

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Csató Tamásné

ALGEBRA



Műegyetemi Kiadó, 2002.

Lektorok:

Farkas Miklósné dr. egyetemi adjunktus
Dr. Fodor György egyetemi tanár
Dr. Osváth Péter egyetemi docens

(Kilencedik utánn nyomás)

Azonosító: **051359**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

Felelős vezető: Hajdu István

Terjedelem: 29 (A/5) ív

Nyomta és kötötte:

Műegyetemi Nyomda

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 210/02

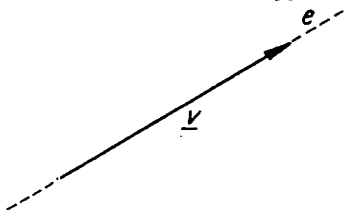
I. A TÉRVEKTOROK

1. A VEKTOR FOGALMA

Fizikai fogalmak matematikai leírásához, geometriai problémák megoldásához kevésnek bizonyulnak a valós számok. Egy mozgó test elmozdulásának, egy mozgás sebességének, gyorsulásának jellemzéséhez, egy geometriai eltolás meghatározásához kevés megadni annak nagyságát, irányára is szükség van. Indokolt tehát olyan matematikai fogalmat alkotni, amely alkalmas nagyság és irány meghatározására is: ez a vektor, eltérően a csak nagyság meghatározására alkalmas skalár-tól. Tekintsünk két pontot (A,B) és az A pontból a B pontba történő eltolást. Ezt az eltolást egyértelműen meghatározza az AB egyenesszakasz, ha irányítjuk, azaz megmondjuk, hogy kezdőpontja A - innen indul a mozgás - és végpontja B - ide irányul az eltolás.

1.1. Definíció

Vektornak nevezünk minden irányított egyenesszakaszt. A vektorokat általában aláhúzott kisbettűvel jelöljük.



1. ábra

Elnevezések

1. Az "e" egyenest a v vektor tartóegyenesének nevezzük.
2. Két vektort azonos állásunak nevezünk, ha tartóegyenesaik párhuzamosak. (Az azonos állásu vektorokat szokás párhuzamos vektoroknak is nevezni.)
3. A v vektor abszolútértékén az egyenes-szakasz hosszát értjük.
Jele: $|v|$, vagy v .

Két azonos állásu, irányu és abszolútértékű vektor ugyanazt az eltolást, sebességet, gyorsulást határozza meg, ezért indokolt az

1.2. Definíció

Két vektor azonos, ha állása, iránya és abszolútértéke azonos.



2. ábra

Megjegyzés:

Előfordul például bizonyos fizikai alkalmazásoknál, hogy nem tekinthetünk egyenlőnek két különböző pontból kiinduló vektort. Amennyiben a kiindulópontot is figyelembe kell venni, "köttött" vektorról beszélünk. A mi tárgyalásunkban a párhuzamos eltolással szemben invariáns "szabad" vektorok szerepelnek.

A továbbiakban értelmezzünk két gyakran előforduló egyszerű fogalmat.

1.3. Definíció

Az $\underline{a}$ vektort egységvektornak nevezzük, ha $|\underline{a}| = 1$.

Az $\underline{a}$ irányu egységvektor jele: $\underline{a}_0$.

1.4. Definíció

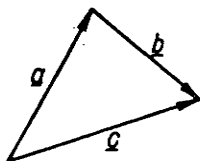
Indítsuk az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektort közös kezdőpontból. A két vektor hajlásszögén a két egyenesszakasz által bezárt 0 és π közé eső szöget értjük. Jele: $(\underline{a}, \underline{b})$ $\angle$, vagy $\varphi(\underline{a}, \underline{b})$.

2. MŰVELETEK VEKTOROKKAL I.

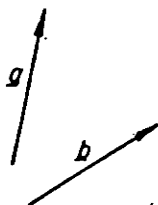
A vektorok között műveleteket értelmezzünk oly módon, hogy a gyakorlati felhasználást lehetővé tegyük, szem előtt tartva, hogy ez összhangban kell legyen a valós számok körében már értelmezett műveletekkel.

Vektorok összeadása

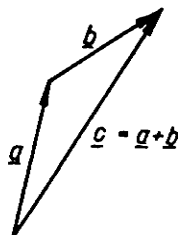
Jellemezzem az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor egy-egy végrehajtandó eltolást. A két eltolás egymás utáni végrehajtása helyettesíthető egy eltolással, amely a 3. ábrán látható módon van kapcsolatban az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorral.



3. ábra



4. ábra



Indokolt tehát a

2.1. Definíció

Két vektor (a és b) összegén azt a vektort (c) értjük, amely a 4. ábrán látható módon keletkezik az a és b vektorból.

Elnevezések: az összeadás tagjait komponens vektoroknak, az összeget eredő vektornak nevezzük.

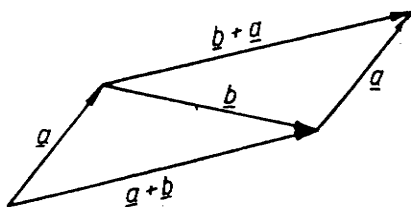
A többtagu vektorösszeget kéttagu összeadásra visszavezetve, a következőképpen értelmezzük:

$$\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \dots + \underline{a}_n = \{[(\underline{a}_1 + \underline{a}_2) + \underline{a}_3] + \dots\} + \underline{a}_n$$

Kérdés, hogy a valós számok összeadásának tulajdonságai érvényben maradnak-e a vektorok körében?

Az összeadás tulajdonságai

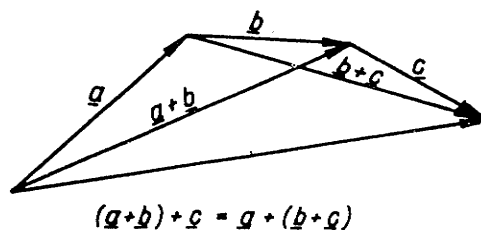
1. Bármely két vektornak van összege, és az egyértelmű.
2. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$



5. ábra

Tehát az összeadás kommutatív.

3. $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

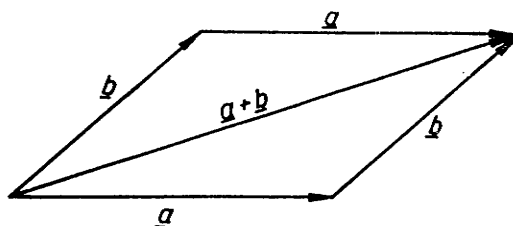


6. ábra

Tehát az összeadás asszociatív.

Megjegyzés:

Az összeadás elvégezhető az ugynevezett "paralelogramma szabály" alapján is:



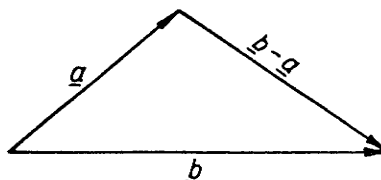
7. ábra

Vektorok kivonása

A kivonást - mint a valós számok körében - az összeadás inverzeként értelmezzük.

2.2. Definíció

A $\underline{b}$ és $\underline{a}$ vektor különbségén azt a $\underline{b} - \underline{a}$ vektort értjük, amelyre teljesül, hogy $(\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a} = \underline{b}$



8. ábra

Hogy a kivonás korlátlanul elvégezhető legyen - akkor is értelmes legyen a különbség, ha a kisebbítendő és a kivonandó megegyezik - szükség van a nullvektor értelmezésére.

2.3. Definíció

Ha $|\underline{a}| = 0$, akkor $\underline{a}$ -t nullvektornak nevezzük. A nullvektort - jele $\underline{0}$ - tetszőleges állásúnak tekintjük. Ezért a $\underline{0}$ bármely vektorral párhuzamos és bármely vektorra merőleges.

Vektor szorzása számmal (skalárral)

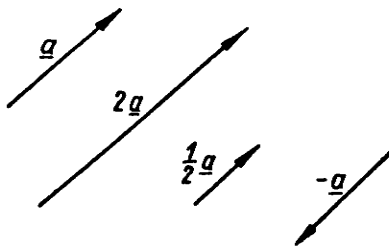
2.4. Definíció

Legyen λ valós szám és $\underline{a}$ tetszőleges vektor. Az $\underline{a}$ vektor λ -szorosán a következő - $\lambda \underline{a}$ -val jelölt - vektort értjük:

$$|\lambda \underline{a}| = |\lambda| \cdot |\underline{a}|$$

$$\lambda \underline{a} \text{ állása: } \begin{cases} \underline{a} \text{ állása} \\ \underline{a} \text{ iránya, ha } \lambda > 0 \\ \underline{a}\text{-val ellentétes irányu,} \\ \text{ha } \lambda < 0 \end{cases}$$

Szemléletesen tehát a számmal szorzás a vektor nyújtását (zsugorítását) és negatív szorzó esetén irányának ellenkezőjére változását eredményezi. Ha $\lambda = 0$, akkor $\lambda \underline{a} = \underline{0}$.



9. ábra

A számmal szorzás tulajdonságai

Legyen λ és μ valós szám, $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges vektor.

1. $(\lambda + \mu) \underline{a} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{a}$
2. $\lambda (\mu \underline{a}) = (\lambda \mu) \underline{a}$
3. $\lambda (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$

Ezek a tulajdonságok a definíció közvetlen következményei, belátásukat az olvasóra bizzuk.

3. PÁRHUZAMOS ÉS EGYSÍKÚ VEKTOROK, LINEÁRIS FÜGGŐSÉG, FÜGGETLENSÉG

A számmal szorzás definíciója értelmében

$$\lambda \underline{a} \parallel \underline{a} \quad (\lambda \underline{a} \text{ párhuzamos } \underline{a}\text{-val}).$$

Igaz-e a fenti állítás megfordítása? Legyen $\underline{a} \parallel \underline{b}$ következésképp ebből, hogy $\underline{b} = \lambda \underline{a}$? A következő ellenpélda mutatja, hogy ez a megfordítás nem igaz: legyen $\underline{a} = \underline{0}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$, ekkor $\underline{a} \parallel \underline{b}$, de nincs olyan λ , amellyel $\underline{b} = \lambda \underline{a}$ volna. Kis módosítással azonban már igaz az állítás, ezt mondja ki a következő:

3.1. Tétel

Ha két vektor párhuzamos egymással, akkor legalább az egyikük skalárszorosa a másiknak.

Bizonyítás:

- a) Ha $\underline{a} = \underline{b} = \underline{0}$, akkor bármelyikük előáll a másik tetszőleges számszorosaként.
b) Ha $\underline{a} \neq \underline{0}$, akkor

$$\underline{b} = \underline{0} \text{ esetén } \underline{b} = 0 \cdot \underline{a},$$

$$\underline{b} \neq \underline{0} \text{ esetén } \underline{b}_e = \frac{\underline{a}}{a_e}, \text{ vagy } \underline{b}_e = -\frac{\underline{a}}{a_e} \text{ és így}$$

$$\underline{b} = |\underline{b}| \underline{b}_e = |\underline{b}| \frac{\underline{a}}{a_e} = \frac{|\underline{b}|}{|\underline{a}|} \underline{a}, \quad \text{vagy } \underline{b} = -\frac{|\underline{b}|}{|\underline{a}|} \underline{a}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

Azokat a vektorokat neveztük párhuzamosoknak, amelyeknek tartóegyenesei egy és ugyanazzal az egyenessel párhuzamosak. A térben más speciális elhelyezkedés is lehetséges:

3.2. Definíció

Azokat a vektorokat nevezzük egysíkuaknak (komplanárisaknak), amelyeknek egyenesei egy síkkal párhuzamosak. Nyilvánvaló, hogy két vektor mindig komplanáris. Három vektor már nem biztos, hogy egysíku.

3.3. Tétel

Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor tetszőleges $\underline{c}$ esetén $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egysíkuak.

Bizonyítás:

Amennyiben a $\underline{c}$ is párhuzamos az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokkal, akkor az állítás triviális, ha $\underline{a} \parallel \underline{b} \nparallel \underline{c}$, akkor egyeneseik az $\underline{a}$ és $\underline{c}$ egyenesei által meghatározott síkkal párhuzamosak. ■

3.4. Definíció

$$A \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{a}_i \text{ összeget - ahol } \lambda_i\text{-k } (i=1, 2, \dots, n) \text{ skalárok - az}$$

$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

A következőkben megvizsgáljuk, milyen feltételek biztosítják, hogy egy vektort két vagy három vektor lineáris kombinációjaként lehessen előállítani.

Az előbb felvetett kérdésről szól a következő:

3.5. Tétel

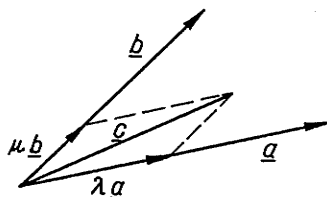
Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ komplanáris vektorok és $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, akkor $\underline{c}$ egyértelműen előállítható $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás:

Először megmutatjuk, hogy $\underline{c}$ előállítható a kívánt alakban:

$$\underline{c} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b},$$

azután bizonyítjuk az egyértelműséget.



10. ábra

A felbontást megkonstruáltuk a 10. ábrán. Konstrukciónk azért bizonyító erejű, mert mást nem használt fel, mint a tételben szereplő feltételeket ($\underline{a} \nparallel \underline{b}$ és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egysíkúak). Most megmutatjuk, hogy a felbontás egyértelmű.

Legyen $\lambda_1 \underline{a} + \mu_1 \underline{b}$ és $\lambda_2 \underline{a} + \mu_2 \underline{b}$ két felbontás:

$$\underline{c} = \lambda_1 \underline{a} + \mu_1 \underline{b} = \lambda_2 \underline{a} + \mu_2 \underline{b}$$

ezt átrendezve adódik

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \underline{a} = (\mu_2 - \mu_1) \underline{b} \quad \text{és ez}$$

csak úgy állhat fenn, ha

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{és} \quad \mu_1 = \mu_2, \quad \text{mivel} \quad \underline{a} \nparallel \underline{b}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés a tételhez:

Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$ és $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egysikuak, akkor két eset lehetséges:

1. Amennyiben $\underline{c} \parallel \underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor $\underline{c}$ előállítható $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként, de nem egyértelműen.
2. Ha $\underline{c} \nparallel \underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor $\underline{c}$ nem állítható elő a kívánt alakban.

Kérjük az olvasót, önállóan gondolja meg, hogy a megjegyzésben szereplő állítások igazak.

Egy vektor adott vektorok irányába eső komponensekre bontását vizsgálja tovább a következő

3.6. Tétel

Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ három nem egysiku vektor, akkor bármely $\underline{d}$ vektor egyértelműen állítható elő $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás:

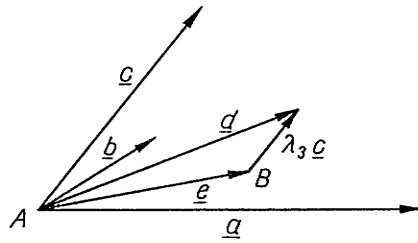
Mivel az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok nem egysikuak, így köztük nincs sem $\underline{0}$ vektor, sem párhuzamos vektorok.

a) Ha $\underline{d}, \underline{a}, \underline{b}$ egysikuak, akkor az előbbi tétel szerint a $\underline{d}$ vektor $\underline{d} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$ alakban egyértelműen előállítható, így $\underline{d} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} + 0 \underline{c}$ alakú.

Hasonlóan, ha $\underline{d}, \underline{b}, \underline{c}$, ill. $\underline{d}, \underline{a}, \underline{c}$ egysikuak, a $\underline{d}$ vektor egyértelműen előállítható

$$\begin{aligned} \underline{d} &= \lambda \underline{b} + \mu \underline{c} + 0 \underline{a}, & \text{illetve} \\ \underline{d} &= \lambda \underline{a} + \mu \underline{c} + 0 \underline{b} & \text{alakban.} \end{aligned}$$

b) Ha a $\underline{d}$ vektor nem komplanáris az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok közül kiválasztott egyik vektorpárral sem, akkor először azt mutatjuk meg, hogy előállítható az ábrán látható módon



11. ábra

$$\underline{d} = \underline{e} + \lambda_3 \underline{c} \quad (1)$$

alakban, ahol $\underline{e}$ egysiku az $\underline{a}, \underline{b}$ vektorpárral.

Indítsuk az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorokat egy pontból (A). A $\underline{d}$ vektor végpontjában állítsunk párhuzamos egyenest $\underline{c}$ -vel. Ez az egyenes metszi az $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok síkját egy B pontban, mivel a $\underline{c}$ vektor nem egysiku az $\underline{a}, \underline{b}$ vektorpárral. Ebből $\overrightarrow{AB} = \underline{e}$ jelöléssel következik (1).

Az $\underline{e}$ vektor felírható - mint már tudjuk -

$$\underline{e} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} \quad (2)$$

alakban, mivel $\underline{e}$ egysiku az $\underline{a}, \underline{b}$ vektorokkal.

Helyettesítsük (2)-t (1)-be és akkor a $\underline{d}$ vektort az állításunknak megfelelő

$$\underline{d} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c}$$

alakban állítottuk elő.

A síkbeli felbontás esetéhez hasonlóan bizonyítható a felbontás egyértelműsége.

Tegyük fel, hogy

$$\underline{d} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} \quad (1')$$

és

$$\underline{d} = \mu_1 \underline{a} + \mu_2 \underline{b} + \mu_3 \underline{c}, \quad (2')$$

ekkor

$$\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} = \mu_1 \underline{a} + \mu_2 \underline{b} + \mu_3 \underline{c}. \quad (3')$$

Ebből adódik:

$$(\lambda_1 - \mu_1) \underline{a} + (\lambda_2 - \mu_2) \underline{b} = (\lambda_3 - \mu_3) \underline{c}. \quad (4')$$

Mivel $\underline{c}$ nem egysiku $\underline{a}$ -val és $\underline{b}$ -vel, (4') csak úgy állhat fenn, ha $\mu_3 - \lambda_3 = 0$, ebből az következik, hogy

$$(\lambda_1 - \mu_1) \underline{a} + (\lambda_2 - \mu_2) \underline{b} = \underline{0}. \quad (5')$$

Mivel $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, (5') csak úgy teljesülhet, hogy

$$\lambda_1 = \mu_1 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \mu_2,$$

tehát $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, $\lambda_3 = \mu_3$, vagyis az előállítás egyértelmű. ■

Az előbbi két tétel állítása úgy is fogalmazható, hogy két nem párhuzamos vektor kifeszít egy síkot, három nem egysiku vektor kifeszíti a teret.

A következőkben definiálunk két fogalmat - a lineáris függetlenség és összefüggés fogalmát -, amelyek most, mint látni fogjuk, szemléletes tartalommal rendelkeznek. A későbbiekben - az absztrakt vektorterek tárgyalásánál - ezek a fogalmak a geometriai kapcsolatokat fogják helyettesíteni.

3.7. Definíció

Azokat a vektorokat nevezzük lineárisan függetleneknek, amelyek lineáris kombinációjaként a $\underline{0}$ csak 0 együtthatókkal állítható elő.

3.8. Definíció

Ha a $\underline{0}$ előállítható az adott vektorok lineáris kombinációjaként úgy, hogy nem minden együttható 0 , akkor a vektorokat lineárisan összefüggőknek nevezzük. Az előbb bizonyított tételek következményei az alábbiak:

3.9. Tétel

Két vektor akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem párhuzamos.

Bizonyítás:

Ha $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, akkor beláttuk, hogy bármely vektor, így a $\underline{0}$ is egyértelműen előáll $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként. De $\underline{0} = \underline{a} +$

$+ 0 \cdot \underline{b} = \underline{0}$, tehát $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineárisan független, másrészt, ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor legalább az egyik - legyen ez az $\underline{a}$ - felírható a másik skalárszorosaként. Így

$$\begin{aligned}\underline{a} &= c \cdot \underline{b}, \\ \underline{a} &= c \cdot \underline{b} = \underline{0}\end{aligned}$$

Az $\underline{a}$ vektor együtthatója biztosan nem nulla, tehát $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineárisan összefüggő. ■

3.10. Tétel

Három vektor akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem egysiku.

Bizonyítás:

Már korábban bizonyítottuk, hogy ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem komplanárisak, akkor tetszőleges vektor, így a $\underline{0}$ is egyértelműen előállítható $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineáris kombinációjaként.

Mivel

$$0 \cdot \underline{a} + 0 \cdot \underline{b} + 0 \cdot \underline{c} = \underline{0}$$

és ez az egyetlen előállítás, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan függetlenek. Másrészt, ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ komplanárisak, akkor megmutatjuk, hogy lineárisan összefüggők.

a) eset: Ha $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, akkor tetszőleges velük egysiku $\underline{c}$ előáll $\underline{c} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$ alakban, vagyis $\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} - \underline{c} = \underline{0}$ és $\underline{c}$ együtthatója nem nulla.

b) eset: Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor $\underline{a} = \lambda \underline{b}$ (vagy $\underline{b} = \mu \underline{a}$) és így $\underline{0} = \underline{a} - \lambda \underline{b} + 0 \underline{c}$, tehát $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan összefüggők. ■

Végül az olvasó könnyen beláthatja, hogy ha a tér bármely négy vektorát vizsgáljuk is, ezek mindig lineárisan összefüggők.

3.11. Feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorhármas lineárisan független rendszert alkot, akkor az $\underline{a} + \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c}$ vektorok is lineárisan függetlenek.

2. Bizonyítsa be, hogy ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorhármas lineárisan összefüggő rendszert alkot, akkor az $\underline{a} + \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c}$ vektorok is lineárisan összefüggők.

3. Bizonyítsa be vektorok segítségével, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást.

4. $\underline{a} \nparallel \underline{b}$. Bizonyítsa be, hogy a $|\underline{b}| \underline{a} + |\underline{a}| \underline{b}$ vektor párhuzamos az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor szögfelezőjével.

5. Bizonyítsa be, hogy ha az egy pontból kiinduló $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok közül $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem egysiku, végpontjaik akkor, és csak akkor vannak egy síkon, ha $\underline{d} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$, ahol

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

6. Fogalmazza meg a fenti tétel speciális esetét három vektorra és bizonyítsa be.

4. MŰVELETEK VEKTOROKKAL II.

Gyakorlati alkalmazások indokolják, hogy további műveleteket értelmezzünk a vektorok között.

Skaláris szorzás

Értelmezzük a vektorok között egy úgynevezett skaláris szorzást, amely bármely két vektorhoz egy valós számot (skalárt) rendel.

4.1. Definíció

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor skaláris szorzata

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\angle(\underline{a}, \underline{b}))$$

A skaláris szorzás tulajdonságai

1. A szorzás kommutatív.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a} - \text{triviális a definíció alapján.}$$

2. A definíció közvetlen következménye, hogy

$$\lambda(\underline{a} \cdot \underline{b}) = (\lambda \underline{a}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot (\lambda \underline{b})$$

3. Ugyancsak a definíció alapján nyilvánvaló, hogy általában $(\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c} \neq \underline{a} (\underline{b} \cdot \underline{c})$, hiszen a bal oldal a $\underline{c}$ vektorral, a jobb oldal az $\underline{a}$ vektorral párhuzamos.

4. Az összeadás (kivonás) és a skaláris szorzás között érvényes a disztributív azonosság:

$$(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c} \quad (1)$$

és

$$(\underline{a} - \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} - \underline{b} \cdot \underline{c}$$

Bizonyítás:

Ha $\underline{c} = \underline{0}$, akkor (1) és (2) mindkét oldala nulla, tehát érvényesek.

Ha $\underline{c} \neq \underline{0}$, akkor a $\underline{c}$ vektor irányába eső egységvektort $\underline{c}_e$ -vel jelölve:

$$\underline{c} = \underline{c}_e \cdot |\underline{c}|.$$

$\underline{c}$ -nek ezt az alakját a bizonyítandó azonosságokba helyettesítve és $|\underline{c}|$ -kel osztva az

$$(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c}_e = \underline{a} \cdot \underline{c}_e + \underline{b} \cdot \underline{c}_e$$

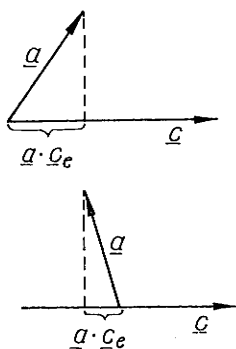
és

$$(\underline{a} - \underline{b}) \cdot \underline{c}_e = \underline{a} \cdot \underline{c}_e - \underline{b} \cdot \underline{c}_e$$

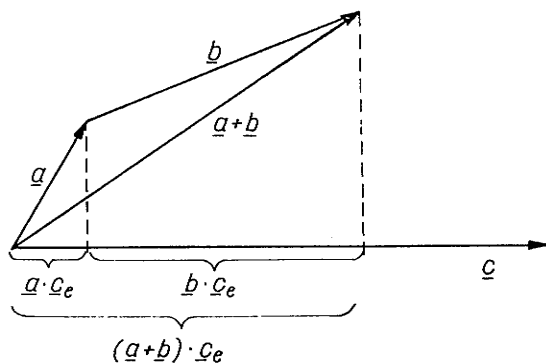
egyenleteket nyerjük. Az elsőből mutatjuk meg, hogy azonosság.

Felhasználjuk a skaláris szorzásnak azt, a definícióból következő tulajdonságát, hogy $\underline{a} \cdot \underline{c}_e$ az $\underline{a}$ vektor merőleges előjeles vetülete a $\underline{c}$ vektorra (12. ábra). A vetület pozitív, ha $\underline{a}$ és $\underline{c}$ hajlásszöge hegyesszög és negatív, ha a hajlásszög tompaszög.

Hasonlóan $\underline{b} \cdot \underline{c}_e$ a $\underline{b}$ vektor, $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c}_e$ az $\underline{a} + \underline{b}$ vektor vetülete $\underline{c}$ -re.



12. ábra



13. ábra

Igy a 13. ábra alapján következik az állítás, ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ hegyesszögben hajlanak $\underline{c}$ -hez és hasonlóan belátható, ha mindkettő, ill. csak egyikük tompaszöget alkot a $\underline{c}$ vektorral. ■

A továbbiak szempontjából igen lényeges az az egyszerű észrevétel, amelyet a következő tétel fogalmaz meg:

4.2. Tétel

Két, nullától különböző vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skalárszorzata nulla.

Bizonyítás:

a) Ha $\underline{a} \perp \underline{b}$ -re, akkor az $(\underline{a}, \underline{b}) \angle = \frac{\pi}{2}$ és így

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

b) Ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$, $|\underline{a}| \neq 0$ és $|\underline{b}| \neq 0$, akkor

$$\cos (\underline{a}, \underline{b}) \angle = 0, \text{ vagyis } (\underline{a}, \underline{b}) \angle = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés:

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy - az eddigiektől eltérően - ez egy olyan szorzásművelet, amelynek eredménye nemcsak akkor nulla, ha valamelyik tényező maga is nulla.

Vektoriális szorzás

Értelmezzünk a vektorok között egy ún. vektoriális szorzást, amely bármely két vektorhoz egy vektort rendel.

4.3. Definíció

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor vektoriális szorzatán azt az $\underline{a} \times \underline{b}$ -vel jelölt vektort értjük, amelynek abszolútértéke:

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin (\underline{a}, \underline{b}) \angle,$$

állása:

$$\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a} \text{ és } \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$$

iránya:

az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorok jobbrendszer alkotnak.

Ezen azt értjük, hogy az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor irányából nézve, az $\underline{a}$ vektort pozitív - óramutató járásával ellentétes - π -nél kisebb forgás viszi a $\underline{b}$ irányba.

A vektoriális szorzás tulajdonságai

1. A szorzás nem kommutatív:

$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$, mivel $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{b} \times \underline{a}$ abszolútértéke és állása azonos és iránya ellentétes.

2. $\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = \lambda \underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times \lambda \underline{b}$. A definíció alapján nyilvánvaló.

3. A vektoriális szorzás nem asszociatív:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}).$$

Állításunkat egy ellenpéldával igazoljuk. Legyen

$$\underline{a} = \underline{b} \neq \underline{0} \text{ és } \underline{c} \perp \underline{a}, \underline{c} \neq \underline{0}, \text{ akkor}$$

a bal oldal:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \times \underline{a}) \times \underline{c} = \underline{0},$$

a jobb oldal:

$$\underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{c})$$

egy olyan vektor, amely komplanáris $\underline{a}$ -val és $\underline{c}$ -vel és merőleges $\underline{a}$ -ra, abszolút értéke:

$$\begin{aligned} |\underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{c})| &= |\underline{a}| \cdot |\underline{a} \times \underline{c}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \\ &= |\underline{a}| |\underline{a}| |\underline{c}| \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = |\underline{a}|^2 |\underline{c}| \neq 0. \end{aligned}$$

4. A vektoriális szorzás disztributív:

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} \quad (1)$$

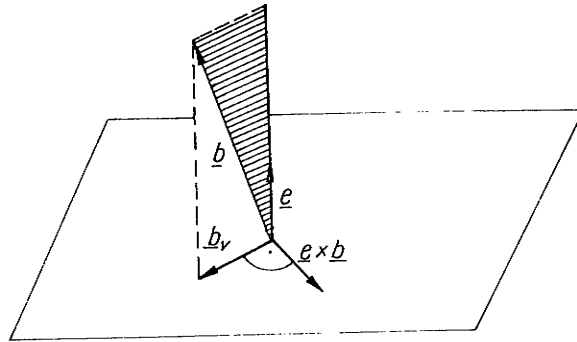
Elég az állítást abban az esetben bizonyítani, amikor az $\underline{a}$ vektor egységvektor ($\underline{a} = \underline{e}$), mert ha $|\underline{a}| \neq 1$, akkor az egységvektorra bizonyított egyenlőséget $|\underline{a}|$ -kel végigszorozva nyerjük (1)-et.

Geometriai eszközökkel bizonyítjuk, hogy az

$$\underline{e} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{e} \times \underline{b} + \underline{e} \times \underline{c} \quad (2)$$

egyenlőség azonosság.

Felhasználjuk a vektoriális szorzásnak azt a geometriai jelentését, hogy $\underline{e} \times \underline{b}$ a $\underline{b}$ vektor $\underline{e}$ -re merőleges síkbeli vetületének az $\underline{e}$ irányából nézve pozitív irányú 90° -os elforgatottja (14. ábra).



14. ábra

$\underline{e} \times \underline{b}$ merőleges $\underline{e}$ -re és $\underline{b}$ -re és velük jobbrendszer alkot, így csak azt kell belátni, hogy

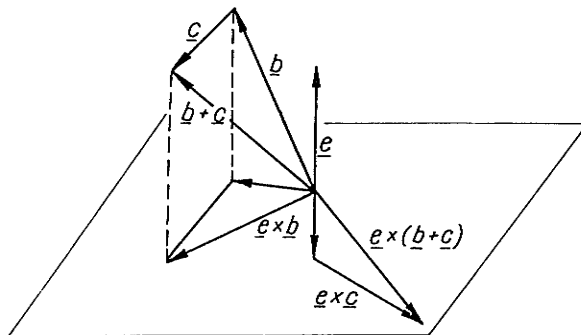
$$|\underline{b}_v| = |\underline{e} \times \underline{b}|.$$

A bevonalkázott háromszögből

$$|\underline{b}_v| = |\underline{b}| \cdot \sin(\underline{e}, \underline{b}) \quad .$$

Ezután vetítsük az egymáshoz fűzött $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{b} + \underline{c}$ vektort egy az $\underline{e}$ vektorra merőleges síkra, majd forgassuk el a vektorháromszöget $\underline{e}$ irányából nézve $+90^\circ$ -kal (15. ábra).

Ekkor az $\underline{e} \times \underline{b}$, $\underline{e} \times \underline{c}$, $\underline{e} \times (\underline{b} + \underline{c})$ vektorokból álló vektorháromszöghöz jutunk, ami eredeti állításunk igaz voltát jelenti. ■



15. ábra

A skaláris szorzat nulla voltából a vektorok merőlegességére lehet következtetni - mint ezt már bizonyítottuk - a vektoriális szorzatból a tényezők párhuzamosságára. Pontosabban:

4.4. Tétel

Két nullától különböző vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha vektoriális szorzatuk nulla.

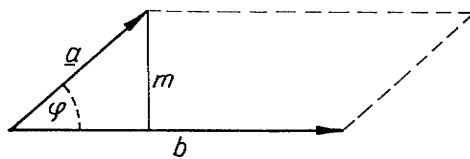
Bizonyítás:

- a) Ha $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$, akkor $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin(\underline{a}, \underline{b}) = 0$.
Ebből következik, hogy $\sin(\underline{a}, \underline{b}) = 0$, mivel $\underline{a} \neq \underline{0}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$.
Igy $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ vagy π , vagyis $\underline{a} \parallel \underline{b}$.
- b) Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$ és egyik sem nullvektor, akkor a 3.1. tétel alapján
- $$\underline{a} = \lambda \underline{b}, \text{ és}$$
- $$\lambda \underline{b} \times \underline{b} = \underline{0}.$$

Ezzel állításunk mindkét részét beláttuk. ■

A vektoriális szorzat egy geometriai jelentése:

$|\underline{a} \times \underline{b}|$ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor által kifeszített paralelogramma területe (16. ábra)



16. ábra

$$T_p = |\underline{b}| \cdot m = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \varphi,$$

$$\text{tehát } T_p = |\underline{a} \times \underline{b}|.$$

A kétszeres vektoriális szorzat kiszámítását segíti elő a

4.5. Tétel (kifejtési tétel)

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \cdot \underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{c}) \cdot \underline{a} \quad (1)$$

Bizonyítás:

Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ közül legalább egy vektor nullvektor, akkor mindkét oldala (1)-nek 0, tehát az állítás igaz. A továbbiakban már feltehetjük, hogy egyik vektor sem nullvektor.

Ha $\underline{b} = \lambda \underline{a}$, akkor (1) a következő alakot ölti:

$$(\underline{a} \times \lambda \underline{a}) \times \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \lambda \underline{a} - (\lambda \underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{a} \quad (2)$$

(2) mindkét oldala nullvektor, tehát az állítás ekkor is igaz. Most már feltehetjük, hogy $\underline{a} \nparallel \underline{b}$.

Az látszik, hogy (1) bal oldala $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$ komplanáris az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorpárral, mivel $\underline{a} \times \underline{b}$ -re - vagyis egy $\underline{a}$ -ra és $\underline{b}$ -re is merőleges vektorra - merőleges. Ebből következik (3.5. tétel), hogy $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$ felírható az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor lineáris kombinációjaként. További feladatunk annak kimutatása, hogy az együtthatók az állításban szereplő skaláris szorzatok.

Vegyük észre, hogy ha (1) fennáll valamely $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorhármásra, akkor - tetszőleges valós λ esetén - $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\lambda \underline{c}$ -re is teljesül, és ha van olyan

$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}_1$ és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}_2$ amelyek (1)-et

kielégítik, akkor $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}_1 + \underline{c}_2$ is kielégíti azt. Ezekről az állításokról egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk, csupán a skaláris és vektoriális szorzás már ismert tulajdonságait felhasználva.

Tehát, ha (1) érvényes az

$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}_1$; $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}_2$ és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}_3$ vektorhármásokra, akkor

fennáll

$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\lambda_1 \underline{c}_1 + \lambda_2 \underline{c}_2 + \lambda_3 \underline{c}_3$ -ra is.

Ezért, ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges nem párhuzamos vektorok és $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3$ -t lineárisan függetleneknek választjuk - megfelelő a $\underline{c}_1 = \underline{a}, \underline{c}_2 = \underline{b}, \underline{c}_3 = \underline{a} \times \underline{b}$ választás - és igazoljuk (1)-et az

$$\begin{aligned} \text{I} &: \underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \\ \text{II} &: \underline{a}, \underline{b}, \underline{b} \quad \text{és} \\ \text{III} &: \underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b} \quad \text{vektorhármassokra,} \end{aligned}$$

akkor fentiek értelmében minden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorhármassra is érvényes, felhasználva, hogy tetszőleges $\underline{c}$ előáll $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ lineáris kombinációjaként (3.6. tétel).

I-et helyettesítve (1)-be: az

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = (\underline{a} \underline{a}) \underline{b} - (\underline{b} \underline{a}) \underline{a} \quad (3)$$

egyenlőséget kapjuk.

II-t helyettesítve (1)-be: az

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{b} = (\underline{a} \underline{b}) \underline{b} - (\underline{b} \underline{b}) \underline{a} \quad (4)$$

egyenlőséget kapjuk.

III-at helyettesítve (1)-be: az

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{a} \times \underline{b}) = [\underline{a} (\underline{a} \times \underline{b})] \underline{b} - [\underline{b} (\underline{a} \times \underline{b})] \underline{a} \quad (5)$$

egyenlőséget kapjuk.

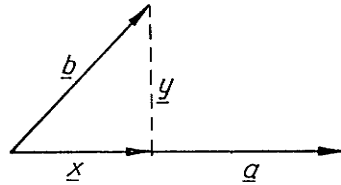
(5) bal oldala és jobb oldalának mindkét tagja, így jobb oldala is nullvektor, tehát (5) teljesül.

(3)-ban $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szerepét felcserélve és (-1)-gyel szorozva adódik (4), így elég (3)-at bizonyítani. Osszunk végig $|\underline{a}|^2$ -tel:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = (\underline{a} \underline{a}) \underline{b} - (\underline{b} \underline{a}) \underline{a} \quad (3')$$

A bal oldalon álló $\underline{y} = (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a}$ vektor a $\underline{b}$ vektor $\underline{a}, \underline{b}$ síkbeli $\underline{a}$ -ra merőleges irányú vetületi vektora (17. ábra).

Ezt az $\underline{x} = (\underline{b} \cdot \underline{a}) \underline{a}$ vektor segítségével $\underline{y} = \underline{b} - \underline{x}$ alakba írhatjuk. Ez (3') és ezzel együtt az eredeti állítás igazolását jelenti. ■



17. ábra

Vegyesszorzat

Szokás értelmezni a vektorok között egy három argumentumu műveletet az ún. vegyes szorzatot, amely lényegében nem új művelet, hanem a vektoriális és skaláris szorzat összetétele.

4.6. Definíció

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok vegyesszorzatának az $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ szorzatot nevezzük. Jele: $\underline{a} \underline{b} \underline{c}$.

A vegyesszorzat tulajdonságai

1. Ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak, akkor az általuk kifeszített hasáb térfogata: $V_h = \underline{a} \underline{b} \underline{c}$.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem egysikuak, hiszen ekkor feszítenek ki hasábot.

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = |\underline{a} \times \underline{b}| (\underline{a} \times \underline{b})_e \cdot \underline{c}$$

$\underline{a} \times \underline{b}$ mint tudjuk az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor által kifeszített paralelogramma területe.

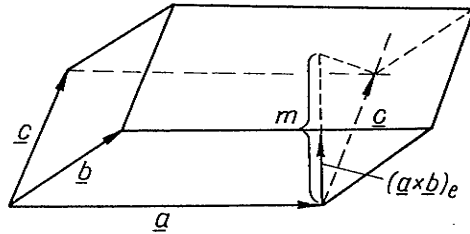
$(\underline{a} \times \underline{b})_e \cdot \underline{c}$ a $\underline{c}$ vektor vetülete a hasáb $(\underline{a}, \underline{b})$ lapjára merőleges vektorra, vagyis a hasáb magassága. (A vetület pozitív, mert $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) \leq \frac{\pi}{2}$ következik abból, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobbrendszert alkot.)

$$\text{Igy } V_h = t \cdot m = |\underline{a} \times \underline{b}| (\underline{a} \times \underline{b})_e \cdot \underline{c} \quad \blacksquare$$

Megjegyzés:

1. Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ balrendszert alkotnak, akkor

$$\underline{a} \underline{b} \underline{c} = -V_h$$



18. ábra

$$2. \quad (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c} = \underline{a} (\underline{b} \times \underline{c})$$

Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem egysikuak, akkor az 1. tulajdonság, ha egysikuak, akkor a 4. tulajdonság következménye. ■

$$3. \quad \underline{a} \underline{b} \underline{c} = \underline{c} \underline{a} \underline{b} = \underline{b} \underline{c} \underline{a}$$

$$\underline{b} \underline{a} \underline{c} = \underline{c} \underline{b} \underline{a} = \underline{a} \underline{c} \underline{b} \quad \text{és} \quad \underline{a} \underline{b} \underline{c} = -\underline{b} \underline{a} \underline{c}.$$

Ugyanis a definíció és 2. alapján:

$$\underline{a} \underline{b} \underline{c} = (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c} = \underline{c} (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{c} \underline{a} \underline{b} \quad \text{és}$$

$$\underline{c} \underline{a} \underline{b} = (\underline{c} \times \underline{a}) \underline{b} = \underline{b} (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{b} \underline{c} \underline{a}. \quad \blacksquare$$

4. Az $\underline{a} \underline{b} \underline{c}$ vegyszorzat akkor és csak akkor nulla, ha a három tényező egysiku.

Bizonyítás:

a) Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egysiku.

Ha oly módon egysikuak, hogy van közöttük nullvektor, akkor $\underline{a} \underline{b} \underline{c} = 0$.

Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$ és ebből következik, hogy $\underline{a} \underline{b} \underline{c} = 0$.

Végül ha $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, akkor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ kifeszítenek egy síkot, amellyel $\underline{c}$ a feltétel szerint párhuzamos és ezért

$$\underline{c} \perp \underline{a} \times \underline{b} \quad \Rightarrow \quad (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c} = 0.$$

b) Legyen $\underline{a} \underline{b} \underline{c} = 0$.

Az $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ skaláris szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nullvektor, vagy $\underline{c} \perp \underline{a} \times \underline{b}$. Ha $\underline{c} = \underline{0}$ vagy $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$, $\underline{a} \underline{b} \underline{c}$ valóban egysikuak.

Ha $\underline{c} \perp \underline{a} \times \underline{b}$, akkor $\underline{c} \parallel$ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor síkjával.

Ezzel állításunk mindkét részét igazoltuk. ■

Reciprok vektorhármás

Már korábban beláttuk, hogy ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem komplanáris vektorok, akkor tetszőleges $\underline{d}$ vektor egyértelműen előállítható lineáris kombinációjukként:

$$\underline{d} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} \quad (1)$$

Most a vegyesszorzat felhasználásával meghatározzuk a felbontásban szereplő λ_1 , λ_2 , λ_3 együtthatókat.

(1) mindkét oldalát megszorozva rendre a $\underline{b} \times \underline{c}$, $\underline{c} \times \underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorral a következő egyenleteket nyerjük:

$$\underline{d} \underline{b} \underline{c} = \lambda_1 \underline{a} \underline{b} \underline{c} \quad (2)$$

$$\underline{d} \underline{c} \underline{a} = \lambda_2 \underline{b} \underline{c} \underline{a} \quad (3)$$

$$\underline{d} \underline{a} \underline{b} = \lambda_3 \underline{c} \underline{a} \underline{b} \quad (4)$$

(2), (3) és (4)-ből a vegyesszorzatra vonatkozó 3. tulajdonságot felhasználva és $\underline{a} \underline{b} \underline{c} \neq 0$ -val osztva, a következő formulák adódnak az együtthatókra:

$$\lambda_1 = \frac{\underline{d} \underline{b} \underline{c}}{\underline{a} \underline{b} \underline{c}}; \quad \lambda_2 = \frac{\underline{a} \underline{d} \underline{c}}{\underline{a} \underline{b} \underline{c}}; \quad \lambda_3 = \frac{\underline{a} \underline{b} \underline{d}}{\underline{a} \underline{b} \underline{c}}$$

Megjegyzés:

$$A = \frac{\underline{b} \times \underline{c}}{\underline{a} \underline{b} \underline{c}}; \quad \frac{\underline{c} \times \underline{a}}{\underline{a} \underline{b} \underline{c}}; \quad \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{\underline{a} \underline{b} \underline{c}}$$

vektorokat szokás az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok reciprok vektorhármassá-nak nevezni.

4.7. Feladatok

1. Melyek azok az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egységvektorok, amelyek kielégítik a következő egyenlőséget?

$$(\underline{a} \cdot \underline{c}) \cdot \underline{b} = (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a}$$

2. Mutassa meg, hogy ha

$$\begin{aligned} \underline{a} \times \underline{b} &= \underline{c} \times \underline{d} \quad \text{és} \\ \underline{a} \times \underline{c} &= \underline{b} \times \underline{d}, \quad \text{akkor} \\ \underline{a} - \underline{d} &\parallel \underline{b} - \underline{c} \text{ -vel.} \end{aligned}$$

3. Mutassa meg, hogy bármely $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorhármass esetén fennáll az

$$|\underline{a} \underline{b} \underline{c}| \leq |\underline{a}| |\underline{b}| |\underline{c}|$$

egyenlőség.

4. Mely $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok elégítik ki a következő egyenlőséget?

a) $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{0}$

b) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = 0$

5. A VEKTOR KOORDINÁTÁS ALAKJA

Az a felismerés, hogy három lineárisan független vektor lineáris kombinációjaként a tér bármely vektora egyértelműen előállítható, lehetővé teszi, hogy a vektorokat rendezett számhármassokkal jellemezzük és ezáltal a vektorműveleteket geometriai eszközök nélkül is elvégezhessük.

5.1. Definíció

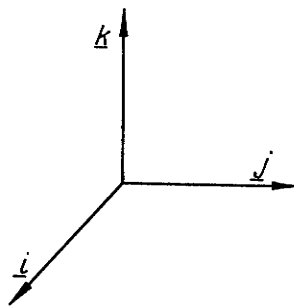
Legyen $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ egy lineárisan független vektorhármassal, amellyel a tér tetszőleges $\underline{x}$ vektora előállítható

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 \text{ alakban.}$$

Az x_1, x_2, x_3 rendezett számhármast az $\underline{x}$ vektor $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisvektorokra vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Mivel különböző bázisvektorok esetén ugyanannak a vektornak különbözőek a koordinátái, rögzítjük a bázisvektorokat.

A műveletek végzése akkor a legegyszerűbb, ha bázisvektoroknak speciálisan páronként egymásra merőleges egységvektorokat választunk.

Legyen $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ páronként egymásra merőleges, jobbrendszert alkotó egységvektorrendszer. A továbbiakban, ha egy vektor koordinátáiról beszélünk, a 19. ábrán is látható $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisvektorokra vonatkoztatjuk azokat.



19. ábra

5.2. Tétel

Két koordinátás alakban adott vektor akkor és csak akkor azonos, ha megfelelő koordinátái azonosak.

a) Ha két vektor koordinátái ugyanabban a bázisban azonosak, akkor triviális, hogy a két vektor azonos.

b) Ha

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k},$$

$$\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k} \quad \text{és} \quad \underline{a} = \underline{b},$$

akkor

$$(a_1 - b_1) \underline{i} + (a_2 - b_2) \underline{j} + (a_3 - b_3) \underline{k} = \underline{0},$$

ami $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ lineáris függetlensége miatt csak úgy teljesülhet, hogy

$$a_1 = b_1,$$

$$a_2 = b_2,$$

$$a_3 = b_3. \quad \blacksquare$$

5.3. Tételek

Műveletek koordinátákkal adott vektorokkal:

1. Összeadás és kivonás

Legyen

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$$

és

$$\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$$

Az összeadás műveleti tulajdonságait felhasználva:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1) \underline{i} + (a_2 + b_2) \underline{j} + (a_3 + b_3) \underline{k},$$

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1) \underline{i} + (a_2 - b_2) \underline{j} + (a_3 - b_3) \underline{k}. \quad \blacksquare$$

2. Szorzás skalárral

Legyen

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k},$$

akkor

$$c \cdot \underline{a} = c a_1 \underline{i} + c a_2 \underline{j} + c a_3 \underline{k}$$

a skalárral szorzás disztributivitása alapján. ■

3. Skaláris szorzás

Legyen

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$$

$$\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k},$$

akkor

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Bizonyítás:

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{i} \cdot \underline{k} = \underline{j} \cdot \underline{k} = 0 \quad (1),$$

mert a bázisvektorok páronként merőlegesek egymásra és

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1 \quad (2),$$

mert egység abszolútértékű bázisvektorokat választottunk. Felhasználva (1)-et, (2)-t és a skaláris szorzás műveleti azonosságait, következik az állítás. ■

4. Vektor abszolút értéke

A skaláris szorzás definíciója alapján: $\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}|^2$ és így

$$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

A skaláris szorzás felhasználásával az egységvektorok koordinátáinak egy geometriai jelentését mutatjuk meg:

Legyen

$$\underline{e} = e_1 \underline{i} + e_2 \underline{j} + e_3 \underline{k} \text{ és } |\underline{e}| = 1.$$

$$\underline{e} \cdot \underline{i} = \cos(\underline{e}, \underline{i})_x = e_1,$$

$$\underline{e} \cdot \underline{j} = \cos(\underline{e}, \underline{j})_x = e_2 \text{ és}$$

$$\underline{e} \cdot \underline{k} = \cos(\underline{e}, \underline{k})_x = e_3.$$

A bázisvektorokkal alkotott szögek koszinuszait a vektor iránykoszinuszainak nevezzük.

5. Vektoriális szorzás

Először a bázisvektorok vektoriális szorzatait vizsgáljuk:

$$\begin{aligned}\underline{i} \times \underline{i} &= \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}; \\ \underline{i} \times \underline{j} &= \underline{k}, \quad \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}, \quad \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}\end{aligned}\tag{1}$$

a vektoriális szorzás definíciója alapján.

(1) és a vektoriális szorzás műveleti azonosságainak felhasználásával:

$$\begin{aligned}\underline{a} \times \underline{b} &= (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}) \times (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}) = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \underline{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \underline{j} + \\ &+ (a_1 b_2 - a_2 b_1) \underline{k}.\end{aligned}$$

A koordináták felírását segíti elő a következő séma

$$\begin{aligned}\underline{a} \times \underline{b} &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \underline{k},\end{aligned}$$

ahol a szereplő számnégyesekhez rendre az

$a_2 b_3 - b_2 a_3$, $a_1 b_3 - a_3 b_1$, $a_1 b_2 - a_2 b_1$ számokat rendeljük.

6. Vegyesszorzat

$$\underline{a} \underline{b} \underline{c} = (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c}$$

3. és 5. alapján:

$$\begin{aligned}\underline{a} \underline{b} \underline{c} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + \\ &+ (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3,\end{aligned}$$

vagy az előbbi séma felhasználásával:

$$\begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Megjegyzés:

Az 5. és 6. alatt használt elemsémával - mátrix - és a fenti módon hozzárendelt szorzatösszeggel - determináns - a későbbi fejezetekben részletesen foglalkozunk, itt csak a koordináták könnyebb megjegyzése miatt használtuk.

6. A TÉR ANALITIKUS GEOMETRIÁJA

A középiskolában tanult analitikus (koordináta) geometria keretében egy koordinátarendszer rögzítése után a sík pontjait vektorokkal jellemezték. Ezzel az eszközzel mód nyílt síkgörbék egyenleteinek meghatározására és különböző mértani helyek algebrai eszközökkel történő megkeresésére.

Ehhez hasonlóan felhasználjuk a térvektorokat arra, hogy velük a tér pontjait jellemezzük, majd a síkbeli problémákhoz hasonlóakat oldjunk meg segítségükkel a térben.

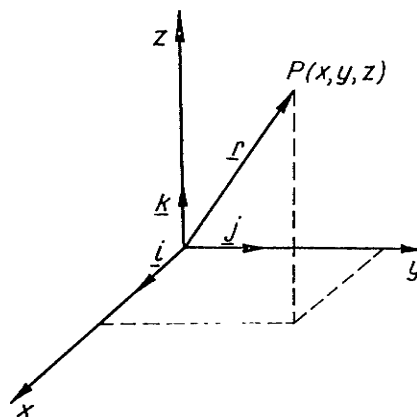
6.1. Definíció

A tér egy rögzített 0 pontjából (origó) a tér egy tetszőleges P pontjába mutató $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ vektort a P pont helyvektorának nevezzük.

A tér pontjai és az 0 pontból kiinduló helyvektorok között kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés. Ha az 0 ponton kívül három bázisvektort is rögzítünk, akkor a tér pontjai és a rendezett számhármak között is egy kölcsönösen egyértelmű relációt létesítettünk.

6.2. Definíció

Az $\underline{r}$ helyvektor koordinátáit nevezzük a P pont koordinátáinak (20. ábra).



20. ábra

6.3. Két pont távolsága

Legyen

$\underline{r}_1 = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k}$ a P_1 pont helyvektora, és

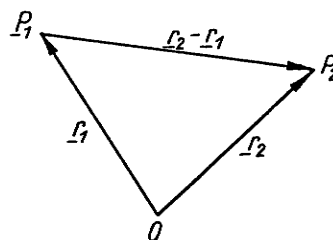
$\underline{r}_2 = x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j} + z_2 \underline{k}$ a P_2 pont helyvektora. Ekkor

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 = (x_2 - x_1) \underline{i} + (y_2 - y_1) \underline{j} + (z_2 - z_1) \underline{k}$$

és

$$|\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

(l. 21. ábra)



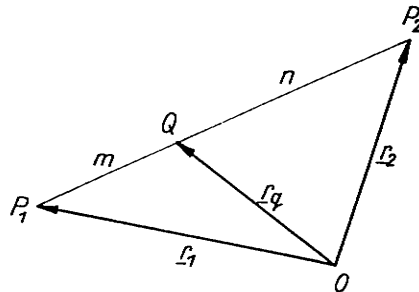
21. ábra

6.4. Egy szakaszt adott arányban osztó pont helyvektora

$$|\overrightarrow{P_1 Q}| : |\overrightarrow{Q P_2}| = m : n$$

$$(\underline{r}_q - \underline{r}_1) n = (\underline{r}_2 - \underline{r}_q) m \text{ és innen}$$

$$\underline{r}_q = \frac{n \underline{r}_1 + m \underline{r}_2}{m + n}$$



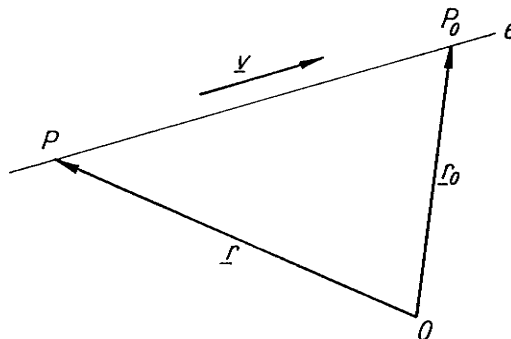
22. ábra

Speciálisan a P_1P_2 szakaszt felező pont $\underline{r}$ helyvektora:

$$\underline{r} = \frac{\underline{r}_1 + \underline{r}_2}{2}$$

6.5. Egyenes egyenlete

Az egyenes helyzetét egy pontja és egy az egyenessel párhuzamos vektor, un. irányvektor (jele: $\underline{v}$, 23. ábra), egyértelműen meghatározza. Keresünk egy olyan egyenletet, amelyet az egyenes tetszőleges P pontjának $\underline{r}$ helyvektora kielégít, de más pontok helyvektorai nem elégítik azt ki.



23. ábra

Mivel $\underline{r} - \underline{r}_0 \parallel \underline{v}$,

$$\underline{r} - \underline{r}_0 = t \cdot \underline{v},$$

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t \cdot \underline{v} \quad (t \text{ tetszőleges valós szám}) \quad (1)$$

Az (1) egyenlet az egyenes paraméteres vektoregyenlete.

Felhasználva, hogy két vektor - rögzített bázisban - akkor és csak akkor egyenlő, ha megfelelő koordinátái egyenlők, az

$$\underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}; \quad \underline{r}_0 = x_0 \underline{i} + y_0 \underline{j} + z_0 \underline{k} \quad \text{és} \\ \underline{v} = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}$$

jelöléssel kapjuk az egyenes paraméteres egyenletrendszerét:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_1 t \\ y &= y_0 + v_2 t \\ z &= z_0 + v_3 t \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Megjegyzés:

1. (2)-ből kiküszöbölhető a t paraméter. Ha az irányvektor egyik koordinátája sem nulla, vagyis az egyenes nem párhuzamos egyik koordinátasikkal sem, akkor az

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} \quad \text{egyenletrendszert nyerjük.}$$

2. Az $\underline{r} - \underline{r}_0 \parallel \underline{v}$ feltétel a vektoriális szorzat segítségével is megfogalmazható, és akkor az egyenes egyenletének egy ritkábban használt alakjához jutunk:

$$(\underline{r} - \underline{r}_0) \times \underline{v} = \underline{0} \quad (3)$$

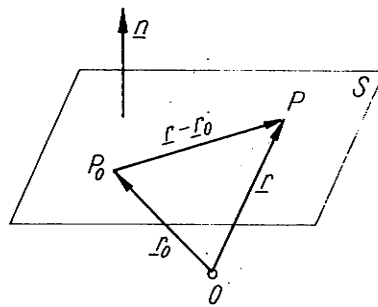
3. Természetesen az egyenes térbeli helyzetét sok más adatpár is meghatározza. Nem kívánjuk itt a gyakoribb eseteket sem tárgyalni, kitűzzük feladatként az olvasó számára.

6.6. Sik egyenlete

A sik térbeli helyzetét meghatározza például egy P_0 pontja és egy, a sakra merőleges $\underline{n}$ vektor - neve: a sik normálvektora - A sik tetszőleges P pontjának $\underline{r}$ helyvektora kielégíti az

$$(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{n} = 0 \quad (1)$$

egyenletet, mivel $\underline{r} - \underline{r}_0 \perp \underline{n}$. Más pontok viszont nem elégítik ki (1)-et, mert ha P nincs rajta az S sikon, akkor $\underline{r} - \underline{r}_0$ nem merőleges $\underline{n}$ -re. Tehát (1) az S sik egyenlete.



24. ábra

A sík egyenletének koordinátás alakja

Legyen

$$\underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k};$$

$$\underline{r}_0 = x_0 \underline{i} + y_0 \underline{j} + z_0 \underline{k} \quad \text{és}$$

$$\underline{n} = n_1 \underline{i} + n_2 \underline{j} + n_3 \underline{k}$$

akkor (1)-ből

$$(x-x_0) n_1 + (y-y_0) n_2 + (z-z_0) n_3 = 0 \quad (2)$$

adódik.

A sík egyenletének Hesse-féle normálalakja

Ehhez az egyenletalakhoz úgy jutunk, hogy egységabszolútértékű normálvektorral írjuk fel (1)-et.

$$(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{n}_e = 0 \quad (3)$$

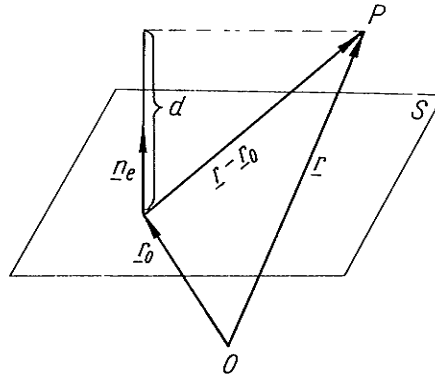
(3) igen alkalmas tetszőleges P pont siktól mért távolságának meghatározására. Ugyanis az $(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{n}_e$ szorzat - az $\underline{r} - \underline{r}_0$ vektor vetülete $\underline{n}_e$ -re - a P pont előjeles távolságát adja az S siktól (l. 25. ábra)

Három pont által meghatározott sík egyenlete

Ha ismerjük az S sík P_1, P_2, P_3 nem egy egyenesen fekvő pontjának helyvektorát, meghatározhatunk egy normálvektort

$$\underline{n} = (\underline{r}_3 - \underline{r}_1) \times (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$$

módon, és felírhatjuk S egyenletét (1) alakban, de felhasználhatjuk a következő síkegyenlet-alakot is.



25. ábra

A sík kétparaméteres vektoregyenlete

Legyen adott az S sík egy P_0 pontjának $\underline{r}_0$ helyvektora és két, az S síkkal párhuzamos vektor $\underline{u}$ és $\underline{v}$ ($\underline{u} \nparallel \underline{v}$). Az S sík tetszőleges P pontjának $\underline{r}$ helyvektora a fenti adatokkal

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t_1 \underline{u} + t_2 \underline{v}$$

alakban írható, ahol a t_1 és t_2 paraméterek tetszőleges valós számok.

Bizonyítás:

Az S sík két nem párhuzamos $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektora segítségével a sík bármely vektora, így az $\underline{r} - \underline{r}_0$ vektor is lineáris kombinációként előállítható, vagyis

$$\underline{r} - \underline{r}_0 = t_1 \underline{u} + t_2 \underline{v},$$

amint állítottuk. ■

Az előbbieken tárgyalt apparátus - sík és egyenes egyenletek - valamint a vektorműveletek alkalmazásával síkokra és egyenesekre vonatkozó metszési-, távolság-, tükrözési - feladatok analitikus megoldása is lehetővé vált. Nem kívánjuk a fenti feladattípusokat részletesen tárgyalni, csupán néhány alapfeladat megoldását ismertetjük.

1. Három sík közös pontjának meghatározása:

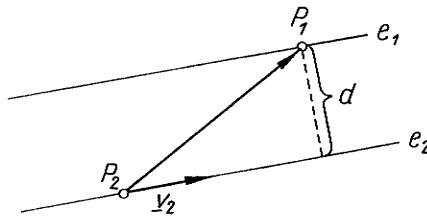
Megoldjuk a síkok egyenleteiből álló egyenletrendszert.

2. Két sík metszésvonala egyenletének felírása:

Az egyenes irányvektora a síkok normálisainak vektoriális szorzata. Az egyenes egy pontjának koordinátáit a síkok egyenleteiből álló egyenletrendszer egy megoldása adja.

3. Két párhuzamos egyenes távolsága (d)

$$d = \left| \vec{P_2 P_1} - \left(\vec{P_2 P_1} \cdot \frac{\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|} \right) \cdot \frac{\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|} \right|$$



26. ábra

7. HOMOGÉN LINEÁRIS VEKTOR-TRANSZFORMÁCIÓK (TENZOROK)

Tekintsük a következő vektor-transzformációt: a tér minden vektorának hosszát kétszeresére növeljük. Ez a T transzformáció a tér tetszőleges $\underline{v}$ vektorához a $2\underline{v}$ vektort rendeli, más szóval: $\underline{v}$ képe $2 \underline{v}$.

Jelben: $T \underline{v} = 2 \underline{v}$

Milyen tulajdonságokkal rendelkezik ez a transzformáció (más szóval leképezés)?

1. Két vektor összegének a képe megegyezik a képek összegével. Ugyanis

$$2(\underline{v_1} + \underline{v_2}) = 2 \underline{v_1} + 2 \underline{v_2}$$

2. Egy vektor skalárszorosának a képe megegyezik a vektor képének skalárszorosával. Ugyanis:

$$2 c \underline{v} = c 2 \underline{v}$$

7.1. Definíció

Homogén lineáris transzformációnak vagy homogén lineáris leképezésnek, vagy lineáris operátornak, röviden tenzornak nevezünk minden olyan T hozzárendelési utasítást, amely vektorhoz vektort rendel, és rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

$$1. T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = T \underline{v}_1 + T \underline{v}_2$$

$$2. T c \underline{v} = c T \underline{v}$$

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy a tenzor egy vektorhalmazon értelmezett vektorértékű függvény, amely az 1. és 2. tulajdonságokkal rendelkezik.

7.2. Tétel

Ha ismerjük a bázisvektorok képeit, ismerjük a tér összes vektorának a képét.

Bizonyítás:

Legyenek a bázisvektorok: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ és képeik

$$T \underline{e}_1 = \underline{a},$$

$$T \underline{e}_2 = \underline{b},$$

$$T \underline{e}_3 = \underline{c}.$$

Ekkor tetszőleges

$$\underline{v} = x \underline{e}_1 + y \underline{e}_2 + z \underline{e}_3 \quad \text{képe:}$$

$$T \underline{v} = x \underline{a} + y \underline{b} + z \underline{c} \quad (1)$$

felhasználva az 1. és 2. tulajdonságot.

Ha az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektort a rögzített $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisbeli koordinátáival adjuk meg:

$$T \underline{e}_1 = \underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3$$

$$T \underline{e}_2 = \underline{b} = b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 + b_3 \underline{e}_3$$

$$T \underline{e}_3 = \underline{c} = c_1 \underline{e}_1 + c_2 \underline{e}_2 + c_3 \underline{e}_3, \quad (2)$$

akkor $\underline{v}$ transzformáltja az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisban (1) és (2) felhasználásával a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned}
 T \underline{v} = & (x a_1 + y b_1 + z c_1) \underline{e}_1 + \\
 & + (x a_2 + y b_2 + z c_2) \underline{e}_2 + \\
 & + (x a_3 + y b_3 + z c_3) \underline{e}_3 .
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Jól látszik, hogy ha rögzítjük a bázist, a tenzort egyértelműen jellemzik a bázisvektorok képeinek koordinátái. A bázisvektorok transzformáltjainak (2) alatti koordinátáit egy táblázatba szokták összefoglalni oly módon, hogy $T \underline{e}_1$ koordinátáit helyezik el a táblázat első oszlopában.

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}
 \tag{2'}$$

Ezt a 3 sorból és 3 oszlopból álló elem-elrendezést 3x3-as négyzetes mátrixnak nevezzük. (A fogalommal részletesebben külön fejezet foglalkozik!) Jele: $\underline{T}$ ■

7.3. Definíció

A $\underline{T}$ mátrixot a T tenzor $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisbeli mátrixának nevezzük.

A mátrix írásmóddal könnyen megjegyezhetővé válik (3) is. Irjuk a $T \underline{v}$ vektor koordinátáit egy oszlopba és tegyük zárójelbe, ezzel jelölve, hogy egy vektor három koordinátájáról van szó.

$$T \underline{v} = \begin{pmatrix} x a_1 + y b_1 + z c_1 \\ x a_2 + y b_2 + z c_2 \\ x a_3 + y b_3 + z c_3 \end{pmatrix}
 \tag{3'}$$

Hasonlóan a $\underline{v}$ vektor koordinátáit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ alakban írva}$$

értelmezzük a $\underline{T}$ mátrix és $\underline{v}$ vektor szorzatát úgy, hogy az eredmény (3') legyen, vagyis

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x a_1 + y b_1 + z c_1 \\ x a_2 + y b_2 + z c_2 \\ x a_3 + y b_3 + z c_3 \end{pmatrix}$$

Figyeljük meg, hogy a szorzat-vektor elemei úgy keletkeznek, hogy a szorzandó mátrix megfelelő sorainak számhármait, mint egy vektor három koordinátáját tekintve, képezzük a skaláris szorzatát az

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

igly a T transzformáció valamely bázisbeli mátrixát ismerve, tetszőleges $\underline{v}$ e bázisbeli koordinátákkal adott vektornak a transzformáltját igen egyszerűen meghatározhatjuk.

Lássunk egy-két példát fentiekre.

7.4. Példák

1. Tekintsük az $[x \ y]$ koordinátasík helyvektorainak az origó körül történő 45° -os F elforgatását.

Geometriai ismereteink alapján nyilvánvaló, hogy az összeg elforgatottja megegyezik a komponensek elforgatottjainak az összegével és egy vektor megnyújtása és forgatása sorrendben felcserélhetők. E két tulajdonság éppen azt jelenti, hogy az F transzformáció tenzor.

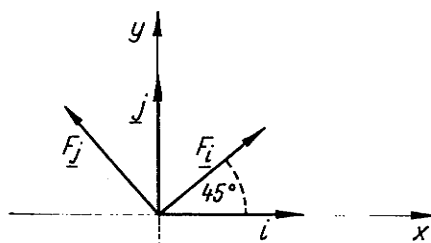
Rögzítsük az $\underline{i}, \underline{j}$ bázisvektorrendszert és írjuk fel az F tenzor mátrixát e bázisban. Mint láttuk, akkor csak az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ vektor képét kell meghatároznunk:

$$F \underline{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j}$$

$$F \underline{j} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j}$$

és ennek alapján a tenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



27. ábra

Tetszőleges $\underline{v} = x \underline{i} + y \underline{j}$ vektor transzformáltjának koordinátái az $\underline{i}, \underline{j}$ bázisban a következők:

$$F \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

2. Vizsgáljuk a tér helyvektorainak az $[xy]$ síkra történő vetítését. Ez a V vektortranszformáció is homogén és lineáris, tehát tenzor.

Írjuk fel a V tenzor mátrixát, ha $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ a bázisvektorok.

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egy homogén lineáris transzformáció vizsgálata során felmerül a kérdés, hogy van-e olyan vektor, amelyhez a transzformáció egy az eredeti vektorral párhuzamos képvektort rendel hozzá.

7.5. Definíció

Ha a T tenzor az $\underline{s} \neq \underline{0}$ vektort vele párhuzamos vektorba viszi át:

$$T \underline{s} = \lambda \underline{s},$$

akkor az $\underline{s}$ vektort a tenzor sajátvektorának, a λ skalárt a tenzor sajátértékének nevezzük.

7.6. Példa

Legyen T az XY koordinátasík helyvektorainak az első szögfelezőre történő tükrözése, majd kétszeresre nyújtása. Mivel a vektorok összeadása, ill. skalárral szorzása sorrendben felcserélhető a tükrözés és nyújtás transzformációval, T tenzor.

A tenzor mátrixa az $\underline{i}, \underline{j}$ koordinátarendszerben a következő:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Van-e a tenzornak sajátvektora? Geometriai megfontolás alapján minden olyan vektor, amelynek arkusza $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$, vagy 315° sa-

játvektor és csak ezeknek a vektoroknak a képe párhuzamos az eredeti vektorral. Minden sajátvektor a $\lambda = 2$, vagy a $\lambda = -2$ sajátértékhez tartozik, mivel a transzformáció minden vektort kétszeresére nyújt.

A sajátértékek és sajátvektorok elvi problémái és megkeresésük módszere geometriai megfontolások nélkül a lineáris transzformációk általánosabb tárgyalásánál a 8. fejezetben kerül tárgyalásra. Annyit azonban már itt megemlítünk, hogy a probléma megoldása lényegében olyan λ keresése, amely mellett a $T \underline{s} = \lambda \underline{s}$ egyenletnek van $\underline{s} \neq \underline{0}$ megoldása. Ezt részletesebben írva, kapjuk a

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda s_1 \\ \lambda s_2 \end{pmatrix} \text{ egyenletet,}$$

és a szorzást elvégezve, a

$$\begin{aligned} 2 s_2 &= \lambda s_1 \\ 2 s_1 &= \lambda s_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Az egyenletrendszer egyszerűsége miatt könnyen látható, hogy $\underline{s} \neq \underline{0}$ megoldása akkor és csak akkor van, ha $\lambda = 2$ vagy $\lambda = -2$ és minden olyan $\underline{s}$ megoldás, amelynek az i, j koordinátarendszerbeli koordinátái abszolútértékben azonosak. Tehát a T tenzornak két sajátértéke van:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = -2.$$

A λ_1 -hez tartozó sajátvektorok mind

$$\underline{s}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ alakúak,}$$

a λ_2 -höz tartozó sajátvektorok

$$\underline{s}_2 = d \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ alakúak, ahol}$$

c és d tetszőleges valós számok.

Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és az $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektor két lineárisan független sajátvektor.

Válasszuk ezeket bázisvektoroknak, akkor a T tenzor mátrixa a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ diagonál mátrix lesz.}$$

7.7. Tétel

Ha egy homogén lineáris térvektor transzformációnak van három, síkvektor transzformációnak két lineárisan független sajátvektora, akkor ezeket választva bázisnak, a tenzor mátrixa diagonálmátrix lesz.

A mátrix főátlójában levő elemek a sajátértékek:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

A tétel állítása - mint ahogy ezt a példában részleteztük - a fogalmak közvetlen következménye. ■

7.8. Feladatok

1. Mutassa meg, hogy a T homogén lineáris transzformáció nullvektorhoz nullvektort rendel.

2. Legyen T egy homogén lineáris transzformáció,

$$T \underline{a} = \underline{a}_1,$$

$$T \underline{b} = \underline{b}_1,$$

$$T \underline{c} = \underline{c}_1,$$

az $\underline{a}_1, \underline{b}_1, \underline{c}_1$ vektorok lineárisan függetlenek. Lehet-e a fentiekből egyértelműen következtetni az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineáris függetlenségére vagy összefüggő voltára?

II. KOMPLEX SZÁMOK ALGEBRÁJA

1. A KOMPLEX SZÁM FOGALMA, MŰVELETEK

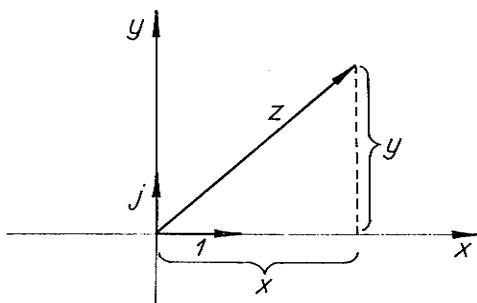
Az előző fejezetben értelmezett vektorműveletek közül a szorzásműveletek – skaláris és vektoriális egyaránt – bár jól használhatók voltak, több, a valós számok szorzásműveleténél megszokott tulajdonsággal nem rendelkeztek, többek között nem tették lehetővé osztás értelmezését a vektorok között. Ebben a fejezetben úgy fogunk műveleteket definiálni a síkvektorok halmazán, hogy a szorzás invertálható műveletté váljék. Ezáltal a síkvektorok az előbbi fejezetben értelmezett összeadással, skalárral szorzással és az új szorzásművelettel testet alkotnak, amelyet komplex számtestnek, elemeit pedig komplex számoknak nevezzük. A komplex számok jól használhatók a fizikában, főként az elektromosságban, de fontos szerepet játszanak az algebrai egyenletek megoldásában is.

Tekintsük egy sík összes vektorait. Ezt a síkot a továbbiakban komplex számsíknak fogjuk nevezni. Rögzítsünk egy derékszögű koordinátarendszert a síkon, és az egységnyi abszolútértékű bázisvektorokat az eddigiektől eltérően jelöljük 1 -gyel, ill. j -vel, a vektorokat aláhúzás nélkül betűkkel. Így minden vektorhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhető 1 és j egy lineáris kombinációja:

$$z = x \cdot 1 + y \cdot j,$$

vagy rövidebben:

$$z = x + yj$$



28. ábra

1.1. Definíció

Komplex számoknak nevezzük a síkvektorokat, ha közöttük a következő műveleteket értelmezzük:

Összeadást, kivonást és valós számmal szorzást úgy, mint ahogy azt vektoralgebrában definiáltuk (I.2.), szorzást pedig a vektoralgebrától eltérő következő módon:

A z_1 komplex szám z_2 komplex számmal való szorzatán értjük azt a z_3 komplex számot, amelynek abszolút értéke (a vektor hossza)

$$|z_3| = |z_1| \cdot |z_2|$$

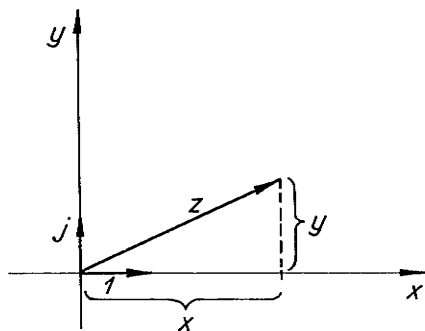
és amelynek az arkusza (az X tengely pozitív irányával bezárt előjeles szöge)

$$\text{arc } z_3 = \text{arc } z_1 + \text{arc } z_2$$

Elnevezések, jelölések, megjegyzések

Mivel minden valós szám az "1" vektornak konstansszorosaként megkapható, a komplex számok halmaza tartalmazza a valós számokat.

A j -t képzetes (imaginárius) egységnek nevezzük, a cj alakú komplex számokat (c valós szám) tiszta képzetes számoknak nevezzük és ennek megfelelően az X tengelyt valós (reális), az Y tengelyt képzetes (imaginárius) tengelynek nevezzük.



29. ábra

A z komplex szám $x + yj$ alakját algebrai alaknak, x -et a szám valós részének, y -t a szám képzetes részének nevezzük. Az $x = |z| \cos \varphi$ és $y = |z| \sin \varphi$ egyenlőségek felhasználásával nyerjük a komplex szám trigonometrikus alakját:

$$z = |z| (\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad \text{ahol } \varphi = \text{arccz}.$$

Megjegyezzük, hogy amíg a komplex szám valós és képzetes része és abszolútértéke is egyértelműen meghatározott, arccz nem egyértelmű, mivel $\varphi + 2k\pi$ $k = 0, \pm 1, \dots$ esetén szintén arkusza z -nek és nyilvánvaló, hogy a $z = 0$ komplex számnak nincs egyértelműen meghatározott arkusza.

1.2. Tétel

Az összeadás, kivonás és valós számmal szorzás műveletek tulajdonságai

Legyenek z, z_1, z_2, z_3 tetszőleges komplex számok, c, c_1 és c_2 valós számok. A

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$c_1 \cdot (c_2 z) = (c_1 \cdot c_2) z$$

$$(c_1 + c_2) z = c_1 z + c_2 z$$

$$c (z_1 + z_2) = c z_1 + c z_2$$

azonosságok fennállása, a műveletek azonos definíciója miatt következménye a vektoralgebra hasonló műveleti tulajdonságainak. ■

A komplex számok összegének különbségének és valós számszorzásának meghatározása algebrai alakban igen egyszerű (l. vektorok összeadása és kivonása koordinátás alakban). Ha

$$z_1 = x_1 + y_1 j$$

$$z_2 = x_2 + y_2 j$$

és c valós szám, akkor

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) j$$

és

$$c z_1 = c x_1 + c y_1 j.$$

1.3. Tételek

A szorzás művelet tulajdonságai

1. A szorzás kommutatív:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

ugyanis

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = |z_2| \cdot |z_1| = |z_2 \cdot z_1|$$

és

$$\begin{aligned} \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 = \arg z_2 + \arg z_1 = \\ &= \arg(z_2 \cdot z_1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. A szorzás asszociatív:

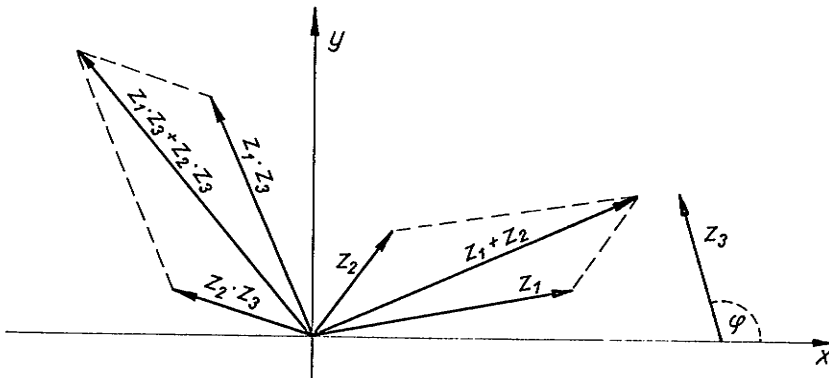
$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

Az olvasó a definíció alapján könnyen igazolhatja. ■

3. A szorzás disztributív:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

Mivel a valós számmal való szorzás definíciója és így tulajdonságai ugyanazok mint a vektoralgebrában, ezért elég $|z_3| = 1$ esetre bizonyítanunk 3-at.



30. ábra

Ha $|z_3| = 1$, akkor a z_3 komplex számmal való szorzás a szorzandó vektor $\varphi = \arg z_3$ -mal történő elforgatását eredményezi, és így

$$z = (z_1 + z_2) \cdot z_3 \quad \text{és} \quad z = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3,$$

mint állítottuk (l. 30. ábrát). ■

A komplex számok körében fennáll, - a valós számokkal egyezésben és a vektoralgebrától eltérően - hogy

1.4. Tétel

$$z_1 \cdot z_2 = 0$$

akkor és csak akkor áll fenn, ha legalább az egyik tényező nulla.

Bizonyítás:

a) Ha $|z_1| = 0$ v. $|z_2| = 0$, akkor

$$|z_1| \cdot |z_2| = 0 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = 0 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 0.$$

b) ha $z_1 \cdot z_2 = 0$, akkor $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 0$, tehát

z_1 és z_2 közül legalább az egyik nulla. ■

A szorzás inverze, az osztás

Ha $z_2 \neq 0$, akkor értelmezhető

$\frac{z_1}{z_2}$ a szokott módon, a

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1 \quad \text{egyenlőséggel.}$$

A szorzás definíciója alapján:

$$\arg \frac{z_1}{z_2} + \arg z_2 = \arg z_1$$

és

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| \cdot |z_2| = |z_1|.$$

Ezekből

$$\operatorname{arc} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{arc} z_1 - \operatorname{arc} z_2$$

és

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ következik. } \blacksquare$$

A műveletek elvégzését könnyíti a következő fogalom.

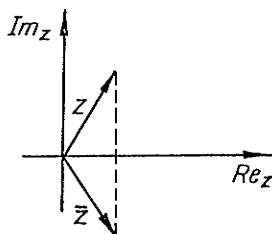
1.5. Definíció

A z komplex szám konjugáltján - jele $\bar{z}$ - értjük a

$$|\bar{z}| = |z|,$$

$$\operatorname{arc} \bar{z} = -\operatorname{arc} z$$

tulajdonságokkal rendelkező komplex számot.



31. ábra

A konjugált algebrai alakja

Legyen $z = x + yj$.

Megmutatjuk, hogy akkor $\bar{z} = x - yj$.

Ugyanis a

$$\operatorname{Re} \bar{z} = |\bar{z}| \cos \operatorname{arc} \bar{z}$$

$$\operatorname{Im} \bar{z} = |\bar{z}| \sin \operatorname{arc} \bar{z}$$

összefüggések felhasználásával, a definíció alapján

$$\operatorname{Re} \bar{z} = |z| \cos (-\operatorname{arc} z) = x$$

$$\operatorname{Im} \bar{z} = |z| \sin (-\operatorname{arc} z) = -y$$

adódik, mint állítottuk.

Megjegyzés:

A $\bar{z}$ vektor a z vektor valós tengelyre vonatkozó tükörképe.

A fenti definíció következménye, hogy

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

A szorzás és osztás trigonometrikus alakban végezhető el egyszerűbben, közvetlenül a definíció alapján, de algebrai alakban sem igényel sok számolást. Ez utóbbiról szólunk részletesebben:

Legyen

$$z_1 = x_1 + y_1 j,$$

$$z_2 = x_2 + y_2 j.$$

Figyelembe véve a szorzás disztributivitását és a definíció alapján adódó $j \cdot j = -1$ egyenlőséget

$$(\arg(j \cdot j) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi, \quad |j \cdot j| = |j| \cdot |j| = 1),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j (x_1 y_2 + y_1 x_2) \text{ adódik.}$$

A $\frac{z_1}{z_2}$ hányadost a következőképpen adhatjuk meg algebrai alakban, a

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

egyenlőség felhasználásával:

$$\frac{(x_1 + y_1 j)(x_2 - y_2 j)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Mivel a kettőnél több tényezőös szorzás értelmes, definiálhatjuk az egész kitevőjű hatványozást és annak inverzeként a gyökvonást.

1.6. Definíció

Egy z komplex szám n -edik hatványán (n természetes szám) a

$$z^n = z \cdot z \dots z \quad \text{szorzatot értjük.}$$

A szorzás definíciójából következik, hogy ha

$$z = r (\cos \varphi + j \sin \varphi), \text{ akkor}$$

$$z^n = r^n (\cos n \varphi + j \sin n \varphi).$$

Megjegyzés:

Ha $z \neq 0$, akkor definiálható z^{-n} , a

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

egyenlőséggel, mint a valós számok körében.

A következőkben megmutatjuk, hogy a hatványozás invertálható művelet.

1.7. Definíció

Egy z komplex szám n -edik gyökén (n természetes szám) az olyan $\sqrt[n]{z}$ számokat értjük, amelyekre fennáll, hogy

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z.$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges z -nek van n -edik gyöke, sőt több is.

1.8. Tétel

A $z = r (\cos \varphi + j \sin \varphi)$ komplex számnak n darab különböző n -edik gyöke van és ezek

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (1)$$

($k = 0, 1, \dots, n-1$) alakban előállíthatók.

Bizonyítás:

a) Először megmutatjuk, hogy (1) n -edik hatványa bármely egész k esetén z .

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = r [\cos (\varphi + 2 k \pi) + j \sin (\varphi + 2 k \pi)] = r (\cos \varphi + j \sin \varphi) = z.$$

b) Ha k helyébe 0 -tól $(n-1)$ -ig helyettesítjük az egész számokat, a kapott gyökök mind különbözőek, ugyanis abszolút értékeik ugyan azonosak; de arkuszaik különbözőek és nem 2π vagy ennek többszörösében különböznek.

Az $\sqrt[n]{z}$ értékek arkuszai:

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \dots \quad \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}$$

c) Még meg kell mutatni, hogy a felsoroltaktól különböző érték nincs. Az nyilvánvaló - a szorzás definíciója miatt - hogy $\sqrt[n]{z}$ csak $\sqrt[n]{r} (\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n})$ alakú lehet, és mivel az abszolútértékek azonosak, elég az arkuszokat vizsgálni.

Legyen $\text{arc } z_1 = \frac{\varphi + 2k_1\pi}{n}$, ahol $k_1 \geq n$. Elosztva k_1 -et n -nel $k_1 = h \cdot n + m$ alakban írható, ahol h, m egész és $0 \leq m < n$. Így $\text{arc } z_1 = \frac{\varphi}{n} + 2h\pi + \frac{2m\pi}{n}$ és z_1 megegyezik a $\frac{\varphi + 2m\pi}{n}$ arkuszu, a felsoroltak között szereplő komplex számmal. ■

Megjegyzés:

1. Egy z komplex szám n -edik gyökei egy $\sqrt[n]{|z|}$ sugaru körbe irt szabályos n -szöget határoznak meg.
2. A komplex számok körében a gyökvonás - mint láttuk - korlátlanul elvégezhető.

Igy a valós számkör kibővítése azzal a haszonnal is jár, hogy a komplex számkörben negatív valós számnak is van páros kitevőjű gyöke.

Egységgyökök

1.9. Definíció

$\sqrt[n]{1}$ értékeit n -edik egység-gyököknek nevezzük, $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + j \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Az n -edik egységgyökök között mindig szerepel az 1, így mivel a gyökök szabályos n -szöget alkotnak, minden nem valós egységgyök konjugáltja is egységgyök.

Példaként határozzuk meg a harmadik egységgyököket.

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{2k\pi}{3} + j \sin \frac{2k\pi}{3}; \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$z_1 = 1; \quad z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A példában

$$z_2^2 = z_3 \quad \text{és}$$

$$z_2^3 = z_1$$

Felmerül a kérdés, hogy igaz-e általában, hogy van az egységgyökök között olyan, amelynek hatványaiként a többiek felírhatók.

A válasz: van ilyen egységgyök, a

$$z_1 = \frac{\cos 2\pi}{n} + j \frac{\sin 2\pi}{n} \quad \text{ilyen, ugyanis}$$

hatványaként bármely

$$z_k = \frac{\cos 2k\pi}{n} + j \frac{\sin 2k\pi}{n} \quad \text{felírható:}$$

$$z_k = z_1^k \quad \text{alakban.}$$

A komplex szám exponenciális alakja

Az egyváltozós valósfüggvények körében megismertük az

$$f(x) = e^x$$

exponenciális függvényt.

Most kiterjesztjük értelmezési tartományát a tiszta imaginárius számokra, majd annak felhasználásával megismerjük a komplex szám egy újabb, jól használható alakját.

1.10. Definíció

Tetszőleges t valós szám esetén értelmezzük e^{jt} -t a következő egyenlőséggel, az ún. Euler formulával:

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t$$

Tudjuk, hogy az exponenciális függvény valós kitevők esetén a következő alapvető tulajdonsággal rendelkezik:

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$$

Megmutatjuk, hogy ezt a tulajdonságot az 1.10 definíció változatlanul hagyja.

$$e^{jt_1 + jt_2} = e^{j(t_1 + t_2)} = \cos(t_1 + t_2) + j \sin(t_1 + t_2) \quad (1)$$

(1)-ben a jobb oldal nem más, mint az egység abszolútértékű t_1 arkuszu és az egység abszolútértékű t_2 arkuszu komplex számok szorzata, vagyis

$$(\cos t_1 + j \sin t_1) \cdot (\cos t_2 + j \sin t_2),$$

ami az Euler formula szerint $e^{jt_1} \cdot e^{jt_2}$. Tehát valóban fennáll az

$$e^{jt_1 + jt_2} = e^{jt_1} \cdot e^{jt_2}$$

egyenlőség. ■

Az Euler-formula felhasználásával az $r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ komplex szám $re^{j\varphi}$ alakban írható.

1.11. Definíció

A z komplex szám

$$|z| e^{j \arctan z}$$

exponenciális alaknak nevezzük.

A szorzás, osztás, hatványozás és gyökvonás - vagyis a trigonometrikus alakban jól végezhető műveletek - nyilván egyszerűen végezhetők exponenciális alakban:

Legyen

$$z_1 = r_1 e^{j\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{j\varphi_2} \quad \text{és} \quad z = r e^{j\varphi}.$$

Ekkor

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} ;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (\text{ha } z_2 \neq 0) ;$$

$$z^n = r^n e^{jn\varphi} \quad \text{és}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{j(\varphi + 2k\pi)}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

2. KOMPLEX EGYÜTTHATÓS POLINOMOK

A komplex számtest azon tulajdonsága, hogy benne a gyökvonás korlátlanul elvégezhető, azt is eredményezi, hogy minden komplex együtthatós másodfoku egyenletnek van megoldása és a gyökök száma pontosan kettő (ezek lehetnek egyenlők is).

Míg a fenti állítás a megoldóképletből közvetlenül kiolvasható, a magasabb fokú polinomok gyökeire vonatkozó hasonló állítás már csak sokkal erősebb, komplex függvénytanai eszközök felhasználásával bizonyítható. Ezért csak a nagyon fontos, az algebra alaptétele néven ismeretes tétel közlésére szorítkozunk.

2.1. Tétel

(Az algebra alaptétele) Minden, legalább első fokú komplex együtthatós polinomnak van legalább egy komplex gyöke.

Az algebra alaptételének egyszerűen igazolható következménye, hogy a

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

(az együtthatók komplex számok, $a_0 \neq 0$) n -ed fokú polinom a következő alakban írható:

$$P_n(x) = a_0 (x-x_1)^{n_1} \cdot (x-x_2)^{n_2} \dots (x-x_k)^{n_k} ,$$

ahol $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ és ebből következik, hogy gyökei:

$$\begin{array}{lll} x_1 & n_1 & \text{multiplicitással} \\ x_2 \dots & n_2 & " \\ x_k & n_k & " \end{array}$$

vagyis a multiplicitást figyelembe véve $P_n(x)$ -nek n gyöke van. Ennek bizonyítása érdekében először belátjuk, hogy

2.2. Tétel

x_1 akkor és csak akkor gyöke a $P_n(x)$ polinomnak, ha

$$P_n(x) = (x - x_1) P_{n-1}(x) \quad \text{alakban írható.}$$

Bizonyítás:

a) Ha $P_n(x)$ fenti alakú, akkor

$$P_n(x_1) = 0 \cdot P_{n-1}(x_1) = 0.$$

b) Ha $P_n(x_1) = 0$, akkor $P_n(x) = P_n(x) - P_n(x_1)$ és ezt részletesebben írva:

$$P_n(x) = a_0(x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(x - x_1)$$

A jobb oldal minden tagjából kiemelhető az $x - x_1$ tényező, ezt elvégezve adódik az állítás. ■

A 2.2. Tétel közvetlen következménye a

2.3. Tétel

Ha $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}$ és $a_0 \neq 0$, vagyis $P_n(x)$ pontosan ennedfoku polinom, akkor

$$P_n(x) = a_0(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

un. gyöktényezős alakba írható, ahol $x_1, \dots, x_n$ a $P_n(x)$ polinom gyökei.

Mivel egy gyöktényező többször is szerepelhet a felbontásban, az egyenlő gyöktényezőket összeszorozva adódik a

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_k)^{n_k} \text{ alak, amelyben}$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

A gyöktényezősség alak egyértelműsége a 2.4. Tétel következménye.

2.4. Tétel

$$A \quad P_n(x) = a_0 x^n + \dots + a_n \quad \text{és } a$$

$$Q_n(x) = b_0 x^n + \dots + b_n \quad \text{polinomok}$$

csak úgy lehetnek egyenlők, ha $a_k = b_k$ ($k = 0, \dots, n$).

Bizonyítás:

Ha $P_n(x) = Q_n(x)$ minden x komplex szám esetén, akkor a $P_n(x) - Q_n(x)$ legfeljebb n fokszámú polinomnak fokszámánál több gyöke van, ami csak akkor lehetséges, ha $P_n(x) - Q_n(x)$ nulladfokú polinom, vagyis $a_k = b_k$ ($k = 0, \dots, n$). ■

A következőkben általánosítani fogjuk a másodfokú polinomokra ismert gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket.

2.5. Tétel

(Összefüggés egy polinom gyökei és együtthatói között)

Legyen

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (1)$$

Ez az alak x^n együtthatójával osztva mindig elérhető és gyökei azonosak az eredetivel.

Ha $P_n(x)$ gyökei: $x_1, x_2, \dots, x_n$ (köztük lehetnek egyezők is), akkor $P_n(x)$ a következő alakba írható:

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (2)$$

(1) és (2) összehasonlításából a következő képletek adódnak:

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$a_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$$

...

$$a_k = (-1)^k (x_1 \dots x_k + x_1 x_3 \dots x_{k+1} + \dots + x_2 \dots x_{k+1})$$

$$\dots$$

$$a_n = (-1)^n a_1 a_2 \dots a_n \quad \blacksquare$$

Felhasználva az algebra alaptételét, a továbbiakban a valós együtthatós polinomok egy fontos tulajdonságáról lesz szó.

2.6. Tétel

Ha a valós együtthatós $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ polinomnak gyöke a z komplex szám, akkor $\bar{z}$ is gyök.

Bizonyítás:

Felhasználjuk, hogy az összeadás, a szorzás és a hatványozás sorrendje felcserélhető a konjugáltképzéssel. Így

$$P_n(\bar{z}) = a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + a_n = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \overline{P_n(z)}$$

Mivel $P_n(z) = 0$, $P_n(\bar{z}) = 0$ is fennáll. Ez volt az állítás.

Megjegyzés:

$\bar{a}_k = a_k$ ($k=0, 1, \dots, n$) esetén, mert az együtthatók valósak.

III. MÁTRIX ALGEBRA

1. A MÁTRIX FOGALMA

A jegyzet I. 7. pontjában a lineáris transzformációkkal kapcsolatban tapasztaltuk, hogy a bázisvektorok transzformáltjai meghatározzák a tér minden vektorának a képét. A képvektorok koordinátáinak meghatározásához hasznos segédeszköznek bizonyult, hogy a bázisvektorok képeinek koordinátáit egy téglalap alakú táblázatba foglaltuk. Lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságára és a megoldások számára vonatkozó vizsgálatokat, a megoldások meghatározását is egyszerűsíti az együtthatókból alkotott elemséma. Tekintsük például a következő lineáris egyenletrendszert:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

Ezt az n ismeretlent tartalmazó, m egyenletből álló egyenletrendszert egyértelműen jellemzi a következő elrendezés:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Az említetteken kívül, hasonló elrendezések számos egyéb területen is használatosak. Ezért a továbbiakban az ilyen téglalap alakú elrendezésekkel és a közöttük értelmezhető műveletekkel foglalkozunk.

1.1. Definíció

A valós vagy komplex számok

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

elrendezését mátrixnak nevezzük.

Azt mondjuk, hogy a fenti mátrix $m \times n$ -es méretű, ami azt jelenti, hogy m sora és n oszlopa van.

Jelölések, elnevezések

A mátrixokat általában kétszer aláhuzott nagybetűvel jelöljük:

A, B, ...
Az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mátrix}$$

rövidebb írásmódja:

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) ; i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n$$

i a sorindex, j az oszlopindex.

Ha $m = n$, akkor a mátrixot n -edrendű négyzetes (kvadratikus) mátrixnak nevezzük.

Az egy oszlopból álló mátrixot oszlopmátrixnak (vagy oszlopvektornak) nevezzük és

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{b}}, \quad \text{vagy } \underline{\underline{b}} \text{ módon jelöljük.}$$

Hasonlóan az egy sorból álló mátrixot sormátrixnak (vagy sorvektornak) nevezzük, és

$(b_1 \dots b_n) = \underline{b'}$, vagy $\underline{b'}$ módon jelöljük.

Az $\underline{A} = (a_{ij})$ $i=1, 2, \dots, n$ és $j=1, 2, \dots, n$ kvadrátikus mátrixot diagonálmátrixnak nevezzük, ha minden $i \neq j$ esetén

$$a_{ij} = 0.$$

1.2. Definíció

A sorok és oszlopok felcserélésével nyert mátrixot az eredeti mátrix transzponáltjának nevezzük.

$\underline{A}$ transzponáltjának jele: $\underline{A'}$

Megjegyzés:

Az 1.2. Definíció indokolja a sormátrix szokásos jelölését.

1.3. Definíció

Ha

$$\underline{A} = \underline{A'} \quad \text{akkor}$$

$\underline{A}$ -t szimmetrikus mátrixnak nevezzük (l. 2.1. Definíciót).

Ha

$$\underline{A} = -\underline{A'} \quad \text{akkor}$$

$\underline{A}$ -t antiszimmetrikus mátrixnak nevezzük (l. 2.4. Definíciót).

2. MŰVELETEK MÁTRIXOKKAL

Mielőtt műveleteket értelmezünk a mátrixok között, meg kell mondanunk, hogy mikor nevezünk két mátrixot egyenlőnek.

2.1. Definíció

Az azonos méretű - megegyező sor- és oszlopszámu -

$$\underline{A} = (a_{ij}) \quad \text{és} \quad \underline{B} = (b_{ij})$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

mátrixok egyenlők,

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$$

ha

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \text{ és} \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Az összeadás műveletét azonos méretű mátrixok között definiáljuk.

2.2. Definíció

Az $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ és $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) mátrixok összegén azt az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixszal azonos méretű

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$$

mátrixot értjük, amelynek elemei

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Például:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy a mátrix-összeadás rendelkezik az összeadás eddigiekben megszokott tulajdonságaival:

2.3. Tételek

A mátrix-összeadás kommutatív és asszociatív művelet:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} &= \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}} \\ (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) \end{aligned}$$

Bármely $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz hozzáadva egy vele azonos méretű, csupán nulla-elemből álló mátrixot, összegnek az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot kapjuk. Ezért indokolt a

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ mátrixot}$$

nullmátrixnak (vagy zérusmátrixnak) nevezni.

Mátrix szorzása számmal:

2.4. Definíció

Az $\underline{A} = (a_{ij})$ mátrix c -szeresén a

$c \cdot \underline{A} = (c \cdot a_{ij})$ mátrixot értjük.

A számmal-szorzás is rendelkezik a szokott tulajdonságokkal:

2.5. Tételek

A mátrix szorzása számmal asszociatív művelet:

$$c_1 (c_2 \underline{A}) = (c_1 \cdot c_2) \underline{A}$$

A mátrix összeadás és számmal-szorzás műveletek között érvényes mindkét disztributív azonosság:

$$(c_1 + c_2) \underline{A} = c_1 \underline{A} + c_2 \underline{A}$$

és

$$c (\underline{A} + \underline{B}) = c \underline{A} + c \underline{B}$$

A számmal való szorzás műveletének felhasználásával értelmezzük az azonos méretű mátrixok kivonását:

2.6. Definíció

$$\underline{A} - \underline{B} = \underline{A} + (-1) \cdot \underline{B}$$

Az 1.7. fejezetben, praktikus megfontolások alapján definiáltuk 3×3 -as mátrix szorzatát 3×1 -es mátrixszal (oszlopmátrixszal) a következő módon:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

Ennek közvetlen általánosításaként értelmezzük tetszőleges $\underline{\underline{A}}$ $m \times n$ -es mátrixnak oszlopmátrixszal való szorzatát. A fenti módon csak akkor végezhető el a szorzás, ha az oszlopmátrix sorainak a száma megegyezik az $\underline{\underline{A}}$ mátrix oszlopainak a számával.

2.7. Definíció

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Végül további általánosításként értelmezzük az $\underline{\underline{A}}$ mátrix $\underline{\underline{B}}$ mátrixszal való szorzatát oly módon, hogy a szorzat mátrix oszlopait az $\underline{\underline{A}}$ mátrix $\underline{\underline{B}}$ oszlopaival való szorzatai adják. Ekkor nyilvánvaló, hogy egy $m \times n$ méretű mátrixot $n \times p$ méretű mátrixszal lehet megszorozni.

2.8. Definíció

Az

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) \quad (i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n)$$

$$\underline{\underline{B}} = (b_{jk}) \quad (k=1, \dots, p)$$

mátrixok szorzatán azt az

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$$

mátrixot értjük, amelynek elemei:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}.$$

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A mátrix szorzás tulajdonságai már nem mindenben egyeznek a valós számok szorzásának tulajdonságaival:

2.9. Tételek

1. A szorzás nem kommutatív

Bizonyítás:

Legyen pl.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

ekkor

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 10 \end{pmatrix},$$

tehát

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy a tényezőket felcserélve a szorzás többnyire már el sem végezhető.

2. A szorzás asszociatív művelet

Az $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{C}}$ mátrixok legyenek olyan méretűek, hogy $\underline{\underline{A}}$ szorozható legyen $\underline{\underline{B}}$ -vel és $\underline{\underline{B}}$ szorozható legyen $\underline{\underline{C}}$ -vel.

Ekkor

$$(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{B}} \underline{\underline{C}})$$

Bizonyítás:

Legyen

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) \quad m \times n\text{-es mátrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = (b_{jk}) \quad n \times r\text{-es mátrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = (c_{kt}) \quad r \times s\text{-es mátrix}$$

Az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ szorzat egy $m \times r$ méretű mátrix, amelynek i -edik sorában a k -adik elem a következő:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad k = 1, 2, \dots, r \quad \text{és} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Ennek felhasználásával az $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{C}}$ mátrix i -edik sorának t -edik elemét a következő összeg adja:

$$\sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kt}.$$

Ezt átalakítva:

$$\sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kt} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^r b_{jk} c_{kt} \right) a_{ij},$$

de az utóbbi összeg éppen az $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} \underline{\underline{C}})$ mátrix i -edik sorának t -edik eleme. ■

3. A szorzás disztributív

Ha az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ és az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}$ szorzások elvégezhetők és a szorzatok összeadhatók, akkor

$$\underline{\underline{A}} (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}$$

A bizonyítást az olvasóra bizzuk. ■

A szorzás definíciójából következik, hogy ha egy $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrixot megszorozunk egy, a méretének megfelelő

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad \text{elemű}$$

$$\underline{\underline{E}} = (e_{ij}) \quad \text{kvadratikus mátrixszal, akkor}$$

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$$

Ezért indokolt a következő

2.10. Definíció

$$\text{Az } \underline{\underline{E}} = (e_{ij}) \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n);$$

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

kvadratikus mátrixot egység mátrixnak nevezzük.

A valós és komplex számok algebrája és a mátrix-algebra műveletei közötti analógiát vizsgálva felmerül a kérdés, értelmezhető-e recip-

rok képzés a mátrixok között. Milyen feltételek mellett és hogyan oldható meg adott $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén az

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{X}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}} \quad \text{mátrixegyenletek?}$$

Az nyilvánvaló, hogy olyan mátrix, amellyel $\underline{\underline{A}}$ -t jobbról és balról is szorozva ugyanazt az $\underline{\underline{E}}$ -t kapjuk, csak akkor lehet, ha $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus.

2.11. Definíció

Az $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrixot invertálhatónak nevezzük, ha van olyan $\underline{\underline{X}}$ mátrix, amely az

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} &= \underline{\underline{E}} & \text{és} \\ \underline{\underline{X}} \underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{E}} & \text{egyenletet kielégíti.} \end{aligned}$$

Az $\underline{\underline{X}}$ mátrixot $\underline{\underline{A}}$ inverzének nevezzük.

2.12. Tétel

Ha az $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrixnak van inverze, akkor az egyértelmű.

Bizonyítás:

Legyen $\underline{\underline{X}}_1$ és $\underline{\underline{X}}_2$ $\underline{\underline{A}}$ inverze, ekkor

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{E}}.$$

Szorozzunk balról $\underline{\underline{X}}_2$ -vel

$$\underline{\underline{X}}_2 (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}}_1) = \underline{\underline{X}}_2 \underline{\underline{E}}$$

Az asszociatív azonosságot felhasználva:

$$(\underline{\underline{X}}_2 \underline{\underline{A}}) \underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{X}}_2 \underline{\underline{E}} \quad \text{és így}$$

$$\underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{X}}_2 \quad \blacksquare$$

Jelölés:

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverzét $\underline{\underline{A}}^{-1}$ -gyel jelöljük.

3. A MÁTRIXOK ELEMENZI TRANSZFORMÁCIÓI

1. Egy mátrix két sorának, ill. oszlopának felcserélése.

3. Egy mátrix valamely sora, ill. oszlopa számszorosának a mátrix egy másik sorához, ill. oszlopához való hozzáadása. Az 1., 2., 3. alatt felsorolt átalakításokat nevezzük a mátrix elemi sor-, ill. oszloptranzformációinak.

3.1. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{és}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad n \times n\text{-es}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} & \underline{i} & & \underline{j} & & \\ a_{11} \dots & a_{1i} \dots & a_{1j} \dots & a_{1n} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} \dots & a_{mi} \dots & a_{mj} \dots & a_{mn} & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{1} \dots \underline{i} \dots \underline{j} \dots \underline{n} \\ 1 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \dots 1 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 \dots 1 \dots 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \dots 0 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{1} \\ \dots \\ \underline{i} \\ \dots \\ \underline{j} \\ \dots \\ \underline{n} \end{pmatrix}$$

66

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & \overset{i}{\downarrow} a_{1j} \dots & \overset{j}{\downarrow} a_{1i} \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \dots & a_{mj} \dots & a_{mi} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

adódik, mint állítottuk.

3.2. Készítsünk olyan M mátrixot, amellyel az $m \times n$ -es A-t megszorozva az i . sora c -vel szorzódik.

A keresett $\underline{\underline{M}}$ mátrix az $m \times n$ -es $\underline{\underline{E}}$ mátrixból úgy jön létre, hogy annak i . sorát c -vel megszorozzuk. Az $\underline{\underline{M}}$ mátrixszal $\underline{\underline{A}}$ -t balról megszorozva létrejön a kívánt transzformáció.

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \overset{1}{\underbrace{\quad}} & \dots & \overset{i}{\underbrace{\quad}} & \dots & \overset{n}{\underbrace{\quad}} \\ 1 & 0 \dots & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{i}{\underbrace{\quad}} & 0 & 0 \dots & c \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{n}{\underbrace{\quad}} & 0 & 0 \dots & 0 \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{mint állítottuk.} \blacksquare$$

3.3. Készítsünk olyan $\underline{D}$ mátrixot, amellyel az $m \times n$ -es $\underline{A}$ mátrixot jobbról szorozva i . oszlopához hozzáadódik a j . oszlop c -szere-se.

A keresett $\underline{D}$ mátrix az $n \times n$ -es $\underline{E}$ mátrixból úgy jön létre, hogy annak i . oszlopához hozzáadjuk j . oszlopának c -szeresét. Az egyszerűbb jelölés miatt $i = 1$; $j = 2$ esetre végezzük el a szorzást és mutatjuk meg ezzel az állítás helyességét.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} a_{11} + c a_{21} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + c a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + c a_{m2} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ mint állítottuk. } \blacksquare$$

4. MÁTRIXOK PARTICIONÁLÁSA, HIPERMÁTRIXOK

A mátrix fogalmát általánosítjuk a továbbiakban. Először olyan mátrixokkal foglalkozunk, amelyeknek elemei is mátrixok. Az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ mátrixot,}$$

ha az oszlopait - amelyek mindegyike egy-egy $m \times 1$ -es ún. oszlop-mátrix -

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ módon jelöljük, a következő tömörebb alakba írhatjuk:

$$(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$$

Az így nyert elrendezés elemei azonban már nem számok, hanem maguk is mátrixok. Ezt a mátrix elemű mátrixot hipermátrixnak nevezzük és azt mondjuk, hogy az $\underline{A}$ mátrixot hipermátrixszá particionáltuk.

4.1. Definíció

Az

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \dots & \underline{A}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \underline{A}_{m1} & \dots & \underline{A}_{mn} \end{pmatrix}$$

elrendezést, amelynek $\underline{A}_{ij}$ elemei ($i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, m$) mátrixok és az egy sorban levő mátrixok sorainak, illetve az egy oszlopban állók oszlopainak a száma megegyezik, hipermátrixnak nevezzük.

Az $\underline{A}_{ij}$ mátrixok természetesen lehetnek sor- vagy oszlopmátrixok is, sőt speciálisan egyelemű mátrixok, azaz számok is.

Particionáljuk hipermátrixszá az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ mátrixot.}$$

$\underline{A}$ -ból több hipermátrixot készíthetünk, ezek közül néhányat felírunk:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right); \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

A leggyakrabban ez utóbbi két alakot használjuk, vagyis a mátrixot oszlopmátrixainak sormátrixává, illetve a sormátrixainak oszlopmátrixává particionáljuk.

Megjegyzés:

1. Mint már a bevezetőben tettük, az oszlopmátrixot

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \underline{a}, \quad \text{vagy} \quad \underline{a}$$

a sormátrixot

$$(b_1 \dots b_n) = \underline{b}' \quad \text{vagy} \quad \underline{b}'$$

módon jelöljük, nem véletlenül emlékeztetve a vektorok jelölésére. (Lásd a IV.1.3. példákat.)

2. Az eredeti mátrix és a particionált alakok között különbséget teszünk. Ezt indokolja például, hogy a hipermátrixok elemei között a szorzás már nem kommutatív, ellentétben a mátrixokéval.
3. A hipermátrix fogalmat lehet tovább általánosítani, megengedve, hogy az elemek hipermátrixok legyenek.

4.2. Műveletek hipermátrixok között

1. Összeadás

Két hipermátrix összeadható, ha sor- és oszlopszámuk azonos és megfelelő elemeik összeadhatók.

Igy az

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix}$$

hipermátrixok összeadhatók, ha az

$$A_{ij} \text{ és } B_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix} \quad \text{mátrixok}$$

összeadhatók és a két hipermátrix összege az

$$\begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \dots & A_{1n} + B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} + B_{m1} & \dots & A_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{hipermátrix.}$$

Az összeadás módjából következik, hogy ha a hipermátrixok összeadhatók, akkor a belőlük nyert mátrixok is összeadhatók és összegük a hipermátrixok összegéből nyert mátrix.

Például:

$$(a_{11} \dots a_{1n}) + (b_{11} \dots b_{1n})$$

elvégezhető, ha az

$$a_{1i} \text{ és } b_{1i}$$

oszlopmátrixok sorainak száma azonos ($i=1, 2, \dots, n$), és akkor az összeg:

$$(a_{11} + b_{11} \dots a_{1n} + b_{1n}).$$

2. Szorzás

Két hipermátrix összeszorozható, ha a bal oldali tényező oszlop-száma megegyezik a jobb oldali sorszámával és a megfelelő elemek összeszorozhatók.

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \dots & \underline{A}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \underline{A}_{m1} & \dots & \underline{A}_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{B}_{11} & \dots & \underline{B}_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \underline{B}_{n1} & \dots & \underline{B}_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} \underline{B}_{11} + \dots + \underline{A}_{1n} \underline{B}_{n1} & \dots & \underline{A}_{11} \underline{B}_{1k} + \dots + \underline{A}_{1n} \underline{B}_{nk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \underline{A}_{m1} \underline{B}_{11} + \dots + \underline{A}_{mn} \underline{B}_{n1} & \dots & \underline{A}_{m1} \underline{B}_{1k} + \dots + \underline{A}_{mn} \underline{B}_{nk} \end{pmatrix}$$

Például:

ha az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixok összeszorozhatók

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n) \begin{pmatrix} \underline{b}'_1 \\ \vdots \\ \underline{b}'_n \end{pmatrix} = \underline{a}_1 \underline{b}'_1 + \dots + \underline{a}_n \underline{b}'_n$$

5. KITŰZÖTT FELADATOK

1. Konstruáljon tetszőleges $\underline{A}$ mátrixhoz olyan mátrixot, amellyel az $\underline{A}$ mátrixot megszorozva, annak i . és j . sora felcserélődik.

2. Készítsen olyan mátrixot, amellyel egy $\underline{A}$ mátrixot megszorozva annak i . sorához hozzáadódik a j . sor c -szerese.

3. Mutassa meg, hogy van olyan $\underline{A} \neq \underline{0}$ négyzetes mátrix, amelyre

$$\underline{A}^k = \underline{0} \quad (k > 0, \text{ egész}).$$

Megjegyzés:

$$\underline{A}^k = \underline{A} \cdot \overset{1}{\underline{A}} \cdot \overset{2}{\underline{A}} \cdot \dots \cdot \overset{k}{\underline{A}}.$$

4. Mutassa meg, hogy

$$(\underline{A} + \underline{B})' = \underline{A}' + \underline{B}'$$

és

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})' = \underline{B}' \cdot \underline{A}'$$

5. Mutassa meg, hogy

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}$$

IV. VEKTORTEREK

1. A VEKTORTÉR FOGALMA

E jegyzet I. fejezetében a térvektorokkal foglalkoztunk és közöttük több műveletet értelmeztünk. Vegyük most jobban szemügyre ezek közül az összeadást és a számmal szorzást. Mindkét műveletet korlátlanul és egyértelműen lehetett elvégezni a vektorok halmazában, másrészt az összeadás és a számmal szorzás rendelkezett a valós számok megfelelő műveleteinél megszokott tulajdonságokkal a kommutativitással, az asszociativitással és a disztributivitással. A matematika számos területén találkozunk olyan objektumokkal, amelyek között fentieknek megfelelő, velük azonos tulajdonságu műveletek szerepelnek. Álljon itt csupán példaként az n -ed rendű mátrixok halmaza a mátrixösszeadás és számmal szorzás műveletekkel, és az egy intervallumon folytonos függvények halmaza, a szokott függvényösszeadás és számmal szorzás műveletekkel. Kézenfekvő gondolat, hogy ezeket a műveletekkel ellátott halmazokat úgy is érdemes vizsgálni, hogy elvonatkoztatunk a halmaz elemeinek konkrét tulajdonságaitól, ezzel elérve azt, hogy eredményeink minden olyan halmazra érvényesek legyenek, amely a fenti tulajdonságu műveletekkel rendelkezik. Az így kapott matematikai modellt – tehát egy halmazt, amelynek egyedi konkrét tulajdonságait figyelmen kívül hagyjuk és csak az elemei között értelmezett műveleteket és azok tulajdonságait tekintjük – algebrai strukturának nevezzük. Az absztrakt algebra ilyen algebrai strukturák vizsgálatával foglalkozik. A fenti példákban szereplő algebrai strukturát vektortérnek nevezzük. Az algebrainak a vektorterekkel, euklideszi terekkel, ezek operátoraival foglalkozó ága a lineáris algebra, amelyet a jegyzet további része tartalmaz. A lineáris algebra igen széleskörűen alkalmazható, többek között a differenciálegyenletek, integrálegyenletek, potenciálelmélet területén.

1.1. Definíció

Legyen K a valós vagy komplex számtest. A V halmazt a K számtest feletti vektortérnek nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek

- I. V elemei – az úgynevezett vektorok – között értelmezve van egy összeadásnak nevezett művelet a következő tulajdonságokkal:

1. V bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ eleméhez egyértelműen tartozik egy

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in V \text{ vektor}$$

2. Az összeadás kommutatív:

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$$

3. Az összeadás asszociatív:

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$$

4. V -nek van un. nulleleme:

Van $\underline{0} \in V$, hogy bármely $\underline{v} \in V$ -re

$$\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$$

5. V bármely elemének van ellentettje (additív inverze):

Bármely $\underline{v} \in V$ -hez van $-\underline{v}$, amelyre

$$\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$$

- II. A K elemei - az úgynevezett skalárok - és a V elemei között értelmezett egy művelet, amelyet skalárral szorzásnak nevezünk, a következő tulajdonságokkal:

1. Bármely $\underline{v} \in V$ és $c \in K$ -hoz egyértelműen tartozik egy

$$c \cdot \underline{v} \in V \text{ vektor}$$

2. A skalárral szorzás asszociatív:

$$\underline{v} \in V, \quad c_1, c_2 \in K$$

$$(c_1 \cdot c_2) \cdot \underline{v} = c_1 \cdot (c_2 \cdot \underline{v})$$

3. Fennáll a disztributivitás:

$$c, c_1, c_2 \in K; \quad \underline{v}, \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$$

$$a) \quad c(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = c \underline{v}_1 + c \underline{v}_2$$

$$b) \quad (c_1 + c_2) \underline{v} = c_1 \underline{v} + c_2 \underline{v}$$

4. Egységgel szorozva a vektort, nem változik:

$$1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$$

Megjegyzés:

A fenti axiómákkal - un. axiómarendszerrel - definiált vektorteret szokás lineáris térnek is, lineáris halmaznak is nevezni.

Az axiómák néhány egyszerű következménye

1. A V vektortérnek egy nulleleme van.

Bizonyítás:

Legyen $\underline{0}_1$ és $\underline{0}_2$ nulleleme V -nek.

$$\underline{0}_1 + \underline{0}_2 = \underline{0}_1, \text{ mert } \underline{0}_2 \text{ nullelem,}$$

$$\underline{0}_2 + \underline{0}_1 = \underline{0}_2, \text{ mert } \underline{0}_1 \text{ nullelem.}$$

Fentiekből az összeadás egyértelműségét és a kommutativitást felhasználva következik, hogy

$$\underline{0}_1 = \underline{0}_2 \quad \blacksquare$$

2. A nullvektor és a nulla skalár rendelkezik a következő két megszokott tulajdonsággal:

a) tetszőleges $c \in K$ esetén

$$c \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

b) tetszőleges $\underline{v} \in V$ esetén

$$0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

Bizonyítás:

a) $c\underline{0} + (-c\underline{0}) = \underline{0}$, így

$$\underline{0} = c(\underline{0} + \underline{0}) + (-c\underline{0}) = c\underline{0} + \underbrace{c\underline{0} + (-c\underline{0})}_{\underline{0}},$$

$$\text{tehát} \quad c\underline{0} = \underline{0}$$

b) $0\underline{v} + (-0\underline{v}) = \underline{0}$, így

$$\underline{0} = (0 + 0) \underline{v} + (-0\underline{v}) = 0\underline{v} + \underbrace{0\underline{v} + (-0\underline{v})}_{\underline{0}},$$

$$\text{tehát} \quad 0\underline{v} = \underline{0}$$

3. Az additív inverz egyértelmű

Bizonyítás:

Legyen $\underline{v}$ inverze $-\underline{v}_1$ és $-\underline{v}_2$.

$$\text{Ekkor } -\underline{v}_1 + \underline{v} = \underline{0} \quad (1)$$

$$\underline{v} + (-\underline{v}_2) = \underline{0} \quad (2)$$

(1) mindkét oldalához adjuk hozzá $-\underline{v}_2$ -t:

$$(-\underline{v}_1 + \underline{v}) + (-\underline{v}_2) = -\underline{v}_2 \quad (3)$$

(3)-ból az asszociativitást és (2)-t felhasználva következik, hogy

$$-\underline{v}_1 = -\underline{v}_2 \quad \blacksquare$$

Megjegyzés:

Az additív inverz segítségével értelmezhető a kivonás művelet is.

1.2. Definíció

$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ A két vektor különbsége:

$$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{v}_1 + (-\underline{v}_2).$$

Nézzünk néhány konkrét példát vektorterekre:

1.3. Példák

1. K : a valós számok halmaza

V : a valós számokból álló rendezett számnemesek halmaza.

V vektortér K felett, ha a következőképpen definiáljuk a műveleteket:

Az összeadás:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in V$$

A számmal szorzás:

$$c \cdot v_1 = \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ \vdots \\ c \cdot x_n \end{pmatrix} \in V$$

Az olvasó ellenőrizze, hogy a többi definiáló axiómák is teljesülnek.

2. A valós együtthatós polinomok a valós számtest felett vektorteret alkotnak, ha az összeadás a polinomok összeadása és a skalárral szorzás a tagonkénti szorzás.

3. Az n -edfoku polinomok a fenti műveletekre nem alkotnak vektorteret, mert

$$P_n(x) + Q_n(x)$$

fokszáma lehet kisebb mint n és így az összeadás kivezet a halmazból.

4. A legfeljebb n -edfoku polinomok a 2. alatti műveletekre vektorteret alkotnak.

5. A konvergens valós számsorozatok vektorteret alkotnak a valós számtest felett, ha az összeadást:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

a számmal szorzást:

$$c \cdot (a_n) = (c \cdot a_n)$$

módon értelmezzük.

6. Egy $[a, b]$ intervallumon, differenciálható függvények vektorteret alkotnak a függvényösszeadás és számmal szorzás műveletekre.

2. ALTÉR LINEÁRIS FÜGGÉS, BÁZIS, DIMENZIÓ

Tekintsük a térvektorok halmazának tetszőleges két, nem párhuzamos vektora által kifeszített síkot. Ennek vektorai szintén vektorteret alkotnak, amely az eredeti vektortérnek részhalmaza. Hasonlóan, a legfeljebb ötödfoku polinomok vektortérének a legfeljebb harmadfoku polinomok olyan részhalmazát alkotják, amely szintén vektortér. Az ilyen részhalmazt altérnek nevezzük.

2.1. Definíció

Egy V vektortér U részhalmazát a V vektortér egy alteré-
nek nevezzük, ha vektorteret alkot a V -ben értelmezett műveletekre
nézve.

2.2. Tétel

A V vektortér U nem üres részhalmaza akkor és csak akkor
altere V -nek, ha tetszőleges $u_1, u_2 \in U$ és $c_1, c_2 \in K$ esetén
 $c_1 u_1 + c_2 u_2 \in U$ teljesül.

Bizonyítás:

a) Ha $U \subset V$ altere, akkor $\forall u_1, u_2 \in U$ és $c_1, c_2 \in K$ ese-
tén $c_1 u_1 \in U$, $c_2 u_2 \in U$ és akkor $c_1 u_1 + c_2 u_2 \in U$, tehát a felté-
tel szükséges.

b) Legyen $u_1, u_2 \in U$ két tetszőleges eleme és tegyük fel, min-
den lineáris kombinációjuk benne van U -ban.

Akkor

$$\begin{aligned} & u_1 + u_2 \in U \\ \text{és} \quad & c \cdot u_1 \in U, \text{ hiszen} \end{aligned}$$

mindkettő lineáris kombinációja u_1, u_2 -nek. Tehát U zárt az össze-
adásra és a skalárral szorzásra. A műveleti tulajdonságok teljesülése
abból következik, hogy $U \subset V$ és V vektortér a fenti összeadásra és
skalárral szorzásra. U -nak van nulleleme, mert

$$0 \cdot u_1 \in U \text{ és}$$

$\forall u \in U$ -nak van ellentettje, mert $(-1)u = -u$ miatt az ellentett is
tekinthető lineáris kombinációnak. A feltétel tehát elégséges is. ■

A fenti tétel alapján belátható, hogy minden vektortérnek altere
önmaga és altere a csak a nullvektort tartalmazó egyelemű vektortér.

A térvektorok körében triviális, hogy két vektor lineáris kombi-
nációjának a halmaza altér (sík, ha a két vektor nem párhuzamos, egye-
nes, ha a két vektor párhuzamos).

Megmutatjuk, hogy ez minden vektortérben igaz.

2.3. Tétel

Ha $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, akkor a K -beli skalárokkal képzett ösz-
szes lineáris kombinációjuk halmaza V altere, és ez V legszűkebb
olyan altere, amely a $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorokat tartalmazza.

Bizonyítás:

a) Két lineáris kombináció összege is lineáris kombináció:

$$\sum_{i=1}^n c_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^n d_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^n (c_i + d_i) \underline{v}_i$$

lineáris kombináció skalárszorosa is lineáris kombináció:

ha $k \in K$, akkor

$$k \sum_{i=1}^n c_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^n k c_i \underline{v}_i,$$

tehát a lineáris kombinációk halmaza eltér.

b) Az eltér azért a legszűkebb a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorrendszert tartalmazó alterek közül, mert bármely alternek a benne levő vektorok lineáris kombinációit tartalmaznia kell.

Elnevezés:

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok lineáris kombinációinak a halmazát e vektorok által generált vektortérnek nevezzük.

2.4. Példák (példák altérre)

1^o Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett egyváltozós függvények vektortérének altere a folytonos függvények vektortere.

2^o A végtelen valós számsorozatok vektortérének alterei:

a) a korlátos sorozatok vektortere,

b) a konvergens sorozatok vektortere.

3^o A 2×2 -es kvadratikus mátrixok vektorterében alteret alkotnak az $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ alakú mátrixok.

4^o Egy intervallumon folytonos függvények vektorterében alteret alkotnak azok a függvények, amelyeknek az intervallumon vett integrálja nulla.

Alapvető fontosságúak az absztrakt vektortérben a vektoralgebrában már megismert lineáris összefüggés, lineáris függetlenség fogalmak.

2.5. Definíció

Legyen V vektortér a K számtest felett. Azt mondjuk, hogy a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ elemek lineárisan összefüggőek, ha vannak olyan $c_1, c_2, \dots, c_n$ számok K -ban, amelyek nem mind nullák, és

$$\sum_{i=1}^n c_i \underline{v}_i = \underline{0}$$

Ha a nullvektort a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektoroknak csak a $c_i = 0$ ($i=1, \dots, n$) együtthatókkal képzett lineáris kombinációja állítja elő (csak az ún. "triviális" előállítás létezik), akkor a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorokat lineárisan függetleneknek nevezzük.

2.6. Példák

1^o Legyen V az 1.3. 1^o példabeli vektortér.

$$A \quad \underline{v}_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}, \quad x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

vektorrendszer lineárisan független, ugyanis a

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

2^o Tekintsük a folytonos függvények vektortérét, a valós számok halmaza felett. Legyen

$$f(x) = \sin x ; g(x) = \cos x.$$

Lineárisan összefüggő, vagy független rendszert alkotnak-e az f, g vektorok?

A vektortér nulleleme az azonosan nullaértékű függvény, tehát azt vizsgáljuk, hogy a

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x \equiv 0$$

egyenlőség teljesülhet-e úgy is, hogy az együtthatók nem mind nullák.

a) Ha $c_1 = 0$, akkor

$$c_2 \cos x \equiv 0 \text{ csak úgy lehet, ha } c_2 \equiv 0.$$

b) Ha $c_1 \neq 0$, akkor

$$\operatorname{tg} x \equiv -\frac{c_2}{c_1} \text{ kellene, hogy teljesüljön minden olyan } x\text{-re,}$$

amelyre $\cos x \neq 0$. Ilyen c_1 és c_2 nincs, tehát b) lehetetlen.

Igy $c_1 = c_2 = 0$. A két vektor független.

A következőkben megvizsgáljuk lineárisan független, ill. összefüggő vektorrendszerek néhány alapvető tulajdonságát.

2.7. Tételek

1^o Ha a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorok között van nullvektor, akkor a vektorrendszer lineárisan összefüggő.

2^o Ha a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorok között van két egyenlő, akkor a rendszer lineárisan összefüggő.

3^o Ha a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor a vektortér bármely vektorát hozzávéve, a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}$ vektorok is lineárisan összefüggők.

4^o Lineárisan független $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorrendszerből tetszőleges vektort elhagyva, a rendszer független marad.

5^o A $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan összefüggők, ha van közöttük olyan vektor, amely a többiek lineáris kombinációjaként előállítható.

6^o Ha a $v_1, \dots, v_k$ lineárisan független (függő) vektorrendszer bármely vektorának skalárszorosa hozzáadjuk egy másik vektorához, az új vektorrendszer marad változatlanul lineárisan független (függő).

A felsorolt tételek közül - tekintettel egyszerűségükre - az 1^o, 2^o tételt nem bizonyítjuk, a bizonyítást feladatként tűzzük ki az olvasónak.

Bizonyítások:

3^o Ha van olyan $c_1, \dots, c_k \in K$, nem mind nulla skalár, hogy

$$\sum_{i=1}^k c_i v_i = \underline{0}, \text{ akkor } c_{k+1} = 0 \text{ választással}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i v_i = \underline{0} \text{ is fennáll.}$$

Mivel nem minden együttható nulla, a $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ rendszer lineárisan összefüggő. ■

4^o Ha ugyanis a $v_1, \dots, v_k$ rendszerből vektort elhagyva összefüggő rendszert kapnánk, akkor 3^o alapján az eredeti rendszernek összefüggőnek kellett volna lennie, de arról tudjuk, hogy független. ■

5^o a) Ha $\sum_{i=1}^k c_i v_i = \underline{0}$ úgy, hogy van nullától különböző együtt-

ható, pl. $c_j \neq 0$, akkor a v_j vektor kifejezhető a többiek lineáris kombinációjaként:

$$\begin{aligned} v_j = & -\frac{c_1}{c_j} v_1 - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j} v_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j} v_{j+1} - \\ & - \dots - \frac{c_k}{c_j} v_k. \end{aligned}$$

b) Ha valamelyik vektora a $v_1, \dots, v_k$ rendszernek kifejezhető a többiekkel, pl.

$$v_i = c_1 v_1 + \dots + c_{i-1} v_{i-1} + c_{i+1} v_{i+1} + \dots + c_k v_k,$$

akkor a nullvektor előállítható

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_{i-1} \underline{v}_{i-1} - \underline{v}_i + c_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \dots + c_k \underline{v}_k = \underline{0}$$

alakban, amelyben $\underline{v}_i$ együtthatója nem nulla, tehát a rendszer lineárisan összefüggő. ■

6^o Tegyük fel először, hogy a

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_j, \dots, \underline{v}_k \quad (1)$$

vektorrendszer lineárisan független.

Megmutatjuk, hogy akkor a

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_i + a \underline{v}_j, \dots, \underline{v}_j, \dots, \underline{v}_k \quad (2)$$

vektorrendszer is független.

Állítsuk elő a $\underline{0}$ -t a (2) rendszer segítségével:

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_i (\underline{v}_i + a \underline{v}_j) + \dots + c_j \underline{v}_j + \dots + c_k \underline{v}_k = \underline{0} \quad (3)$$

átrendezve:

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_i \underline{v}_i + (c_i a + c_j) \underline{v}_j + \dots + c_k \underline{v}_k = \underline{0} \quad (4)$$

Az (1) rendszer lineáris függetlensége miatt (4) együtthatói mind nullák:

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_i = 0, c_i a + c_j = 0, \dots, c_k = 0,$$

de ebből következik, hogy $c_j = 0$ és akkor (3) együtthatói is mind nullák, ami a (2) vektorrendszer lineáris függetlenségét jelenti.

Az állítás másik része ebből már nyilvánvaló. Ha (1) összefüggő rendszer (2) nem lehet független, mivel (2)-ből (1)-et olyan átalakítással nyerjük (a j -edik vektor $(-a)$ -szorosát adva az i -edikhez), amely meghagyja a függetlenséget.

A 2.3. tételben arról volt szó, hogy egy vektortér valamely vektorrendszerének lineáris kombinációi alteret alkotnak. Ez az altér lehet valódi, de lehet, hogy maga az eredeti vektortér. Például a térvektorok vektorterében $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ lineáris kombinációjaként a tér minden vektora előállítható. Amennyiben egy vektorrendszer generálja a

vektorteret, felmerül a kérdés, hogy lehet-e kevesebb vektorral is előállítani a vektortér vektorait. Megmutatjuk, hogy minden véges sok független vektort tartalmazó vektortér esetén megadható egy szám (dimenzió), amely azt mutatja, hogy hány lineárisan független vektor szükséges V generálásához.

2.8. Definíció

A $B : \underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ vektorrendszert ($\underline{b}_i \in V \quad i=1, 2, \dots, n$) a V vektortér bázisának nevezzük, ha a vektorrendszer lineárisan független és V minden vektorát lineáris kombinációként előállítja.

2.9. Tétel

Ha B a V vektortér egy bázisa, akkor $\forall \underline{v} \in V$ egyértelműen állítható elő a bázis vektorainak lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás:

Az állítás a bázisvektorok lineáris függetlenségének következménye.

Legyen $B : \underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ és $\underline{v}$ két előállítás:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n c_i \underline{b}_i \quad (1)$$

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n d_i \underline{b}_i \quad (2)$$

(1)-ből (2)-t kivonva a $\underline{0}$ egy előállítását kapjuk

$$\sum_{i=1}^n (c_i - d_i) \underline{b}_i = \underline{0} \quad (3)$$

A bázisvektorok lineáris függetlenségéből

$$c_i - d_i = 0, \quad \text{vagyis}$$

$$c_i = d_i \quad \text{következik,} \quad i = (1, 2, \dots, n),$$

tehát az előállítás egyértelmű. ■

2.10. Tétel

Ha a V vektortér egy bázisához V bármely elemét hozzáveszünk, összefüggő vektorrendszert kapunk.

Bizonyítás:

Legyen $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ egy bázis és $\underline{v} \in V$ vektor a vektortér tetszőleges eleme.

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n v_i \underline{b}_i \text{ alakban előállítható.}$$

Ebből

$$\sum_{i=1}^n v_i \underline{b}_i - \underline{v} = 0,$$

vagyis a lineáris összefüggés következik. ■

2.11. Tétel

Ha a $G : \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ lineárisan összefüggő vektorrendszer generálja a V vektorteret, akkor a vektorrendszerből kiválasztható egy bázis.

Bizonyítás:

1° Ha a generátorrendszer minden vektora nullvektor, akkor a V vektortérnek csak egy eleme van, a $\underline{0}$.

2° Ha van olyan $\underline{v}_1 \in G$, hogy $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ és az összes többi generáló vektor $\underline{v}_1$ -vel összefügg, akkor minden $\underline{v} \in V$ $\underline{v} = c \underline{v}_1$ alakú, tehát találtunk egyelemű bázist.

3° Ha van olyan $\underline{v}_j$ elem, amely $\underline{v}_1$ -vel lineárisan független rendszert alkot, de bármely harmadik vektor a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ rendszerből lineárisan összefügg a $\underline{v}_1, \underline{v}_j$ vektorpárral, akkor V minden eleme $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_j$ segítségével lineáris kombinációként előállítható. Ekkor találtunk 2 elemű bázist. Nyilvánvaló, hogy az eljárás legfeljebb k lépésben véget ér, mivel $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ lineáris összefüggése miatt legfeljebb $k - 1$ lineárisan független elem van köztük. Így a fenti konstrukcióval kiválasztottunk egy legfeljebb $k - 1$ elemű bázist a vektorteret generáló k elemű vektorrendszerből. ■

Lehet-e egy vektortérnek különböző elemszámu bázisa?

2.12. Tétel

Ha a V vektortérnek van n elemű B bázisa, akkor minden bázisa n elemű.

Bizonyítás:

a) Először megmutatjuk, hogy a V vektortér bármely $k > n$ elemű vektorrendszere lineárisan összefüggő. Legyen $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ a vizsgálandó vektorrendszer és $B : \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ V egy bázisa.

Ha van $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ között nullvektor, akkor a rendszer, mint tudjuk, összefüggő. A továbbiakban már feltesszük, hogy

$$\underline{v}_i \neq \underline{0} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Mivel B bázis:

$$\underline{v}_1 = v_{11} \underline{b}_1 + v_{21} \underline{b}_2 + \dots + v_{n1} \underline{b}_n \quad (1)$$

és nem minden együttható nulla $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ miatt.

Feltehetjük, hogy $v_{11} \neq 0$ (ez nem jelent megszorítást, mivel a bázisvektorok átszortrendezésével mindig elérhető).

Ekkor (1)-ből $\underline{b}_1$ -et kifejezve kapjuk

$$\underline{b}_1 = \frac{1}{v_{11}} \underline{v}_1 - \sum_{i=2}^n \frac{v_{i1}}{v_{11}} \underline{b}_i \quad (2)$$

Igy V minden vektora előállítható a $B_1 : \underline{v}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként is.

B_1 vektorai lineárisan függetlenek, mert a

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{b}_2 + \dots + c_n \underline{b}_n = \underline{0}$$

lineáris kombinációban minden együttható nulla kell legyen. Ha ugyanis $c_1 \neq 0$ volna, ez azt jelentené - feltevésünkkel ellentétben -, hogy

(1)-ben $v_{11} = 0$. A többi együttható nulla volta ezután már a $\underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ vektorok függetlenségének következménye.

Tehát a $B_1 : \underline{v}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ vektorrendszer szintén bázisa V -nek. Az eljárást - a báziscserét - folytassuk, vagyis igyekezzünk a $\underline{b}_i$ vek-

torokat a $\underline{v}_1$ vektorokkal lecserélni. Ha a $\underline{v}_2$ vektor összefügg $\underline{v}_1$ -gyel, akkor a vizsgált $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, tehát az állítás bizonyított.

Ha $\underline{v}_2$ független $\underline{v}_1$ -től, akkor a

$$\underline{v}_2 = v_{12} \underline{v}_1 + v_{22} \underline{b}_2 + \dots + v_{n2} \underline{b}_n \quad (3)$$

előállításban van olyan $\underline{b}_i$ vektor, amelynek együtthatója nem nulla.

Feltehetjük, hogy $v_{22} \neq 0$. Ekkor $\underline{b}_2$ és ezzel együtt V minden eleme előáll a

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{b}_3, \dots, \underline{b}_n \text{ vektorok}$$

lineáris kombinációjaként. Az eljárást tovább folytatva, ha eljutunk a

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n \text{ vektorok}$$

között egy olyanhoz, amelyik a megelőzőekkel összefügg, akkor az állítás igazolt. Ha pedig $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lineárisan függetlenek, akkor a fenti eljárást folytatva, a $\underline{b}_i$ vektorokat rendre lecserélve a

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorrendszerhez jutunk, amely V minden elemét, így a $\underline{v}_{n+1}, \dots, \underline{v}_k$ elemeket is előállítja lineáris kombinációként. Ezzel beláttuk, hogy V minden k elemü ($k > n$) vektorrendszere összefüggő.

b) Most tegyük fel, hogy a V vektortérnek bázisai:

$$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n \quad (1)$$

és

$$\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_m \quad (2)$$

Az a) alatt bizonyítottak értelmében $n > m$ lehetetlen (1) bázis volta, $n < m$ lehetetlen (2) bázis volta miatt. Tehát $m = n$, vagyis V minden bázisa azonos számú vektorból áll. ■

Mivel minden bázis elemszáma azonos, értelmes a következő

2.13. Definíció

A V vektortér bázisvektorainak a számát a vektortér dimenziójának nevezzük.

Megjegyzések

1. Van olyan vektortér, amelynek nincs véges elemű bázisa, például ilyen a folytonos függvények vektortere. Az ilyen vektortereket végtelen dimenziós vektortereknek nevezik.
2. Ha $V = \{\underline{0}\}$ akkor a vektortérnek nincs lineárisan független eleme, dimenziója nulla.

2.14. Példák

1. Tekintsük az $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok halmazát, ahol a 0, valós szám. Értelmezzünk műveleteket e halmazban a következőképpen:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix},$$

$$c \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & a^c \end{pmatrix},$$

tetszőleges c valós szám esetén. Az olvasó könnyen beláthatja, hogy a fenti mátrixok a definiált műveletekre vektorteret alkotnak.

Megadjuk a vektortérnek egy bázisát és meghatározzuk a dimenziószámát.

Egy bázis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ugyanis a vektortér bármely eleme}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alakba írható, ahol

$$\begin{aligned} 10^c &= a, \text{ vagyis} \\ c &= \lg a. \end{aligned}$$

A vektortérnek egyelemű bázisa van, tehát a dimenziószáma: 1.

2. A valós elemű 2×2 -es mátrixok halmaza a mátrix-összeadásra és számmal szorzásra vektorteret alkot a valós számtest felett. Határozzuk meg a vektortér egy bázisát és dimenziószámát.

$$\text{Az } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok bázisát alkotják a vektortérnek, mivel

a) A vektortér minden eleme előállítható lineáris kombinációjuként:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ és}$$

b) A négy mátrix lineárisan független rendszert alkot:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ csak akkor teljesül,}$$

ha $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. A vektortér négydimenziós.

3. Adjuk meg a folytonos függvények vektortérének egy kétdimenziós alterét. (Műveletek a függvények összeadása és számmal szorzása.) A IV.2.6 2^o példában beláttuk, hogy a

$$\sin x \text{ és } \cos x$$

függvények lineárisan függetlenek.

Igy az

$$f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

egyenlőséggel meghatározott f függvények az eredeti vektortér egy kétdimenziós alterét alkotják.

Egy vektortérnek valamely bázisáról sokszor szükséges áttérnünk egy másik bázisra. Ilyenkor természetesen módosulnak a vektorok koordinátái. A következőkben ezekkel a kérdésekkel, a bázistranszformáció (báziscsere) problémáival foglalkozunk.

2.15. Tétel

Ha a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ vektorrendszer bázisa a V vektortérnek és $\underline{c} \in V$ tetszőleges nullától különböző vektor, akkor $\underline{c}$ bevezethető a bázisba annak a $\underline{b}_k$ vektornak a helyére, amelynek együtthatója $\underline{c}$ előállításában nem nulla.

Bizonyítás:

$$\text{Legyen } \underline{c} = c_1 \underline{b}_1 + \dots + c_k \underline{b}_k + \dots + c_n \underline{b}_n \quad (1)$$

és $c_k \neq 0$.

Először megmutatjuk, hogy minden $\underline{v} \in V$ előáll a

$$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{k-1}, \underline{c}, \underline{b}_{k+1}, \dots, \underline{b}_n \quad (2)$$

vektorok lineáris kombinációjaként, majd bebizonyítjuk, hogy (2) lineárisan független vektorrendszer.

Tudjuk, hogy

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n v_i \underline{b}_i \quad (3)$$

(1)-ből $\underline{b}_k$ -t kifejezve és (3)-ba helyettesítve

$$\underline{v} = \left(v_1 - \frac{v_k}{c_k} c_1 \right) \underline{b}_1 + \dots + \frac{v_k}{c_k} \underline{c} + \dots + \left(v_n - \frac{v_k}{c_k} c_n \right) \underline{b}_n \quad (4)$$

adódik, vagyis $\underline{v}$ -t a (2) rendszer segítségével előállítottuk.

(1) és (3) egyértelműségéből következik, hogy a (4) előállítás is egyértelmű. Ez, ha $\underline{v} = \underline{0}$, éppen a (2) rendszer lineáris függetlenségét jelenti. ■

A bizonyítás során az is kiderült, hogy báziscserénél hogyan módosulnak tetszőleges $\underline{v} \in V$ vektor koordinátái.

2.16. Példa

Legyen V a valós, rendezett számhármassok vektortere (1.3. Példák 1.) V egy bázisa:

$$B_1 : \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Legyen

$$\underline{e}'_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Mivel } \underline{e}'_1 \text{ előállítása a } B_1 \text{ bázisban:}$$

$$\underline{e}'_1 = -2 \underline{e}_1 + 3 \underline{e}_2,$$

$\underline{e}'_1$ -vel lecserélhető $\underline{e}_1$, illetve $\underline{e}_2$, de $\underline{e}_3$ nem. Vigyük be $\underline{e}'_1$ -t $\underline{e}_1$ helyére a B_1 bázisban.

$$B_2 : \underline{e}'_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$$

Határozzuk meg a $\underline{v}$ vektor koordinátáit a B_2 bázisban, amennyiben B_1 -beli előállítása:

$$\underline{v} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 - \underline{e}_3$$

$\underline{v}$ B_2 bázisbeli v'_1, v'_2, v'_3 koordinátáit például meghatározhatjuk a következő egyenlethől:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v'_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v'_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v'_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 v'_1 \\ 3 v'_1 + v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}$$

amelyből:

$$v'_1 = -\frac{1}{2}; \quad v'_2 = \frac{7}{2}; \quad v'_3 = -1 \quad \text{adódik.}$$

Megjegyzés:

A bázistranszformáció használható vektorrendszer lineáris függőségének, ill. függetlenségének eldöntésére is, a következő gondolatmenet alapján. A vizsgált vektorrendszer vektoraival lépésenként megpróbáljuk lecserélni a bázisvektorokat. Ha a rend-

szer minden vektora bevonható a bázisba, akkor a vektorrendszer lineárisan független, egyébként lineárisan összefüggő.

2.17. A bázistranszformáció végrehajtása mátrix felhasználásával, elemi sorműveletekkel

A 2.15. Tételben egy adott bázist úgy módosítottunk, hogy annak egy vektorát cseréltük le, és a vektortér egy tetszőleges $\underline{v}$ vektorának megadtuk az új bázisbeli koordinátáit (4) alatt. A 2.16. példában egy konkrét bázistranszformációt hajtottunk végre, de nem használtuk az említett (4) formulát, más módszerrel határoztuk meg egy vektor új koordinátáit. Most megmutatjuk, hogy egy ügyes elrendezéssel hogyan tehetjük mechanikussá az új koordináták meghatározását.

Legyen a V vektortér egy bázisa

$$B_1 : \underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n \text{ és egy vektora } \underline{v},$$

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n v_i \underline{e}_i, \quad v_1 \neq 0.$$

Mivel $v_1 \neq 0$, $\underline{v}$ bevonható a bázisba $\underline{e}_1$ helyére. Az így nyert új bázis

$$B_2 : \underline{v}, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$$

Feladat: határozzuk meg a $\underline{v}$ vektor, az $\underline{e}_1$ vektor és egy

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^n a_i \underline{e}_i \text{ vektor } B_2 \text{ bázisbeli koordinátáit.}$$

$$\underline{v} = 1 \cdot \underline{v} + \sum_{i=2}^n 0 \cdot \underline{e}_i,$$

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n v_i \underline{e}_i \text{ -ből } \underline{e}_1 = \frac{1}{v_1} \underline{v} - \frac{1}{v_1} \sum_{i=2}^n v_i \underline{e}_i$$

és ennek felhasználásával - mint azt a 2.15. Tételben már láttuk -

$$\underline{a} = \frac{a_1}{v_1} \underline{v} + \sum_{i=2}^n \left(a_i - \frac{a_1}{v_1} v_i \right) \underline{e}_i$$

Most írjuk fel $\underline{v}$, $\underline{e}_1$, $\underline{a}$ B_1 -beli koordinátáit oszlop mátrixba rendezve egymás mellé. Kapjuk a következő mátrixot:

$$\begin{pmatrix} v_1 & 1 & a_1 \\ v_2 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Osszuk végig a mátrix első sorát v_1 -gyel, majd az így nyert első sor megfelelő skalárszorosaival a többi sorokból kivonva érjük el, hogy az első oszlopba a $\underline{v}$ vektor új B_2 bázisbeli - koordinátáiból álló oszlop kerüljön.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1)-ből a következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{v_1} & \frac{a_1}{v_1} \\ 0 & -\frac{v_2}{v_1} & a_2 - \frac{a_1}{v_1} v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{v_n}{v_1} & a_n - \frac{a_1}{v_1} v_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

Vegyük észre, hogy miközben (1)-et oly módon alakítottuk, hogy az első oszlopba $\underline{v}$ új koordinátái kerüljenek, a második oszlopban kialakultak $\underline{e}_1$ új koordinátái és a harmadik oszlopban $\underline{a}$ B_2 -beli új koordinátái jöttek létre. Így ez az elrendezés valóban alkalmas bázis-transzformáció mechanikus végrehajtására. Nyilvánvalóan nem változtat az eljárás lényegén, ha több bázis vektort - akár az egész bázist - cserélünk le.

2.18. Példa

Állapítsuk meg, hogy a V vektortér $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ vektorai lineárisan függetlenek-e, ha V egy bázisa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ és

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + 3 \underline{e}_2 + \underline{e}_4$$

$$\underline{v}_2 = -\underline{e}_2 + \underline{e}_3$$

$$\underline{v}_3 = \underline{e}_1 + 2 \underline{e}_2 - \underline{e}_3 + 3 \underline{e}_4$$

$$\underline{v}_4 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 2 \underline{e}_3 + 3 \underline{e}_4$$

MEGOLDÁS:

1. lépés:

A 2.17. alatt ismertetett eljárással vonjuk be a bázisba $\underline{e}_1$ helyére a $\underline{v}_1$ vektort. Ez úgy érhető el, hogy az

$$\begin{array}{cccc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{v}_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \text{mátrixon} \end{array}$$

olyan sorműveleteket végzünk, amelynek eredményeként az első oszlopba a $\underline{v}_1$ vektor $\underline{v}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ bázisbeli új koordinátái $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kerülnek.

Ezért az első sor háromszorosát kivonjuk a második sorból, majd az első sort kivonjuk a negyedik sorból és a következő mátrixot kapjuk

$$\begin{array}{cccc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{v}_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ennek a mátrixnak az oszlopaiban a vektorok $\underline{v}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ bázisbeli koordinátái állnak.

2. lépés:

Mivel a $\underline{v}_2$ előállításában $\underline{e}_2$ együtthatója nem nulla, bevonjuk a bázisba $\underline{v}_2$ -t $\underline{e}_2$ helyére. A második sort hozzáadva a harmadik-

hoz, majd a második sort (-1) -gyel szorozva kapjuk $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ koordinátáit most már a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ bázisban:

$$\begin{array}{cccc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{v}_4 \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

3. lépés:

$\underline{v}_3$ bevonása a bázisba $\underline{e}_3$ helyére. A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{e}_4$ bázisban a koordináták:

$$\begin{array}{cccc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{v}_4 \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Tehát a rendszer lineárisan összefüggő.

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok lineárisan függetlenek, de $\underline{v}_4$ már kifejezhető lineáris kombinációjukként $\underline{v}_4 = 3 \underline{v}_2 + \underline{v}_3$ alakban. Megmutatjuk, hogy a bázistranszformáció megadható egy mátrixszal is és ennek segítségével tetszőleges vektor új bázisbeli koordinátái könnyen meghatározhatók.

2.19. Tétel

Legyen a V vektortér két bázisa B és C .

$B : \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n ; \quad C : \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$

A B bázis vektorainak előállítása a C bázisban:

$$\underline{b}_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} \underline{c}_j \quad (1)$$

A C bázis vektorainak előállítása a B bázisban:

$$\underline{c}_i = \sum_{j=1}^n c_{ji} \underline{b}_j \quad (2)$$

Legyen $\underline{v} \in V$ és előállításai a két bázisban:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n v_i \underline{b}_i \quad (3)$$

és

$$\underline{v} = \sum_{j=1}^n v'_j \underline{c}_j \quad (4)$$

Állítás:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}}_{\underline{v}_C} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nn} \end{pmatrix}}_{\underline{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{\underline{v}_B} \quad (5)$$

$$\text{és} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{\underline{v}_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{nn} \end{pmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}}_{\underline{v}_C} \quad (6)$$

Bizonyítás:

A két bázis szerepének felcserélésével (5)-ből kapjuk (6)-ot, tehát elég az (5) állítást igazolni. Ehhez helyettesítsük be $\underline{v}$ (3) alatti előállításában $\underline{b}_i$ -k helyére (1)-et és megkapjuk $\underline{v}$ előállítását a $\underline{C}$ bázisban:

$$\sum_{i=1}^n v_i \left(\sum_{j=1}^n b_{ji} \underline{c}_j \right) = \sum_{j=1}^n v'_j \underline{c}_j \quad (7)$$

Ebből

$$v'_j = \sum_{i=1}^n v_i b_{ji} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

Ha az (5) alatti mátrix szorzást elvégezzük, a szorzat oszlopmátrix j -edik elemére ugyancsak a (8) alatti

$$\sum_{i=1}^n v_i b_{ji} \text{ összeget kapjuk,}$$

és ezzel az állítást igazoltuk. ■

Megjegyzés:

Ha a B bázisról akarunk áttérni a C bázisra, akkor a B mátrixra volna szükségünk, de a C mátrixot ismerjük. Ezért fontos a két mátrix kapcsolatát leíró

2.20. Tétel

$$B = C^{-1}$$

Bizonyítás:

A 2.19. Tételből tudjuk, hogy minden $v \in V$ vektor B és C bázisbeli koordinátáira érvényes, hogy

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{és}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

Az első egyenlőség jobb oldalát a másodikba helyettesítve:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{adódik.}$$

Mivel az utóbbi egyenlőség minden V -beli vektorra, így az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{koordinátája}$$

$$\underline{\underline{b}}_1, \quad \underline{\underline{b}}_2, \quad \dots \quad \underline{\underline{b}}_n \quad \text{vektorokra}$$

is érvényes, ezeket rendre behelyettesítve a

$$\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}}$$

egyenlőséget és hasonlóan - a második egyenlőség jobb oldalát helyettesítve az elsőbe -

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{E}} \quad \text{egyenlőséget}$$

kapjuk, ami állításunk igaz voltát jelenti. ■

3. IZOMORFIZMUS

Ebben a pontban az algebra egy olyan fontos fogalmát említjük meg, amely nemcsak a vektorterek elméletében, hanem más algebrai strukturák elméletében is jelentőséggel bír.

Tekintsük például a legfeljebb n -ed fokú $P_n(x)$ valós együtthatós polinomok $n + 1$ dimenziós vektorterét a polinóm összeadás és valós számmal szorzás műveletekkel és a valós számokból alkotott $n + 1$ elemű oszlopvektorok vektorterét. A két vektortér elemeit feleltessük meg egymásnak a következőképpen:

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ha

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

és

$$b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

akkor a két polinom összegének megfelelője a tagok megfelelőinek összege:

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots + (a_n + b_n) x^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

és egy polinom skalárszorosának megfelelője a polinom megfelelőjének skalárszorosa:

$$c a_0 + \dots + c a_n x^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} c a_0 \\ \vdots \\ c a_n \end{pmatrix}$$

Amennyiben a két vektortér elemei között fenti jellegű ún. művelettartó megfeleltetés létesíthető, akkor a két vektortér, ha csak a strukturáját nézzük, vagyis eltekintünk attól, hogy mik az elemei, meg sem különböztethető egymástól.

3.1. Definíció

A kölcsönösen egyértelmű művelettartó leképezést izomorfizmus-nak nevezzük.

A V és W vektortereket izomorfaknak nevezzük, ha elemeik között izomorfizmus létesíthető.

Jelölés: $V \cong W$

A 4. fejezet előző pontjainak alapján nyilvánvalóan adódik a

3.2. Tétel

Bármely n -dimenziós V vektortér izomorf a skalárhalmazából alkotott n elemű oszlopvektorok vektortérével.

Bizonyítás:

Legyen $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ V egy bázisa. Mint tudjuk, tetszőleges $\underline{v} \in V$ elem egyértelműen előáll $\sum_{i=1}^n v_i \underline{b}_i$ alakban.

Létesítsük a következő megfeleltetést:

$$\underline{v} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Ez kölcsönösen egyértelmű és művelettartó. Így az n -dimenziós oszlopvektorterek vizsgálata alapján sok mindent megtudunk az összes n -dimenziós vektorterekről is.

4. DIREKT SZORZAT, DIREKT ÖSSZEG

Az olvasó már találkozott halmazok direkt szorzatának fogalmával. A következőkben megmutatjuk, hogy direkt szorzattal és egy másik eljárással, az ún. direkt összeg képzéssel hogyan lehet vektorterekből új vektorteret képezni.

4.1. Definíció

Legyen U és V két vektortér egy K számtest felett. E vektorterek $U \times V$ direktszorzatának az elemei az $(\underline{u}, \underline{v})$ $\underline{u} \in U$; $\underline{v} \in V$ rendezett vektorpárok, amelyek között az összeadást

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_1) + (\underline{u}_2, \underline{v}_2) = (\underline{u}_1 + \underline{u}_2, \underline{v}_1 + \underline{v}_2)$$

módon,

a $k \in K$ számmal szorzást

$$k(\underline{u}, \underline{v}) = (k\underline{u}, k\underline{v})$$

módon értelmezzük.

Az 1.1. Definícióban szereplő vektortér - axiómákat vizsgálva az olvasó könnyen meggyőződhet arról, hogy $U \oplus V$ szintén vektortér K felett. Hasonló módon értelmezhető a direkt szorzat kettőnél több tényezőre is.

Megjegyezzük, hogy a direkt szorzatot Descartes-szorzatnak is szokás nevezni.

4.2. Definíció

Legyen U_1 és U_2 egy V vektortér két olyan altere, amelyre $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Az alterek $U_1 \oplus U_2$ direkt összegén az

$$\{\underline{u}_1 + \underline{u}_2; \underline{u}_1 \in U_1, \underline{u}_2 \in U_2\}$$

halmazt értjük.

4.3. Tétel

$U_1 \oplus U_2$ a V vektortérnek altere

és $\forall \underline{u} \in U_1 \oplus U_2$ egyértelműen írható fel $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ $\underline{u}_1 \in U_1, \underline{u}_2 \in U_2$ alakban.

Bizonyítás:

Az állítás első része nyilvánvalóan igaz, így csak azt mutatjuk meg, hogy az előállítás egyértelmű.

Tegyük fel, hogy $\underline{u} \in U_1 \oplus U_2$ kétféleképpen is előállítható

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \quad \underline{u}_1 \in U_1; \quad \underline{u}_2 \in U_2 \tag{1}$$

és

$$\underline{u} = \underline{u}'_1 + \underline{u}'_2 \quad \underline{u}'_1 \in U_1; \quad \underline{u}'_2 \in U_2 \tag{2}$$

alakban. (1) és (2)-ből

$$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{u}'_1 + \underline{u}'_2 \quad \text{következik.}$$

Ekkor

$$\underline{u}_1 - \underline{u}'_1 = \underline{u}'_2 - \underline{u}_2, \quad \text{ahol}$$

$$\underline{u}_1 - \underline{u}'_1 \in U_1 \quad \text{és} \quad \underline{u}_2 - \underline{u}'_2 \in U_2.$$

Mivel

$$U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}, \quad \text{ezért}$$

$$\underline{u}_1 - \underline{u}'_1 = \underline{0} \quad \text{és}$$

$$\underline{u}_2 - \underline{u}'_2 = \underline{0} \quad \text{lehet csak, ami az egyértelműséget jelenti.} \blacksquare$$

Megjegyzés:

A direktösszeg fogalma is kiterjeszthető kettőnél több alter esetére is.

Példák

1. Legyen V a valós számok, összeadásra és valós számmal szorzásra alkotott vektortere

$V \overset{(\times)}{V}$ a valós kételemű sormátrixok vektortere.

2. Legyen V a síkvektorok vektortere

$$\underline{a} \in V, \quad \underline{b} \in V, \quad \underline{a} \nparallel \underline{b}$$

U_1 legyen az $\underline{a}$ vektorral párhuzamos vektorok, U_2 a $\underline{b}$ vektorral párhuzamos vektorok altere. Ekkor

$$U_1 \overset{(+)}{U_2} = V.$$

3. Legyen V az n elemű oszlop mátrixok vektortere és $\underline{A}$ egy olyan $n \times n$ -es mátrix, amelynek első oszlopa csupa nulla, a többi oszlop viszont lineárisan független rendszert alkot.

Tekintsük az $\underline{A} \underline{x} = \underline{0}$ egyenlet megoldásvektorait. Ezek V -nek egy U_1 egydimenziós alterét alkotják. Legyen $U_2 \subset V$ -nek az

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{alakú vektorok által generált } (n-1) \text{ dimenziós alter.}$$

Megmutatjuk, hogy

$$U_1 \oplus U_2 = V$$

Legyen ugyanis $\underline{v} \in V$ tetszőleges

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in U_2, \quad \text{ekkor}$$

$$\underline{A}(\underline{v} - \underline{y}) = \underline{A} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad \text{tehát}$$

$$\underline{v} - \underline{y} = \underline{x} \in U_1, \quad \text{vagyis}$$

$$\underline{v} = \underline{x} + \underline{y}, \quad \text{mint állítottuk.}$$

Megjegyzés:

Vektorterek felbontása alterek direkt összegére segédeszköz-
ze lehet vektorterek vizsgálatának is.

5. KITŰZÖTT FELADATOK

1. a) Mutassa meg, hogy a 2×2 -es mátrixok halmaza vektortér
a mátrix összeadás és számmal szorzás műveletekre.

b) Határozza meg a vektortér dimenziószámát.

c) Konstruálja meg a vektortér egy háromdimenziós alterét.

2. Bizonyítsa be, hogy ha a V vektortér $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ ele-
mei a $\underline{b}$ vektort egyértelműen állítják elő, akkor az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$
vektorok lineárisan függetlenek.

3. Mutassa meg, hogy ha egy V vektortér dimenziószáma n ,
akkor bármely $k < n$ természetes számhoz található V -nek olyan al-
tere, amelynek k a dimenziószáma.

4. Legyen a V vektortér két altere V_1 és V_2 . Mutassa meg, hogy ha

$$V_1 \cap V_2 = \{\underline{0}\},$$

akkor $\dim V_1 + \dim V_2 \leq \dim V$.

5. V_1 és V_2 a V vektortér két altere.

a) Mutassa meg, hogy

$$V_1 \cap V_2 \text{ is altere } V\text{-nek.}$$

b) Bizonyítsa be, hogy

$$\dim (V_1 \cap V_2) \leq \min (\dim V_1, \dim V_2).$$

6. Legyen V az $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ alakú,

valós elemű mátrixok vektortere.

(Műveletek: mátrix összeadás és mátrix szorzása számmal.)

Legyen W az $a + b_j$ alakú komplex számok összeadása és valós számmal szorzásra alkotott vektortere.

Bizonyítsa be, hogy

$$V \cong W.$$

V. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

Ebben a fejezetben a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának feltételeivel, a megoldások számával kapcsolatos elvi problémákkal és a megoldás módjával foglalkozunk.

1. ALAPFOGALMAK ÉS A MEGOLDHATÓSÁG KÉRDÉSEI

1.1. Definició

Az

[illegible]

egyenletrendszer, amelynek együtthatói valós vagy komplex számok, in-homogén lineáris egyenletrendszernek nevezzük, ha nem minden $b_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, m$) és homogén lineáris egyenletrendszernek, ha minden $b_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, m$). A fenti egyenletrendszer, az azonos ismeretlenek együtthatóit és az ismeretleneket egy-egy oszlopvektorba összefogva, az

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \underline{a_i} \quad (i=1, \dots, n)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{x} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \underline{b}$$

jelöléssel a következő vektoregyenlet alakba írható:

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{b} \quad (2)$$

Használni fogjuk az egyenletrendszernek egy harmadik írásmódját is:

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b},$$

ahol az $\underline{A}$ mátrix az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

együttható mátrix.

Az egyenletrendszer megoldhatóságának kérdését, a lineáris egyenletrendszert (2) alakban írva, átfogalmazhatjuk a következőképpen: az m dimenziós oszlopvektortér $\underline{b}$ vektora előállítható-e a vektortér $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorainak lineáris kombinációjaként? Erre a kérdésre az előbbi fejezetben tárgyalt ismereteink alapján könnyen tudunk válaszolni.

1.2. Tétel

Az

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az

$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorrendszer és az

$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}$ vektorrendszer lineárisan független vektorainak a

sztűna azonos.

Örönnyitás:

a) Ha az egyenletrendszernek van megoldása, akkor

$$\underline{b} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{a}_i,$$

a $\underline{b}$ vektor benne van az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok által generált altérben.

Ez azt is jelenti, hogy az

$$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \text{ és az } \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}$$

vektorrendszer ugyanazt az alteret generálja. Legyen ennek dimenziója k , akkor az

$$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \text{ és az } \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}$$

vektorrendszerben is k számú lineárisan független vektor van. Ezzel a feltétel szükségességét kimutattuk.

b) A feltétel elégséges is. Legyen mindkét vektorrendszerben a lineárisan független vektorok maximális száma k . Ha az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok között $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ lineárisan függetlenek, akkor, mivel az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}$ rendszerben sincs több független vektor, $\underline{b}$ előállítható

$$\underline{b} = x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_k \underline{a}_k$$

alakban, de akkor

$$x_1 \cdot \underline{a}_1 + \dots + x_k \cdot \underline{a}_k + 0 \cdot \underline{a}_{k+1} + \dots + 0 \cdot \underline{a}_n = \underline{b}$$

is fennáll, ami azt jelenti, hogy az

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektor megoldása az egyenletrendszernek. ■

A tételből is következik az a nyilvánvaló tény, hogy ha az egyenletrendszer homogén, akkor mindig van megoldása.

A mátrix-rang fogalmának megismerése után az előbbi tétel egy másik jól használható megfogalmazását is megadjuk.

1.3. Definíció

Az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrix oszloprangján az $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n)$

oszlopvektorok között levő lineárisan független vektorok számát értjük.

1.4. Definíció

Az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrix sorrangján az

$$(a_{j1}, \dots, a_{jn}), \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

sorvektorok között levő lineárisan független vektorok számát értjük.

1.5. Példák

1. Határozzuk meg az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mátrix}$$

oszloprangját. A 2.16. példában követett módon, báziscsere módszerrel számoljunk, azaz vonjuk be az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bázisvektorok helyére $\underline{A}$ oszlopvektorai közül azokat, amelyeket lehet.

Először $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ -öt bevonva $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ helyett, adódik az $\underline{A}_1$ mátrix.

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ezután cseréljük le

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{-vel a } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oszlopvektort, kapjuk } \underline{A}_2 \text{-t.}$$

$$\underline{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Folytathatnánk az eljárást, de már látszik, hogy az oszloprang 3, ugyanis az első három oszlopvektor lineárisan független, a negyedik a harmadikkal összefüggő, az ötödik pedig a másodikkal függ össze.

2. Az előbbi feladatot oldjuk meg más módszerrel is. A IV.2.7/6 tétel szerint egy vektorrendszer lineárisan független vektorainak számán nem változtat, ha bármelyik vektor konstansszorosát hozzáadjuk egy másikhoz. Ilyen - un. oszloptranzformációkkal igyekezzünk az $\underline{A}$ mátrix oszlopait

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alakra transzformálni, akkor könnyen megállapíthatjuk az oszloprangot.

$$\underline{A} = \begin{matrix} & \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{v}_4 & \underline{v}_5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

A v_1 vektor kétszeresét kivonva v_2 -ből és v_3 -ból, majd v_1 -et kivonva v_4 -ből és v_5 -ből, kapjuk az A_3 mátrixot:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

A negyedik oszlopvektor megfelelő konstansszorosait hozzáadva az oszlopokhoz, adódik A_4 .

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ebből már kiolvasható, hogy az oszloprang 3. Az eljárást tovább folytatva, a 2. oszlopot 6-tal osztva és megfelelő konstansszorosait a többi vektorhoz hozzáadva az A mátrixszal azonos számú lineárisan független oszlopvektort tartalmazó A_5 mátrixhoz jutunk:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Tűzzük ki most azt a feladatot, hogy megállapítjuk az előbbi feladatokban szereplő A mátrix sorrangját.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tegyük ezt először a 2. példa módszerével, alkalmazva azt a mátrix sorvektoraira. Így első lépésként az A -val azonos sorrangú A_6 mátrixot kapjuk az első sor kétszeresét kivonva a második és harmadik sorból.

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ezután a harmadik sorvektort hozzáadva az elsőhöz, és kétszeresét kivonva a másodikból adódik A_7 .

$$\underline{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

amiből jól látszik, hogy a sorrang 3.

4. Határozzuk meg az $\underline{A}$ mátrix sorrangját, az 1. példa módszerét alkalmazva a mátrix sorvektoraira.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megkíséreljük tehát a sorvektorokat bevonni az ötdimenziós sorvektortér

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

bázisának első három vektora helyébe. Először az első sorvektort visszük be $(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ helyett a bázisba. A vektorok új koordinátái a következők lesznek:

$$\underline{A}_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a 2. sort $(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$ helyett bevonva a bázisba adódik

$$\underline{A}_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

majd a 3. sort $(0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$ helyett bevonva a bázisba az

$$\underline{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot nyerjük, amiből kitűnik, hogy a sorrang 3.

Az 1. és 3. példa, illetve a 2. és 4. példa összehasonlításából az tűnik ki, hogy az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorainak a bázisba történő bevonása és a mátrix sorvektorainak elemi transzformációi, illetve az

oszlopvektorok elemi transzformációi és sorvektorok bázistranszformációja azonos változást idéznek elő a mátrixon és változtatlanul hagyják mind az oszlop- és sorrangot. A példák sejtetik a következő tétel igazságát:

1.6. Tétel

A mátrix oszlop- és sorrangja megegyezik.

Bizonyítás:

A bizonyítás azon a gondolaton alapszik, hogy ha egy mátrixon elemi sor-, ill. oszloptranszformációt végzünk (lásd 3.3.), azzal nem változtatunk sem az oszlop-, sem a sorrangon. Ha ugyanis valamely sorvektor konstansszorosait hozzáadjuk a többi sorokhoz, vagy a sort végigosztjuk egy számmal, az a sorrangon a IV.2.7./6. tétel alapján nem változtat. Az oszlop- és sorrangot viszont azért nem változtatja, mivel az oszlopvektorok terében csak bázistranszformációt végzünk.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Legyen k az $\underline{A}$ mátrix oszlop- és sorrangja. $k \leq n$, mert n darab oszlopvektor van és $k \leq m$, mert az oszlopvektorok az m dimenziós oszlopvektortérnek alkotják alterét. Tehát

$$k \leq \min(m, n).$$

Rendezzük úgy az oszlopokat, hogy az első k darab legyen lineárisan független. Nem jelenti az általánosság megszorítását, ha felteesszük - csupán az egyszerűbb írásmód kedvéért -, hogy az első k független oszlopvektor az m dimenziós oszlopvektortér

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bázisának éppen az első k darab vektorával cserélhető le.

Elvégezve az $\underline{A}$ mátrix első k oszlopvektorának bevonását a bázisba, az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_k$ vektorok helyére, a következő alakú $\underline{A}_1$ mátrixot kapjuk

$$A_{\underline{1}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{k} & & \underbrace{n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{1} \\ \vdots \\ \underbrace{k} \\ \vdots \\ \underbrace{m} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{1\ k+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{2\ k+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{k\ k+1} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 0 & b_{m\ k+1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Ezután $A_{\underline{1}}$ első k darab oszlopának megfelelő konstansszorzóit a $k+1, \dots, m$ oszlophoz hozzáadva a még egyszerűbb alakú $A_{\underline{2}}$ mátrixot kapjuk.

$$A_{\underline{2}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{k} & & \underbrace{n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{1} \\ \vdots \\ \underbrace{k} \\ \vdots \\ \underbrace{m} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{k+1\ k+1} & \dots & b_{k+1\ n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{m\ k+1} & \dots & b_{m\ n} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Megmutatjuk, hogy az $A_{\underline{2}}$ mátrix jobb alsó sarkában levő elemek is nullák. Tegyük fel ugyanis, hogy $i > k, j > k$ és $b_{ij} \neq 0$. Ez lehetetlen, mert akkor az i . oszlopvektor lineárisan független lenne az első k oszlopvektortól és az oszloprang $k+1$ volna, ellentétben az eredeti feltétellel. Tehát

$$A_{\underline{2}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \underbrace{1} & & \underbrace{k} & & \underbrace{n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{1} \\ \vdots \\ \underbrace{k} \\ \vdots \\ \underbrace{m} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0\dots & 0 & 0\dots & 0 \\ 0 & 1\dots & 0 & 0\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0\dots & 1 & 0\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0\dots & 0 & 0\dots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{és}$$

így $A_{\underline{2}}$ -nek pontosan k darab lineárisan független sorvektora van.

Mivel $\underline{A}$ sorsrangja $A_{\underline{2}}$ -ével azonos, állításunkat igazoltuk.

Fentiek alapján jogos a következő:

1.7. Definíció

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix megégyező oszlop- és sorrangját a mátrix rangjának nevezzük. A mátrix rangja tehát a mátrix oszlopvektorai ill. sorvektorai által generált vektortér dimenziószáma. E fogalom segítségével az 1.2. tétel egy átfogalmazása az

1.8. Tétel

Az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy az $\underline{\underline{A}}$ együttható mátrix rangja megegyezzen az un. kibővített mátrix rangjával. (Kibővített mátrixnak azt a mátrixot nevezzük, amelyet $\underline{\underline{A}}$ -ból a $\underline{b}$ vektor hozzávételével nyerünk.)

1.9. Példa

Állapítsuk meg, hogy megoldható-e a következő egyenletrendszer

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1$$

$$3x_1 - x_3 + 4x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

A kibővített mátrix - utolsó oszlopként írva a $\underline{b}$ vektort - a következő:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Elemi sor- és oszlopműveleteket végzünk

1. Az első oszlop megfelelő konstansszorosait kivonva a többi oszlopból:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ 3 & -3 & -7 & 4 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ adódik.}$$

2. A második oszloppal operálva a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk.

A mátrix rangja és a kibővített mátrix rangja is három, tehát van megoldás.

2. A LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAINAK SZÁMÁRÓL ÉS A MEGOLDÁS MÓDJÁRÓL

A megoldhatóság kérdésén kívül még két alapvető probléma merül fel az egyenletrendszerekkel kapcsolatban. Az egyik kérdés, hogy egyértelmű-e a vizsgált egyenletrendszer megoldása, ha nem egyértelmű, akkor hány megoldása van. A másik probléma, hogy hogyan lehet a legkevesebb fáradsággal, illetve számítógépre is alkalmazható módszerrel megkeresni a megoldásokat.

2.1. Tétel

Az

$$\underline{Ax} = \underline{b} \quad (\underline{b} \neq \underline{0})$$

inhomogén egyenletrendszer bármely $\underline{x}_i$ megoldása előállítható az inhomogén egyenletrendszer egy tetszőleges $\underline{x}_p$ un. partikuláris megoldásának és az $\underline{Ax} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszer egy $\underline{x}_h$ megoldásának összegeként.

Bizonyítás:

Azt kell megmutatni, hogy $\underline{x}_i - \underline{x}_p$ megoldása az $\underline{Ax} = \underline{0}$ egyenletnek. Ezt behelyettesítéssel igazoljuk:

$$\underline{A} (\underline{x}_i - \underline{x}_p) = \underline{Ax}_i - \underline{Ax}_p,$$

a szorzás disztributivitását felhasználva.

$$\underline{Ax}_i = \underline{b} \quad \text{és} \quad \underline{Ax}_p = \underline{b}, \quad \text{mert } \underline{x}_i \text{ és } \underline{x}_p$$

megoldásai az inhomogén egyenletrendszernek. Így

$$\underline{A} \underbrace{(\underline{x}_i - \underline{x}_p)}_{\underline{x}_h} = \underline{0}$$

és akkor

$$\underline{x}_i = \underline{x}_p + \underline{x}_h, \text{ mint állítottuk. } \blacksquare$$

Fentiek következménye, hogy ha az $\underline{Ax} = \underline{b}$ inhomogén egyenletrendszer megoldható, akkor megoldásainak a száma megegyezik az $\underline{Ax} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásainak számával. Ezért a továbbiakban az $\underline{Ax} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak számával - először a megoldás egyértelműségével foglalkozunk.

2.2. Tétel

Ha az együttható mátrix $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor az $\underline{Ax} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszernek egy megoldása van: az $\underline{x} = \underline{0}$ vektor, és fordítva, ha az egyenletrendszernek egy megoldása van, akkor az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ vektorrendszer lineárisan független.

Bizonyítás:

Az állítás a lineáris függetlenség fogalmából következik. $\blacksquare$
A 2.2. Tétel egy más megfogalmazása a

2.3. Tétel

Egy homogén lineáris egyenletrendszer egyértelmű megoldásának szükséges és elégséges feltétele, hogy az együttható mátrix rangja megegyezzen az ismeretlenek számával.

Következmény:

Az inhomogén lineáris egyenletrendszernek - ha egyáltalán megoldható - akkor és csak akkor van egy megoldása, ha az együttható mátrix rangja azonos az ismeretlenek számával.

Mivel az egyenletrendszer mátrixának rangja nagyobb nem lehet az oszlopok vagyis az ismeretlenek számánál, azért azt kell még megvizsgálni, hogy hány megoldása van, ha a rang kisebb az ismeretlenek számánál. Ehhez megmutatjuk, hogy a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásvektorai vektorteret alkotnak és ennek dimenziója az együttható vektorok közötti, lineárisan függetlenek számától függ.

2.4. Tétel

Az

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldásvektorai az n dimenziós oszlopvektortérnek egy

$$n - \text{rang } \underline{A}$$

dimenzióju alterét alkotják.

Bizonyítás:

1. Ha $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ megoldásai az $\underline{Ax} = \underline{0}$ egyenletrendszernek, akkor tetszőleges c_1, c_2 skalárok esetén

$$\underline{A} (c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2) = c_1 \underline{Ax}_1 + c_2 \underline{Ax}_2 = \underline{0},$$

tehát $c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2$ is megoldás.

2. Az altér dimenziószámának meghatározását úgy végezzük, hogy először konstruálunk $n - \text{rang } \underline{A}$ számú független megoldásvektort, majd megmutatjuk, hogy több független vektor nincs a megoldásvektorok alterében.

Legyen $\text{rang } \underline{A} = k$. Nem jelenti az általánosság megszorítását, ha feltesszük, hogy $\underline{A}$ első k oszlopvektora $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ lineárisan függetlenek. Ekkor $\underline{a}_{k+1}, \dots, \underline{a}_n$ mindegyike és akkor $(-1-)$ -szere-seik is előállíthatók $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ lineáris kombinációiként:

$$-\underline{a}_i = x_{i1} \underline{a}_1 + x_{i2} \underline{a}_2 + \dots + x_{ik} \underline{a}_k, \quad (i=k+1, \dots, n) \quad (1)$$

Ezt átrendezve:

$$x_{i1} \underline{a}_1 + x_{i2} \underline{a}_2 + \dots + x_{ik} \underline{a}_k + \underline{a}_i = \underline{0}, \quad (i=k+1, \dots, n) \quad (2)$$

$n-k$ egyenlőséget kapunk, amelyekből kiolvasható az egyenletrendszer alábbi $n-k$ számú lineárisan független megoldása.

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{k+1} 1 \\ x_{k+1} 2 \\ \vdots \\ x_{k+1} k \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{x}_{k+2} = \begin{pmatrix} x_{k+2} 1 \\ x_{k+2} 2 \\ \vdots \\ x_{k+2} k \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots \underline{x}_n = \begin{pmatrix} x_n 1 \\ x_n 2 \\ \vdots \\ x_n k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Konstruáltunk tehát $n-k$ lineárisan független megoldást. Megmutatjuk, hogy több független vektor nincs a megoldások terében.

Legyen

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

egy tetszőleges megoldás. Ez azt jelenti, hogy

$$c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + \dots + c_{k-k} \underline{a}_{k-k} + \dots + c_n \underline{a}_n = \underline{0}. \quad (4)$$

(1)-et (4)-be helyettesítve kapjuk

$$c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + \dots + c_{k-k} \underline{a}_{k-k} - \sum_{i=k+1}^n (c_i x_{i1} \underline{a}_1 + \dots + c_i x_{ik-k} \underline{a}_{k-k}) = \underline{0}$$

és ezt átrendezve:

$$\underline{a}_1 (c_1 - \sum_{i=k+1}^n c_i x_{i1}) + \underline{a}_2 (c_2 - \sum_{i=k+1}^n c_i x_{i2}) + \dots +$$

$$+ c_k (c_k - \sum_{i=k+1}^n c_i x_{ik}) = 0.$$

Felhasználva az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris függetlenségét, az utolsó vektoregyenletből

$$c_1 = \sum_{i=k+1}^n c_i x_{i1}, \dots, c_k = \sum_{i=k+1}^n c_i x_{ik}$$

összefüggések adódnak, ami azt jelenti, hogy

$$\underline{c} = c_{k+1} \underline{x}_{k+1} + c_{k+2} \underline{x}_{k+2} + \dots + c_n \underline{x}_n,$$

vagyis az előbbi $n-k$ darab független vektor bázisát alkotja a megoldástérnek. A megoldástér tehát valóban $n-k$ dimenziós altere az n dimenziós oszlopvektortérnek, amint azt állítottuk.

Következmény:

Ha az $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$, ($\underline{b} \neq 0$) inhomogén egyenletrendszer $\underline{A}$ együttható mátrixának a rangja (r) kisebb mint az ismeretlenek száma (n), akkor az egyenletrendszernek, amennyiben egyáltalán van megoldása, úgy végtelen sok van és az $\underline{x}$ megoldásvektorok $\underline{x} = \underline{x}_p + \underline{x}_h$ alakúak (2.1. tétel), ahol az $\underline{x}_h$ vektorok az n dimenziós oszlopvektortérnek $n-r$ dimenziós alterét feszítik ki.

Az egyenletrendszer megoldásának módjával foglalkozunk a továbbiakban. A követendő módszer mechanizmusa megegyezik a középiskolában tanult "egyenlő együtthatók" módszerével.

2.5. A lineáris egyenletrendszer megoldása báziscserével

Keressük az $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$, ($\underline{b} \neq 0$), részletesebben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

mátrix-egyenlet megoldását. Ha a bővített együttható-mátrix $(\underline{A}\underline{b})$ oszlopvektoraival lecseréljük az oszlopvektortér

$$\underline{e}_i = \begin{pmatrix} e_{1i} \\ \vdots \\ e_{mi} \end{pmatrix}, \quad e_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{ha } j \neq i \\ 1 & \text{ha } j = i \end{cases}$$

un. egységvektorokból álló bázisát, akkor - ismét az egyszerűbb írásmód kedvéért - feltételezve, hogy az első k darab oszlopvektor lineárisan független és rendre lecserélhető az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ vektorokkal, a kibővített mátrix

$$(\underline{A}\underline{b}) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \underline{1} & \underline{2} & \dots & \underline{k} & \dots & \underline{n} & \underline{b}'_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1k+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{k k+1} & \dots & a'_{kn} & b'_k \end{matrix} \\ \begin{matrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \underline{1} \\ \dots \\ \underline{k} \\ \dots \\ \underline{m} \end{matrix}$$

alaku lesz. Az (1) mátrixegyenlet pedig az

$$\underline{A}_1 \underline{x} = \underline{b}_1 \quad (2)$$

alakot ölti.

Az új egyenletrendszer megoldásainak kiolvasása igen egyszerű:

a) Az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldása:

$\underline{x}_{ip} = \underline{b}_1$, a megfelelő homogén egyenletrendszer $n-k$ darab független megoldása:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} -a'_{1 k+1} \\ \vdots \\ -a'_{k k+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \dots ; \underline{x}_n = \begin{pmatrix} -a'_{1 n} \\ \vdots \\ -a'_{kn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

amelyekből az inhomogén egyenletrendszer megoldásai az ismert módon kaphatók:

$$\underline{x} = \underline{x}_{ip} + c_1 \underline{x}_{k+1} + c_2 \underline{x}_{k+2} + \dots + c_{n-k} \underline{x}_n,$$

ahol $c_1, c_2, \dots, c_{n-k}$ tetszőleges számok. Az (1) és (2) egyenletrendszerek megoldásai azonban megegyeznek, mivel a bázistranszformáció során az egyenletrendszeren csak un. ekvivalens átalakítások történtek - nem nulla számmal szorzás és valamely egyenlet konstansszorosának más egyenlethez történő hozzáadása - és így az eredeti egyenletrendszer is megoldottuk.

Megjegyzés:

Az egyenletrendszer megoldásának ez a módszere több szempontból is előnyös. Egyrészt a megoldhatóság vizsgálata, a megoldások számának meghatározása és a megoldás keresése egyszerre, azonos módon történik, másrészt számítógéppel történő megoldás esetén is alkalmazható.

2.6. Példák

1. Oldjuk meg a következő homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ \textcircled{1} & 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Az rögtön látszik, hogy van nem triviális megoldása az egyenletrendszernek, mivel a négydimenziós oszlopvektortérben négynél több lineárisan független vektor nincs. A független megoldások számának meghatározásához és ezek megkereséséhez bázistranszformációt végzünk az oszlopvektortérben. Hogy követhető legyen a báziscsere mene-

te, a mátrixban bekarikázzuk a bázisba bevonandó vektornak annyiadik koordinátáját, ahányadik egységvektort cseréljük le vele.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{-1} & 7 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -3 & \textcircled{-1} \\ 0 & 0 & 20 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Innen kiolvasható, hogy az együttható mátrix rangja 3, tehát a megoldásvektorok egy 2 dimenziós vektorteret generálnak.

Két független megoldásvektor:

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

és az összes megoldások:

$$\underline{x} = c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2$$

alakúak.

2. Oldjuk meg a következő inhomogén egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 &= 5 \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

A bővített mátrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ \textcircled{-1} & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 6 & 2 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Az első, harmadik, negyedik és ötödik egyenletek ekvivalensek, ezért egy kivétellel elhagyhatók. Így

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & \textcircled{1} & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

adódik, vagy egyszerűbb alakban:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

A bővített mátrix rangja az együtttható mátrix rangjával megegyezően kettő. Így a homogén egyenletrendszer megoldásai kétdimenziós vektorteret alkotnak. Ennek egy bázisa:

$$\underline{x}_{1h} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_{2h} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Az inhomogén egyenletrendszer egy megoldása:

$$\underline{x}_{ip} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az inhomogén egyenletrendszer megoldásai tehát:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tetszőleges c_1, c_2 esetén.

3. INVERZ MÁTRIX

A III. fejezetben definiáltuk az inverz mátrix fogalmát. Most kvadratikus $\underline{A}$ mátrix esetén az inverz létezésének feltételét és meghatározását vizsgáljuk.

3.1. Tétel

Ha

$\underline{A}$ kvadratikus mátrix,
 $\underline{A} \cdot \underline{A}_j^{-1} = \underline{E}$, és $\underline{A}_b^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$,

akkor

$$\underline{A}_j^{-1} = \underline{A}_b^{-1}.$$

Bizonyítás:

Alakítsuk át az

$$(\underline{A}_b^{-1} \cdot \underline{A}) \underline{A}_j^{-1} = \underline{A}_j^{-1}$$

baloldalát, az asszociativitást felhasználva:

$$\underline{A}_b^{-1} (\underline{A} \cdot \underline{A}_j^{-1}) = \underline{A}_b^{-1}$$

Ebből következik, hogy

$$\underline{A}_j^{-1} = \underline{A}_b^{-1},$$

vagyis a jobb- és balinverz megegyezik és ez az $\underline{A}^{-1}$ inverzmátrix.

Egy mátrix invertálhatóságának szükséges és elégséges feltételét fogalmazza meg a

3.2. Tétel

Az $\underline{A}$ $n \times n$ -es kvadratikus mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha $\underline{A}$ oszlopvektorai mind lineárisan függetlenek és akkor az $\underline{A}^{-1}$ inverzmátrix egyértelműen létezik.

Bizonyítás:

Az állítás első része az 1.2. tételből következik, ugyanis az

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{E}$$

részletesebben írva az

$$\underline{A} \cdot (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$$

mátrix-egyenlet megoldhatóságának feltételét keressük, ami ekvivalens az

$$\underline{Ax_i} = \underline{e_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

n darab inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával.

Az 1.2. tétel alapján a (2) egyenletrendszerek akkor és csak akkor oldhatók meg, ha $\underline{e_1}, \underline{e_2}, \dots, \underline{e_n}$ benne vannak az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorai által generált vektortérben. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha az $\underline{A}$ oszlopvektorai által generált vektortér n -dimenziós, vagyis $\underline{A}$ oszlopvektorai - persze akkor sorvektorai is - lineárisan független rendszert alkotnak. A megoldás egyértelműségéről szóló 2.3. tétel következményeként ekkor a (2) alatti egyenletrendszerek és így az (1) alatti $\underline{AX} = \underline{E}$ egyenlet is egyértelműen oldható meg, vagyis a jobb-oldali inverz egyértelmű. Ugyanez a feltétele az $\underline{YA} = \underline{E}$ egyenlet egyértelmű megoldhatóságának is és így 3.1. alapján az invertálhatóságnak.

3.3. Példa

Határozzuk meg - amennyiben létezik az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét.

Az inverz létezésének megállapítása és az inverz mátrix megkeresése egyszerre történhet úgy, hogy egyszerre oldjuk meg az

$$\underline{Ax_i} = \underline{e_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

egyenletrendszereket.

A szokott módon $\underline{A}$ mellé írjuk az egyenletrendszer jobb oldalán álló vektort - most mind az n darab jobb oldali vektort - ekkor a következő bővített mátrixot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

és $\underline{A}$ oszlopait bevonva a bázisba, adódik

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

Tehát $\underline{\underline{A}}^{-1}$ létezik és

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

4. KITŰZÖTT FELADATOK

1. Bizonyítsa be, hogy

$$\text{rang } (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \leq \text{rang } \underline{\underline{A}} + \text{rang } \underline{\underline{B}}$$

2. Bizonyítsa be, hogy

$$\text{rang } (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \leq \min (\text{rang } \underline{\underline{A}}, \text{rang } \underline{\underline{B}})$$

3. Konstruáljon olyan kvadrátikus $\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{E}}$ mátrixot, amelynek inverze megegyezik a transzponáltjával:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{E}}.$$

4. Bizonyítsa be, hogy ha egy lineáris egyenletrendszernek van két különböző pozitív megoldása, akkor van nem pozitív megoldása is. (Az $\underline{\underline{x}}$ megoldást pozitívnak nevezzük, ha minden koordinátája pozitív.)

VI. A DETERMINÁNS

1. A DETERMINÁNS FOGALMA ÉS ÉRTÉKÉNEK KISZÁMÍTÁSA

A matematika különböző területein - az algebrában, az analízisben, sőt még a geometriában is - és műszaki problémák megoldásánál is hasznos segédeszköz a determináns. E jegyzet első fejezetében már használtunk determinánst többek között paralelogramma alapu hasáb térfogatának kiszámításánál, anélkül, hogy általánosan meghatároztuk volna a fogalmát. Induljunk most ki az említett vektoralgebrai problémából.

Legyen

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$$

$$\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$$

$$\underline{c} = c_1 \underline{i} + c_2 \underline{j} + c_3 \underline{k}$$

Tudjuk, hogy ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan függetlenek - nem egysikuak - akkor az általuk kifeszített hasáb előjeles térfogatát megadja az $\underline{a} \underline{b} \underline{c}$ vegyszorzat. Ha a vektorok koordinátáit mátrixba rendezzük:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

fentiek úgy is fogalmazhatók, hogy az $\underline{A}$ mátrixhoz hozzárendeltünk egy számot, az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatát. (Az I. 5.3./5 tételben azt is megmutattuk, hogy hogyan lehet ezt a számot a koordinátákból kiszámítani.) Ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineárisan összefüggnek - egysikuak -, akkor $\underline{a} \underline{b} \underline{c} = 0$ és mondhatjuk, hogy lineárisan összefüggő $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ esetén $\underline{A}$ -hoz nullát rendeltünk.

Igy értelmeztünk egy függvényt, amely a harmadrendű kvadrátikus mátrixok halmazán értelmezett és minden ilyen mátrixhoz a fent leírt módon rendel számot. Nevezzük ezt a függvényt harmadrendű determinánsnak.

1.1. A harmadrendű determináns néhány tulajdonsága

1. Az egységoldalú kocka térfogata 1. Ebből következik, hogy az

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz a determináns 1-et rendel. Rövidebben: $\det \underline{\underline{E}} = 1$.

2. Ha egy hasáb élét c -szeresre változtatjuk, akkor c -szeresre változik a térfogat is. Ugyanis a $c \cdot \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ által kifeszített hasáb térfogata:

$$V_1 = c \cdot \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3 = c \cdot V,$$

amennyiben $V = \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3$.

Ebből következik, hogy ha

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = D, \quad \text{akkor}$$

$$\det \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c \cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c \cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = c \cdot D$$

3. Az $\underline{a} + \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok által kifeszített hasáb térfogata az $\underline{a}, \underline{c}, \underline{d}$ és $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok által kifeszített hasábok térfogatainak összege, ugyanis:

$$(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} \times \underline{d} = \underline{a} \times \underline{c} \times \underline{d} + \underline{b} \times \underline{c} \times \underline{d}$$

Ebből következik, hogy

$$\det \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

4. Végül, ha a mátrixnak van két azonos oszlopa, akkor determinánsa nulla, ugyanis a lineárisan összefüggő vektorok által kifeszített "hasáb" térfogata $\underline{a} \underline{b} \underline{c} = 0$.

Azért ragadtuk ki a harmadrendű determinánsnak ezt a négy tulajdonságát, mert ezek segítségével fogjuk definiálni tetszőleges n -edrendű kvadratikus mátrix determinánsát.

1.2. Definíció

n -edrendű determinánsnak azt a függvényt nevezzük, amely az n -edrendű kvadratikus mátrixokhoz rendel számot a következő módon:

$$1^0 \quad \det \underline{E} = 1$$

$$2^0 \quad \det (\underline{a}_1 \dots c \underline{a}_i \dots \underline{a}_n) = c \det (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i \dots \underline{a}_n)$$

$$3^0 \quad \det (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i + \underline{b} \dots \underline{a}_n) = \\ = \det (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i \dots \underline{a}_n) + \det (\underline{a}_1 \dots \underline{b} \dots \underline{a}_n)$$

$$4^0 \quad \det (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i \underline{a}_{i+1} \dots \underline{a}_n) = 0, \quad \text{ha} \quad \underline{a}_i = \underline{a}_{i+1}.$$

Megjegyzések

1. Természetesen ez a definíció akkor megfelelő, ha megmutatjuk, hogy minden n -re van olyan függvény, amely eleget tesz az axiómáknak és az axiómarendszer egyértelműen határozza meg ezt a függvényt. Erre a kérdésre visszatérünk.
2. A 2^0 és 3^0 axióma azt fejezi ki, hogy a determináns az oszlopvektoroknak homogén lineáris függvénye.

Elnevezés és jelölés:

Azt a számot, amelyet a determináns a kvadratikus $\underline{A}$ mátrixhoz rendel, az $\underline{A}$ mátrix determinánsának nevezzük és

$$\det \underline{A}, \quad |\underline{A}| \quad \text{vagy}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{módon jelöljük.}$$

Az axiómarendszer néhány következménye:

1.3. Tétel

Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix egyik oszlopa csupa nulla elemből áll, akkor

$$\det \underline{\underline{A}} = 0.$$

Bizonyítás:

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix csupa nullából álló oszlopát tetszőleges $c \neq 0$ számmal megszorozva a mátrix és így determinánsa is változatlan marad.

Másrészt a 2^0 axióma alapján $\det \underline{\underline{A}}$ a $c \neq 0$ számmal szorozódik.

Igy

$$c \cdot \det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}}, \text{ amiből}$$

$c \neq 0$ miatt $\det \underline{\underline{A}} = 0$ következik. ■

1.4. Tétel

Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix két oszlopát felcseréljük, a determináns (-1) -gyel szorzódik.

Bizonyítás:

Mivel a mátrix i . és j . oszlopának felcserélése (legyen $i < j$) $2(j-i)-1$ szomszédos cserével megvalósítható, ezért elég az állítást szomszédos oszlopokra belátni. Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix i . és $i+1$. oszlopának felcserélésével nyert mátrixot $\underline{\underline{A}}_1$ -gyel jelölve megmutatjuk, hogy

$$\det \underline{\underline{A}}_1 = - \det \underline{\underline{A}}.$$

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot módosítsuk úgy, hogy az i . és az $(i+1)$ oszlopába is $\underline{\underline{a}}_i + \underline{\underline{a}}_{i+1}$ -et írunk. A 4^0 axióma alapján

$$\det (\underline{\underline{a}}_1 \dots \underline{\underline{a}}_i + \underline{\underline{a}}_{i+1} \quad \underline{\underline{a}}_i + \underline{\underline{a}}_{i+1} \dots \underline{\underline{a}}_n) = 0 \quad (1)$$

A 3^0 axiómát felhasználva (1)-ből következik, hogy

$$\det (\underline{\underline{a}}_1 \dots \underline{\underline{a}}_i \quad \underline{\underline{a}}_i + \underline{\underline{a}}_{i+1} \dots \underline{\underline{a}}_n) + \det (\underline{\underline{a}}_1 \dots \underline{\underline{a}}_{i+1} \quad \underline{\underline{a}}_i + \underline{\underline{a}}_{i+1} \dots \underline{\underline{a}}_n) = 0 \quad (2)$$

és ismét a 3^0 axiómát alkalmazva:

$$\begin{aligned} & \det (\underline{\underline{a}}_1 \dots \underline{\underline{a}}_i \quad \underline{\underline{a}}_i \dots \underline{\underline{a}}_n) + \det (\underline{\underline{a}}_1 \dots \underline{\underline{a}}_i \quad \underline{\underline{a}}_{i+1} \dots \underline{\underline{a}}_n) + \\ & + \det (\underline{\underline{a}}_1 \dots \underline{\underline{a}}_{i+1} \quad \underline{\underline{a}}_i \dots \underline{\underline{a}}_n) + \det (\underline{\underline{a}}_1 \dots \underline{\underline{a}}_{i+1} \quad \underline{\underline{a}}_{i+1} \dots \underline{\underline{a}}_n) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

A 4^o axiómából következik, hogy (3)-ban az első és az utolsó tag nulla, és így

$$\det(a_1 \dots a_i \quad a_{i+1} \dots a_n) = - \det(a_1 \dots a_{i+1} \quad a_i \dots a_n),$$

mint állítottuk. ■

1.5. Tétel

Ha egy $\underline{A}$ mátrix valamelyik oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlopának konstansszorosát, $\det \underline{A}$ nem változik.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \det(a_1 \dots a_i + c \cdot a_j \dots a_j \dots a_n) &= \\ &= \det(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n) + \det(a_1 \dots c \cdot a_j \dots a_j \dots a_n) \end{aligned}$$

a 3^o axióma alapján. Az összeg második tagja viszont a 2^o és 4^o axióma értelmében nulla. Ezzel állításunkat igazoltuk. ■

Az 1.3., 1.4., 1.5. tételek a determináns fontos tulajdonságait ismertették. Ha van $n \neq 3$ esetén is n -edrendű determináns, akkor az a fenti három tulajdonsággal rendelkezik, így felhasználhatjuk ezeket a tulajdonságokat is az exisztencia és unicitás bizonyításához.

1.6. Tétel

Az axióma-rendszer minden kvadratikus mátrixhoz egyértelműen rendel determinánst.

Bizonyítás:

Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

bázisban $\underline{A}$ oszlopvektorai egyértelműen előállíthatók

$$\begin{aligned}\underline{a}_1 &= a_{11} \underline{e}_1 + \dots + a_{n1} \underline{e}_n \\ &\dots \\ \underline{a}_n &= a_{1n} \underline{e}_1 + \dots + a_{nn} \underline{e}_n\end{aligned}$$

alakban. A 3^o axióma felhasználásával $\det \underline{A} \neq 0$ mátrix determinánsának összegeként állítható elő. Ezek közül azonban a 4^o axióma következtében minden olyan tag nulla, amelyben legalább két azonos oszlopvektor szerepel.

Igy $\det \underline{A}$ egyértelműen a következő összegként írható:

$$\begin{aligned}\det \underline{A} &= \det (a_{11} \underline{e}_1 + \dots + a_{n1} \underline{e}_n, \dots, a_{1n} \underline{e}_1 + \dots + a_{nn} \underline{e}_n) = \\ &= \det (a_{11} \underline{e}_1, a_{22} \underline{e}_2, \dots, a_{nn} \underline{e}_n) + \\ &+ \det (a_{21} \underline{e}_2, a_{12} \underline{e}_1, \dots, a_{nn} \underline{e}_n) + \dots + \\ &+ \det (a_{n1} \underline{e}_n, \dots, a_{1n} \underline{e}_1).\end{aligned}\quad (1)$$

A jobb oldalon annyi mátrix determinánsának az összege szerepel, ahány különböző sorrendje van az 1, 2, ..., n számoknak. A 2^o axióma felhasználásával a következő adódik (1)-ből:

$$\begin{aligned}\det \underline{A} &= a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn} \det (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) + \\ &+ a_{21} \dots a_{nn} \det (\underline{e}_2, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) + \dots + \\ &+ a_{n1} \dots a_{1n} \det (\underline{e}_n, \dots, \underline{e}_1)\end{aligned}\quad (2)$$

Ha megmutatjuk, hogy minden egységoszlopvektorból álló mátrixhoz tartozik egyértelműen meghatározott determináns, akkor állításunkat igazoltuk. Ez az 1^o axiómából következik, felhasználva az 1.4. tételt.

Az 1^o axióma szerint:

$$\det (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = 1$$

A többi egységoszlopvektorokból álló mátrix oszlopcsereével keletkezik az $\underline{E}$ mátrixból és így - aszerint, hogy páros vagy páratlan számú oszlopcsereével keletkezik-e - determinánsa 1, vagy -1.

Az $\underline{A}$ mátrix determinánsa az előbbieket alapján:

$$\det \underline{A} = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} (-1)^{J(p)} a_{p_1 1} \cdot a_{p_2 2} \dots a_{p_n n} \quad (3)$$

ahol $p_1, \dots, p_n$ az $1, 2, \dots, n$ számok egy sorrendje, az összegezést az összes különböző sorrendekre kell elvégezni. A $J(p)$ kitevő azon sorindex-cserék száma, amellyel a sorindexek természetes sorrendbe rendezhetők.

Ezzel megmutattuk, hogy minden kvadratikuss mátrixnak van egyértelműen meghatározott determinánsa, és módszert is nyertünk - gyakorlati számításokra nem a legalkalmasabbat - a kiszámítására. ■

1.7. Definíció

Az $\underline{A}$ mátrix minormátrixának azokat a mátrixokat nevezzük, amelyek az $\underline{A}$ mátrix bizonyos sorainak és oszlopainak törlésével keletkeznek.

Jelölés:

Az $\underline{A}$ mátrix i . sorának és j . oszlopának törlésével keletkező minormátrixot $\underline{A}_{ij}$ -vel jelöljük és az a_{ij} elemhez tartozó minormátrixnak nevezzük.

A következő tétel azt mutatja meg, hogy hogyan lehet az $n \times n$ -es $\underline{A}$ mátrix determinánsának kiszámítását n darab $(n-1)$ -ed rendű minormátrix determinánsának meghatározására visszavezetni.

1.8. Tétel

Legyen $\underline{A} = (a_{ij})$, $n \times n$ -es mátrix

$$\det \underline{A} = (-1)^{k+1} a_{1k} \det \underline{A}_{1k} + \dots + (-1)^{k+n} a_{nk} \det \underline{A}_{nk}, \quad (1)$$

ahol $1 \leq k \leq n$.

A tétel szerint az $\underline{A}$ mátrix determinánsa előállítható úgy, hogy tetszőleges oszlopának minden elemét rendre megszorozzuk a hozzá tartozó minormátrix megfelelő előjellel ellátott determinánsával, és a kapott szorzatokat összeadjuk. Ezt az előállítást a determináns oszlop szerinti kifejtésének nevezzük.

Bizonyítás:

Az 1.6. tétel értelmében az axiómarendszer minden kvadratikuss mátrixhoz egyértelműen rendel determinánst, ezért állításunk igazolásához elég megmutatnunk, hogy a

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{A}_{ik} \quad 1 \leq k \leq n \quad (1)$$

összeg (az $\underline{A}$ mátrixhoz tartozó un. k-adik oszlop szerinti kifejtés) kielégíti az axiómarendszert.

1. Legyen $\underline{A} = \underline{E}$

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrixhoz tartozó (1) alatti k-adik oszlop szerinti kifejtés a következő alakú:

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ik} \det \underline{E}_{ik}; \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

Mivel $\det \underline{E}_{kk} = 1$, az összeg értéke 1, ami megegyezik $\det \underline{E}$ -vel és így (1) eleget tesz az 1^0 axiómának.

2. Szorozzuk meg az $\underline{A}$ mátrix j-edik oszlopának elemeit egy c számmal. A kapott mátrixot jelöljük $\underline{A}^{(j,c)}$ -vel.

a) Ha $j = k$, akkor az $\underline{A}^{(j,c)}$ -hez tartozó k-adik oszlop szerinti kifejtés:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} c a_{ik} \det \underline{A}_{ik} = c \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{A}_{ik}$$

A jobb oldal az $\underline{A}$ mátrixhoz tartozó (1) kifejtés c-szerese, tehát a $j = k$ esetben teljesül a 2^0 axióma.

b) Ha $j \neq k$, akkor az $\underline{A}^{(j,c)}$ -hez tartozó összeg:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{A}_{ik}^{(j,c)},$$

ahol $\det \underline{A}_{ik}^{(j,c)} = c \det \underline{A}_{ik}$, mivel $\underline{A}_{ik}^{(j,c)}$ j. oszlopa $\underline{A}_{ik}$ j. oszlopának c-szerese.

Igy

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{A}_{=ik}^{(j,c)} = c \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{A}_{=ik},$$

tehát teljesül a 2^o axióma a $j \neq k$ esetben is.

3. Adjunk hozzá az $\underline{A}$ mátrix j -edik oszlopához egy

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ oszlopvektort és az így kapott}$$

mátrixot jelöljük $\underline{A}^{(j,b)}$ -vel.

a) Ha $j = k$, akkor $\underline{A}^{(j,b)}$ -hez a következő (1) alakú kifejezés tartozik

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} (a_{ik} + b_i) \det \underline{A}_{=ik} = \\ & = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{A}_{=ik} + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} b_i \det \underline{A}_{=ik}, \end{aligned}$$

tehát a $j = k$ esetben fennáll a 3^o axióma.

b) Ha $j \neq k$, akkor az $\underline{A}^{(j,b)}$ -hez tartozó kifejtés a következő:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{A}_{=ik}^{(j,b)} \quad (2)$$

$\det \underline{A}_{=ik}^{(j,b)}$ két determináns összegére bontható. Az egyik $\det \underline{A}_{=ik}$, a másik ahhoz a mátrixhoz tartozik, amelyik

$$\underline{A}_{=ik} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{i-1,j} \\ a_{i+1,j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \text{ oszlopának a } \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{i-1} \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oszloppal történő helyettesítésével keletkezik (jelöljük ezt A_{ik}^b -vel). Ennek felhasználásával (2)-ből adódik:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}^{(j,b)} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}^b,$$

ami azt jelenti, hogy a mátrixhoz rendelt összeg a $j \neq k$ esetben is eleget tesz a 3^o axiómának.

4. Legyen az A mátrix j -edik és $(j+1)$ -edik oszlopa egyenlő.

a) Ha $k \neq j$ és $k \neq j+1$, akkor az A -hoz tartozó k -adik oszlop szerinti

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$
 kifejtés minden tagja nulla, mert az

A_{ik} mátrixok mindegyikének van két azonos oszlopa, és így

$$\det A_{ik} = 0 \quad i=1, \dots, n$$

miatt az A -hoz rendelt (1) alakú összeg is nulla.

b) Ha A két megegyező oszlopa a k -adik és a $(k+1)$ -edik, akkor a mátrix rendjére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk be, hogy a k -adik oszlop szerinti kifejtés nulla.

Legyen először A másodrendű mátrix. Ekkor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}, \quad \text{a kifejtés:}$$

$$a_{11} a_{21} - a_{11} a_{21} = 0.$$

Tegyük fel ezután, hogy állításunk minden legfeljebb $(n-1)$ -edrendű mátrixra igaz és mutassuk meg, hogy akkor n -edrendű A mátrixra is igaz.

Az A -hoz tartozó kifejtés:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} \quad (3)$$

Az indukciós feltevés és a tétel már bizonyított 1.2.3. pontja értelmében az $(n-1)$ -edrendű $\underline{A}$ mátrixok determinánsainak kifejtését már használhatjuk. $\det \underline{A}_{=ik}$ -t $i=1, 2, \dots, n$ -re az $\underline{a}_{=k+1}$ oszlop szerint kifejtve megmutatjuk, hogy (3) így nyert alakjában minden tagnak a (-1) -szerese is szerepel, tehát értéke nulla.

Írjuk fel két minormátrix determinánsának kifejtését:

$$\det \underline{A}_{=ik} = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+k} a_{jk+1} \det (\underline{A}_{=ik})_{jk+1} +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^n (-1)^{j+k-1} a_{jk+1} \det (\underline{A}_{=ik})_{jk+1}, \quad (1 \leq i \leq n)$$

és

$$\det \underline{A}_{=jk} = \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+k} a_{ik+1} \det (\underline{A}_{=jk})_{ik+1} +$$

$$+ \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+k-1} a_{ik+1} \det (\underline{A}_{=jk})_{ik+1}, \quad (1 \leq j \leq n)$$

$(\underline{A}_{=ik})_{jk+1}$ azt a mátrixot jelöli, amely $\underline{A}$ -ból annak i -edik és j -edik sorát és k -adik és $(k+1)$ -edik oszlopát elhagyva keletkezett.]

A kifejtéseket felhasználva írjuk fel (3) két tagját:

$$(-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{A}_{=ik} = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j+2k} a_{ik} a_{jk+1} \det (\underline{A}_{=ik})_{jk+1} +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j+2k-1} a_{ik} a_{jk+1} \det (\underline{A}_{=ik})_{jk+1} \quad (4)$$

$$(-1)^{j+k} a_{jk} \det \underline{A}_{=jk} = \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+j+2k} a_{jk} a_{ik+1} \det (\underline{A}_{=jk})_{ik+1} +$$

$$+ \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j+2k-1} a_{jk} a_{ik+1} \det (\underline{A}_{=jk})_{ik+1} \quad (5)$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\left. \begin{aligned} a_{jk+1} &= a_{jk} \\ a_{ik+1} &= a_{ik} \end{aligned} \right\}, \text{ mert a } k. \text{ és } (k+1) \text{ oszlop megegyezik}$$

$$\det \underset{=ik}{(A)}_{jk+1} = \det \underset{=jk}{(A)}_{ik+1}, \text{ mert}$$

azonos minormátrixok determinánsai,
végül, ha $i < j$ akkor a (4)-ben szereplő

$$(-1)^{i+j+2k-1} a_{ik} a_{jk+1} \det \underset{=ik}{(A)}_{jk+1}$$

tag (5) első szummájában ellenkező előjellel szerepel, hasonlóan $i > j$ esetén. Minden taggal együtt szerepel annak (-1) -szerese, tehát a (3) kifejtés értéke nulla.

Ezzel beláttuk, hogy a k . oszlop szerinti kifejtés ($1 \leq k \leq n$) eleget tesz a determinánst egyértelműen definiáló axiómarendszernek és ezzel az állítást bizonyítottuk. ■

Felmerül a kérdés, hogy ha felcseréljük egy mátrix sorait oszlopaival, akkor mi történik a determinánsával?

1.9. Tétel

$$\det \underline{\underline{A'}} = \det \underline{\underline{A}}$$

Bizonyítás:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{A'}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az 1.6. tételben szereplő kiszámítási formula szerint $\det \underline{\underline{A}}$ értékét megkapjuk, ha elkészítjük az összes olyan n tényezős szorzatot, amelyekben a mátrix minden sorából és oszlopából pontosan egy elem szerepel, és ezeket a "megfelelő" előjellel ellátva összeadjuk.

$\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{A'}}$ determinánsában ugyanazok az n tényezős szorzatok szerepelnek, csak azt kell megmutatni, hogy azonos előjellel is lépnek fel.

$\det \underline{\underline{A}}$ előállításának egy tetszőleges tagja:

$$(-1)^{J(p)} \cdot a_{p_1 1} \cdot a_{p_2 2} \cdot \dots \cdot a_{p_n n} \quad (1)$$

alaku, ahol mint tudjuk, a $J(p)$ kitevő azon sorindexcserék száma, amellyel a sorindexek természetes sorrendbe rendezhetők. Mivel $\underline{A'}$ az $\underline{A}$ mátrix transzponáltja, az $a_{p_i j}$ elem tetszőleges $1 \leq i \leq n$ eseten az $\underline{A'}$ mátrix j . sorában és p_i . oszlopában található. Így a fenti szorzat tényezőinek sorrendje eltérhet (1)-től, most ugyanis a $p_1, \dots, p_n$

indexek természetes sorrendjének megfelelően követik egymást a tényezők. Ez azonban a szorzat előjelén nem változtat. Ugyanis az $a_{p_1 1} \dots a_{p_n n}$ szorzatnak a $p_1 \dots p_n$ indexek természetes sorrendjének megfelelő átrendezése úgy változtatja meg az $1, 2, \dots, n$ indexek természetes sorrendjét, hogy pontosan annyi cserével lehet újból természetes sorrendbe rendezni, mint ahány cserével ezt a természetes sorrendet elrontottuk. Tehát a mátrixnak és transzponáltjának a determinánsa azonos. ■

Az 1.9. tételnek fontos következménye, hogy minden oszlopokkal kapcsolatos tulajdonság sorokra is érvényes.

Igy fennállnak 2., 3., 4. axiómának megfelelő tételek:

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a'_1} \\ \vdots \\ \underline{ca'_i} \\ \vdots \\ \underline{a'_n} \end{pmatrix} = c \cdot \det \begin{pmatrix} \underline{a'_1} \\ \vdots \\ \underline{a'_i} \\ \vdots \\ \underline{a'_n} \end{pmatrix} ;$$

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a'_1} \\ \vdots \\ \underline{a'_i + b'_i} \\ \vdots \\ \underline{a'_n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \underline{a'_1} \\ \vdots \\ \underline{a'_i} \\ \vdots \\ \underline{a'_n} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \underline{a'_1} \\ \vdots \\ \underline{b'_i} \\ \vdots \\ \underline{a'_n} \end{pmatrix} \quad \text{és}$$

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a'_1} \\ \vdots \\ \underline{a'_i} \\ \vdots \\ \underline{a'_i} \\ \vdots \\ \underline{a'_n} \end{pmatrix} = 0.$$

Ugyancsak érvényesek az 1.3., 1.4., 1.5. tételek megfelelői, amelyeket az olvasó is könnyen megfogalmazhat, az "oszlop" szó sorral való helyettesítésével.

1.10. Példa

Számítsuk ki az $\underline{A}$ mátrix determinánsát.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A determinánst legegyszerűbben az 1.5. tétel alapján számíthatjuk ki, felhasználva a 2. axiómát, az 1.4. tételt és az 1. axiómát. Ennek a módszernek az a lényege, hogy az $\underline{A}$ mátrixot elemi oszloptranszformációkkal egységmátrixszá, vagy nullvektort tartalmazó mátrixszá alakítjuk és a felsorolt axiómák, valamint tételek alapján nyomon kísérjük, hogy ezek a transzformációk hogyan változtatják meg a mátrix determinánsát.

Kísérjük végig e módszert a kitűzött feladaton. $\underline{A}$ első oszlopát 2-vel osztva

$$\det \underline{A} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Az átalakított mátrix első oszlopát a második oszlopból és kétszeresét a harmadik oszlopból kivonva:

$$\det \underline{A} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

A harmadik oszlop háromszorosát hozzáadva a második oszlophoz, majd azt elosztva (-10)-zel:

$$\det \underline{A} = -20 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

A második oszlop "megfelelő" konstansszorosait az első és harmadik oszlopból kivonva, majd a harmadik oszlopot (-1)-gyel megszorozva, és végül az utolsó két oszlopot felcserélve kapjuk

$$\det \underline{\underline{A}} = -20 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -20$$

Megjegyzés:

A determináns kiszámítása történhet sortranszformációkkal is és oszlop- és sortranszformációk együttes alkalmazásával is.

A III. fejezet 3. pontjában említést tettünk arról, hogy az elemi sor-, ill. oszloptranzformációkat létrehozhatjuk az egy-ségmátrix megfelelő transzformáltjával történő szorzással. Így például

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \overset{i}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & ca_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & ca_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{i}{=}$$

A bal oldalon álló tényezők determinánsainak a szorzata $|\underline{\underline{A}}| \cdot c$ és ez pontosan a jobb oldali mátrix determinánsa. A példa azt sejteti, hogy egy szorzat mátrix determinánsa a tényezők determinánsainak a szorzata. Ezt a sejtést igazolja az

1.11. Tétel

$$\det (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det \underline{\underline{A}} \cdot \det \underline{\underline{B}}$$

Bizonyítás:

Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{és}$$

jelöljük $\underline{A}$ oszlopvektorait rendre: $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ -nel. Fenti jelölésekkel:

$$\det (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det (b_{11} \underline{a}_1 + b_{21} \underline{a}_2 + \dots + b_{n1} \underline{a}_n, \dots, b_{1n} \underline{a}_1 + b_{2n} \underline{a}_2 + \dots + b_{nn} \underline{a}_n).$$

Hasonlóan az 1.6. tétel bizonyításához használjuk fel a 3. és 4. axiómát. A következő összeget kapjuk:

$$\det (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det (b_{11} \underline{a}_1, b_{22} \underline{a}_2, \dots, b_{nn} \underline{a}_n) + \det (b_{21} \underline{a}_2, \dots, b_{nn} \underline{a}_n) + \dots + \det (b_{n1} \underline{a}_n, \dots, b_{nn} \underline{a}_n).$$

Felhasználva a 2^o axiómát

$$\det (\underline{A} \cdot \underline{B}) = b_{11} b_{12} \dots b_{nn} \det (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n) + b_{21} \dots b_{nn} \det (\underline{a}_2 \dots \underline{a}_n) + \dots + b_{n1} \dots b_{nn} \det (\underline{a}_n, \dots, \underline{a}_1) \quad *$$

adódik.

Vegyük észre, hogy (*) minden tagjában $\det \underline{A}$ vagy $-\det \underline{A}$ szerepel tényezőként és $\det \underline{A}$ -t kiemelve, a második tényező $\det \underline{B}$ előállítása összeg alakban:

$$\det (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det \underline{A} \sum (-1)^{J(p)} b_{p_1 1} \dots b_{p_n n}.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk. ■

A szorzástétel következménye az

1.12 Tétel

Ha $\underline{A}$ invertálható mátrix, akkor

$$\det (\underline{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \underline{A}}.$$

Bizonyítás:

$\underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{E}$ -ből az 1.11. tételt felhasználva adódik:

a $\det \underline{A} \cdot \det \underline{A}^{-1} = 1$ állítás. ■

Megjegyzés:

A tételből az is kiderül, hogy invertálható mátrix determinánsa nem lehet nulla. Azt már régről tudjuk, hogy az invertálhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy a kvadrátikus $\underline{A}$ mátrix oszlop- ill. sorvektorai lineárisan függetlenek legyenek. Az 1.12. tétel szerint, ha $\underline{A}$ invertálható, akkor $\det \underline{A} \neq 0$, tehát ha $\underline{A}$ oszlopai ill. sorai lineárisan függetlenek, akkor $\det \underline{A} \neq 0$. Felmerül a kérdés hogy megfordítható-e a következtetés és általában, milyen kapcsolata van egymással a mátrix determinánsának és rangjának. Ezekkel a kérdésekkel foglalkozunk a következő pontban.

2. A DETERMINÁNS KAPCSOLATA A MÁTRIX RANGJÁVAL

Figyelembe véve vektoralgebrai ismereteinket azt várjuk, hogy egy mátrix determinánsa akkor és csak akkor nulla, ha oszlop- ill. sorvektorai lineárisan összefüggő rendszert alkotnak. Ugyanis a háromdimenziós vektortérben a paralelepipedon térfogata (az $\underline{a} \underline{b} \underline{c}$ vegyes-szorzat) akkor és csak akkor nulla, ha a három kifeszítő vektor egy-siku. Sejtésünk egyik része már az előző pont végén beigazolódott, másik részét most fogjuk bizonyítani. A kettőt együtt mondja ki a

2.1. Tétel

Az $n \times n$ -es $\underline{A}$ mátrix determinánsa akkor és csak akkor nulla, ha

$$\text{rang } \underline{A} < n.$$

Bizonyítás:

a) A fogalomból következik, hogy $\text{rang } \underline{A} \leq n$. Ha $\text{rang } \underline{A} = n$, akkor az n darab oszlopvektor ill. sorvektor lineárisan független. Mint az 1.12. tétel alapján már beláttuk, akkor

$$\det \underline{A} \neq 0.$$

b) Még be kell bizonyítanunk, hogy ha

$$\text{rang } \underline{A} < n, \text{ akkor}$$

$$\det \underline{A} = 0.$$

Ha $\text{rang } \underline{A} < n$, akkor $\underline{A}$ oszlopvektorai: $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ lineárisan összefüggők. Ezért vagy van közöttük $\underline{0}$ ekkor $\det \underline{A} = 0$ (l. 1.3. té-

tel), vagy van olyan $\underline{a}_i \neq \underline{0}$, amely kifejezhető a többi vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{a}_i = c_1 \underline{a}_1 + \dots + c_{i-1} \underline{a}_{i-1} + c_{i+1} \underline{a}_{i+1} + \dots + c_n \underline{a}_n,$$

ekkor az $\underline{A}$ mátrix $\underline{a}_i$ oszlopából $c_1 \underline{a}_1$ -et, majd $c_2 \underline{a}_2$ -t, végül $c_n \underline{a}_n$ -et levonva az $\underline{a}_i$ vektor helyére $\underline{0}$ kerül. Az 1.5. tétel szerint a fenti oszloptranszformációk következtében a determináns nem változik, így $\det \underline{A} = 0$. ■

Az előbbi tételből igen egyszerűen következik, hogy nem kvadratus mátrix rangja és nullától különböző determinánsu minormátrixainak rendje között kapcsolat van. Ezt fogalmazza meg a

2.2. Tétel

A k sorból és n oszlopból álló $\underline{A}$ mátrix rangja egyenlő $\underline{A}$ legnagyobb méretű nullától különböző determinánsu kvadratus minormátrixának sor-, ill. oszlopszámával.

Bizonyítás:

a) Először megmutatjuk, hogy ha az $\underline{A}$ mátrixnak van olyan $r \times r$ -es $\underline{B}$ minormátrixa, amelynek determinánsa nem nulla, de minden $r + 1$ -ed rendű minormátrix determinánsa nulla, akkor

$$\text{rang } \underline{A} = r.$$

Feltehetjük, hogy az $\underline{A}$ mátrix bal felső sarkában levő r -ed rendű minormátrix determinánsa nem nulla, hiszen ez sor- és oszlop-cserével - ami a rangon nem változtat - mindig elérhető.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \overbrace{a_{11} \dots a_{1r}}^{\underline{B}} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

$$\det \underline{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

a feltétel szerint. Ekkor a 2.1. tétel alapján oszlop- és sorvektorai lineárisan függetlenek. Az

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{pmatrix}$$

vektorok lineáris függetlenségéből viszont következik az $\underline{A}$ mátrix $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ vektorainak lineáris függetlensége. Hasonlóan igazak fentiek $\underline{A}$ sorvektoraira is. Több lineárisan független vektora $\underline{A}$ -nak nem lehet, mert akkor lenne legalább egy $r + 1$ -ed rendű nullától különböző determinánsu minormátrixa, a feltétellel ellentétben.

b) Másrészt, ha $\text{rang } \underline{A} = r$, akkor van r lineárisan független oszlop- ill. sorvektor.

Az általuk alkotott r -edrendű mátrix determinánsa a 2.1. tétel szerint nem nulla. Magasabb rendű nem nulla determinánsu minormátrixa $\underline{A}$ -nak nem lehet, mert akkor volna a feltétellel ellentétben r -nél több független vektora. ■

3. PÉLDÁK ÉS KITŰZÖTT FELADATOK

1. Mutassa meg, hogy ha $\underline{A}$ invertálható mátrix, akkor inverze előállítható a következőképpen:

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|} \begin{pmatrix} |\underline{A}_{11}| & -|\underline{A}_{21}| & \dots & (-1)^{n+1} |\underline{A}_{n1}| \\ -|\underline{A}_{12}| & |\underline{A}_{22}| & \dots & (-1)^{n+2} |\underline{A}_{n2}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} |\underline{A}_{1n}| & \dots & \dots & |\underline{A}_{nn}| \end{pmatrix}$$

$\underline{A}_{ij}$ az 1.7. definícióban használt jelölésnek megfelelően az $\underline{A}$ mátrix i . sorának és j . oszlopának törlésével keletkező minormátrix.

Végezzük el az $\underline{A} \underline{A}^{-1}$ szorzást. A szorzat első eleme az $\underline{A}$ mátrix determinánsának az első sor szerinti kifejtése:

$$a_{11} |\underline{A}_{11}| - a_{12} |\underline{A}_{12}| + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} |\underline{A}_{1n}| = |\underline{A}|.$$

A szorzat mátrix első sorának második eleme:

$$-a_{11} |A_{21}| + a_{12} |A_{22}| - \dots (-1)^{n+2} a_{1n} |A_{2n}|,$$

amelynek értéke nulla, mivel az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nulla determinánsu mátrix második sor szerinti kifejtése.

Hasonlóan belátható, hogy a szorzatmátrix főátlójában lesznek csupán nem nulla elemek és ezek mind $|A|$ -val egyenlők. Így

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \underline{E}.$$

2. Bizonyítsa be, hogy ha $\underline{A}$ mátrix főátlója fölött (vagy alatt) álló elemek mind nullák - $\underline{A}$ háromszögmátrix -, akkor a determináns értéke megegyezik a főátlóban álló elemek szorzatával.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az 1.8. tétel alapján az első oszlop szerinti kifejtéssel adódik az állítás.

3. Mutassa meg, hogy ha egy $\underline{A}$ mátrix a_{ij} elemei

$$a_{ij} = \min(i, j)$$

alakúak ($i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, n$), akkor $\det \underline{A} = 1$.

4. A

$$V_n = \begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

alakú mátrix determinánsát Vandermonde-féle determinánsnak nevezik. Mutassa meg, hogy

$$|V_n| = (a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n) \cdot (a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) \dots (a_{n-1} - a_n).$$

5. Bizonyítsa be, hogy ha

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{A}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_2 \end{pmatrix},$$

ahol $\underline{A}_1$ és $\underline{A}_2$ kvadratikus mátrixok, akkor

$$\det \underline{A} = \det \underline{A}_1 \cdot \det \underline{A}_2$$

6.

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & & & n \\ 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$$

Határozza meg a $P_n(x)$ polinom együtthatóit.

VII. EUKLIDESZI TEREK

A vektortér fogalmát a térvektorok bizonyos műveletei és ezek tulajdonságai alapján alakítottuk ki. A térvektorok halmazában azonban fontos szerepet játszik a skaláris szorzás, ugyanis a vektorok merőlessége, vetülete, távolsága, abszolútértéke mind a skaláris szorzattal fejezhető ki. Így, ha egy vektortérben be tudunk vezetni skaláris szorzásnak megfelelő műveletet, akkor fenti fogalmak is értelmezhetőek lesznek és mód nyílik határérték fogalom bevezetésére, analízis kiépítésére.

1. SKALÁRIS SZORZAT

1.1. Definíció

A V vektortérben skaláris szorzat (belső szorzat) értelmezett, ha V minden $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ elempárjához egyértelműen hozzárendelt egy skalár - jele: $(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)$; neve: $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ skaláris szorzata - és a hozzárendelés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $(\underline{v}_1 | \underline{v}_2) = \overline{(\underline{v}_2 | \underline{v}_1)}$
2. $(c \underline{v}_1 | \underline{v}_2) = c(\underline{v}_1 | \underline{v}_2) \quad (c \in K \text{ l. IV. 1.1.})$
3. $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2 | \underline{v}_3) = (\underline{v}_1 | \underline{v}_3) + (\underline{v}_2 | \underline{v}_3)$
4. $(\underline{v} | \underline{v}) \geq 0$ és $(\underline{v} | \underline{v}) = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$

Megjegyezzük, hogy ha V valós számtest feletti vektortér, akkor 1. a szorzás kommutativitását fejezi ki. A többi axiómák is a térvektorok között értelmezett skaláris szorzás jólismert legfontosabb tulajdonságait fejezik ki.

Az axiómák egyszerű következménye az

1.2. Tétel

$$(\underline{v}_1 | c \underline{v}_2) = \bar{c} (\underline{v}_1 | \underline{v}_2)$$

Bizonyítás:

$$(\underline{v}_1 | c \underline{v}_2) = \overline{(c \underline{v}_2 | \underline{v}_1)} \quad (1. \text{ axióma})$$

$$\overline{(c \underline{v}_2 | \underline{v}_1)} = c \overline{(\underline{v}_2 | \underline{v}_1)} \quad (2. \text{ axióma})$$

és akkor

$$(\underline{v}_1 | c \underline{v}_2) = \bar{c} (\underline{v}_1 | \underline{v}_2), \text{ mint állítottuk. } \blacksquare$$

1.3. Példák

1. Az n valós elemű oszlopmátrixok vektorterében skaláris szorzás a következő hozzárendelés:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$(\underline{a} | \underline{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Az olvasó gondolja végig, hogy mind a négy definiáló axióma teljesül.

2. Legyen V a komplex elemű számenneselek vektortere.

$$\text{Ha } \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

akkor skaláris szorzatot ad a következő hozzárendelés:

$$(\underline{v} | \underline{z}) = \sum_{i=1}^n v_i \bar{z}_i$$

3. Legyen V a $[0,1]$ intervallumon értelmezett valós folytonos függvények vektortere. (Műveletek: a függvényösszeadás és valós számmal szorzás) $f, g \in V$,

$$(f | g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti integrál is skaláris szorzást határoz meg:

Az 1. axióma teljesül, mert

$$\int_0^1 f(x) g(x) dx = \int_0^1 g(x) f(x) dx$$

A 2. axióma teljesül, mert

$$\int_0^1 c \cdot f(x) g(x) dx = c \cdot \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

A 3. axióma teljesül, mert

$$\int_0^1 [f(x) + g(x)] h(x) dx = \int_0^1 f(x) h(x) dx + \int_0^1 g(x) h(x) dx$$

és végül a 4. axióma is teljesül, mert ha $f(x) \equiv 0$

$$\text{akkor } \int_0^1 f^2(x) dx = 0 \quad \text{és ha } \int_0^1 f^2(x) dx = 0,$$

akkor folytonos f függvény esetén $f(x) \equiv 0$ lehet csak.

1.4. Definíció

Ha egy vektortérben skaláris szorzás értelmezett, akkor a vektorteret euklideszi térnek nevezzük.

Az n dimenziós euklideszi teret E_n -nel jelöljük.

2. NORMA

A továbbiakban az abszolútérték fogalmát fogjuk általánosítani, bevezetjük a norma fogalmát.

2.1. Definíció

A V vektortérben norma értelmezett, ha minden $\underline{v} \in V$ elemhez egyértelműen hozzárendelt egy valós szám - jele: $\|\underline{v}\|$; neve: $\underline{v}$ normája - és a hozzárendelés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\|\underline{v}\| \geq 0$ és $\|\underline{v}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$, ha $\underline{v} \in V$
2. $\|\underline{v}_1 + \underline{v}_2\| \leq \|\underline{v}_1\| + \|\underline{v}_2\|$, ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$
3. $\|c \cdot \underline{v}\| = |c| \cdot \|\underline{v}\|$, ha $\underline{v} \in V$ és $c \in K$

2.2. Példák

1. Az n elemű oszlop mátrixok vektorterében egy szokásos norma a következő:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \|\underline{v}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

2. A fenti vektortérben egy másik használatos norma:

$$\|\underline{v}\| = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

Az olvasó könnyen meggyőződhet arról, hogy mindkét esetben teljesülnek a norma fogalmát definiáló axiómák.

3. Az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények vektorterében egy gyakran használt norma:

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Az axiómák teljesülésének vizsgálatát feladatként tűzzük ki az olvasónak.

2.3. Definíció

Ha egy vektortérben norma értelmezett, akkor a vektorteret normált térnek nevezzük.

3. EUKLIDESZI TÉR ÉS NORMÁLT TÉR KAPCSOLATA, CAUCHY-BUNYAKOVSKIJ EGYENLŐTLENSÉG

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy minden euklideszi tér normált tér, ha $\|\underline{v}\| = \sqrt{(\underline{v} | \underline{v})}$ módon értelmezzük normát. Ennek belátásához is szükségünk van az egyébként is fontos egyenlőtlenségre:

3.1. Tétel: Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség

Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in E$, akkor

$$|(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)|^2 \leq (\underline{v}_1 | \underline{v}_1) \cdot (\underline{v}_2 | \underline{v}_2)$$

Bizonyítás:

Ha $\underline{v}_1 = \underline{0}$, vagy $\underline{v}_2 = \underline{0}$, akkor mindkét oldal nulla, tehát teljesül az egyenlőtlenség. A továbbiakban $\underline{v}_2 \neq \underline{0}$. Tetszőleges c komplex szám és $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in E$ vektorokra igaz - lásd a skaláris szorzat definícióját (148.o.), hogy

$$(\underline{v}_1 - c \underline{v}_2 | \underline{v}_1 - c \underline{v}_2) \geq 0 \quad (1)$$

Végezzük el a beszorzást és a skalárok kiemelését, akkor (1)-ből kapjuk:

$$(\underline{v}_1 | \underline{v}_1) - (c \underline{v}_2 | \underline{v}_1) - (\underline{v}_1 | c \underline{v}_2) + (c \underline{v}_2 | c \underline{v}_2) \geq 0 \quad (2)$$

$$(\underline{v}_1 | \underline{v}_1) - c (\underline{v}_2 | \underline{v}_1) - \bar{c} \overline{(\underline{v}_2 | \underline{v}_1)} + |c|^2 (\underline{v}_2 | \underline{v}_2) \geq 0 \quad (3)$$

Mivel a (3) egyenlőtlenség minden c komplex szám esetén teljesül, legyen

$$\frac{(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)}{(\underline{v}_2 | \underline{v}_2)} \quad (\text{feltettük, hogy } \underline{v}_2 \neq \underline{0})$$

(3)-ból $(\underline{v}_2 | \underline{v}_2)$ -vel szorzás és összevonás után adódik az állítás. ■

3.2. Tétel

Az E euklideszi térben $\sqrt{(\underline{v} | \underline{v})}$ normát határoz meg. - Ezt nevezzük euklideszi normának -.

Bizonyítás:

Meg kell mutassuk, hogy $(\underline{v} | \underline{v})$ megfelel a 2.1. Definícióban szereplő norma fogalomnak.

Az nyilvánvaló, hogy $\forall \underline{v} \in E$ -hez egyértelműen tartozik valós $\sqrt{(\underline{v} | \underline{v})}$ (lásd skaláris szorzat 4. axióma).

A hozzárendelés rendelkezik az 1; 2; 3 tulajdonsággal is

$$1. \sqrt{(\underline{v}|\underline{v})} \geq 0 \quad \text{és} \quad \sqrt{(\underline{v}|\underline{v})} = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$$

$$2. \sqrt{((\underline{v}_1 + \underline{v}_2) | (\underline{v}_1 + \underline{v}_2))} = \sqrt{(\underline{v}_1 | \underline{v}_1) + (\underline{v}_1 | \underline{v}_2) + (\underline{v}_2 | \underline{v}_1) + (\underline{v}_2 | \underline{v}_2)}$$

$$= \sqrt{(\underline{v}_1 | \underline{v}_1) + 2 \operatorname{Re} (\underline{v}_1 | \underline{v}_2) + (\underline{v}_2 | \underline{v}_2)} \leq \sqrt{(\underline{v}_1 | \underline{v}_1) + 2 |(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)| + (\underline{v}_2 | \underline{v}_2)}$$

most alkalmazzuk az előbb bizonyított 3.1. egyenlőtlenséget $|(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)|$ -re, ezzel tovább növeljük az eredeti kifejezést és kapjuk:

$$\sqrt{((\underline{v}_1 + \underline{v}_2) | (\underline{v}_1 + \underline{v}_2))} \leq \sqrt{(\underline{v}_1 | \underline{v}_1) + 2 \sqrt{(\underline{v}_1 | \underline{v}_1)} \sqrt{(\underline{v}_2 | \underline{v}_2)} + (\underline{v}_2 | \underline{v}_2)} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{(\underline{v}_1 | \underline{v}_1)} + \sqrt{(\underline{v}_2 | \underline{v}_2)}\right)^2},$$

vagyis előlegezve a $\|\underline{v}\|$ jelölést $\sqrt{(\underline{v}|\underline{v})}$ -re

$$\|\underline{v}_1 + \underline{v}_2\| \leq \|\underline{v}_1\| + \|\underline{v}_2\| \quad \text{is fennáll.}$$

$$3. \sqrt{(c \underline{v} | c \underline{v})} = \sqrt{c \cdot \bar{c}} \sqrt{(\underline{v} | \underline{v})}, \quad \text{tehát}$$

$$\|c \underline{v}\| = |c| \|\underline{v}\| \quad \text{is teljesül, mint állítottuk. } \cdot$$

3.3. Példák

1. Az n valós elemű oszlop mátrixok vektorterében az euklidészi norma $\|\underline{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$

A Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség ebben a vektortérben a

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

egyenlőtlenség fennállítását jelenti.

2. A $[0, 1]$ intervallumon folytonos valós függvények vektorterében a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség a következő integrálegyenlőtlenséget jelenti:

$$\left(\int_0^1 f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right) \left(\int_0^1 g^2(x) dx \right)$$

4. ORTOGONÁLIS VEKTOROK, ORTONORMÁLT BÁZIS, PROJEKCIÓ TÉTEL

A skaláris szorzat fogalma lehetővé teszi a hajlásszög, merőlegesség, vetület szemléletes fogalmainak általánosítását, bevezetésüket euklideszi terekben.

4.1. Definíció

Legyen $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{v}_2 \neq \underline{0}$, $\underline{v}_1 \in E_n$, $\underline{v}_2 \in E_n$. $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ φ hajlásszögén a

$$\varphi = \arccos \frac{(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)}{\|\underline{v}_1\| \|\underline{v}_2\|}; \quad \varphi \in [0, \pi]$$

szöget értjük. (Itt a norma euklideszi normát jelent.) A definíció a 3.1. egyenlőtlenség miatt értelmes, hiszen

$$\left| \frac{(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)}{\|\underline{v}_1\| \|\underline{v}_2\|} \right| \leq 1.$$

A szög fenti fogalmának logikus következménye a merőlegesség - ortogonalitás - következő definíciója.

4.2. Definíció

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in E$ vektorokat ortogonálisnak nevezzük, ha

$$(\underline{v}_1 | \underline{v}_2) = 0.$$

A térvektorokat többnyire ugyanabban a bázisban bontottuk fel komponensekre, az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok rendszerében. Ekkor a vektorok koordinátáit skaláris szorzással igen egyszerűen lehetett meghatározni. A továbbiakban megnézzük, hogy n -dimenziós euklideszi terekben van-e olyan bázis, amelynek vektorai

páronként ortogonális egységnormájú vektorok és ha van, akkor rendelkezik-e az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ báziséhoz hasonló jó tulajdonságokkal.

4.3. Definíció

Az E euklideszi tér $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorrendszerét ortogonális rendszernek nevezzük, ha $1 \leq i \leq k$; $1 \leq j \leq k$ és $i \neq j$ esetén

$$(\underline{v}_i | \underline{v}_j) = 0.$$

Ha még $(\underline{v}_i | \underline{v}_i) = 1$ ($i=1, \dots, k$) is teljesül, vagyis $\|\underline{v}_i\| = 1$, a vektorrendszert ortonormálnak nevezzük.

4.4. Tétel

Ha a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in E$ vektorrendszer ortogonális és $\underline{v}_i \neq \underline{0}$ $1 \leq i \leq k$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.

Bizonyítás:

Legyen

$$\sum_{i=1}^k c_i \underline{v}_i = \underline{0} \quad (1)$$

Szorozzuk meg (1) mindkét oldalát rendre a $\underline{v}_i$ $i=1, 2, \dots, k$ vektorokkal, akkor az ortogonalitás miatt a

$$c_i (\underline{v}_i | \underline{v}_i) = 0 \quad i=1, 2, \dots, k \quad (2)$$

egyenleteket kapjuk, amelyekből

$$c_i = 0 \quad i=1, \dots, k$$

következik, ami a vektorok lineáris függetlenségét jelenti.

Igy egy n dimenziós euklideszi tér bármely n elemű ortogonális vektorrendszere választható bázisnak. A vektorokat rendre elosztva normájukkal ortonormált bázist nyerünk és

4.5. Tétel

Ha $B: \underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ az E_n euklideszi tér egy ortonormált bázisa, és $\underline{x} \in E_n$, akkor $\underline{x}$ B bázisbeli $x_1, \dots, x_n$ koordinátái

$$x_i = (\underline{x} | \underline{e}_i) ; \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

skaláris szorzattal számolhatók.

Bizonyítás:

$\forall \underline{x} \in E_n$ egyértelműen állítható elő a B bázis vektoraival

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i \quad \text{alakban.}$$

Mindkét oldalt $\underline{e}_i$ -vel $(i=1, \dots, n)$ skalárisan szorozva

$$(\underline{x} | \underline{e}_i) = x_i \quad (i=1, \dots, n)$$

adódik, mint állítottuk. ■

Felmerül a kérdés, hogy van-e minden euklideszi térnek ortogonális bázisa. A következőkben ismertetünk egy eljárást, amellyel lineárisan független vektorrendszerből ortogonális rendszer készíthető. Ebből következik, hogy bármely bázisból ortogonális bázis konstruálható.

4.6. Tétel

Schmidt-féle ortogonalizálási eljárás

Legyen $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ lineárisan független vektorrendszer. Ebből egy $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$ ortogonális rendszert konstruálunk. Az ortogonális rendszer első vektora

$$\underline{c}_1 = \underline{b}_1 \quad \text{legyen.}$$

A második vektort

$$\underline{c}_2 = \underline{b}_2 + a_{12} \underline{c}_1 \tag{1}$$

alakban keressük, úgy választva az a_{12} együtthatót, hogy

$$(c_2 | c_1) = 0 \text{ teljesüljön.}$$

(1) mindkét oldalát c_1 -gyel szorozva

$$(c_2 | c_1) = (b_2 | c_1) + a_{12} (c_1 | c_1) \text{ adódik.}$$

Mivel $c_1 \neq 0$, $(c_1 | c_1) \neq 0$, tehát oszthatunk vele és kapjuk, hogy

$$a_{12} = - \frac{(b_2 | c_1)}{(c_1 | c_1)}$$

és a IV. 2.7./6^o tétel alapján a $c_1, c_2, b_3, \dots, b_n$ vektorrendszer is lineárisan független. Ezt az eljárást folytatjuk tovább. Tételezzük fel, hogy már megalkottuk a $c_1, \dots, c_{k-1}$ páronként ortogonális vektorokat. A konstrukció miatt (l. IV.2.7./6^o) a $c_1, \dots, c_{k-1}, b_k, \dots, b_n$ rendszer is lineárisan független.

A k . vektort

$$c_k = b_k + a_{1k} c_1 + a_{2k} c_2 + \dots + a_{k-1k} c_{k-1} \quad (2)$$

alakban keressük, úgy választva az a_{ik} együtthatókat, hogy c_k ortogonális legyen az összes őt megelőző $c_1, \dots, c_{k-1}$ vektorral. (2)-t a c_i ($i = 1, 2, \dots, k-1$) vektorral szorozva

$$(c_k | c_i) = (b_k | c_i) + a_{ik} (c_i | c_i) \text{ adódik.}$$

A lineáris függetlenség miatt $(c_i | c_i) \neq 0$, ezzel osztva

$$a_{ik} = - \frac{(b_k | c_i)}{(c_i | c_i)} \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Az eljárás addig folytatható, amíg az utolsó b_n vektorhoz jutunk, és így megkonstruáltuk az ortogonális rendszert. ■

4.7. Példák

1. Tekintve a $[-\pi, \pi]$ intervallumon a következő trigonometrikus polinomokat

$$T_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k t + b_k \sin k t),$$

(a_k, b_k valós)

Ezek alteret alkotnak a folytonos függvények vektorterében. Ez a vektortér euklideszi térré tehető, ha skaláris szorzatot értelmezünk.

Legyen

$$(T_{n1} | T_{n2}) = \int_0^{2\pi} T_{n1}(t) \cdot T_{n2}(t) dt$$

Ebben az euklideszi térben ortogonális bázis a $B: 1, \cos t, \sin t, \dots, \dots, \cos nt, \sin nt$ függvényrendszer, mivel bármelyik két különböző függvény szorzatintegrálja nulla.

2. Tekintsük a legfeljebb elsőfokú valós együtthatós polinomok E_2 kétdimenziós euklideszi terét a

$$(P_1 | P_2) = \int_0^1 P_1(x) P_2(x) dx \quad \text{skaláris szorzattal.}$$

Egy bázisa a térnek $1, x$. Készítsünk ebből ortogonális bázist.

Az új bázis egyik vektora maradjon az azonosan 1 polinom. A másikat

$x + a \cdot 1$ alakban keressük

ugy, hogy

$$\int_0^1 (x + a) dx = 0 \quad \text{legyen.}$$

Ebből $a = -\frac{1}{2}$ adódik és így az ortogonális bázis:

$$1, \quad x - \frac{1}{2}.$$

Készítsünk ebből ortonormált bázist.

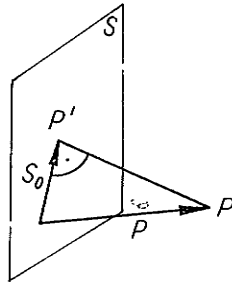
$$\|1\| = \sqrt{\int_0^1 dx} = 1$$

$$\|x - \frac{1}{2}\| = \sqrt{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Tehát egy ortonormált bázis:

$$1; \quad 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}.$$

Tekintsük most a következő egyszerű geometriai feladatot. Adott egy S sík és egy P , a síkra nem illeszkedő pont. Keressük az S síknak azt a P' pontját, amely P -hez legközelebb van. A megoldás közismert, P -ből merőlegest állítva az S síkra, a dőléspont a keresett P' (lásd a 32. ábrát).



32. ábra

Vektorok segítségével úgy fogalmazhatunk, hogy a $P'P$ távolság akkor és csak akkor minimális, ha a $\underline{p} - \underline{s}_0$ vektor merőleges az S síkra. Ez a geometriai tétel általánosítható minden olyan vektortérre, amelyben skaláris szorzás értelmezett. A szélesebbkörű alkalmazhatóság miatt a tételt tetszőleges - nem szükségképpen véges dimenziós - euklideszi terekre bizonyítjuk.

4.8. Projekció tétel

Legyen E euklideszi tér, $S \subset E$ altér, $\underline{p} \in E$, $\underline{p} \notin S$.
 $\|\underline{p} - \underline{s}_0\|$ ($\underline{s}_0 \in S$) akkor és csak akkor minimális, ha $\forall \underline{s} \in S$ vektorra $(\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s}) = 0$.

Bizonyítás:

Nevezzük $\underline{s}_0$ -t minimalizáló vektornak, ha $\|\underline{p} - \underline{s}_0\|$ minimális.

a) Először megmutatjuk, hogy ha $\underline{s}_0$ minimalizáló vektor, akkor $(\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s}) = 0 \quad \forall \underline{s} \in S$ vektor esetén teljesül. Ha ugyanis volna

olyan $\underline{s} \in S$, amellyel $(\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s}) \neq 0$, akkor tetszőleges $c \neq 0$ skálárral $(\underline{p} - \underline{s}_0 | c\underline{s}) \neq 0$ is fennáll és ezért feltehetjük, hogy $\|\underline{s}\| = 1$. Készítsük el ezzel az $\underline{s}$ vektorral az $\underline{s}_1$ vektort a következő módon:

$$\underline{s}_1 = \underline{s}_0 + (\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s}) \underline{s}$$

és számítsuk ki az $\underline{s}_1$ és $\underline{p}$ vektorok eltérésének négyzetét, felhasználva a skaláris szorzás tulajdonságait:

$$\begin{aligned} \|\underline{p} - \underline{s}_1\|^2 &= (\underline{p} - \underline{s}_0 - (\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s}) \underline{s}) \cdot \underline{s} (\underline{p} - \underline{s}_0 - (\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s}) \underline{s}) = \\ &= \|\underline{p} - \underline{s}_0\|^2 - (\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s}) (\underline{s} | \underline{p} - \underline{s}_0) - \\ &\quad - (\underline{p} - \underline{s}_0 | (\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s}) \underline{s}) + ((\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s}) \underline{s} | (\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s}) \underline{s}) = \\ &= \|\underline{p} - \underline{s}_0\|^2 - 2 (\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s})^2 + |(\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s})|^2 \cdot (\underline{s} | \underline{s}) \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $\|\underline{s}\| = 1$, fentiekből azt kapjuk, hogy

$$\|\underline{p} - \underline{s}_1\|^2 = \|\underline{p} - \underline{s}_0\|^2 - |(\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s})|^2, \text{ vagyis}$$

$$\|\underline{p} - \underline{s}_1\|^2 < \|\underline{p} - \underline{s}_0\|^2 \text{ volna, és ez ellentmond annak, hogy}$$

$\underline{s}_0$ minimalizáló vektor, tehát a $(\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s}) = 0$ relációnak $\forall \underline{s} \in S$ esetén teljesülnie kell.

b) Ha viszont $(\underline{p} - \underline{s}_0 | \underline{s}) = 0$ teljesül $\forall \underline{s} \in S$ vektorra, akkor

$$\|\underline{p} - \underline{s}\|^2 = \|\underline{p} - \underline{s}_0 + \underline{s}_0 - \underline{s}\|^2 = \|\underline{p} - \underline{s}_0\|^2 + \|\underline{s}_0 - \underline{s}\|^2,$$

tehát $\|\underline{p} - \underline{s}\|^2 > \|\underline{p} - \underline{s}_0\|^2$, hacsak $\underline{s} \neq \underline{s}_0$, ami azt jelenti, hogy $\underline{s}_0$ minimalizáló vektor. ■

4.9. Példák

1. Tekintsük az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények E euklideszi terét az

$$(f|g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

skalárszorozattal. Adott az euklideszi térben egy $g_1, g_2, \dots, g_n$ ortogonális függvényrendszer és keressük a c_i $i=1, 2, \dots, n$ együtthatókat úgy, hogy a

$$\sum_{i=1}^n c_i g_i \text{ legjobban közelítse az}$$

$f \in E$ függvényt, vagyis

$$\|f - \sum_{i=1}^n c_i g_i\| \text{ minimális legyen.}$$

Megoldás: A projekció tétel értelmében a $g_1, \dots, g_n$ által generált altérben az a függvény közelíti legjobban f -et, amelyre

$$(f - \sum_{i=1}^n c_i g_i | g_j) = 0 ; \quad j=1, 2, \dots, n$$

Ebből adódik:

$$(f | g_j) = \sum_{i=1}^n c_i (g_i | g_j) \quad j=1, \dots, n$$

és az ortogonalitás miatt

$$c_j = \frac{\int_a^b f \cdot g_j \, dx}{\int_a^b g_j^2 \, dx}$$

2. Ha az előbbi példában szereplő ortogonális függvényrendszernek az $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx$ függvényrendszert választjuk a $[0, 2\pi]$ intervallumon, akkor azt kapjuk, hogy az f függvényt legjobban közelítő trigonometrikus polinom

$$a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

együtthatói az

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

un. Fourier együtthatók.

5. KITÜZÖTT FELADATOK

1^o Legyen $\underline{A}$ $m \times n$ -es mátrix.

Igazolja, hogy

$$\|\underline{A}\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right\} \quad \text{eleget tesz a norma axiómáknak.}$$

2^o Igazolja, hogy az E_n euklideszi térben érvényes a Pythagoras tétel:

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in E_n$$

$$(\underline{v}_1 | \underline{v}_2) = 0 \iff \|\underline{v}_1 + \underline{v}_2\|^2 = \|\underline{v}_1\|^2 + \|\underline{v}_2\|^2$$

3^o Legyen S E_n altere. Értelmezzük S E_n -beli ortogonális komplementumát - jele $S^\perp$ - a következő módon:

$$S^\perp : \left\{ \underline{s}^\perp \mid (\underline{s}^\perp | \underline{s}) = 0, \text{ ha } \underline{s} \in S \right\}$$

Bizonyítsa be, hogy $S^\perp$ is altere E_n -nek.

4^o Mutassa meg, hogy minden euklideszi tér előállítható egy tetszőleges S altere és annak $S^\perp$ ortogonális komplementumának direkt összegeként.

VIII. LINEÁRIS OPERÁTOROK

Gyakoriak és fontosak az olyan leképezések, amelyek két vektor lineáris kombinációjának a vektorok képeinek lineáris kombinációját feleltetik meg. Az ilyen ún. homogén lineáris leképezésekkel, más néven lineáris operátorokkal foglalkozunk a továbbiakban. A III. fejezetben találkoztunk néhány egyszerű lineáris operátorral - a sík és a tér vektorainak homogén lineáris transzformációival - ezeknek is általánosítása a lineáris operátor fogalma.

1. A LINEÁRIS OPERÁTOR FOGALMA ÉS NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

1.1. Definíció

Legyenek U és V azonos számtest feletti vektorterek. Azt a T leképezést, amely $\forall \underline{u} \in U$ vektorhoz hozzárendel egy $T\underline{u} \in V$ vektort úgy, hogy tetszőleges c skalár és $\underline{u}, \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ vektorokra

$$T(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = T\underline{u}_1 + T\underline{u}_2$$

és

$$T(c \cdot \underline{u}) = c \cdot T\underline{u}$$

lineáris operátornak (homogén lineáris leképezésnek - tenzornak - homogén lineáris transzformációnak, vagy homogén lineáris vektor-vektor függvénynek nevezzük.)

Megjegyzések

1. A fenti kapcsolatot $T : U \rightarrow V$, vagy $U \xrightarrow{T} V$ módon jelöljük, ha arra is utalni kívánunk a jelöléssel, hogy az operátor honnan hova képez.
2. Ha $U = V$, akkor azt mondjuk, hogy

T az U vektortér lineáris operátora, vagy homogén lineáris transzformációja.

Elnevezés: Az $u \in U$ vektorokat tárgyvektoroknak, a $Tu \in V$ vektorokat képvektoroknak nevezzük.

1.2. Példák

1. Tekintsünk egy S síkot és minden térvektorhoz rendeljük hozzá az S síkbeli merőleges vetületét. Ez a leképezés homogén és lineáris, tehát lineáris operátor.

2. A valós elemű 3×4 -es mátrixokhoz rendeljük képet a következő módon:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ez a leképezés is homogén és lineáris.

3. Legyen U a legfeljebb n -edfoku valósegűtthetős polinomok vektortere és

$$T p_n = p_n(0), \quad \text{ha } p_n \in U$$

Ez a leképezés is lineáris operátor, a képvektorok a valós számok.

4. Az előbbi U polinomjaihoz rendeljük hozzá deriváltfüggvényüket.

$$D p_n = p_n', \quad \text{ha } p_n \in U$$

Mivel

$$(p_n + q_n)' = p_n' + q_n', \quad \text{ha } p_n, q_n \in U$$

és $(c \cdot p_n)' = c \cdot p_n'$ D is lineáris operátor és képvektorként minden legfeljebb $(n-1)$ -ed foku polinomot megkapunk.

5. Legyen U az $[a, b]$ intervallumon integrálható f valós függvények vektortere és

$$A f = \int_a^b f(x) dx$$

Az integrál tulajdonságai miatt A is lineáris operátor és a képvektorok a valós számok.

Végül tekintsünk két igen egyszerű operátort.

6. Legyen U egy tetszőleges vektortér és $\underline{u} \in U$ vektorhoz rendeljük képvektorként önmagát. Ezzel U egy lineáris operátort értelmeztünk. Jelöljük a továbbiakban ezt az operátort E -vel és nevezzük egységoperátornak vagy identikusoperátornak.

7. Legyen U egy tetszőleges vektortér és $\forall \underline{u} \in U$ vektorhoz rendeljük hozzá a nullvektort. Az így értelmezett lineáris operátort 0 -val jelöljük és nulloperátornak nevezzük.

Ha megfigyeljük az előbbi példákat, azt tapasztaljuk, hogy a képvektorok is vektorteret alkotnak. Ez mindig így van, erről szól az

1.3. Tétel

A T lineáris operátor képvektorainak halmaza is lineáris tér, amelyet az operátor képterének nevezünk.

Bizonyítás:

Legyen $U \xrightarrow{T} V$ és $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ képvektorok, c_1, c_2 pedig tetszőleges skalárok. Azt kell megmutatnunk, hogy $c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2$ is képvektor.

Mivel $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ képvektor, van olyan $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$, hogy $T\underline{u}_1 = \underline{v}_1$ és $T\underline{u}_2 = \underline{v}_2$, de akkor

$$T(c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2) = c_1 T\underline{u}_1 + c_2 T\underline{u}_2 = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2,$$

vagyis a $c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2$ vektorok is képvektorok. ■

Jelölés: A képtér jele: $\text{Im}T$

1.4. Tétel

A T lineáris operátor nullvektorra képzett tárgyvektorai a tárgytérnek alterét alkotják, amelyet az operátor magterének (vagy magjának) nevezünk és a továbbiakban $\text{Ker } T$ szimbólummal jelölünk.

Bizonyítás:

Az említett halmaz nem üres, mivel a nullvektort biztosan tartalmazza:

tetszőleges c skalár esetén ugyanis

$$T\underline{0} = Tc \cdot \underline{0} = c \cdot T\underline{0} \implies T\underline{0} = \underline{0}.$$

$$\text{Ha } u_1, u_2 \in U \text{ és } Tu_1 = \underline{0}, Tu_2 = \underline{0},$$

akkor tetszőleges c_1, c_2 skalárokkal

$$T(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 Tu_1 + c_2 Tu_2 = \underline{0},$$

tehát $\text{Ker } T$ altér, mint állítottuk. ■

Minden leképezés vizsgálatánál fontos kérdés, hogy kölcsönösen egyértelműen képezi-e le az értelmezési tartományt az értékkészletre vagy sem. (Gondoljunk pl. az egyváltozós valós függvények invertálhatóságára.) Megmutatjuk, hogy lineáris operátorok esetében ez azon múlik, hogy van-e a magban a nullvektoron kívül más vektor is.

1.5. Tétel

A T lineáris operátor akkor és csak akkor létesít kölcsönösen egyértelmű leképezést az U tárgytér és a képtér között, ha $\text{Ker } T = \{\underline{0}\}$.

Bizonyítás:

a) Az nyilvánvaló, hogy ha két különböző vektor képe nem lehet azonos, akkor $\text{Ker } T = \{\underline{0}\}$. Ugyanis $T\underline{0} = \underline{0}$ minden lineáris operátor esetében teljesül és így más vektor képe nem lehet $\underline{0}$.

b) Legyen most $\text{Ker } T = \{\underline{0}\}$.

Ha $Tv_1 = Tv_2$, akkor

$$T(v_1 - v_2) = \underline{0} \text{ és a } \text{Ker } T = \{\underline{0}\}$$

feltételből következik, hogy $v_1 = v_2$. ■

A továbbiakban megmutatjuk, hogy kölcsönösen egyértelmű leképezés esetén lineárisan független vektorrendszer képe is lineárisan független vektorokból áll.

1.6. Tétel

Ha a T lineáris operátor magtere, $\text{Ker } T = \{\underline{0}\}$, akkor a tárgytér lineárisan független $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszerének

$T v_1, \dots, T v_k$ képvektorai is lineárisan függetlenek.

Bizonyítás:

Állítsuk elő a $T v_1, \dots, T v_k$ vektorok lineáris kombinációjaként a képtér nullvektorát

$$c_1 T v_{-1} + c_2 T v_{-2} + \dots + c_k T v_{-k} = \underline{0} \quad (1)$$

(1)-et T lineáris operátor voltát kihasználva átalkítjuk:

$$T(c_1 v_{-1} + \dots + c_k v_{-k}) = \underline{0} \quad (2)$$

Mivel a magban csak a $\underline{0}$ van

$$c_1 v_{-1} + \dots + c_k v_{-k} = \underline{0},$$

amiből $c_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, k$), a $v_{-1}, \dots, v_{-k}$ rendszer feltétel szerinti lineáris függetlenségének következménye. Ez azonban (1) alapján a $T v_{-1}, \dots, T v_{-k}$ rendszer függetlenségét is jelenti. ■

Megjegyzések:

1. Az olvasóra bizzuk annak igazolását, hogy bármely lineáris operátor esetében igaz, hogy lineárisan független képvektor-rendszer csak lineárisan független tárgyvektorrendszerből keletkezhet.
2. Fentiek következménye, hogy ha egy lineáris operátor magterére csak a nullvektort tartalmazza, akkor tárgyterének és képterének megegyezik a dimenziója.

1.7. Definíció

Ha a $T : U \rightarrow V$ leképezés kölcsönösen egyértelmű, akkor T -t reguláris lineáris operátornak nevezzük.

Véges dimenziós vektorterek közötti leképezés esetén a képtér, tárgyter és magtér dimenzióinak kapcsolatáról szól az

1.8. Dimenzió-tétel

Legyen $T : U \rightarrow V$ és $\dim U$ véges, akkor

$$\dim U = \dim \text{Im } T + \dim \text{Ker } T.$$

Bizonyítás:

Legyen $\dim \text{Im } T = r$, $\dim \text{Ker } T = m$,

$\text{Im } T$ egy bázisa: $v_{-1}, \dots, v_{-r}$, $v_{-i} = T u_{-i}$ ($i=1, \dots, r$)

$\text{Ker } T$ egy bázisa: $\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_m$.

Megmutatjuk, hogy az

$$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r, \underline{m}_1, \dots, \underline{m}_m \text{ vektorrendszer}$$

a tárgytér egy bázisát alkotja, ami az állítást bizonyítja.

Állítsuk elő a tárgytér nullvektorát az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r, \underline{m}_1, \dots, \underline{m}_m$ vektorok lineáris kombinációjaként:

$$c_1 \underline{u}_1 + \dots + c_r \underline{u}_r + d_1 \underline{m}_1 + \dots + d_m \underline{m}_m = \underline{0} \quad (1)$$

és alkalmazzuk (1)-re a T operátort, figyelembe véve, hogy $\underline{m}_i \in \ker T$ ($i=1, \dots, m$) miatt $T\underline{m}_i = \underline{0}$ ($i=1, \dots, m$), ekkor kapjuk, hogy

$$Tc_1 \underline{u}_1 + \dots + Tc_r \underline{u}_r = \underline{0} \quad (2)$$

amiből következik, hogy

$$c_1 T\underline{u}_1 + \dots + c_r T\underline{u}_r = \underline{0} \quad (3)$$

és mivel a $\underline{v}_i = T\underline{u}_i$ ($i=1, \dots, r$) a képtér egy bázisa,

$$c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0 \quad (4)$$

(4) alapján (1)-ből következik, hogy

$$d_1 \underline{m}_1 + \dots + d_m \underline{m}_m = \underline{0} \text{ és}$$

mivel az $\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_m$ vektorok a magtér bázisát alkotják,

$$d_1 = d_2 = \dots = d_m = 0 \quad (5)$$

és így az (1) előállítás minden együtthatója nulla, tehát az

$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r, \underline{m}_1, \dots, \underline{m}_m$ vektorrendszer lineárisan független.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\underline{u} \in U$ előállítható e lineárisan független vektorrendszer segítségével, lineáris kombinációként.

Tekintsük a $T\underline{u} \in \text{Im } T$ vektort és állítsuk elő $\text{Im } T$ bázisvektoraival:

$$T\underline{u} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_r \underline{v}_r$$

Felhasználva a $\underline{v}_i = T\underline{u}_i$ $i=1, \dots, r$ kapcsolatot kapjuk, hogy

$$T\underline{u} = T(a_1 \underline{u}_1 + \dots + a_{r-1} \underline{u}_{r-1}) ,$$

átrendezve

$$T(\underline{u} - a_1 \underline{u}_1 - \dots - a_{r-1} \underline{u}_{r-1}) = \underline{0} ,$$

így $\underline{u} - a_1 \underline{u}_1 - \dots - a_{r-1} \underline{u}_{r-1} \in \ker T$, ekkor $\ker T$ bázisával lineáris kombinációként írható, amiből

$$\underline{u} - a_1 \underline{u}_1 - \dots - a_{r-1} \underline{u}_{r-1} = b_1 \underline{m}_1 + \dots + b_m \underline{m}_m ,$$

illetve

$$\underline{u} = a_1 \underline{u}_1 + \dots + a_{r-1} \underline{u}_{r-1} + b_1 \underline{m}_1 + \dots + b_m \underline{m}_m$$

következik. Ezzel a dimenziótételt bizonyítottuk. ■

Vegyük észre, hogy az előbbi megjegyzés, miszerint ha az operátor magtere csak a nullvektort tartalmazza, akkor tárgyterének és képterének azonos a dimenziója, a dimenziótételből is következik.

A dimenziótétel bizonyítása során a lineáris operátor tárgyterének egy direktösszegre bontását végeztük el. Ezt most külön megfogalmazzuk.

1.9. Tétel

Legyen a $T: U \rightarrow V$ lineáris operátor tárgytere véges dimenziós. Tekintsük $\operatorname{Im} T$ egy $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$ bázisát és azt az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r$ $\underline{u}_i \in U$ vektorrendszert, amelyre $T\underline{u}_i = \underline{v}_i$ $i = 1, \dots, r$.

Jelöljük U_1 -gyel az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r$ vektorok által generált alteret U -ban. (Az U_1 alteret szokták $\operatorname{Im} T$ ősterének is nevezni.)

$$U = \ker T \oplus U_1$$

Bizonyítás:

A dimenziótétel bizonyítása során beláttuk, hogy $\forall \underline{u} \in U$ egyértelműen előáll

$$\underline{u} = a_1 \underline{u}_1 + \dots + a_{r-1} \underline{u}_{r-1} + b_1 \underline{m}_1 + \dots + b_m \underline{m}_m$$

alakban, ami az állítást igazolja. ■

Megjegyzés:

T U_1 és $\text{Im } T$ között már kölcsönösen egyértelmű leképezés.

Megjegyzés:

A jegyzet V. fejezetében foglalkoztunk a homogén lineáris egyenletrendszerekkel. Megmutatjuk, hogy a megoldások számára vonatkozó 2.4. Tétel állítása a dimenziótételből is következik.

Legyen az egyenletrendszer

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{0} ; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Tekintsük az

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{A} \underline{x} \text{ módon adott}$$

A leképezést. A az n dimenziós oszlop mátrixok V_n vektortérének homogén lineáris operátora. Az egyenletrendszer megoldásvektorainak halmaza éppen $\text{Ker } A$. Így a dimenziótétel értelmében

$$\dim \text{Ker } A = n - \dim \text{Im } A ,$$

és mivel $\dim \text{Im } A = \text{rang } \underline{A}$, a megoldástér dimenziója:

$$n - \text{rang } \underline{A} . \blacksquare$$

2. MŰVELETEK LINEÁRIS OPERÁTOROKKAL

Ismertek az olvasó előtt a függvények között értelmezett műveletek. Találkoztak számmal szorzással, függvények összeadásával, összetett függvényképezéssel, függvény inverzének fogalmával. Hasonlóképpen értelmezünk a homogén lineáris vektor-vektor függvények, vagyis lineáris operátorok között műveleteket.

2.1. Tétel

Ha a T lineáris operátor az U vektorteret a V vektortérbe képezi le,

akkor a

$$(c T)u = c(Tu) \quad (u \in U, c \text{ skálár})$$

módon definiált $c T$ leképezés szintén lineáris operátor, amely U -t V -be képezi le. A $c T$ operátort a T operátor c -szeresének nevezzük.

Bizonyítás:

$c T$ minden $u \in U$ vektorhoz rendel képet, a $c Tu \in V$ vektort. Azt kell még megmutatni, hogy a hozzárendelés művelettartó. Ez is fennáll, ugyanis

$$\begin{aligned} (c T)(c_1 u_1 + c_2 u_2) &= c T(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c(c_1 Tu_1 + c_2 Tu_2) = \\ &= cc_1 Tu_1 + cc_2 Tu_2 = c_1 (cT)u_1 + c_2 (cT)u_2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Értelmezhető két azonos vektorteret azonos vektortérbe képező lineáris operátor összege.

2.2. Tétel

Ha $T_1: U \rightarrow V$ és $T_2: U \rightarrow V$ lineáris operátorok, akkor a

$$(T_1 + T_2)u = T_1 u + T_2 u \quad u \in U$$

módon értelmezett $T_1 + T_2$ leképezés szintén lineáris operátor, amely U -t V -be képezi le.

A $T_1 + T_2$ operátort a két operátor összegének nevezzük.

Bizonyítás:

$T_1 + T_2$ minden $u \in U$ vektorhoz rendel képet, a $T_1 u + T_2 u \in V$ vektort. Megmutatjuk, hogy a hozzárendelés művelettartó.

Legyen $u_1, u_2 \in U$ tetszőleges vektorok és c_1, c_2 tetszőleges skálárok, akkor

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(c_1 u_1 + c_2 u_2) &= T_1(c_1 u_1 + c_2 u_2) + T_2(c_1 u_1 + c_2 u_2) = \\ &= c_1 T_1 u_1 + c_2 T_1 u_2 + c_1 T_2 u_1 + c_2 T_2 u_2 = c_1 (T_1 u_1 + T_2 u_1) + \\ &+ c_2 (T_1 u_2 + T_2 u_2) = c_1 (T_1 + T_2)u_1 + c_2 (T_1 + T_2)u_2, \end{aligned}$$

ami $T_1 + T_2$ lineáris operátor voltát jelenti. $\blacksquare$

Az olvasó könnyen meggyőződhet arról, hogy a $T: U \rightarrow V$ lineáris operátorok a 2.1. és 2.2. Tételekben definiált műveletekkel vektorteret alkotnak U és V közös számteste felett. A vektortér nullvektora az 1.2./7. példában szereplő nullopátor.

Az összetett függvények képzésének megfelelően értelmezzük lineáris operátorok szorzatát.

2.3. Tétel

Ha $T_1: U \rightarrow V$ és $T_2: V \rightarrow W$ lineáris operátorok, akkor a

$$(T_2 T_1)u = T_2(T_1 u) \quad u \in U$$

módon értelmezett leképezés szintén lineáris operátor, amely U -t W -be képezi le. A $T_2 \cdot T_1$ operátort $T_1 T_2$ -vel vett szorzatoperátornak nevezzük.

Bizonyítás:

Mivel T_1 minden U -beli vektorhoz V egy vektorát rendeli, majd T_2 a $T_1 u \in V$ -hez W -beli vektort rendel, így $T_2 T_1$ U -t W -be képezi. Belátjuk, hogy a hozzárendelés művelettartó.

Legyen $u_1, u_2 \in U$ és c_1, c_2 skalár.

Ekkor

$$\begin{aligned} (T_2 T_1)(c_1 u_1 + c_2 u_2) &= T_2(T_1(c_1 u_1 + c_2 u_2)) = T_2(c_1 T_1 u_1 + c_2 T_1 u_2) = \\ &= c_1 T_2(T_1 u_1) + c_2 T_2(T_1 u_2) = c_1 (T_2 T_1)u_1 + c_2 (T_2 T_1)u_2, \end{aligned}$$

ami a művelettartást jelenti. ■

2.4. Tétel

A lineáris operátorok szorzása a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. A szorzás asszociatív:

$$T_1(T_2 T_3) = (T_1 T_2)T_3$$

feltéve, hogy a szorzások elvégezhetők.

2. A szorzás disztributív:

$$(T_1 + T_2)T_3 = T_1 T_3 + T_2 T_3 \quad \text{és}$$

$$T_4(T_1 + T_2) = T_4 T_1 + T_4 T_2$$

feltéve, hogy a szorzások elvégezhetőek.

3.

$$c(T_1 T_2) = (cT_1)T_2 = T_1(cT_2)$$

Bizonyítás:

Az állítások egyszerűen igazolhatók, az egyenlőségek két oldalán levő operátorokat tetszőleges u, tárgytérbeli vektorra alkalmazva. ■

Megjegyzés:

A lineáris operátorok szorzása nyilván nem kommutatív művelet. Például $T_1: U \rightarrow V$ és $T_2: V \rightarrow W$ $V \neq W$ esetén csak a $T_2 T_1$ szorzás végezhető el, $T_1 T_2$ nem is értelmezett.

Fontos kérdés, hogy egy lineáris operátort mikor lehet invertálni. Ezzel foglalkozunk a továbbiakban.

2.5. Definíció

A T lineáris operátor inverzén azt a T^{-1} -gyel jelölt operátort értjük, amely kielégíti a

$$\begin{aligned} T \cdot T^{-1} &= E \quad \text{és a} \\ T^{-1} \cdot T &= E \quad \text{egyenletet.} \end{aligned}$$

A szorzás definíciója alapján nyilvánvaló, hogy ha

$$\begin{aligned} T &: U \rightarrow V, \text{ akkor} \\ T^{-1} &: V \rightarrow U \end{aligned}$$

és mindkét egyenlet csak akkor teljesülhet, ha T kölcsönösen egyértelműen képezi le a tárgytérre a képtérre, vagyis T reguláris.

2.6. Tétel

A $T: U \rightarrow V$ reguláris lineáris operátor
 $T^{-1}: V \rightarrow U$ inverze is lineáris operátor.

Bizonyítás:

Legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ és c_1, c_2 tetszőleges skalárok,

$$T^{-1} \underline{v}_1 = \underline{u}_1, \quad (1)$$

$$T^{-1} \underline{v}_2 = \underline{u}_2. \quad (2)$$

Ekkor

$$\underline{v}_1 = T\underline{u}_1, \quad \underline{v}_2 = T\underline{u}_2 \quad \text{és}$$

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 = c_1 T\underline{u}_1 + c_2 T\underline{u}_2.$$

Felhasználva, hogy T lineáris operátor, a jobb oldalt átalakítva

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 = T(c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2), \quad \text{vagyis}$$

$$T^{-1}(c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2) = c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 \quad \text{és}$$

(1), (2) figyelembevételével

$$T^{-1}(c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2) = c_1 T^{-1} \underline{v}_1 + c_2 T^{-1} \underline{v}_2,$$

mint állítottuk. ■

Megmutatjuk egy példán, hogy van olyan eset, amikor egy T operátort egy másikkal egyik oldalról szorozva egységoperátort kapunk, de a másik oldalról szorozva nem.

Tekintsük a valós elemű számsorozatok V vektorterét. Legyen $\underline{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ és értelmezzük az A és B lineáris operátorokat a következőképpen:

$$A\underline{a} = \{0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

$$B\underline{a} = \{a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

$$(B.A) \underline{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \underline{a},$$

tehát $B.A = E$, viszont

$$(A.B) \underline{a} = \{0, a_2, \dots, a_n, \dots\} \neq \underline{a},$$

tehát $A.B \neq E$. Az ilyen tulajdonságú B operátort A balinverzének szokás nevezni. Hasonlóan azt is mondjuk, hogy A a B operátor

jobbinverze. A következő tételből kiderül, hogy az A operátornak nincs jobbinverze.

2.7. Tétel

Ha egy lineáris operátornak van jobbinverze és balinverze, akkor ezek megegyeznek.

Bizonyítás:

Legyen $A : U \rightarrow V$ lineáris operátor
 $B : V \rightarrow U$ A balinverze, és
 $J : V \rightarrow U$ A jobbinverze

Jelöljük E_1 -gyel a $V \rightarrow V$ identikus operátort és E_2 -vel az $U \rightarrow U$ identikus operátort.
 Ekkor

$B = B \cdot E_1 = B \cdot (A \cdot J)$ az operátorszorzás asszociativitását felhasználva:

$$B \cdot (A \cdot J) = (B \cdot A) \cdot J = E_2 \cdot J = J,$$

tehát $B = J$. ■

A továbbiakban röviden foglalkozunk az inverz operátor létezésének problémájával abban a speciális esetben, amikor T az U vektorteret önmagába képezi le, vagyis $T : U \rightarrow U$ lineáris transzformációja.

2.8. Tétel

A véges dimenziós U vektortér T homogén lineáris transzformációja akkor és csak akkor invertálható, ha képtere az egész U vektortér.

Bizonyítás:

Az állítás az 1.5. és 1.8. Tételek következménye. Az 1.5. Tétel szerint T regularitásának szükséges és elégséges feltétele, hogy $\text{Ker } T = \{0\}$ teljesüljön. Ekkor az 1.8. Tétel értelmében $\dim \text{Im } T = \dim U$. A mi esetünkben $\text{Im } T \subseteq U$, tehát

$$\text{Im } T = U \quad \blacksquare$$

3. A LINEÁRIS OPERÁTOR MÁTRIXA

A vektorterek tanulmányozása során tapasztaltuk, hogy ha egy véges dimenziójú vektortér egy bázisát rögzítjük, akkor a tér minden vektora egyértelműen jellemezhető egy-egy oszlop mátrixszal. A következő fejezet részben megmutatjuk, hogy egy véges dimenziós tárgytérre leképező lineáris operátor egyértelműen jellemezhető egy mátrixszal, ha a tárgytérben és a képtérben rögzítettünk egy-egy bázist.

3.1. Tétel

Ha $T: U \rightarrow V$ lineáris operátor, U egy bázisa $B_e: e_1, \dots, e_n$ és V egy bázisa $B_f: f_1, \dots, f_r$, akkor a rögzített bázispárban a T operátorhoz egyértelműen tartozik egy mátrix:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{r1} & t_{r2} & \dots & t_{rn} \end{pmatrix},$$

amelynek oszlopaiban a Te_i $i=1, \dots, n$ képvektorok B_f bázisbeli oszlop mátrixai állnak és tetszőleges $\underline{u} \in U$ $T\underline{u} \in V$ képvektorának B_f bázisbeli oszlop mátrixát megkapjuk, ha $\underline{T}$ -t megszorozzuk $\underline{u}$ B_e bázisbeli oszlop mátrixával:

$$\underline{T} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}, \quad \text{ahol}$$

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^n u_i e_i \quad \text{és} \quad T\underline{u} = \sum_{j=1}^r v_j f_j.$$

$$\text{Rövidebben: } \underline{T} \cdot \underline{u} = \underline{v}.$$

Bizonyítás:

A fenti jelölések szerint a

$$B_e \text{ bázisban } \underline{u} = \sum_{i=1}^n u_i e_i \quad \text{és a}$$

$$B_f \text{ bázisban} \quad T \underline{e}_i = \sum_{j=1}^r t_{ji} \underline{f}_j$$

T homogén linearitását kihasználva:

$$T \underline{u} = \sum_{i=1}^n u_i T \underline{e}_i$$

behelyettesítve $T \underline{e}_i$ koordinátás alakját:

$$T \underline{u} = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^r t_{ji} \underline{f}_j \quad \text{és a}$$

szummázások sorrendjét felcserélve:

$$T \underline{u} = \sum_{j=1}^r \underline{f}_j \sum_{i=1}^n u_i t_{ji}, \text{ vagyis}$$

$$\underline{v}_j = \sum_{i=1}^n u_i t_{ji} \quad \text{ami a } \underline{T} \text{ mátrix}$$

j -edik sorának és az $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ oszlop mátrixnak a szorzata. ■

Megjegyzés:

Ha a T lineáris operátor U -ból U -ba képez, akkor a képvektorokat is bonthatjuk a tárgytér bázisában. Ekkor az operátor mátrixa kvadratikussá lesz. Ha T U -ból U -ra képez, vagyis a transzformáció reguláris, akkor az 1.6. Tételből következik, hogy $\underline{T}$ minden oszlopa lineárisan független,

$$\text{rang } \underline{T} = \dim U = \dim \text{Im } T.$$

Ha a T lineáris transzformáció nem kölcsönösen egyértelműen képezi le az U tárgytérre a képtérre, tehát U -ba képez, akkor

$$\text{rang } \underline{T} = \dim \text{Im } T = \dim U - \dim \text{Ker } T,$$

felhasználva a dimenziótételt.

Nézzünk néhány példát lineáris operátor mátrixára.

3.2. Példák

1. Legyen E az U vektortér identikus operátora és U egy bázisa: $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$.

Mivel $E \underline{b}_i = \underline{b}_i \quad i=1, \dots, n$,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2. Tekintsük a térvektorok E_3 terének azt az A operátort, amely minden $\underline{v} \in E_3$ vektorhoz az $\underline{a} \times \underline{v}$ vektort rendeli, ahol $\underline{a}$ egy adott vektora E_3 -nak.

Az olvasóra bizzuk annak belátását, hogy A homogén lineáris transzformáció.

Rögzítsük E_3 -ban az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ortonormált bázist, és használjuk ezt a képvektorok előállításához is. Legyen $\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$.

Ekkor $\underline{A}$ oszlopait rendre

$$\underline{a} \times \underline{i}, \quad \underline{a} \times \underline{j}, \quad \underline{a} \times \underline{k}$$

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisbeli koordináta oszlop mátrixai alkotják.

$$\underline{A}\underline{i} = \underline{a} \times \underline{i} = a_3 \underline{j} - a_2 \underline{k}$$

$$\underline{A}\underline{j} = \underline{a} \times \underline{j} = -a_3 \underline{i} + a_1 \underline{k}$$

$$\underline{A}\underline{k} = \underline{a} \times \underline{k} = a_2 \underline{i} - a_1 \underline{j},$$

tehát

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Természetesen a bázisok megválasztásától függően az A operátort más mátrixszal is jellemezhetjük. Figyelembe véve, hogy $\text{Im} A$ kétdimenziós - hiszen a képvektorok merőlegesek $\underline{a}_3$ -ra - a tárgytér bázisát nem változtatva, a képtér bázisául az $\underline{A}_i$ és $\underline{A}_j$ vektorokat választva (tegyük fel, hogy $a_3 \neq 0$, akkor ezek lineárisan függetlenek), írjuk fel A mátrixát.

Mivel

$$\underline{A}_i = 1 \cdot \underline{A}_i + 0 \cdot \underline{A}_j, \quad \underline{A}_j = 0 \cdot \underline{A}_i + 1 \cdot \underline{A}_j$$

és

$$\underline{A}_k = -\frac{a_1}{a_3} \underline{A}_i - \frac{a_2}{a_3} \underline{A}_j$$

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_1}{a_3} \\ 0 & 1 & -\frac{a_2}{a_3} \end{pmatrix}$$

A jegyzet III. fejezetében foglalkoztunk a mátrixok között értelmezett műveletekkel. Látni fogjuk, hogy ésszerűek voltak a mátrixműveletek definíciói, mert így van szoros kapcsolat az operátorműveletek és az operátorokat valamely bázisban megadó mátrixok műveletei között. E kapcsolatot pontosan a következő tétel fogalmazza meg.

3.3. Tétel

Ha T, T_1, T_2, T_3 lineáris operátorok és a $T_1 + T_2, T_2 \cdot T_3, T^{-1}$ műveletek elvégezhetők, akkor az összes szóban forgó vektorterekben egy-egy bázist rögzítve

$$\text{a) } \underline{\underline{c \cdot T}} = \underline{\underline{c \cdot T}} \quad (c \text{ skalár})$$

$$\text{b) } \underline{\underline{T_1 + T_2}} = \underline{\underline{T_1}} + \underline{\underline{T_2}}$$

$$\text{c) } \underline{\underline{T_2 \cdot T_3}} = \underline{\underline{T_2}} \cdot \underline{\underline{T_3}}$$

$$\text{d) } \underline{\underline{T^{-1}}} = (\underline{\underline{T}})^{-1}$$

Bizonyítás:

a) A művelet definíciója szerint $(c T)\underline{u} = c(T\underline{u})$ minden $\underline{u} \in U$ esetén

ekkor

$$\underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{T}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{c}} (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{u}})$$

tehát

$$\underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{T}}$$

$$b) (\underline{\underline{T}}_1 + \underline{\underline{T}}_2) \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{T}}_1 \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{T}}_2 \underline{\underline{u}}, \text{ így}$$

$$(\underline{\underline{T}}_1 + \underline{\underline{T}}_2) \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{T}}_1 \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{T}}_2 \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{T}}_1 \cdot \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{T}}_2 \cdot \underline{\underline{u}} = (\underline{\underline{T}}_1 + \underline{\underline{T}}_2) \underline{\underline{u}},$$

tehát

$$\underline{\underline{T}}_1 + \underline{\underline{T}}_2 = \underline{\underline{T}}_1 + \underline{\underline{T}}_2$$

c), d) bizonyítását hasonlóan végezhetjük, ezeket feladatként tűzzük ki az olvasónak. ■

A lineáris operátor mátrixa mint már tudjuk, függ a bázisoktól. A továbbiakban megnézzük, hogy milyen kapcsolat van egy operátor különböző bázisokban felírt mátrixai között.

3.4. Tétel

Legyen $T : U \rightarrow V$ lineáris operátor

U két bázisa $B : b_1, \dots, b_n$ és $C : c_1, \dots, c_n$

V két bázisa $F : f_1, \dots, f_r$ és $G : g_1, \dots, g_r$

T mátrixát a B, F bázispárban $\underline{\underline{T}}_{B, F}$ -fel és

T mátrixát a C, G bázispárban $\underline{\underline{T}}_{C, G}$ -vel jelölve

$$\underline{\underline{T}}_{C, G} = \underline{\underline{G}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}}_{B, F} \cdot \underline{\underline{C}}, \text{ ahol}$$

$$\underline{\underline{C}} = (c_{ij}) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \quad c_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} b_i \quad \text{és}$$

$$\underline{\underline{G}} = (g_{ps}) \quad \begin{matrix} 1 \leq p \leq r \\ 1 \leq s \leq r \end{matrix} \quad g_s = \sum_{p=1}^n g_{ps} f_p$$

Bizonyítás:

Legyen $\underline{\underline{u}} \in U$, tetszőleges és $\underline{\underline{T}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{v}}$.

Írjuk fel a B, F bázispárban a megfelelő mátrixegyenletet:

$$\underline{T}_{B, F} \cdot \underline{u}_b = \underline{v}_f \quad (1)$$

A IV. fejezet 2.19. Tétele értelmében tudjuk, hogy mi a kapcsolat egy vektor különböző bázisbeli koordinátái között:

$$\underline{u}_b = \underline{C} \cdot \underline{u}_c \quad \text{és} \quad \underline{v}_f = \underline{G} \cdot \underline{v}_g$$

Ezeket (1)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\underline{T}_{B, F} \cdot \underline{C} \underline{u}_c = \underline{G} \underline{v}_g \quad (2)$$

balról szorozzunk $\underline{G}^{-1}$ -gyel és adódik, hogy

$$(\underline{G}^{-1} \cdot \underline{T}_{B, F} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{u}_c = \underline{v}_g,$$

tehát

$$\underline{T}_{C, G} = \underline{G}^{-1} \cdot \underline{T}_{B, F} \cdot \underline{C}. \quad \blacksquare$$

Fontossága miatt megfogalmazzuk a bázistranszformációról szóló tételt külön abban a speciális esetben, amikor $T: U \rightarrow U$ lineáris transzformáció.

3.5. Tétel

Legyen $T: U \rightarrow U$ lineáris transzformáció.

U két bázisa $B: \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ és $C: \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$

T mátrixát a B bázisban $\underline{T}_B$ -vel,

T mátrixát a C bázisban $\underline{T}_C$ -vel jelölve

$$\underline{T}_C = \underline{C}^{-1} \underline{T}_B \underline{C}, \quad \text{ahol}$$

$$\underline{C} = (c_{ij}) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \quad \underline{c}_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} \underline{b}_i$$

Bizonyítás:

Az állítás a 3.4. Tétel következménye. $\blacksquare$

3.6. Definíció

$$\text{Ha } \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{C}}, \text{ ahol}$$

$\underline{\underline{C}}$ tetszőleges invertálható mátrix, akkor az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixot hasonló mátrixoknak nevezzük.

A 3.5. Tétel értelmében egy homogén lineáris transzformáció különböző bázisbeli mátrixai hasonlóak.

3.7. Tétel

Hasonló mátrixok determinánsai azonosak.

Bizonyítás:

Ha $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{A}}$ hasonlóak, akkor

$$\det \underline{\underline{B}} = \det (\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}) = \det \underline{\underline{C}}^{-1} \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{C}}$$

(lásd a VI. fejezet 1.11. Tételét).

$$\text{Mivel } \det \underline{\underline{C}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{C}}},$$

$\det \underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{A}}$, mint állítottuk. ■

4. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTVEKTORAI SAJÁTÉRTÉKEI, FŐVEKTOROK

A matematika számos ágában, többek között a mátrixalgebrában és a differenciálegyenletek elméletében, továbbá számos fizikai probléma megoldásában hasznosak az olyan vektorok, amelyeket a transzformáció önmaguk skalárszorosába képez le. A továbbiakban ezekkel az ún. sajátvektorokkal és sajátértékekkel foglalkozunk.

4.1. Definíció

Az U vektortér N alterét invariáns altérnek nevezzük a T transzformációra vonatkozóan, ha

$$\underline{u} \in N \Rightarrow T\underline{u} \in N,$$

vagyis a leképezés nem vezet ki az N altérből.

A legfontosabb invariáns alterek az egydimenziós alterek.

4.2. Definíció

A $T : U \rightarrow U$ homogén lineáris transzformáció sajátértékének nevezzük a λ skalárt és hozzá tartozó sajátvektornak az

$\underline{s} \neq \underline{0}$ vektort, ha

$$T\underline{s} = \lambda \underline{s}$$

4.3. Tétel

Ha $\underline{s} \in U$ a T homogén lineáris transzformáció sajátvektora, akkor skalárszorosai U egydimenziós invariáns alterét alkotják.

Bizonyítás:

a) A $c \cdot \underline{s}$ vektorok, ahol c tetszőleges skalár U alterét alkotják.

b) Ez invariáns altér, mert

ha $T\underline{s} = \lambda \underline{s}$, akkor

$$T(c \cdot \underline{s}) = \lambda(c \cdot \underline{s}). \quad \blacksquare$$

A sajátérték fontos tulajdonságáról szól a

4.4. Tétel

A λ skalár akkor és csak akkor sajátértéke a T homogén lineáris transzformációnak, ha $T - \lambda E$ nem reguláris. (E az egységoperátor.)

Bizonyítás:

a) Ha $T - \lambda E$ nem reguláris, akkor magterében van $\underline{s} \neq \underline{0}$ vektor, vagyis $\exists \underline{s} \neq \underline{0}$, amellyel

$$(T - \lambda E) \underline{s} = \underline{0}$$

és átrendezve

$$T\underline{s} = \lambda \underline{s}, \text{ tehát } \lambda \text{ } T \text{ sajátértéke.}$$

b) Ha λ sajátérték, akkor van olyan $\underline{s} \neq \underline{0}$, amellyel

$$T\underline{s} = \lambda \underline{s}, \text{ átrendezve}$$

$(T - \lambda E) \underline{s} = \underline{0}$, tehát találtunk $T - \lambda E$ magterében $\underline{s} \neq \underline{0}$ vektort, így $T - \lambda E$ nem reguláris. $\blacksquare$

A 4.4. TÉTEL alábbi következménye már lehetőséget ad a sajátértékek meghatározására is.

4.5. Tétel

A λ skalár akkor és csak akkor sajátértéke az U véges dimenziós vektortér T homogén lineáris transzformációjának, ha U tetszőleges B bázisában

$$\det(T - \lambda E) = 0.$$

Bizonyítás:

A 4.4. Tétel értelmében λ akkor és csak akkor sajátérték, ha $\exists \underline{s} \neq \underline{0}$ amellyel $(T - \lambda E) \underline{s} = \underline{0}$. De akkor tetszőleges B bázisban felírva $T - \lambda E$ és $\underline{s}$ mátrixát, $\exists \underline{s} \neq \underline{0}$, hogy

$$(T - \lambda E) \underline{s} = \underline{0}.$$

Egy homogén lineáris egyenletrendszernek mint tudjuk, akkor és csak akkor van nem-triviális megoldása, ha determinánsa nulla. Tehát $\det(T - \lambda E) = 0$ szükséges és elégséges feltétele λ sajátérték voltának. ■

4.6. Megjegyzés

Az nyilvánvaló, hogy

$$|T - \lambda E| \text{ értéke}$$

U bármely bázisában ugyanaz, mivel hasonló mátrixok determinánsai egyenlőek.

Igy a $|T - \lambda E| = 0$ egyenlet

egy olyan, bázistól független $\dim U$ fokszámú algebrai egyenlet, amely jellemző a transzformációra és gyökei a sajátértékek.

4.7. Elnevezés

$$A \quad |T - \lambda E| = 0 \quad \lambda\text{-ra}$$

vonatkozóan $\dim U$ fokszámú egyenletet a transzformáció karakterisztikus egyenletének nevezzük.

Az algebra alaptétele értelmében (ld. II. 2.1.) minden algebrai egyenletnek van gyöke a komplex számok körében. Ebből következik a

4.8. Tétel

A véges dimenziós U vektortér bármely T lineáris operátorának van sajátértéke és sajátvektora.

Bizonyítás:

A $|\underline{T} - \lambda \underline{E}| = 0$ egyenletnek van gyöke és akkor van olyan $\underline{s} \neq \underline{0}$, hogy $(T - \lambda E) \underline{s} = \underline{0}$, mivel $T - \lambda E$ szinguláris operátor. ■

4.9. Megjegyzés

Fentiek következménye, hogy ha T lineáris operátora egy U vektortérnek és $V \subseteq U$, V invariáns altér U -ban, akkor T -nek van sajátvektora V -ben.

Bizonyos alkalmazások szempontjából célszerű mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait is értelmezni.

4.10 Definíció

A T kvadratikus mátrix sajátértékének nevezzük a λ skalárt és hozzá tartozó sajátvektornak az $\underline{s} \neq \underline{0}$ oszlopvektort, ha

$$\underline{T} \underline{s} = \lambda \underline{s}.$$

Mivel egy mátrix mindig tekinthető egy lineáris operátor valamely bázisbeli mátrixának és

$$\underline{T} \underline{s} = \lambda \underline{s} \iff T \underline{s} = \lambda \underline{s},$$

T sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározására érvényes a 4.5. Tétel megfelelője, a

4.11. Tétel

A λ skalár akkor és csak akkor sajátértéke a $\underline{T}$ kvadratikus mátrixnak, ha

$$\det (\underline{T} - \lambda \underline{E}) = 0.$$

$\underline{T}$ sajátvektorai a

$$(\underline{T} - \lambda \underline{E}) \underline{s} = \underline{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásvektorai.

Bizonyítás:

Az állítást a 4.5. Tétel igazolása során bizonyítottuk. ■

4.12. A lineáris operátor skalár invariánsai

Tekintsük a $T : U_n \rightarrow U_n$ lineáris operátor karakterisztikus polinomját a

$$p(\lambda) = |\underline{T} - \lambda \underline{E}| \text{ polinomot}$$

$$p(\lambda) = (-\lambda)^n + b_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \dots + b_1(-\lambda) + b_0$$

A II. fejezet 2.2. Tétele alapján (gyökök és együtthatók közti összefüggés)

$$b_{n-1} = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (1)$$

és

$$b_0 = (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n. \quad (2)$$

Másrészt írjuk fel a $p(\lambda)$ polinom b_{n-1} és b_0 együtthatóját a karakterisztikus polinom definíciója,

$$p(\lambda) = |\underline{T} - \lambda \underline{E}| = \begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & \dots & t_{1n} \\ & \dots & \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \text{ alapján.}$$

Innen

$$b_{n-1} = -\sum_{i=1}^n t_{ii} \quad (1')$$

és λ helyébe nullát helyettesítve

$$b_0 = \det \underline{T}$$

adódik.

(1) és (1') összevetéséből azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n t_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

a T operátor bármely bázisbeli mátrixának főátlójában levő elemek összege megegyezik a sajátértékek összegével, vagyis független a bázistól. Hasonlóan, összevetve (2)-t (2')-vel azt kapjuk, hogy

$$\det \underline{T} = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

(Ebben $|\underline{T}|$ bázistól való függetlensége már nem új információ számunkra.)

Fentiek indokolják, hogy

$$\sum_{i=1}^n t_{ii} - t \quad \text{és} \quad \det \underline{T} - t$$

a $T: U_n \rightarrow U_n$ lineáris operátor skalárinvariánsainak nevezzük.

Emlékeztetjük az olvasót az I. fejezet 7.6. példájára, amelyben geometriai homogén lineáris transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait határoztuk meg. Nézzünk most egy más természetű példát.

4.13. Példa

Legyen U az akárhányszor differenciálható egyváltozós valós függvények vektortere. A

$D: U \rightarrow U$ lineáris operátort a

következőképpen definiáljuk:

$$Df = f' \quad \text{ha} \quad f \in U.$$

Keressük D sajátvektorait és sajátértékeit. A sajátvektorok az

$$f' = \lambda f \quad \text{differenciálegyenlet}$$

megoldásai, sajátértékek azok a valós λ számok, amelyek mellett a differenciálegyenletnek van megoldása.

Mivel $f' = \lambda f$ bármely λ esetén megoldható, a sajátértékek az összes valós számok és egy, λ -hoz tartozó sajátvektor az

$$f(t) = e^{\lambda t} \quad \text{függvény.}$$

Megjegyzések

1. Mivel a példánkban U végtelen dimenziós, a 4.5. Tétel nem használható.

2. Ha U függvényelemű vektortér, sajátvektor helyett használatos a sajátfüggvény elnevezés is.

A 4.3. Tételből kitűnik, hogy egy sajátvektor skalárszorosai is - ha ez a skalár nem nulla - ugyanahhoz a sajátértékhez tartozó sajátvektorok és a nullaszorost - vagyis a nullvektort - hozzávéve a tárgytérnek egydimenziós invariáns alterét alkotják. Egy sajátértékhez tartozhat több lineárisan független sajátvektor is.

Erről szól a

4.14. Tétel

A $T : U \rightarrow U$ lineáris operátor λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai kiegészítve U nullvektorával U invariáns alterét alkotják.

Bizonyítás:

Ha s_1 és s_2 λ -hoz tartozó sajátvektorok, akkor tetszőleges c_1, c_2 skalárokkal

$$\begin{aligned} T(c_1 s_1 + c_2 s_2) &= c_1 T s_1 + c_2 T s_2 = c_1 \lambda s_1 + c_2 \lambda s_2 = \\ &= \lambda (c_1 s_1 + c_2 s_2). \end{aligned}$$

Vagyis $c_1 s_1 + c_2 s_2$ vagy nullvektor, vagy szintén λ -hoz tartozó sajátvektor. ■

A sajátvektorok nagyon fontos tulajdonságát fogalmazza meg a

4.15 Tétel

A T homogén lineáris transzformáció különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás:

Legyenek $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_k$ T sajátértékei, és

$$s_1, s_2, \dots, s_k$$

hozzájuk tartozó sajátvektorok. A sajátvektorok lineáris függetlenségét a sajátértékek számára (n) vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk.

1. Először megmutatjuk, hogy az állítás

$n = 2$ -re igaz.

Vizsgáljuk a nullvektor előállítását a sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$$c_1 \underline{s}_1 + c_2 \underline{s}_2 = \underline{0} \quad (1)$$

Alkalmazzuk (1)-re a T transzformációt.

$$c_1 T \underline{s}_1 + c_2 T \underline{s}_2 = \underline{0} \quad (2)$$

(2) $T \underline{s}_1 = \lambda_1 \underline{s}_1$ és $T \underline{s}_2 = \lambda_2 \underline{s}_2$ behelyettesítése után a következő alakú:

$$\lambda_1 c_1 \underline{s}_1 + \lambda_2 c_2 \underline{s}_2 = \underline{0} \quad (3)$$

Vonjuk ki (3)-ból (1) λ_1 -szeresét,

$$(\lambda_2 - \lambda_1) c_2 \underline{s}_2 = \underline{0} \quad (4)$$

adódik. Mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$ és $\underline{s}_2 \neq \underline{0}$, a (4) egyenlet csak úgy teljesülhet, hogy $c_2 = 0$, de akkor (1)-ből $c_1 = 0$ is következik. Tehát $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ lineárisan függetlenek.

2. Végül megmutatjuk, hogy ha $(n-1)$ sajátvektor lineárisan független, ebből következik n vektor lineáris függetlensége. Módszerünk azonos az 1. lépés módszerével. Tekintsük a nullvektor előállítását $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ segítségével:

$$c_1 \underline{s}_1 + \dots + c_n \underline{s}_n = \underline{0}. \quad (1')$$

Alkalmazzuk (1')-re a T operátort.

$$c_1 T \underline{s}_1 + \dots + c_{n-1} T \underline{s}_{n-1} + c_n T \underline{s}_n = \underline{0} \quad (2')$$

Felhasználva, hogy $\underline{s}_i$ -k sajátvektorok,

$$c_1 \lambda_1 \underline{s}_1 + \dots + c_{n-1} \lambda_{n-1} \underline{s}_{n-1} + c_n \lambda_n \underline{s}_n = \underline{0} \quad (3')$$

Vonjuk ki (3')-ből (1') λ_n -szeresét, a

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_n) \underline{s}_1 + \dots + c_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) \underline{s}_{n-1} = \underline{0} \quad (4')$$

egyenletet kapjuk. Az indukciós feltevés miatt és kihasználva, hogy a sajátértékek különbözők,

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$$

kell legyen, de akkor $1' - b \text{ől } c_n = 0$ is következik. A sajátvektorrendszer tehát lineárisan független. ■

4.16. Tétel

Ha egy U_n vektortér lineáris operátorának van n lineárisan független sajátvektora, akkor ebben a bázisban az operátor mátrixa diagonálmátrix.

Bizonyítás:

A lineárisan független $s_1, \dots, s_n$ vektorrendszer választható bázisnak. Jelöljük T mátrixát ebben a sajátvektor bázisban $T_{=s}$ -sel. $T_{=s}$ oszlopaiban a

$$T_{=s} s_i = \lambda_i s_i \quad i=1, \dots, n$$

vektorok sajátvektor bázisbeli oszlopmátrixai állnak:

$$\lambda_i s_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots i; \quad i=1, \dots, n,$$

tehát

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Megjegyzés:

A 4.15. Tételből következik, hogy ha a karakterisztikus egyenletnek n különböző gyöke van, akkor van n lineárisan független sajátvektora és így jellemezhető diagonálmátrixszal.

Az előbbi, un. teljes sajátvektorrendszerrel rendelkező T homogén lineáris transzformáció tetszőleges bázisbeli mátrixáról szól a

4.17. Tétel

Ha a T homogén lineáris transzformációnak van teljes sajátvektorrendszere, akkor mátrixai hasonlóak a diagonálmátrixhoz.

$$\underline{T}_S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bizonyítás:

Rögzítsük T tárgysterében a B bázist. $T\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértékeihez tartozó $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$ lineárisan független sajátvektorok B bázisbeli koordinátamátrixait jelöljük a következő módon:

$$\underline{s}_i = \begin{pmatrix} s_{i1} \\ \vdots \\ s_{in} \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, n$$

A T lineáris operátor mátrixát a B bázisban $\underline{T}_B$ -vel jelöljük. Végezzünk bázistranszformációt, térjünk át a B bázisról az S sajátvektor bázisra. A 3.5. Tétel szerint

$$\underline{T}_S = \underline{S}^{-1} \underline{T}_B \underline{S} \quad (1),$$

ahol $\underline{S}$ a bázistranszformáció mátrixa

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{in} & & s_{nn} \end{pmatrix}$$

(1)-et átrendezve, balról $\underline{S}$ -sel és jobbról $\underline{S}^{-1}$ -gyel szorozva az egyenlőség mindkét oldalát

$$\underline{T}_B = \underline{S} \underline{T}_S \underline{S}^{-1} \quad \text{adódik,}$$

tehát T tetszőleges B bázisbeli mátrixa hasonló a $\underline{T}_S$ diagonálmátrixhoz. ■

A 4.17. Tétel bizonyos egyszerű mátrixok jól kezelhető szorzat-
ta alakítására is használható.

4.18. Tétel

Ha a $\underline{T}$ n -edrendű kvadratikus mátrixnak van n lineárisan
független oszlopvektora, akkor

$$\underline{T} = \underline{S} < \lambda_1, \dots, \lambda_n > \underline{S}^{-1}$$

alakban írható, ahol

$$\underline{S} = (\underline{s}_1 \dots \underline{s}_n) \quad ,$$

az $\underline{s}_i$ $i=1, \dots, n$ vektorok $\underline{T}$ sajátvektorai, $\underline{T}\underline{s}_i = \lambda_i \underline{s}_i$.
< $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ > diagonálmátrix, amelynek főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll.

Bizonyítás:

Az állítás a 4.17. Tétel következménye. ■

4.19. Elnevezés

A kvadratikus $\underline{T}$ mátrix fenti

$$\underline{T} = \underline{S} < \lambda_1, \dots, \lambda_n > \underline{S}^{-1}$$

előállítását spektrálfelbontásnak nevezzük.

Mivel különböző sajátértékekhez lineárisan független sajátvektorok
tartoznak (4.15 Tétel), ha $\underline{T}$ -nek van annyi különböző sajátértéke, mint
amekkora a rendje, akkor van spektrálfelbontása.

A továbbiakban néhány egyszerű alkalmazását mutatjuk meg a
spektrálfelbontásnak.

4.20. Tétel

Ha a $\underline{T}$ kvadratikus mátrix spektrálfelbontása

$$\underline{T} = \underline{S} < \lambda_1, \dots, \lambda_n > \underline{S}^{-1} \quad ,$$

akkor

$$\underline{T}^k = \underline{S} < \lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k > \underline{S}^{-1}$$

(k tetszőleges természetes szám).

Bizonyítás:

A bizonyítást k -ra vonatkozó teljes indukcióval végezzük.
 $k = 1$ -re az állítás igaz, és

$$\text{ha } \underline{T}^{k-1} = \underline{S} < \lambda_1^{k-1}, \dots, \lambda_n^{k-1} > \underline{S}^{-1},$$

$$\underline{T}^k = \underline{T}^{k-1} \cdot \underline{S} < \lambda_1, \dots, \lambda_n > \underline{S}^{-1}, \text{ akkor}$$

$$\underline{T}^k = \underline{S} < \lambda_1^{k-1}, \dots, \lambda_n^{k-1} > \underline{S}^{-1} \cdot \underline{S} < \lambda_1, \dots, \lambda_n > \underline{S}^{-1}, \text{ vagyis}$$

$$\underline{T}^k = \underline{S} < \lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k > \underline{S}^{-1},$$

mint állítottuk. ■

A spektrálfelbontás segítségével könnyen meghatározható az inverzmátrix is.

4.21. Tétel

$$\text{A} \quad \underline{T} = \underline{S} < \lambda_1, \dots, \lambda_n > \underline{S}^{-1} \quad (1)$$

mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha egyik sajátértéke sem nulla. Ekkor $\underline{T}^{-1}$ spektrálfelbontása a következő:

$$\underline{T}^{-1} = \underline{S} < \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} > \underline{S}^{-1} \quad (2)$$

Bizonyítás:

Mint tudjuk $\underline{T}$ invertálhatóságának szükséges és elégséges feltétele

$$\det \underline{T} \neq 0 \text{ fennállása.}$$

Mivel $\det \underline{T} = \lambda_1 \dots \lambda_n$ (4.12. Tétel), az állítás első részét bizonyítottuk. Megmutatjuk, hogy ha $\lambda_i \neq 0$ $i=1, 2, \dots, n$, akkor $\underline{T}^{-1}$ (2) alakú. Ugyanis

$$\begin{aligned} \underline{S} < \lambda_1, \dots, \lambda_n > \underline{S}^{-1} \cdot \underline{S} < \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} > \underline{S}^{-1} &= \\ &= \underline{S} < \lambda_1, \dots, \lambda_n > \cdot < \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} > \underline{S}^{-1} = \underline{E} \end{aligned}$$

és hasonlóan fordított sorrendben végezve a szorzást

$$\underline{\underline{S}} < \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} > \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}} < \lambda_1, \dots, \lambda_n > \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{E}},$$

tehát

$$\underline{\underline{S}} < \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} > \underline{\underline{S}}^{-1} \text{ valóban}$$

$\underline{\underline{T}}$ inverze, mint állítottuk. ■

Lássunk egy példát a spektrálfelbontásra.

4.22. Példa

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg $\underline{\underline{T}}$ spektrálfelbontását, ha lehet. Ehhez megkeressük először a sajátértékeket a karakterisztikus egyenlethől.

$$\det(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

A karakterisztikus egyenlet.

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

A sajátértékek: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, tehát van teljes sajátvektorrendszer és így elvégezhető a spektrálfelbontás. A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és az}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{homogén}$$

lineáris egyenletrendszerek megoldásaként kapjuk. Elég egy-egy megoldást meghatároznunk.

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

a spektrálfelbontás.

Azt tudjuk, hogy ha egy véges dimenziós vektortér lineáris operátorának sajátértékei különbözők, akkor van teljes sajátvektorrendszere. Felmerül a kérdés, hogy lehet-e teljes sajátvektorrendszert találni, ha a karakterisztikus egyenletnek van többszörös gyöke. Megmutatjuk, hogy van olyan eset, amikor a többszörös gyökhöz tartozik multiplicitásának megfelelő számú sajátvektor és akkor van teljes sajátvektorrendszert. Végül foglalkozunk azzal az esettel, amikor nincs elég sajátvektor és megmutatjuk, hogy a hiányzó sajátvektorok akkor pótolhatók ún. fővektorokkal, vagy más néven általánosított sajátvektorokkal.

4.23. Példák

1. Legyen a T operátor mátrixa egy B bázisban a

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ mátrix.}$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$(1 - \lambda)^2 (1 + \lambda) = 0,$$

a sajátértékek: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1.$

A $\lambda_1 = -1$ sajátértékhez tartozik például az

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ sajátvektor.}$$

Megmutatjuk, hogy a kétszeres gyökhöz található két lineárisan független sajátvektor, amelyeket a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapunk.

$$\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Itt az volt a szerencsénk, hogy a kétszeres sajátértékhez tartozó lineáris egyenletrendszer mátrixának a rangja kettővel kevesebb a rendjénél és ezért kaptunk teljes sajátvektorrendszert. Következő példánkban más a helyzet.

2. Legyen most a T operátor B bázisbeli mátrixa

$$\underline{T}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet

$$(1 - \lambda)^2 (2 - \lambda) = 0.$$

A sajátértékek: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Egy λ_1 -hez tartozó sajátvektor:

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ -hez tartozó egyenletrendszer

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mátrixának a rangja 2, tehát csak egy független sajátvektor tartozik az 1 sajátértékhez. Ez például az

$$\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vektor.}$$

Szeretnénk kiegészíteni az $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ vektorrendszert úgy, hogy kifeszítse a teret és bázisnak választva minél egyszerűbb legyen az operátor mátrixa. A kiinduló ötlet a következő. Mivel a

$$(T - \lambda E) \underline{s} = \underline{0} \quad \text{egyenletnek}$$

$\lambda = 1$ esetén csak egy megoldása van, a hiányzó vektort pótoljuk egy olyan $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ -től független $\underline{f}$ vektorral, amely a

$$(T - \lambda E)^2 \underline{f} = \underline{0} \quad \text{egyenlet}$$

megoldása - ha ilyen létezik.

$(T - \lambda E)^2 \underline{f} = \underline{0} \Leftrightarrow (T - \lambda E) (T - \lambda E) \underline{f} = \underline{0}$, de akkor $(T - \lambda E) \underline{f}$ λ -hoz tartozó sajátvektor kell legyen, tehát a

$$(T - \lambda E) \underline{f} = \underline{s} \quad \text{egyenletből}$$

határozható meg $\underline{f}$. Irjuk fel a B bázisban a megfelelő lineáris egyenletrendszert

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer egy megoldása

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\underline{s}_1, \underline{s}_2$ és $\underline{f}$ B bázisbeli koordinátaoszlopvektorai

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A három vektor lineáris független, tehát választható bázisnak. Ebben az S bázisban határozzuk meg T mátrixát.

$$T\underline{s}_1 = 2\underline{s}_1, \quad T\underline{s}_2 = \underline{s}_2, \quad T\underline{f} = \underline{f} + \underline{s}_2$$

és így

$$T_S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bár}$$

nem diagonálmátrix, de egyszerű alaku. Érdekes tehát foglalkoznunk kicsit részletesebben is az ilyen tulajdonságu $\underline{f}$ vektorokkal.

4.24. Definíció

Az $\underline{f}_k$ vektort a T homogén lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó k-adrendű fővektorának nevezzük, ha

$$(T - \lambda E)^k \underline{f}_k = \underline{0} \quad \text{és}$$

$$(T - \lambda E)^{k-1} \underline{f}_k \neq \underline{0}.$$

Megjegyzés:

A sajátvektor a fenti definíció értelmében elsőrendű fővektor. Ez indokolja, hogy a fővektorokat szokták általánosított sajátvektoroknak is nevezni.

4.25. Tétel

Ha egy T homogén lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozik $\underline{f}_k$ k-adrendű fővektor, akkor tartozik hozzá

$$\forall j < k\text{-ra} \quad \underline{f}_j \quad j\text{-ed rendű fővektor is, és az}$$

$$\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_k \quad \lambda\text{-hoz tartozó}$$

fővektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás:

a) $(T - \lambda E) \underline{f}_k = \underline{f}_{k-1}, \dots, (T - \lambda E)^{k-1} \underline{f}_k = \underline{f}_1$ az állításban szereplő fővektorok, ugyanis ha

$$j < k, (T - \lambda E)^j \underline{f}_j = (T - \lambda E)^j \cdot (T - \lambda E)^{k-j} \underline{f}_j = \underline{0}$$

és

$$(T - \lambda E)^{j-1} \underline{f}_j = (T - \lambda E)^{k-1} \underline{f}_k \neq \underline{0}.$$

b) Igazoljuk a k elemű un. fővektorlanc vektorainak lineáris függetlenségét.

$$c_1 \underline{f}_1 + c_2 \underline{f}_2 + \dots + c_k \underline{f}_k = \underline{0} \quad (1)$$

Alkalmazzuk (1)-re a $(T - \lambda E)^{k-1}$ operátort. Azt kapjuk, hogy

$$c_k (T - \lambda E)^{k-1} \underline{f}_k = \underline{0} \Rightarrow c_k = 0.$$

Hasonlóan a

$$c_1 \underline{f}_1 + \dots + c_{k-1} \underline{f}_{k-1} = \underline{0} \quad \text{vektorra}$$

$$(T - \lambda E)^{k-2} \text{-t } (T - \lambda E)^{k-3} \text{-t, ..., végül}$$

$(T - \lambda E)$ -t alkalmazva adódik, hogy a többi együttható is nulla. A vektorrendszer tehát lineárisan független. ■

Ahhoz, hogy egy véges dimenziós vektortér lineáris operátorát a bevezető példában szereplő un. Jordan alakú mátrixszal tudjuk jellemezni, szükségünk van egy fontos új fogalomra, a magtér fogalmának általánosítására.

4.26. Tétel

Ha λ a $T: U \rightarrow U$ lineáris operátor sajátértéke, az U vektortér azon vektorai, amelyeket a $T - \lambda E$ operátor valamely egész kitevős hatványa a nullvektorra képez le, vektorteret alkotnak. Ezt az M vektorteret a $T - \lambda E$ operátor általánosított magterének nevezzük.

Bizonyítás:

1. M nem üres, mert $\underline{0} \in M$, sőt $T - \lambda E$ szinguláris volta miatt van

$$\underline{f}_1 \neq \underline{0} \quad \underline{f}_1 \in M, \text{ ahol}$$

$\underline{f}_1$ T λ -hoz tartozó sajátvektora.

2. Ha $(T - \lambda E)^k \underline{m}_1 = \underline{0}$ és $(T - \lambda E) \underline{m}_2 = \underline{0}$, akkor

$$(T - \lambda E)^{\max(k, l)} (c_1 \underline{m}_1 + c_2 \underline{m}_2) = \underline{0},$$

tehát $M \subseteq U$ altere. ■

A következőkben M néhány tulajdonságát vizsgáljuk.

4.27. Tétel

Ha a T homogén lineáris transzformáció tárgytérének dimenziója n és λ egy sajátérték, akkor $\forall \underline{m} \in M$ esetén

$$(T - \lambda E)^n \underline{m} = \underline{0}$$

Bizonyítás:

M minden vektorához keressük meg azt a legkisebb kitevőt, amellyel

$$(T - \lambda E)^k \underline{m} = \underline{0} \text{ teljesül.}$$

Megmutatjuk, hogy $k \leq n$, indirekt módszerrel. Tegyük fel ugyanis, hogy van olyan $k > n$ és $\underline{m} \in M$, hogy

$$(T - \lambda E)^k \underline{m} = \underline{0} \quad \text{és}$$

$$(T - \lambda E)^{k-1} \underline{m} \neq \underline{0}$$

akkor a 4.25. Tétel értelmében volna M -ben λ -hoz tartozó $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k$ lineárisan független vektorrendszer, ami lehetetlen, hiszen

M az n dimenziós tárgytér

altere, amelynek dimenziója nem lehet n -nél nagyobb. Tehát $k \leq n$ és

akkor $(T - \lambda E)^n \underline{m} = \underline{0} \quad \forall \underline{m} \in M$ esetén. ■

Lehet, hogy n -nél kisebb olyan i egész is van, amellyel

$$(T - \lambda E)^i \underline{m} = \underline{0} \quad \forall \underline{m} \in M\text{-re}$$

fennáll.

4.28. Elnevezés

Azt az i egész számot, amellyel

$$(T - \lambda E)^i \underline{m} = \underline{0} \quad \forall \underline{m} \in M\text{-re}$$

és $\exists \underline{m} \in M$, hogy $(T - \lambda E)^{i-1} \underline{m} \neq \underline{0}$

a λ sajátérték és a hozzá tartozó M általánosított magtér indexének nevezzük.

4.29. Tétel

M invariáns altére U -nak a T operátorra vonatkozóan.

Bizonyítás:

Ha $\underline{m} \in M$, akkor

$$(T - \lambda E)^i \underline{m} = \underline{0}$$

itt i M indexe. Ekkor

$$(T - \lambda E)^i T \underline{m} = T(T - \lambda E)^i \underline{m} = \underline{0},$$

mivel $(T - \lambda E)^i$ és T felcserélhető operátorok. ■

A továbbiakban megmutatjuk, hogy T tárgytérét lépésenként általánosított magterek direkt összegére lehet bontani.

4.30. Tétel :

Ha λ a $T : U_n \rightarrow U_n$ operátor i indexű sajátértéke, akkor

$$U = M \oplus K$$

ahol M $T - \lambda E$ általánosított magtere, K pedig $(T - \lambda E)^i$ képtere.

Bizonyítás:

Legyen $\underline{u}$ tetszőleges vektor az U tárgytérben. Tekintsük az

$$\underline{u}, (T - \lambda E)^i \underline{u}, (T - \lambda E)^{2i} \underline{u}, \dots, (T - \lambda E)^{ni} \underline{u}$$

vektorrendszert. Mivel $\dim U = n$, ez az $n + 1$ vektor lineárisan összefüggő, tehát létezik

$c_0, c_1, \dots, c_n$ nem mind nulla skalár úgy, hogy

$$c_0 \underline{u} + c_1 (T - \lambda E)^i \underline{u} + \dots + c_n (T - \lambda E)^{in} \underline{u} = \underline{0}. \quad (1)$$

a) Ha $c_0 \neq 0$, akkor

$$\underline{u} = -(T - \lambda E)^i \left[\frac{c_1}{c_0} \underline{u} + \dots + \frac{c_n}{c_0} (T - \lambda E)^{(n-1)i} \underline{u} \right],$$

tehát $\underline{u} \in K$

b) Ha $c_0 = c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$, de már $c_k \neq 0$, akkor ezt figyelembe véve (1)-ből azt kapjuk, hogy

$$c_k (T - \lambda E)^{k \cdot i} \left[\underline{u} + \underbrace{\frac{c_{k+1}}{c_k} (T - \lambda E)^i \underline{u} + \dots + \frac{c_n}{c_k} (T - \lambda E)^{(n-k)i} \underline{u}}_{\underline{v} \in K} \right] = \underline{0}.$$

$c_k \neq 0$ és rövidebb jelöléssel

$$(T - \lambda E)^{k \cdot i} (\underline{u} + \underline{v}) = \underline{0} \quad \text{adódik.}$$

Tudjuk, hogy λ indexe i , ezért

$$(T - \lambda E)^i (\underline{u} + \underline{v}) = \underline{0} \quad \text{is teljesül,}$$

$$\underline{u} + \underline{v} \in M \quad \text{és} \quad \underline{v} \in K,$$

tehát $\underline{u} \in U$ előáll M és K elemeinek összegeként. Meg kell még mutatnunk, hogy $M \cap K = \{\underline{0}\}$

Legyen

$$\underline{u} = \underline{m}_1 + \underline{k}_1 \quad \text{és}$$

$$\underline{u} = \underline{m}_2 + \underline{k}_2, \quad (2)$$

$$\underline{m}_1, \underline{m}_2 \in M, \quad \underline{k}_1, \underline{k}_2 \in K$$

(2)-ből következik, hogy

$$\underline{m}_1 - \underline{m}_2 = \underline{k}_2 - \underline{k}_1 = \underline{w}$$

vagyis $\underline{w} \in M \cap K$.

$\underline{w} \in K$ azt jelenti, hogy van $\underline{u}_1 \in U$, amellyel

$$\underline{w} = (T - \lambda E)^i \underline{u}_1 \quad (3)$$

$\underline{w} \in M$ azt jelenti, hogy

$$(T - \lambda E)^i \underline{w} = \underline{0} \quad (4)$$

(3)-at (4)-be helyettesítve

$$(T - \lambda E)^{2i} \underline{u}_1 = \underline{0} \quad \text{adódik,}$$

és mivel λ indexe i , akkor

$$\underline{w} = (T - \lambda E)^i \underline{u}_1 = \underline{0} \quad \text{is fennáll, tehát}$$

$\underline{w} = \underline{0}$. Így

$$U = M \oplus K. \quad \blacksquare$$

Azt már tudjuk, hogy M T -re vonatkozó invariáns altere U -nak.

4.31. Tétel

$(T - \lambda E)^i$ képtere K , invariáns altere az U tárgytérnek a T operátorra vonatkozóan.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \text{Ha } \underline{w} &= (T - \lambda E)^i \underline{u} \quad u \in U, \text{ akkor} \\ T\underline{w} &= (T - \lambda E)^i (T\underline{u}) \end{aligned}$$

ismét kihasználva, hogy T és $(T - \lambda E)^i$ felcserélhető operátorok. $\blacksquare$

Megmutatjuk, hogy a tárgytér invariáns alterekre bontása a transzformáció mátrixának felírása szempontjából nagyon előnyös.

4.32. Tétel

Ha a T homogén lineáris transzformáció véges dimenziós U tárgytére, két invariáns altér direkt összege

$$U = M \oplus K,$$

akkor az operátor

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{K} \end{pmatrix}$$

alaku mátrixszal jellemezhető, ahol

$\underline{\underline{M}}$ a $T : M \rightarrow M$ és $\underline{\underline{K}}$ a $T : K \rightarrow K$ transzformáció mátrixa.

Bizonyítás:

Legyen $\dim U = n$,

M bázisa $\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_r$

K bázisa $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{n-r}$

tetszőleges $\underline{u} \in U$

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^r a_i \underline{m}_i + \sum_{j=1}^{n-r} b_j \underline{k}_j \text{ alakban írható egyértelműen.}$$

$\underline{u}$ koordináta mátrixa particionálva:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}$$

Keressük a $\underline{\underline{T}}$ mátrixot is particionált alakban

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{D}} & \underline{\underline{K}} \end{pmatrix}$$

ahol $\underline{\underline{T}}$ n -ed rendű, $\underline{\underline{M}}$ r -ed rendű, $\underline{\underline{K}}$ $(n-r)$ -ed rendű kvadratikus mátrixok, $\underline{\underline{C}}$ $r \times n-r$ és $\underline{\underline{D}}$ $n-r \times r$ méretű.

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}} \underline{a} + \underline{\underline{C}} \underline{b} \\ \underline{\underline{D}} \underline{a} + \underline{\underline{K}} \underline{b} \end{pmatrix}$$

Ha $\underline{u} \in M$, akkor $\underline{b} = \underline{0}$ és mert M invariáns altér, vagyis

$Tu \in M$ $\underline{\underline{D}} \underline{a} = \underline{0}$ kell legyen, minden $\underline{u}$ és így minden $\underline{a}$ esetén, tehát $\underline{\underline{D}} = \underline{0}$ kell legyen.

Hasonlóan, megismételve a gondolatmenetet, következik K invariáns voltából $\underline{\underline{C}} = \underline{0}$ és ezzel az állítás. ■

Ez a tétel segítségünkre lesz homogén lineáris transzformáció mátrixának egyszerű alakban történő felírásánál.

4.33. Tétel

A $T : U_n \rightarrow U_n$ lineáris operátor T mátrixa tetszőleges B bázisban

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \underline{M_1} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M_2} & \dots & \cdot \\ \vdots & & & \cdot \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{M_j} \end{pmatrix} \quad \text{alakban írható,}$$

ahol $\underline{M_k}$ a λ_k sajátértékhez tartozó M_k általánosított magtéren értelmezett

$T : M_k \rightarrow M_k$ operátor

mátrixa a B bázisban.

Bizonyítás:

A T operátornak van λ_1 sajátértéke, ehhez tartozik

$(T - \lambda_1 E)^i \mathbf{1}$ M_1 magtere és

K_1 képtere. A 4.30. Tétel értelmében az U tárgytér

$U = M_1 \oplus K_1$ módon

invariáns alterekre bontható és akkor

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \underline{M_1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{K_1} \end{pmatrix} \quad \text{alaku,}$$

ahol $\underline{M_1}$ a $T : M_1 \rightarrow M_1$

$\underline{K_1}$ a $T : K_1 \rightarrow K_1$ mátrixa.

Mivel K_1 U invariáns altere, van benne sajátvektor, amelyhez tartozó sajátérték legyen λ_2 . Az előbbihez hasonló

$$K_1 = M_2 \oplus K_2 \quad \text{módon}$$

bontható invariáns alterekre s.i.t. ■

Megjegyzés:

Itt végülis lépésenként invariáns alterek direkt összegeként állítottuk elő a tárgysteret.

$$U = M_1 \oplus \dots \oplus M_j \quad \text{módon,}$$

ahol

$$\sum_{i=1}^j \dim M_i = \dim U.$$

Feladatunk most már csak az, hogy jól megválasztott bázisban írjuk fel a

$$T : M_i \rightarrow M_i \quad \text{leképezések}$$

$\underline{M}_i$ mátrixait.

4.34. Tétel

Legyen λ a $T : U_n \rightarrow U_n$ operátor sajátértéke és M $T - \lambda E$ általánosított magtere, λ indexe i . Ha $\dim M = i$, akkor fővektorokból álló bázist választva

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

alakú i -edrendű ún. Jordan mátrix.

Bizonyítás:

Ha λ indexe i , akkor van M -ben λ -hoz tartozó i elemű $f_1, \dots, f_i$ fővektorlánc, amelynek vektorai mint tudjuk, lineárisan füg-

getlenek (lásd 4.25. Tétel). Mivel $\dim M = i$, a fővektorlánc választható M bázisául. Ebben a bázisban írjuk fel M mátrixát.

$$\begin{aligned}(T - \lambda E) \underline{f}_1 &= 0 \implies T \underline{f}_1 = \lambda \underline{f}_1 \\(T - \lambda E) \underline{f}_2 &= \underline{f}_1 \implies T \underline{f}_2 = \lambda \underline{f}_2 + \underline{f}_1, \dots, \\(T - \lambda E) \underline{f}_i &= \underline{f}_{i-1} \implies T \underline{f}_i = \lambda \underline{f}_i + \underline{f}_{i-1}.\end{aligned}$$

Felírva a bázisvektorok transzformáltjait koordinátáiból álló oszlopvektorral, az állításban szereplő mátrixot kapjuk. ■

4.35. Elnevezés

Ha a 4.33. Tételben szereplő $\underline{M}_k$ mátrixok mindegyikét Jordan alakban írjuk fel, tehát fővektor bázist választunk, a kapott $\underline{T}$ mátrixot Jordan-féle normálalakú mátrixnak, az $\underline{M}_k$ mátrixot Jordan blokknak nevezzük.

Megjegyzés:

Előfordulhat olyan eset is, hogy valamelyik $T : M \rightarrow M$ transzformációnál $\dim M$ nagyobb a λ sajátérték indexénél. Ekkor a fővektorrendszer nem alkot láncot, van több lineárisan független azonos rendű fővektor. Ebben az esetben egy λ -hoz több Jordan-blokk tartozik. Ennek az esetnek a tárgyalása meghaladja a jegyzet kereteit, ezzel nem foglalkozunk.

Ahogy a sajátvektorrendszer alkalmas mátrixok diagonalizálására, úgy fővektorok segítségével tetszőleges kvadratikusan mátrix Jordan alakra transzformálható pontosabban hasonló egy Jordan mátrixhoz.

4.36. Definíció

Tekintsük az $\underline{A}$ kvadratikusan mátrixot egy A lineáris operátor valamely bázisbeli mátrixának. Az operátor fővektorainak koordináta-oszlopvektorait az $\underline{A}$ mátrix fővektorainak nevezzük.

4.37. Tétel

Tetszőleges $\underline{A}$ kvadratikusan mátrix hasonló egy Jordan mátrixhoz

$$\underline{A} = \underline{F} \underline{J} \underline{F}^{-1}, \quad \text{ahol}$$

$\underline{J}$ a megfelelő Jordan mátrix,
 $\underline{F}$ oszlopait $\underline{A}$ fővektorai alkotják.

Bizonyítás:

A 4.18. Tétel igazolásával azonos módon történik.

Megjegyzés:

Felhívjuk az olvasó figyelmét arra a tárgyalásból nyilvánvaló tényre, hogy ha van teljes sajátvektorrendszer, akkor a mátrix Jordan normálalakra transzformálása megegyezik a spektrálfelbontással.

4.38. Példa

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{hozzuk}$$

Jordan alakra.

A karakterisztikus egyenlet:

$$|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2$$

tehát

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

A 3 kétszeres gyökhöz először a sajátvektorokat keressük meg a következő egyenlethől:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{f}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Több lineárisan független elsőrendű fővektor nincs, mivel az $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}$ mátrix rangja 1 és rendje 2.

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{egyenlethől egy}$$

$$\text{másodrendű fővektor} \quad \underline{\underline{f}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \underline{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.39. Cayley-Hamilton tétel

Minden $T : U_n \rightarrow U_n$ operátor kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét és ennek következtében minden kvadrátikus $\underline{T}$ mátrix is kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét.

Bizonyítás:

Legyen T karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}, \quad \sum_{i=1}^k m_i = n.$$

Állításunk azt jelenti, hogy a

$$P(T) = (T - \lambda_1 E)^{m_1} \dots (T - \lambda_k E)^{m_k}$$

homogén lineáris transzformáció a nulloperátor. Mivel a

$$P(T) : U_n \rightarrow U_n \text{ lineáris operátor } T$$

minden fővektorához a nullvektort rendeli és így van n lineárisan független vektor, amelynek $\underline{0}$ a képe. $P(T)$ minden $\underline{u} \in U_n$ vektort $\underline{0}$ -ba visz át, tehát nulloperátor. A mátrixra vonatkozó állítás ebből már következik. ■

5. AZ EUKLIDESZI TÉR LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓI

Ebben a pontban a skaláris szorzattal rendelkező valós és komplex vektorterek néhány speciális lineáris operátorával foglalkozunk.

5.1. Definíció

Legyen T az E_n euklideszi tér lineáris operátora. Értelmezzük a T^x operátort a következő módon:

$$(Tx | y) = (x | T^x y) \quad \text{ha} \quad x, y \in E_n$$

a T^x operátort T adjungáltjának nevezzük.

5.2. Tétel

Az E euklideszi tér minden T lineáris operátorához egyértelműen tartozik T^x és T^x is lineáris operátor.

Bizonyítás:

Ha $(Tx | y) = (x | T^x y)$, akkor a skaláris szorzat tulajdonságai alapján

$$(T^x y | x) = (y | Tx) \quad \text{is fennáll.}$$

Legyen $e_1, \dots, e_n$ E_n ortonormált bázisa

$$(T^x y | e_i) = (y | T e_i) \quad i=1, \dots, n$$

és ebből

$$T^x y = \sum_{i=1}^n (T^x y | e_i) e_i \quad \text{alapján}$$

$$T^x y = \sum_{i=1}^n (y | T e_i) e_i \quad \text{adódik,}$$

ami azt mutatja, hogy minden $y \in E_n$ vektorhoz rendel képet T^x , a skaláris szorzás és adott bázisbeli vektorfelbontás egyértelműsége miatt egyértelműen és a skaláris szorzás tulajdonságai alapján homogen lineáris módon. Ezzel az állítást igazoltuk. ■

5.3. Tétel

Az adjungált operátor a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $(T^x)^x = T$
2. $(T_1 + T_2)^x = T_1^x + T_2^x$
3. $(T_1 T_2)^x = T_2^x T_1^x$
4. $(c T)^x = \bar{c} T^x \quad (c \text{ skalár})$

Bizonyítás:

1. Irjuk fel $T^{\mathbf{x}}$ adjungáltjára vonatkozóan a definiáló egyenlőséget

$$(T^{\mathbf{x}} \underline{y} | \underline{x}) = (\underline{y} | (T^{\mathbf{x}})^{\mathbf{x}} \underline{x})$$

másrészt mint 5.2. bizonyításánál

$$(T^{\mathbf{x}} \underline{y} | \underline{x}) = (\underline{y} | T \underline{x}) \quad \text{ebből}$$

$$(\underline{y} | (T^{\mathbf{x}})^{\mathbf{x}} \underline{x}) = (\underline{y} | T \underline{x}) \quad \text{mivel ez}$$

minden $\underline{y}$ esetén fennáll $(T^{\mathbf{x}})^{\mathbf{x}} = T$.

2.

$$\begin{aligned} ((T_1 + T_2)^{\mathbf{x}} \underline{x} | \underline{y}) &= (\underline{x} | (T_1 + T_2) \underline{y}) = (\underline{x} | T_1 \underline{y} + T_2 \underline{y}) = \\ &= (\underline{x} | T_1 \underline{y}) + (\underline{x} | T_2 \underline{y}) = (T_1^{\mathbf{x}} \underline{x} | \underline{y}) + (T_2^{\mathbf{x}} \underline{x} | \underline{y}) \end{aligned}$$

és akkor

$$((T_1 + T_2)^{\mathbf{x}} \underline{x} | \underline{y}) = ((T_1^{\mathbf{x}} + T_2^{\mathbf{x}}) \underline{x} | \underline{y}),$$

amiből az állítás következik.

3.

$$(T_1 T_2 \underline{x} | \underline{y}) = (\underline{x} | (T_1 T_2)^{\mathbf{x}} \underline{y})$$

Másrészt

$$(T_1 T_2 \underline{x} | \underline{y}) = (T_1 (T_2 \underline{x}) | \underline{y}) = (T_2 \underline{x} | T_1^{\mathbf{x}} \underline{y}) = (\underline{x} | T_2^{\mathbf{x}} T_1^{\mathbf{x}} \underline{y}),$$

tehát

$$(\underline{x} | (T_1 T_2)^{\mathbf{x}} \underline{y}) = (\underline{x} | T_2^{\mathbf{x}} T_1^{\mathbf{x}} \underline{y}) \quad \text{és ebből}$$

$$(T_1 T_2)^{\mathbf{x}} = T_2^{\mathbf{x}} T_1^{\mathbf{x}} \quad \text{következik.}$$

4. Ennek igazolását az olvasóra bizzuk. ■

Felmerül a kérdés, hogy milyen kapcsolat van egy lineáris operátor és adjungáltjának mátrixai között. Erről szól az

5.4. Tétel

Ha a T lineáris operátor mátrixa ortonormált bázisban $\underline{T}$, akkor a $T^{\mathbf{x}}$ adjungált operátoré $\underline{\overline{T}}$, (transzponált konjugált).

Bizonyítás:

Legyen $\underline{T} = (t_{ij})$ T mátrixa és

$\underline{B} = (b_{ij})$ T^* mátrixa az

$e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormált bázisban.

Ekkor

$$b_{ij} = (\underline{B} \underline{e}_i | \underline{e}_j) \quad (1)$$

Mivel

$$(T^* \underline{e}_i | \underline{e}_j) = (\underline{e}_i | T \underline{e}_j) \quad \text{és}$$

a skaláris szorzás tulajdonságai alapján

$$(\underline{e}_i | T \underline{e}_j) = \overline{(T \underline{e}_j | \underline{e}_i)},$$

(1)-ből azt kapjuk, hogy

$$b_{ij} = (\underline{B} \underline{e}_i | \underline{e}_j) = \overline{(T \underline{e}_j | \underline{e}_i)} = \overline{t_{ji}}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

Megjegyzés:

Valós euklideszi téren, fentiek értelmében, ha két operátor egymás adjungáltja, ortonormált bázisbeli mátrixaik egymás transzponáltjai.

Fontosak az alkalmazásokban az olyan lineáris operátorok, amelyek megegyeznek adjungáltjukkal.

5.5. Definíció

Az olyan T lineáris operátorokat, amelyekre $T = T^*$, önadjungált operátornak nevezzük.

5.6. Tétel

Ha $\underline{T} = (t_{ij})$ egy T önadjungált operátor ortonormált bázisbeli mátrixa, akkor

$$\underline{T} = \overline{\underline{T}}'.$$

Bizonyítás:

Az állítás az 5.4. Tétel közvetlen következménye. ■

5.7. Megjegyzés

Valós euklideszi tér önadjungált operátorának ortonormált bázisbeli mátrixa szimmetrikus mátrix. A valós önadjungált operátort szokták szimmetrikus operátornak is nevezni.

Az önadjungált operátorok sajátértékeiről és sajátvektorairól, ezek speciális voltáról szólunk a következőkben.

5.8. Tétel

A T önadjungált lineáris operátor sajátértékei valósak.

Bizonyítás:

Legyen λ T sajátértéke és $\underline{s}$ hozzátartozó sajátvektor. Ekkor

$$(T\underline{s} | \underline{s}) = (\lambda \underline{s} | \underline{s}) = \lambda (\underline{s} | \underline{s}).$$

Másrészt vegyük figyelembe, hogy $T = T^x$.
Ekkor

$$(T \underline{s} | \underline{s}) = (\underline{s} | T \underline{s}) = (\underline{s} | \lambda \underline{s}) = \bar{\lambda} (\underline{s} | \underline{s}).$$

A kettő összevetéséből adódik, hogy

$$\lambda (\underline{s} | \underline{s}) = \bar{\lambda} (\underline{s} | \underline{s}) \text{ és mert } (\underline{s} | \underline{s}) \neq 0$$

$$\lambda = \bar{\lambda}. \quad \blacksquare$$

Azt tudjuk, hogy egy lineáris operátor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek. Az önadjungált operátorokra több is igaz.

5.9. Tétel

Önadjungált lineáris operátor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.

Bizonyítás:

Legyen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ T két sajátértéke és

$\underline{s}_1, \underline{s}_2$ hozzájuk tartozó sajátvektorok. Tekintsük a következő skaláris szorzatot:

$$(T \underline{s}_1 | \underline{s}_2) = \lambda_1 (\underline{s}_1 | \underline{s}_2) . \text{ Másrészt}$$

$$(T \underline{s}_1 | \underline{s}_2) = (\underline{s}_1 | T \underline{s}_2) = (\underline{s}_1 | \lambda_2 \underline{s}_2)$$

Ebből $\lambda_1 (\underline{s}_1 | \underline{s}_2) = \lambda_2 (\underline{s}_1 | \underline{s}_2)$ adódik. Tudjuk, hogy T sajátértékei valósak, ezért $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2$ és $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tehát az egyenlőség csak $(\underline{s}_1 | \underline{s}_2) = 0$ esetén állhat fenn, mint állítottuk. ■

Felmerül a kérdés, hogy tudunk-e valamit mondani a sajátvektorok számáról. Látni fogjuk egy később bizonyítandó tétel következményeként, hogy E_n önadjungált operátorának mindig van teljes sajátvektorrendszere. Előbb azonban megismerkedünk néhány további speciális lineáris transzformációval.

5.10. Definíció

Az olyan T lineáris operátorokat, amelyekre

$$T^* = T^{-1}, \text{ unitér}$$

operátoroknak nevezzük.

Az unitér transzformáció fontos tulajdonságát mondja ki az

5.11. Tétel

Az E_n euklideszi tér T lineáris operátora akkor és csak akkor skaláris-szorzáttartó, - ez azt jelenti, hogy $(T\underline{x} | T\underline{y}) = (\underline{x} | \underline{y})$ $\forall \underline{x}, \underline{y} \in E_n$ -re - ha unitér.

Bizonyítás:

1. Ha T unitér, vagyis $T^* = T^{-1}$, akkor

$$(T \underline{x} | T \underline{y}) = (\underline{x} | T^* T \underline{y}) = (\underline{x} | \underline{y}).$$

2. Ha $(\underline{x} | \underline{y}) = (T \underline{x} | T \underline{y})$, akkor

$$(\underline{x} | \underline{y}) = (\underline{x} | T^* T \underline{y}), \text{ vagyis}$$

$$(\underline{x} | T^* T \underline{y} - \underline{y}) = (\underline{x} | (T^* T - E) \underline{y}) = 0.$$

Mivel ez $\forall \underline{x}, \underline{y} \in E_n$ -re fennáll,

$$T^* T = E. \blacksquare$$

Megjegyzés:

A Tétel következménye, hogy unitér operátor ortogonális vektorokat ortogonális vektorokba visz át, és

$$(T \underline{x} | T \underline{x}) = (\underline{x} | \underline{x}) \text{ miatt a tárgyvektor}$$

és a képvektor normája is azonos.

Igy a transzformáció ortonormált bázist ortonormált bázisba visz át.

5.12. Definíció

Az olyan T_1, T_2 lineáris operátorokat, amelyekre

$$T_1 T_2 = T_2 T_1$$

felcserélhető lineáris operátoroknak nevezzük.

A felcserélhető operátorok fontos tulajdonságáról szól az

5.13. Tétel

Ha T_1 és T_2 felcserélhető lineáris operátorok, akkor az egyik valamelyik sajátértékéhez tartozó sajátvektorok invariáns alteret alkotnak a másik operátorra vonatkozóan.

Bizonyítás:

Azt kell belátni, hogy ha

$$\underline{s} \in T_1 \lambda\text{-hoz tartozó sajátvektora,}$$

akkor $T_2 \underline{s}$ is $T_1 \lambda$ -hoz tartozó sajátvektora. Ez igaz, ugyanis ha

$$T_1 \underline{s} = \lambda \underline{s}, \text{ akkor}$$

$$T_1(T_2 \underline{s}) = T_2(T_1 \underline{s}) = T_2 \lambda \underline{s} = \lambda T_2 \underline{s}, \text{ vagyis}$$

$$T_1(T_2 \underline{s}) = \lambda T_2 \underline{s}, \text{ mint állítottuk. } \blacksquare$$

A bizonyított tétel következménye az

5.14. Tétel

Két felcserélhető lineáris operátornak van közös sajátvektora.

Bizonyítás:

Legyen λ T_1 sajátértéke. Az 5.13. Tétel szerint T_1 λ -hoz tartozó sajátvektorai T_2 -re vonatkozóan invariáns alteret alkotnak. Mint tudjuk, invariáns altérben mindig van sajátvektor. Így T_1 λ -hoz tartozó sajátvektorainak alterében van T_2 -nek sajátvektora, tehát találtunk közös sajátvektort. ■

5.15. Definíció

Az E_n euklideszi tér T lineáris operátorát normális operátor-nak nevezzük, ha

$$T T^* = T^* T.$$

Megjegyzés:

Nyilvánvaló, hogy az önadjungált operátorok és az unitér operátorok is normálisak, ezért a következő tétel ezek sajátvektorrendszeréről is szól.

5.16. Tétel

Az E_n euklideszi tér T lineáris operátora akkor és csak akkor jellemezhető valamely ortonormált bázisban diagonálmátrixszal, ha normális.

Bizonyítás:

1. Ha T -t az $e_1, \dots, e_n$ ortonormált bázisban diagonál mátrix adja meg, vagyis

$$T_{\underline{e}} = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle, \quad \text{akkor}$$

$$T_{\underline{e}}^* = \langle \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n \rangle \quad \text{és így}$$

a mátrixok és akkor az operátorok is felcserélhetők, tehát

$$T T^* = T^* T$$

2. Ha T normális operátor, vagyis T és T^* felcserélhetők, akkor az 5.14. Tétel értelmében van közös s_1 sajátvektoruk. Tekintsük az s_1 -re merőleges vektorok E_{n-1} ($n-1$ dimenziós) altérét. Ez

invariáns T -re és T^x -ra vonatkozóan is ugyanis ha $\underline{x} \in E_{n-1}$, akkor $(\underline{s}_1 | \underline{x}) = 0 \Rightarrow (\lambda_1 \underline{s}_1 | \underline{x}) = 0 \Rightarrow (T \underline{s}_1 | \underline{x}) = 0 \Rightarrow (\underline{s}_1 | T \underline{x}) = 0$, tehát $T \underline{x}$ is merőleges $\underline{s}_1$ -re. Azonos következtetéssel adódik abból, hogy $\underline{s}_1$ T^x -nak is sajátvektora, hogy

$$(\underline{s}_1 | T^x \underline{x}) = 0 \text{ is fennáll.}$$

Igy E_{n-1} -ben is van T és T^x -nak közös $\underline{s}_2$ sajátvektora és $(\underline{s}_1 | \underline{s}_2) = 0$. Ezt az eljárást folytatva készítettünk egy páronként ortogonális vektorokból álló $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$ sajátvektor bázist mind T , mind T^x számára, amelyben mindkettő mátrixa diagonálmátrix. ■

6. KITŰZÖTT FELADATOK

1. Mutassa meg, hogy ha a $P : U \rightarrow U$ homogén lineáris transzformáció a következő tulajdonságu:

$$P^2 = P \text{ (az ilyen transzformációt projekciónak szokták nevezni), akkor}$$

$$U = \ker P \oplus \operatorname{Im} P.$$

2. Határozza meg az I intervallumon akárhányszor differenciálható függvények vektorterén értelmezett D differenciáloperátor magterét.

$$Df = f + f'$$

3. Bizonyítsa be, hogy ha T homogén lineáris transzformáció és

$$T^2 = 0, \text{ akkor a}$$

képtér része a magtérnek.

Igaz-e a tétel megfordítása?

4. Igazolja a 2.4. Tételben szereplő operátorműveleti azonosságokat.

5. A $T : U \rightarrow V$ lineáris operátor inverze T^{-1} . Igazolja, hogy

$$(T^{-1})^{-1} = T.$$

6. Igazolja, hogy

$$(T_1 \ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \ T_1^{-1}$$

7. A T homogén lineáris transzformáció kielégíti a

$$T^2 - T + E = 0 \text{ egyenletet.}$$

Mutassa meg, hogy T^{-1} létezik és határozza meg T segítségével.

8. A T lineáris operátor az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisvektorokhoz a következő módon rendel képet:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Mutassa meg, hogy T szinguláris.

b) Adja meg T mátrixát a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bázisban.}$$

9. A T transzformáció mátrixa egy B bázisban

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Adja meg a $\text{Ker } T$ alteret.

10. Legyen λ az A homogén lineáris transzformáció egy sajátértéke, $\underline{s}$ egy hozzá tartozó sajátvektor és P egy polinom. Igazolja, hogy $\underline{s}$ $P(A)$ -nak is sajátvektora és határozza meg a sajátértékeket.

11.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Készítse el $\underline{A}$ spektrálfelbontását.

12. Igazolja, hogy unitér transzformáció sajátértékeinek abszolút értéke 1.

13. Legyen T valós unitér transzformáció - un. ortogonális transzformáció. Igazolja, hogy ortonormált bázisban

$$\underline{T}' = \underline{T}^{-1}$$

14. A valós E_n euklideszi tér T lineáris operátorát antiszimmetrikusnak nevezzük, ha

$$T^* = -T$$

Igazolja, hogy ortonormált bázisban

$$\underline{T}' = -\underline{T}$$

15. Legyen E_3 a térvektorok lineáris tere és $\underline{v} \in E_3$ -ra

$$T\underline{v} = \underline{a} \times \underline{v} \quad (\underline{a} \neq \underline{0}, \text{ adott})$$

Igazolja, hogy T antiszimmetrikus.

16. Mutassa meg, hogy minden

$$T : E_3 \rightarrow E_3 \quad (E_3 \text{ a 15. példabeli})$$

antiszimmetrikus operátorhoz egyértelműen található $\underline{a}$, amellyel $T = \underline{a} \times$.

17. Bizonyítsa be, hogy a valós E_n euklideszi tér minden lineáris operátora egyértelműen bontható fel egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus operátor összegére.

IX. AJÁNLOTT IRODALOM

Gelfand I.M. Előadások a lineáris algebráról.
Akadémiai Kiadó, 1955.

Rózsa Pál: Lineáris algebra és alkalmazásai.
Műszaki Kiadó, 1974.

Fried Ervin: Klasszikus és lineáris algebra.
Tankönyvkiadó, 1977.

X. TÁRGYMUTATÓ

adjungált operátor VIII.5.
algebra alaptétele II.2.
altér IV.2.
antiszimmetrikus mátrix III.1.3.
általánosított magtér VIII.4.26.
általánosított sajátvektor (fővektor) VIII.4.24.
bázis IV.2.
báziscsere, bázistranszformáció IV.2.
bázistranszformáció mátrixa IV.2.19., 20.
Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség VII.3.1.
Cayley-Hamilton tétel VIII.4.39.
determináns fogalma VI.1.1., VI.1.2.
determináns tulajdonságai VI.1.
determináns kapcsolata a mátrix rangjával VI.2.
dimenzió IV.2.
dimenzió-tétel VIII.1.8.
direkt összeg IV.4.
direkt szorzat IV.4.
egyenés egyenletei I.6.5.
euklideszi tér fogalma VII.1.
felcserélhető operátorok VIII.5.12.
fővektor - lineáris transzformációé - VIII.4.24.
hasonló mátrixok VIII.3.6.
helyvektor I.6.1.
hipermátrixok III.4.
homogén lineáris vektortranszformációk I.7., VIII.1.
index - általánosított magtéré - VIII.4.28.
invariáns altér - lineáris transzformációé - VIII.4.1.
inverz mátrix fogalma III.2.11.
inverz mátrix létezésének feltétele és meghatározása V.3.
inverz operátor fogalma VIII.2.5.
inverz operátor létezésének feltétele VIII.2.8.
izomorfizmus IV.3.
Jordan blokk VIII.4.33., 4.35.

Jordan-féle normálalak - mátrixé - VIII.4.33., 4.35.
 karakterisztikus egyenlet VIII.4.7.
 képtér - lineáris operátoré - VIII.1.3.
 képvektor - lineáris operátoré - VIII.1.3.
 kifejtési tétel I.4.
 komplex együtthatós polinomok II.2.
 komplex számok fogalma, műveletek II.1.
 komplex szám exponenciális alakja II.1.11.
 komplex szám konjugáltja II.1.5.
 lineáris egyenletrendszerek fogalma V.1.1.
 lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága V.1.2.
 lineáris egyenletrendszerek megoldásainak száma V.2.4.
 lineáris függés, függetlenség I.3.; IV.2.
 lineáris kombináció I.3.; IV.2.
 lineáris operátor fogalma I.7.1.; VIII.1.1.
 lineáris operátorok közötti műveletek VIII.2.
 lineáris operátor mátrixai I.7.2., 7.3.; VIII.3.
 lineáris operátor mátrixának Jordan alakja VIII.4.34.
 lineáris tér (lineáris halmaz) IV.1.1.
 lineáris transzformáció sajátértéke, sajátvektora, fővektora I.7.; VIII.4.
 magtér - lineáris operátoré - VIII.1.4.
 mátrix fogalom III.1.
 mátrix műveletek és tulajdonságai III.2.
 mátrix rang V.1.7.
 minormátrix fogalma VI.1.7.
 műveletek térvektorokkal I.2., I.4.
 műveletek térvektorokkal koordinátás alakban I.5.3.
 norma fogalom VII.2.
 normális operátor VIII.5.15.
 ortogonális, ortonormált vektorok VII.4.
 ortogonalizálási eljárás (Schmidt-féle) VII.4.6.
 önadjungált operátor VIII.5.5.
 párhuzamos és egysiku vektorok I.3.
 polinomok gyökei és együtthatói közti összefüggések II.2.
 polinomok gyöktényezős alakja II.2.
 projekció tétel VII.4.8.
 reciprok vektorhármass I.4.
 reguláris operátor VIII.1.7.
 sajátérték, sajátvektor VIII.4.
 sik egyenletei I.6.6.
 skalárinvariánsok - lineáris operátoré - VIII.4.12.
 skaláris szorzat I.4.; VII.1.
 spektrál felbontás - kvadratikus mátrixé VIII.4.18., 4.19.

szimmetrikus mátrix III.1.3.
szorzatmátrix determinánsa VI.1.11.
szorzatoperátor VIII.2.3.
tárgyvektor - lineáris operátoré VIII.1.1.
tenzor I.7.
tér analitikus geometriája I.6.
térvektor I.1.
térvektor koordinátái I.5.
transzponált mátrix III.1.2.
unitér transzformáció VIII.5.10.
vegyesszorzat I.4.
vektortér fogalma IV.1.
vektoriális szorzat I.4.

TARTALOMJEGYZÉK

I.	A térvektorok	3
	1. A vektor fogalma	3
	2. Műveletek vektorokkal I.	4
	3. Párhuzamos és egymáshoz vektorok, lineáris függőség, függetlenség	8
	4. Műveletek vektorokkal II.	14
	5. A vektor koordinátás alakja.....	25
	6. A tér analitikus geometriája.....	29
	7. Homogén lineáris vektor-transzformációk.....	35
II.	Komplex számok algebrája	42
	1. A komplex szám fogalma, műveletek.....	42
	2. Komplex együtthatós polinomok	53
III.	Mátrix algebra.....	57
	1. A mátrix fogalma.....	57
	2. Műveletek mátrixokkal	59
	3. A mátrixok elemi transzformációi.....	66
	4. Mátrixok particionálása, hipermátrixok.....	68
	5. Kitűzött feladatok	71
IV.	Vektorterek	73
	1. A vektortér fogalma.....	73
	2. Altér, lineáris függés, bázis, dimenzió	77
	3. Izomorfizmus	98
	4. Direkt szorzat, direkt összeg	100
	5. Kitűzött feladatok	103
V.	Lineáris egyenletrendszerek	105
	1. Alapfogalmak és a megoldhatóság kérdései	105
	2. A lineáris egyenletrendszer megoldásainak számáról és a megoldás módjáról	115
	3. Inverz mátrix	124
	4. Kitűzött feladatok	126

VI.	A determináns	127
1.	A determináns fogalma és értékének kiszámítása.....	127
2.	A determináns kapcsolata a mátrix rangjával	143
3.	Példák és kitűzött feladatok	145
VII.	Euklideszi terek	148
1.	Skaláris szorzat	148
2.	Norma	150
3.	Euklideszi tér és normált tér kapcsolata. Cauchy- -Bunyakovszkij egyenlőtlenség	151
4.	Ortogonalis vektorok, projekció tétel.....	154
5.	Kitűzött feladatok	162
VIII.	Lineáris operátorok.....	163
1.	A lineáris operátor fogalma és néhány tulajdonsága	163
2.	Műveletek lineáris operátorokkal.....	170
3.	A lineáris operátor mátrixa	176
4.	Lineáris transzformáció sajátvektorai és sajátértékei, fővektorok	182
5.	Az euklideszi tér lineáris transzformációi.....	209
6.	Kitűzött feladatok	217
IX.	Ajánlott irodalom	220
X.	Tárgymutató	221

Kedves Jegyzethasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői nívódíjat kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V_2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*.

A jegyzet címe: **ALGEBRA**

A jegyzet szerzője: **Csató Tamásné**

A jegyzet azonosítója: **051359**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75 %):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(a túloldalon folytatható)

