



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Farkas Miklósné

**KÖZÖNSÉGES
DIFFERENCIÁLEGYENLETEK**



Műegyetemi Kiadó, 2009

Szerző:
Farkas Miklósné

(Hetedik utánnymás)
egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **051358**



**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának**
megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 12,6(A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 7065/09

ELŐSZÓ

Ez a jegyzet a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Karának hallgatói számára készült és feltételezi, hogy az olvasó ismeri a halmazalgebra, a valós egyváltozós és többváltozós analízis alapjait és a lineáris algebra alapfogalmait.

A jegyzetben az elnevezéseket a megfelelő szó vagy kifejezés aláhúzással és az azt tartalmazó szöveggel értelmezzük.

Az irodalomjegyzékben a differenciálegyenletek iránt mélyebben érdeklődő olvasóknak ajánlott művek mellett azok a jegyzetek vannak felsorolva amelyekből az alapokat megismerte a hallgató. E műveket sorszámmal adjuk meg és a szövegben ezzel a sorszámmal hivatkozunk rájuk.

A tételek, fogalmak jobb megértését, illetve alkalmazását szolgálja a Villamosmérnöki Kar Közöséges differenciálegyenletek című példatára.

Budapest, 1980

A szerző

TARTALOMJEGYZÉK

JELÖLÉSEK	7
ELSŐ FEJEZET	9
Elsőrendű differenciálegyenletek	9
1. Alapfogalmak	9
2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek és az arra vissza- vezethető típusok	23
3. Explicit elsőrendű lineáris differenciálegyenletek és az arra visz- szavezethető Bernoulli-féle differenciálegyenlet	32
4. Egzakt differenciálegyenletek és integráló tényezők	41
5. Cauchy-Lipschitz-féle egzisztencia és unicitás tétel	48
MÁSODIK FEJEZET	66
Közönséges differenciálegyenlet-rendszerek és magasabbrendű dif- ferenciálegyenletek	66
1. Alapfogalmak. Átviteli elv. Hiányos másodrendű differenciál- egyenletek.	66
2. Differenciálegyenlet rendszerekre vonatkozó kezdetiérték feladat egyértelmű megoldhatósága	75
HARMADIK FEJEZET	82
Lineáris differenciálegyenletek	82
1. Lineáris differenciálegyenletek általános megoldásának szer- kezete	82
2. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet	98
NEGYEDIK FEJEZET	105
Lineáris differenciálegyenlet rendszerek	105
1. Lineáris differenciálegyenlet rendszerek általános megoldásá- nak szerkezete	105
2. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet rendszerek ...	113
Rövid történeti áttekintés	138

JELÖLÉSEK

$x \in A$	x az A halmaz eleme,
$A \times B$	az A és B halmazok direkt szorzata,
$\mathbb{R}^n$	az n dimenziós euklideszi tér, $n = 1, 2, \dots$
I	egydimenziós nyílt intervallum,
J	egydimenziós nyílt vagy zárt intervallum,
x^0	az euklideszi tér vektora,
Ω	az euklideszi tér nyílt és összefüggő pontthalmaza, vagy tartománya,
$\inf A$	az A valós számhalmaz alsó határa,
$\sup A$	az A valós számhalmaz felső határa,
$C^0(I)$	Az I intervallumon folytonos függvények halmaza,
$C^1(I)$	az I intervallumon folytonosan differenciálható függvények halmaza,
$\varphi(x)$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ -be képező adott függvény, az $x \rightarrow \varphi(x)$ jelölés rövid alakja,
$\underline{\varphi}(t)$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ -be képező adott függvény, a $t \rightarrow \underline{\varphi}(t)$ jelölés rövid alakja,
$\underline{\underline{A}}(t)$	olyan mátrix, amelynek a $a_{ik}(t)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ elemei valós egy- változós függvények, $n \geq 2$,
$f(x, y)$	$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ -be képező adott függvény,
$\underline{f}(t, \underline{x})$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ -be képező adott függvény,
y	a differenciálegyenletekben szereplő $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ -be képező ismeret- len függvény,
$\underline{x}$	a differenciálegyenlet rendszerekben szereplő $\underline{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ -be képező ismeretlen függvény,
$\rho(\varphi_1, \varphi_2)$	a φ_1, φ_2 függvények távolsága.

ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. Alapfogalmak

A természeti törvények vizsgálata során felismerték, hogy az anyagi világban lejátszódó mozgásokat, jelenségeket vagy folyamatokat függvényekkel lehet leírni. A folyamatot meghatározó törvény matematikai modellje, amely számos idealizáló feltétel és egyszerűsítés utáni absztrakció eredménye, igen gyakran olyan egyenlet amelyben a folyamatot leíró ismeretlen függvény, annak ismeretlen deriváltja, illetve deriváltjai szerepelnek. Az ilyen egyenleteket differenciálegyenleteknek nevezzük. Ha az ismeretlen függvény valós egyváltozós, akkor közönséges a differenciálegyenlet, ha valós többváltozós és az egyenletben a parciális deriváltak szerepelnek, akkor parciális a differenciálegyenlet. Ebben a jegyzetben a közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

A következő példákkal illusztráljuk, hogy egy mechanikai és egy elektromos folyamatot meghatározó törvény matematikai modellje közönséges differenciálegyenlet:

1.1. Példa. Egy egyenesen mozgó pont helyzetének meghatározása az s úgynevezett ut-idő függvénnyel történik. Ha ismerjük a pont folytonos v sebességfüggvényét és a $t_0 = 1$ s időpillanatban, $s_0 = 5$ m helyzetét, akkor a sebesség értelmezése szerint

$$s' = v; \quad s(1) = 5,$$

a mozgás matematikai modellje. Egy s függvény akkor és csak akkor elégíti ki a fenti függvényegyenletet, ha az v -nek primitív függvénye. A primitív függvények között pontosan egy van amely az 1 s időpillanatban az 5 m értéket veszi fel, és pedig az

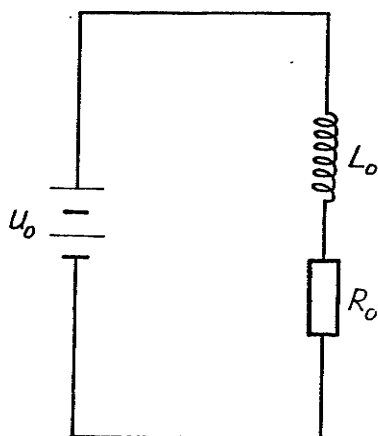
$$s(t) = 5 + \int_1^t v(\tau) d\tau$$

összefüggéssel adott ut-idő függvény.

1.2. Példa. Adott L_o induktivitású és R_o ohmos ellenállású áramkörbe U_o egyenfeszültséget kapcsolunk. (1. ábra). Az $i(t)$ áramerősség időben való változását leíró fizikai törvény matematikai modellje az

$$L_o \frac{di}{dt} + R_o i(t) = U_o$$

differenciálegyenlet. Amint azt a későbbiekben látni fogjuk az egyenletnek az



1. ábra.

$$i(t) = \frac{U_o}{R_o} + c e^{-\frac{R_o}{L_o} t}, \text{ (ahol } c \text{ tetszőle-}$$

ges valós szám), képlettel adott függvényssereg bármely egyede "megoldása" és más megoldása nincs.

Az 1.2. Példában szereplő függvényssereg képlete valós c paramétert tartalmaz. Az ilyen függvényssereg "grafikonsseregének" egyenlete az X, Y koordinátarendszerben

$$y = \varphi(x, c), \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}, (x, c) \in H \subset \mathbb{R}^2 \text{ alakú.}$$

Az olyan egyenletet, amely a c valós paraméter minden rögzített értékére egyetlen görbét határoz meg egyparaméteres görbeseregnek (vagy egyparaméteres görbesereg egyenletének) nevezzük.

Az egyparaméteres görbeseregnek fontos szerepe van a műszaki gyakorlatban és gyakran szükség van az ilyen görbesereg differenciálegyenletére.

Azt a közönséges differenciálegyenletet, amelyet valamely egyparaméteres görbesereg minden egyede "kielégít", a görbesereg differenciálegyenletének nevezzük. Meghatározása úgy történik, hogy az

$$y = \varphi(x, c)$$

$$y' = \varphi'_x(x, c)$$

egyenletrendszerből kiküszöböljük a c paramétert. A c paraméter kiküszöbölésének elégséges feltétele valamely $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ pont elég kis k környezetében a következő:

$\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$, folytonosan differenciálható, $H \subset \mathbb{R}^2$,

$$y_0 = \varphi(x_0, c_0),$$

$$\varphi'_c(x_0, c_0) \neq 0,$$

(lásd [3], az implicit függvény létezésére vonatkozó elégséges feltételt.) Ekkor ugyanis az

$$y = \varphi(x, c)$$

egyenlettel, $(x, y) \in K$ esetén, $c(x, y)$ "egyértelműen definiált" implicit függvény és a "görbesereg differenciálegyenlete" a következő":

$$y' = \varphi'_x(x, c(x, y)).$$

A $c : K \rightarrow \mathbb{R}$, függvény létezése szemléletesen azt jelenti, hogy a K környezet minden (x_0, y_0) pontján át egy és csak egy görbe halad. Ha $c_0 = c(x_0, y_0)$, akkor a görbe egyenlete $y = \varphi(x, c_0)$.

A közönséges differenciálegyenletet elsőrendűnek nevezzük, ha az ismeretlen függvény egyenletben szereplő legmagasabb rendű deriváltja az első derivált. Az 1.1. és az 1.2. Példákban szereplő differenciálegyenletek elsőrendűek és az első derivált mindkettőből egyértelműen kifejezhető.

Az elsőrendű differenciálegyenletet explicitnek nevezzük, ha az első derivált a többi változóval kifejezett. Legyen az $f(x, y)$ valós kétváltozós függvény értelmezési tartománya az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. Az explicit differenciálegyenletet a következőképpen jelöljük:

$$y' = f(x, y); \quad (x, y) \in \Omega.$$

Ha az első derivált kifejezése nem lehetséges, esetleg azonos átalakításokkal sem, akkor az elsőrendű differenciálegyenlet implicit. Ennek szokásos jelölése:

$$F(x, y, y') = 0$$

A következő példában szereplő görbesereg differenciálegyenlete implicit.

1.3. Példa. Irjuk fel az

$$y = \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}, \quad c > 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

parabolásereg differenciálegyenletét.

MEGOLDÁS. Az analizisből ismeretes, hogy a parabolásereg egyedei nem metszik egymást, azaz egyrétűen fedik le a síknak azt a részét, amely nem tartalmazza a nem negatív Y tengelyt. A parabolásereg differenciálegyenletét az

$$y = \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}$$

$$y' = \frac{x}{c}$$

egyenletrendszerből a c paraméter kiküszöbölésével nyerjük. Ez a differenciálegyenlet a következő:

$$2yy' = x(y'^2 - 1).$$

A differenciálegyenlet implicit elsőrendű közönséges. Az $y = \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}$, $c < 0$, $x \in \mathbb{R}$, parabolásereg differenciálegyenlete szintén ez az egyenlet.

Lineáris az elsőrendű differenciálegyenlet, ha olyan alakú vagy azonos átalakításokkal olyan alakra hozható, hogy a bal oldalon az ismeretlen függvénynek és a deriváltfüggvénynek ismert függvényekkel képzett lineáris kombinációja áll, a jobb oldalon pedig ismert függvény van. Az 1.1. és az 1.2. Példában szereplő két differenciálegyenlet explicit elsőrendű lineáris.

A régebben megismert egyenletek, így például az első és másodfokú egyismeretlenes egyenlet, az exponenciális, a trigonometrikus egyenlet megoldásai számok voltak. A differenciálegyenletek megoldásai függvények. Ezt fogalmazzuk meg a következő definícióban:

1.4. Definíció. Az

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

explicit elsőrendű differenciálegyenletet megoldásának, vagy megoldásfüggvényének nevezzük azt a legalább egyszer differenciálható, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

φ értelmezési tartománya valamely I intervallum,

$$(x, \varphi(x)) \in \Omega, \quad x \in I,$$

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)), \quad x \in I.$$

Az $(x, \varphi(x))$ pontokkal képzett grafikon, azaz a

$$\Gamma = \{ (x, \varphi(x)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 : x \in I \}$$

ponthalmaz neve megoldásgörbe vagy integrálgörbe. (A megoldásgörbe egyenlete $y = \varphi(x)$).

1.5. Definíció. Az

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

differenciálegyenlet szinguláris megoldásának vagy egyensúlyi helyzetének nevezzük azt a $\varphi(x) \equiv \varphi_0$ állandó függvényt, amelyre

$$f(x, \varphi_0) \equiv 0, \quad x \in I, \text{ azonosság teljesül.}$$

A szinguláris megoldás állandó megoldásfüggvénye a differenciálegyenletnek, mert

$$\frac{d\varphi_0}{dx} \equiv 0 \equiv f(x, \varphi_0), \quad x \in I.$$

Egy differenciálegyenletnek általában végtelen sok megoldása van. Egyetlen megoldását partikuláris megoldásnak nevezzük.

Korábbi tanulmányaink alapján azonnal meg tudjuk oldani az

$$y' = f(x)$$

differenciálegyenletet, ahol $f(x)$ valamely I intervallumon folytonos függvény. Az analizisből ismert ugyanis, hogy ha az x független változó egy intervallumon változik, akkor azok és csak azok a függvények tesznek eleget a differenciálegyenletnek amelyek primitív függvényei az $f(x)$ függvénynek, azaz amelyek a

$$H = \left\{ y \in C^1(J) : y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + c, \quad x_0, x \in J, c \in \mathbb{R} \right\}$$

függvényosztálynak elemei. A megoldásgörbék egyetlen primitív függvény grafikonjának "Y tengely irányu" eltolásával adhatók meg.

Kissé nehézkesebben ugyan, de az előbbihez hasonlóan oldhatjuk meg az

$$y' = f(y)$$

differenciálegyenletet, ahol $f(y)$ valamely J_1 intervallumon folytonos függvény és $y' = f(y) \neq 0$, $y \in J_1$. Ebben az esetben ugyanis, amint azt az analízisben megismertük, az ismeretlen $y(x)$ függvény deriváltfüggvényének reciprokával felírhatjuk az $y^{-1}(x)$ inverz függvényre vonatkozó

$$\frac{dy^{-1}}{dx} = \frac{1}{f(y^{-1}(x))} = \frac{1}{f(x)}$$

differenciálegyenletet, amelynek összes megoldását a

$$H_1 = \left\{ y^{-1} \in C^1(I_1) : y^{-1}(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{f(t)} dt + c, x_0 \in J_1, c \in \mathbb{R} \right\}$$

függvényosztály elemei adják. Ha egy ilyen y^{-1} függvény értékkészletét J -vel jelöljük, akkor inverze, y az J intervallumon kielégíti az $y' = f(y)$ differenciálegyenletet.

Igy például az

$$y' = 1 + y^2$$

differenciálegyenlet $f(x, y) = 1 + y^2$ jobb oldala az $J_1 = (-\infty, +\infty)$ intervallumon folytonos és sehol sem zérus, tehát az inverz függvényre vonatkozó

$$\frac{dy^{-1}}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

differenciálegyenlet összes megoldása, $x_0 = 0$ választással, a

$$\varphi^{-1}(x) = \arctg x + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

egyparaméteres függvénysereg. Ha például a $c = 0$ -hoz tartozó megoldásfüggvényt tekintjük, akkor a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ értékkészleten mint értelmezési tartományon az eredeti $y' = 1 + y^2$ differenciálegyenlet $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ megoldásfüggvényét kapjuk. Bármely rögzített $c_0 \neq 0$ esetén a

$$\varphi(x) = \operatorname{tg}(x - c_0), \quad -\frac{\pi}{2} + c_0 < x < \frac{\pi}{2} + c_0,$$

megoldásfüggvény egy π hosszúságú intervallumon értelmezett. $\square$

Geometriailag is szemléltethetjük az

$$y' = f(x, y); \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

elsőrendű explicit differenciálegyenlet megoldásait. A tetszőlegesen rögzített $P_0(x_0, y_0) \in \Omega$ pontot az $f(x_0, y_0) = y'(x_0)$ irántangens értékkel együtt a P_0 ponthoz tartozó vonalelemnek nevezzük. A vonalelemek "összességét" iránymezőnek nevezzük. Az iránymezőt úgy szemléltetjük, hogy minden kijelölt $P(x, y)$ ponton át $f(x, y)$ irántangensű kis egyenesszakaszt húzunk. Így például a 2. ábrán látható az

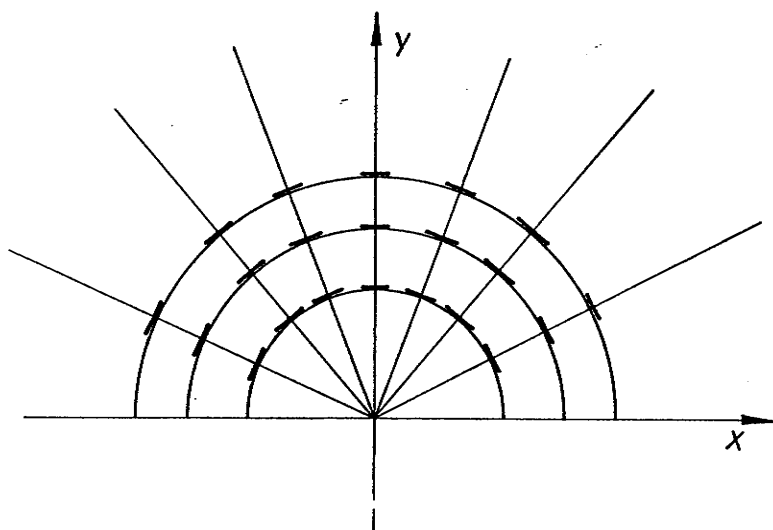
$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y > 0,$$

differenciálegyenlethez tartozó egy iránymező. Az iránymezőhöz "illeszkedő" görbék, a megoldásgörbék, az $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in (0, r)$, $0 < r < \infty$ egyenlettel adott félkörök. A megoldásgörbék megrajzolásához hozzásegít az $f(x, y) = c$ egyparaméteres görbesereg, (c az $f(x, y)$ függvény értékkészletének tetszőleges eleme) amelynek egyedei a szintvonalak, az úgynevezett izoklinák. Rögzített c -hez tartozó izoklina pontjaiban a megoldásgörbék érintőinek irántangense c -vel egyenlő.

Ebben a példában két görbesereg szerepel. Az $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $r > 0$; illetve az $y = -\frac{x}{c}$ izoklinasereg. Differenciálegyenleteik, a pozitív negyedsíkon,

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y > 0, \quad \text{illetve} \quad y' = \frac{y}{x}, \quad x > 0.$$

A differenciálegyenletek jobb oldalai egymás negatív reciprokai. Ebből következik, hogy a negyedsíkot egyrétűen lefedő negyedkör-sereg és félegyenes-sereg egy-egy egyede a metszéspontban "merőlegesen metszi egymást" (azaz a metszéspontban a görbék érintői merőlegesek egymásra). Az olyan görbét amely az egyparaméteres görbesereg minden görbéjét merőlegesen metszi ortogonális trajektóriának nevezzük. Az



2. ábra

$$y = \varphi(x, c),$$

$\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, c) \in H$, folytonosan differenciálható, görbesereg ortogonális trajektória serege az

$$y = \Psi(x, k)$$

görbesereg, ha Ψ folytonosan differenciálható valós kétváltozós függvény, továbbá minden $(x_0, c) \in H$ ponthoz található egy és csak egy k állandó, amelyre $\varphi(x_0, c) = \Psi(x_0, k)$ és $\varphi'_x(x_0, c) = \frac{-1}{\Psi'_x(x_0, k)}$.

Ha az $y = \varphi(x, c)$ görbesereg differenciálegyenlete

$$y' = \varphi'_x(x, c(x, y)),$$

és φ'_x sehol sem zérus akkor az $y = \Psi(x, k)$ ortogonális trajektóriasereg differenciálegyenlete a következő:

$$y' = - \frac{1}{\varphi'_x(x, c(x, y))} \quad \square$$

A gyakorlatban legtöbbször a differenciálegyenletnek adott feltételeket kielégítő megoldásait keressük. Ha $f(x, y)$ az Ω tartományon értelmezett függvény és $P_0(x_0, y_0) \in \Omega$ tetszőlegesen rögzített pont, akkor az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0,$$

feladatot elsőrendű kezdetiérték feladatnak nevezzük. Az $y(x_0) = y_0$ egyenlőség a kezdeti feltétel. x_0, y_0 a kezdetiértékek. Ilyenkor a differenciálegyenletnek azt a megoldásgörbét keressük, amely áthalad a $P_0(x_0, y_0)$ ponton. Gyakran kell válaszolnunk arra a kérdésre, hogy a kezdetiérték feladatnak van-e megoldása és hány megoldása van? Így például az

$$y' = \operatorname{sg} x; \quad y(0) = 0,$$

kezdetiérték feladatnak nincs megoldása. Ha lenne, akkor az csak a $\operatorname{sg} x$ függvény integrálásával nyerhető és a

$$\psi(x) = \begin{cases} x + c_1 & \text{ha } x > 0 \\ c_3 & \text{ha } x = 0 \\ -x + c_2 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvények közül választható ki, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Mivel a függvények egyike sem differenciálható az $x = 0$ pontban, ezért nincs megoldás.

Az

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0, \quad \Omega = \mathbb{R}^2$$

kezdetiérték feladatnak viszont több megoldása van. Ilyenek például a $\varphi_1(x) \equiv 0$ szinguláris megoldás és a tőle különböző megoldás:

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{ha } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Vizsgáljuk meg tehát, először szemléletesen, mikor van a

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0,$$

kezdetiérték feladatnak valamely $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon egy és csak egy megoldása? A kérdés csak akkor semmitmondó ha nincs megoldás. Tegyük fel, hogy van megoldás (esetleg több is). Képezzük a megoldások értelmezési ir-

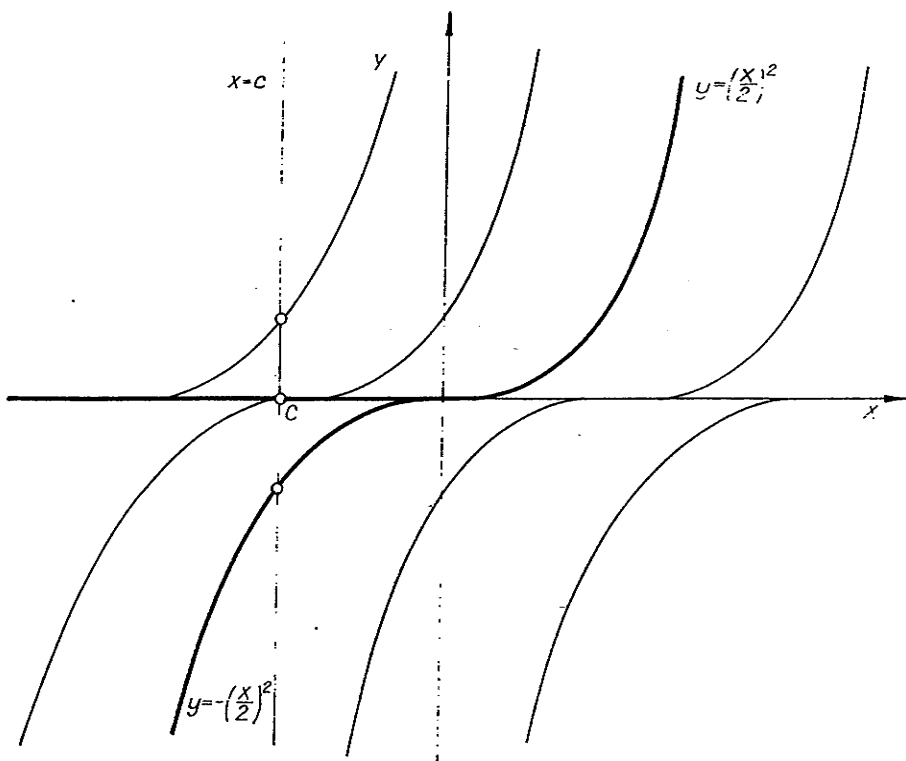
tervallumainak egyesítését és jelöljük I -vel. A megoldásgörbék pontjaiból álló halmazt jelöljük H -val, $H \subset \Omega$. Ha minden $c \in I$ állandóval felírt $x = c$ egyenesnek a H halmazzal csak egyetlen közös pontja van, akkor a kezdetiérték feladatnak egy és csak egy megoldása van. Ennek ellenkezőjét láthatjuk a 3. ábrán, ahol az

$$y' = \sqrt{|y|}; \quad y(2) = 1$$

kezdetiérték feladat megoldásait az $x \in \mathbb{R}^2$ tartományon vizsgáltuk és erősebben kihoztuk a különböző

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{ha } x \geq 0; \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}; \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{ha } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

megoldások grafikonjait.



3. ábra

1.5. Definíció. Az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0,$$

kezdetiérték feladat az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon egyértelműen megoldható, (egy és csak egy megoldása van), ha létezik olyan

$$\varphi(x), \quad x \in I,$$

megoldás, hogy minden más

$$\psi(x), \quad x \in I_1,$$

megoldásra teljesülnek a következő feltételek:

$$I_1 \subset I, \quad \psi(x) \equiv \varphi(x), \quad x \in I_1.$$

Az ilyen egyértelműen létező $\varphi(x)$ megoldást teljes megoldásnak nevezzük.

Az 1.5. Definíció szerint a teljes megoldás leszüktítéseit nem tekintjük újabb megoldásoknak.

Általában megelégszünk azzal, hogy a kezdetiérték feladat megoldásának létezését csak az x_0 pont valamely $\alpha > 0$ sugaru környezetében igazoljuk.

1.6. Definíció. Az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0,$$

kezdetiérték feladat az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon lokálisan egyértelműen megoldható, ha létezik olyan $\varphi(x)$ megoldás és $\alpha > 0$ szám, hogy $\varphi(x)$ értelmezési tartománya tartalmazza az $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ intervallumot és minden más $\psi(x)$, $x \in I_1$ megoldásra igaz, hogy

$$\psi(x) \equiv \varphi(x), \quad x \in [(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \cap I_1].$$

Az ilyen $\varphi(x)$ megoldást lokálisan egyértelmű megoldásnak nevezzük.

Amint azt láttuk az

$$y' = \sqrt{|y|}; \quad y(0) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

feladatnak sem teljes, sem lokálisan egyértelmű megoldása nincs, viszont az

$$y' = \sqrt{|y|}; \quad y(2) = 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

kezdetiérték feladatnak van lokálisan egyértelmű megoldása, mert az $x = 2$

pontnak létezik olyan $\alpha > 0$ sugaru környezete, amelyben $\varphi(x) = \frac{x^2}{4}$,

$0 < x < \infty$; az egyetlen megoldás. Az α szám a jelen esetben 0 és 2 között

bármely szám lehet. E kezdetiérték feladatnak azonban teljes megoldása nincs, mert a lokálisan egyértelmű megoldás $x \leq 0$ esetén többféleképpen ki-terjeszthető.

Igaz viszont az

1.7. Tétel. Ha az Ω tartomány tetszőlegesen rögzített pontjában létezik lokálisan egyértelmű megoldás, akkor minden $(x_0, y_0) \in \Omega$ esetén az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható.

Bizonyítás. Az állítást indirekt módon igazoljuk. Tegyük fel, hogy van olyan $P_0(x_0, y_0) \in \Omega$ pont, amelyre a kezdetiérték feladatnak legalább két megoldása van. Létezik tehát két olyan $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ megoldás, $x \in I$ és olyan $x_1 \in I$ hely, hogy

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0 \quad \text{és} \quad \varphi(x_1) \neq \psi(x_1).$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_1 > x_0$. Jelöljük ξ -vel azon x pontoknak az alsó határát, amelyekre

$$x_0 < x < x_1, \quad \text{és} \quad |\varphi(x) - \psi(x)| > 0.$$

A $|\varphi(x) - \psi(x)|$ függvény folytonosságából következik, hogy

$$\varphi(\xi) = \psi(\xi)$$

ellenkező esetben ugyanis a $\xi \geq x_0$ pontnak lenne olyan bal oldali környezete, amelyben a $|\varphi(x) - \psi(x)|$ függvény szintén pozitív értékeket venne fel, ellentmondásban azzal, hogy ξ alsó határ.

Válasszuk meg az $\varepsilon > 0$ számot úgy, hogy

$$\xi < x_1 - \varepsilon \quad \text{és} \quad (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \subset I$$

teljesüljön. Ekkor

$$\varphi(x) \neq \psi(x), \quad x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon),$$

és ezért az

$$y' = f(x, y); \quad y(\xi) = \xi$$

kezdetiérték feladat nem oldható meg lokálisan egyértelműen. Ezzel az ellentmondással igazoltuk a tételt. $\square$

Legyen $f(x, y)$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományban értelmezett függvény és (x_0, y_0) az Ω tartomány pontja. Az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladat valamely $y = \varphi(x)$ egyenlettel adott megoldásgörbéjével kapcsolatban megkérdezhetjük azt is, hogy végződhet-e az Ω tartomány belsejében? Ha nem végződhet (4. ábra), akkor azt mondjuk, hogy az Ω tartomány határától-határáig halad. Pontosabban, valamely megoldásgörbe az tartomány határától-határáig halad (vagy határától-határáig folytatható), ha az Ω tartomány tetszőleges korlátos és zárt $A \subset \Omega$, részhalmazából, amely az (x_0, y_0) pontot belsejében tartalmazza, "kilép", azaz a megoldásgörbének van az x_0 -nál kisebb x_1 és az x_0 -nál nagyobb x_2 abszcisszájú pontja, amely nem tartozik az A halmazhoz.

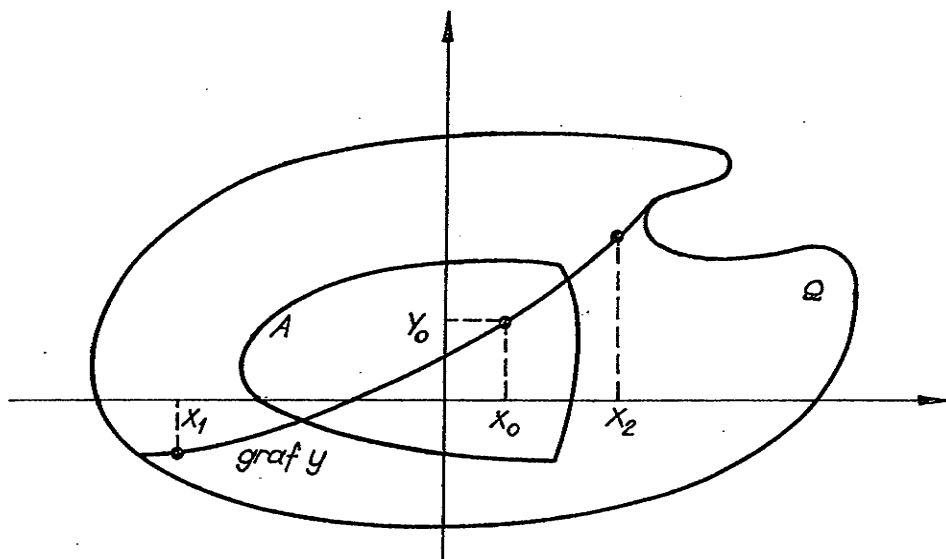
A következő példával azt illusztráljuk, hogy a teljes megoldásgörbék is végződhetnek a tartomány belsejében.

Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } y \geq 0, \\ -1 & \text{ha } y < 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$$

$f(x, y)$ értelmezett $\Omega = \mathbb{R}^2$ -ben. Az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2,$$



4. ábra

kezdetiérték feladatoknak $y_0 \neq 0$ esetén a megoldásgörbéi olyan félegyenesek, amelyek az X tengelyen "végetérnek". Egyenleteik:

$$y = x + y_0 - x_0, \quad x_0 - y_0 < x < +\infty; \quad y > 0, \quad y_0 > 0,$$

$$y = -x + x_0 + y_0, \quad x_0 + y_0 < x < +\infty; \quad y < 0, \quad y_0 < 0.$$

$y_0 = 0$ esetén nincs megoldás.

$(x_0, y_0) = (1, 1)$ esetén részletesen vizsgáljuk a feladatot. Ekkor $y = x$, $0 < x < \infty$, a megoldásgörbe. Mivel a $\Psi(x) = x$ megoldásra, az értelmezési intervallum 0 végpontjában teljesül, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \Psi(x) = 0$$

és az

$$y' = f(x, y); \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladatnak nincs megoldása, ezért az $y = x$, $x > 0$, megoldásgörbe $\mathbb{R}^2$ belső pontjában, az origóban végződik.

2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek és az arra visszavezethető típusok

Tegyük fel, hogy $g(x)$ az I_1 , $h(y)$ az I_2 nyílt, nem szükségképpen korlátozott intervallumon értelmezett valós egyváltozós függvény. A

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y), \quad (x, y) \in I_1 \times I_2$$

differenciálegyenletet szétválasztható változójú vagy szeparálható differenciálegyenletnek nevezzük, mert "jobb oldala" egy csak x -től és egy csak y -től függő függvény szorzata.

Ha a $h(y) = 0$ egyenletnek van $y = \varphi_0$ állandó megoldása, akkor az a differenciálegyenlet szinguláris megoldása mert

$$\varphi_0' \equiv 0 \equiv g(x) h(\varphi_0) .$$

Bebizonyítjuk, hogy a $h(y) \neq 0$, $g, h \in C^0$, feltételek teljesülése esetén az $I_1 \times I_2$ tartományon az

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + C, \quad C \in \mathbb{R} ,$$

implicit függvények megoldások. (Ezeket a megoldásokat a differenciálegyenletből formális szétválasztással, majd integrálással nyerjük. A formális szétválasztás:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx .$$

2.1. Tétel. Ha $g(x)$ az I_1 és $h(y)$ az I_2 nyílt intervallumon folytonos és $h(y)$ az I_2 intervallum egyetlen pontjában sem zérus, akkor tetszőlegesen rögzített $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$ esetén, az $\Omega = I_1 \times I_2$ tartományon, az

$$y' = g(x) h(y) ; \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható. A teljes megoldás az ugynevezett

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{h(t)} = \int_{x_0}^x g(u) du$$

integrálegyenlettel adott implicit függvény. A megoldásgörbe az $I_1 \times I_2$ tartomány határától-határáig halad.

Bizonyítás. A kezdetiérték feladat és az integrálegyenlet ekvivalens. Ezen a következőket értjük: ha létezik a kezdetiérték feladatnak megoldása, akkor az kielégíti az integrálegyenletet és fordítva, az integrálegyenlet bármely differenciálható megoldása kielégíti a kezdetiérték feladatot. Az ekvivalencia igazolására tegyük fel, hogy $\varphi_1(x)$ megoldása a kezdetiérték feladatnak. Osszuk el a

$$\frac{d\varphi_1(x)}{dx} \equiv g(x) h(\varphi_1(x)) ; \quad \varphi_1(x_0) = y_0 ;$$

$$x \in I \subset I_1$$

azonosságot (ahol I , a $\varphi_1(x)$ megoldás értelmezési tartománya), a zérustól különböző $h(\varphi_1(x))$ függvénnyel, majd integráljunk x_0 -tól x -ig és alkalmazzuk a $t = \varphi_1(v)$ helyettesítést. Ekkor igaz, hogy

$$\int_{y_0}^{\varphi_1(x)} \frac{dt}{h(t)} = \int_{x_0}^x \frac{1}{h(\varphi_1(v))} \frac{d\varphi_1(v)}{dv} dv = \int_{x_0}^x g(u) du,$$

azaz láthatjuk, hogy $\varphi_1(x)$ kielégíti az integrálegyenletet. Fordítva, az integrálegyenlet bármely differenciálható $\varphi(x)$, $x \in I^* \subset I_1$, megoldása kielégíti a kezdetiérték feladatot, mert ha az alábbi azonosság igaz, azaz ha

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} \equiv \int_{x_0}^x g(u) du, \quad x \in I^* \subset I_1,$$

akkor mindkét oldalt differenciálhatjuk és $\varphi(x_0) = y_0$, valamint

$$\frac{1}{h(\varphi(x))} \varphi'(x) = g(x), \quad x \in I^*,$$

miatt $\varphi(x)$ kielégíti a kezdetiérték feladatot.

Az ekvivalencia következtében elegendő bizonyítani, hogy az integrálegyenletnek van differenciálható megoldása. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$H(y) = \int_{y_0}^y \frac{dt}{h(t)} ; \quad G(x) = \int_{x_0}^x g(u) du ,$$

$$i = \inf_{y \in I_2} H(y) ; \quad s = \sup_{y \in I_2} H(y) .$$

A $h(y) \neq 0$ folytonos függvény integrálfüggvényére, $H(y)$ -ra teljesülnek az alábbi feltételek: $H(y_0) = 0$, $H(y)$ szigorúan monoton, differenciálható és deri-

váltja sehol sem zérus. Ebből következik, hogy $H(y)$ invertálható, inverze deriválható, továbbá az is, hogy $i < 0$, (vagy $-\infty$), és $s > 0$ (vagy $+\infty$).

A $g(x)$ függvény folytonosságából következik, hogy a $G(x)$ integrálfüggvénye differenciálható és ebből $G(x)$ folytonossága nyilvánvaló. Mivel $G(x_0) = 0$ és $G(x)$ folytonos, ezért van I_1 -nek olyan x_0 -at tartalmazó részintervalluma amelynek bármely x helyén fennáll, hogy $G(x)$ a $H(y)$ függvény infimuma és supremuma közé esik. Ezen részintervallumok közül a maximálisat jelöljük (α, β) -val. Ekkor tehát igaz a következő egyenlőtlenség:

$$i < G(x) < s, \quad \text{ha} \quad x \in (\alpha, \beta) \subset I_1 .$$

Az egyenlőtlenséget kielégítő $G(x)$ értékeket a $H(y)$ szigorúan monoton és folytonos függvény felveszi (és mindegyiket pontosan egyszer veszi fel), mert ezek az értékek infimuma és supremuma közé esnek, azaz minden x -hez létezik egy és csak egy $\varphi(x)$ amelyre

$$H(\varphi(x)) \equiv G(x), \quad x \in (\alpha, \beta) \subset I_1 ,$$

vagyis $\varphi(x)$ kielégíti az integrálegyenletet. Ebből az azonosságból

$$\varphi(x) = H^{-1}(G(x)), \quad x \in (\alpha, \beta) \subset I_1 ,$$

következik és a H^{-1} o G differenciálhatóságából $\varphi(x)$ differenciálhatósága.

Bizonyítottuk tehát, hogy $\varphi(x)$ az (α, β) intervallumon, az integrálegyenletet kielégítő differenciálható függvény.

Végül bebizonyítjuk, hogy $\varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$, teljes megoldás és az $I_1 \times I_2$ tartomány határától-határáig halad. Mivel a $\varphi(x)$ függvény (α, β) értelmezési tartományát úgy válssztottuk meg, hogy az integrálegyenlet bármely más megoldásának értelmezési intervalluma része legyen az (α, β) intervallumnak és a kezdetiérték feladat minden megoldása kielégíti az integrálegyenletet, ezért azok $\varphi(x)$ -el azonosak vagy annak leszűkítései. Ebből azonban már következik, hogy $\varphi(x)$ a teljes megoldás.

Az $y = \varphi(x)$ megoldásgörbe határától-határáig ló haladását is annak segítségével sikerül bebizonyítani, hogy (α, β) az a maximális intervallum amelyben valamely függvény kielégítheti az integrálegyenletet. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$I_1 = (a, b) ; \quad I_2 = (c, d) .$$

Ha $(\alpha, \beta) = (a, b)$, akkor igaz az állításunk, ha nem, akkor azt igazoljuk, hogy a megoldásgörbe azon pontjai, amelyek az értelmezési intervallum α , illetve β végpontjaihoz elég közeli abszcissza értékekhez tartoznak, tetszőlegesen közel kerülnek a téglalap vízszintes oldalaihoz. Ezt a következőképpen, indirekt módon, láthatjuk be:

Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $x_0 < \beta < b$ és a megoldásgörbe a téglalap vízszintes oldalához nem kerül tetszőlegesen közel, azaz van olyan c_1 és d_1 valós szám, hogy

$$c < c_1 \leq \varphi(x) \leq d_1 < d ; \quad x_0 \leq x < \beta .$$

$G(x)$ s $H(y)$ függvények tulajdonságait és kapcsolatát fent ismertettük és tudjuk, hogy akkor

$$i < \min_{y \in [c_1, d_1]} H(y) = i_1 \leq G(x) \leq s_1 = \max_{y \in [c_1, d_1]} H(y) < s ; \quad x \in [x_0, \beta) .$$

A $G(x)$ függvény az egész (a, b) intervallumon folytonos és ezért β -ban is az, tehát

$$i < i_1 \leq G(x) \leq s_1 < s, \quad x \in [x_0, \beta) ,$$

miatt, $G(\beta)$ tetszőleges környezetéhez található olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$i \leq G(x) \leq s, \quad x_0 \leq x < \beta + \delta .$$

Azon x értékekre azonban, amelyekre $G(x)$, i és s közé esik a $\varphi(x)$ megoldás értelmezve van, tehát $(\alpha, \beta + \delta)$ -ban is, ellentmondásban azzal, hogy (α, β) a teljes megoldás értelmezési tartománya. Az a $\alpha < x_0$ esetben hasonló a bizonyítás. $\square$

2.2. Példa. Oldjuk meg az

$$y' = \sqrt{|y|} ; \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

kezdetiérték feladatot.

MEGOLDÁS. Ha $y_0 = 0$, akkor a $\varphi(x) \equiv 0$ függvény szinguláris megoldás. (A szinguláris megoldás mellett létezik nem szinguláris megoldás is.)

Ha $y_0 \neq 0$ és az $y > 0$ (vagy $y < 0$) félsíkra leszűkítjük a feladatot, akkor a

2.1. Tétel feltételei szerint

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_{x_0}^x du$$

a megoldás. Explicit alakja a következő:

$$\varphi(x) = \left(\frac{x-x_0}{2} + \sqrt{y_0} \right)^2, \quad x_0 - 2\sqrt{y_0} < x < +\infty.$$

(Az értelmezési tartományt úgy állapítottuk meg, hogy a felső félsíkon maradjunk.)

Ha $y_0 < 0$ és az $y < 0$ alsó félsíkra szűkítjük le a feladatot, akkor ott a

$$\varphi(x) = - \left(\frac{x-x_0}{2} + \sqrt{-y_0} \right)^2, \quad -\infty < x < x_0 + 2\sqrt{-y_0}$$

megoldást kapjuk. A megoldásgörbéket a 3. ábrán láthatjuk.

A 3. ábra is segít megvilágítani, hogy a kezdetiérték feladatnak az $\mathbb{R}^2$ tartományon nincs teljes megoldása, mert a felső félsíkról induló bármely megoldásgörbe balra az X tengellyel csak úgy mint az alsó félsík parabolájával folytatható, ugyanis a parabolák félérintője az X tengely. Ha $y_0 > 0$, vagy

$y_0 < 0$, akkor lokálisan egyértelmű megoldás van, azonban ha $y_0 = 0$, akkor a kezdetiérték feladatnak lokálisan egyértelmű megoldása nincs.

A kezdetiérték feladat megoldásának egyértelműsége, az Ω tartomány megválasztásán is múlhat. Így például az

$$y' = \sqrt{|y|}; \quad y(x_0) = y_0, \quad \Omega_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \right\}.$$

kezdetiérték feladatnak Ω_1 -n teljes megoldása az a

$$\varphi(x) = \left(\frac{x-x_0}{2} + y_0 \right)^2, \quad x_0 - 2\sqrt{y_0} < x < +\infty$$

függvény, amely már $\mathbb{R}^2$ -n nem teljes megoldás, mert Ω_1 -ről $\mathbb{R}^2$ -re többféleképpen kiterjeszthető.

A szétválasztható változójú differenciálegyenletre visszavezethető típusok közül hármat ismertetünk. Ezek a következők:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

$$y' = f(Ax + By + C), \quad B \neq 0, A, C \in \mathbb{R}.$$

$$y' = f\left(\frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right), B_1^2 + B_2^2 \neq 0,$$

$$A_i, B_i, C_i \in \mathbb{R}; \quad i = 1, 2.$$

Az $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$, alakú differenciálegyenletet 0-ad fokú homogénnek nevezzük, mert minden $t \neq 0$ -ra igaz, hogy:

$$f\left(\frac{ty}{tx}\right) = t^0 f\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Az $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ differenciálegyenletet az

$$u = \frac{y}{x}$$

helyettesítéssel, amelyből $y' = x u' + u$ következik, az $u(x)$ ismeretlen függvényt tartalmazó

$$u' = \frac{f(u)-u}{x}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletre vezethetjük vissza.

A 2.1. Tételből következik az

2.3. Tétel. Ha az $f(u)$ függvény folytonos valamely (a, b) intervallumon és $f(u) \neq u$ akkor az

$$a < \frac{y_0}{x_0} < b$$

egyenlőtlenséget kielégítő x_0, y_0 kezdetiértékkel adott

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right); \quad y(x_0) = y_0; \quad x \neq 0$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható. $\varphi(x)$ megoldásai az

$$u' = \frac{f(u)-u}{x}; \quad u\left(\frac{x_0}{y_0}\right) = \frac{y_0}{x_0} = u_0$$

kezdetiérték feladat teljes $\psi(x)$ megoldásával a következőképpen adjuk meg:

$$\varphi(x) = x \psi(x).$$

Az $y' = f(Ax + By + C); B \neq 0, A, C \in \mathbb{R}$, alakú differenciálegyenletet az

$$u = Ax + By + C$$

helyettesítéssel, amelyből $u' = A + Bf(u)$ következik, az $u(x)$ ismeretlen függvényt tartalmazó

$$u' = A + Bf(u)$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletre vezethetjük vissza.

A 2.1. tételből következik a

2.4. Tétel. Ha az $f(u)$ függvény folytonos valamely (a, b) intervallumon és $A + Bf(u) \neq 0$, akkor az

$$a < Ax_0 + By_0 + C < b, \quad B \neq 0,$$

egyenlőtlenséget kielégítő x_0, y_0 kezdetiértékkel adott

$$y' = f(Ax + By + C); \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható. $\Psi(x)$ megoldását az

$$u' = A + B f(u); \quad u(x_0) = Ax_0 + By_0 + C = u_0$$

kezdetiérték feladat $\Psi(x)$ teljes megoldásával a következőképpen adjuk meg:

$$\Psi(x) = \frac{\Psi(x) - Ax - C}{B}.$$

$$\text{Az } y' = f\left(\frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right), \quad B_1^2 + B_2^2 \neq 0,$$

$A_i, B_i, C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, differenciálegyenletet közvetlenül az előző két típus valamelyikére vezethetjük vissza és csak azután szeparálhatóra. Két esetet különböztetünk meg. A

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

esetben az

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

egyenletekkel adott egyenesek metszik egymást és a lineáris egyenletrendszernek egy és csak egy megoldása van.

Legyen ez (a_0, b_0) . Az

$$x = u + a_0$$

$$y = v + b_0$$

helyettesítésekkel, az XY koordinátarendszer origóját, párhuzamos eltolással (a_0, b_0) pontba helyeztük át. Az új UV koordinátarendszerben az ismeretlen $v(u)$ függvényre felírhatjuk az eredeti differenciálegyenlettel ekvivalens

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{A_1 u + B_1 v}{A_2 u + B_2 v}\right)$$

differenciálegyenletet amely 0-ad fokú homogén. A

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} = 0$$

esetben vagy az $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \alpha$, vagy az $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \beta$ szám létezik. (Ez utóbbi például akkor ha $B_1^2 + B_2^2 \neq 0$ miatt $B_1 \neq 0$. Ekkor ugyanis A_1 sem lehet zérus, mert ha $A_1 = 0$, akkor a determináns csak akkor zérus, ha $A_2 = 0$ de ekkor $A_1 = A_2 = 0$ miatt a differenciálegyenlet már szeparálható volt). Ha az α szám létezik, akkor az $A_1 = \alpha A_2$ és $B_1 = \alpha B_2$ helyettesítésekkel, illetve a számlálóban és a nevezőben $A_2 x + B_2 y + C_2$ -vel való osztással, az

$$y' = f\left(\alpha - \frac{\alpha C_2 - C_1}{A_2 x + B_2 y + C_2}\right)$$

differenciálegyenletet kapjuk, amely a 2.4. Tételben szereplő differenciálegyenlettel azonos alakú. Ha α nem, de β létezik, akkor az $A_2 = \beta A_1$

és $B_2 = \beta B_1$ helyettesítésekkel, illetve a számlálóban és a nevezőben

$A_1 x + B_1 y + C$ -vel való osztással az

$$y' = f\left(\frac{1}{\beta - \frac{\beta C_1 - C_2}{A_1 x + B_1 y + C_1}}\right)$$

differenciálegyenletet kapjuk, amely szintén a 2.4. Tételben szereplő differenciálegyenlettel azonos alakú, tehát szeparálhatóra visszavezethető.

3. Explicit elsőrendű lineáris differenciálegyenletek és az arra visszavezethető Bernoulli-féle differenciálegyenlet

Legyenek $g(x)$ és $f(x)$ az I nyílt intervallumon értelmezett valós egyváltozós függvények. Tekintsük a

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = f(x)$$

explicit elsőrendű lineáris differenciálegyenletet.

Ha $f(x) \not\equiv 0$, $x \in I$, akkor a differenciálegyenlet inhomogén.

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0.$$

az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenletet. Ez a differenciálegyenlet szétválasztható változójú. Segítségével, alkalmas feltételek mellett, megoldhatjuk az inhomogén differenciálegyenletet is. Ennek érdekében bebizonyítjuk a homogén differenciálegyenletre vonatkozó tételt:

3.1. Tétel. Ha $g(x)$ folytonos az I intervallumban, akkor tetszőlegesen rögzített $(\xi, \eta) \in I \times \mathbb{R}$ esetén a

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0, \quad y(\xi) = \eta,$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható. A teljes megoldás:

$$\psi(x) = \eta e^{-\int_{\xi}^x g(u) du}, \quad x \in I.$$

Rizonyítás. Ha $\eta > 0$ és az $y > 0$ felső félsíkra szűkítjük le a feladatot, akkor az

$$\int_{\eta}^y \frac{dt}{t} = \int_{\xi}^x g(u) du$$

integrálegyenlethez nyerjük a

$$\psi(x) = \eta e^{-\int_{\xi}^x g(u) du}$$

egyértelmű megoldást, amely csak pozitív értékeket vesz fel.

Ha $\eta < 0$ és az $y < 0$ alsó félsíkra szűkítjük le a feladatot, akkor az egyértelmű megoldást újra a fenti $\psi(x)$ jelenti, de most csak negatív értékeket vesz fel.

Ha $\eta = 0$, akkor $\psi(x) \equiv 0$ szinguláris megoldás. Egyértelműségét indirekt bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy $\psi(x)$ az I_1 intervallumon, $I_1 \subset I$, a

$$\frac{dy}{dx} = -g(x)y; \quad y(x_0) = 0,$$

kezdetiérték feladatnak a $\psi(x) \equiv 0$ -tól különböző megoldása. Ekkor $\psi(x_0) = 0$ és van olyan $x_1 \in I_1$ hely, ahol $\psi(x_1) \neq 0$. Ha például $\psi(x_1) > 0$, akkor a

$$\frac{dy}{dx} = -g(x)y, \quad y(x_1) = \psi(x_1) > 0$$

kezdetiérték feladatnak

$$\psi_1(x) = \psi(x_1) e^{-\int_{x_1}^x g(u) du}$$

csak pozitív értékeket felvevő megoldása. $\Psi(x) \equiv \Psi_1(x)$, ha $y > 0$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} \Psi_1(x) \neq 0$ ellentmondásban azzal, hogy $\Psi(x_0) = 0$. Ebből következik, hogy a $\Psi(x) \equiv 0$ szinguláris megoldás is egyértelmű. $\Psi(x_1) < 0$ esetben hasonló a bizonyítás.

Összefoglalva eredményeinket azt mondhatjuk, hogy a

$$\Psi(x) = \eta e^{-\int_{\xi}^x g(u) du}, \quad x \in I,$$

képlettel adott függvény tetszőlegesen rögzített $(\xi, \eta) \in I \times \mathbb{R}$ esetén a teljes megoldás.

Az azonosan zérus megoldást triviális megoldásnak nevezzük.

3.2. Következmény. Ha $g(x)$ folytonos az I intervallumban és a

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0$$

homogén differenciálegyenletnek egy nem triviális megoldása $\Psi(x)$, akkor az összes megoldása a $c \Psi(x)$; $c \in \mathbb{R}$, $x \in I$, egyparaméteres függvénysereggel adható meg.

Bizonyítás. Helyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy minden $c \Psi(x)$ alakú függvény megoldás. Fordítva, tetszőleges $\Psi(x)$ megoldásról bebizonyítjuk, hogy van olyan $c^* \in \mathbb{R}$ szám, hogy $\Psi(x) = c^* \Psi(x)$:

A

$$\Psi'(x) \equiv -g(x)\Psi(x), \quad x \in I$$

$$\Psi'(x) \equiv -g(x)\Psi(x), \quad x \in I,$$

azonosságokból a

$$\Psi'(x)\Psi(x) \equiv -g(x)\Psi(x)\Psi(x)$$

$$\Psi'(x)\Psi(x) \equiv -g(x)\Psi(x)\Psi(x)$$

szorzások után kivonással kapjuk, hogy

$$\Psi'(x) \varphi(x) - \varphi'(x) \Psi(x) \equiv 0.$$

Ez az azonosság a differenciálható $\frac{\Psi(x)}{\varphi(x)}$, ($\varphi(x) \neq 0$, $x \in I$) függvény derivált-függvényének számlálója, tehát

$$\frac{d}{dx} \frac{\Psi(x)}{\varphi(x)} \equiv 0.$$

Ebből következik, hogy $\frac{\Psi(x)}{\varphi(x)} = c^*$, vagyis van olyan valós c^* szám, amellyel $\Psi(x) = c^* \varphi(x)$.

3.3. Definíció. A

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0, \quad g \in C^0(I),$$

explicit homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának nevezzük a $\varphi(x)$ nem triviális megoldással adott

$$c \varphi(x), \quad x \in I, \quad c \in \mathbb{R}$$

egyparaméteres függvénysereget, vagy a

$$H = \left\{ c \varphi(x) : \varphi(x) \neq 0, \quad x \in I, \quad c \in \mathbb{R} \right\}$$

függvényhalmazzá.

Térjünk most vissza az inhomogén differenciálegyenlethez. A homogén differenciálegyenlet valamely nem triviális megoldásának felhasználásával az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását adjuk meg.

3.4. Tétel. Ha $g(x)$ és $f(x)$ folytonos függvények az I intervallumon és $y_h(x)$ a homogén differenciálegyenlet egy nem triviális megoldása, akkor van olyan folytonosan differenciálható $p(x)$, $x \in I$ függvény, hogy a

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = f(x)$$

inhomogén differenciálegyenletnek partikuláris megoldása $y_p(x) = p(x) y_h(x)$.

Egy ilyen $p(x)$ függvényt a következő integrállal adhatunk meg:

$$p(x) = \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{y_h(t)} dt, \quad x_0, \quad x \in I.$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be az inhomogén differenciálegyenletbe az $y_p(x) = p(x) y_h(x)$ függvényt. A

$$p'(x) y_h(x) + p(x) y_h'(x) + g(x) p(x) y_h(x) = f(x)$$

egyenletben a baloldali második és harmadik tagjának összege zérus, mert $y_h(x)$ a homogén differenciálegyenlet megoldása. Innen $y_h(x) \neq 0$ miatt

$$p'(x) = \frac{f(x)}{y_h(x)}; \quad x \in I.$$

$p'(x)$ folytonos függvény az I intervallumon és az intervallum bármely rögzített x_0 helyének felhasználásával

$$p(x) = \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{y_h(t)} dt, \quad x_0, \quad x \in I.$$

egy megfelelő függvény. $\square$

Mivel az $y_p(x)$ partikuláris megoldást úgy találtuk meg, hogy a homogén differenciálegyenlet $c y_h(x)$ általános megoldásában a c állandó helyébe egy ismeretlen $p(x)$ függvényt helyettesítettük, ezért ezt a megoldást kereső módszert az állandó variálásának nevezzük.

Az eddig megismert fogalmakból és tételekből már egyszerűen következik a

3.5. Tétel. Ha $g(x)$ és $f(x)$ folytonos függvények az I intervallumon és

$$\frac{dy}{dx} + g(x) y = f(x)$$

inhomogén differenciálegyenletnek partikuláris megoldása, $y_p(x)$, $x \in I$, akkor az összes megoldása az

$$\varphi(x) = y_p(x) + c y_h(x), \quad 0 \neq y_h(x) \in H, \quad c \in \mathbb{R}.$$

egyparaméteres függvénysereggel adható meg.

Bizonyítás. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy $y_p(x) + c y_h(x)$ minden $c \in \mathbb{R}$ esetén megoldása az inhomogén differenciálegyenletnek. Ezt az olvasóra bizzuk. Bebizonyítjuk, hogy bármely $y(x)$ megoldáshoz található olyan c^* valós szám, hogy $y(x) = y_p(x) + c^* y_h(x)$. Az

$$y'(x) + g(x) y(x) \equiv f(x),$$

$$y_p'(x) + g(x) y_p(x) \equiv f(x)$$

azonosságok kivonásával azt kapjuk, hogy

$$(y(x) - y_p(x))' + g(x) (y(x) - y_p(x)) \equiv 0,$$

vagyis $y(x) - y_p(x)$ megoldása a homogén differenciálegyenletnek. A 3.2. Következmény miatt van olyan c^* valós szám, hogy $y(x) - y_p(x) = c^* y_h(x)$, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

3.6. Definíció. A

$$\frac{dy}{dx} + g(x) y = f(x), \quad g, f \in C^0(I)$$

inhomogén differenciálegyenlet általános megoldásának nevezzük a

$$\varphi(x) = y_p(x) + c y_h(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

egyparaméteres függvénysereget, vagy a

$$H_I = \left\{ y_p(x) + c y_h(x) : c \in \mathbb{R} \right\}$$

függvényhalmazt, ahol $y_p(x)$ az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása és $y_h(x)$ a megfelelő homogén differenciálegyenlet nem triviális megoldása.

Az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó kezdetiérték feladatra vonatkozik a következő

3.7. Tétel. Ha $g(x)$ és $f(x)$ folytonos függvények az I intervallumban, akkor tetszőlegesen rögzített $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ esetén a

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = f(x); \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható. A teljes megoldás a következő függvény:

$$\varphi(x) = e^{-G(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t) e^{G(t)} dt \right), \quad x \in I,$$

ahol

$$G(x) = \int_{x_0}^x g(u) du.$$

Bizonyítás. Tekintsük a homogén differenciálegyenlet nem triviális megoldásának az

$$- \int_{x_0}^x g(u) du$$

$$y_h(x) = e$$

függvényt. Amint azt a 3.4. Tételben láttuk, $c y_h(x)$, c állandójának variálásakor a

$$p(x) = \int_{x_0}^x f(t) e^{\int_{x_0}^t g(u) du} dt$$

függvényt kapjuk. Ezzel a partikuláris

$$y_p(x) = y_h(x) p(x) = e^{-\int_{x_0}^x g(u) du} \int_{x_0}^x f(t) e^{\int_{x_0}^t g(u) du} dt$$

megoldást adhatjuk meg. Ha a 3.5. Tételben szereplő c való számot y_0 jelenti, akkor $\varphi_c(x) = c y_h(x) + y_p(x)$ alakú, tehát megoldása az inhomogén differenciálegyenletnek. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy $\varphi(x_0) = y_0$.

A $\varphi(x)$ megoldás egyértelműségét indirekt módon láthatjuk be. Tegyük fel, hogy $\Psi(x)$ is megoldás. Ekkor $\Psi(x)$ értelmezési tartományán a $\Psi(x) - \varphi(x) \neq 0$ függvény kielégíti az

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0 \quad y(x_0) = 0$$

kezdetiérték feladatot ami ellentmond a 3.1. Tételnek, mert e kezdetiérték feladat egyetlen megoldása az azonosan zérus függvény.

3.8. Példa. Oldjuk meg az első fejezet 1.2. Példájában felírt,

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_0}{L_0} i = \frac{U_0}{L_0},$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet.

MEGOLDÁS. Az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R_0}{L_0} i, \quad t > 0$$

homogén differenciálegyenlet szeparálható. Általános megoldása

$$i_H(t) = c e^{-\frac{R_0}{L_0} t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

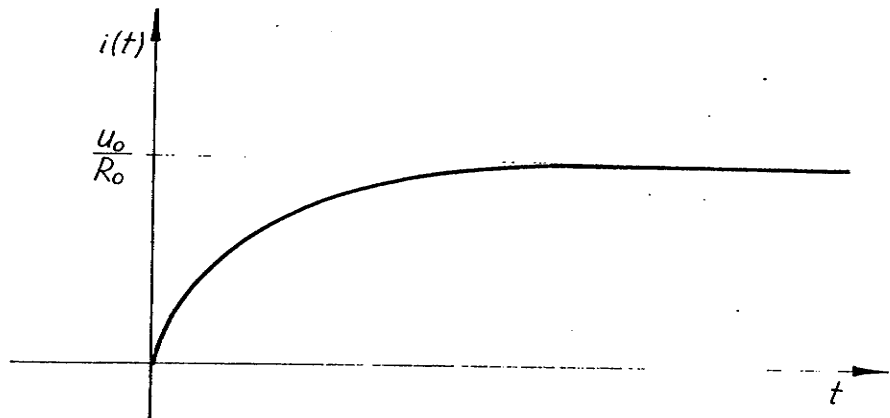
Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása

$$i_P(t) = \frac{U_0}{R_0},$$

amelyet az állandó variálásával határoztunk meg. Az összes, vagyis általános megoldása a következő:

$$i(t) = i_p(t) + i_H(t) = \frac{U_0}{R_0} + c e^{-\frac{R_0}{L_0} t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

A $c = -\frac{U_0}{R_0}$ esetben, lásd az 5. ábrát.



5. ábra

Lineáris differenciálegyenletre visszavezethető, alkalmasan választott tartományon, az úgynevezett Bernoulli-féle differenciálegyenlet:

A $g(x)$ és $h(x)$ függvények legyenek folytonosak valamely I intervallumban. Az

$$y' + g(x)y = h(x)y^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$$

differenciálegyenletet a $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y > 0\}$ tartományon Bernoulli-féle differenciálegyenletnek nevezzük.

A differenciálegyenlet megoldásának meghatározását azért szűkítettük le a H ponthalmazra, mert az $y > 0$ feltétel tetszőleges valós α , $(\alpha \neq 0, 1)$ esetén egységes tárgyalást tesz lehetővé.

A Bernoulli-féle differenciálegyenlet, a H ponthalmazon, ekvivalens egy lineáris differenciálegyenlettel, azaz igaz a

3.9. Tétel. Az $y(x)$ függvény akkor és csak akkor megoldása a Bernoulli-féle differenciálegyenletnek, ha az

$$u(x) = y(x)^{1-\alpha}$$

függvény megoldása az

$$u' + (1-\alpha)g(x)u = (1-\alpha)h(x)$$

lineáris differenciálegyenletnek.

A tétel bizonyítását az olvasóra bizzuk, illetve a példatárban közöljük.

4. Egzakt differenciálegyenletek és integráló tényezők

Az elsőrendű differenciálegyenleteket gyakran adjuk meg valamely $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon folytonos $g(x,y)$ és $h(x,y)$ függvényekkel a következő alakban:

$$g(x,y) dx + h(x,y) dy = 0.$$

Ebben az egyenletben négy ismeretlen x, y, dx, dy szerepel. A differenciálegyenlet ilyen megadásának előnyeit illusztrálja a következő példa.

4.1. Példa. Határozzuk meg a következő ellipszissereg differenciálegyenletét:

$$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = c, \quad c > 0.$$

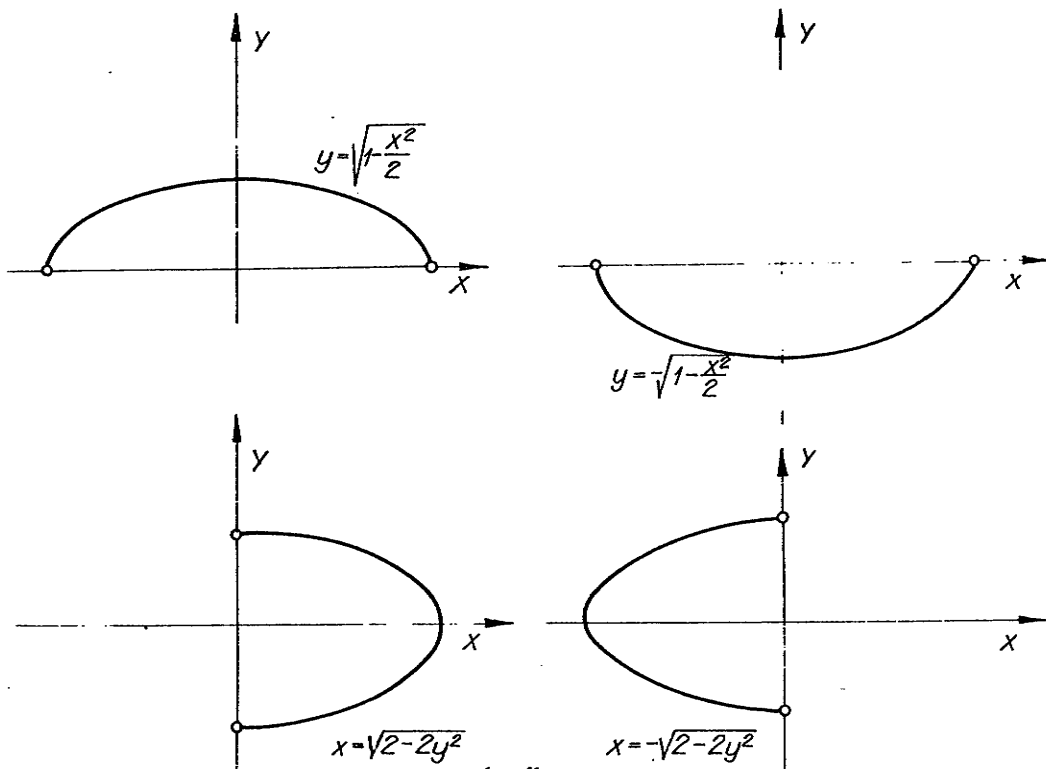
MEGOLDÁS. Az ellipszis sereg egyenletében egyik változónak sincs ki-tüntetett szerepe. Ha x szerint deriválunk, akkor az $x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ implicit differenciálegyenletet kapjuk, ha y szerint, akkor az implicit differenciálegyenlet alakja: $x \frac{dx}{dy} + 2y = 0$. Ezekből négy explicit alakot kapunk a következőképpen:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}, \quad y > 0, \quad \text{illetve } y < 0$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2y}{x}, \quad x > 0, \quad \text{illetve } x < 0$$

Az első két esetben a megoldásgörbék a felső, illetve alsó félsík félellipszisei és nem tartalmazzák az X tengely pontjait. Az utolsó két esetben a jobb, illetve bal félsík félellipszisei és nem tartalmazzák az Y tengely pontjait. A 6. ábra a $c = 1$ esetre vonatkozik. A teljes ellipszissereg tehát egyik differenciálegyenlettel sem írható le, jellemezhető azonban a következő négyismeretlenes egyenlettel, mert az

$$x \, dx + 2y \, dy = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$



6. ábra

egyenlet megoldása a fenti 4 differenciálegyenlet bármelyik megoldás függvénye, ha megoldáson minden olyan $y(x)$, illetve $x(y)$ függvényt értünk, amelyek a $dy = y'(x) \, dx$, illetve a $dx = x'(y) \, dy$ differenciálokkal együtt kielégítik az egyenletet. Ekkor ugyanis a

$$x \, dx + 2y \, y'(x) \, dx = 0, \quad dx \neq 0,$$

illetve az

$$x \, x'(y) \, dy + 2y \, dy = 0, \quad dy \neq 0$$

egyenleteket oszthatjuk dx , illetve dy -nal és a fenti differenciálegyenleteket kapjuk vissza. Az $x dx + 2 y dy = 0$ egyenlet tehát 4 differenciálegyenletet jelent. A gyakorlatban erre nem utalunk és röviden csak differenciálegyenletről beszélünk. Az ellipsziseket geometriai értelemben vett megoldásgörbéknek nevezzük.

A $g(x, y)$ és $h(x, y)$ függvények legyenek folytonosak az Ω tartományon. Azt mondjuk, hogy

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

differenciálegyenlet megoldásai $\varphi(x)$, illetve $\psi(y)$ ha kielégítik a

$$g(x, y) + h(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

illetve a

$$g(x, y) \frac{dx}{dy} + h(x, y) = 0$$

implicit differenciálegyenleteket.

Minden olyan $\Omega_1 \subset \Omega$ tartományon ahol $h(x, y) \neq 0$, illetve olyan $\Omega_2 \subset \Omega$ tartományon ahol $g(x, y) \neq 0$, explicit a differenciálegyenlet. Az $\Omega_1 \cap \Omega_2$ tartományon ahol $g(x, y)$ és $h(x, y)$ nem zérus a

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{g(x, y)}{h(x, y)}; \quad \frac{dx}{dy} = - \frac{h(x, y)}{g(x, y)}$$

differenciálegyenletek ekvivalensek és mivel jobb oldalaik egymás reciprokai, ezért az inverz függvény deriválási szabálya szerint megfelelő megoldásaik egymás inverzei.

Ha az (x_0, y_0) pontban $g(x_0, y_0) = h(x_0, y_0) = 0$, akkor az (x_0, y_0) pontot szinguláris megoldásnak (pont megoldásnak, egyensúlyi helyzetnek) nevezzük.

4.2. Definíció. Tegyük fel, hogy $g(x, y)$ és $h(x, y)$ folytonos függvények az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon. A

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$$

differenciálegyenletet egzaktnak nevezzük, ha van olyan

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, az Ω tartományon folytonosan differenciálható függvény, hogy differenciálja

$$dF \equiv g(x, y) dx + h(x, y) dy,$$

azaz amelyre teljesül a következő:

$$F'_x(x, y) = g(x, y); F'_y(x, y) = h(x, y); (x, y) \in \Omega(x, y)$$

Az $F(x, y)$ függvényt az egzakt differenciálegyenlet $g(x, y)$, $h(x, y)$ függvénypárja primitív függvényének nevezzük.

4.3. Tétel. Az egzakt differenciálegyenletnek $\varphi(x)$, illetve $\psi(y)$ akkor és csak akkor megoldásai, ha valamely I_1 , illetve I_2 intervallumon differenciálhatók és

$$F(x, \varphi(x)) \equiv c \quad x \in I_1; \quad F(\psi(y), y) \equiv c, \quad y \in I_2,$$

ahol c az $F(x, y)$ függvény értékkészletéből vett tetszőleges konstans.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varphi(x)$ differenciálható és

$$F(x, \varphi(x)) \equiv c, \quad x \in I_1.$$

Differenciáljuk az azonosságot és használjuk fel, hogy a differenciálegyenlet egzakt. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{F(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{F(x, \varphi(x))}{\partial y} \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0,$$

azaz

$$g(x, \varphi(x)) + h(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0,$$

tehát $\varphi(x)$ kielégíti a differenciálegyenletet.

Fordítva, tegyük fel hogy $\varphi(x)$ megoldása az egzakt differenciálegyenletnek, akkor a fenti lépéssorrend megfordításával következik, hogy $F(x, \varphi(x)) = c$, tehát $\varphi(x)$ kielégíti az $F(x, y) = c$ egyenletet.

Hasonlóan bizonyítható a $\psi(y)$ megoldásfüggvényre vonatkozó állítás.

4.4. Példa. A 4.1. Példában felírtuk az ellipszissereg differenciálegyenletét. Ez az

$$x \, dx + 2y \, dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt és

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2.$$

A differenciálegyenlet megoldása az

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2 = c, \quad c > 0,$$

egyenlettel adott minden differenciálható függvény. Ezek grafikonjai a "fél-ellipszisek". A geometriai értelemben vett megoldásgörbék tehát az ellipszisek.

4.5. Tétel. A $g(x, y)$ és $h(x, y)$ függvények legyenek folytonosan differenciálhatók a $D \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő tartományon. Ebben az esetben a

$$g(x, y) \, dx + h(x, y) \, dy = 0, \quad (x, y) \in D$$

differenciálegyenlet akkor és csak akkor egzakt, ha

$$g'_y(x, y) = h'_x(x, y); \quad (x, y) \in D.$$

Rögzítés. Képezzük a D egyszeresen összefüggő tartományon a

$$\underline{v}(\underline{r}) = g(x, y) \underline{i} + h(x, y) \underline{j}; \quad \underline{r} = (x, y).$$

folytonosan differenciálható vektor-vektor függvényt. A vektoranalízis potenciálméleti részében bebizonyítottuk, hogy ebben az esetben a potenciálfüggvény létezésének szükséges és elégséges feltétele a vektor-vektor függvény rotáció mentessége.

Mivel a

$$g'_y(x, y) = h'_x(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

feltétel éppen azt jelenti, hogy $\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = 0$, ezért a potenciálfüggvény a $g(x, y)$, $h(x, y)$ függvénypár $F(x, y)$ primitív függvénye.

A vektoralizisból tudjuk, hogy a potenciálfüggvény meghatározása történhet vonalintegrállal is. Ennek jelölése:

$$\phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} g(x, y) dx + h(x, y) dy. \quad \begin{array}{l} (x, y) \in D. \\ (x_0, y_0) \in D. \end{array}$$

A vonalintegrál független az uttól. Az integrálás általában a két pontot összekötő töröttvonalon történik. A fenti feltételek mellett az integrálfüggvény, primitív-függvény.

A kezdetiérték feladatra vonatkozik a

4.6. Tétel. Tegyük fel, hogy a $g(x, y)$ és $h(x, y)$ függvények folytonosan differenciálhatók a D egyszerűen összefüggő tartományon, ahol $g^2(x, y) + h^2(x, y) \neq 0$ és a

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt. Ekkor tetszőlegesen rögzített $(x_0, y_0) \in D$ és $h(x, y) \neq 0$ esetén a

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0; \quad y(x_0) = y_0,$$

kezdetiérték feladat $g(x, y) \neq 0$ esetén pedig a

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0; \quad x(y_0) = x_0$$

kezdetiérték feladat lokálisan egyértelműen megoldható. A megoldás az

$$F(x, y) = F(x_0, y_0)$$

egyenlettel adott implicit függvény.

Bizonyítás. A 4.3. Tételből következik, hogy ha van megoldása a kezdetiérték feladatoknak, $\varphi(x)$, illetve $\psi(y)$, $x \in I_1$, $y \in I_2$, akkor található olyan c^* való szám, hogy

$$F(x, \varphi(x)) = c^*,$$

illetve

$$F(\psi(y), y) = c^*.$$

Az $x = x_0$ helyen látható, hogy $c^* = F(x_0, y_0)$, tehát ha van megoldás, akkor az az

$$F(x, y) = F(x_0, y_0)$$

egyenlettel adott implicit függvény. A megoldás létezése, az analízisben megismert implicit függvény létezésére vonatkozó elégséges feltétel alapján következik (lásd [3]), mert az

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = 0$$

egyenlet $F'_y(x_0, y_0) = h(x_0, y_0) \neq 0$ esetén az x_0 pont valamely környezetében $\varphi(x)$ és az $F'_x(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) \neq 0$ esetén az y_0 pont környezetében $\psi(y)$ differenciálható függvényt definiál. $\square$

A differenciálegyenletek többsége nem egzakt. Az esetek egy részében azonban találunk olyan zérustól különböző $\mu(x, y)$ folytonosan differenciálható kétváltozós valós függvényt, amellyel megszorozzuk a differenciálegyenletet és a keletkező, az eredetivel ekvivalens differenciálegyenlet már egzakt.

Legyenek $g(x, y)$, $h(x, y)$ és $\mu(x, y)$ folytonosan differenciálható függvények valamely D egyszeresen összefüggő tartományon. Tegyük fel, hogy $\mu(x, y) \neq 0$ és a $g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$ $\mu(x, y) \neq 0$ függvénnyel való beszorzás után keletkezett

$$\mu(x, y) g(x, y) dx + \mu(x, y) h(x, y) dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt akkor a $\mu(x, y)$ függvényt integráló tényezőnek (vagy multiplikátornak), nevezzük. A 4.5. Tétel, szerint az egzakttság szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu(x, y) g(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x, y) h(x, y)),$$

$$(x, y) \in D,$$

Ebből következik, hogy a $\mu(x, y) \neq 0$ függvény eleget tesz a

$$\mu \frac{\partial g}{\partial y} + g \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad (x, y) \in D,$$

parciális differenciálegyenletnek, amelyet eddigi ismereteink alapján ilyen általános esetben nem tudunk megoldani. Lehetséges azonban, hogy az integráló tényező csak az egyik változótól függ. Így például a $\mu(x) \neq 0$ integráló

tényezőre vonatkozó parciális differenciálegyenlet közösleges differenciálegyenlet lehet ha $h(x, y) \neq 0$ és ha az

$$\frac{1}{\mu(x)} \frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{g'_y(x, y) - h'_x(x, y)}{h(x, y)}$$

egyenlet jobb oldalán csak az x változótól függő függvény áll.

A fenti gondolatmenetet követve igazolhatjuk azt is, hogy a $\nu(y) \neq 0$ függvény csak akkor integráló tényező, ha kielégíti az

$$\frac{1}{\nu(y)} \frac{d\nu(y)}{dy} = \frac{h'_x(x, y) - g'_y(x, y)}{g(x, y)}$$

elsőrendű differenciálegyenletet, amelyben $g(x, y) \neq 0$ és az egyenlet jobb oldalán csak az y változótól függő függvény áll.

A nem egzakt differenciálegyenletek többségéhez nincs egyetlen változó függő integráló tényező. Néhány esetben integráló tényezőt összetett függvényként

$$m(x \pm y); \quad m(x^2 \pm y^2), \quad m(x \cdot y), \quad m\left(\frac{x}{y}\right)$$

alakban is kereshetünk. A következő differenciálegyenletnek például $m(x, y) = xy$ integráló tényezője:

$$(3xy + 2y^2) dx + (3xy + 2x^2) dy = 0.$$

5. A Cauchy-Lipschitz-féle egzisztencia és unicitás tétel

Az előző fejezetben olyan kezdetiérték feladatokkal foglalkoztunk amelyekben a jobb oldalon szereplő $f(x, y)$ függvény "speciális alaku" volt. Így például a szeparálható esetben $f(x, y) = g(x) h(y)$, a Bernoulli-féle differenciálegyenletben $f(x, y) = -g(x)y + h(x)y^\alpha$.

E ténynek alapvető szerepe volt abban, hogy a kezdetiérték feladatokat integrálással oldhattuk meg. A kezdetiérték feladatok nagy többsége azonban nem oldható meg így. Ezekben az esetekben valamilyen numerikus megoldással próbálkozhatunk. Az irodalomjegyzék [5]-tel jelzett művében találhatunk ilyen numerikus megoldási módszereket. Ott az is kiderül, hogy a numerikus

módszer alkalmazását meg kell előzzze a megoldás létezését és egyértelműségét igazoló vizsgálat. Ezért van nagy jelentősége az itt tárgyalt egzisztencia és unicitás tételnek.

Ebben a fejezetben az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladat egyértelmű megoldhatóságára az $f(x, y)$ függvény tulajdonságaiból következtetünk. Ilyen tulajdonságok például az $f(x, y)$ függvény folytonossága és az alábbiakban ismertetésre kerülő Lipschitz-feltétel.

A Cauchy-Peano-féle egzisztencia tétel szerint (lásd [1]-ben), ha $f(x, y)$ folytonos valamely $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon és $(x_0, y_0) \in \Omega$, akkor a kezdetiérték feladat megoldható. Az egyértelmű megoldhatóság ebből nem következik.

Az első fejezet 2.2. Példájában láttuk, hogy az $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ függvény mindenütt folytonos és minden (x_0, y_0) esetén igaz, hogy az $y' = \sqrt{|y|}$; $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték feladat megoldható. Ez a példa azonban arra is rávilágít, hogy a megoldás egyértelműségének a folytonosság nem elégséges feltétele, mert minden $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén végtelen sok megoldás van.

Legyen $f(x, y)$ folytonos valamely Ω tartományon és $(x_0, y_0) \in \Omega$ -ban. Vizsgáljuk meg milyen következménnyel jár együtt az ha az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladatnak több megoldása van. Ennek érdekében bebizonyítjuk az alábbi tételt:

5.1. Tétel. A $\varphi(x)$ ($x \in I$) függvény akkor és csak akkor megoldása az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladatnak, ha folytonos és kielégíti az

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y) dt, \quad (x, y) \in \Omega$$

integrálegyenletet (azaz ha $\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$, $t \in I$).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varphi(x)$ kielégíti az integrálegyenletet. Ez azt jelenti, hogy van olyan I intervallum amelyen teljesülnek az alábbi követelmények:

$$\varphi(x) \text{ folytonos, } (x \in I); \quad (x, \varphi(x)) \in \Omega;$$

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt; \quad x_0, \quad x \in I.$$

Mivel az integrandus folytonos, $\varphi(x)$ differenciálható és az azonosság differenciálásával a következőt kapjuk:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad x \in I.$$

Figyelembe véve még az $x_0 \in I$ feltételt is, a. integrálegyenletből $\varphi(x_0) = y_0$ is következik és eredményünk éppen azt jelenti, hogy $\varphi(x)$ kielégíti a kezdetiérték feladatot.

Fordítva: ha $\varphi(x)$ megoldása a kezdetiérték feladatnak, akkor

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)); \quad y(x_0) = y_0; \quad x \in I,$$

és integrálás után

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt, \quad x \in I,$$

az integrálegyenlet differenciálható megoldása.

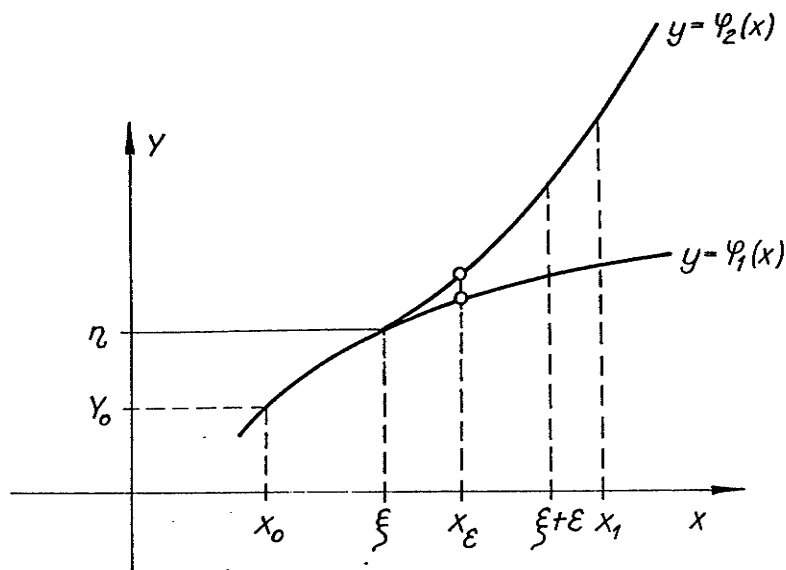
Ezek után tegyük fel, hogy a $\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$ különböző megoldások kielégítik a kezdetiérték feladatot és az I intervallum értelmezési tartományaik közös része. Ekkor

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0,$$

és az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy van olyan $x_1 > x_0$ pont amelyre

$$\varphi_1(x_1) \neq \varphi_2(x_1), \quad x_1 \in I.$$

(Lásd a 7. ábrát.)



7. ábra

Legyen a $\xi \in I$ pont alsó határa az összes olyan x pontoknak amelyekre teljesül az

$$u(x) = |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| > 0, \quad x \in I.$$

egyenlőtlenség. Az $u(x)$ függvény folytonosságából és $u(x_0) = 0$ -ból következik, hogy értéke a ξ helyen zérus. (Ellenkező esetben ξ nem lehetne alsó határ).

Képezzük a $v(x) = |f(x, \varphi_1(x)) - f(x, \varphi_2(x))|$ folytonos függvényt.

Válasszunk pozitív ε számot úgy, hogy $0 < \varepsilon < x_1 - \xi$ teljesüljön és a $[\xi, \xi + \varepsilon]$ intervallumban vizsgáljuk a feladatot.

Vezessük be a $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi) = \eta$ jelölést. Az eddigiekből következik, hogy $\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$ az

$$y' = f(x, y); \quad y(\xi) = \eta$$

kezdetiérték feladat megoldásai és az 5.1. Tétel alapján az ezzel ekvivalens integrálegyenletet is kielégítik, azaz

$$\varphi_1(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, \varphi_1(t)) dt; \quad \varphi_2(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, \varphi_2(t)) dt.$$

Képezzük ezen egyenletek különbségének abszolút értékét és végezzünk integrálbecslést. A fenti jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$u(x) \leq \int_{\xi}^x v(t) dt, \quad x \in [\xi, \xi + \varepsilon].$$

Ebből az egyenlőtlenségből, $u(x) > 0$, $x \in (\xi, \xi + \varepsilon)$, miatt következik, hogy a $v(x)$ folytonos függvénynek, amely felveszi maximumát a $[\xi, \xi + \varepsilon]$ intervallumban és amelyre $v(\xi) = 0$, p. maximuma van. Legyen x_ε a

$(\xi, \xi + \varepsilon]$ intervallumnak egy olyan helye amelyben $v(s)$ -nek maximuma van. Az integrálszámítás középtértéktétele és $v(\xi) = 0$ felhasználásával,

$$u(x) < v(x_\varepsilon) \varepsilon, \quad x, x_\varepsilon \in (\xi, \xi + \varepsilon],$$

következik. Ez az egyenlőtlenség az x_ε pontban is igaz, azaz

$$\frac{v(x_\varepsilon)}{u(x_\varepsilon)} = \frac{|f(x_\varepsilon, \varphi_1(x_\varepsilon)) - f(x_\varepsilon, \varphi_2(x_\varepsilon))|}{|\varphi_1(x_\varepsilon) - \varphi_2(x_\varepsilon)|} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Eredményünk szemléletesen azt jelenti, hogy több megoldás esetén az Ω tartománynak van egy olyan pontja, hogy annak bármilyen környezetében rögzített x és változó y mellett Δf tetszőlegesen nagy lehet. Ezt foglaljuk össze az alábbiakban:

5.2. Következmény. Ha a folytonos jobboldalu

$$y' = f(x, y); \quad (x, y) \in \Omega$$

explicit, elsőrendű differenciálegyenletnek valamely $(x_0, y_0) \in \Omega$ ponton át több megoldásgörbéje halad, akkor az Ω tartománynak van olyan (ξ, η) pontja, hogy annak bármilyen környezetében (amelyet az ε szám tetszőleges megválasztásával kaphatunk), van két azonos abszcisszájú $(x_\varepsilon, \varphi_1(x_\varepsilon))$, $(x_\varepsilon, \varphi_2(x_\varepsilon))$ pontpár amelyekre

$$\frac{|f(x_\varepsilon, \varphi_1(x_\varepsilon)) - f(x_\varepsilon, \varphi_2(x_\varepsilon))|}{|\varphi_1(x_\varepsilon) - \varphi_2(x_\varepsilon)|} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

($\frac{1}{\varepsilon}$ tetszőlegesen nagyra választható).

Az egyenlőtlenség kizárása elégséges feltétele az egyértelmű megoldhatóságnak.

Az egyenlőtlenség kizárása az

5.3. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f(x, y)$ folytonos függvény az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon az y változójában kielégíti a lokális Lipschitz feltételt, ha az tartomány minden pontjához található olyan $K \subset \Omega$ környezet és olyan $L > 0$, környezettől függő Lipschitz-féle állandó, hogy minden

$$(x, y_1), (x, y_2) \in K$$

esetén, fennáll az

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

egyenlőtlenség.

Egységes a Lipschitz feltétel, ha az L Lipschitz-féle állandó a ponttól, és a K környezettől független.

A Lagrange-féle középérték tételből következik az

5.4. Tétel. Ha az $f(x, y)$ és az $f'_y(x, y)$ függvények folytonosak az Ω tartományban, akkor $f(x, y)$ az y változójában kielégíti a lokális Lipschitz feltételt.

Bizonyítás. Legyen $P_0(x_0, y_0) \in \Omega$, tetszőlegesen rögzített pont. Vegyünk fel a $P_0(x_0, y_0)$ pont körül egy olyan K környezetet, amelynek K lezártja is része az Ω tartománynak. Vezessük be a következő jelölést:

$$\max_{(x, y) \in \bar{K}} |f'_y(x, y)| = M.$$

A $M > 0$ szám létezése az $|f'_y(x, y)|$ függvény $\bar{K}$ -ban való folytonosságából következik. Tegyük fel, hogy $P_1(x, y_1)$, $P_2(x, y_2)$ tetszőleges két pontja a K környezetnek. Ekkor, a Lagrange-féle középérték tétel szerint, van olyan $\xi \in \mathbb{R}$, amelyre teljesül a következő egyenlőség:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y(x, \xi) (y_1 - y_2), \quad y_1 < \xi < y_2$$

és ebből az, hogy

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|,$$

azaz az $M = L$ Lipschitz-féle állandóval a lokális Lipschitz-feltétel teljesül. $\square$

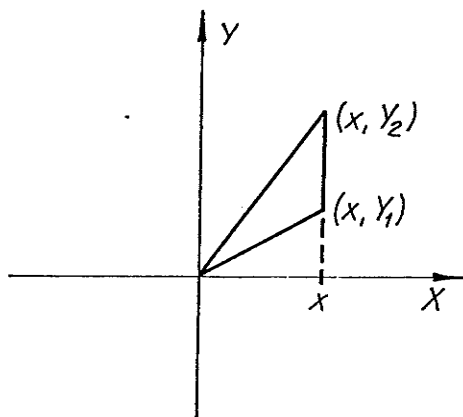
A következő példával azt illusztráljuk, hogy az $f'_y(x, y)$ parciális derivált létezése nem szükséges a Lipschitz-feltétel teljesüléséhez.

5.5. Példa. Igazoljuk, hogy az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény az y változójában kielégíti az egységes Lipschitz-feltételt.

MEGOLDÁS. A függvény y változója szerint parciálisan nem deriválható az origóban. A 8. ábrán azonban láthatjuk, hogy minden $P(x, y_1)$ és $P(x, y_2)$ pontban

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |\sqrt{x^2 + y_1^2} - \sqrt{x^2 + y_2^2}| \leq |y_1 - y_2|,$$

mert bármely háromszög két oldalának különbsége nem nagyobb a harmadik oldalánál. A Lipschitz-féle állandó: $L = 1$.



8. ábra

A lokális Lipschitz-feltétel teljesüléséből már következik az

5.6. Tétel. Tegyük fel, hogy az $f(x, y)$ függvény folytonos az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon és ott kielégíti az y változójában a lokális Lipschitz-feltételt. Legyen (x_0, y_0) az Ω tartomány tetszőlegesen rögzített pontja. Ekkor az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0.$$

kezdetiérték feladatnak legfeljebb egy megoldása van.

A következőkben bebizonyítjuk, hogy az 5.6. Tétel feltételei mellett létezik a megoldás.

5.7. Tétel. (Cauchy-Lipschitz-féle egzisztencia és unicitás tétel.)

Tegyük fel, hogy az $f(x, y)$ függvény folytonos az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon és ott kielégíti az y változójában a lokális Lipschitz-feltételt. Legyen (x_0, y_0) az Ω tartomány tetszőlegesen rögzített pontja. Az $a > 0$, $b > 0$ számokat válasszuk meg úgy, hogy a

$$T = \left\{ (x, y) : |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b \right\}$$

téglalap $\overline{T}$ lezártja is része legyen az (x_0, y_0) ponthoz tartozó

Lipschitz-féle K környezetnek, amelyhez tartozó Lipschitz-féle állandó L .

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\max_{(x, y) \in \overline{T}} f(x, y) = M, \quad \alpha = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

Ekkor az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható.

A teljes megoldás értelmezési tartománya tartalmazza az $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ intervallumot.

Bizonyítás. A rekurzív formulával képzett

$$\varphi_0(x) = y_0$$

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{n-1}(t)) dt,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots; \quad x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha).$$

függvénysorozatról belátjuk, hogy egyenletesen konvergál és határfüggvényéről azt hogy a kezdetiérték feladat megoldása.

Ezt az eljárást Picard-féle szukcesszív approximációs módszernek, vagy fokozatos közelítésnek nevezzük.

A bizonyítás első lépése: teljes indukcióval igazoljuk, hogy a függvény-sorozat által definiált függvények grafikonjai T -ben haladnak. Nyilvánvaló, hogy

$$(x, \varphi_0(x)) = (x, y_0) \in T, \quad \text{ha } |x - x_0| < \alpha.$$

Tegyük fel, hogy

$$(x, \varphi_{n-1}(x)) \in T, \quad \text{ha } |x - x_0| < \alpha,$$

Ekkor $f(x, \varphi_{n-1}(x))$ létezik és $|f(x, \varphi_{n-1}(x))| < M$ miatt

$$|\varphi_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{n-1}(t)) dt \right| \leq M |x - x_0| < M\alpha \leq b, \quad \text{tehát}$$

$$(x, \varphi_n(x)) \in T, \quad \text{ha } |x - x_0| < \alpha.$$

Második lépésben: a $\varphi_n(x)$ függvénysorozattal ekvivalens

$$\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)), \quad |x - x_0| < \alpha,$$

függvénysor egyenletes és abszolút konvergenciáját igazoljuk, olyan pozitív tagu majoráns numerikus sor megadásával, amely $|x - x_0| < \alpha$ esetén majorálja a függvénysort, azaz azt állítjuk, hogy $n \geq 1$ esetén

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{L} \frac{L^n |x - x_0|^n}{n!} < \frac{M}{L} \frac{L^n \alpha^n}{n!}.$$

Ha $n = 1$, akkor igaz az állítás, mert

$$|\varphi_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq M |x - x_0| < \frac{M}{L} \frac{L \alpha}{1!}.$$

Tegyük fel, hogy $(n-1)$ -re igaz az állítás és bizonyítsuk be n -re. Használjuk a Lipschitz-feltételt a következő képletben:

$$\begin{aligned} \left| \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{n-1}(t)) - f(t, \varphi_{n-2}(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L \left| \varphi_{n-1}(t) - \varphi_{n-2}(t) \right| dt \right|. \end{aligned}$$

Az indukciós feltétel szerint

$$\begin{aligned} \left| \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) \right| &\leq L \int_{x_0}^x \frac{M}{L} \frac{L^{n-1} |t-x_0|^{n-1}}{(n-1)!} dt \leq \\ &\leq \frac{M}{L} \frac{L^n |x-x_0|^n}{n!} < \frac{M}{L} \frac{L^n \alpha^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ezek után nyilvánvaló, hogy az

$$\left| y_0 \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{L^k \alpha^k}{k!}$$

numerikus konvergens sor a függvénysor majoráns sora. Weierstrass tétele szerint a függvénysor és vele együtt a függvénysorozat, $|x-x_0| < \alpha$ -ban egyenletesen tart valamely $\varphi(x)$ határfüggvényhez. A $\varphi(x)$ határfüggvény folytonos, mert a hozzá egyenletesen konvergáló függvénysorozat elemei is folytonosak voltak.

$$(x, \varphi(x)) \in \bar{T}, \quad |x-x_0| < \alpha \text{ esetén,}$$

mert minden rögzített x -re $(x, \varphi(x))$, az $(x, \varphi_n(x)) \in T$, pontsorozat határpontja. Ebből és a Lipschitz feltételből következik, hogy

$$\begin{aligned} \left| f(x, \varphi_n(x)) - f(x, \varphi(x)) \right| &\leq L \left| \varphi_n(x) - \varphi(x) \right| \\ n = 1, 2, 3, \dots \quad ; \quad &|x-x_0| < \alpha, \end{aligned}$$

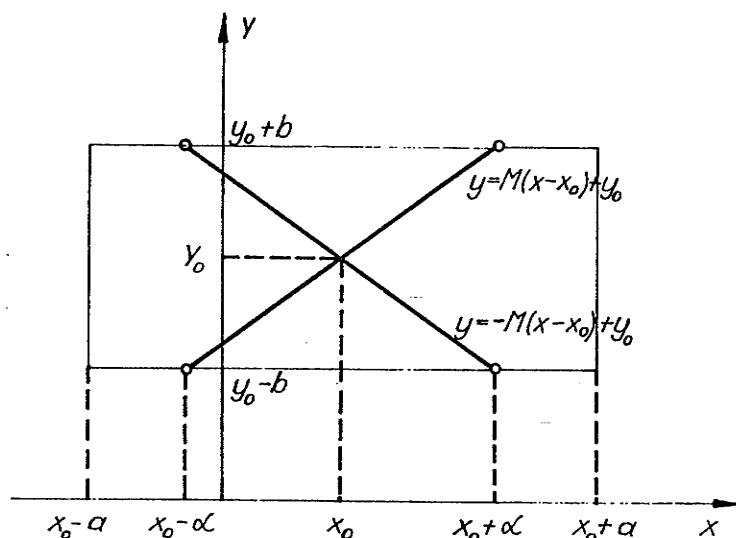
azaz az, hogy $f(x, \varphi_n(x)) \rightarrow f(x, \varphi(x))$, $n \rightarrow \infty$, konvergencia is egyenletes. Ekkor viszont a

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{n-1}(t)) dt \right)$$

határérték képzésekor az integrálás és a limeszképzés felcserélhető és a $\varphi(x)$ függvény kielégíti a következő integrálegyenletet:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, \varphi_{n-1}(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt,$$

amely $\varphi(x)$ folytonossága miatt az 5.1. Tétel szerint ekvivalens a kezdetiérték feladattal.



9. ábra

A megoldás egyértelmősége az 5.6. Tételből következik.

A 9. ábrán megfigyelhetjük azt, hogy az $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$ szám ilyen megadása, következménye volt az $|y'(x)| \equiv |f(x, y(x))| < M$ feltételnek,

mert e miatt a megoldásgörbe legkorábban (az ábra szerinti felvételben), az $\alpha = \frac{b}{M}$ abszcisszájú pontban hagyhatja el a téglalapot.

Az $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ intervallumban előállított lokálisan egyértelmű megoldás létezéséből, az 1.7. Tétel szerint következik, hogy az egyértelműen folytatható, azaz a teljes megoldás létezik. $\square$

Végül behatároljuk a következő tételt:

5.8. Tétel. Az 5.7. Tétel feltételeinek megtartása esetén a kezdeti érték feladat teljes megoldásgörbéje az Ω tartomány határától-határáig halad.

Bizonyítás. Legyen $\varphi_1(x)$ az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0,$$

kezdetiérték feladat teljes megoldása. Jelöljük (β_1, β_2) -vel az értelmezési tartományát. Legyen $A \subset \Omega$ az (x_0, y_0) pontot belsejében tartalmazó tetszőlegesen rögzített, korlátos és zárt pontthalmaz. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben minden

$$x \in (\beta_1, \beta_2) \text{ esetén } (x, \varphi_1(x)) \in A,$$

azaz azt, hogy a teljes megoldásgörbe a korlátos és zárt A pontthalmazban marad. Az 5.1. Tétel szerint

$$\varphi_1(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_1(t)) dt$$

és ebből

$$\left| \varphi_1(x_k) - \varphi_1(x_\ell) \right| = \left| \int_{x_0}^{x_k} f(t, \varphi_1(t)) dt - \int_{x_0}^{x_\ell} f(t, \varphi_1(t)) dt \right|$$

$$x_k, x_\ell \in [x_0, \beta_2).$$

A $\max |f(x, y)| = M_A$ felhasználásával a fentiekből következik, hogy

$$|\varphi_1(x_k) - \varphi_1(x_\ell)| \leq M_A |x_k - x_\ell|,$$

$$x_k, x_\ell \in [x_0, \beta_2],$$

és ebből az, hogy létezik a $\lim_{x \rightarrow \beta_2} \varphi_1(x)$ határérték.

Terjesszük ki a $\varphi_1(x)$ függvényt a β_2 pontba is. Legyen

$$\varphi_1(\beta_2) = \lim_{x \rightarrow \beta_2} \varphi_1(x).$$

Ezzel φ_1 a β_2 pontban balról folytonos és a $[x_0, \beta_2]$ zárt intervallumban kielégíti az integrálegyenletet. Ebből következik, hogy

$$\varphi_1'(\beta_2^-) = f(\beta_2, \varphi_1(\beta_2)).$$
 Az 5.7. Tétel szerint az

$$y' = f(x, y); \quad y(\beta_2) = \varphi_1(\beta_2)$$

kezdetiérték feladatnak szintén teljes megoldása van és az, a β_2 pont jobb oldali környezetében is értelmezett. Ha ennek a $\varphi_2(x)$ megoldásnak az értelmezési tartományát (γ_1, γ_2) -vel jelöljük, akkor a fentiekből következik, hogy $\gamma_2 > \beta_2$. Mivel $\varphi_2(x)$ egyértelmű megoldás és $\varphi_1'(\beta_2^-) = f(\beta_2, \varphi_1(\beta_2))$, ezért

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & \text{ha } \beta_1 < x \leq \beta_2 \\ \varphi_2(x), & \text{ha } \beta_2 \leq x < \gamma_2 \end{cases}$$

folytonosan differenciálható megoldása az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0.$$

kezdetiérték feladatnak, ellentmondásban azzal, hogy (β_1, β_2) a teljes megoldás értelmezési tartománya. $\square$

Az 5.7. Tétel bizonyításában megismertük az ugynevezett Picard-féle közelítő eljárást, amellyel az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladat teljes megoldását tudjuk közelíteni. Az eljárás lényege az, hogy a kezdetiérték feladattal ekvivalens

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

"integrálegyenletről" rekurzív módon

$$\varphi_0(x) = y_0,$$

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_0(t)) dt,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{n-1}(t)) dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

függvénysorozatot képezünk és mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

a teljes megoldás, ezért rögzített k -ra $\varphi_k(x)$ a teljes megoldást közelítő függvény. Így például az

$$y' = x - y; \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladat esetén teljesülnek az 5.7. Tétel feltételei és a

$$\varphi(x) = x - 1 + 2e^{-x}, \quad -\infty < x < \infty,$$

teljes megoldást közelítő függvények a következők:

$$\varphi_0(x) = 1,$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x (t-1) dt = 1 - x + \frac{1}{2} x^2,$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x t - (1-t + \frac{1}{2} t^2) dt = 1 - x + x^2 - \frac{1}{6} x^3,$$

$$\varphi_3(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{120} x^5,$$

$$\varphi_4(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{120} x^5,$$

$$\varphi_5(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{12} x^4 - \frac{6}{60} x^5 + \frac{1}{720} x^6$$

A megoldás és a közelítő megoldások rávilágítanak arra, hogy a szukcessziv approximációval kapott $\varphi_k(x)$ függvények nem részletösszegek a $\varphi(x)$ megoldást előállító hatványsornak. A gyakorlatban ez a tulajdonság szinte lehetetlenné teszi a $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x)$ határfüggvény zárt alakú megadását. Legfontosabb

tanulmányként azt is levonhatjuk, hogy a Picard-féle módszer alkalmazását minden esetben meg kell, hogy előzze a teljes megoldás létezésének valamilyen módszerrel való kimutatása, mert ha nincs megoldás, akkor a $\varphi_k(x)$ függvények semmit nem közelítenek és ha több megoldás van akkor nem tudjuk, hogy mire vonatkozik a "közelítés".

A most ismertetett közelítő megoldási módszer különbözik az alábbi diszkrét numerikus megoldási módszertől. A következőkben az ugynevezett Euler-módszerrel ismertetjük meg az olvasót.

Tegyük fel, hogy az

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladatnak létezik $\varphi(x)$ teljes megoldása.

A feladat numerikus megoldásán azt értjük, hogy véges sok x_k , $k = 1, 2, \dots, n$ helyen meghatározzuk a $\varphi(x_k)$ -hoz "elég közeli" értékeket és megbecsüljük az eltéréseket.

Legyen az $[x_0, x_0 + \beta]$ zárt intervallum a $\varphi(x)$ teljes megoldás értelmezési tartományának része. Vegyük fel az intervallumban az x_k , $k = 1, 2, \dots, n$ pontokat úgy, hogy az

$$x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{m-1} < x_n = x_0 + \beta$$

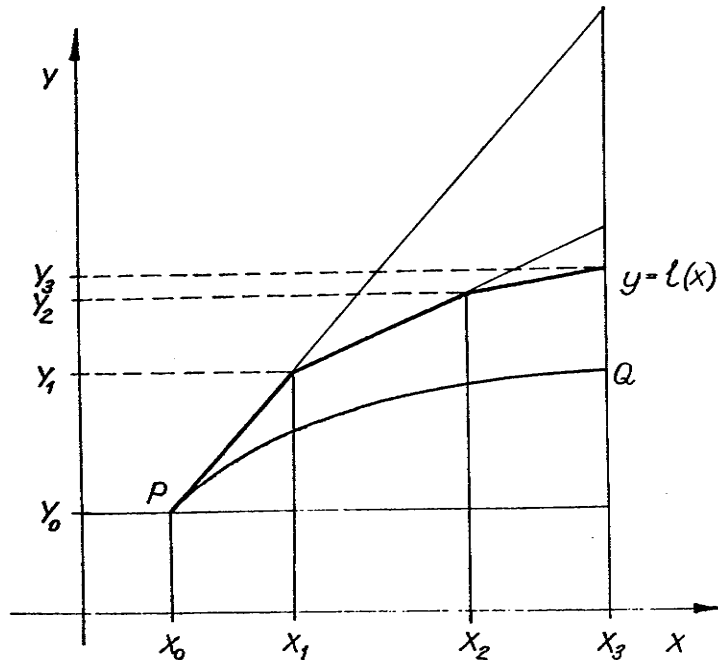
feltétel igaz legyen. (Gyakran egyenlőköri felosztást használunk.) Képezzük szakaszonként az $\ell(x)$ poligont a következőképpen:

$$\ell(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \text{ ha } x \in [x_0, x_1],$$

$$\ell(x_1) = y_1,$$

$$\ell(x) = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x - x_{k-1}), \text{ ha } x \in [x_{k-1}, x_k],$$

$$\ell(x_k) = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n; \text{ (10. ábra).}$$



PQ az integráltgörbe

10. ábra

A most definiált poligont Euler-féle törött vonalnak nevezzük. A kezdeti-érték feladatot Euler-módszerrel oldjuk meg, ha kiszámítjuk az (x_k, y_k) szám-párokat. Az Euler módszer a legegyszerűbb numerikus módszer az ugynevezett Runge-Kutta típusú módszerek között. Az ilyen módszerek részletes tárgyalását [5]-ben találhatjuk.

Oldjuk meg Euler módszerrel a következő feladatot:

$$y' = f(x, y); \quad y(0) = 5.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2y \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 2y, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

A differenciálegyenlet szétválasztható változójú. A teljes megoldás létezése a II. fejezet. 1.1. Tételéből következik, de az

$$\int_5^y \frac{dt}{2t} = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du$$

integrálegyenlethez láthatjuk, hogy a jobb oldali integrál primitív függvényét csak hatványsorral adhatjuk meg.

A kezdetiérték feladatot a $[0, 1]$ intervallumban Euler módszerrel megoldottuk. Számítógéppel kaptuk a következő megoldást:

x_k	y_k
0.00000	5.00000
0.10000	6.10996
0.20000	7.46110
0.30000	9.09851
0.40000	11.07276
0.50000	13.43938
0.60000	16.25802
0.70000	19.59099
0.80000	23.50133
0.90000	28.05006
1.00000	33.29294

A közelítés abszolút hibája kisebb mint 10^{-4} . A hibaszámítás képletét [5]-ben találjuk meg.

Végül az

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

jelölés ellentmondásosságával foglalkozunk. Ez az ellentmondás az, hogy ehhez az egyenlethez az ismeretlen $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $y': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények jelükkel az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pedig $f(x, y)$ értékével szerepel. A diffe-

renciálegyenletet azért jelöltük ilyen formában, mert ez elősegítette az elsőrendű differenciálegyenletek típusainak felismerését és ezáltal a helyes megoldási módszer kiválasztását. Így például ha

$$f(x, y) = -g(x)y + h(x), \quad g, h \in C^0(I),$$

akkor a differenciálegyenlet explicit elsőrendű inhomogén lineáris.

A jelölésnek ezt az ellentmondásosságát csak újabb függvények bevezetésével szüntethetjük meg. Egy lehetséges elképzelés a következő: adott az

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és legyen az $\underline{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ olyan függvény, amelynek koordinátafüggvényei a $\Theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ identikus leképezés, $(\Theta(x) \equiv x)$, és az ismeretlen y függvény. Ekkor a differenciálegyenlet a következő alakban adható meg:

$$y' = f \circ \underline{u} = f(\Theta, y).$$

Az $\Psi: I \rightarrow \mathbb{R}$, differenciálható függvényt megoldásnak nevezzük, ha

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &\equiv f(\Theta, \Psi)(x) \equiv f(\Theta(x), \Psi(x)) \equiv \\ &\equiv f(x, \Psi(x)), \quad x \in I \end{aligned}$$

Második fejezet

KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK ÉS MAGASABBRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. Alapfogalmak, átviteli elv. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Közönséges differenciálegyenlet rendszereknek egy olyan egyenletrendszert nevezünk, amelyben több ismeretlen differenciálható valós egyváltozós függvény és azok deriváltfüggvényei szerepelnek. Legyen $n \geq 1$ természetes szám és $f_1, f_2, \dots, f_n$ legyenek a közös Ω értelmezési tartománnyal rendelkező $(n+1)$ változós valós függvények. $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, pontjait jelöljük $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ -nel. A t változó szerinti differenciálást "felső $\cdot$ " jelölje. Az

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

egyenletrendszert Cauchy-féle normál alaku elsőrendű explicit differenciálegyenlet rendszernek nevezzük. Vektoriális alakja az $\underline{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ -be képező ismeretlen függvényre vonatkozó:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}).$$

:Az első fejezet végén ismerttetett jelölésnek megfelelően az elsőrendű explicit differenciálegyenlet rendszer jelölése az ismeretlen

$$\begin{aligned} \underline{x} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \dot{\underline{x}} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

függvényekkel és az ismert

$$\underline{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

illetve az identikus leképezéssel a következő:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f} \circ (\theta, \underline{x})$$

Ha az $\underline{f}$ függvény a t változótól független, akkor autonom a differenciálegyenlet rendszer. Az elsőrendű explicit differenciálegyenletre és e differenciálegyenlet rendszerre vonatkozó állításaink formai és tartalmi azonosságot mutatnak. Így a megoldás értelmezése is hasonlóan történik.

1.1. Definíció. Az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}), \quad (t, \underline{x}) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

differenciálegyenlet rendszer megoldásának nevezzük azt a legalább egyszer differenciálható $\underline{\psi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

$\underline{\psi}$ értelmezési tartománya I intervallum,

$$(t, \underline{\psi}(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad t \in I,$$

$$\dot{\underline{\psi}}(t) \equiv \underline{f}(t, \underline{\psi}(t)), \quad t \in I.$$

A

$$\Gamma = \{(t, \underline{\psi}(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \in I\}$$

ponthalmazt megoldásgörbének vagy integrálgörbének nevezzük.

Az $\underline{x}$ vektorok n dimenziós terében, a fázistérben, a

$$\gamma = \{\underline{\psi}(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I\}$$

ponthalmazt pályagörbének vagy fázisrajektóriának nevezzük (11. ábra).

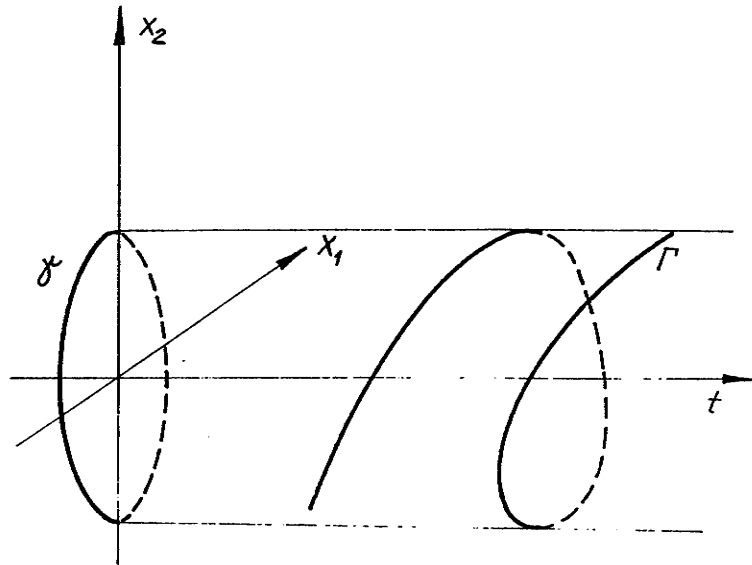
1.2. Definíció. Az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}), \quad (t, \underline{x}) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

differenciálegyenlet rendszer szinguláris megoldásának vagy egyensúlyi helyzetének nevezzük azt a $\underline{\psi}(t) \equiv \underline{\psi}^0$ állandó vektort amelyre az

$$\underline{f}(t, \underline{\psi}^0) \equiv \underline{0}, \quad t \in I,$$

azonosság teljesül.



11. ábra

A szinguláris megoldás állandó megoldásfüggvénye a differenciálegyenlet rendszernek, mert

$$\dot{\underline{\psi}}^0 \equiv \underline{0} \equiv \underline{f}(t, \underline{\psi}^0), \quad t \in I.$$

Az iránymezőt szemléltethetjük $n = 2$ esetén. Az Ω tartomány (t_0, x_1^0, x_2^0) pontjához húzott paraméteres előállításu

$$\underline{v} = (1, f_1(t_0, x_1^0, x_2^0), f_2(t_0, x_1^0, x_2^0))$$

irányvektoru egyenesszakasszal, ahol f_1 és f_2 az $\underline{f}$ függvény két koordináta-függvénye. Ekkor ugyanis a $(t, \underline{\psi}(t)) = (t, \psi_1(t), \psi_2(t))$, $t \in I$ megoldásgörbe ilyen paraméteres alakjából láthatjuk, hogy rögzített t_0 helyen, az érintővektor

$$(1, \dot{\psi}_1(t_0), \dot{\psi}_2(t_0)) = (1, f_1(t_0, x_1^0, x_2^0), f_2(t_0, x_1^0, x_2^0)) . \square$$

Legyenek $a_{ik}(t)$ és $b_i(t)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ az I intervallumon értelmezett valós függvények. Az

$$x_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t)$$

$$x_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t),$$

differenciálegyenlet rendszert lineárisnak nevezzük. A rendszer vektoriális alakja az $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x} + \underline{b}(t)$ mátrix-skalár függvényvel

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}(t)\underline{x} + \underline{b}(t).$$

Ha $\underline{b}(t) \equiv 0$, akkor a differenciálegyenlet rendszer homogén, egyébként inhomogén. Ha valamennyi $a_{ik}(t)$ függvény állandó, akkor állandó együtthatós a lineáris differenciálegyenlet rendszer.

A gyakorlatban legtöbbször a differenciálegyenlet rendszernek adott feltételeket kielégítő megoldásait keressük. Legyen $\underline{f}(t, \underline{x})$ az $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tartományon értelmezett $\mathbb{R}^n$ -be képező függvény. Válasszuk ki Ω valamely $(t_0, \underline{x}^0)$ pontját. Az

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}); \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0$$

egyenlőségekből álló feladatot kezdetiérték feladatnak nevezzük. Az

$\underline{x}(t_0) = \underline{x}^0$ egyenlőség a kezdeti feltétel. A $t_0, \underline{x}^0$ szám, illetve vektor a kezdeti értékpár.

A teljes megoldás fogalma, azaz az egyértelmű megoldhatóság definíciója, valamint a lokálisan egyértelmű megoldás fogalma az első fejezet 1.5. és 1.6. definíciójához hasonlóan leírható csak a jelöléseket kell megváltoztatni. Ennek megfogalmazását az olvasóra bizzuk.

Kezdetiérték feladatot kapunk, ha a 12. ábrán látható m tömegű testet a hozzáképest elhanyagolható tömegű rugalmas testtel (rugóval), kapcsoljuk a rögzített ponthoz. Az egyetlen tekintetbe vett erő a rugóerő. (A valóságban meglevő valamennyi energiafogyasztó hatást elhanyagoljuk.) Az így idealizált esetben csillapítatlan szabad lengésről beszélünk. A t időpillanatban a kitérést $y(t)$ -vel jelöljük.



12. ábra

A rugóerő nagysága kis kitérések esetén a kitérés lineáris függvénye és iránya az elmozdulással ellentétes irány. Ha $\frac{1}{c}$ a rugóállandó, akkor $\frac{1}{c}$ y a rugóerő nagysága. A lengést szabályozó fizika törvény, Newton 2. axiómája, amelynek matematikai modellje az $\ddot{y}$ gyorsulással felírt:

$$\ddot{y} = -\frac{1}{mc} y; \quad y(0) = y_0$$

$$\dot{y}(0) = v_0$$

feladat, ahol x_0 a kitérés, v_0 pedig a sebesség nagysága a $t = 0$ időpillanatban. Ezt a feladatot az $y = x_1, \dot{y} = x_2$ jelölésekkel átírhatjuk a következőképpen:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad x_1(0) = y_0$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{mc} x_1; \quad x_2(0) = v_0.$$

Ily módon differenciálegyenlet rendszerhez tartozó kezdetiérték feladatot adtunk meg.

Az előző példában látott

$$\ddot{y} = -\frac{1}{mc} y$$

differenciálegyenletben az ismeretlen $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; függvény legmagasabb rendű deriváltja, az $\ddot{y}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, azaz a második derivált.

Attól függően, hogy a differenciálegyenletben az ismeretlen függvény hányadik deriváltja szerepel, értelmezzük a differenciálegyenlet rendjét.

A differenciálegyenletet n -ed rendűnek nevezzük, ha a benne szereplő legmagasabb rendű derivált az ismeretlen függvény n -edik deriváltja.

Explicit az n -ed rendű differenciálegyenlet, ha az n -edik derivált a többi változóval kifejezett. Szokásos felírása a következő:

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}), \quad n \geq 1,$$

ahol

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, adott függvény.

Ha a differenciálegyenletből az n -edik derivált kifejezése (esetleg azonos átalakításokkal), nem lehetséges, akkor implicit a differenciálegyenlet.

Jelölése a következő:

$$F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0.$$

1.3. Definíció. Az

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}), (t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

differentiálegyenlet megoldásának nevezzük azt a legalább n -szer differenciálható $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

φ értelmezési tartománya I intervallum,

$$(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t) \dots \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega, \quad t \in I,$$

$$\varphi^{(n)}(t) \equiv f(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)), \quad t \in I.$$

Amint azt az 1.3. Definícióból látjuk a megoldás értelmezése az $n = 1$ esethez hasonlóan történt.

Az n -ed rendű explicit differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti feltétel szokásos jelölése:

$$y^{(k)}(t_0) = y_0^k; \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

$$t_0, y_0^k \in \mathbb{R}.$$

A feltételek száma n . Nyilvánvaló, hogy több feltételt nem adhatunk, mert a differenciálegyenlet rendszer egyértelműen meghatározza az n -edik derivált értékét a t_0 helyen a függvény és az első $(n-1)$ deriváltjának t_0 helyen felvett értékével; ugyanis

$$y^{(n)}(t_0) = f(t_0, y(t_0), \dot{y}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)).$$

Akárhányszor differenciálható függvények esetén az n -nél magasabbrendű deriváltak t_0 helyen vett értékei is meghatározottak, mert az

$$y^{(n)}(t) \equiv f(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

azonosság differenciálásával az

$$\begin{aligned}
y^{(n+1)}(t) = & f'_t(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) + \\
& + f'_y(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) y(t) + \\
& \vdots \\
& + f'_{y^{(n-1)}}(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) y^{(n)}(t)
\end{aligned}$$

alakból, a t_0 pont behelyettesítése után, $y^{(n+1)}(t_0)$ adott és az elkezdett eljárással a magasabb rendű deriváltak t_0 helyen vett értékei hasonlóan meghatározhatók.

Az explicit n -ed rendű differenciálegyenlet tekinthető elsőrendű differenciálegyenlet rendszernek. Kapcsolatukat kimondja a következő átviteli elvnek nevezett

1.4. Tétel. A legalább n -szer folytonosan differenciálható y függvény, valamely I intervallumon, akkor és csak akkor elégíti ki az

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) ; \\
y^{(k)}(t_0) &= y_0^k ; \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\
t_0, y_0^k &\in \mathbb{R} .
\end{aligned}$$

kezdetiérték feladatot, ha az

$$\underline{x}(t) = (y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad t \in I,$$

vektor-skalár függvény megoldása a következő kezdetiérték feladatnak.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \\
\underline{x}(t_0) &= (y_0^0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}) .
\end{aligned}$$

A tétel bizonyítása az

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\x_2(t) &= \dot{y}(t) \\&\vdots \\x_n(t) &= y^{(n-1)}(t)\end{aligned}$$

jelölésekkel azonnal adódik. $\square$

Néhány egyszerű esetben másodrendű differenciálegyenletet meg tudunk oldani az átviteli elv alkalmazásával. Ilyenek az úgynevezett hiányos másodrendű differenciálegyenletek.

Az $\ddot{y} = f(t, \dot{y})$ differenciálegyenletet hiányosnak nevezzük, mert jobb oldala az y ismeretlen függvényt explicit módon nem tartalmazza. Az $x_1 = y$ és az $x_2 = \dot{y}$ helyettesítésekkel az

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(t, x_2)\end{aligned}$$

differenciálegyenlet rendszert kapjuk, amelynek második egyenlete csak az x_2 ismeretlen függvényt tartalmazza. Ha ez a differenciálegyenlet valamely

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon megoldható, akkor $x_2(t)$ megoldását az első egyenletbe behelyettesítjük és integrálással a hiányos másodrendű differenciálegyenlet $x_1(t) = y(t)$ megoldását kapjuk.

Az $\ddot{y} = f(y, \dot{y})$ differenciálegyenletet is hiányosnak nevezzük, mert a jobb oldala a t független változót explicit módon nem tartalmazza. Az $x_1 = y$ és az $x_2 = \dot{y}$ helyettesítésekkel az

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2)\end{aligned}$$

differenciálegyenlet rendszert kapjuk. Ebből, először az $x_2(x_1)$ függvényt határozzuk meg a következőképpen:

Az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} \quad \text{illetve} \quad \frac{dx_2}{dx_1} x_2, \quad \text{ahol felhasználtuk az első differenciál-}$$

egyenletet is. Ebből és a második differenciálegyenletből, az $x_2 \neq 0$ esetben az $x_2(x_1)$ ismeretlen függvényt tartalmazó

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2}, \quad x_2 \neq 0,$$

differenciálegyenletet kapjuk. Ha ez a differenciálegyenlet megoldható, akkor a megoldását az első differenciálegyenletbe behelyettesítjük és az

$$\dot{x}_1 = x_2(x_1)$$

differenciálegyenletből szeparálással kapjuk meg a hiányos másodrendű differenciálegyenlet $x_1(t) = y(t)$ megoldását. $\square$

Az átviteli elv (1.4. Tétel) ismerete elméleti szempontból lényeges, mert a differenciálegyenlet rendszerekre vonatkozó tételek, amelyek a megoldás létezésére, egyértelműségére, periodicitására, s. i. t. adnak feltételeket, a magasabbrendű explicit differenciálegyenletre is alkalmazhatók, ugyan- is a differenciálegyenlet rendszer megoldásának első koordináta függvénye a differenciálegyenlet megoldása.

Van olyan eset azonban, amikor differenciálegyenlet rendszert célszerű differenciálegyenlet formájában vizsgálni. Így például az

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_1^2}{x_2}; & x_1, x_2 &> 0, \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1}{2} \end{aligned}$$

differenciálegyenlet rendszert a következőképpen alakíthatjuk át: differenciáljuk másodszor az x_2 függvényt (tegyük fel, hogy a második derivált létezik),

Az $\ddot{x}_2 = \frac{\dot{x}_1}{2}$ egyenletbe a differenciálegyenlet rendszer első egyenletéből

$\dot{x}_1$ és a második egyenletéből x_1 behelyettesíthető és ezzel az

$$\ddot{x}_2 = 2 \frac{\dot{x}_2^2}{x_2}$$

hiányos másodrendű differenciálegyenletet kapjuk. Megoldása a következő:

$$x_2(t) = -\frac{1}{c_1 t + c_2}, \quad c_1 > 0, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ezzel, a differenciálegyenletrendszerből a másik megoldás

$$x_1(t) = \frac{2c_1}{(c_1 t + c_2)^2}.$$

2. Differenciálegyenlet rendszerekre vonatkozó kezdetiérték feladatok egyértelmű megoldhatósága

Tekintsük az $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x})$, $(\underline{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, n > 1)$, Cauchy-féle normál alaku explicit elsőrendű differenciálegyenlet rendszert. Az $n = 1$ esetben tárgyalt

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet, amint azt az előző pontban láttuk, formai és tartalmi szempontból sok hasonlóságot mutat az $n > 1$ esethez. Az első fejezetben megismert

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0,$$

$(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ kezdetiérték feladattal kapcsolatos fogalmak és tételek, szövszerint értelmezhetők a differenciálegyenlet rendszerhez tartozó

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}); \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0, \quad (t, \underline{x}) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad t \in I.$$

kezdetiérték feladatra, csak vektoriális formában kell megfogalmazni a feltételeket. Ilyen például a

2.1. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $\underline{f}(t, \underline{x})$ folytonos függvény az $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tartományon, az $\underline{x}$ változójában kielégíti a lokális Lipschitz-feltételt, ha az Ω tartomány minden pontjához található olyan $K \subset \Omega$ környezet és olyan $L > 0$, környezettől függő Lipschitz-féle állandó, hogy minden

$$(t, \underline{x}^1), \quad (t, \underline{x}^2) \in K$$

esetén érvényes az

$$\left| \underline{f}(t, \underline{x}^1) - \underline{f}(t, \underline{x}^2) \right| \leq L \left| \underline{x}^1 - \underline{x}^2 \right|$$

egyenlőtlenség.

Egységes a Lipschitz-feltétel, ha az L Lipschitz-féle állandó a ponttól és a K környezettől független.

2.2. Tétel. Tegyük fel, hogy az

$$\underline{f}(t, \underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \underline{x}) \\ f_2(t, \underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \underline{x}) \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} t \in I \\ (t, \underline{x}) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \end{array}$$

függvény $f_i: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ koordinátafüggvényei, $i=1, 2, \dots, n$ és az

$$f'_{ix_k}(t, \underline{x}), \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

parciális deriváltfüggvények folytonosak az Ω tartományon. Ekkor $\underline{f}(t, \underline{x})$ az $\underline{x}$ változóban eleget tesz a lokális Lipschitz-feltételnek.

Bizonyítás. Legyen $(t_0, \underline{x}^0) \in \Omega$, tetszőlegesen rögzített pont. Válasszuk meg a pont K környezetét úgy, hogy a $\bar{K}$ lezártja is része legyen az Ω tartománynak. Legyen

$$\max_{(t, \underline{x}) \in \bar{K}} |f'_{ix_k}(t, \underline{x})| = M.$$

Tetszőleges $(t, \underline{x}^1), (t, \underline{x}^2) \in K$ pontokhoz van $\underline{\xi}$, hogy $(t, \underline{\xi}) \in K$

$$\begin{aligned} \left| \underline{f}(t, \underline{x}^1) - \underline{f}(t, \underline{x}^2) \right| &\leq n \max_i \left| f_i(t, \underline{x}^1) - f_i(t, \underline{x}^2) \right| = \\ &= n \max_i \left| df_i((t, \underline{\xi}); (\underline{x}^1 - \underline{x}^2)) \right| \leq \\ &\leq n n M \left| \underline{x}^1 - \underline{x}^2 \right| = L \left| \underline{x}^1 - \underline{x}^2 \right|, \end{aligned}$$

ahol $L = n^2 M$ a lokális Lipschitz-féle állandó. (A df_1 differenciálok becslésénél felhasználtuk a Cauchy egyenlőtlenséget, amely vektorok skaláris szorzatára vonatkozik). $\square$

A kezdetiérték feladattal ekvivalens integrálegyenletre vonatkozó tétel (első fejezet 5.1. Tétel) megfelelője a

2.3. Tétel. A ψ függvény akkor és csak akkor megoldása az

$$\dot{x} = f(t, x); \quad x(t_0) = x^0$$

kezdetiérték feladatnak, ha valamely I intervallumon folytonos és kielégíti a következő "integrálegyenletet":

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du, \quad t \in I.$$

Az integrálegyenlet segítségével kimondhatjuk az első fejezet 5.7. Tételének, a Cauchy-Lipschitz-féle egzisztencia és unicitás tételnek megfelelő differenciálegyenlet rendszerekre vonatkozó tételt, amelyet ahhoz hasonlóan bizonyíthatnánk. Ebben az esetben azonban egy elméletileg fontos, ugynevezett kontrakciós elven alapuló bizonyítást ismertetünk. Az előkészítést a következőképpen végezzük.

Legyen adott az F függvényosztály. Tegyük fel, hogy F metrikus és teljes tér. Ez azt jelenti, hogy F függvényeinek ρ távolsága egy olyan módon értelmezett, hogy minden F -beli Cauchy-sorozat konvergens.

Legyen A F -ből F -be képező lineáris operátor. Az A operátor fix-pontján olyan ψ függvényt értünk, amelyre $A(\psi) = \psi$ teljesül. Az A operátort kontrakciónak nevezzük, ha létezik olyan $0 \leq q < 1$ szám, hogy F bármely két ξ és η függvényére fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\rho(A(\xi), A(\eta)) \leq q \rho(\xi, \eta).$$

2.4. Tétel. (A kontrakciós elv.) Ha az F teljes metrikus teret önmagára leképező A lineáris operátor kontrakció, akkor egy és csak egy fixpontja van.

Bizonyítás. Legyen $\psi_0 \in F$ tetszőlegesen rögzített elem és képezzük a

$$\psi_n(x) = A(\psi_{n-1}); \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \psi_n \in F,$$

függvénysorozat. A függvénysorozat egymásutáni, φ_k, φ_{k+1} , két elemére, $k = 0, 1, \dots$, teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_{k+1}, \varphi_k) &= \rho(A(\varphi_k), A(\varphi_{k-1})) \leq q \rho(\varphi_k, \varphi_{k-1}) = \\ &= q \rho(A(\varphi_{k-1}), A(\varphi_{k-2})) \leq q^2 \rho(\varphi_{k-1}, \varphi_{k-2}) = \dots \\ &\leq q^k \rho(\varphi_1, \varphi_0). \end{aligned}$$

Ekkor a háromszögegyenlőtlenség szerint, tetszőleges $m > n$, (m és n természetes számok), esetén igaz, hogy

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_m, \varphi_n) &\leq \rho(\varphi_{n+1}, \varphi_n) + \rho(\varphi_{n+2}, \varphi_{n+1}) + \dots + \rho(\varphi_m, \varphi_{m-1}) \leq \\ &\leq \rho(\varphi_1, \varphi_0) [q^n + q^{n+1} + \dots + q^{m-1}], \end{aligned}$$

amiből következik, hogy a függvénysorozat Cauchy-sorozat, mert a $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$,

$0 \leq q < 1$, geometriai sor konvergens és részletösszegei Cauchy sorozatot alkotnak. Az F tér teljessége miatt a φ_n sorozat konvergens és φ határfüggvénye is eleme F -nek, φ az A operátor n fixpontja, mert a

$$\rho(A(\varphi_n), A(\varphi)) \leq q \rho(\varphi_n, \varphi)$$

egyenlőség felhasználásával

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\varphi_n) = A(\varphi)$$

következik és a

$$\varphi_n = A(\varphi_{n-1})$$

rekurzív formulából határártmenettel $\varphi = A(\varphi)$.

Végül indirekt módon igazoljuk, hogy csak egy fixpont van. Tegyük fel, hogy a φ és ψ fixpontok különbözőek. Felhasználjuk, hogy A kontrakció és ezzel a

$$\rho(\varphi, \psi) = \rho(A(\varphi), A(\psi)) \leq q \rho(\varphi, \psi)$$

egyenlőtlenségből $q \geq 1$ ellentmondásra jutunk, amivel az állítást igazoltuk. $\square$

2.5. Egzisztencia és unicitás tétel. Tegyük fel, hogy az $\underline{f}(t, \underline{x})$ függvény folytonos az $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tartományon és ott kielégíti az $\underline{x}$ változójában, a lokális Lipschitz-feltételt. Legyen $(t_0, \underline{x}^0)$ az Ω tartomány tetszőlegesen rögzített pontja. Az $a > 0$, $b > 0$ számokat válasszuk meg úgy, hogy a

$$T = \left\{ (t, \underline{x}) : |t - t_0| < a, |\underline{x} - \underline{x}^0| < b \right\}$$

"henger" $\bar{T}$ lezártja is része legyen az $(t_0, \underline{x}^0)$ ponthoz tartozó K Lipschitz-féle környezetnek, amelyhez tartozó Lipschitz-féle állandó L .

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\max_{(t, \underline{x}) \in \bar{T}} |\underline{f}(t, \underline{x})| = M, \alpha = \min \left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L} \right).$$

Ekkor az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0$$

kezdetiérték feladat lokálisan egyértelműen megoldható. A megoldás értelmezési tartománya tartalmazza az $I = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ intervallumot.

Bizonyítás. Legyenek az F függvényosztály elemei az $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ intervallumon folytonos függvények. Két ilyen függvény ρ távolságát értelmezzük a következőképpen:

$$\rho(\underline{\varphi}, \underline{\psi}) = \max_{t \in I} |\underline{\varphi}(t) - \underline{\psi}(t)|.$$

Tegyük fel, hogy bármely $\underline{\varphi} \in F$ esetén igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\rho(\underline{\varphi}, \underline{x}^0) \leq b, \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Az ily módon metrikussá lett F függvényosztályban a függvények sorozatának konvergenciája nem más mint az $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ intervallumon az egyenletes konvergencia. Ebből azonban már következik, hogy az F függvényosztály teljes metrikus tér mert a folytonos függvényekből álló egyenletesen konvergens sorozatnak határfüggvénye is folytonos függvény és nyilvánvaló, hogy az I intervallumban a határfüggvény $\underline{x}^0$ -től való távolsága nem nagyobb mint b .

Értelmezzünk F -n egy A lineáris integráloperátort a kezdetiérték feladattal ekvivalens integrálegyenlet jobb oldalának segítségével, azaz legyen

$$A(\underline{\varphi})(t) = \underline{x}^0 + \int_{t_0}^t \underline{f}(u, \underline{\varphi}(u)) du, \quad t \in I.$$

Az így értelmezett A operátor F -et F -be képezi le, ugyanis tetszőleges $\underline{\varphi} \in F$ esetén $A(\underline{\varphi})$ folytonos az I intervallumon, $A(\underline{\varphi})(t_0) = \underline{x}^0$, integrálbecsléssel és az $\underline{f}$ függvény M korlátjának felhasználásával következik, hogy

$$\rho(A(\underline{\varphi}), \underline{x}^0) = \max_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t \underline{f}(u, \underline{\varphi}(u)) du \right| \leq \max_{t \in I} M |t - t_0| \leq M\alpha \leq b$$

Az A operátor kontrakció, ugyanis tetszőleges $\underline{\varphi}, \underline{\psi} \in F$ esetén integrálbecsléssel és a Lipschitz-féle feltétel felhasználásával következik, hogy

$$\begin{aligned} \rho(A(\underline{\varphi}), A(\underline{\psi})) &= \max_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t \underline{f}(u, \underline{\varphi}(u)) - \underline{f}(u, \underline{\psi}(u)) du \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t |\underline{f}(u, \underline{\varphi}(u)) - \underline{f}(u, \underline{\psi}(u))| du \right| \leq \\ &\leq L \max_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t |\underline{\varphi}(u) - \underline{\psi}(u)| du \right| \leq \\ &\leq L \max_{u \in I} |\underline{\varphi}(u) - \underline{\psi}(u)| \alpha = L\alpha \rho(\underline{\varphi}, \underline{\psi}), \end{aligned}$$

és így $q = L\alpha < 1$ miatt igaz az állítás.

A bizonyítás során elért eredmények és a 2.4. kontrakciós elv alapján következik, hogy az A operátornak az F teljes metrikus függvényosztályban egy és csak egy fixpontja van. Ezzel bizonyítottuk be, hogy egy és csak egy olyan $\underline{\varphi}(t)$ függvény van F -ben amely kielégíti a kezdetiérték feladattal ekvivalens

$$\underline{\Psi}(t) = A(\underline{\Psi})(t) = \underline{x}^0 + \int_{t_0}^t \underline{f}(u, \underline{\Psi}(u)) du, \quad t \in I,$$

integrálegyenletet. Ez a megállapítás viszont a tétel igazolását jelenti.

Ebben a tételben bebizonyítottuk, hogy az $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tartomány tetszőlegesen rögzített $(t_0, \underline{x}^0)$ pontjával adott kezdetiérték feladat lokálisan egyértelműen megoldható. A teljes megoldás létezésére és az Ω tartomány határától - határáig haladására vonatkozó tételek, az első fejezet 1.7. és 5.8. Tételeinek segítségével leírhatók, csak a jelöléseket kell megváltoztatni. Erre nem térünk ki, de a továbbiakban felhasználjuk ezeket az ismereteket.

LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. Lineáris differenciálegyenletek általános megoldásának szerkezete

Legyenek az $f(t)$ és $a_\ell(t)$, ($\ell = 0, 1, \dots, n-1$, ahol $n \geq 1$ természetes szám), valós egyváltozós függvények valamely közös I nyílt intervallumon értelmezve. Az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = f(t), \quad t \in I,$$

differenciálegyenletet explicit n -ed rendű lineáris differenciálegyenletnek nevezünk. Amint az a felírásból látható, a differenciálegyenlet bal oldalán az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak ismert függvényekkel képzett lineáris kombinációja áll, a jobb oldalon pedig ismert függvény szerepel.

A differenciálegyenletrendszerekre vonatkozó egzisztencia és unicitás tételből következik az

1.1. Tétel. Ha az $f(t)$ és az $a_\ell(t)$, $\ell = 1, 2, \dots, n-1$, függvények folytonosak az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = f(t)$$

$$y^{(k)}(t_0) = y_0^k, \quad k=0, 1, \dots, n-1,$$

explicit n -ed rendű lineáris kezdetiérték feladat tetszőlegesen rögzített $t_0 \in I$ és $(y_0^0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ esetén egyértelműen megoldható.

Bizonyítás. A tételt $n = 2$ esetén igazoljuk. Az $n > 2$ eset bizonyítása hasonlóan történik. Tekintsük az

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = f(t), \quad y(t_0) = y_0^0, \quad \dot{y}(t_0) = y_0^1$$

kezdetiérték feladatot, ahol $(t_0, y_0^0, y_0^1) \in I \times \mathbb{R}^2$ tetszőlegesen rögzített pont.

A kezdetiérték feladat ekvivalens a következő differenciálegyenlet rendszerhez tartozó kezdetiérték feladattal:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & x_1(t_0) &= y_0^0 \\ \dot{x}_2 &= -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 + f(t) ; & x_2(t_0) &= y_0^1, \end{aligned}$$

ahol $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$. A differenciálegyenlet rendszer jobb oldalán álló függvények folytonosak az $I \times \mathbb{R}^2$ tartomány minden (t, x_1, x_2) pontjában, továbbá mivel az x_1, x_2 változókban lineárisak, ezért az x_1 , illetve x_2 szerinti parciális deriváltfüggvényeik is folytonosak. Ebből már következik, hogy kielégítik a Lipschitz-féle feltételt, tehát a kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható. $\square$

A második fejezet 2. pontjában megismert explicit elsőrendű lineáris differenciálegyenlet esetében ($n=1$), azt is beláttuk, hogy a megoldás az együtthatók I folytonossági intervallumán értelmezett. A megoldások értelmezési tartománya $n \geq 2$ esetén is a teljes I folytonossági intervallum. Ennek bizonyítását készíti elő az

1.2. Gronwall lemma. Legyen $f(t)$ valós egyváltozós folytonos függvény a $t_1 \leq t \leq t_2$ intervallumon és jelöljük T -vel a $[t_1, t_2]$ intervallum hosszát. Tegyük fel, hogy valamely λ, μ, ν valós értékekre a

$$0 \leq f(t) \leq \lambda + \int_{t_1}^t (\mu f(\tau) + \nu) d\tau, \quad (\lambda, \mu, \nu > 0 \text{ állandók}),$$

$$t_1 \leq t \leq t_2,$$

integrálegyenlőtlenség fennáll. Ekkor

$$0 \leq f(t) \leq (\nu T + \lambda) e^{\mu T}.$$

Bizonyítás. Képezzük a

$$g(t) = \frac{f(t)}{e^{\mu(t-t_1)}} , \quad t_1 \leq t \leq t_2 ,$$

folytonos függvényt. Legyen

$$\max_{t_1 \leq t \leq t_2} g(t) = \gamma = g(\nu) . \quad \gamma, \nu \in \mathbb{R}$$

Ekkor

$$0 \leq f(t) \leq \gamma e^{\mu(t-t_1)} .$$

Használjuk fel az integrálegyenlőtlenséget a $t = \nu$ helyen az

$$f(\nu) = g(\nu) e^{\mu(\nu-t_1)} = \gamma e^{\mu(\nu-t_1)} \quad \text{függvényre:}$$

$$\gamma e^{\mu(\nu-t_1)} \leq \lambda + \int_{t_1}^{\nu} (\mu \gamma e^{\mu(\tau-t_1)} + \nu) d\tau .$$

Integrálással azt kapjuk, hogy

$$\gamma e^{\mu(\nu-t_1)} \leq \lambda + \gamma e^{\mu(\nu-t_1)} - \gamma + \nu(\nu-t_1)$$

ahonnan γ kifejezhető és

$$\gamma \leq \nu(\nu-t_1) + \lambda .$$

Ennek figyelembevételével a $0 \leq f(t) \leq \gamma e^{\mu(t-t_1)}$ becslés folytatható és a

$$0 \leq f(t) \leq \gamma e^{\mu(t-t_1)} \leq [\nu(\nu-t_1) + \lambda] e^{\mu(t-t_1)}$$

egyenlőségből nyilvánvaló, hogy

$$0 \leq f(t) \leq (\nu T + \lambda) e^{\mu T} . \quad \square$$

1.3. Tétel. Az 1.1. Tétel feltételei mellett az n -ed rendű lineáris differenciálegyenlet megoldásai a teljes I folytonossági intervallumon értelmezettek.

Bizonyítás. Legyen $n = 2$ és $\underline{\Psi}(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]$, az

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & x_1(t_0) &= y_0 \\ \dot{x}_2 &= -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 + f(t); & x_2(t_0) &= y_1 \end{aligned}$$

kezdetiérték feladat teljes megoldása. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a megoldás $I_1 = (\alpha, \beta)$ értelmezési tartománya valódi része az I folytonossági intervallumnak. Mivel $\underline{\Psi}(t)$ teljes megoldás ezért az $I \times \mathbb{R}^2$ tartomány határának tetszőleges megközelítése az (α, β) intervallum végpontjaiban csak úgy lehetséges, ha valamelyik koordinátája nem korlátos. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy ez a β pontban van így.

Szűkítsük le a feladatot a $[t_0, t^*]$ intervallumra, ahol t^* a $[t_0, \beta)$ intervallum tetszőlegesen rögzített eleme. A $[t_0, t^*]$ zárt intervallumban az $a_0(t)$, $a_1(t)$, $f(t)$ folytonos függvények felveszik maximális értéküket. Létezik tehát olyan $M > 1$ szám, amelyre teljesül, hogy

$$|a_0(t)| < M, \quad |a_1(t)| < M, \quad |f(t)| < M. \quad t_0 \leq t \leq t^*.$$

Írjuk fel a kezdetiérték feladattal ekvivalens integrálegyenletet és helyettesítsük be a $\underline{\Psi}(t)$ függvényt:

$$\varphi_1(t) \equiv y_0 + \int_{t_0}^t \varphi_2(\tau) d\tau$$

$$\varphi_2(t) \equiv y_1 + \int_{t_0}^t -a_0(\tau)\varphi_1(\tau) - a_1(\tau)\varphi_2(\tau) + f(\tau) d\tau.$$

$t > t_0.$

Végezzünk integrálbecslést a függvények abszolút értékére:

$$\begin{aligned}
 |\varphi_1(t)| &\leq |y_0| + \int_{t_0}^t |\varphi_2(\tau)| d\tau \leq |y_0| + M \int_{t_0}^t |\varphi_2(\tau)| d\tau . \\
 |\varphi_2(t)| &\leq |y_1| + \int_{t_0}^t |a_0(\tau)| |\varphi_1(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t |a_1(\tau)| |\varphi_2(\tau)| d\tau + \\
 &\quad + \int_{t_0}^t |f(\tau)| d\tau \leq \\
 &\leq |y_1| + 2M \int_{t_0}^t |\varphi_1(\tau)| d\tau + M \int_{t_0}^t |\varphi_2(\tau)| d\tau + M \int_{t_0}^t d\tau .
 \end{aligned}$$

Adjuk össze az egyenlőtlenségeket:

$$|\varphi_1(t)| + |\varphi_2(t)| \leq |y_0| + |y_1| + \int_{t_0}^t (2M[|\varphi_1(\tau)| + |\varphi_2(\tau)|] + M) d\tau .$$

Alkalmazzuk a Gronwall lemmát a $t_0 \leq t \leq t^*$ intervallumban a $|\varphi_1(t)| + |\varphi_2(t)|$ függvényre. A feltételeknek megfelelő állandók a következők:

$$\lambda = |y_0| + |y_1|; \quad \mu = 2M, \quad \nu = M, \quad T = t^* - t_0 .$$

Igy

$$\begin{aligned}
 |\varphi_1(t)| + |\varphi_2(t)| &\leq (MT + |y_0| + |y_1|) e^{2MT} \\
 &\quad (M(\beta - t_0) + |y_0| + |y_1|) e^{2(\beta - t_0)}
 \end{aligned}$$

és ebből következik, hogy a $[t_0, \beta)$ intervallumban a megoldásfüggvény koordinátafüggvényei korlátosak. Ezzel az ellentmondással igazoltuk a tételt.

Valamely rögzített I intervallumon értelmezett valós egyváltozós függvények, a valós számtest felett vektorteret alkotnak (Lásd a [2] jegyzet, lineáris tér definíciója.) E vektortér elemeire érvényes a lineáris függetlenségnek, illetve összefüggőségnek a [2]-es jegyzetben adott 4.2.2. Definíciója. Ebben a speciális esetben, ezeket a definíciókat megismételjük:

1.4. Definíció. Az I intervallumon értelmezett $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvényeket az I intervallumon lineárisan függetleneknek nevezzük, ha

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0, \quad (c_0 \in \mathbb{R}),$$

minden $t \in I$ -re csak akkor lehet igaz, ha

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

1.5. Definíció. Az I intervallumon értelmezett $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvényeket az I intervallumon lineárisan összefüggőknek nevezzük, ha nem függetlenek, azaz ha létezik olyan $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ valós szám n -es, hogy

$$|c_1| + |c_2| + \dots + |c_n| > 0 \quad \text{és}$$

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \equiv 0.$$

Az

$$y_1(t) = t^3, \quad y_2(t) = |t|^3, \quad I_1 = (-\infty, +\infty),$$

függvények lineárisan függetlenek. Az $I_2 = (0, +\infty)$ intervallumon lineárisan összefüggők.

Az $y_1(t) = \sin t$, $y_2(t) = \sin t - \frac{1}{3} \sin 3t$, $I = (-\infty, +\infty)$ függvények lineárisan összefüggők.

Az I intervallumon legalább $(n-1)$ -szer deriválható $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvényekkel képzett

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dots & \dot{y}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad t \in I$$

determinánst Wronski-féle determinánsnak nevezzük.

Ennek segítségével elégséges feltételt adunk arra, hogy a függvények lineárisan függetlenek legyenek.

1.6. Segédteétel. Ha a legalább $(n-1)$ -szer differenciálható $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvények Wronski féle determinánsa nem azonosan zérus, akkor azok lineárisan függetlenek az I intervallumban.

Bizonyítás. $n = 2$ esetre, $n > 2$ -re hasonlóan bizonyítható. Legyen $t_0 \in I$ olyan pont amelyre

$$W[y_1(t_0), y_2(t_0)] \neq 0.$$

Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy az $y_1(t)$, $y_2(t)$ függvények összefüggők. Ekkor van olyan (c_1, c_2) számpár amelyre $|c_1| + |c_2| > 0$ és

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0 \quad , \quad t \in I,$$

$$c_1 \dot{y}_1(t) + c_2 \dot{y}_2(t) = 0 \quad .$$

A $t = t_0$ helyen ez olyan homogén lineáris egyenletrendszer amelynek a determinánsa, a $W[y_1(t_0), y_2(t_0)]$ determináns, zérustól különböző. Mivel ebben az esetben csak a $c_1 = c_2 = 0$ triviális megoldás létezik, ezért ellentmondást kaptunk, amely igazolja a segédteételt. $\square$

A segédteétel nem fordítható meg, vagyis lineárisan független függvények Wronski-féle determinánsa azonosan zérus is lehet. Ilyenek például:

$$y_1(t) = t^3, \quad y_2(t) = |t|^3, \quad I = (-\infty, +\infty).$$

1.7. Tétel. Ha az $a_\ell(t)$, ($\ell = 0, 1, \dots, n-1$) függvények folytonosak az I intervallumon, akkor az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \dot{y} + a_0(t) y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai között található pontosan n számú lineárisan független, és bármely más megoldás ezek lineáris kombinációja. /

Bizonyítás. Az $n = 2$ esetben. A két lineárisan független $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $t \in I$, megoldást a következő kezdetiérték feladatokból kapjuk:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -a_1(t) \dot{y} - a_0(t) y; & y(t_0) &= 1; & y(t_0) &= 1 \\ \dot{y}(t_0) &= 0 & \dot{y}(t_0) &= 1. \end{aligned}$$

ahol $t_0 \in I$ tetszőlegesen rögzített szám. Az 1.1. Tétel és az 1.3. Tétel szerint a kezdetiérték feladatok mindegyikének teljes megoldása van az I intervallumon. Jelöljük ezeket $\varphi_1(t)$, illetve $\varphi_2(t)$ -vel. Mivel

$$W[\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

ezért az 1.6. Segédétel szerint a megoldások lineárisan függetlenek.

A tétel második részének igazolásához tegyük fel, hogy $\psi(t)$ tetszőleges megoldása a homogén differenciálegyenletnek. Mivel bármely megoldás értelmezett a teljes I intervallumon, ezért léteznek a

$$\beta_1 = \psi(t_0), \quad \beta_2 = \dot{\psi}(t_0)$$

számok. Képezzük a

$$\Psi(t) = \beta_1 \varphi_1(t) + \beta_2 \varphi_2(t)$$

függvényt. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ez a homogén differenciálegyenlet megoldása és azt, hogy

$$\Psi(t_0) = \beta_1, \quad \dot{\Psi}(t_0) = \beta_2.$$

Ebből következik, hogy a $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ megoldások ugyanazon kezdeti feltételeknek tesznek eleget, tehát az unicitás miatt

$$\varphi(t) \equiv \psi(t) ; \quad t \in I ,$$

és ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

1.8. Definíció. A folytonos együtthatós

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \dot{y} + a_0(t) y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet lineárisan független

$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ megoldásaiból álló halmazt alaprendszernek nevezzük, a

$$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_n \varphi_n(t) ;$$

$$(c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n)$$

n paraméteres függvénysereget vagy a

$$H = \left\{ \varphi(t) : \varphi(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t), \right. \\ \left. c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

halmazt általános megoldásnak nevezzük.

A lineáris algebrában megismert fogalmakkal, az 1.7. Tételt a következőképpen is megfogalmazhatjuk: Az folytonos együtthatós

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \dot{y} + a_0(t) y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai, a folytonosan differenciálható függvények vektorterének n-dimenziós alterét alkotját.

Az alaprendszer függvényeiből álló vektorrendszer az alter bázisa.

Az $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ megoldások lineáris függetlenségét a

Wronski-féle determinánssal is ellenőrizhetjük, mert ha folytonos együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet megoldás függvényeiről van szó, akkor az 1.6. Segédétel megfordítása is igaz:

1.9. Segédttétel. Az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0,$$

$$t \in I,$$

homogén lineáris folytonos együtthatós differenciálegyenlet

$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), t \in I$, megoldásai akkor és csak akkor

lineárisan függetlenek, ha a Wronski-féle determináns az I intervallum egyetlen pontjában sem zérus.

Bizonyítás. $n = 2$ -re. Ha $W[\varphi_1(t), \varphi_2(t)] \neq 0$, akkor az 1.6. Segédttételből következik a függvények függetlensége. Fordítva, legyenek az $\varphi_1(t), \varphi_2(t), (t \in I)$, függvények lineárisan függetlenek. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan $t_0 \in I$ hely ahol $W[\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)] = 0$.

Képezzük azt a homogén lineáris egyenletrendszert, amelynek ez a determinánsa, azaz tekintsük az

$$\varphi_1(t_0)c_1 + \varphi_2(t_0)c_2 = 0$$

$$\dot{\varphi}_1(t_0)c_1 + \dot{\varphi}_2(t_0)c_2 = 0$$

egyenletrendszert. Mivel a determináns zérus, ezért van a triviálisától különböző $c_1, c_2, (|c_1| + |c_2| > 0)$, megoldás. Ezekkel, a differenciálegyenlet olyan

$$\psi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t), \quad t \in I,$$

megoldása adható meg, amelyre $\psi(t_0) = 0, \dot{\psi}(t_0) = 0$ teljesül. Mivel a differenciálegyenlet $\psi(t) \equiv 0$ megoldása is kielégíti ezeket a kezdeti feltételeket, ezért az unicitás miatt $\psi(t) \equiv 0$, vagyis

$$c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) \equiv 0, \quad |c_1| + |c_2| > 0, \quad t \in I,$$

Ebből következik, hogy az $\varphi_1(t)$ és $\varphi_2(t)$ függvények, ellentmondásban a feltétellel, összefüggőek. Ezzel a segédttételt bebizonyítottuk. $\square$

A homogén lineáris differenciálegyenlet lineárisan független megoldásainak meghatározására általában mincs módszerünk. A differenciálegyenlet rendje azonban eggyel csökkenthető, ha valahonnan ismerjük egy nem triviális megoldását. Az alábbi módszernek legtöbbször akkor vehetjük hasznát, ha $n = 2$. Tegyük fel, hogy $\varphi(t) \neq 0$, ismert megoldása az

$$\ddot{y} + a_1(t) \dot{y} + a_0(t) y = 0, \quad t \in I,$$

folytonos együttthatós lineáris másodrendű differenciálegyenletnek. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy $c \varphi(t)$; ($t \in I$, $c \in \mathbb{R}$) is megoldás. Variáljuk a c állandót, vagyis írjunk helyette egy ismeretlen $p(t)$ függvényt. Helyettesítsük be a differenciálegyenletbe az $y(t) = p(t) \varphi(t)$ ismeretlen függvényt. (A következő táblázattal javasoljuk a behelyettesítést)

$$\begin{array}{l|l} a_0(t) & y(t) = p(t) \varphi(t) \\ a_1(t) & \begin{array}{l} \dot{y}(t) = \dot{p}(t) \varphi(t) + p(t) \dot{\varphi}(t) \\ \ddot{y}(t) = \ddot{p}(t) \varphi(t) + 2\dot{p}(t) \dot{\varphi}(t) + p(t) \ddot{\varphi}(t) \end{array} \end{array}$$

A bal oldalon jeleztük mely függvényekkel szorzunk a behelyettesítésnél; az átlós áthúzás, a beszorzás után, azt jelenti, hogy a differenciálegyenlet bal oldalánál a jelzett tagok összege zérus, mert $\varphi(t)$ kielégíti a homogén differenciálegyenletet.

Ekkor $p(t)$ -re a

$$\ddot{p} \varphi(t) + \dot{p}(a_1(t) \varphi(t) + 2 \dot{\varphi}(t)) = 0$$

hiányos másodrendű differenciálegyenletet kapjuk. Nyilvánvaló, hogy a fenti egyenletnek létezik megoldása. Legyen $p(t) \not\equiv c$, ($c \in \mathbb{R}$) partikuláris megoldás. Ennek az ugynevezett rendszámcsökkentő módszernek akkor van értelme, ha a $\{\varphi(t), p(t) \varphi(t)\}$ halmaz alapszisztem. A $\varphi(t)$, $p(t) \varphi(t)$ függvények lineáris függetlenségét a Wronski-féle determinánssal ellenőrizzük:

$$\begin{aligned} \text{Ha } W[\varphi(t), p(t) \varphi(t)] &= \begin{vmatrix} \varphi(t) & p(t) \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) & \dot{p}(t) \varphi(t) + p(t) \dot{\varphi}(t) \end{vmatrix} = \\ &= \dot{p}(t) \varphi^2(t) \neq 0, \end{aligned}$$

akkor a függvények lineárisan függetlenek. Amennyiben ez a feltétel csak az I intervallum valamely valódi részintervallumán teljesül, akkor ezzel a módszerrel az általános megoldásnak csak a leszűkítését határozhatjuk meg.

1.10. Példa. Határozzuk meg az

$$\ddot{y} + (\operatorname{tg} t) \dot{y} - 6 \frac{1}{\sin^2 t} y = 0, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2},$$

differenciálegyenlet rendszer alaprendszerét.

MEGOLDÁS. Mivel a differenciálegyenlet ismert együttható-függvényei trigonometrikus függvények, ezért trigonometrikus megoldásfüggvényt keressünk. Helyettesítsük be a $\varphi(t) = \sin^m t$ függvényt. Az

$$(m(m-1) - 6) \sin^m t \cos^2 t = 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

egyenletben $\sin^{m-2} t \cos^2 t \neq 0$, ha $0 < t < \frac{\pi}{2}$, tehát $(m(m-1)-6) = 0$

$$W \left[\sin^3 t, \frac{1}{\sin^2 t} \right] = 5 \cos t \neq 0,$$

ezért a

$$\varphi_1(t) = \sin^3 t \quad \text{és} \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{\sin^2 t} \quad \text{függvények}$$

lineárisan független megoldásfüggvények a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumon.

Ezen a példán illusztrálhatjuk a fent ismertetett rendszámcsökkentő módszert oly módon, hogy a $\varphi_1(t) = \sin^3 t$ megoldás ismeretében határozzuk meg a másik megoldást, azaz differenciálegyenlet alaprendszerét. Keressük az alaprendszer másik függvényét az állandó variálásával $\varphi_2(t) = p(t) \varphi_1(t) = p(t) \sin^3 t$ alakban. Helyettesítsük be a differenciálegyenletbe a $\varphi_2(t)$ függvényt, az alábbi táblázat szerint:

$$\begin{array}{rcl} -\frac{6}{\sin^2 t} & \cdot & \varphi_2(t) = p(t) \sin^3 t \\ \operatorname{tg} t & \cdot & \dot{\varphi}_2(t) = \dot{p}(t) \sin^3 t + p(t) 3 \sin^2 t \cos t \\ 1 & \cdot & \ddot{\varphi}_2(t) = \ddot{p}(t) \sin^3 t + 2\dot{p}(t) 3 \sin^2 t \cos t + p(t) (3 \sin^2 t \cos t)'' \end{array}$$

A $p(t)$ ismeretlen függvényre, $\sin^3 t$ -vel való osztás után a következő másodrendű hiányos differenciálegyenletet kapjuk:

$$\ddot{p}(t) + \dot{p}(t) \left[\operatorname{tg} t + \frac{6}{\operatorname{tg} t} \right] = 0$$

Egy lehetséges megoldás: $p(t) = -\frac{1}{5\sin^5 t}$. Az ezzel képzett $(-5) \varphi_2(t) = -5 p(t) \varphi_1(t) = -\frac{-5}{5\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$ is megoldás és ez lehet az alaprendszer másik függvénye, ugyanis

$$W \left[\sin^3 t, \frac{1}{\sin^2 t} \right] = 5 \cos t \neq 0, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} . \quad \square$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet összes megoldásának meghatározása előtt vázoljuk a partikuláris megoldás meghatározásának egyik lehetséges módját:

1.11. Tétel. (Az állandók variálásának módszere az inhomogén lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldásának meghatározás.)

A folytonos együtthatós inhomogén

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \dot{y} + a_0(t) y = f(t)$$

differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \quad t \in I,$$

alaprendszeréhez, találhatók olyan legalább n -szer differenciálható $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ függvények, amelyekkel képezhetjük az inhomogén differenciálegyenlet

$$\varphi_p(t) = p_1(t) \varphi_1(t) + p_2(t) \varphi_2(t) + \dots + p_n(t) \varphi_n(t), \quad t \in I,$$

partikuláris megoldását.

Bizonyítás. $n = 2$ esetén. Helyettesítsük be az inhomogén differenciálegyenletbe a

$$\varphi_p(t) = p_1(t) \varphi_1(t) + p_2(t) \varphi_2(t)$$

függvényt és végezzük el a következő átrendezést:

$$\begin{aligned} (\dot{p}_1(t) \varphi_1(t) + \dot{p}_2(t) \varphi_2(t)) + a_1(t) (\dot{p}_1(t) \varphi_1(t) + \dot{p}_2(t) \varphi_2(t)) + \\ + \dot{p}_1(t) \dot{\varphi}_1(t) + \dot{p}_2(t) \dot{\varphi}_2(t) \equiv f(t) . \end{aligned}$$

Az azonosság kielégítése a következő módon is megtörténhet:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) \varphi_1(t) + \dot{p}_2(t) \varphi_2(t) &= 0 \\ \dot{p}_1(t) \dot{\varphi}_1(t) + \dot{p}_2(t) \dot{\varphi}_2(t) &= f(t) . \quad t \in I . \end{aligned}$$

A kapott egyenletrendszerben a $\dot{p}_1(t)$ és $\dot{p}_2(t)$ függvények az ismeretlenek. Az egyenletrendszer a t változó minden rögzített értéke mellett egyértelműen megoldható, mert determinánsa, a $W[\varphi_1(t), \varphi_2(t)] \neq 0$. Wronski-féle determináns. Ezek után $p_1(t)$ és $p_2(t)$ integrálással meghatározható. $\square$

Ezt az eljárást illusztrálja a következő:

1.12. Példa. Oldjuk meg az

$$\ddot{y} + \operatorname{tg} t \dot{y} - \frac{6}{\operatorname{tg}^2 t} y = -\cos^2 t$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet.

MEGOLDÁS. Az 1.10. Példában felírtuk az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet

$$\left\{ \sin^3 t, \frac{1}{\sin^2 t} \right\}$$

alaprendszerét.

Az 1.11. Tételből az állandók variálásának módszerével a $p_1(t)$ és a $p_2(t)$ függvényekre a következő egyenletrendszert írjuk elő:

$$\begin{pmatrix} \sin^3 t & \frac{1}{\sin^2 t} \\ 3\cos t \sin^2 t & \frac{-2\cos t}{\sin^3 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos^2 t \end{pmatrix}$$

Ebből, $\dot{p}_1(t) = -\frac{\cos t}{5\sin^2 t}$ és $\dot{p}_2(t) = \frac{1}{5} \cos t \sin^3 t$. Integrálás után

$\varphi_p(t) = p_1(t) \sin^3 t + p_2(t) \frac{1}{\sin^2 t} = \frac{1}{4} \sin^2 t$ az inhomogén differenciálegyenlet rendszer partikuláris megoldása.

Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásának meghatározásakor az $n > 2$ esetben, a fentiekhez hasonló átalakításokkal, az ismeretlen $p_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, függvények dierváltjait a következő egyenletrendszerből határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) \varphi_1(t) + \dot{p}_2(t) \varphi_2(t) + \dots + \dot{p}_n(t) \varphi_n(t) &= 0 \\ \dot{p}_1(t) \dot{\varphi}_1(t) + \dot{p}_2(t) \dot{\varphi}_2(t) + \dots + \dot{p}_n(t) \dot{\varphi}_n(t) &= 0 \\ \vdots \\ \dot{p}_1(t) \varphi_1^{(n-2)}(t) + \dot{p}_2(t) \varphi_2^{(n-2)}(t) + \dots + \dot{p}_n(t) \varphi_n^{(n-2)}(t) &= 0 \\ \dot{p}_1(t) \varphi_1^{(n-1)}(t) + \dot{p}_2(t) \varphi_2^{(n-1)}(t) + \dots + \dot{p}_n(t) \varphi_n^{(n-1)}(t) &= f(t) . \end{aligned}$$

Az első $n-1$ egyenletet előírtuk, az utolsó egyenlet az inhomogén differenciálegyenletből kapható meg, hasonlóan az $n = 2$ esethez.

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását a következő tételben adjuk meg:

1.13. Tétel. Ha az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása $\varphi_p(t)$ és a homogén differenciálegyenlet alaprendszere

$$\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}, \quad t \in I,$$

akkor a

$$H = \left\{ \varphi(t) : \varphi(t) = \varphi_p(t) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) \right. \\ \left. c_i \in \mathbb{R} \quad i=1, 2, \dots, n \right\}$$

függvényosztály vagy másképp kifejezve a

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t), \\ c_i \in \mathbb{R}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

n paraméteres függvénysereg az inhomogén differenciálegyenlet összes megoldását tartalmazza.

A tételt nem bizonyítjuk. A bizonyítás hasonló az első fejezetben ismertett, $n = 1$ esetre vonatkozó, tétel bizonyításához, mivel $\varphi(t) - \varphi_p(t)$ megoldása a homogén differenciálegyenletnek.

A fenti jelöléseket használja a következő:

1.14. Definíció. A folytonos együtthatós

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \dot{y} + a_0(t) y = f(t)$$

inhomogén differenciálegyenlet n paraméteres

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_n \varphi_n(t)$$

megoldását, vagy a

$$H = \left\{ \varphi(t) : \varphi(t) = \varphi_p(t) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) \right\}$$

függvényhalmazt általános megoldásnak nevezzük.

2. Az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet

Tekintsük az

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t), \quad t \in I,$$

explicit n-ed rendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet.

($a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $f \in C^0(I)$). A hozzátartozó homogén differenciálegyenlet megoldását, $\varphi(t) = e^{\lambda t}$, ($\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter), alakban keressük, $n = 2$ esetén a következőképpen: az

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0; \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R},$$

homogén differenciálegyenletbe behelyettesítjük a $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ függvényt, és az alábbi egyenletet kapjuk:

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0.$$

Ebből, az $e^{\lambda t} \neq 0$ függvénnyel való osztás után következik, hogy a $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ függvény csak akkor megoldás ha a λ szám kielégíti az

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

ugynevezett karakterisztikus egyenletet. Jelöljük a gyököket λ_1, λ_2 -vel. Bebizonyítjuk a következő táblázatba foglalt állításokat:

A karakterisztikus egyenlet gyökei	A homogén differenciálegyenlet alapszere
$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}$
$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$	$e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t$

Ha a gyökök különbözőek és valósak, akkor a bizonyítást az olvasóra bizzuk. A Wronski-féle determinálssal ellenőrizhetjük a megoldások lineáris függetlenségét.

Valós, kétszeres multiplicitással fellépő gyök esetén, a gyökök és együttthatók közötti összefüggésekből az

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = \ddot{y} - 2\lambda \dot{y} + \lambda^2 y = 0$$

alakú a differenciálegyenlet és a $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}$ megoldásból, a $\varphi_2(t) = p(t) e^{\lambda t}$ megoldást, az állandó variálásának módszerével keressük. A $\varphi_2(t)$ függvényt a homogén differenciálegyenletbe behelyettesítve, az ismeretlen $p(t)$ függvényre a

$$\ddot{p}(t) = \ddot{p} e^{\lambda t} + \dot{p}(t) (-2\lambda e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t}) = 0$$

differenciálegyenletet kapjuk, azonnal a $p(t) = t$ megoldás is kiválasztható.

Ezzel $\varphi_2(t) = t e^{\lambda t}$, amint az állítottuk és független $\varphi_1(t)$ -től, mert

$$W[e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}] = e^{2\lambda t} \neq 0.$$

Konjugált komplex gyökpár esetén a

$$\psi_1(t) = e^{(\alpha + i\beta)t}, \quad \psi_2(t) = e^{(\alpha - i\beta)t}, \quad \beta \neq 0,$$

függvényeket kapjuk és az Euler formula felhasználásával a függvények valós és képzetes részét felírhatjuk. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy mind a valós, mind a képzetes rész megoldása a homogén lineáris differenciálegyenletnek. Így

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \operatorname{Re} \psi_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t = \frac{\psi_1(t) + \overline{\psi_2(t)}}{2} \\ \varphi_2(t) &= \operatorname{Im} \psi_1(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t = \frac{\psi_1(t) - \overline{\psi_2(t)}}{2i} \end{aligned}$$

megoldások és mivel

$$W[\varphi_1(t), \varphi_2(t)] = e^{2\alpha t} \beta \neq 0,$$

lineárisan függetlenek. $\square$

Általában, az

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0$$

állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezzük a

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

n -ed fokú polinomegyenletet. ($n \geq 1$).

2.1. Tétel. Ha az

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0$$

homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei a valós

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell,$$

számok, rendre

$$m_1, m_2, \dots, m_\ell, \left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i = n \right),$$

multiplicitással, akkor az alaprendszer a következő:

$$\left\{ e^{\lambda_k t}, t e^{\lambda_k t}, t^2 e^{\lambda_k t}, \dots, t^{m_k-1} e^{\lambda_k t} \right\},$$

$$k = 1, 2, \dots, \ell$$

A tételt nem bizonyítjuk, mert a negyedik fejezet 2. pontban tárgyalásra kerülő differenciálegyenlet rendszerekre vonatkozó megfelelő tételből, az átviteli elv segítségével következik. Ott megvilágíthatjuk azt is, miért kerestük a megoldást $\psi(t) = e^{\lambda t}$ alakban.

Ha a $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ számok között komplex-konjugáltak is vannak, akkor az Euler formulával, az $n = 2$ esethez hasonlóan, valós megoldásokat képezhetünk.

Az állandó együtthatós lineáris inhomogén differenciálegyenlet megoldását az előző pontban megismert állandó variálással kapjuk meg.

A villamosmérnöki gyakorlatban előforduló állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletek gyakran olyanok, hogy a jobb oldalon szereplő ismert $f(t)$ függvény csak szakaszonként folytonos. Ilyenkor az egyes szakaszokban, vagy intervallumokban külön-külön határozzuk meg a megoldást. Ha az ilyen differenciálegyenlethez kezdeti feltétel is adott, akkor az előbbtől különböző módszer, a Laplace-transzformáció elméletét használó módszer is alkalmazható, amelyet ebben a jegyzetben a terjedelem szabta korlátok miatt nem ismertethetünk (lásd [6]-ot).

(További általánosítások: operátor számítás, disztribúció elmélet.)

A másik, gyakorlatilag nem kevésbé fontos esetben, az inhomogén lineáris differenciálegyenlet jobb oldalán legtöbbször olyan $f(t)$ függvény szerepel, amely valamely exponenciális függvénynek, polinomnak és trigonometrikus függvénynek szorzata, illetve ilyen szorzatok összege. Ebben az esetben, mivel a jobb oldalon speciális $f(t)$ függvény áll, az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását az állandó variálása helyett az úgynevezett próbafüggvénnyel keressük.

Ezen a következőket értjük:

2.2. Tétel. Legyen adott az

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t) ,$$

differenciálegyenlet jobb oldalán szereplő függvény a következő formában:

$$f(t) = e^{\alpha t} (P_1(t) \cos \beta t + \dots + P_2(t) \sin \beta t) .$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, továbbá $P_1(t), P_2(t)$ legfeljebb ℓ -ed fokú, (ℓ természetes szám), polinomok.

Ha az $\alpha + i\beta$ szám az

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0$$

differenciálegyenlet

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

karakterisztikus egyenletének nem gyöke, akkor az inhomogén differenciálegyenletnek létezik

$$\varphi_p(t) = e^{\alpha t} (Q_1(t) \cos \beta t + Q_2(t) \sin \beta t)$$

alku partikuláris megoldása, ahol $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ legfeljebb ℓ -ed fokú polinomok.

Ha az $\alpha + i\beta$ szám a karakterisztikus egyenletnek m -szeres, ($m \geq 1$ természetes szám), gyöke, akkor az inhomogén differenciálegyenletnek létezik

$$\varphi_p(t) = t^m e^{\alpha t} (Q_1(t) \cos \beta t + Q_2(t) \sin \beta t)$$

alku megoldása.

A tétel bizonyítása és a gyakorlati alkalmazása egyszerű együttható összehasonlítással történhet. Ennek illusztrálására tekintsük a következő példát:

2.3. Példa. Oldjuk meg a

$$\frac{dy^2}{dt^2} + \omega^2 y = U_0 \sin \beta t$$

differenciálegyenletet, ahol ω, U_0, β valós számok.

Az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\lambda_1 = \omega i, \quad \lambda_2 = -\omega i$$

Az alrendszer a következő:

$$\left\{ \cos \omega t, \quad \sin \omega t \right\}$$

A szabad rezgést leíró homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_h(t) = k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Ez csillapítás nélküli, periodikus rezgés.

Ha $\beta \neq \omega$, akkor az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását a (p_0, q_0) 0-ad fokú polinommal), a

$$\varphi_p(t) = p_0 \cos \beta t + q_0 \sin \beta t, \quad p_0, q_0 \in \mathbb{R}$$

próbafüggvénnyel keressük.

Ha $\beta = \omega$, akkor a próbafüggvény a következő alakban kereshető:

$$\varphi_p(t) = t (p_0 \cos \beta t + q_0 \sin \beta t).$$

Az első esetben, a behelyettesítés táblázata a következő:

$$\omega^2 \cdot \begin{cases} \varphi_p(t) = p_0 \cos \beta t + q_0 \sin \beta t \\ \dot{\varphi}_p(t) = -\beta p_0 \sin \beta t + \beta q_0 \cos \beta t \\ \ddot{\varphi}_p(t) = -\beta^2 p_0 \cos \beta t - \beta^2 q_0 \sin \beta t \end{cases}$$

Ebből a táblázatból összeadással, és a differenciálegyenletből következik, hogy

$$(-p_0 \beta^2 + p_0 \omega^2) \cos \beta t + (q_0 \omega^2 - q_0 \beta^2) \sin \beta t = U_0 \sin \beta t$$

Ez az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha a $\cos \beta t$, illetve a $\sin \beta t$ függvények együtthatói az egyenlet két oldalán megegyeznek.

Ekkor ha $\beta \neq \omega$, $p_0 = 0$, $q_0 = \frac{U_0}{\omega^2 - \beta^2}$, tehát

$$\varphi_p(t) = \frac{U_0}{\omega^2 - \beta^2} \sin \beta t.$$

és az általános megoldás,

$$\varphi(t) = \frac{U_0}{\omega^2 - \beta^2} \sin \beta t + k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t.$$

A lengés periodikus, ha ω és β hányadosa racionális szám, egyébként aperiodikus.

Ha $\beta = \omega$, akkor rezonanciáról beszélünk. A rezonancia akkor lépett fel, ha a csillapithatatlan szabad lengés frekvenciája megegyezett a periodikus kényszer frekvenciájával. A fentiekhez hasonló számítások után

$$\varphi_p(t) = -\frac{U_0}{2\omega} t \cos \omega t$$

és az általános megoldás:

$$\varphi(t) = -\frac{U_0}{2\omega} t \cos \omega t + k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t$$

Ebben az esetben az amplitudó minden határon nő, ha $t \rightarrow +\infty$ -hez.

LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK

1. Lineáris differenciálegyenlet rendszerek általános megoldásának szerkezete

Tegyük fel, hogy az $\underline{A}(t) = (a_{ik}(t))$, $i, k=1, 2, \dots, n$, ($n > 1$ természetes szám) mátrix-skalár függvény minden eleme és a $\underline{b}(t)$ vektor-skalár függvény folytonos az $I \subset \mathbb{R}$, intervallumon. Legyen $(t_0, \underline{x}^0) \in I \times \mathbb{R}^n$, tetszőlegesen rögzített pont. Tekintsük az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x} + \underline{b}(t); \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0$$

kezdetiérték feladatot.

A második fejezet egzisztencia és unicitás tételéből következik és a harmadik fejezet 1.1. Tétel bizonyításához hasonlóan igazolható, hogy a fenti kezdetiérték feladatnak teljes megoldása van. A Gronwall lemma felhasználásával, az 1.3. Tétel bizonyításához hasonlóan igazolható, hogy a teljes megoldás értelmezett az egész I folytonossági intervallumon.

Vektor-skalár függvényekre vonatkozó lineáris algebrai fogalmak segítségével áttekintjük az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer összes megoldását.

A $\underline{\varphi}^1(t), \underline{\varphi}^2(t), \dots, \underline{\varphi}^n(t)$, n dimenziós vektor-skalár függvények lineáris függetlenségét és függőségét, valamely I intervallumban, szóról szóra úgy értelmezzük mint a valós egyváltozós függvényekét.

A mátrix algebraiban bebizonyítottuk, hogy a konstans vektorok lineáris függetlenségének szükséges és elégséges feltétele, hogy a belőlük, mint oszlopvektorokból képzett mátrix determinánsa zérustól különböző legyen.

Ennek felhasználásával igazolható az

1.1. Segédtetele. A folytonos $\underline{A}(t)$, $t \in I$ mátrix-skalár függvény-nyel adott

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer $\underline{\varphi}^i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, megoldásfüggvényei az I folytonossági intervallumon akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha

$$\det (\underline{\psi}^1(t), \underline{\psi}^2(t), \dots, \underline{\psi}^n(t)) \neq 0, \quad t \in I.$$

Nem bizonyítunk, mert a bizonyítás a jelölésektől eltekintve, azonos a harmadik fejezet 1.9. Segéd-tételének bizonyításával.

1.2. Tétel. Ha az $\underline{A}(t) = (a_{ik}(t))$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, mátrix-skalár függvény folytonos az I intervallumon, akkor az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer megoldásai között található pontosan n számú lineárisan független és bármely más megoldás ezek lineáris kombinációja.

Bizonyítás. Az $\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^n$ n dimenziós egységvektorokkal,

$$\underline{e}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

n számú

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x} ; \quad \underline{x}(t_0) = \underline{e}^i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t_0 \in I$$

kezdetiérték feladatot írhatunk fel. E kezdetiérték feladatok mindegyikének teljes megoldása van és ha a megoldásokat $\underline{\psi}^i(t)$ -vel, $i = 1, 2, \dots, n$ jelöljük, képezhetjük a Wronski-féle determinánst. A kezdetiértékek figyelembevételével,

$$W [\underline{\psi}^1(t_0), \underline{\psi}^2(t_0), \dots, \underline{\psi}^n(t_0)] = 1 \neq 0,$$

tehát az n számú lineárisan független megoldás létezését bebizonyítottuk.

A tétel második részének bizonyításához tegyük fel, hogy $\underline{\psi}(t)$ tetszőleges megoldása a homogén differenciálegyenlet rendszernek és vezessük be a következő jelölést:

$$\underline{\varphi}(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \varphi_2(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

a Képezzük a $\underline{\varphi}^1(t), \underline{\varphi}^2(t), \dots, \underline{\varphi}^n(t)$ függvények lineáris kombinációjával

$$\underline{\Psi}(t) = \beta_1 \underline{\varphi}^1(t) + \beta_2 \underline{\varphi}^2(t) + \dots + \beta_n \underline{\varphi}^n(t)$$

függvényt. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy $\underline{\Psi}(t)$ olyan megoldása a homogén differenciálegyenletnek, amely a t_0 helyen $\underline{\varphi}(t)$ -vel azonos kezdeti értékeket vesz fel. Az unicitás miatt tehát $\underline{\varphi}(t) \equiv \underline{\Psi}(t)$ és ezzel a tételt bizonyítottuk. $\square$

1.3. Definíció. Az $\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x}$ homogén lineáris differenciálegyenletrendszer az n számú lineárisan független $\underline{\varphi}^1(t), \underline{\varphi}^2(t), \dots, \underline{\varphi}^n(t)$ megoldásaival képzett

$$\{ \underline{\varphi}^1(t), \underline{\varphi}^2(t), \dots, \underline{\varphi}^n(t) \}$$

halmazt alapszisztemnek nevezzük. Az n paraméteres

$$\left\{ c_1 \underline{\varphi}^1(t) + c_2 \underline{\varphi}^2(t) + \dots + c_n \underline{\varphi}^n(t) \right\}$$

függvénysereget általános megoldásnak nevezzük. A

$$\underline{\phi}(t) = (\underline{\varphi}^1(t), \underline{\varphi}^2(t), \dots, \underline{\varphi}^n(t))$$

mátrixot alapmátrixnak nevezzük. Szaktárgyaikban a $\underline{\phi}(t)$ alapmátrixot állapot átmeneti mátrixnak nevezzük.

Az 1.2. Tételt a következőképpen is megfogalmazhatjuk: A folytonos- n -ed rendű $\underline{A}(t)$ mátrix-skalár függvénnyel adott

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer megoldásai a folytonosan differenciálható vektor-skalár függvények vektorterének n -dimenziós alterét alkotják. Az alaplátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer az alter bázisa.

Az 1.2. Tételben bebizonyítottuk, hogy a folytonos együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer bármely $\underline{\psi}(t)$ megoldásához található olyan $\underline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, vektor, hogy

$$\underline{\psi}(t) = \underline{\phi}(t) \underline{c}.$$

Mivel a $\underline{\phi}(t)$ alaplátrix minden oszlopa kielégíti az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x}$$

differenciálegyenlet rendszert ezért nyilvánvaló, hogy

$$\dot{\underline{\phi}}(t) \equiv \underline{A}(t) \underline{\phi}(t), \text{ ahol } \dot{\underline{\phi}}(t) = (\dot{\psi}^1(t), \dot{\psi}^2(t), \dots, \dot{\psi}^n(t)) ,$$

azaz a mátrix szorzás elvégzésével látható, hogy a $\underline{\phi}(t)$ alaplátrix kielégíti az

$$\dot{\underline{X}}(t) = \underline{A}(t) \underline{X}$$

ugynevezett mátrix differenciálegyenletet.

Az alaplátrix segítségével meghatározhatjuk az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x} + \underline{b}(t), \quad t \in I ,$$

inhomogén differenciálegyenlet rendszer partikuláris megoldását.

1.4. Tétel. (Az állandó variálásának módszere.) Tegyük fel, hogy az $\underline{A}(t) = (a_{ik}(t))$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, mátrix-skalár függvény és a

$\underline{b}(t)$ vektor-skalár függvény folytonos az I intervallumban. Legyen $\underline{\phi}(t)$ az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x} + \underline{b}(t)$$

inhomogén differenciálegyenlet rendszerhez tartozó

$$\dot{\underline{X}} = \underline{A}(t) \underline{X}$$

homogén differenciálegyenlet rendszernek alaplátrixa. Ekkor van olyan folytonosan differenciálható $\underline{p}(t)$ vektor-skalár függvény, hogy az azzal képzett

$$\underline{\psi}_p(t) = \underline{\phi}(t) \underline{p}(t)$$

vektor-skalár függvény az inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszer partikuláris megoldása.

Bizonyítás. Helyettesítsük be az ismeretlen $\underline{\psi}_p(t)$ függvényt az inhomogén differenciálegyenlet rendszerbe. Ehhez szükségünk van a $\underline{\phi}(t) \underline{p}(t)$ vektor-skalár függvény deriváltjára. Mivel $\underline{\phi}(t) = [\underline{\phi}^1(t), \underline{\phi}^2(t), \dots, \underline{\phi}^n(t)]$, és a $\underline{p}(t)$ ismeretlen vektor-skalár függvény

$$\underline{p}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$$

koordinátás alakjával

$$\underline{\phi}(t) \underline{p}(t) = \underline{\phi}^1(t) p_1(t) + \underline{\phi}^2(t) p_2(t) + \dots + \underline{\phi}^n(t) p_n(t),$$

ezért

$$\left[\underline{\phi}(t) \underline{p}(t) \right]^{\cdot} = \sum_{i=1}^n \dot{\underline{\phi}}^i(t) p_i(t) + \sum_{i=1}^n \underline{\phi}^i(t) \dot{p}_i(t) = \dot{\underline{\phi}}(t) \underline{p}(t) + \underline{\phi}(t) \dot{\underline{p}}(t)$$

Behelyettesítéssel a következőt kapjuk:

$$\dot{\underline{\phi}}(t) \underline{p}(t) + \underline{\phi}(t) \dot{\underline{p}}(t) = \underline{A}(t) \left[\underline{\phi}(t) \underline{p}(t) \right] + \underline{b}(t).$$

Átrendezéssel

$$\dot{\underline{p}}(t) = \underline{\phi}^{-1}(t) \left\{ \left[\underline{A}(t) \underline{\phi}(t) - \dot{\underline{\phi}}(t) \right] \underline{p}(t) + \underline{b}(t) \right\}.$$

A szögletes zárójelben a zérus mátrix áll mert $\underline{\phi}(t)$ kielégíti az $\dot{\underline{X}}(t) = \underline{A}(t) \underline{X}(t)$ mátrix differenciálegyenletet.

Egy ismeretlen $\underline{p}(t)$ függvény a következő:

$$\underline{p}(t) = \int_0^t \underline{\phi}^{-1}(\tau) \underline{b}(\tau) d\tau, \quad t, \quad t_0 \in I.$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszer partikuláris megoldása tehát

$$\underline{\psi}_p(t) = \underline{\Phi}(t) \int_{t_0}^t \underline{\Phi}^{-1}(\tau) \underline{b}(\tau) d\tau.$$

1.5. Tétel. Legyen az $\underline{A}(t)$ n -ed rendű mátrix-skalár függvény és a $\underline{b}(t)$ vektor-skalár függvény folytonos az I intervallumban. Tegyük fel, hogy az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x} + \underline{b}(t)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszerhez tartozó homogén differenciálegyenlet rendszer alaplátixa $\underline{\Phi}(t)$ és az inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszer partikuláris megoldása $\underline{\psi}_p(t)$. Ekkor az inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszernek bármely $\underline{\psi}(t)$ megoldása a következő alakú:

$$\underline{\psi}(t) = \underline{\psi}_p(t) + \underline{\Phi}(t) \underline{c}, \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^n,$$

A tételt nem bizonyítjuk, a bizonyítás a jelölésektől eltekintve az $n = 1$ esetre vonatkozó tétel bizonyításához hasonló. $\square$

A homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer alaplátixának meghatározására nincs általános módszerünk. A differenciálegyenlet rendszer rendje azonban eggyel csökkenthető, ha egy $\underline{\psi}(t)$ nem állandó megoldást már ismerünk. Legyen $\underline{\psi}(t)$ utolsó koordinátafüggvénye zérustól különböző függvény. A rendszerrendcsökkentést a következőképpen végezzük el: képezzük a

$$\underline{Q}(t) = \left(\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^{n-1}, \underline{\psi}(t) \right),$$

reguláris mátrix-skalár függvényt, ahol $\underline{e}^i$ az i -edik, $i=1, 2, \dots, n-1$ n -dimenziós egységvektor. Az

$$\underline{x} = \underline{Q}(t) \underline{y}$$

transzformációval az $\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x}$ homogén lineáris differenciálegyenlet rendszerből az

$$\dot{\underline{y}} = \underline{Q}^{-1}(t) \left[\underline{A}(t) \underline{Q}(t) - \dot{\underline{Q}}(t) \right] \underline{y}$$

differenciálegyenlet rendszert kapjuk, melynek az $\underline{y}(t) = \underline{e}^n$, n -dimenziós egy-
ségvektor megoldása, mert

$$\underline{\dot{y}}(t) = \underline{Q}(t) \underline{e}^n;$$

és így $\underline{y}(t) = \underline{e}^n$ helyettesítéssel

$$\underline{0} = \underline{Q}^{-1}(t) \left[\underline{A}(t) \underline{Q}(t) - \underline{\dot{Q}}(t) \right] \underline{e}^n.$$

Innen következik, hogy a $\underline{Q}^{-1}(t) \left[\underline{A}(t) \underline{Q}(t) - \underline{\dot{Q}}(t) \right]$ mátrix utolsó oszlopában
csupa zérus áll. Ha ezt a mátrixot $\underline{B}(t) = \left[b_{ik}(t) \right]$, $ik=1, 2, \dots, n$.

($b_{1n}(t) = b_{2n}(t) = \dots = b_{nn}(t) = 0$), jelöli, akkor a transzformált differenciál-
egyenlet rendszer alakja a következő:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= b_{11}(t) y_1 + \dots + b_{1,n-1}(t) y_{n-1} \\ \dot{y}_2 &= b_{21}(t) y_1 + \dots + b_{2,n-1}(t) y_{n-1} \\ &\vdots \\ \dot{y}_{n-1} &= b_{n-1,1}(t) y_1 + \dots + b_{n-1,n-1}(t) y_{n-1} \\ \hline \dot{y}_n &= b_{n,1}(t) y_1 + \dots + b_{n,n-1}(t) y_{n-1} \end{aligned}$$

Ezzel a rendszámcsökkentést végrehajtottuk, mert ha az első $n-1$ egyen-
lethől álló $(n-1)$ -ed rendű differenciálegyenlet rendszernek meg tudjuk hatá-
rozni az $[y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n-1}(t)]$ megoldását, akkor az utolsó egyenlethől
integrálással kapjuk az $y_n(t)$ ismeretlen koordinátát és ezzel az $\underline{y}(t)$ megol-

dást. Az $\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x}$ homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer megoldá-
sát a transzformációs képlettel azaz az $\underline{x}(t) = \underline{Q}(t) \underline{y}(t)$ szorzással kapjuk. $\square$

A rendszámcsökkentés $n = 2$ esetén közvetlen haszonnal járhat. Ennek
segítségével előállíthatjuk az általános megoldást. A következő példával ezt
illusztráljuk.

1.6. Példa. Oldjuk meg a következő inhomogén lineáris differenciálegyenlet
rendszert:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{t(t+1)} x_1 + \frac{1}{t^2(t^2+1)} x_2 + \frac{1}{t}, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{t^2}{t^2+1} x_1 + \frac{2t^2+1}{t(t^2+1)} x_2 + 1, \quad t > 0, \end{aligned}$$

ha a megfelelő homogén lineáris differenciálegyenlet rendszernek egy megoldása, amelyet próbálgatással kaptunk,

$$\underline{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Rendszámcsökkentéssel meghatározzunk egy másik megoldást.

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Az $\underline{x} = \underline{Q}(t) \underline{y}$ transzformációval az

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

vektor-skalár függvény kielégíti az

$$\dot{y}_1 = \frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)} y_1$$

$$\dot{y}_2 = \frac{-t}{(t^2 + 1)} y_1$$

differenciálegyenlet rendszert. (A részletszámításokat nem közöljük.) Az első differenciálegyenletet szeparálással megoldjuk.

Mivel $y_1(t) = \frac{t^3 + t}{2} = t + \frac{1}{t}$, ezért a második egyenletből $y_2(t) = -t$.

Ezzel és a visszatranszformálással

$$\underline{\varphi}^2(t) = \underline{Q}(t) \underline{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t + \frac{1}{t} \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

a keresett másik megoldás.

A homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer alapmátrixa,

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}^1(t), & \underline{\varphi}^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & -t^2 \end{pmatrix}.$$

$\det \underline{\Phi}(t) = -(1+t^2) \neq 0$ is mutatja, hogy $\underline{\varphi}^1(t)$ és $\underline{\varphi}^2(t)$ lineárisan függetlenek, azaz $\underline{\Phi}(t)$ alapmátrix.

Az inhomogén differenciálegyenlet rendszer partikuláris megoldását az állandó variálásával kapjuk meg:

$$\underline{\varphi}_p(t) = \underline{\Phi}(t) \int_1^t \underline{\Phi}^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \ln t \\ t \ln t \end{pmatrix}.$$

Ebből következik, hogy az általános megoldás

$$\underline{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ t \ln t \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -t^2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}; \quad t > 0$$

2. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet rendszerek

Tekintsük az n -ed rendű, $n \geq 2$, $\underline{A} = [a_{ik}]$, $i, k=1, 2, \dots, n$, $a_{ik} \in \mathbb{R}$, mátrixszal adott

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$$

állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet rendszert. Az n -ed rendű $\underline{A}$ mátrixot egyszerű strukturájú mátrixnak nevezzük ha van n számú lineárisan független sajátvektora. Ha a sajátvektorok valósak, akkor igaz a következő:

2.1. Tétel. Ha az egyszerű strukturájú $\underline{A}$ kvadratikus, $n \times n$ -es, mátrixnak az $s^1, s^2, \dots, s^n$ valós vektorok lineárisan független sajátvektora, akkor az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$$

differenciálegyenlet rendszer alapmátrixa a következő alakú:

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \underline{s}_1 & e^{\lambda_2 t} \underline{s}_2 & \dots & e^{\lambda_n t} \underline{s}_n \end{pmatrix},$$

ahol a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számok az $\underline{A}$ mátrixnak nem feltétlenül különböző, sajátértékei.

Bizonyítás. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy a lineárisan független

$$\underline{\psi}^i(t) = e^{\lambda_i t} \underline{s}_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

függvények megoldások, ugyanis

$$\dot{\underline{\psi}}^i(t) = \lambda_i e^{\lambda_i t} \underline{s}_i,$$

és $\underline{A} \underline{s}_i = \lambda_i \underline{s}_i$ miatt

$$\underline{A} \underline{\psi}^i(t) = \underline{A} e^{\lambda_i t} \underline{s}_i = e^{\lambda_i t} \lambda_i \underline{s}_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

tehát

$$\dot{\underline{\psi}}^i(t) = \underline{A} \underline{\psi}^i(t).$$

A $\underline{\Phi}(t)$ alaplátrix meghatározása a következőképpen történt: ismeretes, hogy az egyszerű struktúrájú $\underline{A}$ mátrixok diagonalizálhatók (lásd [2]-ben) azaz a

$$\underline{T} = [\underline{s}^1, \underline{s}^2, \dots, \underline{s}^n]$$

transzformációs mátrixszal és a $\underline{T}^{-1}$ inverzmátrixszal képezhetjük a

$$\underline{\Lambda} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}$$

diagonálmátrixot. A $\underline{\Lambda}$ mátrix főátlójában az $\underline{A}$ mátrix sajátértékei állnak és egy sajátérték annyiszor szerepel, ahányszoros a multiplicitása a $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$ karakterisztikus egyenletben. Ha tehát az egyszerű struktúrájú $\underline{A}$ mátrixszal adott

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$$

homogén differenciálegyenlet rendszerben végrehajtuk az

$$\underline{x} = \underline{T} \underline{y}$$

transzformációt, akkor az

$$\dot{\underline{y}} = (\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}) \underline{y} = \underline{\Lambda} \underline{y}$$

differenciálegyenlet rendszert kapjuk. Ennek koordinátás alakja

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

amelyben az egyenleteket egyenként, szeparálással megoldjuk és az így kapott

$$y_i = c_i e^{\lambda_i t}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

exponenciális alakú megoldásokból, az $\dot{\underline{y}} = \underline{\Lambda} \underline{y}$ differenciálegyenlet rendszer általános megoldása

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{e}^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{e}^2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \underline{e}^n. \end{aligned}$$

Az általános megoldás felhasználásával az $\dot{\underline{y}} = \underline{\Lambda} \underline{y}$ differenciálegyenlet rendszer egy alaplátixa a következő

$$\underline{\Psi}(t) = \left(e^{\lambda_1 t} \underline{e}^1, e^{\lambda_2 t} \underline{e}^2, \dots, e^{\lambda_n t} \underline{e}^n \right) \quad (\underline{e}^i \in \mathbb{R}^n; \quad i=1, 2, \dots, n).$$

$$\underline{T} \underline{e}^i = \underline{s}^i \quad \text{miatt,} \quad i=1, 2, \dots, n,$$

$$\underline{\Phi}(t) = \underline{T} \underline{\Psi}(t) = (e^{\lambda_1 t} \underline{s}^1, e^{\lambda_2 t} \underline{s}^2, \dots, e^{\lambda_n t} \underline{s}^n)$$

az $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$ homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer alapmátrixa.

Abban a speciális esetben, amikor az $\underline{A}$ n -ed rendű mátrixnak n számú különböző valós $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sajátértéke van, érvényesek a 2.1. Tétel

feltételei, azaz van n számú lineárisan független, $\underline{s}^1, \underline{s}^2, \dots, \underline{s}^n$ valós sajátvektor és az alapmátrix a 2.1. Tételben felírt $\underline{\Phi}(t)$ mátrix.

A fentiek figyelembevételével megmagyarázhatjuk azt is, hogy az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek megoldásait miért kerestük $e^{\lambda t}$, exponenciális alakban. Az ilyen differenciálegyenletek ugyanis, az átviteli elv segítségével olyan állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet rendszerekkel ekvivalensek, amelyeknek karakterisztikus egyenlete azonos a differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletével, továbbá az $\underline{x} = \underline{T} \underline{y}$ transzformációval kapott differenciálegyenlet rendszernek exponenciális alakú megoldásai vannak. Így például az $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 0$ differenciálegyenlet az $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ jelöléssel (átviteli elv), átírható

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 - 4x_2\end{aligned}$$

differenciálegyenlet rendszerré. A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, a differenciálegyenlet rendszer karakterisztikus egyenletével azonos, ugyanis az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

együtthatómátrixszal képzett

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3.$$

A sajátértékek: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$.

A sajátvektorok: $\underline{s}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{s}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$

A differenciálegyenlet rendszer általános megoldása

$$\underline{\psi}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Az első koordinátákból képzett

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$$

függvény a differenciálegyenlet általános megoldása. Az alaprendszer tehát

$$\left\{ e^{-t}, e^{-3t} \right\}. \square$$

Ha az $\underline{A}$ együttható mátrix sajátértékei között komplex számok is vannak akkor a hozzájuk tartozó sajátvektorok is komplex vektorok. Ebben az esetben elő lehet állítani a valós megoldásokat az Euler formulával. Legyen az n -ed rendű valós elemű $\underline{A}$ mátrixnak $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, sajátértéke, a hozzá tartozó $\underline{s} = \underline{v}^1 + i\underline{v}^2$, $\underline{v}^1, \underline{v}^2 \in \mathbb{R}^n$, sajátvektorral. A valós elemű $\underline{A}$ mátrixnak $\lambda = \alpha - i\beta$ is sajátértéke, az $\underline{s} = \underline{v}^1 - i\underline{v}^2$ sajátvektorral. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy az

$$e^{(\alpha+i\beta)t} (\underline{v}^1 + i\underline{v}^2); \quad e^{(\alpha-i\beta)t} (\underline{v}^1 - i\underline{v}^2),$$

valós változós komplex értékű függvényeknek valós és képzetes része is megoldás, azaz

$$\begin{aligned} \underline{\psi}^1(t) &= \frac{1}{2} e^{\lambda t} \underline{s} + \frac{1}{2} e^{\bar{\lambda} t} \bar{\underline{s}} = e^{\alpha t} \left[(\cos \beta t) \underline{v}^1 - (\sin \beta t) \underline{v}^2 \right], \\ \underline{\psi}^2(t) &= \frac{1}{2i} e^{\lambda t} \underline{s} - \frac{1}{2i} e^{\bar{\lambda} t} \bar{\underline{s}} = e^{\alpha t} \left[(\cos \beta t) \underline{v}^2 + (\sin \beta t) \underline{v}^1 \right]. \end{aligned}$$

megoldások. Lineáris függetlenségeket a definícióval ellenőrizhetjük. ($\underline{v}^1$, $\underline{v}^2$ vektorok lineárisan függetlenek, mert a különböző sajátértékekhez tartozó $\underline{s}$ és $\bar{\underline{s}}$ sajátvektorok is lineárisan függetlenek).

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor az $\underline{A}$ mátrix nem egyszerű struktúrájú. Ez akkor következik be, amikor valamely λ , m -szeres multiplicitással szereplő sajátértékhez nem tartozik m -számu lineárisan független sajátvektor. Ebben az esetben az

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \underline{x}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer alapmátrixát az $\underline{A}$ mátrix fővektorainak segítségével állítjuk elő.

A lineáris algebrában a fővektorokat az alábbi módon definiáljuk:

Legyen az A mátrix sajátértéke λ és $\underline{s} \neq 0$ egy hozzá tartozó sajátvektor. Képezzük az

$$\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{x} + \underline{s}$$

inhomogén lineáris egyenletrendszert. Az $(\underline{A} - \lambda \underline{E})$ együttható mátrix szinguláris, mert $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$. Ha az $\underline{s}$ vektor benne van az $(\underline{A} - \lambda \underline{E})$ mátrix osztlóterében, akkor az egyenletrendszernek van $\underline{x} = \underline{h} \neq 0$ megoldása, ha nincs benne akkor az $\underline{s}$ sajátvektorhoz nem tartozik fővektor.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\underline{h}^1 = \underline{s}, \quad \underline{h}^2 = \underline{h},$$

és ha lehetséges, keressünk újabb vektorokat a következőképpen:

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{h}^1 &= \lambda \underline{h}^1 \\ \underline{A} \underline{h}^2 &= \lambda \underline{h}^2 + \underline{h}^1 \\ \underline{A} \underline{h}^3 &= \lambda \underline{h}^3 + \underline{h}^2 \\ &\vdots \\ \underline{A} \underline{h}^k &= \lambda \underline{h}^k + \underline{h}^{k-1} \end{aligned}$$

A legnagyobb olyan k természetes számot, amelyre $\underline{h}^k$ létezik az $\underline{s} = \underline{h}^1$ sajátvektor rendjének nevezzük. Igazolhatjuk (lásd [2]-ben), hogy a λ m -szeres multiplicitással szereplő sajátértékhez tartozó $\underline{s}$ sajátvektor rendje m és hogy az m -számu fővektor lineárisan független.

Általában, ha az n -ed rendű $\underline{A}$ mátrixnak

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$$

rendre

$$m_1, m_2, \dots, m_\ell \quad \sum_{i=1}^{\ell} m_i = n,$$

multiplicitással adott sajátértéke és

$$\underline{h}_1^1, \underline{h}_1^2, \dots, \underline{h}_1^{m_1}, \underline{h}_2^1, \underline{h}_2^2, \dots, \underline{h}_2^{m_2}, \dots, \underline{h}_\ell^1, \underline{h}_\ell^2, \dots, \underline{h}_\ell^{m_\ell};$$

az n számú lineárisan független fővektora, akkor a fővektorok képzési szabályából következik, hogy belőlük, mint oszlopvektorokból, olyan n -ed rendű $\underline{T}$ transzformációs mátrix képezhető, amellyel az $\underline{A}$ mátrix ugynevezett Jordan-féle normál alakra hozható. Ezt illusztráljuk a következő példával:

2.2. Példa. Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

és oldjuk meg az $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$ differenciálegyenlet rendszert.

MEGOLDÁS. Az $\underline{A}$ mátrix karakterisztikus egyenlete,

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = -\lambda(\lambda-3)^2,$$

A $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó $\underline{s}^1$ sajátvektor és a $\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó $\underline{s}^2$ sajátvektor választható a következőképpen:

$$\underline{s}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{s}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A $\lambda_2 = 3$, kétszeres multiplicitású sajátértékhez is csak egy sajátvektor tartozik. Az $\underline{s}^2$ sajátvektor által képzett $\underline{h}$ fővektor, megoldása az

$$\underline{A} \underline{x} = 3 \underline{x} + \underline{s}^2$$

lineáris inhomogén egyenletrendszernek. Innen egy megoldás a következő:

$$\underline{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A $\underline{T} = [\underline{s}^1, \underline{s}^2, \underline{h}]$ transzformációs mátrixszal végrehajtott $\underline{x} = \underline{T} \underline{y}$ helyettesítéssel az új differenciálegyenlet rendszer a következő:

$$\underline{\underline{T}} \dot{\underline{y}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{T}} \underline{y}.$$

Mivel

$$\underline{\underline{T}}^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ -3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

ezért $\dot{\underline{y}} = (\underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{T}}) \underline{y}$, azaz az

$$\dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underline{y}$$

differenciálegyenlet rendszerben az együtttható mátrix Jordan-féle normál alakú. Ennek koordinátás alakjából, az utolsó differenciálegyenletről kiindulva, egyenként megoldjuk a differenciálegyenleteket, azaz az

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0 \\ \dot{y}_2 &= 3 y_2 + y_3 \\ \dot{y}_3 &= 3 y_3 \end{aligned}$$

egyenletekből

$$\begin{aligned} y_3(t) &= c_3 e^{3t}, & c_3 &\in \mathbb{R} \\ y_2(t) &= c_2 e^{3t} + c_3 t e^{3t}, & c_2 &\in \mathbb{R} \\ y_1(t) &= c_1, & c_1 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A differenciálegyenlet rendszer általános megoldása

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ t e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

és az alaplátrix a következő:

$$\underline{\underline{Y}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & t e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Az $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$ differenciálegyenlet rendszer alaplátrixát az $\underline{\underline{Y}}(t)$ alaplátrix oszlopainak következő felírásával,

$$\underline{y}^1(t) = \underline{e}^1; \quad \underline{y}^2(t) = e^{3t} \underline{e}^2; \quad \underline{y}^3(t) = e^{3t} t \underline{e}^2 + e^{3t} \underline{e}^3,$$

és a $\underline{T} = (\underline{s}^1, \underline{s}^2, \underline{h})$ transzformáció alkalmazásával kapjuk:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\phi}}(t) &= \underline{T} \underline{\underline{Y}}(t) = (\underline{T} \underline{e}^1, \underline{T} e^{3t} \underline{e}^2, \underline{T}(e^{3t} t \underline{e}^2 + e^{3t} \underline{e}^3)) = \\ &= (\underline{s}^1, e^{3t} \underline{s}^2, e^{3t} (t \underline{s}^2 + \underline{h})) = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2e^{3t} & e^{3t} (-2t + 1) \\ 2 & e^{3t} & e^{3t} (t - 1) \\ 1 & 2e^{3t} & e^{3t} 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

az eredeti differenciálegyenlet rendszer alaplátrixa.

Az általános esetben az $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$ differenciálegyenlet rendszer alaplátrixának, a fent ismertetett módon való felírása rendkívül nehézkes. Már a valós és komplex sajátvektorok, illetve fővektorok külön választása is bonyolítja az alaplátrix egyszerű megadását. Ebben a jegyzetben azért más uton, esetszétválasztás nélkül, azaz az egyszerű strukturájú és nem egyszerű strukturájú mátrixokra egyaránt alkalmazható módon, adjuk meg az alaplátrixot. Ennek előkészítéséhez felelvenítjük a lineáris algebra és a numerikus analízis néhány fogalmát és tételét.

Legyenek adottak az a_k , $k = 0, 1, \dots, n$ ($n \geq 2$), komplex számok. Tekintsük a komplex változós

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

polinomot. Ha $\underline{A}$ tetszőleges n -ed rendű mátrix és $\underline{E}$ az n -ed rendű egység-mátrix, akkor a

$$p(\underline{A}) = a_n \underline{A}^n + a_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \dots + a_1 \underline{A} + a_0 \underline{E}$$

kifejezést komplex együtthatós mátrix-polinomnak nevezzük.

Polinom elemű mátrixnak nevezzük azt a mátrixot, amelynek elemei polinomok.

Mátrix együtthatóju polinomnak nevezzük azt a kifejezést, amelynek együtthatói azonos rendű mátrixok.

A következő példával azt illusztráljuk, hogy egy polinom elemű mátrix azonos egy mátrix együtthatós polinommal.

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & \lambda^3 + 2\lambda \\ 3 & 2\lambda^2 - 2 \end{pmatrix} \equiv \lambda^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Legyen $D(\lambda)$ az $\underline{A}$ n -ed rendű mátrix karakterisztikus polinomja. A lineáris algebra egyik alapvető állítása az úgynevezett

2.3. Tétel. (Cayley-Hamilton tétel.) Minden négyzetes mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét.

A tétel bizonyítását [2]-ben és [4]-ben különböző módszerekkel megtaláljuk. $\square$

Igy ha az n -ed rendű $\underline{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $D(\lambda)$, akkor a Cayley-Hamilton tétel szerint $D(\underline{A}) = 0$.

A numerikus analízisből a Lagrange-féle és a Hermite-féle interpolációs polinomokra lesz szükségünk.

Tegyük fel, hogy az f komplex függvény értéke adott n számú különböző λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, pontban.

Azt a legfeljebb $(n-1)$ -ed fokú polinomot, amely a pontokban az $f(\lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ értékeket veszi fel az f függvény λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ alappontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs polinomjának nevezzük.

[5]-ben bizonyított a következő:

2.4. Tétel. Minden f függvényhez és n számú különböző alappont-hoz létezik egy és csak egy Lagrange-féle interpolációs polinom.

Az $\ell(\lambda)$ Lagrange-féle interpolációs polinom egy lehetséges meghatározása úgy történhet, hogy az ℓ_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, ismeretlen együtthatókat az

$$\ell_{n-1} \lambda_k^{n-1} + \ell_{n-2} \lambda_k^{n-2} + \dots + \ell_1 \lambda_k + \ell_0 = f(\lambda_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

lineáris egyenletrendszerből kiszámítjuk.

Tegyük fel, hogy az f komplex függvény analitikus, azaz konvergens hatványsor összegfüggvénye. Legyen adott n számú adat a következőképpen:

$$f(\lambda_k), f'(\lambda_k), \dots, f^{(m_k-1)}(\lambda_k), \quad k = 1, 2, \dots, \ell,$$

ahol $\sum_{k=1}^{\ell} m_k = n$ és a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell}$ komplex számok különbözőek.

Azt a legfeljebb $(n-1)$ -ed fokú polinomot, amely deriváltjaival együtt a $\lambda_k, k=1, 2, \dots, \ell$, helyeken az f függvényre, illetve deriváltjaira adott értékeket veszi fel, az f függvény Hermite-féle interpolációs polinomjának nevezzük.

2.5. Tétel. Minden f analitikus függvényhez és az

$$f(\lambda_k), f'(\lambda_k), \dots, f^{(m_k-1)}(\lambda_k), \quad k=1, 2, \dots, \ell, \quad \sum_{k=1}^{\ell} m_k = n,$$

n számú adathoz van egy és csak egy Hermite-féle interpolációs polinom.

A tétel bizonyítása [5]-ben található.

A $h(\lambda) = h_{n-1} \lambda^{n-1} + h_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + h_1 \lambda + h_0$ Hermite-féle interpolációs polinom egy lehetséges meghatározása úgy történhet, hogy a $h_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ismeretlen együtthatókat a

$$h^{(i)}(\lambda_k) = f^{(i)}(\lambda_k), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m_k-1, \\ k = 1, 2, \dots, \ell,$$

n egyenlethől álló lineáris egyenletrendszerből számítjuk ki.

A Lagrange-féle interpolációs polinom, a Hermite-féle interpolációs polinom speciális esete. Ekkor $m_k = 1, k=1, 2, \dots, n$.

A Lagrange-féle interpolációs polinom együtthatóinak meghatározása nemcsak a lineáris egyenletrendszerrel lehetséges.

Egyszerűen belátható, hogy

$$\ell(\lambda) = f(\lambda_1) \ell_1(\lambda) + f(\lambda_2) \ell_2(\lambda) + \dots + f(\lambda_n) \ell_n(\lambda),$$

ahol $\ell_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, n$, az úgynevezett alappolinom és a következő képlettel adott:

$$\ell_k(\lambda) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\lambda - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n.$$

Szükségünk lesz a mátrixfüggvény fogalmára és tulajdonságaira. Az f komplex analitikus függvényt értelmezzük a négyzetes mátrixok halmazán.
Legyen adott az

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$$

analitikus függvény és az $\underline{A}$ négyzetes mátrix.

Az $s_N(\lambda) = \sum_{k=0}^N c_k \lambda^k$, N rögzített természetes szám, N részletösszeg polinomból képezhetjük a $s_N(\underline{A}) = \sum_{k=0}^N c_k \underline{A}^k$, mátrix-polinomot. $N \rightarrow \infty$ esetén az $s_N(\underline{A})$ mátrixsorozat határértéke az a mátrix, amelynek bármely eleme a mátrixsorozat megfelelő helyen álló elemeiből alkotott konvergens számsorozat határértéke. Ha a mátrixsorozat határértéke létezik, akkor azt $f(\underline{A})$ -val jelöljük, vagyis

$$f(\underline{A}) = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N(\underline{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \underline{A}^k.$$

A következő tételben bebizonyítjuk, hogy az egész komplex számsíkon analitikus $f(\lambda)$ függvény értéke minden $\underline{A}$ kvadratikus mátrix esetén létezik és $f(\underline{A})$ meghatározására módszert is adunk, a Lagrange-féle, illetve a Hermite-féle interpolációs polinomok segítségével.

Általában a határérték létezésének elégséges feltétele a következő:

2.6. Tétel. Ha az

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$$

analitikus függvényt előállító hatványsor a $|\lambda| < \rho$ körlapon kon-

vergens, és az $\underline{A}$ n -ed rendű mátrix összes sajátértéke a konvergencia tartományban van, akkor az $f(\underline{A})$ n -ed rendű mátrix létezik.

Bizonyítás. Legyenek adottak az $\underline{A}$ mátrix különböző sajátértékei,

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell,$$

rendre

$$m_1, m_2, \dots, m_\ell$$

multiplicitással,

$$\sum_{i=1}^{\ell} m_i = n,$$

Az $\underline{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja az n -ed foku

$$D(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_\ell)^{m_\ell}.$$

összük el az $s_N(\lambda) = \sum_{k=1}^N c_k \lambda^k$, N . részletösszeg polinomot a $D(\lambda)$ polinommal. Ekkor

$$s_N(\lambda) = D(\lambda) \cdot q_N(\lambda) + r_N(\lambda), \quad N = 1, 2, \dots,$$

ahol $q_N(\lambda)$ a hányadospolinom, $r_N(\lambda)$ a legfeljebb $(n-1)$ -ed foku maradékpolinom. $r_N(\lambda)$ fokszáma N -től független. A $D(\lambda)$ karakterisztikus polinomra teljesül a következő n számú egyenlőség:

$$D(\lambda_k) = D'(\lambda_k) = \dots = D^{(m_k-1)}(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \ell, \quad \sum_{k=1}^{\ell} m_k = n.$$

Ezek szerint minden N -re, $s_N(\lambda) - r_N(\lambda) = D(\lambda) \cdot q_N(\lambda)$ -ból.

$$s_N(\lambda_k) - \mathcal{L}_N(\lambda_k) = 0$$

$$s'_N(\lambda_k) - \mathcal{L}'_N(\lambda_k) = 0$$

$$\vdots$$

$$\binom{m_k-1}{s_N}(\lambda_k) - \binom{m_k-1}{r_N}(\lambda_k) = 0, \quad k=1, 2, \dots, \ell, \quad \sum_{k=1}^{\ell} m_k = n.$$

A feltétel szerint a λ_k sajátértékek az $f(\lambda)$ függvényt előállító $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda^k$ hatványsor nyílt konvergencia körülményén vannak, azaz

$$|\lambda_k| < \rho, \quad k=1, 2, \dots, \ell,$$

tehát az $s_N^{(i)}(\lambda_k) = \mathcal{L}_N^{(i)}(\lambda_k)$, $i=1, 2, \dots, m_k-1$, egyenlőségekből következik, hogy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{L}_N^{(i)}(\lambda_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N^{(i)}(\lambda_k) = f^{(i)}(\lambda_k),$$

$$k=1, 2, \dots, \ell; \quad i=1, 2, \dots, m_k-1; \quad \sum_{k=1}^{\ell} m_k = n.$$

Az n számú $f^{(i)}(\lambda_k)$ adathoz, a 4.5. Tétel szerint található egy és csak egy $h(\lambda)$ Hermite-féle interpolációs polinom, amelyre teljesül, hogy:

$$h^{(i)}(\lambda_k) = f^{(i)}(\lambda_k).$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{L}_N^{(i)}(\lambda_k) = h^{(i)}(\lambda_k), \quad k=1, 2, \dots, \ell, \\ i=1, 2, \dots, m_k-1.$$

és így az $\mathcal{L}_N(\lambda)$ polinom határértékére, $N \rightarrow \infty$ esetén, n számú adatunk van.

Minden rögzített N -re azonban az $\lambda_N^{(i)}(\lambda_k)$, n számú adattal egyértelműen adott a legfeljebb $(n-1)$ -ed fokú $h_N(\lambda)$ Hermite-féle interpolációs polinom és mivel $\lambda_N(\lambda)$ is polinom, ezért

$$\lambda_N(\lambda) \equiv h_N(\lambda),$$

azaz $\lambda_N(\lambda)$ átrendezhető úgy, hogy együtthatói az $\lambda_N^{(i)}(\lambda_k)$ adatok függvényei legyenek.

Valamely polinom határértékén egy olyan polinomot értünk amelynek bármely együtthatója a polinomsorozat megfelelő együtthatóiból álló számsorozat határértéke. Mivel a $h_N(\lambda)$ polinom együtthatói a $\lambda_N^{(i)}(\lambda_k)$ adatok folytonos függvényei és ismeretese a következő határértékek:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N^{(i)}(\lambda_k) = h^{(i)}(\lambda_k), \quad \begin{matrix} k=1, 2, \dots, \ell, \\ i=1, 2, \dots, m_k-1. \end{matrix}$$

ezért $h_N(\lambda)$ határértéke, $N \rightarrow \infty$ esetén, az n számú $h^{(i)}(\lambda_k)$ adattal egyértelműen meghatározott $h(\lambda)$ Hermite-féle interpolációs polinom. Ezzel bizonyítottuk, hogy létezik a következő határérték:

$$h(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} h_N(\lambda)$$

A 2.3. Cayley-Hamilton-féle tétel szerint $D(\underline{A}) = \underline{0}$, tehát

$$s_N(\underline{A}) = D(\underline{A}) q_N(\underline{A}) + \lambda_N(\underline{A}) = \lambda_N(\underline{A}), \quad N = 1, 2, \dots$$

Ebből és a $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N(\lambda) = h(\lambda)$ határérték létezéséből következik, hogy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(\underline{A}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N(\underline{A}) = h(\underline{A}),$$

azaz létezik az $f(\underline{A})$ mátrix és

$$f(\underline{A}) = h(\underline{A}). \square$$

Az előző tétel bizonyításában megismert, az adott $f(\lambda)$ analitikus függvény adott $\underline{A}$ n -ed rendű mátrixon felvett $f(\underline{A})$ értékének meghatározására szolgáló módszer a következő: megoldjuk az $\underline{A}$ mátrix

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$$

rendre

$$m_1, m_2, \dots, m_\ell, \quad \left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i = n \right),$$

multipllicitással adott sajátértékeivel az ismeretlen

$$h(\lambda) = h_{n-1} \lambda^{n-1} + h_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + h_1 \lambda + h_0$$

polinom együtthatóira vonatkozó

$$h^{(i)}(\lambda_k) = f^{(i)}(\lambda_k) \quad \begin{matrix} k=1, 2, \dots, \ell, \\ i=1, 2, \dots, m_k-1, \end{matrix}$$

egyenletrendszert és az ismert együtthatókkal

$$f(\underline{A}) = h(\underline{A}) = h_{n-1} \underline{A}^{n-1} + h_{n-2} \underline{A}^{n-2} + \dots + h_1 \underline{A} + h_0 \underline{E},$$

(ahol $\underline{E}$ az n -ed rendű egységmátrix).

Ha az n -ed rendű $\underline{A}$ mátrixnak n számú különböző $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sajátértéke van, akkor az

$$\ell(\lambda) = \ell_{n-1} \lambda^{n-1} + \ell_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + \ell_1 \lambda + \ell_0$$

Lagrange-féle interpolációs polinomra vonatkozó

$$\ell(\lambda_k) = f(\lambda_k), \quad k=1, 2, \dots, n$$

egyenletrendszerből meghatározzuk az ismeretlen $\ell_i, i=0, 1, \dots, n-1$, együtthatókat és

$$f(\underline{A}) = \ell(\underline{A}) \text{ a keresett mátrix.}$$

2.7. Példa. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az $e^{\underline{\underline{A}}}$ mátrixot.

MEGOLDÁS. Az $f(\lambda) = e^\lambda$ függvény az egész komplex számsíkon analitikus, tehát $e^{\underline{\underline{A}}}$ minden $\underline{\underline{A}}$ esetén létezik. Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékei a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ számok. A

$$h(\lambda) = h_2 \lambda^2 + h_1 \lambda + h_0.$$

Hermite-féle interpolációs polinom ismeretlen h_0 , h_1 , h_2 együtthatóit a

$$h(1) = h_2 + h_1 + h_0 = f(1) = e.$$

$$h(-1) = h_2 - h_1 + h_0 = f(-1) = \frac{1}{e}$$

$$h'(-1) = -2h_2 + h_1 = f'(-1) = \frac{1}{e}$$

lineáris egyenletrendszerből meghatározzuk. Mivel

$$h_0 = \frac{1}{4} \left(e + 5 \frac{1}{e} \right), \quad h_1 = \frac{1}{4} \left(2e - 2 \frac{1}{e} \right), \quad h_2 = \frac{1}{4} \left(e - 3 \frac{1}{e} \right),$$

ezért

$$e^{\underline{\underline{A}}} = h(\underline{\underline{A}}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e - 2 \frac{1}{e} & 4e + 4 \frac{1}{e} & 4e - 4 \frac{1}{e} \\ e - 3 \frac{1}{e} & 2e + 6 \frac{1}{e} & 2e - 2 \frac{1}{e} \\ 4 \frac{1}{e} & -8 \frac{1}{e} & 4 \frac{1}{e} \end{pmatrix}.$$

2.8. Tétel. Tegyük fel, hogy az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n -ed rendű mátrixok felcserélhetők, azaz $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$. Ekkor

$$e^{\underline{\underline{A}}} \cdot e^{\underline{\underline{B}}} = e^{\underline{\underline{A+B}}}$$

és

$$e^{\underline{\underline{B}}} \cdot e^{\underline{\underline{A}}} = e^{\underline{\underline{A}}} e^{\underline{\underline{B}}}$$

Bizonyítás. Az $e^{\underline{\underline{A}}}$ és $e^{\underline{\underline{B}}}$ mátrixok értelmezése szerint

$$e^{\underline{\underline{A}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{A}}^k}{k!}, \quad e^{\underline{\underline{B}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{B}}^k}{k!}$$

A jobb oldalon szereplő kifejezések olyan mátrixoknak tekinthetők, amelyek elemei végtelen numerikus sorok. A képzési szabályból következik, hogy abszolút konvergensek és a Cauchy-féle szorzási szabály alkalmazható, azaz

$$e^{\underline{\underline{A}}} e^{\underline{\underline{B}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} \underline{\underline{A}}^i \underline{\underline{B}}^{k-i} \right).$$

A másik részen szereplő

$$e^{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^k}{k!}$$

szintén ilyen alakra hozható, mert a végtelen mátrixsor egyes tagjaira fennáll, a binomiális tétel, azaz

$$\frac{1}{k!} (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^k = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \underline{\underline{A}}^i \underline{\underline{B}}^{k-i} = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} \underline{\underline{A}}^i \underline{\underline{B}}^{k-i}.$$

A binomiális tétel alkalmazásakor felhasználtuk azt, hogy az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixok felcserélhetők; így például $k=2$ esetén

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^2 = \underline{\underline{A}}^2 + \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}^2 = \underline{\underline{A}}^2 + 2 \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}^2,$$

csak azért mert $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$.

Az $e^{\underline{B}} e^{\underline{A}} = e^{\underline{B+A}} = e^{\underline{A+B}}$ hasonlóan bizonyítható, tehát

$$e^{\underline{B}} e^{\underline{A}} = e^{\underline{A}} e^{\underline{B}} . \quad \square$$

2.9. Tétel. Az $e^{\underline{A}}$ mátrix inverz mátrixa létezik és $e^{-\underline{A}}$ -val egyenlő.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4.8. Tételt az $\underline{A}$ és $-\underline{A}$ felcserélhető mátrixokra. Ekkor

$$e^{\underline{A}} \cdot e^{-\underline{A}} = e^{\underline{A+(-A)}} = e^{\underline{0}} = \underline{E} = \underline{E} + \frac{\underline{0}}{1!} + \frac{\underline{0}^2}{2!} + \dots + \frac{\underline{0}^k}{k!} + \dots = \underline{E} .$$

2.10. Tétel. Legyen t valós változó és $\underline{A}$ n -ed rendű mátrix. Ekkor

$$\frac{d e^{\underline{A}t}}{dt} = \underline{A} e^{\underline{A}t} .$$

Bizonyítás. Ha t rögzített, akkor az $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ analitikus függvény és a 2.6. Tétel szerint létezik az $f(\underline{A}) = e^{\underline{A}t}$ mátrix. Az

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\underline{A}t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{A}^k t^k}{k!}$$

alakban a jobb oldalt olyan mátrixnak tekinthetjük, amelynek elemei helyén a t változó konvergens hatványsorai állnak. Ezek a hatványsorok tagonként differenciálhatók, tehát

$$\frac{d e^{\underline{A}t}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{A}^k t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\underline{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!} = \underline{A} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\underline{A}t)^{k-1}}{(k-1)!} = \underline{A} e^{\underline{A}t} .$$

avagy

$$\frac{d e^{\underline{A}t}}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\underline{A}t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \underline{A} = e^{\underline{A}t} \underline{A} . \quad \square$$

Ezzel az előkészítő rész végére értünk és kimondhatjuk azt a rendkívül egyszerű tételt, amellyel az $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$ differenciálegyenlet rendszer alapmátrixát adjuk meg.

2.11. Tétel. Az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$$

differenciálegyenlet rendszer egy alapmátrixa a

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t}$$

mátrix.

Bizonyítás. A 2.10. Tétel következménye, ugyanis a $\underline{\Phi}(t)$ alapmátrix kielégíti az

$$\dot{\underline{X}}(t) = \underline{A} \underline{X}(t)$$

mátrix differenciálegyenletet, azaz

$$\dot{\underline{\Phi}}(t) = \underline{A} e^{\underline{A}t} = \underline{A} \underline{\Phi}(t) = \underline{A} e^{\underline{A}t}.$$

Az $e^{\underline{A}t}$ alapmátrix meghatározásához a következő segítséget adjuk: Tegyük fel, hogy az $\underline{A}$ n -ed rendű mátrixnak n szamu különböző $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sajátértéke van. Kezeljük a t változót paraméterként és az $f(\lambda, t) = e^{\lambda t}$ függvényt a λ változó függvényeként. Az $\ell(\lambda, t)$ Lagrange-féle interpolációs polinomot

$$\ell(\lambda, t) = \ell_{n-1}(t) \lambda^{n-1} + \ell_{n-2}(t) \lambda^{n-2} + \dots + \ell_1(t) \lambda + \ell_0(t)$$

alakban keressük. Az ismeretlen $\ell_i(t)$, $i=0, 1, \dots, n$, együtthatókra vonatkozó egyenletrendszer a következő

$$\ell(\lambda_k, t) = e^{\lambda_k t} \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Az egyenletrendszert megoldjuk és $e^{\underline{A}t} = \ell(\underline{A}, t)$.

Haz az A n -ed rendű mátrixnak sajátértékei

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

rendre

$$m_1, m_2, \dots, m_\ell \quad \left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i = n \right),$$

multiplicitással, akkor a $h(\lambda, t)$ interpolációs polinomot

$$h(\lambda, t) = h_{n-1}(t) \lambda^{n-1} + h_{n-2}(t) \lambda^{n-2} + \dots + h_1(t) \lambda + h_0(t)$$

alakban keressük, azaz az együtthatókat a t paraméter függvényeként választjuk. Így az együtthatók meghatározására szolgáló lineáris egyenletrendszer, amelyben a deriválás λ szerint történik,

$$h^{(i)}(\lambda_k, t) = t^i e^{\lambda_k t}, \quad k=1, 2, \dots, \ell, \quad i=0, 1, \dots, m_k - \ell.$$

Az ismeretlen $h_j(t)$ együtthatók a $t^i e^{\lambda_k t}$ jobb oldali tagok lineáris kombinációi, tehát az

$$e^{\underline{A}t} = h(\underline{A}, t)$$

mátrix elemei is $t^i e^{\lambda_k t}$ alakú tagok lineáris kombinációi.

Mivel az $\underline{A}$ mátrix sajátértékei komplex számok is lehetnek, ezért az $e^{\underline{A}t}$ mátrix előállításakor felhasználjuk az Euler formulát.

2.12. Példa. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

differentiálegyenlet rendszert.

MEGOLDÁS. Az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

együttható mátrix sajátértékei:

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i.$$

A Lagrange-féle interpolációs polinom együtthatóira vonatkozó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \ell_1(t)(2+i) + \ell_0(t) &= e^{(2+i)t} \\ \ell_2(t)(2-i) + \ell_0(t) &= e^{(2-i)t}. \end{aligned}$$

$$\ell_1(t) = \frac{e^{(2+i)t} - e^{(2-i)t}}{2i} = e^{2t} \sin t,$$

$$\ell_0(t) = -2\ell_1(t) + \frac{e^{(2+i)t} + e^{(2-i)t}}{2} = e^{2t} \cos t - 2e^{2t} \sin t.$$

$$e^{\underline{A}t} = e^{2t} \sin t \underline{A} + (e^{2t} \cos t - 2e^{2t} \sin t) \underline{E},$$

$$e^{\underline{A}t} = \begin{pmatrix} e^{2t} (\cos t - \sin t) & e^{2t} \sin t \\ -2e^{2t} \sin t & e^{2t} (\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

Végül, az állandó variálásával megadjuk az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b}(t)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszer általános megoldását.

2.13. Tétel. Legyen $\underline{b}(t)$ n dimenziós folytonos vektor-skalár függvény, $\underline{A}$ n -ed rendű mátrix és az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b}(t), \quad t \in I,$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszerhez tartozó homogén lineáris differenciálegyenlet rendszer alapmátrixa $e^{\underline{A}t}$. Ekkor

$$\underline{\varphi}(t) = e^{\underline{A}t} \left[\underline{c} + \int_{t_0}^t e^{-\underline{A}\tau} \underline{b}(\tau) d\tau \right], \quad t_0 \in I, \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^n,$$

az inhomogén lineáris differenciálegyenlet rendszer általános megoldása.

A tétel bizonyítása az 1.5. és 1.4. Tétel szerint nyilvánvaló. $\square$
Az általános megoldásból az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b}(t); \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0, \quad t_0 \in I, \quad \underline{x}^0 \in \mathbb{R}^n,$$

kezdetiérték feladat $\underline{\psi}(t, t_0, \underline{x}^0)$ megoldását a következőképpen kapjuk meg:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(t, t_0, \underline{x}^0) &= e^{\underline{A}t} \left[e^{-\underline{A}t_0} \underline{x}^0 + \int_{t_0}^t e^{-\underline{A}\tau} \underline{b}(\tau) d\tau \right] \\ &= e^{\underline{A}(t-t_0)} \underline{x}^0 + \int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{b}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

2.14. Példa. A 13. ábrán vázolt áramkörben az U_0 egyenfeszültség hatására áram folyik. Határozzuk meg az indukált $i_2(t)$ és $i_3(t)$ áramerősségeket, ha a kapcsolót I. állásból II. állásba állítjuk. Tegyük fel, hogy a kapcsolás előtti időpillanatban

$$i_2(-0) = 0$$

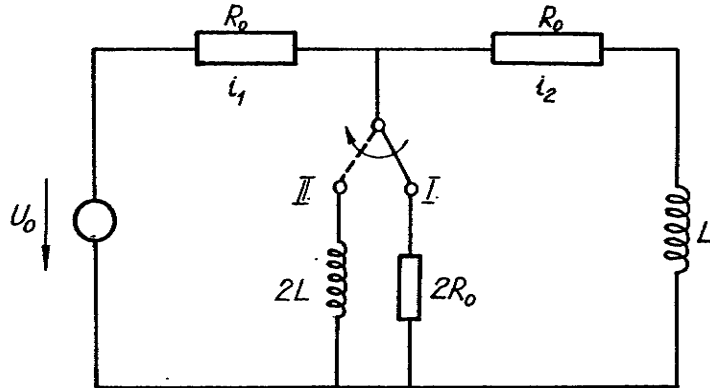
$$i_3(-0) = \frac{2}{5} \frac{U_0}{R_0}.$$

MEGOLDÁS. A Kirchhoff-féle törvények matematikai modellje a következő egyenletrendszer:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$i_1 R_0 + 2 L_0 \frac{di_2}{dt} = U_0$$

$$i_1 R_0 + i_3 R_3 + L_0 \frac{di_3}{dt} = U_0.$$



13. ábra

Az első egyenlethől i_1 -et a másodikba, majd a harmadikba helyettesítjük és figyelembe vesszük, hogy az induktivitások árama nem változhat ugrás-szerűen. Ekkor átrendezéssel a következő kezdetiérték feladatot kapjuk:

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{R_0}{2L_0} i_2 - \frac{R_0}{2L_0} i_3 + \frac{U_0}{2L_0} \quad i_2(0) = 0$$

$$\frac{di_3}{dt} = -\frac{R_0}{L_0} i_2 - \frac{2R_0}{L_0} i_3 + \frac{U_0}{L_0}; \quad i_3(0) = \frac{2}{5} \frac{U_0}{R_0}.$$

A homogén differenciálegyenlet rendszer

$$\underline{\underline{A}} = -\frac{R_0}{L_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

együtthatómátrixának sajátértékei:

$$\lambda_1 = -\frac{R_0}{L_0} \frac{5 + \sqrt{17}}{5}; \quad \lambda_2 = -\frac{R_0}{L_0} \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

Az $e^{\underline{\underline{A}}t}$ alaplátrixot a $h_1(t) \underline{\underline{A}} + h_0(t) \underline{\underline{E}}$ Lagrange-féle interpolációs mátrix-polinommal adjuk meg, ahol

$$h_1(t) = \frac{2}{\sqrt{17}} \frac{L_o}{R_o} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}),$$

$$h_o(t) = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2 \sqrt{17}} e^{\lambda_1 t} + \frac{5 + \sqrt{17}}{2 \sqrt{17}} e^{\lambda_2 t}.$$

$$e^{\underline{A}t} = \begin{pmatrix} \frac{-3 + \sqrt{17}}{2 \sqrt{17}} e^{\lambda_1 t} + \frac{3 + \sqrt{17}}{2 \sqrt{17}} e^{\lambda_2 t}; & \frac{1}{\sqrt{17}} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\sqrt{17}} e^{\lambda_2 t} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} e^{\lambda_1 t} - \frac{2}{\sqrt{17}} e^{\lambda_2 t}; & \frac{3 + \sqrt{17}}{2 \sqrt{17}} e^{\lambda_1 t} + \frac{-3 + \sqrt{17}}{2 \sqrt{17}} e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

A kezdetiérték feladat megoldása a következő képletből számíthatjuk ki:

$$\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_3(t) \end{pmatrix} = e^{\underline{A}t} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2U_o}{5R_o} \end{pmatrix} + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \begin{pmatrix} \frac{U_o}{2L_o} \\ \frac{U_o}{L_o} \end{pmatrix} d\tau,$$

azaz integrálás után,

$$i_2(t) = \frac{U_o}{R_o} \left(1 + \frac{19-5\sqrt{17}}{10\sqrt{17}} e^{-\frac{R_o}{L_o} \frac{5+\sqrt{17}}{4} t} + \frac{-19-5\sqrt{17}}{10\sqrt{17}} e^{-\frac{R_o}{L_o} \frac{5-\sqrt{17}}{4} t} \right)$$

$$i_3(t) = \frac{U_o}{R_o} \left(\frac{-7+\sqrt{17}}{5\sqrt{17}} e^{-\frac{R_o}{L_o} \frac{5+\sqrt{17}}{4} t} + \frac{7+\sqrt{17}}{5\sqrt{17}} e^{-\frac{R_o}{L_o} \frac{5-\sqrt{17}}{4} t} \right).$$

RÖVID TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS

Amint azt az előző fejezetekben láttuk, a közönséges differenciálegyenletek elmélete az analízis, algebra és a matematika számos más részét ötvözi egybe és a felépítéséhez kiműveli a technikák sokféleségét. Szigorúan véve tehát nem beszélhetünk differenciálegyenletek elméletéről, amint ez többé-kevésbé igaz minden nem axiomatikus elméletre a matematikában. Az ilyen elméletek a matematikában nem jól definiáltak.

Ez az elmélet azonban rendkívül fontos szerepet játszik a természettudományokban, a műszaki tudományokban és számos más tudományágban.

A differenciálegyenletek első művelői az analízis megalapítói Leibniz, G. [1646-1716] és Newton, I. [1692-1727]. Mindketten az anyagi pont és a merev testek dinamikájának tanulmányozása során, az analízis eredményeinek alkalmazásaként nyertek differenciálegyenletet. Ebben az időben abból a meggyőződésből indultak ki, hogy a differenciálegyenletekben szereplő ismeretlen függvény létezik, vagyis a differenciálegyenlet megoldható, mert annak megoldása megfigyelt természeti folyamatot ír le. Ez a meggyőződés játszott szerepet a differenciálegyenletek kvantitatív elméletének kialakulásában. A kvantitatív elmélet magában foglalja a differenciálegyenletek megoldásainak meghatározására szolgáló módszereket és az ilyen, ugynevezett kvantitatív módszerekkel elért eredményeket.

A kvantitatív elmélet egy részét a kvadratura módszerek alkotják. Ezek alkalmazásával a differenciálegyenletek megoldásait véges sok integrálással kapjuk meg és a megoldásokat véges sok elemi függvény segítségével állítjuk elő. Az első fejezetben kvadratura módszereket ismertettünk.

Már a XVIII. században tapasztalták, hogy a sokféle differenciálegyenletnek csak elenyészően kis része oldható meg kvadratura módszerrel. Ennek hatására indult meg a közelítő megoldási módszerek kidolgozása.

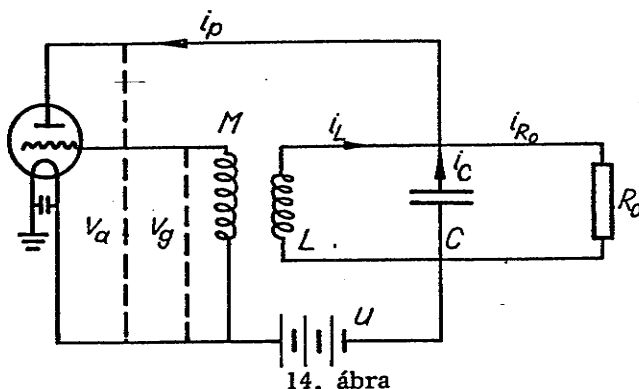
Itt elsősorban Euler, L. [1707-1783] klasszikusnak számító "poligon módszerére" kell emlékeznünk; amely szerint véges intervallumban, a megoldásfüggvény grafikonját egyenesszakaszokból álló hurropoligonnal, vagy ahogyan ma nevezzük az Euler-féle töröttvonallakkal közelíthetjük meg. A differenciálegyenletek megoldásainak közelítő meghatározására szolgáló módszerek ma már a numerikus analízis és a differenciálegyenletek kvantitatív elméletének közös részét képezik.

A XIX. századtól kezdve a differenciálegyenletek kvantitatív módszerei elégtelenek voltak a természettudományok és a műszaki tudományok által

felvetett problémák egy részének megoldásához. Ez az elmélet az esetek többségében, nem ad választ a megoldás létezésére, ha az egzisztencia tartomány nem korlátos és módszerei nem alkalmasak az ilyen megoldások tulajdonságainak, például periodicitás, oszcilláció stb. vizsgálatára. A gyakorlati szükségyszerűség és a matematika más ágaiban elért eredmények indították el annak az elméletnek a fejlődését, amelyet ma a differenciálegyenletek kvalitatív elméletének nevezünk. Az analízis alapfogalmainak szabatos definiálása, a végtelen sorok elmélete, lehetőséget teremtett az egzisztencia és unicitás tételek, azaz a megoldás létezésének és egyértelműségének, bizonyítására és olyan módszerek kidolgozására, amelyek segítségével a differenciálegyenletek megoldásainak tulajdonságait vizsgálhatjuk anélkül, hogy a megoldásokat ismernénk.

A kvalitatív elmélet megalapítói Ljapunov, A. M. [1857-1918] és Poincaré, J. H. [1854-1912]. Ljapunov mechanikai rendszerek egyensúlyi állapotának és mozgásának stabilitását vizsgálta kvalitatív módszerrel. Poincaré az égi mechanika problémáit tanulmányozta és a felírt differenciálegyenletekben szereplő ismert függvények tulajdonságaiból következtetett a megoldások viselkedésére a nem korlátos egzisztencia tartományban.

A rádiózás elméleti alapjait is a kvalitatív elmélet tartalmazza. Ennek kísérleti alapja az 1913-ban triódával felszerelt elektromos áramkörrel előállított csillapítatlan elektromos rezgés (14. ábra). A "helyesen választott"



visszacsatolás úgy vezérli az anódáramot, hogy a rezgések amplitudója csillapodás helyett az idővel exponenciálisan nő, de a növekedés csak bizonyos háttárig tart és azután a rezgések csillapodás nélkül folytatódnak. E folyamat matematikai leírását van der Pol adta meg. Néhány kiinduló feltétel mellett az indukciós feszültség konstansszorosára, y -ra a

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + m(y^2 - 1) \frac{dy}{dt} + y = 0, \quad m > 0,$$

differenciálegyenletet írta fel. Kvalitatív módszerrel, az ugynevezett izoklinás módszerrel igazolta, hogy az azóta róla elnevezett - differenciálegyenletnek van zérustól különböző periodikus megoldása, amely a csillapítatlan rezgés leírására szolgál. A periodikus megoldást és annak periódusát függvény-sorok részletösszegeivel közelíthetjük meg.

Az elmúlt negyedszázadban többek között a rakétatechnika, az űrhajózás elméleti alapjaiban, a biológiai és társadalom tudományban fontos szerepet töltenek be a közönséges differenciálegyenlet rendszerek. Ezen tudományágakban való kutatások és az elért eredmények a differenciálegyenlet rendszerekkel kapcsolatban két alapvetően fontos ágazat fejlődését segítették elő. Az egyik a szabályozáselmélet vagy irányításelmélet, a másik a közönséges differenciálegyenletrendszerek elméletének az a része, amelyben ugynevezett késleltetett differenciálegyenlet rendszerek, vagy a retardált differenciálegyenlet rendszerek szerepelnek.

A szabályozáselmélet alapfeladatának megértését egy példával segítjük elő. Tegyük fel, hogy a rakéta mozgásának matematikai leírása valamely differenciálegyenlet rendszer megoldásával történik. Ha azt akarjuk, hogy a rakéta valamely előre kijelölt helyre jusson el, akkor ennek a megoldásnak nemcsak kezdeti, hanem végfeltételt is ki kell elégítenie. Ha a differenciálegyenlet rendszerhez mellékfeltételként előírjuk a keresett függvény értékét legalább két helyen, akkor peremfeltételt adtunk meg, illetve peremérték feladat megoldását tűztük ki célul. Peremérték feladat például a következő:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{f}(t, \underline{x}), & \underline{x}(t_0) &= \underline{x}^0, \\ & & \underline{x}(t_1) &= \underline{x}^1.\end{aligned}$$

Itt azt kívánjuk, hogy a megoldás a t_0 helyen $\underline{x}^0$, és a t_1 helyen $\underline{x}^1$ értéket vegyen fel, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $\underline{x}^0, \underline{x}^1 \in \mathbb{R}^n$.

Mivel egy adott differenciálegyenlet rendszernek általában nincs peremértékét kielégítő megoldása, ezért problémát jelent a megoldható peremérték feladatok felírása. Egy függvényparaméter szerepeltetésével ilyen peremérték feladat meghatározásának módját veti fel a szabályozáselmélet alapfeladata, amely a következőképpen szól:

Határozzuk meg a t_0, t_1 intervallumban értelmezett $\underline{u}(t)$ vektor-skalár függvényt úgy, hogy a

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{f}(t, \underline{x}, \underline{u}); & \underline{x}(t_0) &= \underline{x}^0, \\ & & \underline{x}(t_1) &= \underline{x}^1,\end{aligned}$$

egyenletrendszerből az $\underline{u} = \underline{u}(t)$ helyettesítés után kapott peremérték feladatnak legyen megoldása.

Ha létezik ilyen $\underline{u}(t)$ függvény, akkor azt szabályozó függvénynek nevezzük. A gyakorlatban a szabályozó függvény értékeire is korlátokat szabunk meg. Megemlítjük, hogy ha a szabályozó függvény értékeire nincs korlát kiszabva, akkor általában egy-egyértelműen adott, időtől független konstans szabályozó függvény is található.

Ha minden $\underline{x}^0, \underline{x}^1$ értékhez található $\underline{u}(t)$ szabályozó függvény, akkor a megfelelő peremérték feladat megoldását szabályozhatóknak nevezzük. Azokat a folyamatokat, amelyeket peremértékfeladatok szabályozható megoldásaival írhatunk le szabályozható folyamatoknak nevezzük.

A szabályozáselmélet rendkívül fontos ága napjainkban az optimális szabályozás elmélete. Ennek egyik fejezete az ugynevezett időoptimum feladattal foglalkozik. Ekkor az

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{f}(t, \underline{x}, \underline{u}), & \underline{x}(t_0) &= \underline{x}^0 \\ \underline{x}(t_1) &= \underline{x}^1\end{aligned}$$

egyenletrendszerben a t_1 helyett nem rögzítjük, és olyan $\underline{u}(t)$ szabályozó függvényt keresünk, amely minimális $t_1 - t_0$ idő alatt "vezeti a rendszert" az $\underline{x}^0$ -ból az $\underline{x}^1$ állapotba.

Az eddigiek során, az anyagi világ jelenségeinek olyan leírását próbáltuk elképzelni, amelyben feltételeztük, hogy a pillanatnyi helyzet, illetve állapot és a folyamatot szabályozó fizikai törvény elegendő információt nyújt a jelenség jövőbeli lefolyására. Ha a törvény matematikai modellje differenciálegyenlet rendszer, akkor ez azt jelenti, hogy a differenciálegyenlet rendszerben minden ismeretlen és ismert függvény ugyanabban az időpillanatban szerepel. A biológiai, a társadalmi és más jelenségek egy része azonban nem vizsgálható reálisan akkor, ha a jelenség múltbeli lefolyását figyelmen kívül hagyjuk, hiszen azok utóhatást gyakorolhatnak a folyamatra. Az ilyen folyamatot leíró törvény reális matematikai modellje viszont olyan differenciálegyenlet lehet, amelyben az ismeretlen függvény vagy annak deriváltjai a t időpillanatban és valamely $t - \tau$, $0 < \tau < t$, időpillanatban is szerepelnek. Ennek illusztrálására tegyük fel, például, hogy a Marson működő, Földről irányított manipuláló szerv mozgását valamely differenciálegyenlet rendszer megoldása írja le. Ismeretes, hogy a Földről a Marsra és onnan vissza a "jelek" körülbelül 30 perc alatt érkeznek és így az állapot megváltozásának sebességét a t időpillanatban a földi irányító központra keresztül, a $t - 30$ időpillanatbeli állapot is befolyásolja. Formulában ez azt jelenti például, hogy a mozgást leíró $\underline{x}(t)$ függvényre fennáll az

$$\underline{x}(t) \equiv \underline{f}(t, \underline{x}(t), \underline{x}(t-30))$$

azonosság, vagyis $\underline{x}(t)$ a következő "késletetett differenciálegyenlet rendszert" elégíti ki:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}, \underline{x}_{\tau}), \quad \tau = 30,$$

ahol az $\underline{x}_{\tau}(t)$ függvényt az

$$\underline{x}_{\tau}(t) = \underline{x}(t - \tau)$$

összefüggéssel definiáljuk.

Az olyan differenciálegyenlet rendszert, amelyben az ismeretlen függvény vagy annak deriváltfüggvénye a t helyen kívül a $t - \tau$, $0 < \tau < t$, helyen is szerepel késleltetett vagy retardált differenciálegyenlet rendszernek nevezzük.

A késleltetett differenciálegyenlet rendszerek kvantitatív és kvalitatív vizsgálata napjaink fő feladatai közé tartozik.

Az említett két ág, vagyis a szabályozásmélete és a késleltetett differenciálegyenlet rendszerek megoldásmélete összefonódva is jelentkezik és egyre nagyobb számban jelennek meg olyan publikációk, amelyek szabályozható késleltetett differenciálegyenlet rendszerekkel foglalkoznak.

Befejezésül hangsúlyoznunk kell azt a rendkívül fontos tényt, hogy a differenciálegyenlet, mint bármely más matematikai absztrakció, a vizsgált jelenséget szabályozó objektív törvényszerűség, valóságtól elvonatkoztatott modellje és mindig szem előtt kell tartanunk azt, hogy a megoldás-függvénnyel csak közelítjük a valóságos folyamatot.

Irodalomjegyzék

- [1] Pontrjagin, L. Sz.: Közönséges differenciálegyenletek, Akadémiai Kiadó, 1972.
- [2] Csató Tamásné: Algebra jegyzet, Tankönyvkiadó, 1981.
- [3] Császár Ákosné: Valós változós függvények, Jegyzetek, Tankönyvkiadó, 1080.
- [4] Rózsa Pál: Lineáris algebra és alkalmazásai, Műszaki Könyvkiadó, 1974.
- [5] Kiss Ottó-Kovács Margit: Numerikus módszerek, Műszaki Könyvkiadó, 1973.
- [6] Fenyő István, Frey Tamás: Matematika Villamosmérnököknek. II. Műszaki Könyvkiadó, 1965.

Kedves Jegyzethasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. **Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:**

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői díjazást kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V₂ földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*.

A jegyzet címe: **KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK**

A jegyzet szerzője: **Farkas Miklósné**

A jegyzet azonosítója: **051358**

Melyik tárgyhöz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75 %):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(a túlóldalon folytatható)

