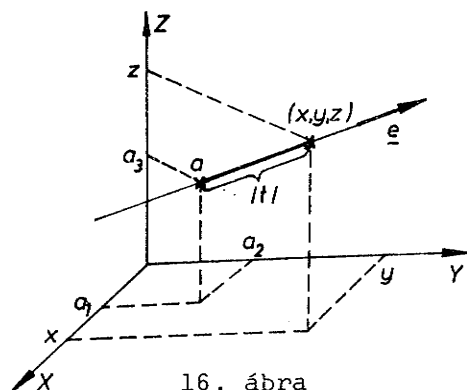
4.5. MEGJEGYZÉS. A többváltozós láncszabályt abban a speciális esetben alkalmazva, amikor a belső leképezés, és így az összetett függvény értelmezési tartománya is valamely $H \subset \mathbb{R}$ halmaz ($f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : f(H) \rightarrow \mathbb{R}^m$), vagyis az összetett függvény valójában egyváltozós /parciális deriváltja közönséges derivált/:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dt} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_k} \frac{df_k}{dt}.$$

Ez a speciális eset áll elő az un. iránymenti derivált-nál:

4.6. Tegyük fel, hogy az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^3$) függvény differenciálható az $a = (a_1, a_2, a_3) \in \text{int } H$ pontban.

Az a pontból az $\underline{e} = \cos \alpha \underline{i} + \cos \beta \underline{j} + \cos \gamma \underline{k}$ egységvektorral megadott irányban t távolságban fekvő (x, y, z) pontba jutva el, f megváltozása $\Delta f = f(x, y, z) - f(a_1, a_2, a_3)$. Célszerű az (x, y, z) és (a_1, a_2, a_3) pontot összekötő egyenesszakasz paraméteres egyenletrendszerét



16. ábra

$$x = a_1 + t \cos \alpha, \quad y = a_2 + t \cos \beta, \quad z = a_3 + t \cos \gamma$$

alakban felírni, mert akkor (x, y, z) és (a_1, a_2, a_3) távolsága $|t|$, /16. ábra/ és így f átlagos változási sebessége a szakasz mentén

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y, z) - f(a_1, a_2, a_3)}{t} &= \\ &= \frac{f(a_1 + t \cos \alpha, a_2 + t \cos \beta, a_3 + t \cos \gamma) - f(a)}{t} \end{aligned}$$

E hányados határértéke $t \rightarrow 0$ esetén f a -beli $\underline{e}$ irányban vett változási sebessége, azaz $\underline{e}$ irányban vett deriváltja:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t \cos \alpha, a_2 + t \cos \beta, a_3 + t \cos \gamma) - f(a_1, a_2, a_3)}{t} &= \\ &= \frac{d(f \circ g)}{dt}, \end{aligned}$$

ahol a belső függvény, (g) koordinátái a $(*)$ -ban megadott egyváltozós függvények.

Szokás az iránymenti deriváltat $\frac{df}{de}$ alakban is jelölni, ahol $\underline{e}$ jelenti az irány egységvektorát.

A többváltozós láncszabályt /ill. annak 4.5.-ben felírt speciális esetét/ alkalmazva az iránymenti derivált részletesen így írható fel:

$$\begin{aligned}\frac{df}{de} &= \frac{d(f \circ g)}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + f_z \frac{dz}{dt} = \\ &= f_x \cos \alpha + f_y \cos \beta + f_z \cos \gamma = \text{grad } f \cdot \underline{e}\end{aligned}$$

Pl. az $f(x,y,z) = x^2 \cos \frac{y}{z}$

függvény $(1,-3,6)$ pontban az $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$ vektorral megadott irányban vett iránymenti deriváltja, mivel az irány egységvektora

$$\underline{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}),$$

$$\begin{aligned}\frac{df}{de} &= f_x(1,-3,6) \frac{1}{\sqrt{3}} + f_y(1,-3,6) \frac{1}{\sqrt{3}} + f_z(1,-3,6) \frac{1}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2x \cos \frac{y}{z} - \frac{x^2}{z} \sin \frac{y}{z} + \frac{x^2 y}{z^2} \sin \frac{y}{z} \right)_{(1,-3,6)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \cos 0,5 + \frac{1}{6} \sin 0,5 + \frac{1}{12} \sin 0,5) \approx 1,08.\end{aligned}$$

Általánosan, tetszőleges m -változós f függvény esetében a következőket mondhatjuk:

4.7. MEGJEGYZÉS. Tegyük fel, hogy $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) differenciálható az $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \text{int } H$ pontban, és alkalmas $\delta > 0$ -ra $K(\underline{a}, \delta) \subset H$. Ha $\underline{e}$ m -dimenziós egységvektor /tehát mint helyzetvektor az $(e_1, \dots, e_m)$ pontba mutat és $\sum_{i=1}^m e_i^2 = 1$ / akkor az $\underline{a}$ ponttól $\underline{e}$ irányában t távolságban fekvő pont az $\underline{a} + t\underline{e}$ helyzetvektorral jellemezhető /I.2.11./ az $\underline{a}$ és $\underline{a} + t\underline{e}$ helyzetvektoru pontok távolsága t , így

$$\frac{f(\underline{a} + t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t}$$

az f függvény $\underline{e}$ irány menti különbségi hányadosa az $\underline{a}$ helyzetvektoru pontban. Ennek határértéke $t \rightarrow 0$ esetében az f függvény $\underline{e}$ irány menti deriváltja az $(a_1, \dots, a_m) = \underline{a}$ pontban.

Az így értelmezett derivált nem más, mint annak az összetett függvénynek a deriváltja, amelynek külső függvénye f , a belső leképezést pedig $z : A \rightarrow B$ szolgáltatja, ahol $A \subset \mathbb{R}$, $B = \{z(t) = [z_1(t), \dots, z_m(t)] : z_k(t) = a_k + t e_k \mid t \in A, k = 1, \dots, m\}$, $B \subset H$, a deriváltat az $(a_1, \dots, a_m)$ pontban, azaz $t=0$ -nál véve.

$$(*) \left[\frac{df}{de} \right]_{(a)} = \left[\frac{d(f \circ z)}{dt} \right]_{t=0} = \left[\sum_{i=1}^m f_{x_i} e_i \right]_{t=0} = \text{grad } f_{(a)} \underline{e}.$$

A többváltozós láncszabálynak nevezetes alkalmazása az egyváltozós függvényekre vonatkozó Lagrange-féle közéértéktétel átvitele többváltozós függvényekre:

4.8. Tétel. Lagrange-féle közéértéktétel. Legyen
 $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) és $S \subset H$ az $a = (a_1, \dots, a_m)$ pontból a
 $b = (b_1, \dots, b_m)$ pontba vezető szakasz /I.2.10./ . Tegyük
fel, hogy f az S szakasz minden pontjában differenciálható.
Ekkor létezik S -nek olyan a -tól és b -től különböző $c \in S$
pontja, amelyre

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(c)(b_i - a_i).$$

Bizonyítás. I.2.10. értelmében

$$s(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, a_m + t(b_m - a_m))$$

végigfut az S szakasz minden pontján, ha t 0-tól 1-ig változik, $s(0) = a$, $s(1) = b$. Az összetett függvény folytonosságáról és differenciálhatóságáról szóló 3.9. ill. 4.1. tétel értelmében $g = f \circ s$ ($g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$) $[0,1]$ -ben folytonos, $(0,1)$ -ben differenciálható, így rá a Lagrange-féle közéértéktételt alkalmazva /Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása IV.3.2./, kell, hogy legyen olyan $\tau \in (0,1)$ hely, melyre

$$f(b) - f(a) = g(1) - g(0) = g'(\tau) = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(s(\tau)) s'_i(\tau),$$

ahol $s_i(\tau) = a_i + \tau(b_i - a_i)$. /A $g'(\tau)$ derivált kiszámításánál alkalmaztuk a többváltozós láncszabályt, ill. annak 4.5-ben említett speciális esetét./ Mivel ekkor $s'_i(\tau) = b_i - a_i$, a $c = s(\tau)$ jelöléssel a bizonyítandó összefüggésre jutottunk. *

4.9. Feladatok.

1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

utasítással megadott függvénynek minden irányban létezik iránymenti deriváltja a $(0,0)$ pontban, de ezekre nem érvényes a 4.7. (*) képlet /nem is differenciálható a függvény $(0,0)$ -ban/.

2. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvénynek a $(0,0)$ pontban minden irányban létezik iránymenti deriváltja, ezekre teljesül a 4.7. (*) összefüggés, de a függvény nem differenciálható a $(0,0)$ helyen.

5. TÖBBSZÖRI DIFFERENCIÁLHATÓSÁG

Az egyváltozós függvényt akkor mondtuk az $a \in \mathbb{R}$ helyen kétszer differenciálhatónak, ha differenciálható volt a -nak valamilyen $K(a, \delta)$ környezetében, f' értelmezve volt tehát $K(a, \delta)$ -ban, és ezen kívül f' deriválható volt az a helyen. Ennek mintájára értelmezzük az m -változós függvény kétszeri differenciálhatóságát:

5.1. DEFINÍCIÓ. $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) az $a \in \text{int } H$ pontban kétszer differenciálható, ha van a -nak olyan $K(a, \delta) \subset H$ környezete, amelyben f differenciálható és az $x=a$ pontban az $f_{x_1}, \dots, f_{x_m}$ parciális deriváltak mindegyike differenciálható.
 f kétszer differenciálható az A halmazon, ha minden $a \in A$ pontban kétszer differenciálható.

2.5.-ből és 3.1.-ből következik, hogy kétszer differenciálható függvénynek összes másodrendű parciális deriváltjai léteznek a vizsgált helyen, továbbá ott f folytonosan is differenciálható. Ha az $A \subset H$ nyílt halmazon f másodrendű parciális deriváltjai folytonosak is, a 3.3. tétel értelmében a kétszeri differenciálhatóság következő elégséges feltételére jutunk.

5.2. Tétel. Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ és a nyílt $A \subset H \subset \mathbb{R}^m$ halmaz pontjaiban f minden másodrendű parciális deriváltja folytonos, akkor f kétszer differenciálható A -n. *

Tovább vive az általánosítást, mondhatjuk:

5.3. DEFINÍCIÓ. $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) az $a \in \text{int } H$ pontban r -szer differenciálható, ha van a -nak olyan $K(a, \delta)$ környezete, amelyen f $(r-1)$ -szer differenciálható, és az

$x=a$ pontban f összes $(r-1)$ -edrendű parciális deriváltjai differenciálhatók. Az $A \subset \text{int } H$ halmazon akkor mondhatjuk f -et r -szer differenciálhatónak, ha minden $a \in A$ pontban r -szer differenciálható.

2.5.-ből következik az alábbi tétel állítása:

5.4. Tétel. Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R} \ (H \subset \mathbb{R}^m)$ az $a \in \text{int } H$ pontban r -szer differenciálható, akkor itt összes r -edrendű parciális deriváltjai léteznek. *

Az egyszeri folytonos differenciálhatóság feltételéhez hasonló adható meg az r -szeri folytonos differenciálhatóságra:

5.5. DEFINÍCIÓ. $f : H \rightarrow \mathbb{R} \ (H \subset \mathbb{R}^m)$ r -szer folytonosan differenciálható az $a \in \text{int } H$ pontban, ha itt r -szer differenciálható, és ugyanitt összes r -edrendű parciális deriváltjai folytonosak. Az $A \subset \text{int } H$ halmazon akkor mondjuk f -et r -szer folytonosan differenciálhatónak, ha minden $a \in A$ pontban r -szer folytonosan differenciálható.

5.6. MEGJEGYZÉS. Nyílt $G \subset \mathbb{R}^m$ halmazon elég megkövetelnünk f összes r -edrendű parciális deriváltjainak folytonosságát, ebből már következik, hogy f r -szer differenciálható G -n, vagyis 5.5. értelmében r -szer folytonosan differenciálható G -n. Speciálisan állításunk $a \in G \ K(a, \delta) \subset G$ környezetére is alkalmazható.

Ha ui. G -n f összes r -edrendű parciális deriváltjai folytonosak, akkor 3.1. értelmében f -nek $(r-1)$ -edrendű parciális deriváltjai differenciálhatók G -n, tehát folytonosak is, és hasonlóképpen folytatva okoskodásunkat adódik az $(r-2)$ -edrendű. ... elsőrendű parciális deriváltak differenciálhatósága és folytonossága, ill. magának f -nek differenciálhatósága G -n.

Ugyanezzel a gondolatmenettel igazolható, hogy az elemi függvényekből felépített többváltozós függvények /pl. a

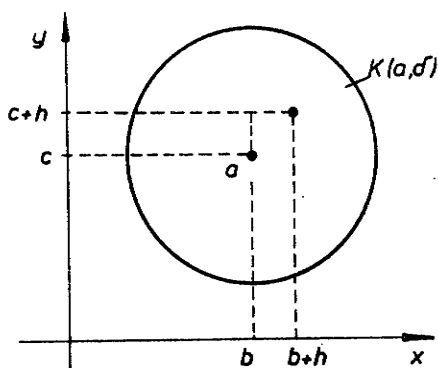
racionális függvények/ értelmezési tartományuk belsejében többször differenciálhatók.

A magasabbrendű parciális deriváltak fogalmának bevezetésénél már felvetettük azt a kérdést, hogy az egymástól csak a deriválás sorrendjében eltérő magasabbrendű parciális deriváltak mikor egyenlők /1.6./. Erre a kérdésre ad választ az alábbi tétel:

5.7. Tétel. Ha az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) függvény az $a \in \text{int } H$ pontban r -szer differenciálható, akkor az egymástól csak a deriválás sorrendjében eltérő r -edrendű parciális deriváltak egymással egyenlők.

Bizonyítás. Igazoljuk a tétel állítását először abban a speciális esetben, amikor f kétváltozós függvény és vegyes másodrendű parciális deriváltjairól állítjuk, hogy egyenlők egymással - a deriválás sorrendjétől független az értékük - ha f kétszer differenciálható $a \in \text{int } H$ -ban ($H \subset \mathbb{R}^2$).

Jelöljük egyszerűség kedvéért a változókat x -szel és y -nal, a koordinátáit (b,c) -vel. Feltételünkből következik, hogy van olyan nyílt $K(a,\delta)$ körlemez, amelyben f differenciálható /5.3./. Legyen $0 < h < \frac{\delta}{2}$. Ekkor f megváltozása a 17. ábrán látható négyzet két átellenes csúcspontjában $d(h) = f(b+h, c+h) - f(b,c)$.



17. ábra

Ezt bővebb

$$D(h) = f(b+h, c+h) - f(b+h, c) - f(b, c+h) + f(b, c)$$

alakban felírva állításunkat igazoltuk, ha megmutattuk, hogy egyrészt

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{D(h)}{h^2} = f_{xy}(a),$$

másrészt

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{D(h)}{h^2} = f_{yx}(a),$$

vagyis

$$f_{xy}(a) = f_{yx}(a).$$

A $D(h)$ kifejezés az

$$u(x) = f(x, c+h) - f(x, c), \quad (b \leq x \leq b+h),$$

$$v(y) = f(b+h, y) - f(b, y), \quad (c \leq y \leq c+h),$$

jelölésekkel a

$$D(h) = u(b+h) - u(b) = v(c+h) - v(c)$$

alakban is felírható, ahol u a $[b, b+h]$ intervallumban, v pedig a $[c, c+h]$ intervallumban folytonos, és a megfelelő intervallum belsejében mindkettő differenciálható, mégpedig

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = f_x(x, c+h) - f_x(x, c) \quad (b < x < b+h),$$

$$v'(y) = \frac{dv}{dy} = f_y(b+h, y) - f_y(b, y) \quad (c < y < c+h).$$

Alkalmazva az egyváltozós Lagrange-féle középértéktételt, kell, hogy legyen $\beta \in (b, b+h)$ és $\gamma \in (c, c+h)$, melyre

$$\begin{aligned} (*) \quad D(h) &= u'(\beta)h = (f_x(\beta, c+h) - f_x(\beta, c))h = \\ &= v'(\gamma)h = (f_y(b+h, \gamma) - f_y(b, \gamma))h. \end{aligned}$$

A 2.8. megjegyzésből következik azonban, hogy, mivel az f_x és f_y parciális deriváltak $K(a, \delta)$ -ban differenciálhatók,

$$f_x(\beta, c+h) - f_x(b, c) = f_{xx}(b, c)(\beta - b) + f_{xy}(b, c)h +$$

$$+ \epsilon_1(\beta, c+h)(\beta - b) + \epsilon_2(\beta, c+h)h,$$

$$f_x(\beta, c) - f_x(b, c) = f_{xx}(b, c)(\beta - b) + \epsilon_3(\beta, c)(\beta - b),$$

$$f_y(b+h, \gamma) - f_y(b, c) = f_{yx}(b, c)h + f_{yy}(b, c)(\gamma - c) +$$

$$+ \epsilon_4(b+h, \gamma)h + \epsilon_5(b+h, \gamma)(\gamma - c),$$

$$f_y(b, \gamma) - f_y(b, c) = f_{yy}(b, c)(\gamma - c) + \epsilon_6(b, \gamma)(\gamma - c),$$

ha már h elég kicsiny, és itt

$$(**) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (b,c)} \epsilon_i(x,y) = 0 \quad (i = 1, \dots, 6).$$

A fenti kifejezésekből a megfelelő parciális deriváltakat kifejezve és $D(h)$ (*)-beli alakjába behelyettesítve egyrészt

$$\frac{D(h)}{h^2} = f_{xy}(b, c) + \epsilon_1(\beta, c+h) \frac{\beta - b}{h} + \epsilon_2(\beta, c+h) - \epsilon_3(\beta, c) \frac{\beta - b}{h}$$

másrészt

$$\frac{D(h)}{h^2} = f_{yx}(b, c) + \epsilon_4(b+h, \gamma) + \epsilon_5(b+h, \gamma) \frac{\gamma - c}{h} - \epsilon_6(b, \gamma) \frac{\gamma - c}{h}$$

adódik. Innen (**) következtében

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(h)}{h^2} = f_{xy}(b, c) = f_{yx}(b, c)$$

és így a vizsgált speciális esetben az állítás adódik.*

E speciális esetből az állítás $m > 2$ -változós függvények vegyes másodrendű parciális deriváltjaira könnyen adódik. Ha ugyanis $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) kétszer differenciálható az $a \in \text{int } H$ pontban és $1 \leq i < j \leq m$, akkor

$g(x_i, x_j) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_m)$
 is kétszer differenciálható az (a_i, a_j) helyen és

$$g_{x_i x_j}(a_i, a_j) = f_{x_i x_j}(a), \quad g_{x_j x_i}(a_i, a_j) = f_{x_j x_i}(a).$$

m -változós függvény r -edrendű ($r > 2$) parciális deriváltjaira teljes indukcióval bizonyíthatjuk az állítást. Tegyük fel, hogy az állítás $r - 1 \geq 2$ esetére igaz, és hogy f r -szer differenciálható az a pontban. Bizonyítani akarjuk, hogy

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_r}}(a) = f_{x_{j_1} \dots x_{j_r}}(a),$$

valahányszor $(i_1, \dots, i_r)$ és $(j_1, \dots, j_r)$ az $1, \dots, m$ számokból alkotott két olyan r -edrendű ismétléses permutáció, hogy az i_k számok között ugyanannyiszor szerepel p , mint a j_k számok között ($p=1, \dots, m$).

Ha $i_r = j_r$, akkor az $(i_1, \dots, i_{r-1})$ permutáció mindegyik indexet ugyanannyiszor tartalmazza, mint a $(j_1, \dots, j_{r-1})$ permutáció, tehát az a pontnak olyan környezetében, ahol f $(r-1)$ -szer differenciálható, az indukciófeltevés szerint

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}}}(x) = f_{x_{j_1} \dots x_{j_{r-1}}}(x),$$

s akkor az a pontban az $x_{i_r} = x_{j_r}$ változó szerinti parciális deriváltjuk is megegyezik.

Ha $i_r \neq j_r$, mondjuk $i_r = i \neq j = j_r$, akkor az $(i_1, \dots, i_{r-1})$ permutációban előfordul j , a $(j_1, \dots, j_{r-1})$ permutációban pedig i . Ezért át lehet rendezni az első $(k_1, \dots, k_{r-2}, j)$, a másodikat pedig $(k_1, \dots, k_{r-2}, i)$ alakba, és az indukciófeltevés szerint a környezetében

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}}}(x) = f_{x_{k_1} \dots x_{k_{r-2}} x_j}(x),$$

$$f_{x_j \dots x_{j_{r-1}}} (x) = f_{x_{k_1} \dots x_{k_{r-2}}} x_i (x).$$

Mint hogy továbbá az $f_{x_{k_1} \dots x_{k_{r-2}}}$ $(r-2)$ -edrendű parciális

li derivált az a pontban még kétszer differenciálható, azért az $r=2$ esetre vonatkozó eredményt felhasználva

$$\begin{aligned} f_{x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}}} x_i (a) &= f_{x_{k_1} \dots x_{k_{r-2}}} x_j x_i (a) = \\ &= f_{x_{k_1} \dots x_{k_{r-2}}} x_i x_j (a) = f_{x_{j_1} \dots x_{j_{r-1}}} x_j (a) \end{aligned}$$

adódik, amivel az állítást az általános esetre is igazoltuk. *

5.8. MEGJEGYZÉS. Arra a tényre, hogy a magasabbrendű parciális deriváltak létezése még nem vonja maga után értéküknek a deriválások sorrendjétől való függetlenségét rávilágíthatunk a következő példával:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ esetén.} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy $f_x(0,y) = -y$, $f_y(x,0) = x$, $f_{xy}(0,0) = -1$, $f_{yx}(0,0) = 1$.

Egyébként $f(x,0) = f(0,y) = 0$ következtében $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0$, és a $(0,0)$ pont kivételével f mindenütt akárhányszor folytonosan differenciálható. /Mivel $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ f az 5.7. tétel értelmében $(0,0)$ -ban kétszer nem differenciálható./

A 3.1. tétel értelmében a parciális deriválások sorrendjének felcserélhetőségét, pontosabban az 5.7. tétel feltételeinek teljesülését vonja maga után a következő fel-tétel.

5.9. MEGJEGYZÉS. Ha $f : H \rightarrow R$ ($H \subset R^m$) és $a \in \text{int } H$ alkalmas $K(a, \delta)$ környezetében f r -edrendű parciális deriváltakai léteznek, és a -ban folytonosak, akkor az egymástól csak a deriválások sorrendjében különböző parciális deriváltak egyenlők.

Ennél azonban kevesebb feltétel is megadható:

5.10. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow R$ ($H \subset R^2$), $a = (b, c) \in \text{int } H$, és tegyük fel, hogy a -nak egy $K(a, \delta) \subset H$ környezetében létezik f_{xy} és az a pontban folytonos is, továbbá, hogy f_y is létezik legalább $K(a, \delta)$ -nak (x, c) alakú pontjaiban. Ekkor $f_{yx}(a) = f_{xy}(a)$.

A tételt itt nem bizonyítjuk. *

IV. DIFFERENCIÁLOK. A TÖBBVÁLTOZÓS DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

1. ELSŐRENDŰ ÉS MAGASABBRENDŰ DIFFERENCIÁLOK, ÉRINTŐSIK, TAYLOR-FORMULA

A valós egyváltozós függvények analízisének tárgyalásánál szóltunk arról, hogy a differenciálható függvény közel lineáris. Ez azt jelenti, hogy egy c -ben differenciálható f függvény kis $\Delta x = dx$ függetlenváltozó-megváltozásához tartozó függvényt megváltozását jól megközelíthetjük a megfelelő lineáris függvény megváltozásával, az eredeti függvény differenciáljával. /A differenciálható függvény kicsiben /közel/ lineáris./

$$\Delta f = f(c+\Delta x) - f(c) = \underbrace{f'(c)\Delta x}_{df} + \epsilon \Delta x, \text{ ahol } \epsilon \rightarrow 0, \text{ ha } \Delta x \rightarrow 0,$$

$$\Delta f \approx df = f'(c) dx, \text{ ill. } f(c+\Delta x) - f(c) \approx f'(c)\Delta x,$$

vagy másképp írva $f(c+\Delta x) \approx f(c) + f'(c)\Delta x$. Az $f(c+\Delta x) \approx f(c)$ közelítés abszolút hibája $|\Delta f| \approx |df| = |f'(c)dx|$, relatív hibája $\frac{\Delta f}{f(c)} \approx \frac{df}{f(c)} = \frac{f'(c) dx}{f(c)}$. /Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása IV.2.29, 2.30./

A többváltozós függvények differenciálhatóságát értelmező 2.2. definícióból, a 2.5. tételre és a 2.8. megjegyzésre való tekintettel közvetlenül adódik a differenciál fogalmának többváltozós függvényekre való általánosítása:

1.1. DEFINÍCIÓ. Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) az $a \in \text{int } H$ pontban differenciálható függvény, akkor f a -beli differenciálja /az $a = (a_1, \dots, a_m)$, $x = (a_1+h_1, \dots, a_m+h_m)$ jelöléssel a

$$\Delta f = f(a_1+h_1, \dots, a_m+h_m) - f(a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(a) h_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \varepsilon(x) h_i \quad \text{függvénymegváltozós főrésze}$$

$$(*) \quad df = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(a) h_i.$$

Másképp kifejezve, df az f függvény független változói megváltozásainak, a $h_1, \dots, h_m$ változóknak lineáris kombinációja. Ezzel a differenciálható függvény kicsiben megközelíthető.

1.2. MEGJEGYZÉS. Célszerű az előbb definiált lineáris formát a következőképpen jelölni:

$$df(a) = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(a) h_i,$$

utalva így arra, hogy az $a \in H$ pontban differenciálható f függvény $a = (a_1, \dots, a_m)$ és az a -hoz közeli $(a_1+h_1, \dots, a_m+h_m)$ helyhez tartozó megváltozásának becslésére használható – többek között – a differenciál. A $df(a)$ jelölés persze még így is látszólag pontatlan, mert nem tünteti fel a lineáris forma változóit, bár ha f függvényről beszéltünk, akkor sem irtuk ki a függvény változóit.

1.3. MEGJEGYZÉS. Az $f(x) = f(a_1+h_1, \dots, a_m+h_m) \approx f(a) + df(a)$ közelítés abszolút, ill. relatív hibája /az egyváltozós esethez hasonlóan/

$$\Delta f = f(x) - f(a) \approx df(a) = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(a) h_i, \quad \text{illetve}$$

$$\frac{\Delta f}{f(a)} \approx \frac{df(a)}{f(a)} = \frac{1}{f(a)} \sum_{i=1}^m f_{x_i}(a) h_i.$$

Tegyük fel, hogy a kétváltozós f függvény értékét az $x=a$ és $y=b$ mért mennyiségekből számítjuk ki, x ill. y mérési hibája $|\Delta x| < \varepsilon$, $|\Delta y| < \eta$. Ha f a mért (a,b) érték környezetében differenciálható, akkor f számítási hibája az $f(a+\Delta x, b+\Delta y) \approx f(a,b)$ közelítésnél $f(a+\Delta x, b+\Delta y)$ volna a pontos érték/

$$\begin{aligned} |\Delta f| &= |f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)| \approx |f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y| \leq \\ &\leq |f_x(a,b)| |\Delta x| + |f_y(a,b)| |\Delta y| \leq \\ &\leq |f_x(a,b)| \varepsilon + |f_y(a,b)| \eta, \end{aligned}$$

ill. a relatív hiba

$$\left[\frac{\Delta f}{f} \right]_{(a,b)} \approx \left[\frac{df}{f} \right]_{(a,b)} \leq \left[\frac{f_x}{f} \right]_{(a,b)} \varepsilon + \left[\frac{f_y}{f} \right]_{(a,b)} \eta$$

és ennek értéke - mint látható - a Δx és Δy mérési hibától, és az (a,b) hely megválasztásától függ.

1.4. Példák Wheatstone-hiddal mérjük az R_x ellenállást. Az adott R_n ellenállás $R_n = 400 \Omega$, mérésénél az elkövetett hiba $\pm 4 \Omega$, az x távolság $x = 83,7$ cm, mérésénél az elkövetett hiba $\pm 0,15$ cm az ℓ távolság $= 100$ cm, ez pontosan adott. Milyen abszolút, ill. relatív hibával számíthatjuk ki az R_x ellenállás nagyságát?

Mint ismeretes $R_x = R_n \frac{x}{\ell - x}$, az adatokat behelyettesítve $R_x = 400 \frac{83,7}{100 - 83,7} \Omega = 2054 \Omega$. Mivel

$$\Delta R_x \approx dR_x = \frac{\partial R_x}{\partial R_n} \Delta R_n + \frac{\partial R_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial R_x}{\partial \ell} \Delta \ell = \frac{x}{\ell - x} \Delta R_n + \frac{R_n \ell}{(\ell - x)^2} \Delta x + 0$$

hiszen ℓ mérése pontos volt, azaz $\Delta \ell = 0$, a mérés abszolút hibája így becsülhető meg:

$$\begin{aligned}
H \leq |\Delta R_x| &\approx |dR_x| \leq \left| \frac{x}{\ell - x} \right| |\Delta R_n| + \frac{|R_n \ell|}{(\ell - x)^2} |\Delta x| \\
&\ell = 100 \text{ cm} \\
&x = 83,7 \text{ cm} \\
&R_n = 4000 \Omega \\
&|\Delta x| = 0,15 \text{ cm} \\
&|\Delta R_n| = 4 \Omega \\
&= \left(\frac{83,7}{16,3^4} + \frac{40000}{16,3^2} 0,15 \right) \Omega \approx 43 \Omega.
\end{aligned}$$

tehát $R_x = (2054 \pm 43) \Omega$.

A relatív hiba becslése ugyanakkor:

$$\frac{H}{R_x} \approx \frac{dR_x}{R_x} \leq \frac{43}{2054} \approx 0,021$$

tehát körülbelül 2%.

Előfordul, hogy a relatív hiba becsléséből arra kívánunk következtetni, a vizsgált függvény melyik változóját kell pontosabban mérni, melyik változójának h_i megváltozását kell pontosabban meghatározni, kiszámítani.

Pl. ha egy hengeralaku test anyagának sűrűségét úgy kívánjuk meghatározni, hogy megmérjük a henger D átmérőjét, H magasságát és M tömegét, kérdezhetjük, melyik adat pontos mérésére kell különösen nagy súlyt fektetnünk.

A meghatározandó ρ sűrűséget a

$$\rho = \frac{M}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi H} = \frac{4M}{D^2 \pi H}$$

képlet szolgáltatja. Ha M , D , H mérésének abszolút hibáját ΔM , ΔD , ΔH -val jelöljük

$$\begin{aligned}
\Delta \rho \approx d\rho &= \frac{\partial \rho}{\partial M} \Delta M + \frac{\partial \rho}{\partial D} \Delta D + \frac{\partial \rho}{\partial H} \Delta H = \frac{4}{D^2 \pi H} \Delta M - \frac{8M}{D^3 \pi H} \Delta D - \\
&- \frac{4M}{D^2 \pi H^2} \Delta H,
\end{aligned}$$

ha tehát ΔM , ΔD , ΔH már kicsi,

$$\left| \frac{\Delta \rho}{\rho} \right| \approx \left| \frac{d\rho}{\rho} \right| \leq \left| \frac{\Delta M}{M} \right| + 2 \left| \frac{\Delta D}{D} \right| + \left| \frac{\Delta H}{H} \right|$$

tehát a D átmérő mérése igényli a legnagyobb gondosságot. /A hibabecslésnél persze a kerekítési hibákra is figyelemmel kell lennünk./

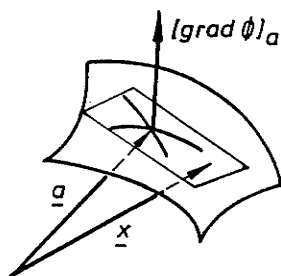
1.5. MEGJEGYZÉS. II.3.17-ben általánosságban megadtuk az R^m -beli folytonos görbe fogalmát. Legyen speciálisan $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow R^3$ ($\alpha, \beta \in R$) folytonos térgörbe, $\alpha < \gamma < \beta$ és a φ leképezés differenciálható a γ helyen. Tegyük fel továbbá, hogy $\varphi'(\gamma) \neq 0$, azaz a szokásos jelölésekkel:

$$\varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)],$$

$$\varphi'(t) = [\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \varphi_3'(t)], \quad \sum_{i=1}^3 \varphi_i'(\gamma)^2 \neq 0.$$

Ekkor $\varphi'(\gamma)$ -t a görbe érintővektorának mondjuk a γ helyen.

Legyen F olyan felület, amelynek pontjait a $\phi(x_1, x_2, x_3) = 0$ kapcsolattal jellemezhetjük. Ide tartozik pl. az az eset, amikor a felület egyenlete $x_3 = f(x_1, x_2)$ alakban adható meg, hiszen ez átrendezéssel a $\phi = x_3 - f(x_1, x_2) = 0$ alakra hozható. Ha a φ görbe a $\phi = 0$ egyenlettel megadott felületen fekszik $\{\phi[\varphi(t)] = 0\}$, áthalad a felület $a = \varphi(\gamma)$ pontján, ott ϕ differenciálható, $\varphi'(\gamma) \neq 0$, ($\gamma \in (\alpha, \beta)$) és ϕ a -ban differenciálható, akkor a többváltozós láncszabályt alkalmazva:



18. ábra

mazva:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\phi[\varphi(t)]}{dt} = \sum_{i=1}^3 \phi_{x_i}(a) \varphi_i'(\gamma) = \\ &= \text{grad } \phi(a) \cdot \varphi'(\gamma). \end{aligned}$$

Ez azt fejezi ki, hogy $\text{grad } \phi(a)$ merőleges az F -en fekvő, a -n átmenő görbék érintőire. Ezek tehát egy síkban

/F a-beli un. érintősík-jában/ fekszenek. E sík normálisa $\text{grad}\phi_{(a)}$, és így egyenlete $\text{grad}\phi_{(a)}(\underline{x}-\underline{a}) = 0$ ahol $\underline{x}$ a sík tetszőleges pontjához, $\underline{a}$ pedig az érintési ponthoz mutató helyzetvektor. /18. ábra/ Részletesebben felírva a sík /érintősík/ egyenlete

$$\phi_{x_1}(a)(x_1-a_1) + \phi_{x_2}(a)(x_2-a_2) + \phi_{x_3}(a)(x_3-a_3) = 0$$

ahol $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Ha $\phi = x_3 - f(x_1, x_2)$, az érintősík egyenlete még - rendezés után - a következő alakban is felírható: $x_3 - a_3 = f_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)$, ahol $a_3 = f(a_1, a_2)$. A tér tetszőleges pontját (x_1, x_2, x_3) helyett (x, y, z) -vel jelölve az $x_1 - a_1 = x - a_1 = h_1$, $x_2 - a_2 = x - a_2 = h_2$ jelöléssel írható, hogy a $z = f(x, y)$ egyenletű felület a-beli érintősík-jának egyenlete $z - f(a_1, a_2) = f(x, y) - f(a_1, a_2) = f_{x_1}(a_1, a_2)h_1 + f_{x_2}(a_1, a_2)h_2 = df(a_1, a_2)$. A differenciálból tehát kiolvasható annak a síknak az egyenlete, amellyel a $z = f(x, y)$ egyenletű felület az $[a_1, a_2, f(a_1, a_2)]$ pont környezetében megközelíthető.

Az a-ban differenciálható egyváltozós függvényről mondtuk, hogy a helynek kis környezetében közel lineáris, az őt személtető görbe a környezetében a görbe a-beli érintőjével helyettesíthető. Hasonlóképpen állíthatjuk, hogy az (a_1, a_2) -ben differenciálható $z = f(x, y)$ egyenletű felület az $[a_1, a_2, f(a_1, a_2)]$ pont kis környezetében közel planáris, e pont környezetében jól megközelíti a felületet érintősík-já.

A differenciál 1.1.-ben adott definíciójából kézenfekvően adódik f a-beli második, általában r-edik differenciáljának értelmezése.

1.6. DEFINÍCIÓ. Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$), és f kétszer differenciálható a $\in$ int H-ban, akkor f a-beli második differenciálja az a környezetének minden x helyén képezhető

$$df(x) = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(x) h_i$$

elsőrendű differenciálnak, /rögzített h_i -k mellett x függvényeként tekintve/ az a helyen /ugyanazon h_i változókkal/ képezett első differenciálja. Utóbbit értelemszerűen $d^2f(a)$ -val jelölve

$$\begin{aligned} d^2f(a) &= \sum_{j=1}^m h_j \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial f_{x_i}}{\partial x_j}(a) h_i \right] = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_{x_i x_j}(a) h_i h_j. \end{aligned}$$

1.7. DEFINÍCIÓ. Ha az m -változós f függvény az a pontban r -szer differenciálható, akkor a -beli r -edik differenciálján értjük és $d^r f(a)$ -val jelöljük a $d^{r-1}f(x)$ függvény a -beli differenciálját ugyanazon h_i változókkal, amelyek $d^{r-1}f(x)$ -ben szerepeltek.

1.8. Tétel. Ha az m -változós f függvény az a pontban r -szer differenciálható, akkor

$$d^r f(a) = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_r=1}^m f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}}(a) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_r}.$$

$d^r f(a)$ tehát olyan r -edfoku forma, amelyben az együttthatók f -nek az a helyen vett r -edrendű parciális deriváltjai.

A tétel teljes indukcióval bizonyítható.

1.9. MEGJEGYZÉS. A IV.5.7. tétel értelmében az egymástól csak a deriválás sorrendjében eltérő r -edrendű parciális deriváltak r -szer differenciálható függvény esetében megegyeznek, 1.8.-ban tehát azoknak a tagoknak, melyekben a h_i változóknak ugyanaz a hatványszorzata szerepel, az együttthatói megegyeznek. Ezek összevonása utáni alakjában

ugy írhatjuk fel $d^r f(a)$ -t közvetlenül, hogy elvégezzük a

$\left(\sum_{i=1}^m x_i h_i \right)^r$ hatványozást, majd az eredményben az egyes h_i -k

hatványszorzatait megtartjuk és az x_i -ket f derivációs indexeinek tekintjük. /A többtagu hatványozását általában az un. polinomiális, kéttagu hatványozása esetén pedig a binomiális tétel felhasználásával végezhetjük el/

Pl. $f : H \rightarrow R$ ($H \subset R^3$) esetén $d^2 f$ felírásánál, mivel

$$\left(\sum_{i=1}^3 x_i h_i \right)^2 = x_1 x_1 h_1^2 + 2x_1 x_2 h_1 h_2 + x_2 x_2 h_2^2 + 2x_1 x_3 h_1 h_3 + \\ + 2x_2 x_3 h_2 h_3 + x_3 x_3 h_3^2,$$

$$d^2 f = f_{x_1 x_1} h_1^2 + 2f_{x_1 x_2} h_1 h_2 + f_{x_2 x_2} h_2^2 + 2f_{x_1 x_3} h_1 h_3 + \\ + 2f_{x_2 x_3} h_2 h_3 + f_{x_3 x_3} h_3^2,$$

vagy pl. $f : H \rightarrow R$ ($H \subset R^2$) esetén $d^5 f$ felírásánál, mivel

$$\left(\sum_{i=1}^3 x_i h_i \right)^5 = x_1^5 h_1^5 + 5x_1^4 x_2 h_1^4 h_2 + 10x_1^3 x_2^2 h_1^3 h_2^2 + 10x_1^2 x_2^3 h_1^2 h_2^3 + \\ + 5x_1 x_2^4 h_1 h_2^4 + x_2^5 h_2^5,$$

$$d^5 f = f_{x_1 x_1 x_1 x_1 x_1} h_1^5 + 5f_{x_1 x_1 x_1 x_1 x_2} h_1^4 h_2 + 10f_{x_1 x_1 x_1 x_2 x_2} h_1^3 h_2^2 + \\ + 10f_{x_1 x_1 x_2 x_2 x_2} h_1^2 h_2^3 + 5f_{x_1 x_2 x_2 x_2 x_2} h_1 h_2^4 + f_{x_2 x_2 x_2 x_2 x_2} h_2^5.$$

1.10. MEGJEGYZÉS. Ha a többváltozós láncszabályt abban a speciális esetben alkalmazzuk, amikor a belső leképezés az adott $[0,1] \subset R$ intervallumot egy, az $(a_1, \dots, a_n) = a$ és $(a_1 + h_1, \dots, a_m + h_m) = b$ pontokat összekötő egyenesszakasza vizsi át:

$$s(t) = (a_1 + th_1, \dots, a_m + th_m) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$f : H \rightarrow R$ ($H \subset R^m$), és f a $c = s(t_0) \in \text{int } H$ [$t_0 \in (0,1)$] pontban r -szer differenciálható és t_0 környezetében

$$g(t) = f[s(t)] , \quad (g = f \circ s) ,$$

akkor $g(t)$ a t_0 helyen r -szer differenciálható és r -edik deriváltja megegyezik f r -edik differenciáljával:

$$g^{(r)}(t_0) = d^r f(c).$$

Allításunkat teljes indukcióval könnyű igazolni. $r=1$ esetén

$$g'(t_0) = f_{x_1}(c)h_1 + \dots + f_{x_m}(c)h_m = df(c),$$

$$\text{mivel} \quad \frac{d(a_i + th_i)}{dt} = h_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Ha az állítás $(r-1)$ -re érvényes a t_0 -hoz elég közeli t helyekre, akkor

$$g^{(r-1)}(t) = \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_{r-1}=1}^m f_{x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}}} [s(t)] h_{i_1} \dots h_{i_{r-1}} ,$$

vagyis a láncszabályt alkalmazva a $t=t_0$, azaz $s(t_0) = c$ helyen

$$g^{(r)}(t_0) = \sum_{i=1}^m h_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g^{(r-1)}(t) \right)_{t=t_0}$$

ill. a kijelölt deriválást elvégezve, i helyett i_r -et írva

$$\begin{aligned} g^{(r)}(t_0) &= \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_{r-1}=1}^m \sum_{i_r=1}^m f_{x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}} x_{i_r}}(c) h_{i_1} \dots h_{i_{r-1}} h_{i_r} = \\ &= d^r f(c), \end{aligned}$$

amint állítottuk.

Az egyváltozós függvények analizisében bizonyítottuk, hogy ha egy egyváltozós g függvény $(r+1)$ -szer differenciálható pl. $[0,1]$ -ben, akkor tetszőleges $t \in [0,1]$ esetén van olyan $\tau \in (0,t)$, hogy

$$g(t) - T_r(t) = \frac{g^{(r+1)}(\tau)}{(r+1)!} t^{r+1},$$

ill. a g függvényt megközelítő r -edfoku Taylor-polinomot részletesen kiírva

$$(*) \quad g(t) = g(0) + \sum_{k=1}^r \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{g^{(r+1)}(\tau)}{(r+1)!} t^{r+1} \quad [\tau \in (0,t)]$$

/Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal; Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása V.3.4./

A differenciál fogalmának segítségével a Lagrange-féle maradéktaggal ellátott Taylor-formulát a következőképpen vihetjük át többváltozós függvényekre:

1.11. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$), és tegyük fel, hogy f az $a = (a_1, \dots, a_m)$ és $b = (a_1 + h_1, \dots, a_m + h_m)$ pontokat összekötő

$$s(t) = (a_1 + th_1, \dots, a_m + th_m) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

leképezéssel megadott S szakaszon $(r+1)$ -szer differenciálható. Ekkor van az S szakaszon olyan $c = s(\tau) \in S$ pont $[\tau \in (0,1)]$, hogy

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} d^k f(a) + \frac{d^{r+1} f(c)}{(r+1)!}$$

ahol:
$$d^k f(u) = \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(u) h_{i_1} \dots h_{i_k}.$$

Bizonyítás. Ha $g(t) = f[s(t)]$ ($0 \leq t \leq 1$), akkor a g függvény az 1.10. megjegyzés értelmében $(r+1)$ -szer differenciálható $[0,1]$ -ben, tehát az egyváltozós függvényekre érvényes Taylor-formulát alkalmazva, van olyan $\tau \in (0,1)$, hogy (*)-ot mindjárt a $t=1$ helyre felírva

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^r \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(r+1)}(\tau)}{(r+1)!},$$

és itt az 1.10. megjegyzés értelmében

$$g^{(k)}(0) = d^k f(a), \quad g^{(r+1)}(\tau) = d^{r+1} f(c). *$$

Az alkalmazások miatt célszerű kétváltozós, ill. háromváltozós függvény esetére a Taylor-formula első néhány tagját részletesen is kiírunk:

Legyen $f : H \rightarrow R$ ($H \subset R^2$), $a = (a_1, a_2) \in H$,
 $b = (a_1 + h_1, a_2 + h_2) \in H$, és teljesüljenek az 1.11. tétel feltételei. Ekkor

$$\begin{aligned} f(b) = & f(a) + f_{x_1}(a)h_1 + f_{x_2}(a)h_2 + \frac{1}{2!} \left[f_{x_1 x_1}(a)h_1^2 + \right. \\ & \left. + 2f_{x_1 x_2}(a)h_1 h_2 + f_{x_2 x_2}(a)h_2^2 \right] + \frac{1}{3!} \left[f_{x_1 x_1 x_1}(a)h_1^3 + \right. \\ & \left. + 3f_{x_1 x_1 x_2}(a)h_1^2 h_2 + 3f_{x_1 x_2 x_2}(a)h_1 h_2^2 + f_{x_2 x_2 x_2}(a)h_2^3 \right] + \\ & + \dots + \frac{d^{r+1} f(c)}{(r+1)!}. \end{aligned}$$

Ha f háromváltozós függvény, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3)$ és ismét teljesülnek 1.11. feltételei:

$$\begin{aligned} f(b) = & f(a) + f_{x_1}(a)h_1 + f_{x_2}(a)h_2 + f_{x_3}(a)h_3 + \\ & + \frac{1}{2!} \left[f_{x_1 x_1}(a)h_1^2 + 2f_{x_1 x_2}(a)h_1 h_2 + f_{x_2 x_2}(a)h_2^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ 2f_{x_1 x_3}(a)h_1 h_3 + 2f_{x_2 x_3}(a)h_2 h_3 + f_{x_3 x_3}(a)h_3^2 \Big\} + \\ + \dots + \frac{d^{r+1}f(c)}{(r+1)!} .$$

2. TÖBBVÁLTOZÓS ABSZOLUT ÉS LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK

Az egyváltozós függvények mintájára adható meg egy többváltozós f függvény A halmazra vonatkozó /abszolút/ szélsőértékének, ill. $a \in A$ pontbeli lokális szélsőértékének definíciója:

2.1. DEFINÍCIÓ. Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) és $a \in A \subset H$, akkor f -nek az $a \in A$ pontban az A halmazra vonatkozóan /abszolút/ maximuma //abszolút/ minimuma/ van, ha $x \in A$ esetén

$$f(x) \leq f(a) \qquad [f(x) \geq f(a)] .$$

Ekkor az $a \in A$ pont f -nek A -ra vonatkozó /abszolút/ maximumhelye //abszolút/ minimumhelye/. Az /abszolút/ maximumhely és /abszolút/ minimumhely közös neve /abszolút/ szélsőértékhely.

2.2. DEFINÍCIÓ. Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$), akkor f -nek az $a \in \mathbb{R}^m$ pontban lokális maximuma /lokális minimuma/ van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $K(a, \delta) \subset H$, és $x \in K(a, \delta)$ esetén

$$f(x) \leq f(a) \qquad [f(x) \geq f(a)] .$$

Az a pontot ekkor f lokális maximumhelyének /lokális minimumhelyének/, közös néven lokális szélsőértékhelyének nevezzük.

2.3. MEGJEGYZÉS. A lokális szélsőértékhely tehát olyan $a \in \text{int } H$ pont, amely f -nek valamely alkalmas $K(a, \delta) = A$ halmazra vonatkozó /abszolút/ szélsőértékhelye.

2.4. MEGJEGYZÉS. A Weierstrass-tétel értelmében /2.1. jelöléseivel/, ha A korlátos és zárt, f folytonos A -n, akkor van A -nak olyan pontja, amely f -nek A -ra vonatkozóan /abszolút/ maximumhelye, továbbá olyan pontja, amely /abszolút/ minimumhelye. /II.3.13./. Arra vonatkozóan, hogy A -ban hol, ill. hány ilyen hely van, a Weierstrass-tétel semmit sem mond.

2.5. MEGJEGYZÉS. A gyakorlatban legtöbbször egy f függvény /abszolút/ szélsőértékhelyeit keressük valamely, a feladat természetéből adódó A halmazra vonatkozóan. Ezek, ha egyáltalán léteznek, vagy A -nak határpontjai, vagy A belső pontjai közül azok, amelyek lokális szélsőértékhelyek. Ezért elsősorban olyan feltételeket keresünk, amelyek a lokális szélsőértékhelyek felkeresését teszik lehetővé.

Viszonylag könnyű - az egyváltozós esethez hasonlóan - szükséges feltételt adni a lokális szélsőérték létezésére:

2.6. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$), $a \in \text{int } H$. Ha az a pont f -nek lokális szélsőértékhelye és itt f x_i ($i=1, \dots, m$) szerint parciálisan differenciálható, akkor

$$f_{x_i}(a) = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Bizonyítás. Ha f -nek lokális maximumhelye az $a \in A$ pont, ahol $a = (a_1, \dots, a_m)$, akkor nyilvánvaló, hogy a_1 lokális maximumhelye az $f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m) = h(x_i)$ egyváltozós függvényeknek, és így

$$\left[\frac{dh}{dx_i} \right]_{x_i=a_i} = h'(a_i) = f_{x_i}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_m) = f_{x_i}(a) = 0. *$$

2.7. MEGJEGYZÉS. Arra, hogy a 2.6. tételben megadott feltétel a lokális szélsőérték létezésének csak szükséges, de nem elégséges feltétele, könnyű példát mutatni.

Az $f(x, a) = xy$ függvénynek $(0, 0)$ környezetében nem lehet lokális szélsőértéke, hiszen $(0, 0)$ -hoz tetszőlegesen közel felvesz pozitív és negatív függvényértékeket egyaránt, ennek ellenére

$$f_x(0, 0) = [y]_{(0, 0)} = 0, \quad f_y(0, 0) = [x]_{(0, 0)} = 0.$$

2.8. MEGJEGYZÉS. Csupán a többváltozós szélsőérték létezésének 2.6.-ban megadott szükséges feltétele is lehetővé teszi sok esetben a vizsgált függvény adott halmazra vonatkozó /abszolút/ szélsőértékhelyeinek megkeresését. Ha ugyanis sikerül /legtöbbször a Weierstrass-tétel felhasználásával/ belátni, hogy az adott halmazon van a függvénynek /abszolút/ szélsőértékhelye, mégpedig a halmaz belsőjében, akkor elég a lehetséges szélsőértékhelyek közül /azon helyek közül, ahol f összes parciálisa eltűnik/ megkeresni azt a helyet, ahol a függvény értéke a legnagyobb vagy a legkisebb.

Például határozzuk meg, hogy az adott kerületi háromszögek közül melyik háromszögnek maximális a területe.

A háromszög oldalait x, y, z -vel jelölve tehát

$$(*) \quad x + y + z = 2p, \text{ ahol } 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq p, x + y \geq p.$$

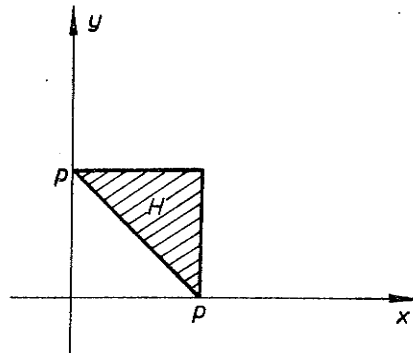
$$\text{A háromszög területe} \quad T = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

ahol p a háromszög fél kerületének mérőszáma /Heron képlete/.

(*)-ból z -t kifejezve x, y függvényeként és a terület képletébe behelyettesítve

$$T = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

adódik. A (*) feltételek miatt mondhatjuk, hogy a 19. ábrán látható H halmaz pontjaihoz a fenti utasítással területmértékszámokat rendelő függvény maximumhelyét keressük /maximumot H -ra vonatkozóan/.



19. ábra

Mivel H határán a T függvény mindenütt zérus, és a korlátos zárt H halmazon T folytonos, maximumát Weierstrass tétele értelmében, H belsejében kell, hogy felvegye. Mivel a maximumhelyen $T_x = T_y = 0$ kell, hogy legyen, nézzük meg, hol teljesül ez a feltétel:

$$T_x = \frac{-p(p-y)(x+y-p) + p(p-x)(p-y)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}},$$

$$T_y = \frac{-p(p-x)(x+y-p) + p(p-x)(p-y)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}}.$$

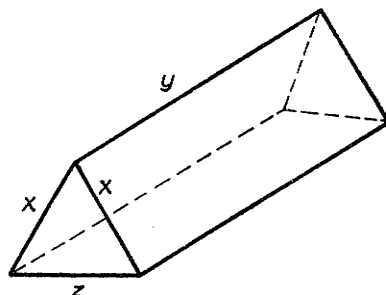
Mivel $p \neq 0$ és H belsejében $p-x \neq 0$, $p-y \neq 0$, ezekkel a tényezőkkel való rövidítés után a $T_x = T_y = 0$ feltételből

$$2x+y-2p = 0,$$

$$x+2y-2p = 0$$

adódik. Szélsőérték tehát ott lehet, ahol $x = y = \frac{2p}{3}$ és
 (*) értelmében $z = \frac{2p}{3}$. Mivel T H területén azonos 0,
 $x = y = z = \frac{2p}{3}$ esetében pedig $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, ezen értékek mellett valóban /abszolút/ maximuma van T-nek H-ban, az egyenlő területű háromszögek között az egyenlőoldalu háromszög tehát a maximális területű.

Második feladatként kérdezzük, hogy 12 m^2 felszínű sátoranyag felhasználásával hogyan kell a maximális térfogatu, egyenlőszáru háromszög alapu, egyenes hasáb alakú sátrat méretezni /a sátor gerincvonala a háromszög alapjával átellenes csucsán áthaladó oldalél, ezt jelöltük a 20. ábrán y-nal, x-szel a háromszöglap szarát, z-vel az alapját jelöltük a földre nem kívánunk sátoranyagot teríteni/. A háromszöglap területét $g(x,z)$ -vel jelölve, a feltétel szerint



20. ábra

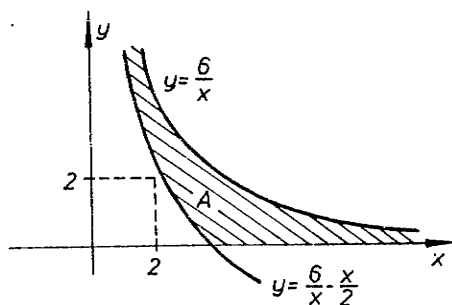
$$(**) \quad 2g(x,z) + 2xy = 12,$$

a sátoztér térfogata pedig

$$V = y \cdot g(x,z).$$

Ebből az összefüggésből z-t kiküszöbölhetjük /(**)-ból kifejezve g-t V-be behelyettesíthetjük, tehát végeredményben a $V(x,y) = y(6-xy)$ függvény maximumát keressük az x és y számára szóba jövő értékpárokból álló A halmazon. Nyilván e halmaz pontjaira $x > 0$, $y > 0$ kell, hogy fennálljon, továbbá mivel háromszöglap területének mérőszáma, $g(x,z) > 0$, (**)-ból adódik, hogy $xy < 6$ kell, hogy legyen. Mivel pedig adott száru egyenlőszáru háromszögek közül a derékszögű

egyenlőszáru háromszög a legnagyobb területű $\left[\frac{1}{2} a^2 \sin \gamma\right]$ maximális, ha $\sin \gamma = 1$, azaz $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ekkor pedig $g(x, z)_{\max} = \frac{x^2}{2}$, további feltétel, hogy $2xy \geq 12 - x^2$ /lásd (**)/. Végül is $A = \{(x, y): x > 0, y > 0, y < \frac{6}{x}, y \geq \frac{6}{x} - \frac{x}{2}\}$ /lásd 21. ábra/



21. ábra

Mivel rögzített y mellett V az x változónak szigorúan monoton fogyó függvénye, az A halmazon maximum csak az $y = \frac{6}{x} - \frac{x}{2}$ egyenletű görbén lehet. /Lokális szélsőérték hely nincs is, hiszen $V_x = -y^2$ A -ban nem tűnik el./ Az említett görbén

$$V = \left(\frac{6}{x} - \frac{x}{2}\right) \left(6 - 6 + \frac{x^2}{2}\right) = 3x - \frac{x^3}{4} = h(x).$$

Erre a $h(x)$ függvényre

$$h'(x) = 3 - \frac{3x^2}{4},$$

tehát h' monoton fogyó és az $x=2$ helyen tűnik el, h itt lesz a legnagyobb, s így A -n V -nek abszolút maximumhelye $x=2, y=2$.

Szavakban foglalva, maximális térfogatu a 12 m^2 felszínű sátor térfogata akkor lesz, ha gerincvonala, háromszöglapjának szára, és a háromszöglap területe 2 m , 2 m ill. 2 m^2 /azaz a háromszöglap 2 m -es száru egyenlőszáru derékszögű háromszög/.

2.9. MEGJEGYZÉS. Egyváltozós függvény esetében, ha f -nek az a hely pl. lokális minimumhelye, és ott f kétszer differenciálható, akkor $f'(a) = 0$, $f''(a) \geq 0$, ha ugyanis $f''(a) < 0$ volna, f értéke az a hely kicsiny környezetébe eső, a -tól különböző helyeken $f(a)$ -nál kisebb volna. Felvethető a kérdés, hogyan vihető át ez a gondolatmenet kétszer differenciálható többváltozós függvényekre, hogyan adódik ebből az ilyen tulajdonságu többváltozós függvények lokális szélsőértékhelyei létezésére szükséges feltétel.

Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) $a = (a_1, \dots, a_m) \in \text{int } H$ f -nek lokális minimumhelye, és legyen itt f kétszer differenciálható. Tetszőleges $h_1, \dots, h_m$ számokra legyen

$$s(t) = (a_1 + th_1, \dots, a_m + th_m), \quad g(t) = f[s(t)],$$

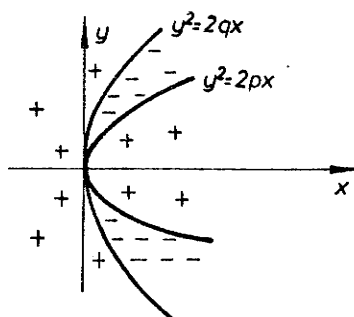
és t olyan kicsiny, hogy $s(t) \in H$. Az egyváltozós g függvénynek a $t=0$ hely lokális minimumhelye, tehát $g''(0) \geq 0$. Mivel azonban 1.10. értelmében $g''(0) = d^2f(a)$ a következőt állíthatjuk:

2.10. Tétel. Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) és $a \in \text{int } H$ f -nek lokális minimumhelye /maximumhelye/, amennyiben f itt kétszer differenciálható, akkor szükségképpen a $h_1, \dots, h_m$ változók minden értékénél

$$d^2f(a) \geq 0 \quad [d^2f(a) \leq 0]. \quad *$$

Kérdezhetjük, hogy - ismét az egyváltozós esethez hasonlóan - az utóbbi szükséges feltétel élesítésével nem adható-e meg elégséges feltétel is többváltozós függvények lokális szélsőértékhelyeinek létezésére. Erre 2.14.-ben még visszatérünk.

Az a gondolat, hogy f -nek lokális minimuma /maximuma/ van az a helyen, ha minden a -n áthaladó egyenes mentén minimuma /maximuma/ van, nem vezet célhoz, amit a következő példa mutat.



22. ábra

2.11. Vizsgáljuk meg az $f(x,y) = (y^2 - 2px)(y^2 - 2qx)$ ($0 < p < q$) képlettel megadott függvényt a $(0,0)$ hely környezetében.

Amint az a 22. ábráról is leolvasható, a függvény az $y^2 = 2px$ és $y^2 = 2qx$ parabolaívek közötti sávban negatív, egyébként pozitív értékeket vesz fel $\mathbb{R}^2$ -en, tehát a $(0,0)$ pont tetszőleges kis környezetében is vesz fel pozitív és negatív értékeket egyaránt, $(0,0)$ tehát nem lokális szélsőérték helye f -nek, pedig

$$f_x(0,0) = [-2py^2 + 4pqx - 2qy^2 + 4pqx]_{(0,0)} = 0,$$

$$f_y(0,0) = [2y^3 - 4qxy + 2y^3 - 4pxy]_{(0,0)} = 0.$$

Könnyű számolással igazolható, hogy ugyanakkor f -nek az $A = \{(x,y): x = at, y = bt \text{ (} a \neq 0, t \in \mathbb{R} \text{)}\}$ halmazra szorítkozáva, vagyis minden $(0,0)$ -n áthaladó egyenes mentén, a $(0,0)$ pontban ($t=0$ -ban) lokális minimuma van:

$$f(at, bt) = t^2(b^2t - 2pa)(b^2t - 2qa),$$

$$\left[\frac{df}{dt} \right]_{t=0} = 0,$$

$$\left[\frac{d^2f}{dt^2} \right]_{t=0} = [2(b^2t - 2pa)(b^2t - 2qa) + t(\dots)]_{t=0} = 8pqa^2 > 0.$$

Mielőtt egy elégséges feltételt, /mely többváltozós függvények lokális szélsőérték helyének létezését biztosítja/ megfogalmaznánk, néhány fogalmat célszerű bevezetnünk:

2.12. DEFINÍCIÓ. Tetszőleges $h_1, \dots, h_m$ változók másodfoku /kvadratikuss/ formája így adható meg:

$$(*) \quad q(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} h_i h_j \quad (a_{ij} = a_{ji}) .$$

$d^2f(a)$ ilyen kvadratikus forma./

A (*) kvadratikus formát előjelviszonyai alapján a következőképpen osztályozhatjuk:

- 1° q pozitív definit, ha $q > 0$ minden $a(0, \dots, 0)$ helytől különböző $h = (h_1, \dots, h_m)$ helyen; $[q(h) > 0, h \neq (0, \dots, 0)]$
- 2° q negatív definit, ha $q(h) < 0$, valahányszor $h \neq (0, \dots, 0)$;
- 3° q indefinit, ha felvesz pozitív értéket is, negatív értéket is;
- 4° q pozitív szemidefinit, ha $q(h) \geq 0$ minden h helyen, de van olyan $h \neq (0, \dots, 0)$ hely, ahol $q(h) = 0$;
- 5° q negatív szemidefinit, ha $q(h) \leq 0$ minden h helyen, és van olyan $h \neq (0, \dots, 0)$, ahol $q(h) = 0$.

2.13. MEGJEGYZÉS. Az előbb bevezetett fogalmak segítségével a 2.10.-ben adott szükséges feltétel ugy is megfogalmazható, hogy kétszer differenciálható f függvény esetén ahhoz, hogy az a hely lokális minimumhely /maximumhely/ legyen szükséges, hogy $d^2f(a)$ pozitív /negatív/ definit, vagy szemidefinit legyen.

Lokális szélsőérték létezésére mármost a következő elégséges feltétel adható meg:

2.14. Tétel. Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) és $a \in \text{int } H$ -ban f kétszer differenciálható, továbbá $f_{x_1}(a) = \dots = f_{x_m}(a) = 0$, és a $d^2f(a)$ másodrendű differenciál pozitív /negatív/ definit, akkor itt f -nek lokális minimuma /maximuma/ van.

| Bizonyítás. Tekintsük az $x=a$ helynek egy olyan kicsiny
| $K(a, \delta) \subset H$ környezetét, amelyben f és minden elsőrendű

parciális.deriváltja differenciálható. Ha $b \in K(a, \delta)$ és $b \neq a$, akkor a Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva /II.4.8./

$$(*) \quad f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(c)(b_i - a_i),$$

ahol $b = (b_1, \dots, b_m)$, $a = (a_1, \dots, a_m)$, és $c = (c_1, \dots, c_m)$ az a -ból b -be vezető szakaszon fekvő pont.

Mivel az f_{x_i} parciális deriváltak $K(a, \delta)$ -ban differenciálhatók, és $f_{x_i}(a) = 0$ ($i=1, \dots, m$), III.2.8. értelmében

$$\begin{aligned} f_{x_i}(c) &= f_{x_i}(c) - f_{x_i}(a) = \sum_{j=1}^m f_{x_i x_j}(a)(c_j - a_j) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \epsilon_{ij}(c)(c_j - a_j). \end{aligned}$$

(*) tehát a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_{x_i x_j}(a)(b_i - a_i)(c_j - a_j) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \epsilon_{ij}(c)(b_i - a_i)(c_j - a_j). \end{aligned}$$

Bevezetve a $d(a, b) = t$, $d(a, c) = qt$ ($0 < q < 1$), $\frac{b_i - a_i}{t} = h_i$

($i=1, \dots, m$) jelöléseket, mivel ekkor $b_i - a_i = th_i$,

$c_i - a_i = qth_i$, $\sum_{i=1}^m h_i^2 = 1$, végül is

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= qt^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_{x_i x_j}(a) h_i h_j + \\ &+ qt^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \epsilon_{ij}(c) h_i h_j. \end{aligned}$$

A jobb oldal első tagjában szereplő kettős összeg a $d^2f(a)$ másodrendű differenciál értéke a $h = (h_1, \dots, h_m)$ változókkal. Mivel $\sum_{i=1}^m h_i^2 = 1$, $h \in \mathbb{R}^m$ a $(0, \dots, 0)$ pont körüli egységnyi sugaru K gömbfelületen fekszik. A gömbfelület korlátos, zárt halmaz /II.3.22.7./ és $d^2f(a)$ a h változónak folytonos függvénye és értéke a feltevés szerint K minden pontjában pozitív, van tehát Weierstrass tétele /II.3.13./ értelmében olyan $\eta > 0$, hogy $d^2f(a)$ a h pontban $\geq \eta$.

A jobb oldal második tagjában az ε_{ij} függvények mindegyikének határértéke az a pontban 0, és így ha b és ezzel együtt c már elég közel fekszik a -hoz, akkor $|\varepsilon_{ij}| < \frac{\eta}{2m^2}$, azaz $f(b) - f(a) > \eta t^2 \left(\eta - \frac{\eta}{2} \right) > 0$, $f(b) > f(a)$, az a pont valóban minimumhelye a függvénynek. *

2.15. MEGJEGYZÉS. Arra vonatkozóan, hogy $d^2f(a)$ -ról hogyan dönthető el, hogy pozitív /negatív/ definit-e - bizonyítás nélkül - a következőket mondhatjuk:

Ha a $q(h) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} h_i h_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$), kvadratikus forma együtthatóiból felírjuk az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

szimmetrikus mátrixot, majd ennek bal felső sarkában álló elemekből készíthető un. sarokaldeterminánsait:

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

akkor a $q(h)$ kvadratikus forma pontosan akkor pozitív definit, ha ezek a determinánsok mind pozitívak, és $q(h)$ negatív definit, ha e determinánsok váltakozva negatívak és pozitívak.

2.16. MEGJEGYZÉS. Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) és $a \in \text{int } H$ -ban f kétszer differenciálható, továbbá $df(a) = 0$ és $d^2f(a)$ indefinit, akkor biztosan nincs f -nek az a helyen szélsőértéke /lásd 2.13. megjegyzést/, amennyiben azonban $d^2f(a)$ második differenciál szemidefinit, akkor azt, hogy f -nek lokális szélsőértéke van-e az a helyen, a második differenciál viselkedése alapján nem tudjuk eldönteni.

2.17. Keressük meg az $f(x,y)=(x^2+y^2-1)^2 - 8x^2$ képlettel megadott függvény lokális szélsőértékhelyeit.

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele $f_x = f_y = 0$, keressük tehát azokat az (x,y) helyeket, amelyekre ez fennáll:

$$f_x = 2(x^2 + y^2 - 1)2x - 16x = 4x(x^2 + y^2 - 4) = 0,$$

$$f_y = 2(x^2 + y^2 - 1)2y = 4y(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

$$A \quad 4x(x^2 + y^2 - 4) = 0,$$

$$4y(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

egyenletrendszert kielégítő értékrendszerek:

$$(x = 0, y = 0), (x = 0, y = \pm 1), (x = \pm 2, y = 0).$$

A d^2f második differenciál vizsgálatával fogjuk eldönteni, e helyek melyikén állítható, hogy f -nek lokális szélsőértéke van.

$$d^2f = f_{xx}h_1^2 + f_{xy}h_1h_2 + f_{yx}h_1h_2 + f_{yy}h_2^2.$$

az ennek együttthatóiból felírt mátrix tehát

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ \vdots & \vdots \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

a következő determinánsok előjeleit kell tehát az előbbi helyeken megvizsgálnunk:

$$f_{xx}, \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

Mivel $f_{xx} = 4(x^2+y^2-4)+8x^2$, $f_{xy} = 8xy$, $f_{yy} = 4(x^2+y^2-1)+8y^2$, a sarokaldeterminánsok értékét kiszámítva a $(0,0)$ helyen

$$-16, \begin{vmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = +64$$

adódik, $d^2f(0,0)$ negatív definit, $(0,0)$ -ban tehát f -nek lokális maximuma van; a $(0,\pm 1)$ helyeken

$$-12, \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -96$$

adódik, $d^2f(0,\pm 1)$ tehát indefinit, itt nincs szélsőérték; a $(\pm 2,0)$ helyeken

$$32, \begin{vmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 384$$

adódik, $d^2f(\pm 2,0)$ tehát pozitív definit, itt tehát minimum van.

Összefoglalva tehát, f -nek $(0,0)$ -ban maximuma, a $(\pm 2,0)$ helyeken minimuma van.

2.18. Feladatok.

1. Hogyan kell méretezni egy téglatest alaku, felül nyitott 4 m^3 térfogatu tartályt, ha elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot kívánjuk felhasználni.

2. Vizsgáljuk meg, szélsőértékhelye-e $(0,0)$ az $f(x,y) = x^2+y^3$, ill. $g(x,y) = x^2+y^4$ függvénynek.
3. Keressük meg az $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2-6x^2$ függvény lokális szélsőértékhelyeit, továbbá $\mathbb{R}^2$ -re vonatkozó abszolút minimumhelyét, és mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^2$ -re vonatkozóan abszolút maximumhely nincs.

V. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY (LEKÉPEZÉS). IMPLICIT MEGADÁSA

1. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY IMPLICIT MEGADÁSA

Az egyváltozós függvények analizisében említettük már, hogy a képlettel megadható függvényeket megadhatjuk explicit és implicit alakban. Explicit alakban történő megadásakor az x független változó és az y függő változó közötti kapcsolat az y -ra megoldott egyenlettel van megadva. Pl.

$$y = 5x^2 - x \sin 2x + 3, \text{ általában } y = f(x).$$

Implicit alaku megadásnál a két változó, y és x között szintén egy egyenletet adunk meg, amely azonban nincs y -ra megoldva, $g(x,y) = 0$ alaku, és egy adott x -hez egyértelműen azt az y -t rendeljük hozzá, amely x -szel együtt az egyenletet kielégíti.

Gyakran az implicit alakban megadott függvényt explicit alakra lehet hozni, pl. az $x^2 - 3y + 2 = 0$ egyenlőségből

$y = \frac{x^2 + 2}{3}$, az $x - y e^y = 0$ egyenletből azonban nem sikerül y -t x függvényeként képlettel kifejezni, sőt az sem világos közvetlenül, hogy mely x értékekhez lehet az egyenletet egyértelműen kielégítő y -t találni, valóban függvényt értelmeztünk-e, és ha igen, mi az értelmezési tartománya.

Általában egy síkgörbe egyenletét /vagyis a görbe pontjainak x és y koordinátája közötti összefüggést/ egy $g(x,y) = 0$ alaku egyenlet adja meg. Pl.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad \text{ill.} \quad x^2 - y^2 - 1 = 0$$

a $(0,0)$ középpontu egységnyi sugaru körvonal, ill. az $y = \pm x$ egyenletű aszimptotákkal rendelkező egyenlőszáru hiperbola egyenletét adja meg. Ilyen esetekben közvetlenül adódó kérdés, hogy át tudunk-e térni az implicit megadási módról az explicit $y = f(x)$ megadási módra, ami a későbbi vizsgálatok szempontjából sokkal előnyösebb. /A fordított irányu áttérés problémamentes, $y = f(x)$ explicit megadás mindig tekinthető úgy, mint egy $\underbrace{y - f(x,y)}_{g(x,y)} = 0$ implicit megadás./

Elvileg így fogalmazható meg felvetett kérdésünk:

1.1. Adott $g : H \rightarrow R$ ($H \subset R^2$) függvényhez lehet-e olyan $f : T \rightarrow R$ ($T \subset R$) függvényt találni, hogy az $\{(x,y) : (x,y) \in H, g(x,y) = 0\}$ ponthalmaz azonos legyen az $\{(x,y) : (x,y) \in R^2, x \in T, y = f(x)\}$ ponthalmazzal.

Erre a kérdésre általában negatív választ kell adnunk, tudniillik minden olyan esetben, amikor van olyan $x \in R$, amelyhez két különböző $y_1 \neq y_2$ található, amelyre $(x,y_1) \in H, (x,y_2) \in H, g(x,y_1) = g(x,y_2) = 0$. Ez volt a helyzet az egységkörvonal, ill. az egyenlőszáru hiperbola egyenletét implicit alakban megadó összefüggésnél is.

Pozitív válasz akkor és csak akkor adható a kérdésre, ha minden $x \in R$ -hez legfeljebb egy olyan $y \in R$ található, amelyre $(x,y) \in H$ és $g(x,y) = 0$. Ilyenkor a fenti T halmaz azokból az x -ekből áll, amelyekhez van ilyen y , és $f(x)$ éppen ezzel az y -nal lesz egyenlő.

Az 1.1. problémára mégsem kell negatív választ adnunk sokszor, ha az ott szereplő H halmazt leszűkítjük valamely alkalmas részhalmazára, pl. az egységkörvonal, ill. egyenlőszáru hiperbola esetében csak a felső /vagy csak az alsó/ félsíkba eső (x,y) pontokat engedünk meg.

Célszerű ezért az 1.1. problémát így megfogalmaznunk:

1.2. Legyen $g : H \rightarrow R$ ($H \subset R^2$). A $G \subset H$ halmazra és a g függvényre vonatkozó milyen feltételek biztosítják azt,

hogy minden $x \in R$ -hez legfeljebb egy olyan $y \in R$ tartozzék, amelyre $(x,y) \in G$, $g(x,y) = 0$; ha sikerült ilyen feltételt találnunk, ez teljesül, és T -vel jelöljük azoknak az x -eknek halmazát, amelyekhez található egy és csak egy y úgy, hogy $(x,y) \in G$, $g(x,y) = 0$; $x \in T$ esetén az alábbi tulajdonságu y -t $f(x)$ -szel jelölve, kérdezhetjük, milyen feltételek mellett lesz az így kapott /értelmezett/ f függvény folytonos, differenciálható, stb.

Ha tehát sikerült egy, a 2.1.-ben részletezett tulajdonságu G halmazt találni, látható, hogy az előbb említett f függvény egy megadási módját irtuk le, ez a megadás azonban nem explicit, hanem implicit megadás. Az 1.2.-ben felvetett kérdéseink második része ezen implicit függvény folytonosságával, differenciálhatóságával kapcsolatos.

Az 1.2.-ben felvetett kérdések még így is megfogalmazhatók:

1.3. Legyen adott a $g : H \rightarrow R$ ($H \subset R^2$) függvény. Keresünk g -hez olyan $f : T \rightarrow R$ ($T \subset R$) függvényt, amelyre $x \in T$ esetén $g(x, f(x)) = 0$.

Ilyen függvény általában több is van. Pl.

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \quad (H = R^2)$$

esetében a $g(x,y) = 0$ feltételnek eleget tesz akár

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (x \in (-1,1)), \text{ akár } f(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad (x \in (-1,1)),$$

akár pl.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{ha } x \in (-1,1) \cap Q, \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{ha } x \in (-1,1) \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Kérdezhetjük, milyen kiegészítő feltételeket kell tennünk ahhoz, hogy egy és csak egy függvényre teljesüljön

$$g(x, f(x)) = 0, \quad (x \in T) \dots$$

Folytonos f -re szorítkozva, az elsőnek megadott két függvény bármelyike megfelel, de ha azt is előírjuk még, hogy

$f(0) = 1$ legyen, akkor csak az $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ($x \in (-1,1)$) jöhet szóba. E példa nyomán általánosságban így fogalmazzuk meg problémánkat:

Egy $f : T \rightarrow R$ folytonos függvényt milyen feltételek mellett határozza meg egyértelműen az a tulajdonsága, hogy $g(x, f(x)) = 0$ ($x \in T$) és $f(a) = b$, ahol adott $a \in T$, $g(a,b) = 0$. Kérdezhetjük még azt is, hogy az így megadott f függvény mikor lesz differenciálható, stb.

1.4. Hasonló kérdések vethető fel három, ill. többváltozós függvények implicit megadásával kapcsolatban. Megadható pl. a térben egy felület $g(x,y,z) = 0$ alakú egyenlettel /amikor ebből $z = f(x,y)$ alakú explicit előállítást szeretnénk kapni/, implicit leképezésre juthatunk pedig pl. ha egy térgörbét két $g_1(x,y,z) = 0$ és $g_2(x,y,z) = 0$ egyenletű felület metszészvonalként értelmezzünk, kérdezhetjük, felírható-e ebből a görbe paraméteres egyenletrendszere.

1.5. Összefoglalva az eddigieket, általánosságban, m -változós implicit függvény megadásával kapcsolatban a következő kérdések vethetők fel:

Legyen $x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$, $g : H \rightarrow R$ ($H \subset R^{m+1}$).

- 1° Milyen megszorításokat kell tennünk a $G \subset H$ halmazra és a g függvényre, hogy a $g(x,u) = 0$ implicit megadás-sal egyértelműen értelmezzünk egy $f : T \rightarrow R$ ($T \subset R^m$) függvényt, melyre tehát $x \in T$ esetén $(x, f(x)) \in H$ és $g(x, f(x)) = 0$.
- 2° Allítható-e hogy az így értelmezett $u = f(x)$ implicit alakban is esetleg megadható/ f függvény folytonos, differenciálható?
- 3° Mikor állíthatjuk, hogy egy a $g(x,u) = 0$ összefüggésnek eleget tevő f folytonos függvényt egyértelműen meghatározza egy adott $a \in T$ helyen felvett értéke?

4° Ha f differenciálható, hogyan határozhatók meg parciális deriváltjai?

Mindezekre a kérdésekre - ha nem is teljes általános-ságban - a következő tételekben adunk választ:

1.6. Tétel. Legyen g egy J nyílt halmaz ($J \subset \mathbb{R}^m$) és egy I nyílt intervallum Descartes-szorzatán folytonos függvény: $g : H \rightarrow \mathbb{R}, J \times I = G \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Ha a g függvény G -n u sze-rint parciálisan differenciálható és $G_u \neq 0$, akkor min-den $a \in J$ -hez egyetlen olyan $b \in I$ tartozik, amelyre $g(a,b)=0$.

Bizonyítás. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy valamely $a \in J$ ponthoz két $b_1 \in I$ és $b_2 \in I$ ($b_1 < b_2$) is található, úgy, hogy

$$(*) \quad g(a, b_1) = g(a, b_2) = 0.$$

Mivel I egy intervallum a számegyenesen, az itt értel-mezett $h(u) = g(a,u)$ függvény $[b_1, b_2]$ -ben differenciál-ható ($h' = g_u$) és $(*)$ értelmében $h(b_1) = h(b_2) = 0$, azért Rolle tétele értelmében /Valós egyváltozós függ-vények differenciálszámítása IV.3.1./ van olyan $u_0 \in (b_1, b_2)$, hogy $h'(u_0) = 0$. Ez azonban azt jelentené, hogy /mivel $(a, u_0) \in G/$ $g_u(a, u_0) = 0$, ami ellentmond a $g_u \neq 0$ feltételnek. *

1.7. Tétel. Legyen $g : H \rightarrow \mathbb{R}, J \times I = G \subset \mathbb{R}^{m+1}$, J nyílt halmaz, I nyílt intervallum, a g függvény G -n foly-tonos, u szerint parciálisan differenciálható és $g_u \neq 0$. Azoknak az $a \in J$ pontoknak T halmaza, amelyekhez található olyan $b \in I$, melyre $g(a,b) = 0$, J -nek nyílt részhalmaza. /Esetleg üres./

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy ha $a \in T$, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy $K(a, \delta) \subset T$, ill. $x \in K(a, \delta) \Rightarrow x \in T$.

Jelöljük b -vel az $a \in T$ -hez egyértelműen tartozó $b \in I$ számot, vagyis legyen $g(a,b) = 0$. Mivel G nyílt, és $c = (a,b) \in G$, kell, hogy legyen olyan $\eta > 0$, hogy egyszerűsmond $K(c,\eta) \subset G$. Mivel az 1.6. tétel feltételei értelmében $g_u \neq 0$, tehát az 1^o bizonyításában értelmezett $h(u) = g(a,u)$ függvényre $h'(b) = g_u(a,b) = g_u(c) \neq 0$. Az egyváltozós h függvény tehát b -ben lokálisan növekedő, vagy fogyó kell, hogy legyen, aszerint, hogy milyen $h'(b)$ előjele. Tegyük fel, hogy $h'(b) > 0$, azaz h lokálisan növekvő b -ben, és mivel $h(b) = g(a,b) = 0$, ez azt jelenti, hogy b -hez elég közeli /alkalmas $\varepsilon' < \frac{\eta}{2}$ sugaru környezetbe eső/ b_1, b_2 -re $h(b_1) < 0$, $h(b_2) > 0$ ($b - \varepsilon' < b_1 < b < b_2 < b + \varepsilon'$) ill. a g függvényre a $g(a,b_1) < 0$, $g(a,b_2) > 0$ egyenlőtlenségek adódtak. Mivel azonban g folytonos G -n, az $a \in T$ hely alkalmas $\delta > 0$ ($\delta < \frac{\eta}{2}$) sugaru környezetében is fenn kell még, hogy álljon /azaz $x \in K(a,\delta)$ esetén is igaz/ $g(x,b_1) < 0$, $g(x,b_2) > 0$, g folytonossága miatt kell tehát, hogy legyen olyan $u \in (b_1, b_2)$ hely /Bolzano-tétel/, melyre $g(x,u) = 0$, ami épp azt jelenti, hogy $x \in T$. ($x \in K(a,\delta)$ és $b_1 \leq u \leq b_2$ esetében nyilván $(x,u) \in K(c,\eta) \in G$)

*

Az 1.6. tételben részletezett feltételek mellett a $g(x,u) = 0$ kapcsolattal egyértelműen megadott f függvényről ($D_f = T$) a következő tulajdonságokat állíthatjuk:

1.8. Tétel. Legyen $g : H \rightarrow R$, $J \times I = G \subset H \subset R^{m+1}$, $J \subset R^m$ nyílt halmaz, I nyílt intervallum, G -n g folytonos, parciálisan differenciálható és $g_u \neq 0$. Legyen $T \subset G$ azoknak az $a \in J$ pontoknak a halmaza, amelyekhez található olyan $b \in I$, melyre $g(a,b) = 0$. Értelmezzük az $f : T \rightarrow R$ függvényt úgy, hogy $x \in T$ esetén $f(x) \in I$, $g(x, f(x)) = 0$ legyen. Csak egy ilyen f függvény létezik, és f folytonos T -n.

Bizonyítás. Ha $x \in T$, akkor T értelmezése szerint van /1.6. értelmében pontosan egy/ olyan $u \in I$, melyre $g(x, u) = 0$; ezt $f(x)$ -szel jelölve olyan $f : T \rightarrow R$ ($T \subset R^m$) függvényt értelmeztünk, melyre $x \in T \Rightarrow f(x) \in I$, $g(x, f(x)) = 0$. Be szeretnénk bizonyítani, hogy tetszőleges $a \in T$ helyen f folytonos, vagyis tetszőleges $\epsilon > 0$ -hoz található olyan $\delta > 0$, hogy $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, ha csak $x \in K(a, \delta)$.

Legyen tehát $\epsilon > 0$ adott, $b = f(a)$. Az 1.7. bizonyításában követett okoskodással adódik b ottani $K(b, \epsilon')$

sugaru környezetére az $\epsilon' < \min(\epsilon, \frac{\eta}{2})$ megszorítással

élve, hogy $x \in K(a, \delta)$ esetén $|\delta| < \frac{\eta}{2}$ $c = (a, b)$,

$K(c, \eta) \subset G$ / $f(a) - \epsilon = b - \epsilon < b_1 < f(x) < b_2 < b + \epsilon = f(a) + \epsilon$, amiből épp a bizonyítandó egyenlőtlenség adódik. *

Az 1.8.-ban értelmezett f függvény differenciálhatóságáról a következő tételt mondhatjuk ki:

1.9. Tétel. Legyen $f : T \rightarrow R$, ahol $x \in T$ esetén $f(x) \in I$, $g(x, f(x)) = 0$ / $g : H \rightarrow R$, $J \times I = G \subset H \subset R^{m+1}$, $J \subset R^m$ nyílt halmaz, I nyílt intervallum, G -n g folytonos, $g_u \neq 0$, $T \subset G$

1° Ha $a \in T$ és g az $(a, f(a)) = (a, b)$ helyen differenciálható, akkor f is differenciálható a -ban és

$$f_{x_i}(a) = - \frac{g_{x_j}(a, b)}{g_u(a, b)};$$

2° Ha $x \in T$ és $g(x, u)$ az $(x, f(x))$ helyen r -szer differenciálható, akkor f is r -szer differenciálható x -ben, ha pedig g r -edrendű parciálisai folytonosak az $(x, f(x))$ helyen, akkor ugyanez áll f parciális deriváltjaira is.

Bizonyítás.

1° Ha $a \in T$ és $g(a, f(a)) = (a, b) = c$ -ben differenciálható, akkor az $x = (x_1, \dots, x_m) \in T$, $f(x) = u$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in T$ jelöléssel

$$g(x, u) - g(a, b) = \sum_{i=1}^m g_{x_i}(a, b)(x_i - a_i) + g_u(a, b)(u - b) + \sum_{i=1}^m \epsilon_i(x)(x_i - a_i) + \eta(x)(u - b).$$

Mivel $g(x, f(x)) = 0$, $g(a, b) = 0$ és a feltevés szerint $g_u \neq 0$ G-n, a fentiekből átrendezéssel adódik

$$u - b = f(x) - f(a) = - \sum_{i=1}^m \frac{g_{x_i}(a, b) + \epsilon_i(x)}{g_u(a, b) + \eta(x)} (x_i - a_i).$$

Ha $x \rightarrow a$, amikor f folytonossága miatt $u = f(x) \rightarrow f(a) = b$ $\epsilon_i(x) \rightarrow 0$, $\eta(x) \rightarrow 0$ /hiszen g differenciálható/, vagyis az előbbi összegben $(x_i - a_i)$ együtthatója

$$- g_{x_i} \cdot \frac{1}{g_u} \text{ -hez tart, vagyis}$$

$$- \sum_{i=1}^m \frac{g_{x_i}(a, b) + \epsilon_i(x)}{g_u(a, b) + \eta(x)} = - \sum_{i=1}^m \frac{g_{x_i}(a, b)}{g_u(a, b)} + \delta_i(x)(x_i - a_i)$$

ahol $\delta_i(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow a$, ami épp azt jelenti, hogy f differenciálható a -ban és

$$f_{x_i}(a) = - \frac{g_{x_i}(a, b)}{g_u(a, b)} . *$$

2° Az állítások az előbbieken bizonyítottakból a többváltozós függvények r -szeri differenciálhatóságának III.5.3. alatti, ill. az r -szeri folytonos differenciálhatóság III.5.5. alatti definíciójából közvetlenül adódnak. *

Például a bevezetőben megemlített $x - y \cdot e^y = 0$ egyenlet-nél, mivel $g(x,y) = x - y \cdot e^y$ $\mathbb{R}^2$ -en folytonos, differenciál-ható, $g_y = -e^y - ye^y = (y+1)(-e^y) \neq 0$ ha $y \neq -1$, az 1.6. té-tel jelöléseivel tehát $J = \mathbb{R}$, $I = (-1, +\infty)$, erre a $G = J \times I$ halmazra szorítkozva minden $x \in \mathbb{R}$ -hez pontosan egy olyan $y \in I$ tartozik, melyre $y = f(x) \in I$, $g(x, f(x)) = 0$, az így értelmezett $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, g G -beli diffe-renciálhatósága miatt differenciálható, és deriváltja

$$y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{g_x}{g_y} = - \frac{1}{(y+1)(-e^y)} = \frac{1}{(y+1)e^y}.$$

Pl. ha $x = 0$, akkor $x \in J$, mivel $g(0,y) = 0 - y \cdot e^y = 0$, ha $y = 0$ és $0 \in I$, tehát $f'(0) = \frac{1}{(0+1) \cdot 1} = 1$.

2. TÖBBVÁLTOZÓS LEKÉPEZÉS IMPLICIT MEGADÁSA. FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK

A többváltozós implicit függvéymegadásnál fellépő kér-dések szinte változatlanul felsorolhatók leképezések impli-cit megadásánál, mivel egy leképezést koordinátaival, te-hát többváltozós függvényekkel adunk meg, a lényeges több-letprobléma csak ott mutatkozik, hogy az implicit megadásu f többváltozós függvény értékkészletének /1.6. jelölései-vel az I intervallumnak/ mi veszi át a szerepét implicit leképezés esetében.

Okoskodásainkban lényeges volt, hogy I tetszőleges két b_1, b_2 pontjával együtt az azokat összekötő szakaszt is tartalmazta. Ezzel a tulajdonsággal $\mathbb{R}^m$ -ben az ún. konvex ponthalmazok rendelkeznek.



23. ábra

2.1. DEFINÍCIÓ. A $K \subset \mathbb{R}^m$ ponthalmaz konvex, ha $a, b \in K$ esetén az a -ból b -be vezető szakasz /I.2.10/ is része K -nak. /Pl. a 23. ábrán látható B halmaz nem konvex./

Bevezetve még az $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{m+p}$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $u = (u_1, \dots, u_p)$, $(x, u) = (x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_p)$ jelölést, a következő állítások mondhatók egy többváltozós implicit leképezés egyértelmű megadásáról, folytonosságáról, differenciálhatóságáról:

2.2. Tétel. Legyen $J \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $I \subset \mathbb{R}^p$ konvex, nyílt halmaz, $g : H \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($H \subset \mathbb{R}^{m+p}$), $J \times I = G \subset H$.

Tegyük fel a g leképezésről a nyílt G halmazon a következőket:

- legyen g folytonos,
- legyen g $u_1, \dots, u_p$ szerint parciálisan differenciálható;
- legyenek g koordinátáinak parciálisai / g k -adik koordinátájának u_j szerinti parciális deriváltját g_{ku_j} -vel jelölve ($k=1, \dots, p$; $j=1, \dots, p$) / G -n folytonosak és $x \in J$ esetén

$$\begin{vmatrix} g_{1u_1}(x, u^{(1)}) & \dots & g_{1u_p}(x, u^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{pu_1}(x, u^{(p)}) & \dots & g_{pu_p}(x, u^{(p)}) \end{vmatrix} \neq 0,$$

ahol tehát /a soronként esetleg különböző/, az u változó terében / $\mathbb{R}^p$ -ben/ felvett $u^{(k)}$ pontokra $u^{(k)} \in I$ és

$$g(x, u) = (g_1(x, u), \dots, g_p(x, u)).$$

Ekkor igazak az alábbi állítások:

- 1° adott $a \in J$ -hez legfeljebb egy olyan $b \in I$ található, hogy $g_k(a, b) = 0$ ($k = 1, \dots, p$);

- 2° azoknak az $a \in J$ pontoknak a halmaza, amelyekhez talál-
ható az előbbi tulajdonságu b , J -nek nyílt részhalmaza
/jelöljük ezt T -vel/;
- 3° értelmezzük az $f : T \rightarrow \mathbb{R}^p$ leképezést úgy, hogy $x \in T$
esetén $f(x) \in I$, $g(x, f(x)) = 0$ [$g_k(x, f(x)) = 0$, $k=1, \dots, p$],
legyen, ekkor f folytonos T -n;
- 4° csak egy olyan f leképezés van, melyre $x \in T \Rightarrow f(x) \in I$
és $g(x, f(x)) = 0$;
- 5° ha $a \in T$ és g az $(a, f(a)) = c$ pontban ($c \in G$) differen-
ciálható továbbá mindegyik parciális deriváltat a c
helyen véve

$$D = \begin{vmatrix} g_{1u_1} & \dots & g_{1u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{pu_1} & \dots & g_{pu_p} \end{vmatrix} \neq 0;$$

akkor f is differenciálható az a pontban és

$$f_{jx_i}(a) = - \frac{D_{ji}}{D} \quad (j = 1, \dots, p; i = 1, \dots, m).$$

ahol a D_{ji} determináns D -ből úgy keletkezik, hogy ebben
a j -edik oszlop k -adik eleme helyett $g_{kx_i}(c)$ -t írunk;

- 6° ha $x \in T$ és $g(x, u)$ az $(x, f(x))$ helyen r -szer differen-
ciálható, akkor f is r -szer differenciálható x -ben
/és f_j ($j=1, \dots, p$) r -edrendű parciális deriváltjai az
alaplévelek segítségével nyerhetők $h(a, f(a)) = h(c)$
alakú kifejezésekből, ahol h valamely g_k függvénynek
valamely legfeljebb r -edrendű parciális deriváltja/
/A tételt nem bizonyítjuk./

2.3. Az implicit leképezések elméletének fontos alkal-
mazása a matematikai programozás elméletében is fellépő un.

feltételes szélsőértékfeladatok megoldása. Nézzük meg először is, milyen jellegű problémák vezetnek ilyen feladatokra, mit is kell pontosabban feltételes szélsőérték alatt értenünk.

A lokális szélsőértékhely definíciójában azt kívántuk, hogy a tekintett függvénynek a kérdéses hely egy alkalmas környezetére vonatkozóan a hely abszolút maximumhely vagy minimumhely legyen. Ennél kicsit általánosabb a következő definíció:

2.4. DEFINÍCIÓ. Ha $f : H \rightarrow R$, $a \in A \cap H$, $A \subset R^m$, $H \subset R^m$, akkor az a pont f -nek A -ra szorítkozva lokális maximumhelye /minimumhelye/, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $x \in K(a, \delta) \cap A \cap H$ esetén $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$). Tulajdonképpen a IV.2.10.-beli példánál az $A = \{(x, y) : x = at, y = bt, a, b \in R, t \in R\}$ halmazra szorítkozva volt lokális minimuma a függvénynek $(0, 0)$ -ban:

Külön figyelmet érdemel az az eset, amikor az A halmazt azok az $x \in R^m$ pontok alkotják, amelyekben bizonyos adott $g_k : H_k \rightarrow R$ függvények eltűnnek, ilyenkor beszélhetünk feltételes szélsőértékről. Pontosabban

2.5. DEFINÍCIÓ. Ha $f : H \rightarrow R$, $g_k : H_k \rightarrow R$ ($k=1, \dots, p$), $H \subset R^m$, $H_k \subset R^m$, $a \in H \cap \bigcap_{k=1}^p H_k$, akkor azt mondjuk, hogy f -nek az a pont a $g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0$ feltételekkel feltételes lokális maximumhelye /minimumhelye/, ha $g_1(a) = \dots = g_p(a) = 0$ és van olyan $\delta > 0$, hogy

$$x \in K(a, \delta) \cap H \cap \left(\bigcap_{k=1}^p H_k \right), \quad g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0$$

esetén $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$).

Az f és a g_k függvényekre vonatkozó alkalmas megszorítások mellett az ilyen feltételes lokális szélsőértékhelyekre szükséges feltétel a következő:

2.6. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, $g_k : H_k \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, p$),
 $H \subset \mathbb{R}^{m+p}$, $H_k \subset \mathbb{R}^{m+p}$, $a \in \mathbb{R}^{m+p}$ és tegyük fel, hogy $a \in \text{int } H \cap$
 $\cap_{k=1}^p \text{int } H_k$, továbbá, hogy az a pontban f differenciál-

ható, g_k pedig a környezetében folytonosan differenciálha-
 tó. Ha az a hely f -nek feltételes lokális szélsőértékhelye
 a $g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0$ feltételek mellett, akkor vagy

$$\begin{pmatrix} g_{1x_1}(a) & \dots & g_{1x_{m+p}}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{px_1}(a) & & g_{px_{m+p}}(a) \end{pmatrix}$$

mátrixból alkotható összes p -edrendű determinánsok eltűn-
 nek, vagy pedig vannak olyan λ_k számok, hogy a

$$h = f + \sum_{k=1}^p \lambda_k g_k$$

függvényre $h_{x_1}(a) = \dots = h_{x_{m+p}}(a) = 0$. /Ezt úgy is mondhat-
 juk, hogy az $m+p$ -változós h függvény lehetséges szélsőérték-
 helyeit keresve tesszük parciálisait 0-val egyenlővé./

A feltételes szélsőérték felkeresésére szolgáló itt
 ismertetett eljárást Langrange-féle multiplikátoros eljá-
 rásnak nevezik. A tételt itt nem bizonyítjuk, és annak vizs-
 gálatával sem foglalkozunk, hogy az így szóbajövő helyeken
 csakugyan van-e szélsőérték. *

Példaként keressük meg, hogy az $x^2 + 9y^2 + 8z^3 - 1 = 0$
 egyenletű felületnek mely pontja esik legközelebb a $(0,0,0)$
 ponthoz.

Ilyen pont mindenestre van.

A $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ függvény helyett kereshetjük a függvény
 négyzetének minimumát, feladatunk tehát így fogalmazható
 meg:

Határozzuk meg, hogy az $f = x^2 + y^2 + z^2$ függvénynek a $g = x^2 + 9y^2 + 8z^3 - 1 = 0$ feltétel mellett hol van feltételes minimuma.

Egyetlen feltétel esetében az előbb általánosságban felírt mátrix determinánsai helyébe a g függvény parciális deriváltjai lépnek. Hol tűnnek el egyidejűleg a $g_x = 2x$, $g_y = 18y$, $g_z = 24z^2$, deriváltak? Világos, hogy csak a $(0,0,0)$ pontban, itt azonban a $g=0$ egyenlet nem áll. Képeznünk kell tehát a $h = f + \lambda g$ függvényt:

$$h = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + 9y^2 + 8z^3 - 1).$$

Feltételes szélsőérték csak olyan helyen lehet, ahol $h_x = h_y = h_z = 0$ és $g = 0$. E feltételből a

$$\begin{aligned} h_x &= 2x + 2\lambda x = 2(1+\lambda)x = 0, \\ h_y &= 2y + 18\lambda y = 2(1+9\lambda)y = 0, \\ h_z &= 2z + 24\lambda z^2 = 2(1+12\lambda z)z = 0 \end{aligned}$$

$$x^2 + 9y^2 + 8z^3 - 1 = 0$$

egyenletrendszer adódik x , y , z és λ meghatározására.

Az első két egyenletből vagy $x = y = 0$, vagy $x = 0$, $\lambda = -\frac{1}{9}$, vagy $\lambda = -1$, $y = 0$. Mindegyik esetben tovább vizsgálva a harmadik és negyedik egyenletet vagy

$$x = y = 0, \quad z = \frac{1}{2}, \quad \lambda = -\frac{1}{12z} = -\frac{1}{6}, \quad \text{vagy}$$

$$x = 0, \quad \lambda = -\frac{1}{9}, \quad z = 0, \quad y = \pm \frac{1}{3}, \quad \text{illetve}$$

$$x = 0, \quad \lambda = -\frac{1}{9}, \quad z = -\frac{1}{12\lambda} = \frac{3}{4}, \quad y^2 = \frac{1}{9} \left(1 - 8 \frac{27}{64} \right) < 0$$

/ami lehetetlen/, vagy

$$\lambda = -1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x = \pm 1, \quad \text{illetve}$$

$$\lambda = -1, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{12\lambda} = \frac{1}{12}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{215}{216}}$$

adódik. Minthogy f és h parciálisai mindenütt folytonosak, azért a keresett minimumot a talált véges számú pont valamelyike szolgáltatja. A kezdőponttól való távolságaik négyzeteit kiszámítva az

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, 1, \frac{433}{432}$$

-nek adódik, eszerint a minimumot a $\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$ és $\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$ pontok szolgáltatják.

VI. AJÁNLOTT IRODALOM

A.F. Bermant: Matematikai Analízis (I-II) (Tankönyvkiadó, 1951)

Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai (Műszaki Könyvkiadó, 1978)

B.P. Gyemidovics: Matematikai analízis feladatgyűjtemény (Tankönyvkiadó, 1971)

VII. UTUTATÁS A FELADATMEGOLDÁSHOZ

I.2.11.

1. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$; $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$;
 $d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$; $d(y,z) - d(x,y) \leq d(x,z)$.
2. A 2.5.-ben idézett Bunyokvszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenségben csak akkor áll egyenlőség, ha van olyan c szám, hogy $b_i = ca_i$ ($i=1, \dots, m$), vagy $a_i = cb_i$ ($i=1, \dots, m$).

I.3.11.

1. $a_n \in K(a, \epsilon)$, ha $n \geq n_1$; $b_n \in K(a, \epsilon)$, ha $n \geq n_2$;
 legyen $n_0 = 2n_1 + 2n_2$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+k} = 0$, $k = 1, \dots, m$, és így $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (0, \dots, 0)$.

I.4.8.

1. $a = (a_1, \dots, a_m) \in A$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in A$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in A$
 esetén $|x_i| \leq |x_i - a_i| + |a_i| \leq d(x, a) + \sum_{i=1}^m |a_i| \leq \delta(A) + \sum_{i=1}^m |a_i|$;
 $d(x, y) \leq \sum_{i=1}^m |x_i - y_i| \leq 2K$, ha $|x_i|, |y_i| \leq K$ minden i -re.
2. $x, y \in K(a, \epsilon)$ esetén $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2\epsilon$;
 $a = (a_1, \dots, a_m)$, $y = (a_1 + h, a_2, \dots, a_m)$, $y = (a_1 - h, a_2, \dots, a_m)$
 jelöléssel $x, y \in K(a, \epsilon)$, ha $|h| < \epsilon$, és $d(x, y) = 2|h|$.

I.5.21.

1. $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int} A \cap \text{int} B$, és $K(a, \epsilon_1) \subset A$, $K(a, \epsilon_2) \subset B$
 $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ esetén $K(a, \epsilon) \subset A \cap B$.
2. $\text{int} A \subset A$ evidens; $\text{int} A$ nyílt, mert $K(a, \epsilon) \subset A$,
 $x \in K(a, \epsilon)$, $d(a, x) = \delta < \epsilon$ esetén $K(x, \epsilon - \delta) \subset K(a, \epsilon) \subset A$; ha
 $G \subset A$, G nyílt, $a \in G$, akkor van olyan $\epsilon > 0$, hogy
 $K(a, \epsilon) \subset G \subset A$, $a \in \text{int} A$. 5.3. szerint $\bar{A} = R^m - \text{int}(R^m - A)$,
 így $\bar{A} \cup \bar{B} = (R^m - \text{int}(R^m - A)) \cup (R^m - \text{int}(R^m - B)) =$
 $= R^m - (\text{int}(R^m - A) \cap \text{int}(R^m - B)) = R^m - \text{int}((R^m - A) \cap (R^m - B)) =$
 $= R^m - \text{int}(R^m - A \cup B) = \overline{A \cup B}$.
3. $\delta(A) \leq \delta(\bar{A})$ evidens; $x, y \in \bar{A}$, $\epsilon > 0$ esetén van olyan $a, b \in A$,
 hogy $d(x, a) < \epsilon$, $d(y, b) < \epsilon$, és $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) +$
 $+ d(b, y) \leq \delta(A) + 2\epsilon$.

4.

	Belső	Külső	Határ	Torlódási	Izo- lált
a.	$K(x, \epsilon)$	$\{y: d(x, y) > \epsilon\}$	$\{y: d(x, y) = \epsilon\}$	$\bar{K}(x, \epsilon)$	$\emptyset$
b.	$\dot{K}(x, \epsilon)$	$\{y: d(x, y) > \epsilon\}$	$\{x\} \cup \{y: d(x, y) = \epsilon\}$	$\bar{K}(x, \epsilon)$	$\emptyset$
c.	$K(x, \epsilon)$	$\{y: d(x, y) > \epsilon\}$	$\{y: d(x, y) = \epsilon\}$	$\bar{K}(x, \epsilon)$	$\emptyset$
d.	mint c.	--	--	--	-
e.	$\bigtimes_1^m (a_i, b_i)$	$R^m - \bigtimes_1^m [a_i, b_i]$	$\bigtimes_1^m [a_i, b_i] \setminus \bigtimes_1^m (a_i, b_i)$	$\bigtimes_1^m [a_i, b_i]$	$\emptyset$
f.	mint e.	--	--	--	-
g.	$\emptyset$	$R^m - A$	A	$\emptyset$	A
h.	$\emptyset$	$\emptyset$	R^m	R^m	$\emptyset$

5. A feltétel evidensen elégséges, és 5.5. szerint szükséges.
6. A külseje $= R^m - \bar{A}$; A határa $= \overline{A \cap R^m} - A$; ha minden $K(a, \epsilon)$ -ban van A-nak b torlódási pontja, akkor $K(b, \delta)$ -ban van A-nak végtelen sok pontja, tehát ha $\delta > 0$ elég kicsiny és $K(b, \delta) \subset K(a, \epsilon)$, akkor $K(a, \epsilon)$ -ban is.
7. $A - B = A \cap (R^m - B)$.
8. Minden izolált pont befoglalható olyan gömbbe, amelyben A-nak egyetlen pontja van, sugara és középpontjának koordinátái racionálisak.

II.2.14.

$$1. \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{5x^2} = \frac{4}{5},$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in B}} f(x,y) = 0, \text{ ha } B \text{ az } x\text{-tengely.}$$

$$2. \text{ Legyen pl. } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = +\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} g(x) = b \in R,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} h(x) = +\infty. \text{ Ekkor } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} (f(x) + g(x)) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} (f(x) = h(x)) = +\infty;$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) \cdot g(x) = +\infty, \text{ ha } b > 0, \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) \cdot g(x) = -\infty,$$

$$\text{ha } b < 0; \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) \cdot h(x) = +\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \text{ (ha } b > 0,$$

ill. $b < 0$), stb.

3. $K(a, \epsilon) \cap A \subset K(a, \epsilon) \cap B$; ellenpélda az 1. alatti.

$$4. f = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases} \quad g(u) = \begin{cases} u, & \text{ha } u \neq 0 \\ 1, & \text{ha } u = 0 \end{cases}$$

$$g \circ f = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } x^2+y^2 = \frac{1}{k\pi}, k = 1, 2, 3, \dots \\ x \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f = 0$, $\lim_{u \rightarrow 0} g u = 0$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g \circ f$ nem létezik.

II.3.22.

1. $\alpha=1$ esetén az $y = mx$ egyenes mentén a határérték $\frac{m}{1+m^2}$ így x -ben és y -ban folytonos a függvény, de nem folytonos kétváltozósan.

$\alpha=2$ esetén folytonos, mert $\left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| \leq |y| \frac{|2xy|}{x^2+y^2} \leq |y|$

2. D_f -nek izolált pontja $(0,0)$, így itt f folytonos.

$$3. |f_k(x) - f_k(a)| \leq d(f(x), f(a)) \leq \sum_{k=1}^p |f_k(x) - f_k(a)|$$

$$4. K(a, \epsilon) \cap A \subset K(a, \epsilon) \cap B.$$

5. Legyen $B = \{t \in [\alpha, \beta] : \varphi(t) \in A\}$ és $\gamma = \sup B$. Ekkor $\varphi(\gamma)$ határpontja A -nak

6. $z \in A$ esetén $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + d(y, A) + \epsilon$,
ha $\epsilon > 0$ adott és $z \in A$ alkalmas; így $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$,
 $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$; szerepcserével
 $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

7. $f(a) > c$ esetén van olyan $K(a, \epsilon)$, hogy $x \in K(a, \epsilon)$ esetén

$f(x) > c$; így az első halmaz nyílt, hasonlóan a második, a továbbiak pedig ezeknek komplementumai.

8. Ha az első két halmaz minden c -re nyílt, akkor bármely $a \in \mathbb{R}^m$ belső pontja $\{x \in \mathbb{R}^m : f(x) < f(a) + \epsilon\} \cap \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) > f(a) - \epsilon\}$ -nak így f a -ban folytonos; ugyanez áll, ha az utolsó két halmaz zárt minden c -re.

9. $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$.

10. $\epsilon > 0$ -hoz legyen $K(x, \delta_x)$ az $x \in H$ pontnak olyan környezete, hogy $y \in K(x, \delta_x) \cap H$ esetén $|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$; fedjük be H -t véges számú ilyen gömbbel: $H \subset \bigcup_{i=1}^n K(x_i, \delta_{x_i})$, és legyen $\delta = \frac{1}{2} \min(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$.

III.1.10.

1. $u_x = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$u_{xx} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$u_{yy} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$u_{zz} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = 0$$

2. $u(0, t) = u(d, t) = 0$ mert $\sin 0 = \sin k\pi = 0$,

$$u_{tt} = \sin \frac{k\pi}{d} x \left(-a_k \frac{k^2 a^2 \pi^2}{d} \cos \frac{k\pi}{d} t - b_k \frac{k^2 a^2 \pi^2}{d} \sin \frac{k\pi}{d} t \right)$$

$$u_{xx} = \frac{k^2 \pi^2}{d} \sin \frac{k\pi}{d} x \left(a_k \cos \frac{k\pi}{d} t + b_k \sin \frac{k\pi}{d} t \right)$$

III.2.10.

$$1. f = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_x = \begin{cases} \frac{-y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_y = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

f_x, f_y értelmezés: tartománya R^2 .

$f(x,y) \neq (0,0)$ -ban differenciálható /elégséges feltétel teljesül/.

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2} \quad \text{nem létezik, így } f(0,0)\text{-ban nem differenciálható.}$$

$$3. \operatorname{grad}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \operatorname{grad} f_1 + c_2 \operatorname{grad} f_2.$$

III.3.7.

1. $(x,y) \neq (0,0)$ esetén

$$f_x = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2) \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$f_y = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

A (0,0) helyen

$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, így f itt differenciálható, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, s másutt f folytonosan differenciálható; látszik, hogy az $y = x$ egyenes mentén a (0,0) pontban f_x és f_y határértéke nem létezik.

2. $f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^m (f(b_i) - f(b_{i-1}))$, ahol $b_0 = a$, $b_m = x$,
 $b_i = (x_1, \dots, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$, $a = (a_1, \dots, a_m)$,
 $x = (x_1, \dots, x_m)$. Itt $f(b_1) - f(b_0) = f_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \epsilon_1(x_1 - a_1)$
 ha $i > 1$, $f(b_i) - f(b_{i-1}) = f_{x_i}(c_i)(x_i - a_i)$ ahol
 $c_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$, és y_i valahol a_i és
 x_i között van; f_{x_i} folytonosságából $f(b_i) - f(b_{i-1}) =$
 $= f_{x_i}(a)(x_i - a_i) + \epsilon_i(x_i - a_i)$, ahol $\epsilon_i \rightarrow 0, (i=1, \dots, m)$
 ha $x \rightarrow a$.

III.4.9.

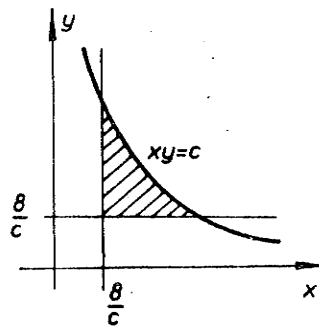
1. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos \alpha t \sin \alpha}{t^2} = \sin \alpha \cos \alpha$; $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$,
 de $\frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{h^2+k^2} \rightarrow 0$,
 ha $(h,k) \rightarrow (0,0)$.

2. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha}{t^4 (t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha)^2} = 0$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha}{(t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha)^2} =$
 $= 0$, ha $\alpha \neq 0, \pi$, különben pedig $\sin \alpha = 0$.
 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$,
 $\frac{df}{de} = 0 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha = 0$.

(0,0)-ban a függvény nem differenciálható, mert nem folytonos: $y^2 = x$ esetén $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{(2x^4)^2} = \frac{1}{4} \neq 0$.

IV.2.18.

1. Az alapélek x, y , a magasság z . Ekkor $xyz = 4$, $z = \frac{4}{xy}$, és a felszín $f(x, y) = xy + 2xz + 2yz = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}$.



24. ábra

Itt mint a három tag pozitív, és a második ill. a harmadik nagyobb mind $c = f(1,1)$, ha y ill. x elég kicsiny, az első pedig akkor, ha $xy > c$. Ezért elég egy korlátos, zárt halmazt vizsgálni, amelynek a belsejében biztosan van megoldás.

/24. ábra/

$f_x = y - \frac{8}{x^2}$, $f_y = x - \frac{8}{y^2}$ folytán $f_x = f_y = 0$ csak $x = y = 2$ esetén lesz; ez a megoldás.

2. $f(0, y) > 0$, ha $y > 0$, $f(0, y) < 0$, ha $y < 0$, így f -nek nincs szélsőértéke; g -nek evidensen minimuma van.

3. $\mathbb{R}^2$ -re vonatkozóan abszolút maximum nincs;

$f(x, y) \geq (x^2 + y^2)^2 - 6(x^2 + y^2)$, ha $x^2 + y^2 > 1$, és ez adott c -nél nagyobb, egy $(0,0)$ körüli körön kívül. Ezért van abszolút minimum, s ez lokális minimum is.

$f_x = 2x \cdot 2(x^2 + y^2 - 1) - 12x = 0$, $f_y = 2y \cdot 2(x^2 + y^2 - 1) = 0$ csak ha $4x(x^2 + y^2 - 4) = 0$, $4y(x^2 + y^2 - 1) = 0$.

Szélsőérték lehet a $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(2,0)$, $(-2,0)$ pontokban.

$$f_{xx} = 4(x^2+y^2-1) + 8x^2 - 12 = 12x^2 + 4y^2 - 16,$$

$$f_{xy} = 8xy, \quad f_{yy} = 4(x^2+y^2-1) + 8y^2 = 4x^2 + 12y^2 - 4, \quad \text{így}$$

$$(0,0): \begin{vmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 64 > 0, \quad \text{itt lokális maximum, } f(0,0) = 1;$$

$$(0,\pm 1): \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -96 < 0, \quad \text{itt nincs szélsőérték};$$

$$(\pm 2,0): \begin{vmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{itt lokális minimum, } f(\pm 2,0) = -15,$$

ez az abszolút minimum is.

VIII. JELÖLÉSEK, TÁRGYMUTATÓ

1. JELÖLÉSEK

/A valós egyváltozós függvények differenciálszámítása c. jegyzetben bevezetett és változatlan értelemben felhasznált jelölése felsorolását itt nem ismételjük meg./

$\mathbb{R}^m$	m-dimenziós tér /A valós számok halmazának, $\mathbb{R}$ -nek önmagával vett m-szeres Descartes-szorzata/. I.2.1.
$x = (x_1, \dots, x_m)$	az m-dimenziós tér pontja; az $x_1, \dots, x_m$ számok a pont koordinátái, I.2.1.
$d(x, y)$	$x, y \in \mathbb{R}^m$ távolsága. I.2.4.
$K(a, \varepsilon)$	$a \in \mathbb{R}^m$ ε -sugarú környezete /a középpontu ε sugarú m-dimenziós gömb/. I.2.7.
$\dot{K}(a, \varepsilon)$	$a \in \mathbb{R}^m$ ε sugarú pontozott környezete. I.2.8.
$\partial(A)$	a korlátos A halmaz átmérője. I.4.1.
$\text{int } A$	az A halmaz belseje. I.5.13.
$\bar{A}$	az A halmaz lezárása. I.5.13.
$f: H \rightarrow \mathbb{R}^p \ (H \subset \mathbb{R}^m)$	m-változós $\mathbb{R}^p$ -be vezető leképezés. II.1.9.
$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_{x=a} = (\partial_{x_i} f)_{x=a} = f'_{x_i}(a) = f_{x_i}(a)$	az $f: H \rightarrow \mathbb{R}^p, (H \subset \mathbb{R}^m)$ m-változós függvény $a = (a_1, \dots, a_m) \in \text{int } H$ pontbeli x_i szerinti parciális differenciálhányadosa /deriváltja/. III.1.1.

$[\text{grad } f]_{(a)}$	$(f_{x_1}(a) \dots f_{x_m}(a))$ vektor, ahol $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $H \in \mathbb{R}^m$, $a \in \text{int } H$. III.2.9.
$\underline{D}(a)$	Jacobi-féle mátrix. III.3.5
$\frac{df}{de}$	$f: H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) e egységvektorral megadott irányban vett iránymenti deriváltja. III.4.6. és 7.
$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f_{x_i x_j}$	másodrendű parciális derivált. III.1.5.
$df(a)$	az $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) függvény $a \in \text{int } H$ - beli differenciálja. IV;1.1. és 2.
$d^r f(a)$	az $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}^m$) függvény $a \in \text{int } H$ - beli r -edik differenciálja. IV.1.7.

2. TÁRGYMUTATÓ

átmérő /korlátos pontthalmazé/ I.4.1.

belső pont /pontthalmazé/ I.5.1.1°

Bolzano-tétel általánosítása II.3.20 és 21.

Bolzano-Weierstrass-tétel I.4.7. és I.5.6.

Borel-féle fedési tétel I.5.20.

Cantor-féle metszettétel I.5.19.

Differenciálhatóság /pontban/ III.2.2.

Differenciálhatóság /halmazon/ III.2.3.

Differenciál IV. 1.1.

Differenciál /magasabbrendű/ IV.1.6. és 8.

érintősík IV.1.5.

feltételes lokális szélsőérték V.2.5.

folytonos differenciálhatóság /pontban és halmazon/
III.3.1. és 2.

folytonos görbe II.3.17.

gradiens II.2.9.

halmaz belseje I.5.13.
halmaz külseje I.5.13.
halmaz lezárása I.5.13.
határpont I.5.1.3°

indefinit kvadratikus forma IV.2.12.
iránymenti derivált II.4.6. és 7.
ivszerűen összefüggő halmaz II.3.21.
izolált pont I.5.1.5°

Jacobi-mátrix III.3.5.

konves halmaz V.2.1.
korlátos pontthalmaz I.4.1.
korlátos pontsorozat I.4.5.
környezet I.2.7. és 8.
külső pont I.5.1.2°

Lagrange-féle középértéktétel II.4.8.
leképezés /m-változós/ II.1.9.

magasabbrendű parciális deriváltak III.1.5.
másodfoku kvadratikus forma IV.2.12.

negatív definit kvadratikus forma IV.2.12.
negatív szemidefinit kvadratikus forma IV.2.12.
nyílt halmaz I.5.7.

parciális derivált III.1.1.
parciális deriváltfüggvény III.1.3.
pontozott környezet I.2.8.
pontsorozat konvergenciája I.3.2.
pozitív definit kvadratikus forma IV.2.12.
pozitív szemidefinit kvadratikus forma IV.2.12.

részsorozat I.3.7.

$\mathbb{R}^m$ m-dimenziós tér I.2.1.

szakasz $/x, y \in \mathbb{R}^m$ pontokat összekötő/ I.2.9.

távolság $\mathbb{R}^m$ -ben I.2.4.
Taylor-formula /többváltozós/ IV.1.11.
torlódási pont I.5.1.4°
totális differenciálhatóság III.2.2.
többdimenziós tér I.2.1.
többdimenziós tér pontja, ennek koordinátái I.2.1.
többdimenziós térbe vezető leképezés II.1.9.
többdimenziós térbe vezető leképezés folytonossága II.3.4.
többdimenziós térbe vezető leképezés differenciálhatósága
III.3.5.

többdimenziós térbe vezető leképezés implicit megadása
V.2.2.

többváltozós abszolút szélsőérték IV.2.1.

többváltozós függvény II.1.1.

többváltozós függvény differenciálhatósága III.2.2.

többváltozós függvény differenciálja IV.1.1.

többváltozós függvény egyenletes folytonossága II.3.14.

többváltozós függvény folytonossága /pontban és halmazon/
II.3.2. és 7.

többváltozós függvény folytonos differenciálhatósága
III.3.1. és 2.

többváltozós függvény határértéke II.2.1. és 2.6.

többváltozós függvény iránymenti deriváltja III.4.6.

többváltozós függvény kétszeri differenciálhatósága
III.5.1.

többváltozós függvény második differenciálja IV.1.6.

többváltozós függvény magasabbrendű differenciálja IV.1.7.

többváltozós függvény többszöri differenciálhatósága
III.5.3.

többváltozós láncszabály III.4.1.

Weierstrass-tétel II.3.13.

zárt halmaz I.5.7.

TARTALOMJEGYZÉK

I. PONTHALMAZOK AZ m -DIMENZIÓS (EUKLIDESZI) TÉRBEN	3
1. Többváltozós függvények	3
2. m -dimenziós tér. Távolság /Cauchy-egyenlőtlenség/. Környezet. Szakasz	6
3. Pontsorozatok konvergenciája R^m -ben	12
4. Korlátos ponthalmaz. Átmérő. Bolzano-Weierstrass-tétel	18
5. Belső, külső, határ-, torlódási, izolált pont. Nyílt halmaz, zárt halmaz. Cantor és Borel tétel	22
II. A TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ÁLTALÁNOS TULAJDONSÁGAI	32
1. m -változós függvény és leképezés. Szemléltetés. Többváltozós összetett függvény és leképezés ..	32
2. m -változós függvény határértéke	42
3. m -változós függvény folytonossága	52
III. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA	63
1. Parciális deriváltak	63
2. Totális differenciálhatóság	70
3. Folytonos differenciálhatóság	76
4. Többváltozós összetett függvények differenciálhatósága /láncszabály/	80
5. Többszöri differenciálhatóság	88
IV. DIFFERENCIÁLOK, A TÖBBVÁLTOZÓS DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA	96
1. Elsőrendű és magasabbrendű differenciálok. Taylor-formula	96
2. Többváltozós abszolút és lokális szélsőérték ..	107
	151

V. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY (LEKÉPEZÉS) IMPLICIT MEGADÁSA	121
1. Többváltozós függvény implicit megadása	121
2. Többváltozós leképezés implicit megadása. Feltételes szélsőérték	129
VI. AJÁNLOTT IRODALOM	136
VII. UTMUTATÁS A FELADATMEGOLDÁSHOZ	137
VIII. JELÖLÉSEK. TÁRGYMUTATÓ	146
1. Jelölések	146
2. Tárgymutató	147

Kedves Jegyzetfelhasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői díjazást kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*.

A jegyzet címe: **VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS**

A jegyzet szerzője: **Császár Ákosné**

A jegyzet azonosítója: **051354**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75%):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(A túloldalon folytatható)

