BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Benkő Pálné - Diószegi Ferencné - Serény György

MATEMATIKA FELADATTÁR
II.

Valós egyváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása

Szerkesztette:
Antos Péter

Műegyetemi Kiadó, 2002.

Írta:

Serény György (I. fejezet)
Benkő Pálné (II. fejezet)
Diószegi Ferencné (III. fejezet)

(Nyolcadik utánnyomás)

Azonosító: **051387**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Hajdu István
Terjedelem: 27,7(A/5) ív
Nyomta és kötötte:
Műegyetemi Nyomda
Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 0142-02

TARTALOMJEGYZÉK

	Feladat	Megoldás
I. Egyváltozós függvények alapvető tulajdonságai. Határérték, folytonosság	5	121
1. Alapfogalmak	5	121
1.1 Értelmezési tartomány, értékkészlet	5	121
1.2 Monotonitás	5	123
1.3 Korlátosság, szélsőérték	7	125
1.4 Konvexitás-konkávitás, párosság-páratlanság, periodicitás	10	129
1.5 Műveletek függvények körében	11	130
1.6 Invertálhatóság	13	137
1.7 Határérték, folytonosság, egyenletes folytonosság	15	142
2. Gyakorló feladatok függvények tulajdonságainak vizsgálatára	22	150
2.1 Elemi tulajdonságok	22	150
2.2 Határértékszámítás	27	174
2.3 Folytonosságvizsgálat	46	190
2.4 Függvények ábrázolása, folytonos függvények speciális tulajdonságai	54	209
3. Vegyes feladatok	57	223
II. Differenciálszámítás	63	236
1. Differenciálhányados. Differenciálhatóság. Formális deriválás. Magasabbrendű deriváltak. Összetett és inverz függvény deriváltja	63	236
2. A differenciálhányados és a differenciál geometriai és fizikai alkalmazásai	70	244
3. L'Hospital szabály	72	247
4. Taylor-polinom	75	252
5. Középértéktételek (Rolle, Lagrange, Cauchy)	76	255
6. Függvényvizsgálat	78	257
7. Szöveges szélsőértékfeladatok	84	274
8. Egyenletek közelítő megoldása	84	275
9. Paraméteresen és polárkoordinátás alakban adott görbék és deriváltjaik	85	277

	Feladat	Megoldás
10. Vegyes feladatok	89	282
III. Integrálszámítás	93	287
1. Határozatlan integrál	93	287
1.1 Alapintegrálokra visszavezethető feladatok	93	287
1.2 Trigonometrikus szorzat integrálok	94	288
1.3 $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx$ alaku integrálok	94	289
1.4 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ alaku integrálok	95	290
1.5 $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx$ alaku integrálok	95	291
1.6 Teljes négyzetté kiegészítve alapintegrálokra visszavezethető feladatok	96	291
1.7 Parciális integrálás	96	291
1.8 Racionális törtfüggvények integrálása	97	294
1.9 Integrálás helyettesítéssel	97	295
1.10 Vegyes feladatok	99	298
2. Határozott integrál	100	300
3. Változó felső határu határozott integrál (integrál függvény)	108	308
4. Improprius integrál	111	311
5. Az integrálszámítás alkalmazásai	114	313
5.1 Területszámítás	114	313
5.2 Ivhossz-számítás	116	315
5.3 Forgástestek térfogata	118	316

I. EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

1. ALAPFOGALMAK

1.1 Értelmezési tartomány, értékkészlet

1. Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

$\boxed{1.}$ a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

2. $f(x) = 3-x^2$

3. $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$

4. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

5. $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$

6. $f(x) = \frac{1}{[x]}$

7. $f(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sign} x}$

8. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{xn+1}{n}\right)^n$

9. a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$

b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

10. a) $f(x) = \frac{x}{3}$, ha x osztható 3-mal

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{ha } x \text{ osztható 3-mal} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

11. a) $f(x) = x$ b) $f(x) = (\sqrt{x})^2$

c) $f(x) = \sqrt{x^2}$

12. $f(x) = y$ akkor és csak akkor ha $y^3+x^3 = 1$.

1.2 Monotonitás

2. 1. Legyen $E \subset \mathbb{R}$.

a) Mely $f: E \to \mathbb{R}$ függvényekre igaz az, hogy: minden $x,y \in E$ esetén ha $f(x) < f(y)$ akkor $x < y$.

b) Mely $f: E \to \mathbb{R}$ függvényekre igaz az, hogy: minden $x,y \in E$ esetén fennáll, hogy vagy $f(x) < f(y)$ vagy $x \leq y$,

2. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában (nem használva a "nem" szót) azt a tulajdonságot, hogy egy függvény egy H halmazon nem monoton.

3. Definíció. Egy H halmazt a legbővebb - valamilyen kiszemelt F tulajdonsággal rendelkező - halmaznak nevezünk, ha rendelkezik az F tulajdonsággal és nincsen olyan H' - F tulajdonsággal rendelkező - halmaz, hogy $H \subset H'$, $H \neq H'$.

1. Bizonyítsuk be, hogy egy függvény akkor és csak akkor monoton egy I intervallumon, ha annak minden részintervallumán monoton.
2. Legyen f monoton az (a,b) és (c,d) intervallumokon. Mi következik ebből f monotonitására nézve az $(a,b)\cup(c,d)$ halmazon, ha a) $a < c < b < d$; illetve
   b) $a < b < c < d$ és f monoton növő (a,b)-n is, (c,d)-n is.
! 3. Legyen f értelmezve az I intervallumon és legyen x_0 egy belső pontja I-nek, mely azt I_1, I_2 x_0-ban zárt intervallumokra osztja.
   Bizonyítsuk be, hogy ha f szigoruan monoton csökkenő az I_1-en és szigoruan monoton növekedő az I_2-ön akkor I_1 és I_2 két legbővebb intervallum, melyeken f monoton.
4. Legyen f monoton csökkenő az [a,b] és monoton növő a [b,c] intervallumon ($a < b < c$). Következik-e ebből, hogy f nem monoton az [a,c] intervallumon?

4. 1. Keresstünk az alábbi függvények esetén az értelmezési tartományban olyan legbővebb részintervallumokat (lásd 3. pl. Definíció) - ha léteznek ilyenek -, melyeken az adott függvény monoton.

$\boxed{a)}$ $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

e) $f(x) = x^2+ax+b$ $a,b \in \mathbb{R}$ rögzitett

2. Van-e olyan $\delta > 0$ szám, amelyre az $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ függvény az egész $(0, \delta)$ intervallumon monoton?

1.3 Korlátosság, szélsőérték

5. a) Megválaszolható-e egyértelmüen az alábbi kérdés:

Korlátos-e az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény?

b) Ekvivalens-e az alábbi definició az f függvény felülről való korlátosságának definiciójával: Van olyan M szám, hogy $f(x) < M$

c) Létezik-e legbővebb olyan intervallum, (lásd 3. pl. Definició) melyen az alábbi függvények korlátosak?

1. $f(x) = x^2$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{[x]}{x} & \text{ha } x \neq o \\ 0 & \text{ha } x = o \end{cases}$

6. 1. Legyen $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$.

a) Ekvivalensek-e az alábbi állitások?

1. Van olyan m és M szám, hogy minden $x \in E$ esetén $m \leq f(x) \leq M$.
2. Van olyan $K > 0$ szám, hogy minden $x \in E$ esetén $|f(x)| \leq K$.
3. Van olyan $K > 0$ szám, hogy minden $x \in E$ esetén $|f(x)| < K$.

b) Ekvivalens-e az alábbi állitások valamelyike f E-n való korlátosságának definiciójával?

1. Van olyan $x_1, x_2 \in E$, hogy minden $x \in E$ esetén $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.
2. Minden $x \in E$ esetén van olyan $K > 0$, hogy $|f(x)| < K$.

2. Fogalmazzuk meg pozitiv állitás formájában (nem használva a "nem" szót) azt a tulajdonságot, hogy egy függvény nem korlátos egy E halmazon!

7. Legyen $E \subset \mathbb{R}$ és $f, g: E \to \mathbb{R}$.
Bizonyitsuk be az alábbi állitásokat!

1. a) $\sup\limits_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leq \sup\limits_{x \in E} f(x) + \sup\limits_{x \in E} g(x)$

b) $\inf\limits_{x \in E} (f(x) + g(x)) \geq \inf\limits_{x \in E} f(x) + \inf\limits_{x \in E} g(x)$

2. a) $\sup\limits_{x \in E} (-f(x)) = -\inf\limits_{x \in E} f(x)$ b) $\inf\limits_{x \in E} (-f(x)) = -\sup\limits_{x \in E} f(x)$

3. Mutassuk meg, hogy 1.-ben $\leq$ helyett nem állhat $=$!

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

8. **Definíció.** Egy függvényt értelmezési tartományának egy pontjában **lokálisan korlátosnak** mondunk, ha e pontnak van olyan S környezete, hogy f korlátos $S \cap D_f$-en.

1. a) Legyen f lokálisan korlátos egy tetszőleges intervallum minden pontjában. Következik-e, hogy f korlátos az egész intervallumon?
   b) Legyen f lokálisan korlátos egy zárt intervallum minden pontjában. Következik-e, hogy f korlátos az egész intervallumon?
2. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ & x = \frac{m}{n},\ n > 0, \\ & m, n \in \mathbb{N}, \text{ relatív prímek} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény egyetlen pontban sem lokálisan korlátos!

9. Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából az alábbi függvényeket az adott intervallumokon! Adjuk meg a függvények megfelelő intervallumbeli supremumát és infinumát, ill. maximumát és minimumát is, amennyiben ezek léteznek!

$\boxed{1.}$ $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ a) $I = (1, \infty)$ b) $I = [2,4]$

2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ a) $I = (-\infty, \infty)$ b) $I = (-1, 2]$

3. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ a) $I = [0, \infty)$ b) $I = (-\infty, -1)$

c) $I = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

$\boxed{10.}$ Igazoljuk, hogy az $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ függvény az egész számegyenesen korlátos.

11. Legyen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$.

a) Minden $\delta > 0$ szám esetén van olyan $x \in (a,b)$, hogy $|x-x_0| < \delta$ és $f(x) \leqslant f(x_0)$.

b) Van olyan $\delta > 0$ szám, hogy van olyan $x \in (a,b)$, hogy $|x-x_0| < \delta$ és $f(x) \leqslant f(x_0)$.

c) Van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén ha $|x-x_0| < \delta$, akkor $f(x) \leqslant f(x_0)$.

d) Minden $\delta > 0$ szám és minden $x \in (a,b)$ esetén ha $|x-x_0| < \delta$, akkor $f(x) \leqslant f(x_0)$.

1. Mutassunk példát a fenti tulajdonságokat kielégitő függvényekre!
2. Következik-e valamelyik tulajdonságból az, hogy a függvénynek lokális maximuma van x_0-ban?
3. Következik-e abból, hogy a függvénynek lokális maximuma van x_0-ban az, hogy valamelyik tulajdonsággal rendelkezik?

12. 1. Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ intervallumon $(a < b)$ szigoruan monoton növekedő. Következik-e ebből, hogy a függvény
a) korlátos az (a,b) intervallumon?
b) felveszi maximumát az (a,b) intervallumon?
2. Lehet-e egy függvénynek egy pontban egyszerre lokális maximuma és minimuma?
3. Lehet-e egy függvénynek egy intervallum minden pontja lokális maximuma?
4. Legyen $I_1 \subset \mathbb{R}$, $I_2 \subset \mathbb{R}$ tetszőleges valódi(*) intervallumok, $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ a megfelelő azonos végponttal rendelkező zárt intervallumok és $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = \{a\}$. Legyen $f: \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő I_1-en, monoton növő I_2-n. Következik-e, hogy f-nek lokális szélsőértéke van a-ban?((*) van belső pontja)

13. 1. Legyen $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Bizonyitsuk be, hogy $x=1$-ben a függvénynek lokális maximuma, $x=-1$-ben lokális minimuma van.

2. Legyen $f(x) = (x-1)^2 (x-2)^2$.

Bizonyitsuk be, hogy az $x=1$ és $x=2$ pontok a függvénynek lokális minimumhelyei!

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

14. Keressük meg az alábbi függvények összes lokális szélsőértékhelyeit!

a) $f(x) = (x^2-4)^2 + 2$;

b) $f(x) = x^2 + ax + b$, $a,b \in \mathbb{R}$ rögzitett;

c) $f(x) = |x-1|$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

1.4 Konvexitás - konkávitás, párosság - páratlanság, periódicitás

15. 1. Bizonyitsuk be, hogy ha az f függvény konvex az $[a,b]$ intervallumon, akkor tetszőleges $x_1, x_2 \in [a,b]$ esetén

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

2. Bizonyitsuk be, hogy f akkor és csak akkor konvex az $[a,b]$ intervallumon, ha itt $-f$ konkáv.

3. Bizonyitsuk be, hogy az $f(x) = x^2$ függvény konvex a $(-\infty, \infty)$ intervallumon.

16. Az alábbi függvények közül melyek párosak, páratlanok vagy periodikusak? A periodikusak esetében - ha lehetséges - adjuk meg a legkisebb periódust!

1. $f(x) = x^2 - x$

2. $f(x) = x \operatorname{sign} x$

3. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$

5. $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

6. $f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x$

7. $f(x) = \sin^2 \dfrac{x}{\pi}$

8. $f(x) = x - [x]$

9. $f(x) = x - [x] - \dfrac{1}{2}$

10. $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$

11. $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 1}$

12. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 1$

13. $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{x^4}$

14. $f(x) = x^3 \cos x + \sin^2 x$

15. a) $f(x) = \sin^2 \dfrac{\pi}{3} x + \sin^2 \dfrac{\pi}{4} x$

b) $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{3} x + \sin \dfrac{\pi}{4} x$

17. 1. Lehet-e egy függvény egyszerre páros és páratlan?
2. Bizonyitsuk be, hogy ha $f: (-a,a) \to \mathbb{R}$, páros és f szigoruan monoton növekedő a $(-a,o)$ intervallumban, akkor f szigoruan monoton csökkenő a (o,a) intervallumban.

18. a) Létezik-e olyan f periodikus függvény melynek értelmezési tartományára fennáll, hogy $\mathbb{R} \setminus D_f \neq \emptyset$?

! b) Ha létezik ilyen f, lehet-e ugy kiterjeszteni az egész valós számegyenesre, hogy periodikus maradjon, azaz van-e olyan $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus függvény ($D_g = \mathbb{R}$), amelyre

$g(x) = f(x)$, ha $x \in D_f$?

1.5 Müveletek függvények körében

19. Lgyen $f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Vizsgáljuk meg milyen következtetéseket lehet levonni értelmezési tartományukon a

$-f$, $\frac{1}{f}$, $f+g$, $f \cdot g$, fog, gof függvények viselkedésére vonatkozóan, ha értelmezési tartományukon

1. a) f és g korlátos
   b) f és g nem korlátos
   c) f korlátos g nem korlátos.
2. a) f és g monoton növekedő
   b) f monoton csökkenő, g monoton növő.
3. a) f és g páros
   b) f és g páratlan
   c) f páros g páratlan.

20. Tegyük fel, hogy az (a,b)-n értelmezett f és g valós függvényeknek lokális maximumuk van az $x_o \in (a,b)$ pontban.
Mit mondhatunk $-f$, $\frac{1}{f}$, $f+g$, fog viselkedéséről x_o-ban?

21. Határozzuk meg $f(x)$-et, mint x algebrai kifejezését, ha

a) $f(x+1) = x^2-3x+2$ b) $f(\frac{x}{x+1}) = x^2$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

22. Legyen $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ $\forall n > 1$ esetén, ahol

a) $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$ b) $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Határozzuk meg $f_n(x)$-et, mint x és n algebrai kifejezését!

23. Határozzuk meg szakaszonként algebrai kifejezésekként az fof, fog, gof, gog összetett függvényeket, ha

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq o \\ x & \text{ha } x > o \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq o \\ -x^2 & \text{ha } x > o \end{cases}$

2. $f(x) = x^2+1$ $g(x) = \sqrt{x+1}$

3. $f(x) = \text{sign } x$

α) $g(x) = \frac{1}{x}$ γ) $g(x) = x(1-x^2)$

β) $g(x) = 1+x^2$ δ) $g(x) = 1+x-[x]$

4. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ egész} \\ x & \text{ha } x \text{ nem egész} \end{cases}$

$g(x) = \sqrt{x}$

5. $f(x) = x+x^2$

$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ páros egész} \\ -1 & \text{ha } x \text{ páratlan egész} \end{cases}$

6. $f(x) = -|x|$ $g(x) = \sqrt{x}$

7. $f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } o < x \leq 1 \\ 2-x & \text{ha } 1 < x < 2 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 2-x & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

1.6 Invertálhatóság

!(24.) Legyen $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$ tetszőleges.
Legyen $H \subset E$ olyan, hogy H-n f kölcsönösen egyértelmü, azaz, tetszőleges $x_1, x_2 \in H$ esetén

ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor $x_1 = x_2$.

Legyen $f(H) = \{ y \in R_f : \exists\, x \in H, \text{ hogy } f(x) = y \}$.

Bizonyitsuk be az alábbi állitásokat!

1. Egyetlen olyan $g: f(H) \to \mathbb{R}$ függvény van, melyre

   $g(f(x)) = x \qquad \forall x \in H$.

2. Az alábbi két állitás ekvivalens:
   a) $g: f(H) \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $g(f(x)) = x \ \forall x \in H$
   b) $g: f(H) \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in H$ és $\forall y \in f(H)$ esetén $g(y) = x$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x) = y$
3. Bármely $g: f(H) \to H$ esetén $g(f(x)) = x \ \forall x \in H$ akkor és csak akkor, ha $f(g(y)) = y \ \forall y \in f(H)$

(25.) Bizonyitsuk be a következő állitásokat!

1. Ha f invertálható H-n, akkor f^{-1} is invertálható $f(H)$-n, és

   $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \qquad \forall x \in H$.

2. Invertálható függvények összetett függvénye is invertálható, azaz ha g invertálható H-n, f invertálható $g(H)$-n, akkor fog is invertálható H-n, és

   $(fog)^{-1}(x) = (g^{-1} o f^{-1})(x) \qquad \forall x \in (fog)(H)$.

3. Ha fog invertálható H-n, akkor g invertálható H-n, f pedig $g(H)$-n.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

26. Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.
Melyek igazak, és melyek hamisak az alábbi állítások közül?
(Az állításokban szereplő tulajdonságok mindegyike az egész $[a,b]$-re vonatkozik.)
a) f monotonitása szükséges feltétele invertálhatóságának.
b) f monotonitása elégséges feltétele invertálhatóságának.
c) Ha f szigoruan monoton, akkor invertálható.
d) Ha f invertálható és monoton akkor szigoruan monoton.
e) Ha f invertálható I_1-en és I_2-n ($I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ intervallumok) akkor invertálható $I_1 \cup I_2$-n is.

27. Legyen $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$, f kölcsönösen egyértelmü.
Melyek igazak, és melyek hamisak az alábbi állítások közül?
1. a) Ha f korlátos E-n, akkor inverze korlátos $f(E)$-en.
b) Ha f szigoruan monoton növekedő E-n, akkor inverze szigoruan monoton növekedő $f(E)$-en.
2. Legyen $E = [-a, a]$ $(a > o)$.
a) Ha f páros, akkor inverze is páros.
b) Ha f páratlan, akkor inverze is páratlan.

28. Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D_f = R_f = \mathbb{R}$; $A, B \subset \mathbb{R}$.
Definició szerint legyen:

$$f^{-1}(B) = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \in B \} \quad \text{és}$$

$$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} : \text{van } x \in A \text{ melyre } f(x) = y \} .$$

Bizonyitsuk be az alábbi állításokat!

1. $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B)$

2. $f^{-1}(f(A)) \supset A$

3. Van olvan f függvény és $A \subset \mathbb{R}$ halmaz, hogy

$$f^{-1}(f(A)) \neq A .$$

29. Az összes alábbi függvény esetén keressünk az értelmezési tartományban olyan legbővebb részhalmazokat (lásd 3. pl. Definició) - ha léteznek ilyenek - melyeken a függvény invertálható és amelyek egyesitése az értelmezési tartomány.

Adjuk meg a megfelelő inverz függvényeket is!

$\boxed{1.}$ a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

2. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

3. $f(x) = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$

4. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3+1}$

5. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

6. $f(x) = (x^2-9)^2 - 1$

7. $f(x) = x^2+ax+b$ $a,b \in \mathbb{R}$ rögzitett

1.7 Határérték, folytonosság, egyenletes folytonosság

30. (1.) Legyen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$.

Tegyük fel: van olyan A szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén ha $|f(x)-A| < \varepsilon$, akkor $|x-x_0| < \delta$.

Következik-e ebből az, hogy f-nek van határértéke x_0-ban.

! 2. a) Legyen $E \subset \mathbb{R}$ $f: E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

Tegyük fel, hogy van olyan A szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta < 0$ szám, hogy minden $x \in E$ esetén, ha $|f(x)-A| < \varepsilon$, akkor $|x-x_0| < \delta$.

Milyen tulajdonságot definiál ez a meghatározás?

b) Mutassunk példát olyan mindenütt értelmezett függvényre, melyre fennáll, és olyanra, melyre nem áll fenn valamely pontban ez a tulajdonság.

(31.) Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Milyen összefüggés van a függvény $-\infty$ -beli határértékének létezése és az alábbi tulajdonság között:
minden A szám esetén van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy
minden K szám esetén van olyan $x < K$ szám, hogy
$f(x) - A > \varepsilon$

! 32. Legyen $x_0 \in (a,b)$, $A \in \mathbb{R}$.

Ekvivalens-e az alábbi tulajdonságok valamelyike azzal, hogy az $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ függvénynek az A szám a határértéke x_0-ban?

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

1. Minden $\varepsilon > o$ szám esetén nem minden $\delta > o$ számhoz van olyan $x \in (a,b)$, hogy

$$o < |x-x_o| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - A| < \varepsilon .$$

2. Nincs olyan $\varepsilon > o$ szám, melyhez ne lenne olyan $\delta > o$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén vagy $|x-x_o| \geq \delta$ vagy $|f(x) - A| < \varepsilon$ fenn ne álljon.
3. Minden $\varepsilon > o$ szám esetén nem minden $\delta > o$ számhoz van olyan $x \in (a,b)$, hogy

$$0 < |x-x_o| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

!33. Legyen $x_o \in (a,b)$.

Mely $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ függvények rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal: Van olyan K szám, hogy minden $\delta > o$ szám esetén van olyan $x \in (a,b)$ szám, hogy $x_o < x < x_o + \delta$ és $f(x) < K$.

Mutassunk példát olyan függvényre, (ha ilyen létezik) mely kielégíti a fenti definiciót és nem korlátos (a,b)-n.

!34. Legyen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_o \in (a,b)$.

Tekintsük az alábbi tulajdonsággal rendelkező függvényeket: Van olyan A és $\delta > o$ szám, hogy minden $\varepsilon > o$ számhoz van olyan $x \in (a,b)$, hogy $0 < |x-x_o| < \delta$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

1. Igazak-e az alábbi következtetések?
   a) Ha f rendelkezik a fenti tulajdonsággal, akkor van határértéke x_o-ban.
   b) Ha f-nek van határértéke x_o-ban, akkor rendelkezik a fenti tulajdonsággal.
2. Mutassunk példát a fenti tulajdonsággal rendelkező függvényre!

35. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy ha $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, akkor

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty .$$

   b) Igaz-e az állitás megforditása?

2. Abból, hogy az $f(x)$ függvény x_o-ban nem lokálisan korlátos (lásd 8. pld Definició) következik-e, hogy $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \infty$?

3. Abból, hogy $\lim\limits_{x \to x_o} (f(x) - g(x)) = 0$

következik-e, hogy $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x)$?

4. Bizonyitsuk be, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0$.

36. Adjunk példát egy-egy olyan függvényre, - ha vannak ilyenek - melyeknek

1. nincs határértéke a 0-ban, de létezik a $\lim\limits_{n \to \infty} f\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)$;

2. van határértéke a 0-ban, de nem létezik a $\lim\limits_{n \to \infty} f\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)$.

37. Vizsgáljuk meg a határérték definiciója alapján, hogy léteznek-e az alábbi határértékek! Ha igen, állapitsuk meg értéküket is!

$\boxed{1.}$ a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2+2)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)$

2. a) $\lim\limits_{x \to \infty} (|x| - x)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (|x| - x)$

3. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3+1)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} (3x^3-2)$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x+1}{3+x}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2-2x+1)$

4. a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{1}{x-1}$

5. a) $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{1}{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{1}{(x-1)^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

6. a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{1+x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2}{1+x}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{1+x^2}$

7. a) $\lim\limits_{x \to 2} [x]$

b) $\lim\limits_{x \to 2+} [x]$

c) $\lim\limits_{x \to 2-} [x]$

8. a) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} x$

b) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{|x|}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{|x|}{x}$

9. a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1-\operatorname{sign}^2 x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} |x|$

10. a) $\lim\limits_{x \to 0+} \left[\frac{1}{x}\right]$

b) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{[x]}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\frac{1}{x}\right]$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{[x]}$

11. a) $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos x$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\cos x}{x}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f(x)$

13. $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racionális} \\ x^2, & x \text{ irracionális} \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

!38. Legyen $x_0 \in (a,b)$.

Az alábbi definiciók közül melyik ekvivalens az $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ függvény x_0-beli folytonosságának definiciójával?

a) Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén nem minden $\delta > 0$ számhoz van olyan $x \in (a,b)$, hogy

$$|x-x_0| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon .$$

b) Van olyan $\varepsilon > o$ szám, melyhez nincsen olyan $\delta > o$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén

ha $|x-x_o| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

c) Minden $\varepsilon > o$ szám esetén nem minden $\delta > o$ számhoz van olyan $x \in (a,b)$, hogy

$|x-x_o| < \delta$ és $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

d) Van olyan A szám, hogy minden $\varepsilon > o$ szám esetén van olyan $\delta > o$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén, ha $|x-x_o| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

39. Legyen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_o \in (a,b)$ és $E \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

Tegyük fel, hogy minden $\varepsilon \in E$ esetén van olyan $\delta > o$ szám, hogy ha $x \in (a,b)$, $|x-x_o| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

Milyen tulajdonságu E halmaz esetén következik ebből a tulajdonságból az, hogy f folytonos x_o-ban?

!40. Legyen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_o \in (a,b)$.

Tegyük fel, hogy minden $\delta > o$ szám esetén van olyan $\varepsilon > o$ szám, hogy ha

$x \in (a,b)$ és $|x-x_o| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

1. Milyen tulajdonságot definiál a fenti meghatározás?
2. Mondjunk példát a fenti tulajdonsággal rendelkező függvényre.
3. Következik-e egy függvény x_o-beli fonytonossága abból, ha rendelkezik a fenti tulajdonsággal?

!41. Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$
Tegyük fel, hogy minden $x,y \in [a,b]$ és minden $\varepsilon > o$ szám esetén van olyan $\delta > o$ szám, hogy ha $|f(x)-f(y)| < \delta$ akkor $|x-y| < \varepsilon$
Mit mondhatunk ekkor az f függvényről?

42. 1. Bizonyitsuk be, hogy: ha f folytonos egy $[a,b]$ zárt intervallumon, akkor van olyan az egész $\mathbb{R}$-en folytonos g függvény, hogy $f(x) = g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ esetén.
2. igaz-e 1. állitása az (a,b) nyilt intervallumon folytonos f függvény esetén is?

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

43. Legyen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$.

Hogyan függ össze az alábbi két tulajdonság f-nek x_0-beli folytonosságával?

a) $\lim\limits_{h \to 0} |f(x_0+h) - f(x_0-h)| = 0$

b) $\lim\limits_{h \to 0} |f(x_0+h) - f(x_0)| = 0$

44. Legyen f tetszőleges valós függvény.
Hogyan függ össze az alábbi két tulajdonság?
a) Van olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy f folytonos $[a, \infty)$-en.
b) f-nek van határértéke ∞-ben.

45. Legyen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzitett.

1. Mit mondhatunk az $f+g$ és az $f \cdot g$ függvények x_0-beli folytonosságáról, ha
   a) f folytonos, g nem folytonos x_0-ban;
   b) f és g egyike sem folytonos x_0-ban?

2. Igaz-e, hogy ha f^2 folytonos $E \subset \mathbb{R}$-en, akkor f is az?

46. Legyen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzitett.

Mit mondhatunk fog x_0-beli folytonosságáról, ha

a) g folytonos x_0-ban, de f nem folytonos $g(x_0)$-ban;

b) g nem folytonos x_0-ban, de f folytonos $g(x_0)$-ban;

c) g nem folytonos x_0-ban, f nem folytonos $g(x_0)$-ban.

47. Vizsgáljuk meg a folytonosság definiciója alapján az alábbi függvények folytonosságát a megadott pontokban, illetve intervallumokon.

$\boxed{1.}$ a) $f(x) = x^2$ $(0, \infty)$

b) $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ $x_0 = 0$

2. $f(x) = ax+b$ $(-\infty, \infty)$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ $(0, \infty)$

4. $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ irrac.} \\ 0 & x \text{ rac.} \end{cases}$ a) $x_0 = 1$ b) $x_0 = 0$

5. $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0, \infty)$

6. $f(x) = [x]$ $(0,2)$

7. $f(x) = x^3$ $(-\infty, \infty)$

8. a) $f(x) = |x|$ $(-\infty, \infty)$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sign} x}$ $(-\infty, \infty)$

9. $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ rac.} \\ -x & x \text{ irrac.} \end{cases}$

a) $x_0 = 1$

b) $x_0 = 0$

!48. Bizonyitsuk be, hogy az alábbi függvény minden irracionális x helyen folytonos és minden racionális x helyen szakadása van:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \text{ ha } x = \dfrac{m}{n}, \ m \text{ és } n \text{ relativ prim egészek, } n > 0. \\ 0, \text{ ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

49. Legyen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$.

1. Következik-e az alább megadott tulajdonságok valamelyikéből, hogy f egyenletesen folytonos (a,b)-n?

a) Minden $x_0 \in (a,b)$ esetén minden $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in (a,b)$ esetén ha $|x-x_0| < \delta$, akkor

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

b) Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x_0 \in (a,b)$ és $x \in (a,b)$ esetén ha $|x-x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Fogalmazza meg pozitiv állitás formájában (nem használva azt a szót, hogy "nem") azt, hogy f nem egyenletesen folytonos (a,b)-n.

50. Igazak-e az alábbi állitások?

1. Ha egy függvény nem korlátos egy halmazon akkor ott nem lehet egyenletesen folytonos.
2. Ha egy függvény folytonos és korlátos egy halmazon, akkor ott egyenletesen folytonos.
3. Ha egy függvény egyenletesen folytonos egy intervallumon, akkor egyenletesen folytonos annak minden részintervallumán is.

51. Igazak-e a következő állitások?

Egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon egyenletesen folytonos függvények

a) összege
b) szorzata
c) összetett függvénye

is egyenletesen folytonos I-n.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

52. Vizsgáljuk meg a definició alapján az alábbi függvényeket egyenletes folytonosság szempontjából a megadott intervallumokon!

$\boxed{1.}$ a) $f(x) = x$ $(-\infty, \infty)$

b) $f(x) = x^2$ $(-\infty, \infty)$

2. $f(x) = \sqrt{x}$ $[1, \infty)$

3. $f(x) = x^3$

a) $(0, \infty)$

b) $(0, 1)$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$

a) $(0, 2)$

b) $(1, 2)$

5. $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ $(0, 1)$

2. GYAKORLÓ FELADATOK FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAINAK VIZSGÁLATÁRA

2.1 Elemi tulajdonságok

53. Állapitsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{x}$

2. $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}} - 1}$

3. $f(x) = \sqrt{\ln\frac{1+x}{1-x}}$

4. $f(x) = \frac{1}{1+2^{x^{-x}}}$

5. $f(x) = \ln\left(\arccos(\operatorname{arctg}x) - \frac{\pi}{2}\right)$

6. $f(x) = \ln\left(e^{\cos x} - 1\right)$

7. $f(x) = \frac{1}{1-\operatorname{tg}^2(\arcsin(x-1))}$

8. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sh}(1-e^{\operatorname{arch}^2 x})}$

9. $f(x) = \frac{1}{1+[\operatorname{ch} x]}$

10. $f(x) = \sqrt[3]{\ln\sqrt{|x|-1}}$

11. $f(x) = \frac{1}{1+e^{\sqrt{\arccos x}}}$

12. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

54. Állapitsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

$\boxed{1.}$ $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$

2. $f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$

3. $f(x) = \arccos (\ln x)$

4. $f(x) = \sqrt{\sin^2 x-1}$

5. $f(x) = \ln\left(\ln \frac{1}{x}\right)$

6. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

7. $f(x) = \ln (\arccos e^x)$

8. $f(x) = \frac{1}{1+\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ch} \frac{1}{x^2}\right)}$

9. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{1-\operatorname{th} x}}$

10. $f(x) = e^{\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x}\right)}$

11. $f(x) = \operatorname{sh}\sqrt{\frac{x}{1-|x|}}$

12. $f(x) = \frac{x}{1+x}$

13. $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$

55. Állapitsuk meg $f(H)$-t az alábbi esetekben!

1. $f(x) = \ln \sin x$ $\quad H = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

2. $f(x) = \operatorname{ch} (x+2)^2$ $\quad H = [-3, -1)$

3. $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ $\quad H = (-\infty, 1)$

4. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right)$ $\quad H = (-\infty, 0)$

5. $f(x) = e^{\operatorname{sign}(\cos x)}$ $\quad H = [1, \infty)$

56. Értelmezési tartományuk mely legbővebb részintervallumaiban (lásd 3. pl. Def.) monotonok az alábbi függvények?

$\boxed{1.}$ $f(x) = \frac{1}{1-|\ln x|}$

2. $f(x) = 1-\operatorname{sh} \frac{1}{1+x^4}$

3. $f(x) = e^{\sin^2 x}$

4. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sign} x}{\operatorname{ch}(x^2-1)-1}$

5. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

57. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket abból a szempontból, hogy a megadott halmazokon
1. korlátosak-e,
2. felveszik-e minimumukat, illetve maximumukat,
3. van-e lokális szélsőértékük!
Ha léteznek, adjuk meg a megfelelő supremumokat és infinumokat, illetve maximumokat és minimumokat, valamint a lokális szélsőértékek helyeit!

1. $f(x) = \sin x(1-\sin x)$, $[-\pi, \pi]$

2. $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$

a) D_f

b) $(-\infty, 1)$

c) $(1, \infty)$

d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

e) $(2, 3)$

3. $f(x) = \arccos \sqrt{1-x^2}$, D_f

4. $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{1}{1+|\ln|x||} & x \neq 0 \end{cases}$

a) D_f

b) $[1, \infty)$

5. $f(x) = \sqrt[3]{1-e^{-x^3}}$

a) D_f

b) $[0, \infty)$

58. Vizsgáljuk meg, invertálhatóak-e az alábbi függvények a megadott intervallumokon!

1. $f(x) = \arccos \sqrt{x^2(1-x^2)}$

a) $[0, 1]$

b) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

c) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

2. $f(x) = e^x + x$ $(-\infty, \infty)$

3. $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$

a) $(0, 1]$ b) $(0, 2]$ c) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(1+x)}}{1+\sqrt{\ln(1+x)}}$, D_f

59. 1. a) Hány olyan mindenütt értelmezett $y = f(x)$ függvény van, mely kielégíti az $y + \ln y = x^3$ függvényegyenletet?

! b) Hány olyan $[0, \infty)$-en értelmezett $y = f(x)$ folytonos függvény van, mely kielégíti az $y^2 + \operatorname{ch} y = x+1$ függvényegyenletet?

2. a) Mely c valós számok esetén van megoldása (és ekkor hány) az $\operatorname{sh} x + x + c = 0$ egyenletnek $(-\infty, \infty)$-en?

b) Mely c valós számok esetén van megoldása (és ekkor hány) az $x \operatorname{tg} x = c$ egyenletnek $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-en?

60. Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét. Adjunk meg az értelmezési tartományban olyan legbővebb részhalmazokat (lásd 3. pl. Def.) minden egyes esetben, amelyeken az adott függvény invertálható, és az inverz függvény megadható szakaszonként elemi függvényekből alapműveletekkel, illetve összetett függvény képzéssel előálló függvényként! Adjuk meg az inverz függvényt és értékkészletét!

a) $\boxed{1.}$ $f(x) = \cos e^{(x+2)^2}$

2. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{2x-1}} + 1$

3. $f(x) = \sqrt{\ln\left(\operatorname{tg} \frac{1}{x}\right)}$

4. $f(x) = \frac{1}{1+\sin 2x}$

5. $f(x) = e^{\ln^3(x-1)}$

6. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1-x^2}{1+x^2}$

7. $f(x) = \arcsin (\operatorname{th}(x-1)^4)$

8. $f(x) = \arccos \frac{4x}{1+x^2}$

9. $f(x) = (\operatorname{ch}(x+1)-2)^2$

10. $f(x) = \log_2 x^3$

11. $f(x) = \ln(16-x^2) + 3$

12. $f(x) = \frac{\ln x}{1+\ln x}$

b) 1. $f(x) = e^{-x|x|}$

2. $f(x) = \operatorname{arctg}|\ln x|$

3. $f(x) = \begin{cases} x & -\infty < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x & 4 < x < \infty \end{cases}$

4.
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ \sqrt{1-x} & 0 < x < 1 \\ x-1 & 1 < x \leq 2 \\ -\cos \frac{\pi(x-2)}{2} & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

5. $f(x) = x + [x] \qquad (x \geq 0)$

! c) 1. $f(x) = e^{2x} - e^{x}$

2. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x$

3. $f(x) = \mathrm{sh}^2 x - 3\,\mathrm{sh}\, x + 2$

61. 1. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, és adjuk meg a függvényeket szakaszonként algebrai függvények segitségével!

a) 1. $f(x) = \cos(\arccos x)$

2. $f(x) = \arcsin(\sin x)$

3. $f(x) = \sin(\arccos x)$

4. $f(x) = \arcsin(\cos x)$

5. $f(x) = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x)$

6. $f(x) = \sin(\mathrm{arctg}\, x)$

7. $f(x) = \mathrm{tg}(\arcsin x)$

8. $f(x) = \mathrm{sh}(\mathrm{arsh}\, x)$

9. $f(x) = \mathrm{ch}(\mathrm{arsh}\, x)$

10. $f(x) = \mathrm{ch}(\mathrm{arch}\, x)$

11. $f(x) = \mathrm{arch}(\mathrm{ch}\, x)$

b) 1. $f(x) = \sin(2 \arcsin x)$

2. $f(x) = \cos(\arcsin \sqrt{1 - x^2})$

3. $f(x) = \cos\left(\mathrm{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

2. Bizonyitsuk be az alábbi azonosságokat!

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ tetsz. $x \in [-1,1]$ -re

2. $\arcsin x = \mathrm{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ tetsz. $x \in (-1,1)$ -re

3. a) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ ha $x > 0$

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ ha $x < 0$

2.2 Határértékszámítás

62. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

1. Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ létezik, akkor $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)|$ is létezik és

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim_{x \to x_0} f(x)| .$$

2. a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = \infty .$$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lim_{x \to \infty} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = \infty .$$

3. Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C > 0$ és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, akkor

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \infty .$$

4. Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ és $g(x)$ korlátos x_0 valamely S környezetében, akkor $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

5. Ha létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, akkor tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^k$ és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{1/k}$ és

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^k = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^k , \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{1/k} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^{1/k} . \tag{2}$$

6. Ha léteszik a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, valamint van x_0-nak egy olyan S környezete, hogy

$f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in S$, akkor $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

63. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!
Legyen $f: E_1 \to \mathbb{R}$ $(E_1 \subset R)$ tetszőleges.

1. Ha $x_0 \in (a,b)$ és van olyan $g: E_2 \to \mathbb{R}$ $(E_2 \subset \mathbb{R})$ E_2-n folytonos és invertálható függvény, hogy $D_f \supset R_g \supset (a,b)$, akkor, ha létezik a $\lim\limits_{y \to g^{-1}(x_0)} f(g(y))$, akkor létezik a

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ is, és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{y \to g^{-1}(x_0)} f(g(y))$.

2. Ha létezik a $\lim\limits_{y \to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right)$, akkor létezik a $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ és

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{y \to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right) .$$

Vizsgáljuk meg, léteznek-e az alábbi határértékek! Amelyik létezik, azt határozzuk meg!

64.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} x$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} x^2$

3. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sign} x)^2$

4. $\lim\limits_{x \to 0} [x]$

5. $\lim\limits_{x \to 0} [x]^2$

6. $\lim\limits_{x \to 0} [x^2]$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} [x]$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x}\right]$

9. $\lim\limits_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{[x]}$

65.

1. a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2x + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 2x^2 - 1)$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - 4)$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5 + 4x^2 + 1)$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - 2x + 3)$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + 4x + 2)$

6. $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + 3x)$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\sqrt{x} + 1}$

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1}$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} (x - 5\sqrt{x})$

10. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}\right)$

66.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

2. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{3x^3 + 2x - 1}{(x-1)(x-2)}$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\frac{3x^2 + x + 1}{6x^2 + 2x + 1}}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{9-\sqrt{x}}}$

6. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\left(\dfrac{x}{x^2+2}\right)^3 - 1\right)$

67. $\boxed{1.}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x-2}{3x^2+5}$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+7x-5}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{4x+5}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5-2x^2}{6x^3+1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^5-6x^2+1}{3x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{3x+2}{4x-1}}$

9. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}-1}{3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}+1}$

10. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x^2+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x+1}}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2}{6x^2+2x-1}\right)^2$

12. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}}+1\right)^3$

14. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}(x^k+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$

18. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{x}\right)^2\right)$

20. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt{4x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}+x\sqrt{2x+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}+x\sqrt{2x+1}}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}+1}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

68. (1.) Legyenek $s(x)$ és $n(x)$ polinomok, $f(x) = \frac{s(x)}{n(x)}$ és x_o $s(x)$-nek k_1, $n(x)$-nek k_2 multiplicitású gyöke. (Utóbbi feltétel azt jelenti, hogy $s(x)$ és $n(x)$ felírható $s(x) = (x-x_o)^{k_1}\,\hat{s}(x)$ ill. $n(x) = (x-x_o)\,\hat{n}(x)$ alakban, ahol $\hat{s}(x_o) \neq 0$, $\hat{n}(x_o) \neq o$.

Használjuk a formális $c.\infty$, $c = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ jelölést!

Bizonyítsuk be, hogy a fenti feltételek mellett:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \begin{cases} 0 \\ \operatorname{sign}\dfrac{\hat{s}(x_o)}{\hat{n}(x_o)}\cdot\infty \text{ ha } k_2 > k_1 \text{ és } k_2-k_1 \text{ páros} \\ \text{nem létezik ha } k_2 > k_1 \text{ és } k_2-k_1 \text{ páratlan} \\ \dfrac{\hat{s}(x_o)}{\hat{n}(x_o)} \quad \text{ha } k_1 = k_2 \end{cases}$$

valamint ha $k_2 > k_1$ és $k_2 - k_1$ páratlan, akkor

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \operatorname{sign} \frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} \cdot \infty , \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = -\operatorname{sign} \frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} \cdot \infty$$

2. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x^2 - 9)^2}{x - 3}$

2. a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{(x^2 - 9)^3}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{(x^2 - 9)^3}$

3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{(x^2 - 9)^4}$

4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

Vizsgáljuk meg léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

69. a) $\boxed{1.}$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - x - 2}$

5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+3)}$

6. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-3)(x+1)(x+2)}{(x-2)^2 (x+3)}$

7. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$

8. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3 - 1} \right)$

9. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^3 - 1} \right)$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

12. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

13. 1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2-x-6}$

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-x-6}$

3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-3}{x^2-x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-3}{x^2-x-6}$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-x-6}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+x)^4}{x}$

! b) 1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ rögzitett

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-2x+1}{x^m-2x+1}$, $m > 2, n, m \in \mathbb{N}$ rögzitett

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $n, m \in \mathbb{N}$ rögzitett

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $n, m \in \mathbb{N}$ rögzitett

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$ rögzitett

70. 1. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{(x-1)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{(1+\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-2}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

4. $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt[5]{\dfrac{\frac{1}{x^3} + 1}{x + 1}}$

5. $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{x} + 1} + 1}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1} + 1}$

6. $\lim\limits_{x \to 0+} x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}\right)$

7. $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt[3]{\dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + x}{\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} - x}}$

8. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1}$

71. a) $\boxed{1.}$ $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

5. $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$

! (b) 1. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right)$

2. $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$

6. $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x - 1}}$

7. 1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$

(2.) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$

5. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}\right)$

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right)$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x}$

11. $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x\right)$

12. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$

! c) 1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - x}$, $n \in \mathbb{N}$ rögzitett

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$ rögzitett

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$, $n, m \in \mathbb{N}$ rögzitett

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right)$, $a,b \in \mathbb{R}$ rögzitett

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{a+x} - \sqrt[n]{a-x}}{x}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ rögzitett

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}$, $n,m \in \mathbb{N}$, $a,b \in \mathbb{R}$ rögzitett

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2+1})^n}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ rögzitett

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[n]{(x+a_1)\dots(x+a_n)} - x\right)$, $a_i \in \mathbb{R}$ $i=1,2,\dots n$, $n \in \mathbb{N}$ rögzitett

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$ rögzitett

72. Vizsgáljuk meg léteznek-e az alábbi függvények esetén a

$$\lim_{x\to 0+} f(x), \quad \lim_{x\to 0-} f(x), \quad \lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

határértékek, és ha igen mivel egyenlőek!

1. $\boxed{1.}$ $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^{2x}}$

2. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

3. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1-e^x}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

5. $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{-\frac{2}{x}}}$

6. $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^x}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{1-e^{-\frac{1}{x}}}$

8. $f(x) = \dfrac{x+e^{\frac{1}{x}}}{1+2e^{\frac{1}{x}}}$

9. $f(x) = \dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$

2. 1. $f(x) = \dfrac{\text{th}x}{\text{th}\frac{1}{x}}$

2. $f(x) = \dfrac{\text{th}x}{1-\text{th}2x}$

3. $f(x) = \dfrac{1+\text{th}\frac{1}{x}}{1+\text{th}x}$

4. $f(x) = \dfrac{x\text{th}^2 x}{1+x^2\,\text{th}x}$

3. 1. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

2. $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$

3. $f(x) = \dfrac{x}{\sin\frac{1}{x}}$

73. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\ln\text{ch}x)$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

7. 1. $\lim\limits_{x\to1-} \text{arctg}\dfrac{1}{1-x}$

2. $\lim\limits_{x\to1+} \text{arctg}\dfrac{1}{1-x}$

3. $\lim\limits_{x\to2} \text{arctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$

8. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+2e^{x}+3e^{2x}}{1-e^{x}+e^{2x}}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+2e^{x}+3e^{2x}}{1-e^{x}+e^{2x}}$

9. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x-1}+2\ln x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x-1}+2\ln x}$

10. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+2x^2+3x^3)}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^2+x^3)}{\ln(1+2x^2+3x^3)}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\dfrac{1+x^2}{1+2x^2+3x^3}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\dfrac{1+x^2+x^3}{1+2x^2+3x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\dfrac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt[3]{\cos\dfrac{1}{x^2}}$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(1-\sqrt{1-e^{x}})$

13. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{2\mathrm{ch}2x-\mathrm{ch}x}-2\mathrm{ch}x)$

74. Állapitsuk meg, mely a valós számok esetén léteznek - és ekkor mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+a^{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^{x}}{1+a^{2x}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{1+a^{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos^{x} a$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{th}\,ax$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a+a^2e^{ax}}{1+e^{ax}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{a}-x^{-a}}{x^{a}+x^{-a}}$

75. Felhasználva, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, vizsgáljuk meg léteznek-e és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

a) 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x}$, $a \in \mathbb{R}$ fix, $a \neq 0$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$ fix, $b \neq 0$

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}$

4. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin \frac{1}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

b) 1. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2(1-\cos \frac{1}{x})$

2. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{\arcsin bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \operatorname{arctg} x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

! 9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

! 10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos x}$

12. 1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$

2. $\lim\limits_{x \to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

13. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$ fix

14. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$

15. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}$

16. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{\arcsin (x+2)}{x^2 + 2x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x}$

18. 1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} (\sin x)}{\arcsin x}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg} x}$

19. 1. $\lim\limits_{x \to 0} (\ln \sin x - \ln x)$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln \sin \frac{1}{x} + \ln x)$

76. 1. Felhasználva, hogy $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ bizonyitsuk be, hogy

$\boxed{1.}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$

2. a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln (1-x)}{x} = -1$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $(a > 0$ fix$)$

2. Felhasználva 1. 1. eredményét vizsgáljuk meg: léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

A. 1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh} ax}{x}$ $a \in \mathbb{R}$ rögzitett

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}ax}{\operatorname{sh}bx}$ $a,b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ rögzitett

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch}x-1}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{th}x}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsh}x}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arth}x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty} x\operatorname{sh}\frac{1}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty} x\operatorname{arth}\frac{1}{x}$

B. 1. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2(\operatorname{ch}\frac{1}{x}-1)$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\operatorname{ch}x}}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arth}ax}{\operatorname{arsh}bx}$, $a,b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ rögzitett

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-\operatorname{arsh}x}{2x+\operatorname{arth}x}$

5. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}a}{x-a}$

3. Felhasználva az 1.-ban szereplő határértékeket, vizsgáljuk meg: léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$, $a \in \mathbb{R}$ rögzitett

2. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln x-\ln a}{x-a}$, $a > 0$ rögzitett

3. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x+e^{x^{\frac{1}{x}}})$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+e^x)-\ln 2}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch}3x)}$

6. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^3+x+1)}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$

! 7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$

8. $\lim\limits_{x \to o} \frac{a^x - b^x}{x}$, $a > o$, $b > o$ rögzitett

9. $\lim\limits_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$ rögzitett

10. $\lim\limits_{x \to o} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$, $a, b \in \mathbb{R}$ rögzitett

11. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^a - 1}{x - 1}$, $a \in \mathbb{R}$ rögzitett

! 12. $\lim\limits_{x \to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$, $a > o$ rögzitett

! 13. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^x - 1}{x-1}$

! 14. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^x - a^a}{x-a}$, $a > o$ rögzitett

15. $\lim\limits_{x \to \infty} x \left(\sqrt[x]{a} - 1 \right)$, $a > o$ rögzitett

77. 1. a) Bizonyitsuk be, hogy tetszőleges f valós függvény és $x_o \in \mathbb{R}$ esetén, ha van x_o-nak olyan S környezete, hogy $S \subset D_f$ és $f(x) > 0$, ha $x \in S$, valamint létezik a véges $\lim\limits_{x \to x_o} \ln f(x)$, akkor létezik $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ is, és

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = e^{\lim\limits_{x \to x_o} \ln f(x)}$$

b) Fogalmazzuk meg és bizonyitsuk be az a)-ban kimondott állitás megfelelőjét a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ határértékre vonatkozóan!

2. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

! 3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>0$, $b>0$ rögzitett

4. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[\sin x]{1+\sin x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$

! 8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}x}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$, $a\in\mathbb{R}$ rögzitett

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^{5x}$

! 12. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$

! 13. $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tg}^x\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)$

! 14. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

78. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{arth}bx}$, $a,b\in\mathbb{R}$ fix, $b\neq 0$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x\operatorname{ch}x)\cdot\sin(x\operatorname{sh}x)}{x^3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$, $a,b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ rögzitett

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$, $a \in \mathbb{R}$ rögzitett

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \cos x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to \infty} x \ln \dfrac{2a+x}{a+x}$ ($a \in \mathbb{R}$ fix)

10. $\lim\limits_{x\to \infty} \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

11. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \log_x 2$

12. $\lim\limits_{x\to \infty} \ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

! 13. $\lim\limits_{x\to \infty} x \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

14. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$

15. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

16. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

17. $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

1. $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$

2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

3. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

18. 1. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{2x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{2x^2}\right)^{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}\right)^{2^{\frac{1}{x}}}$

20. 1. $\lim\limits_{x\to 0+} (1+\sin x)^{x^{\frac{1}{2}}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0+} (1-\sin x)^{x^{\frac{1}{2}}}$

(21.) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$ (22.) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

(79.) Az alábbi függvények esetén állapitsuk meg, léteznek-e olyan $a, b \in \mathbb{R}$ számok, hogy fennálljon

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

Ha léteznek ilyenek, határozzuk meg őket!

1. $f(x) = x^2+1$

2. a) $f(x) = \dfrac{(2x)^2+1}{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{2-3x}{3+2x}$ c) $f(x) = \dfrac{4x}{1+3x^3}$

3. a) $f(x) = \sin x$ b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

4. $f(x) = \sqrt{x^2-x+1}$

5. a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ b) $f(x) = x\operatorname{arctg} x$

6. $f(x) = \sqrt[3]{c^3 - x^3}$ $(c \in \mathbb{R}$ fix$)$

80. A. Vizsgáljuk meg, konvergensek-e az alábbi számsorozatok, és ha igen mi a határértékük!

a) $\boxed{1.}$ $a_n = n \sin \dfrac{1}{n}$

2. $a_n = \dfrac{n^2 \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n+1}$

3. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n+1}$ $(n > 1)$

4. $a_n = n^2(\ln(n^2+1) - 2\ln n)$

5. $a_n = \cos^n \dfrac{x}{\sqrt{n}}$ $x \in \mathbb{R}$ rögzitett

6. $a_n = \left(\dfrac{a-1 \cdot \sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$, $a > 1$, $b > 0$ rögzitett

7. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(8.) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$

9. $a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$

! b) 1. $a_n = \sin\left(\pi \sqrt{n^2 + 1}\right)$

2. 1. $a_n = \sin\left(\pi \cdot \sqrt{n^2+n}\right)$

2. $a_n = \sin^2\left(\pi \cdot \sqrt{n^2+n}\right)$

3. $o < a_1 < \frac{\pi}{2}$ rögzitett, $a_n = \sin a_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$

! B. Állapitsuk meg konvergensek-e az alábbi sorozatok!

1. $a_1 > o$ rögzitett, $a_n = \operatorname{arctg} \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$ $(n \geqslant 2)$

2. $a_1 > 1$ rögzitett, $a_n = \frac{1+\ln a_{n-1}}{\ln a_{n-1}}$ $(n \geqslant 2)$

3. $a_1 > o$ rögzitett, $a_n = a_{n-1} + e^{\frac{n}{n+1}}$ $(n \geqslant 2)$

2.3 Folytonosságvizsgálat

81. Állapitsuk meg, hol értelmezettek, hol folytonosak és hol nem folytonosak az alábbi függvények!
Az értelmezési tartományba, vagy annak határára eső nem folytonossági pontok esetén állapitsuk meg
1. a függvény határértékét (ha létezik),
2. a függvény jobb- illetve bal oldali határértékeit (ha létezik),
3. a szakadások jellegét.
Határozzuk meg a függvény határértékét a $+\infty$ -ben, illetve a $-\infty$ -ben (ha létezik)!

$\boxed{a)}$ $f(x) = 1+\operatorname{th} \frac{1-2x^2}{1+x}$

b) 1. 1. $f(x) = \operatorname{sign} x^3$ 2. $f(x) = \operatorname{sign} x^4$

2. $f(x) = [x]$

3. $f(x) = \frac{1}{x} \cdot [x]$

c) 1. $f(x) = x^3+2x-\sqrt{x}+1$

2. 1. $f(x) = \frac{x}{x-2}$

2. $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$

3. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

4. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

5. 1. $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{2(x-2)}$

2. $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{2|x-2|}$

6. $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{3-\sqrt{x}}}$

7. $f(x) = \frac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt[4]{x}-1\right)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}$

8. $f(x) = \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$

9. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

10. $f(x) = \frac{x-2}{|x-2|} + \frac{1}{|x-3|} + \frac{1}{x-3}$

d) 1. $f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$

2. $f(x) = \operatorname{th} \frac{2x}{1-x^2}$

3. $f(x) = \ln \frac{x^2}{1-x^3}$

4. $f(x) = \frac{1+x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2+\operatorname{arctg}^2 x}$

5. $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

6. $f(x) = \frac{1+x+e^x}{2+e^x-e^{2x}}$

7. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{-x^2}$

8. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{|x-2|}}$

9. $f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{1}{1-2x}}$

10. $f(x) = \operatorname{th} \ln \frac{1}{|1-x|}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

11. $f(x) = \operatorname{tg} e^{-\frac{1}{x}}$

12. $f(x) = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x}$

13. $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

14. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-e^{-x^2}}}$

15. $f(x) = \sqrt[3]{1-\operatorname{sign}^2 x}$

16. $f(x) = \dfrac{1}{1-2^{-x}}$

17. 1. $f(x) = x^3 \sin \dfrac{1}{x^2}$

2. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x^2}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$

18. $f(x) = (1 + \sin x)^{x^2}$

19. $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$

20. $f(x) = x^{e^{\frac{1}{x}}}$

21. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$

22. $f(x) = e^{-e^{-\frac{1}{x}}}$

23. $f(x) = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{x}}$

24. $f(x) = \sqrt[3]{1-e^{-\sin x}}$

25. $f(x) = \dfrac{2x}{x-\sin x}$

26. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x(x+1)^2}$

27. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4} \cdot 3^{\frac{1}{x}}$

28. $f(x) = \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{1}{1+2^{\frac{2-x}{x-1}}}$

29. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{(e^{\frac{1}{x}}-1)(x^2+1)}{x}$

30. $f(x) = \sqrt{1-\ln(x-1)^2}$

e) 1. $$f(x) = \begin{cases} \ln x^2 & -\infty < x \leq -1 \\ \operatorname{arth} x & -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{e^{x^2-1}} & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-2x} & 1 \leq x < \infty \ , \ x \neq 2 \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \\ (x-2)^2 & 2 \leq x < 3 \\ 1+e^{-\frac{1}{x-3}} & 3 < x < \infty \end{cases}$$

3. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\pi}{x^2} & x \leq -<\pi \\ \dfrac{|\sin x|}{x} & -\pi < x < \pi \ , \ x \neq 0 \\ (1+\sin \frac{1}{x-\pi})(1+e^{\frac{1}{\pi-x}}) & x > \pi \end{cases}$$

4. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcth} x & |x| > 1 \\ \dfrac{\sin \pi x}{x^2-x} & |x| < 1 \ , \ x \neq 0 \end{cases}$$

5. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{4} - x & 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{\ln(x-2)} & x > 2 \ , \ x \neq 3 \end{cases}$$

6. $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x & \text{ha } x \notin \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\ 0 & \text{ha } x \notin \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{x} & x < -1 \\ \frac{x}{\operatorname{sign} x} & -1 < x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{x}{\operatorname{sign} x} & 0 < x < 1 \\ \frac{x}{\operatorname{sign} x} & 1 < x \leq 2 \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{x-5} & 2 < x < 5 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 5 \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{1}{5-x} & x > 5 \end{cases}$

f) 1. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n \quad (n \in \mathbb{N})$

2. $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^n}{1+x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

3. $f(x) = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{x+e^{xt}}{1+e^{xt}} \quad (t \in \mathbb{R})$

4. $f(x) = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^{t})} \quad (t \in \mathbb{R})$

82. Adjunk példát olyan függvényre, mely elemi függvényekből összetett függvény képzéssel és alapmüveletekkel áll elő és:

1. 1. csak egész x-ekre értelmezett,
   2. csak pozitiv egész x-ekre értelmezett,
   3. csak egy adott $a \in \mathbb{R}$ pontban értelmezett,
   4. sehol sem értelmezett,
   5. egy előre adott $a \in \mathbb{R}$ pontnak sem olyan S_1 környezete nincs, hogy $S_1 \setminus \{a\} \subset D_f$, sem olyan S_2 környezete, hogy $S_2 \cap D_f = \emptyset$.

1. nem korlátos egy adott (a,b) intervallumban, de nem áll fenn sem $\lim\limits_{x \to x_0^+} |f(x)| = \infty$, sem $\lim\limits_{x \to x_0^-} |f(x)| = \infty$ egyetlen $x_0 \in (a,b)$ pontra sem.

2. korlátos egy adott (a,b) intervallumban, de egy adott $x_0 \in (a,b)$ esetén

   α) nem létezik a véges vagy végtelen $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ határértékek egyike sem, illetve

   β) nem létezik a véges vagy végtelen $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, de $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ létezik és véges.

3. α) nem létezik a véges vagy végtelen $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ határértékek egyike sem, illetve

   β) nem létezik a véges vagy végtelen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, de a $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ létezik és véges.

4. Adott $a, b \in \mathbb{R}$ -re egy adott $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \,, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = b \,.$$

83. Adjunk példát olyan függvényre, mely

1. Racionális törtfüggvény és

   1. megszüntethető szakadása van x=0-ban és x=-1-ben, nullahelye van x=1-ben, másodfaju szakadása x=2-nél ugy, hogy $\lim\limits_{x \to 2+} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2-} = \infty$, valamint

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \,, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \,.$$

   2. Nullahelye van x=-1-ben és x=2-ben, megszüntethető szakadása x=3-ban, másodfaju szakadása x=0-ban és x=-2-ben, ugy hogy $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to -2+} f(x) = \lim_{x \to -2-} f(x) = \infty \,, \text{ valamint}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \,.$$

2. Elemi függvényekből alapműveletekkel, illetve összetett függvénykészítéssel áll elő, és

1. ugrása van $x=0$-ban és $x=1$-ben, ugy, hogy

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = -2,$$

megszüntethető szakadása van $x=-2$-ben, és másodfaju szakadása van $x = 2$-ben, valamint

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 .$$

2. korlátos, véges sok pont kivételével mindenütt értelmezett, másodfaju szakadása van $x=0$-ban, ugrása $x=1$-ben, ugy hogy

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 1-} f(x) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1 ,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 .$$

84. Hogyan kell az alábbi függvények definiciójában szereplő $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ konstansokat megválasztani, hogy a megfelelő függvények mindenütt folytonosak legyenek?

1. $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ a+x & x \geqslant 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x & x \leqslant 0 \\ a\operatorname{sh} x + b & x > 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2 + a\sin 2x}{x} & x > 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a \ln\left(\dfrac{(x+1)^2}{2} + 1\right)}{x+1} & x < -1 \\ \operatorname{arsh}(x-b^2) & x \geqslant -1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2 x - a}{x} & x < 0 \\ \sin^2 \dfrac{\pi(x+b)}{2} & x \geqslant 0 \end{cases}$

6. $$f(x) = \begin{cases} a \cdot \dfrac{x-1}{\ln(\operatorname{arctg}(x-1)+1)-x+1} & x < 1 \\ 2ax + b & x \geqslant 1 \end{cases}$$

7. $$f(x) = \begin{cases} a \cdot \operatorname{th} \dfrac{e^{x+1} - a}{x+1} & x < -1 \\ -a & x \geqslant -1 \end{cases}$$

8. $$f(x) = \begin{cases} ae^{-x^2} & x \leqslant 1 \\ \dfrac{2^{x-a} - 1}{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

85. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az fog összetett függvényeket, ha

1. a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$, $g(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ \pi & x = 0 \end{cases}$

3. a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $g(x) = \dfrac{1}{\ln|x|}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln|x|}$, $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

4. $f(x) = \dfrac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x} \cdot \left((2 - \frac{2}{\pi}) x^2 - x + \frac{2}{\pi}\right)$, $g(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

5. $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x} \left(1 + \left(\dfrac{1}{\ln 2} - 1\right) x\right)$, $g(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

6. $f(x) = \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

7. $g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

a) $f(x) = e^{-x^2}-1$ b) $f(x) = e^{x(x^2+x-1)}$ c) $f(x) = g(x)$

2.4 Függvények ábrázolása, folytonos függvények speciális tulajdonságai

86. Ábrázoljuk vázlatosan az alábbi függvényeket alapvető jellemzőik (értelmezési tartomány, folytonossági-, monotonitási intervallumok, lokális szélsőértékhelyek, szakadások, határértékek a szakadási helyeken és a végtelenben) vizsgálata segitségével! (konvexitás, konkávitás vizsgálatot nem szükséges végezni)

a) 1. $f(x) = x\,[x]$

2. $f(x) = \sqrt{x-[x]}$

b) 1. $f(x) = |x+3|+|x-2|$

2. $\alpha)$ $f(x) = x^2-1$

$\beta)$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

3. $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$; $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ rögzitett

4. $\alpha)$ $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$\beta)$ $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$

$\gamma)$ $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

$\delta)$ $f(x) = \dfrac{|x|}{1+x}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$

c) 1. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x^2}}}$

3. $f(x) = \operatorname{arctg}^2\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{3}x}\right)$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x-1)+\ln(x-1)^2}$

5. $f(x) = \sqrt{2e^{-\frac{1}{x}}-1}$

6. $\alpha)\ f(x) = \operatorname{th} \dfrac{e^{-x^2}}{|x|}$

$\beta)\ f(x) = \operatorname{th} \dfrac{e^{-x^2}}{x}$

7. $f(x) = \left|\ln^2(x-1)-1\right|$

8. $\alpha)\ f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\beta)\ f(x) = \dfrac{1+2e^{-\frac{1}{x}}}{2+e^{-\frac{1}{x}}}$

9. $f(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}$

10. $\alpha)\ f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}}$

$\beta)\ f(x) = e^{-\frac{1}{\cos^2 x}}$

11. $f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi \dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$

12. $f(x) = \dfrac{1}{1+2\sin(\operatorname{arctg} x)}$

13. $f(x) = \sin\left(\pi e^{\frac{1}{x}}\right)$

87. 1. Hány megoldása van az
a) $x\ln x + \ln x + c = 0$ ($c \in \mathbb{R}$ rögzitett) egyenletnek az $(1, \infty)$ intervallumon, és a
b) $x\operatorname{th} x = c(x+1)$ ($c \in \mathbb{R}$ rögzitett) egyenletnek a $(-1, \infty)$ intervallumon?
(A megoldások száma c függvénye!)

2. Van-e nullahelyük az alábbi függvényeknek a megadott intervallumokon?

a) 1. $f(x) = 1+x^3+x^4+x^5$

2. $f(x) = 1+x^2+x^4+x^6$ $\quad I = (-\infty, \infty)$

b) $f(x) = x^n - x^{n-1} - 1$ $\quad$ ($n \in \mathbb{N}$ rögzitett) $I = [1,2]$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-a} + \dfrac{x^4+1}{x-b}$ $\quad$ ($a, b \in \mathbb{N}$ rögzitett, $a < b$) $I = (a,b)$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

88. 1. Van-e lokális szélsőértéke az alábbi függvényeknek a $(-\infty, \infty)$ intervallumban?
Ha van, adjunk meg egy korlátos intervallumot, mely tartalmaz lokális szélsőértékhelyet !

a) $f(x) = x^4+2x-1$

b) $f(x) = x^3+1$

! c) $f(x) = (x-1)(x^5-2x-1)$

d) $f(x) = 1+(x^2-x-2)(x^2-3x+2)$

2. Felveszik-e minimumukat az alábbi függvények a megadott intervallumon?

a) $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{|x|}$

$I = (0,1)$

b) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{|x|}$

$I = (0, 2\pi)$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

$I = [0,1]$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$I = [0,1]$

89. Vizsgáljuk meg egyenletes folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket a megadott intervallumokon!

1. a) $f(x) = \sin x$, $(-\infty, \infty)$

b) $f(x) = \sin x^2$, $(-\infty, \infty)$

2. a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $(0,1)$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$, $[-1,1]$

3. a) $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{x}$, $(0,1)$

b) $f(x) = x \cdot \sin \dfrac{\pi}{x}$, $(0,1)$

90. Adjunk példát olyan függvényre, mely

1. a) folytonos egy (a,b) intervallumon, és itt
   1. nem korlátos;
   2. korlátos, de nem veszi fel sem maximumát, sem minimumát;
   3. felveszi maximumát és minimumát is;

   b) nem folytonos egy (a,b) intervallumon, de felveszi maximumát és minimumát is;

   c) folytonos és korlátos egy $[a, \infty)$ intervallumon, de itt
   1. nem veszi fel maximumát;
   2. nem veszi fel sem maximumát, sem minimumát;

2. a) folytonos egy (a, ∞) intervallumon, csak itt van értelmezve, de nem vesz fel minden - két függvényértéke közé eső - értéket;

   b) nem folytonos $[a,b]$-n de felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket;

3. a) folytonos, de nem egyenletesen folytonos egy (a,b) intervallumon;

   b) folytonos és korlátos, de nem egyenletesen folytonos egy (a,b) intervallumon;

   c) nem folytonos egy $[a,b]$ intervallumon, de egyenletesen folytonos (a,b)-n;

   d) folytonos, nem korlátos, de egyenletesen folytonos egy $[a, \infty)$ intervallumon;

   e) folytonos, korlátos, de nem egyenletesen folytonos egy $[a, \infty)$ intervallumon.

3. VEGYES FELADATOK

91. 1. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ és van x_0-nak olyan $S \subset D_f$ környezete, melyben $s = \inf\limits_{x \in S} f(x) > 0$ akkor $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty$.

(2.) Legyenek f, g tetszőleges valós függvények, $x_0 \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy x_0-nak van olyan $S \subset D_f$ környezete, melyre $f(x) > 0$, ha $x \in S$.
Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$.
Vizsgáljuk meg a $h(x) = f(x)^{g(x)}$ függvény határértékét az alábbi esetekben:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ és

és:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$

92. (1.) Legyen $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton növő.
a) Bizonyítsuk be, hogy
1. ha f korlátos, akkor létezik a véges $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$;
2. ha f nem korlátos, akkor $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
b) Igaz-e: f akkor és csak akkor korlátos ha létezik a véges $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

2. Mondjuk ki és bizonyítsuk be 1. a)-beli állításokat egy (a,b) korlátos intervallumra vonatkozólag.

93. (1.) Bizonyítsuk be, hogy az $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ függvénynek egy $x_0 \in (a,b)$-ben akkor és csak akkor van határértéke, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy minden olyan $x_1, x_2 \in (a,b)$ esetén, melyre

$$0 < |x_1 - x_0| < \delta \quad \text{és} \quad 0 < |x_2 - x_0| < \delta,$$

fennáll, hogy $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

2. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a fenti tételt végtelenben vett határérték esetére!

94. 1. Legyen $y_0 \in \mathbb{R}$ és g szigoruan monoton y_0 egy S környezetében. Igazak-e az alábbi állitások? ($D_f \supset R_g$)

a) Ha létezik $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ és $\lim\limits_{y \to y_0+} g(y) = x_0$,

akkor létezik $\lim\limits_{y \to y_0+} f(g(y))$, és $\lim\limits_{y \to y_0+} f(g(y)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

b) Ha létezik $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ és $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = x_0$, akkor létezik

$\lim\limits_{y \to y_0} f(g(y))$, és $\lim\limits_{y \to y_0} f(g(y)) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$.

2. Igaz-e: Ha $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = \infty$ és nem létezik $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, akkor nem létezik $\lim\limits_{y \to y_0} f(g(y))$ sem ($D_f \supset R_g$, $y_0 \in \mathbb{R}$).

! 3. Bizonyitsuk be, hogy ha f értelmezve van és g folytonos egy $[a, \infty)$ intervallumon, $\lim\limits_{y \to \infty} g(y) = \infty$ és $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ (véges vagy végtelen) nem létezik, akkor nem létezik a $\lim\limits_{y \to \infty} f(g(y))$ (véges vagy végtelen) sem ($D_f \supset R_g$).

4. Legyen $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ és $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

Alkalmazható-e $\lim\limits_{x \to 0} f(g(x))$ számitásához az összetett függvények határértékére vonatkozó tétel?

5. Milyen kapcsolat van az összetett függvények határértékére vonatkozó tétel és azon tétel (un. Átviteli elv) között, mely kapcsolatot teremt a sorozatok és függvények határértéke között. (Ha x_0-nak van olyan S környezete, hogy $S \setminus \{x_0\} \subset D_f$ akkor:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ akkor és csak akkor teljesül, ha tetszőleges

$(x_n) \subset D_f$, $x_n \to x_0$ $x_n \neq x_0$ esetén $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.)

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

95. Bizonyitsuk be, hogy ha f folytonos egy $[a, \infty)$ intervallumon és létezik a véges $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, akkor f korlátos $[a, \infty)$-en!

! 96. Bizonyitsuk be az alábbi állitásokat!

1. Ahol f és g folytonosak, ott $\varphi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ és $\psi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ is folytonos.
2. Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor az

$$m(x) = \inf_{t \in [a,x]} f(t) \text{ és az } M(x) = \sup_{t \in [a,x]} f(t) \text{ szintén folytonosak}$$

$[a,b]$-n.

! 97. Bizonyitsuk be, hogy ha a mindenütt értelmezett, $x = 0$-ban folytonos f függvényre fennáll, hogy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ akkor } f(x) = a \cdot x \ (a \in \mathbb{R} \text{ rögzitett})$$

alaku.

98. Bizonyitsuk be az alábbi állitásokat!

1. Ha f folytonos a $[0, \infty)$ intervallumon, továbbá $f(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x=0$, és $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$; akkor f nem lehet monoton $[0, \infty)$-en.
2. Ha $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ és $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$, akkor f nem lehet monoton (a,b)-n.

! 3. Ha f monoton $[a,b]$-n, és felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket, akkor f folytonos $[a,b]$-n.

99. 1. Igaz-e, hogy, ha $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ és f $(a,x_0]$-on monoton növő, (x_0,b)-n monoton csökkenő, akkor x_0-ban lokális szélsőértéke van?

2. Legyen f folytonos az egész $\mathbb{R}$-en. Bizonyitsuk be, hogy
   a) két lokális minimuma között mindig van egy lokális maximuma;
   b) ha f páros függvény, és monoton $[0, \infty)$-en, akkor $x=0$-ban lokális szélsőértéke van;
   ! c) ha $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ akkor f felveszi abszolut minimumát $\mathbb{R}$-en.

! 3. a) Bizonyitsuk be, hogy ha f folytonos egy $[a, \infty)$ intervallumon és létezik a véges $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, akkor vagy minimumát, vagy maximumát felveszi $[a, \infty)$-en.
   b) Igaz-e a) állitása ha nem tesszük fel, hogy létezik a véges $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, de feltesszük, hogy f korlátos $[a, \infty)$-en?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy p polinomnak $x_0 \in \mathbb{R}$ n-szeres multiplicitású gyöke, akkor

   a) páros n esetén x_0-ban lokális szélsőértéke van;

   b) páratlan n esetén x_0-ban előjelet vált, azaz van $\delta > 0$, hogy ha $0 < x-x_0 < \delta$, akkor $p(x) > 0$, és ha $0 < x_0-x < \delta$, akkor $p(x) < 0$, vagy fordítva.

5. Bizonyítsuk be, hogy zárt intervallum folytonos képe zárt intervallum (azaz, hogy ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor $f([a,b]) = [c,d]$).

100. 1. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat:

   a) Ha f folytonos az egész $\mathbb{R}$-en, és léteznek a véges, vagy végtelen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ határértékek, akkor f felvesz minden olyan értéket, mely szigoruan a fenti két határérték közé esik.

   b) Ha f folytonos (a,b)-n és léteznek a véges, vagy végtelen $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ határértékek, akkor f felvesz minden olyan értéket, mely szigoruan a fenti két határérték közé esik.

   c) Minden páratlan fokszámu polinomnak van valós gyöke.

   d) Ha f folytonos $[a,b]$-n és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ tetszőlegesek, akkor van olyan $c \in [a,b]$, melyre

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

   ! e) Ha f folytonos az $[a,b]$-n és $f([a,b]) = [a,b]$, akkor van olyan $c \in [a,b]$, hogy $f(c) = c$.

   f) Ha f folytonos $[0,\infty)$-en, $f(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x=0$, akkor vagy $f(x) > 0$ $\forall x \in (0,\infty)$, vagy $f(x) < 0$ $\forall x \in (0,\infty)$.

2. Milyen összefüggés van a Bolzano-tétel és az alábbi állitás között? Ha $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum, és f folytonos az I-n, akkor tetszőleges $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, és c $f(x_1)$, $f(x_2)$ közé eső szám esetén van olyan $x \in [x_1, x_2]$, hogy $f(x) = c$.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

!101. Legyen f folytonos egy (a,b) intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy
a) ha valamely $x_0 \in (a,b)$ esetén $f(x_0) = 0$, de $f(x) > 0$ tetszőleges $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$-ra, akkor f nem invertálható egyetlen olyan (c,d) intervallumon sem, melyre $x_0 \in (c,d) \subset (a,b)$.
b) ha f invertálható (a,b)-n, akkor szigoruan monoton.

!102. 1. Bizonyítsuk be, hogy ha f folytonos, szigoruan monoton, korlátos függvény (a,b)-n akkor $f((a,b))$ nyílt intervallum.
2. Igaz marad-e az állítás, ha a monotonitást nem követeljük meg?

!103. Definíció.
Egy függvényt egy H halmazon folytonossá tehetőnek nevezünk, ha ott legfeljebb véges sok pontban megváltoztatva az értékét H-n folytonos függvényt kapunk.
1. Bizonyítsuk be, hogy korlátos intervallumon egyenletesen folytonos függvény korlátos.
2. Bizonyítsuk be, hogy egy - az $[a,b]$ zárt intervallumon értelmezett, (a,b)-n folytonos f függvény akkor és csak akkor egyenletesen folytonos az (a,b) nyílt intervallumon, ha folytonossá tehető $[a,b]$-n.

!104. 1. a) Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény folytonos az $[a,\infty)$ intervallumon ($a \in \mathbb{R}$ rögzitett) és létezik a véges $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ határérték, akkor f egyenletesen folytonos az $[a,\infty)$ intervallumon!
b) Igaz-e 1. azon megfordítása, hogy ha egy függvény egyenletesen folytonos az $[a,\infty)$ intervallumon, akkor létezik a véges $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ határérték?
2. Bizonyítsuk be, hogy korlátos, egyenletesen folytonos függvények szorzata is egyenletesen folytonos!
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges I intervallumon folytonos, korlátos és monoton függvény ott egyenletesen folytonos.

105. 1. a) Bizonyítsuk be, hogy ha adott egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és egy $x_0 \in I$ pont, és egy I-n értelmezett függvény egyenletesen folytonos az I azon x_0-ban zárt I_1, I_2 részintervallumain, melyekre x_0 az I-t osztotta, akkor a függvény egyenletesen folytonos az egész I-n.
b) Fennáll-e a) állítása, ha nem kötjük ki, hogy I_1, I_2 x_0-ban zárt?
2. Bizonyítsuk be, hogy $f(x) = \sqrt{x}$ egyenletesen folytonos egész értelmezési tartományán.

II. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

1. DIFFERENCIÁLHÁNYADOS. DIFFERENCIÁLHATÓSÁG. FORMÁLIS DERIVÁLÁS. MAGASABBRENDÜ DERIVÁLTAK. ÖSSZETETT ÉS INVERZ FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

1. A differenciálhányados definiciója alapján határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját a megadott x_0 helyen!

$\boxed{1.}$ $f(x) = x^2$, $x_0 = 5$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x_0 = 3$

4. $f(x) = e^x$, $x_0 = -1$

5. $f(x) = \cos 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

2. 2. A differenciálhányados definiciója alapján határozzuk meg $f'(x)$ derivált értékét mindazon x értékekre, amelyekre létezik!

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

2. $f(x) = \sqrt{x}$

$\boxed{3.}$ $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$

5. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

6. $f(x) = \sin 2x$

3. Igazoljuk a differenciálhányados definiciójának felhasználásával, hogy az $f^2(x)$ függvény differenciálható mindazokon a helyeken, ahol $f(x)$ differenciálható! Határozzuk is meg $f^2(x)$ deriváltfüggvényét!

4. Legyen f értelmezve $x = a$ egy környezetében.
Tekintsük a következő állításokat:

A. Létezik a $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = A_1$ véges határérték.

B. Létezik a $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A$ véges határérték.

C. Az f függvény a és a + h helyekhez tartozó megváltozása a következő alakban adható meg:

$$\Delta f = f(a + h) - f(a) = Ah + \varepsilon h, \quad \text{ahol } A \text{ h-tól független}$$

(csak a -tól függő) állandó és $\varepsilon \to 0$, ha $h \to 0$.
Következik-e A.-ból B., B.-ből A., A.-ból C., C.-ből A., B.-ből C., ill. C. - ből B.?

5. A differenciálási szabályok felhasználásával deriváljuk az alábbi függvényeket és állapitsuk meg, hogy a derivált függvény x mely értékeire van értelmezve!

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

2. $f(x) = \left(3 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$\boxed{3.}$ $f(x) = \sqrt{\dfrac{3 + 5x}{3 - 5x}}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

5. $f(x) = \arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

6. $f(x) = e^{\operatorname{arc\,tg} x^2} + \ln(3x+1)$

7. $f(x) = 10^x + \lg x$

8. $f(x) = \dfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$

9. $f(x) = (\operatorname{arc\,tg} 2x)^3$

10. $f(x) = (\operatorname{arc\,tg} 2x)^x$

11. $f(x) = \arcsin \left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot \ln^2 x$

12. $f(x) = (\operatorname{sh} 3x) \sqrt{6x + 5}$

13. $f(x) = \ln(x^2 - 1) \cdot \operatorname{arth} \dfrac{x}{3}$

14. $f(x) = \log_3 x + \ln 3 + 3^x + x^3 + x^x$.

6. Az alábbi egyenletek mindegyike egy $y = f(x)$ függvényt ad meg (implicit módon) az adott (x_0, y_0) pont egy környezetében:

$\boxed{1.}$ $x^2 + y^2 = 4$, $x_0 = 1$, $y_0 = \sqrt{3}$

2. $xy - y^2 - 3 = 0$, $x_0 = 4$, $y_0 = 3$

3. $e^{2x+y} + \sin(x+2y) = e^{\frac{\pi}{4}} + 1$. $x_0 = 0$; $y_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Határozzuk meg e függvények x_0 -beli deriváltját.

7. Határozzuk meg az alábbi magasabbrendü deriváltakat!

$\boxed{1.}$ $f(x) = \sin^2 x + \sin x \operatorname{ch} x$, $f^{(5)} = ?$

2. $f(x) = \cos x$ $f^{(33)} = ?$

3. $f(x) = x^2 \sin x$, $f^{(100)} = ?$

4. $f(x) = xe^x$, $f^{(n)} = ?$

5. $f(x) = x^2 e^{ax}$, $f^{(n)} = ?$

6. $f(x) = \frac{1}{1 + x}$, $f^{(n)} = ?$

7. $f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$, $f^{(n)} = ?$

8. $f(x) = x^n e^x$, $f^{(n)} = ?$

8. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket, hogy az $x = 0$ helyen:
a) folytonosak-e
b) differenciálhatók-e. Jelölje $f'_+(a)$ az f függvény a-beli jobboldali, $f'_-(a)$ az f függvény a-beli baloldali deriváltját. Határozzuk meg - amennyiben létezik - $f'(0)$, illetve $f'_+(0)$ és $f'_-(0)$ értékét!

1. $f(x) = |x|$

2. $f(x) = x|x|$

$\boxed{3.}$ $f(x) = |\sin x|$

4. $f(x) = x^2(x + |x|)$

5. $f(x) = \cos^2 \sqrt{x}$

6. $f(x) = \sqrt{x^2(x + 3)^2}$

7. $f(x) = e^{-|x|}$

13. Mutassunk példát olyan folytonos függvényre, amely az $x = 1$, $x = 2$ és $x = 3$ helyen nem differenciálható!

14. $$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

a) Mutassuk meg, hogy az $x = 0$ pont tetszőleges környezetében talalható olyan hely, ahol f nem differenciálható, $x = 0$-ban mégis deriválható a függvény!
b) Folytonos-e $f'(x)$ az $x = 0$ helyen?

15. $f(x) = |x - 2|^3$

Határozzuk meg az $f'(x)$ és az $f''(x)$ függvényeket! Létezik-e $f'''(2)$?

16. Hol differenciálható egyszer, ill. kétszer az

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & , \text{ ha } x < 1 \\ (x-2)^2+2 & , \text{ ha } 1 \leqq x < 2 \\ (x-4)^2-2 & , \text{ ha } 2 \leqq x \end{cases}$$ függvény?

17. Legyen $\varphi(x)$ mindenütt folytonos függvény.
a) Differenciálható-e az $x = a$ pontban az

$f(x) = (x - a)\varphi(x)$ függvény?

b) Legyen $g(x) = |x-a|\,\varphi(x)$. Határozzuk meg a $g'_-(a)$ bal és $g'_+(a)$ jobboldali differenciálhányadosokat! Milyen feltételt kell teljesitenie $\varphi(x)$-nek - a fenti tulajdonságán kivül -, hogy g deriválható legyen a-ban?

18. Differenciálható-e, és ha igen, hányszor az $f(x) = |(x-a)|^n$ ($n > 0$ egész) függvény az $x = a$ helyen?

19. Bizonyitsuk be, hogy ha $f(x)$ páros függvény és $f'(0)$ létezik, akkor $f'(0) = 0$.

20. Legyen f differenciálható $(-\infty, +\infty)$-ben. Igazoljuk, hogy
a) ha $f(x)$ páros, akkor $f'(x)$ páratlan függvény;
b) ha $f(x)$ páratlan, akkor $f'(x)$ páros függvény;
c) ha $f(x)$ periodikus, akkor $f'(x)$ is periodikus és $f'(x)$ periódusa megegyezik $f(x)$ periódusával.

! 21. Igazoljuk Darboux tételét: Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$-ben differenciálható és $f'(a) \neq f'(b)$, akkor $f'(x)$ az intervallum belsejében minden olyan értéket felvesz, amely $f'(a)$ és $f'(b)$ közé esik.

22. Megadhatók-e olyan függvények, amelyek eleget tesznek az alábbi feltételek valamelyikének?

a) f mindenütt differenciálható, csak az x_0 helyen nem;

b) f differenciálható az x_0 helyen, de annak egyetlen környezetében sem differenciálható.

23. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ ha } x \leq x_0 \\ ax + b & , \text{ ha } x > x_0 . \end{cases}$$

Hogyan kell az a és b együtthatók értékét megválasztani, hogy $f(x)$ differenciálható legyen az $x = x_0$ helyen?

24. Állithatjuk-e, hogy az $f(x) = g(x) + h(x)$ összegfüggvény nem differenciálható az $x = x_0$ pontban, ha:

a) $g(x)$ differenciálható x_0-ban, de $h(x)$ nem;

b) $g(x)$ és $h(x)$ egyike sem differenciálható x_0-ban?

Indokoljuk meg válaszunkat!

25. Állithatjuk-e, hogy az $f(x) = g(x)\,h(x)$ szorzat nem differenciálható az $x = x_0$ pontban, ha:

a) $g(x)$ differenciálható x_0-ban, de $h(x)$ nem;

b) $g(x)$ és $h(x)$ egyike sem differenciálható x_0-ban.

Indokoljuk meg válaszunkat!

26. Mit állithatunk az $f(x) = g(h(x))$ összetett függvény x_0-beli differenciálhatóságáról, ha:

a) $g(x)$ differenciálható az $x = h(x_0)$ pontban, de $h(x)$ nem differenciálható x_0-ban.

b) $g(x)$ nem differenciálható a $h(x_0)$ helyen, de $h(x)$ differenciálható x_0-ban.

c) $g(x)$ nem differenciálható a $h(x_0)$ pontban és $h(x)$ sem differenciálható x_0-ban.

d) $g(x)$ differenciálható a $h(x_0)$ pontban és $h(x)$ differenciálható x_0-ban.

Indokoljuk meg válaszunkat!

!27. Az I intervallumban legyen az f függvény kétszer deriválható és $f'(x) \neq 0$. Bizonyitsuk be, hogy az f(I) intervallumban

$$[f^{-1}(y)]'' = -\frac{f''(f^{-1}(y))}{[f'(f^{-1}(y))]^3} \quad !$$

2. A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS ÉS A DIFFERENCIÁL GEOMETRIAI ÉS FIZIKAI ALKALMAZÁSAI

28. Irjuk fel az alábbi görbék érintőjének és normálisának egyenletét az adott x_o értékhez tartozó pontban!

1. $y = \frac{x+1}{x-1}$, $x_o = 2$

2. $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$, $x_o = \frac{1}{2}$

3. $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ a) $x_o = -1$, b) $x_o = 2$, c) $x_o = 3$

29. Határozzuk meg az alábbi görbék esetében azokat a pontokat, amelyekben a görbe érintője párhuzamos a megadott egyenletü egyenessel! Irjuk fel e pontokban az érintő egyenletét!

1. $y = x^3 + 1$, $y = 3x - 1$

2. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$, $y = -\frac{1}{2}x$

3. $x^2 + y^2 = 25$, $3x - 4y + 7 = 0$

4. $y = \sin x + \cos x$, x tengely

30. Határozzuk meg az alábbi görbék metszési szögét!

1. $y = \sin x$, $y = \cos x$

2. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$

3. $y^2 = 4x - x^2$, $x^2 + y^2 = 8$

4. $y = \ln x$, x tengely

31. Bizonyitsuk be, hogy az $x^2 - y^2 = a$ és az $xy = b$ (a,b állandó) hiperbolaseregek ortogonálisok, azaz az egyik sereg minden görbéje derékszögben metszi a másik sereg valamennyi görbéjét! ($x \neq 0$, $y \neq 0$)

32. Legyen $f(x) > 0$ mindenütt differenciálható függvény. Bizonyitsuk be, hogy az $y_1 = f(x)$ és az $y_2 = f(x)e^{-x^2}$ görbék metszéspontjában érintőik megegyeznek!

33. Igaz-e, hogy az alábbi görbék mindegyikének origóbeli érintője az $y = x$ egyenes?

$y = \sin x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arc\,tg} x$,

$y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ar\,sh} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{ar\,th} x$.

34. Van-e vizszintes érintője, vagy félérintője az alábbi függvények görbéjének?

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sin x}$ b) $f(x) = x\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$

35. Bizonyitsuk be, hogy az $y = ax^2$ parabola tetszőleges pontjában huzott érintője az x tengelyt az érintési pont abszcisszájának felénél metszi!

36. Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét ugy, hogy az $y = a(x-3)^2 + b$ parabola az y tengelyt $\frac{\pi}{4}$ szögben messe, csucspontja pedig az $y = x$ egyenesen legyen!

37. Bizonyitsuk be, hogy az $xy = 1$ hiperbola bármely pontjában huzott érintője, az x tengely és az y tengely mindig azonos területü háromszöget határol!

38. Határozzuk meg az $s = s(t)$ ut-idő függvény által leirt pontmozgás sebességét és gyorsulását az adott t_o időpontban)

a) $s = \ln (t^2+1)$, $t_o = 2$

b) $s = 3^{t^2} + 6t$, $t_o = 0$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

39. Irjuk fel az alábbi függvények differenciálját!

1. $f(x) = \frac{1}{x}$

2. $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

3. $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$

40. a) Irjuk fel az $f(x) = x^3$ függvény értékének Δf megváltozását (ha a független változó $x = x_0$-ról $x = x_0 + h$-ra változik) $\Delta f = A \Delta x + \varepsilon \Delta x$ alakban főrész és elenyésző rész összegeként, és mutassuk meg, hogy $\lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$!

b) Számitsuk ki közelitőleg $f(x) = x^3$ értékét az $x_1 = 0,99$ pontban az $f(1) = 1$ összefüggés felhasználásával!

41. Egy kocka térfogata $V = 1000\ dm^3$.
a) Mennyivel változik közelitően a térfogata, ha éleit 1 cm-rel növeljük?
b) Közelitően hány cm-rel kell az élek hosszát növelni, hogy a térfogata 10 dm^3-rel növekedjék?

! 42. A nehézségi gyorsulás g értékét 2 m hosszu matematikai inga 400 lengésének mért idejéből, 400 T = 1135 sec-ból akarjuk meghatározni. Hány % bizonytalanságot okoz g meghatározásában az, hogy a lengések össz-idejét 0,5 sec pontossággal tudtuk mérni?

43. Egy gömb sugarát 1%-kal növeljük. Közelitőleg hány %-kal nő a térfogat?

44. Hány dm-rel kell növelni egy 1000 liter térfogatu gömb sugarát, hogy térfogata közelitően 10 literrel növekedjék?

3. L'HOSPITAL SZABÁLY

45. Határozzuk meg - amennyiben létezik - az alábbi határértékeket! Állapitsuk meg, hogy melyeknél nem vezet célra, ill. nem célszerü a L'Hospital szabály alkalmazása. (Minden esetben állapitsuk meg a

határozatlan kifejezést tipusát: $(\frac{0}{0})$; $(\frac{\infty}{\infty})$; $(\infty - \infty)$; $(0 . \infty)$; (0^0); (0^∞); (1^∞))

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\arcsin x}$

2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arth} x}{\sin^3 x}$

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} x)}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x}$

7. $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

8. $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$

10. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$ $(a > 0)$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ $(a > 0,\ b > 0)$

12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ $(n > 0$ egész$)$

13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{a^x}$ $(n$ pozitiv egész$)$ $(a > 0$ valós$)$

14. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

15. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(x+a)}{\operatorname{ch}(x-a)}$

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x + b^x}{b^x + x^n}$ $(n$ pozitiv egész, $0 < a < b$ valós$)$

17. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 (e^{3x} + 3^x)$

18. $\lim\limits_{x \to 2} (x-2)\operatorname{ctg}(\pi x)$

19. $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x})$

20. $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x})$

21. $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$

22. $\lim\limits_{x \to 1-0} (\ln x).\ln(1-x)$

23. $\lim\limits_{x \to -0} (1-2^x)^{\sin x}$

24. $\lim\limits_{x \to 1-0} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)\right]^{\ln x}$

25. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x$

26. $\lim\limits_{x \to +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

27. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[x]{x}$

28. $\lim\limits_{x \to +0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

29. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

30. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$

31. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

32. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

33. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\operatorname{th} x)^x$

34. $\lim\limits_{x \to a+0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$

46. Léteznek-e az alábbi határértékek? Alkalmazható-e a L'Hospital szabály?

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \sin x}{x\, e^{\sin x}}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \sin x}{x^a\, e^{\sin x}}$

! 47. a) Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ kétszer differenciálható x_o-ban, akkor:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o - h) - 2 f(x_o) + f(x_o + h)}{h^2} = f''(x_o) .$$

b) Adjunk példát arra, hogy a baloldali határérték létezhet akkor is, ha f nem differenciálható kétszer x_o-ban.

4. TAYLOR-POLINOM

48. Becsüljük meg az alábbi közelités hibáját az adott intervallumban!

1. $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, $\quad 0 \leqq x \leqq 1$

2. $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, $\quad |x| \leqq \frac{1}{2}$

3. $\operatorname{sh} x \approx x + \frac{x^3}{3!}$, $\quad |x| \leqq \frac{1}{3}$

49. Milyen x-ek esetén használható 0,001 pontossággal a $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ közelités?

50. a) Irjuk fel az alábbi függvények adott x_0 helyéhez tartozó, adott fokszámu Taylor polinomját!

1. $y = x^3$, $x_0 = 1$, $T_1(x)$

2. $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $T_1(x)$

b) Számitsuk ki $(0,99)^3$ és $\cos 28^\circ$ közelitő értékét a fenti Taylor polinomok segitségével, és becsüljük meg a közelités hibáját!

51. Irjuk fel az alábbi függvények adott fokszámu Taylor-polinomját az $x = 1$ helyen! Becsüljük meg a Taylor-polinom és a függvény eltérését az adott intervallumban!

a) $y = x^5 + e^{x-1}$, $\quad T_5(x)$, $\quad x \in [0;2]$

b) $y = \sqrt[3]{x}$, $\quad T_2(x)$, $\quad x \in [1;\ 1,25]$

52. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 e^x$ függvény 10. deriváltját az $x = 0$ helyen!

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

53. Számitsuk ki a) e értékét 10^{-5} pontossággal,

b) $\sqrt{5}$ értékét 10^{-4} pontossággal!

54. Bizonyitsuk be, hogy

$\boxed{a)}$ $x - \frac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, ha $x \geqq 0$

b) $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$, ha $x > 0$.

55. Adjunk meg a ch x függvényt az $x_0 = 0$ helyen közelitő Taylor polinomok közül egy olyant, amely a $[0,1]$ intervallumon 10^{-2}-nál kisebb hibával közelit!

5. KÖZÉPÉRTÉTÉTELEK (ROLLE, LAGRANGE, CAUCHY)

56. Alkalmazható-e az alábbi függvényekre az adott intervallumokban a Rolle tétel? Ha igen, határozzuk meg olyan ξ helyet, melyre $f'(\xi) = 0$.

1. $f(x) = x^2 - 4x$, $0 \leqq x \leqq 4$;

2. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in (-1,1) \\ 0, & \text{ha } x = -1 \text{ és } x = 1, \end{cases}$ $-1 \leqq x \leqq 1$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$, $-1 \leqq x \leqq 1$

4. $f(x) = |\operatorname{arctg} x|$, $-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$

$\boxed{5.}$ $f(x) = \ln x\,(1 - \ln x)$, $1 \leqq x \leqq e$

57. Határozzuk meg a deriválás elvégzése nélkül a

$p(x) = (x - 2,1)(x - 2,3)(x - 2,5)(x - 2,7)$

polinom deriváltjának gyökeit 0,1-nél kisebb hibával!

$\boxed{58.}$ Legyen $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$, ahol az $f(x)$ függvény differenciálható $[-1,1]$-ben. Bizonyitsuk be, hogy $\frac{dg}{dx}$ -nek létezik legalább egy zérus helye $(-1,1)$-ben!

59. Alkalmazható-e az alábbi függvényekre a megadott intervallumokban a Lagrange-féle középértéktétel? Ha igen, határozzunk meg olyan ξ értékeket, melyekre $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

1. $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$, $\quad 1 \leqq x \leqq 2$

2. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $\quad -1 \leqq x \leqq 1$

3. $f(x) = |\operatorname{arctg} x|$ $\quad$ a) $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ $\quad$ b) $0 \leqq x \leqq 1$

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} + \frac{1}{(x-1)^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$ $\quad -1 \leqq x \leqq 0$

60. Legyen $f(x)$ differenciálható (a,b)-ben. Igaz-e, hogy van olyan $c \in (a,b)$, amelyre $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$? Ha igaz, bizonyitsuk be, ha nem igaz, mutassunk ellenpéldát!

61. Igazoljuk hogy az $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ függvényekre a $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ intervallumban alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel, és határozzunk meg olyan ξ értéket, amelyre:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\frac{\pi}{3}) - f(\frac{\pi}{6})}{g(\frac{\pi}{3}) - g(\frac{\pi}{6})}.$$

62. Bizonyitsuk be, hogy:

$\boxed{1.}$ $|\sin a - \sin b| \leqq |a - b|$, ahol a,b tetszőleges;

2. $\frac{a-b}{\cos^2 b} < \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b < \frac{a - b}{\cos^2 a}$, ahol $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$;

3. $\operatorname{tg} x - 1 < 2x - \frac{\pi}{2}$, ha $0 < x < \frac{\pi}{4}$;

4. $(y-x)\cos y < \sin y - \sin x < (y-x)\cos x$, ha $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$;

5. $\left|\frac{\cos a - \cos b}{\sin a - \sin b}\right| < 1$ ha $0 < a < b < \frac{\pi}{4}$.

!63. Bizonyitsuk be, hogy az

$f(x) = (x^2 - 1)^{10}$ függvény tizedik deriváltjának 10 különböző gyöke van $(-1,1)$-ben!

64. a) Legyen $p(x)$ n-edfoku polinom. Bizonyitsuk be, hogy ha a $p(x) = 0$ egyenletnek n különböző valós gyöke van, akkor van $p'(x) = 0$ -nak legalább $(n-1)$ különböző valós gyöke!

b) Bizonyitsuk be, hogy ha az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x = 0$ egyenletnek az $x_0 > 0$ szám gyöke, akkor az

$n\, a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1 = 0$ egyenletnek van x_0-nál kisebb pozitiv gyöke!

!65. Legyen $f(x)$ folytonos $[a,b]$ -ben és differenciálható (a,b)-ben; $f(x_k) = 0$, ha $k=1,2,\ldots n$ és $x_k \in (a,b)$, továbbá $f(a) > 0$ és $f'(a) > 0$.
Mutassuk meg, hogy az $f'(x)$ deriváltfüggvénynek legalább n darab nullahelye van (a,b)-ben!

!66. a) Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ folytonos $[a,b]$ -ben és differenciálható $[a,c)$ -ben és $(c,b]$ -ben, akkor $f'(x)$-nek nem lehet megszüntethető szakadása $x = c$ -ben!
b) Lehet-e $f'(x)$-nek más jellegü szakadása?

67. Igazoljuk, hogy ha f differenciálható és f' korlátos az I intervallumban, akkor f egyenletesen folytonos I-n!

6. FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT

68. Határozzuk meg azokat az intervallumokat, amelyekben a következő függvények szigoruan monoton növekedők, illetve csökkenők:

1. $f(x) = x^5 + 2x^3 - 7$

2. $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$

3. $f(x) = x^2 + 2\cos x$

4. $f(x) = x + \sin x$

5. $f(x) = x^2 - \ln x^2$

6. $f(x) = \ln \frac{x^2}{(1+x)^3}$

7. $f(x) = e^{-x^2 \ln x}$

8. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

69. Állapitsuk meg az $f(x) = x^2 + 2\ln(\cos x)$ függvény értelmezési tartományát! Bizonyitsuk be, hogy a függvény szigoruan monoton fogyó a $[0, \frac{\pi}{2})$ intervallumban!

70. Bizonyitsuk be, hogy ha $f(x)$ és $g(x)$ $[a,b]$-ben folytonos, (a,b)-ben differenciálható, és $f'(x) > g'(x)$ $a < x < b$ esetén, akkor $f(b) - f(a) > g(b) - g(a)$.

71. Bizonyitsuk be, hogy ha $f(x)$ $[a,b]$-ben folytonos, (a,b)-ben differenciálható, és létezik olyan m állandó, hogy

$f'(x) > m$ $(a < x < b)$, akkor $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > m$.

72. Bizonyitsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{2}{x} & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény lokálisan növekedő az $x = 0$ pontban, de e pont egyetlen $(-\varepsilon, \varepsilon)$ környezetében sem monoton növekedő! $(\varepsilon > 0)$ Vázoljuk a függvény grafikonját!

73. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékhelyeit!

1. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

2. $f(x) = |x| \ln |x|$

74. Meghatározható-e a k állandó értéke ugy, hogy az $f(x) = x + ke^{-kx}$ függvénynek az $x = 0$ helyen

a) lokális maximuma,
b) lokális minimuma,
$\boxed{\text{c)}}$ inflexiós pontja
legyen?

!(75.) Bizonyitsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

függvénynek az $x = 0$ helyen lokális minimuma van, pedig e pontban az első differenciálhányados nem vált előjelet.

76. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} (\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x}) & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 , \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x| (2 + \cos \frac{1}{x}) & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 . \end{cases}$$

a) Differenciálhatók-e a fenti függvények $x = 0$-ban?
b) Van-e lokális szélsőértékük $x = 0$-ban?

!(77.) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x} & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 . \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az $f(x)$ függvény görbéje az $x_0 = 0$ pontbeli érintője fölött halad, bár nincs az $x_0 = 0$ pontnak olyan környezete, ahol a függvény alulról konvex lenne. Vázoljuk a függvény grafikonját!

78. Határozzuk meg az alábbi függvények maximális, illetve minimális értékét az adott intervallumokban!

$\boxed{1.}$ $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqq x \leqq 1$

(2.) $f(x) = \sin 2x - x$, $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$

79. Határozzuk meg azokat az intervallumokat, ahol az $f(x) = 3x + \cos x$ függvény görbéje alulról konvex, illetve konkáv! Hol van inflexiós pontja e függvénynek?

80. Határozzuk meg az alábbi függvények lineáris aszimptotáinak egyenletét!

1. $f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$

2. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$

3. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x^2}}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$

81. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot és ábrázoljuk vázlatosan az alábbi függvényeket!

1. $f(x) = 2x^2 - x^3$

2. $f(x) = 2x^2 - x^4$

3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x - 1)^2}$

5. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{2}$

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \ln x$

8. $f(x) = e^{-x^2}$

9. $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$

10. $f(x) = x^2 e^{-x}$

11. $f(x) = x^x, \ (x > 0)$

12. $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

13. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$

14. $f(x) = x \ln|x|$

15. $f(x) = x^2 \ln x$

16. $f(x) = (|x|-1)\ln(|x|-1)$

17. $f(x) = |x| - \ln(1+x- |x|)$

18. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

19. $f(x) = \ln |\sin x|$

20. $f(x) = e^x \cos x$

21. $f(x) = x + \dfrac{2x}{x^2-1}$

22. $f(x) = \arccos \dfrac{1}{1 - x}$

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

82. Határozzuk meg az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat legnagyobb tagját!

!83. Határozzuk meg az alábbi görbék lineáris aszimptotáit

$x \to \pm\infty$ esetén (a konstans)!

a) $x^4 - y^4 = a^2$

b) $x^3 + y^3 = a^3$

84. Vizsgáljuk meg és ábrázoljuk vázlatosan az alábbi görbéket!

a) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

b) $x(y^2 + 1) = 1$

85. 1. Igaz-e az alábbi állitás:
Ha $f(x)$ folytonos $[a,b]$-ban és $f(a)\,f(b) < 0$, akkor pontosan egy olyan $\xi \in (a,b)$ van, amelyre $f(\xi) = 0$. Ha nem igaz, akkor fogalmazzuk át a tételt ugy, hogy igaz legyen!

2. Bizonyitsuk be, hogy az alábbi egyenletnek pontosan egy valós gyöke van:

$$x^5 + 2x^3 - 4 = 0 .$$

86. Legyen

$$f(x) = (x + 1)\sqrt[3]{x} .$$

a) Differenciálható-e $f(x)$ a $[-1,+1]$ intervallumban?
b) Van-e a függvénynek legnagyobb értéke $[-1,1]$-ben?
c) Invertálható-e $f(x)$ az adott intervallumban?

87. Bizonyitsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket!

1. $e^x > 1 + x$, ha $x \neq 0$

2. $\ln x < x - 1$ ha $x \neq 1$ és $x > 0$

3. $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, $(0 < b < a)$

4. $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x$, ha $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

88. Bizonyitsuk be, hogy ha $f(x)$ konvex $[a,b]$-ben, akkor tetszőleges $x_1, x_2 \in [a,b]$ esetén $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geqq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

89. Bizonyitsuk be, hogy

a) $e^x + e^y > 2e^{\frac{x+y}{2}}$, ha $x \neq y$;

b) $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x+y}{2}$, ha $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$.

! 90. Legyen f folytonos, ha $x \geqq 0$ és $f(0) = 0$. Létezzék $f'(x)$ és legyen f' monoton növő, ha $x > 0$. Mutassuk meg, hogy az $\frac{f(x)}{x}$ függvény monoton növő $x > 0$ esetén!

91. Bizonyitsuk be, hogy $\frac{1}{2^{p-1}} \leqq x^p + (1-x)^p \leqq 1$, ha $p > 1$ rögzitett valós szám és $0 \leqq x \leqq 1$.

92. Van-e lokális szélsőértéke, illetve inflexiós pontja az $x = 0$ pontban az alábbi függvényeknek?

a) $f(x) = x^4 e^{2x}$

b) $g(x) = x^3 e^{2x}$

c) $h(x) = x^n e^{-x^2}$ $(n > 0$ egész$)$

! 93. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

Bizonyitsuk be, hogy a fenti függvények az $x = 0$ helyen akárhányszor differenciálhatók és $f(x)$-nek lokális minimuma van, $g(x)$-nek pedig nincs ebben a pontban lokális szélsőértéke, bár

$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1,2,3,\ldots)$.

7. SZÖVEGES SZÉLSŐÉRTÉKFELADATOK

94. Osszuk fel 12-t két részre ugy, hogy a részek
a) szorzata maximális legyen,
b) négyzetösszege minimális legyen!

95. Határozzuk meg azt a legnagyobb térfogatu hengert, amelynél a tengelymetszet kerülete 10 egység!

96. Egy folyó partján egy 3200 m^2 területü, téglalap alaku telket akarunk elkeriteni a lehető legrövidebb keritéssel. A folyó partján nem állitunk keritést. Hogyan válasszuk a téglalap oldalait?

97. V térfogatu, négyzetalapu felül nyitott tartályt akarunk készitení a legkevesebb anyagból. Mekkorák legyenek az oldalélek?

98. Adott F felszinü, zárt egyenes körhengerek közül melyiknek legnagyobb a térfogata?

99. Egy r sugaru körbe irható derékszögü négyszögek közül melyiknek legnagyobb a területe?

100. Adott R sugaru körlemezből mekkora nyilásszögü körcikket kell kivágnunk, hogy maximális térfogatu tölcsért kapjunk?

101. Egy tó partjától 300 m-re tartózkodunk egy csónakban. A parton, a csónakból a partra bocsátott merőleges talppontjától 1000 m-re van az állomás. Elérhetjük-e a 21 perc mulva induló vonatot, ha a vizben a csónakkal percenként 48 m-t, a parton pedig percenként 60 m-t tudunk megtenni?

8. EGYENLETEK KÖZELITŐ MEGOLDÁSA

102. Igazoljuk, hogy alkalmazható a Newton féle érintőmódszer az $x^x = 10$ egyenlet gyökének meghatározására! Határozzuk meg a gyököt közelitőleg!

103. a) Bizonyitsuk be, hogy az $x^5 + 2x^3 + x - 1 = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van és alkalmazható a Newton módszer a gyök közelitő meghatározására! Honnan célszerü az eljárást inditani?

b) Határozzuk meg a gyököt közelitőleg!

104. Határozzuk meg az $x = \operatorname{tg} x$ egyenlet legkisebb pozitiv gyökét közelitőleg! Alkalmazható-e az iteráció?

105. Határozzuk meg az alábbi egyenletek valós gyökeit közelitőleg!

1. $4x^4 + 2x^3 - 3x - 5 = 0$

2. $3x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$

3. $10x = e^x$

4. $2x = \cos x$

5. $\sin x = \ln x$

9. PARAMÉTERESEN ÉS POLÁRKOORDINÁTÁS ALAKBAN ADOTT GÖRBÉK ÉS DERIVÁLTJAIK

106. Irjuk fel az $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$ körvonal paraméteres egyenletrendszerét, paraméterként a futó pontot a kör középpontjával összekötő szakasz t irányszögét használva.

107. Küszöböljük ki a t paramétert az alábbi egyenletrendszerekből, és állapitsuk meg, milyen görbét ~~határoznak meg~~ az egyes egyenletrendszerek!

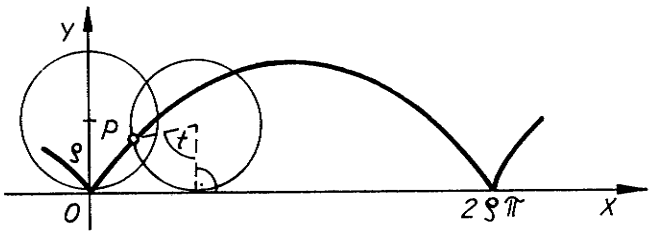
1. $x = a \cos t$, ahol $a, b > 0$ constans,
$y = b \sin t$ $\quad 0 \leqq t < 2\pi$

2. $x = a \operatorname{ch} t$, ahol $a, b > 0$ constans
$y = b \operatorname{sh} t$ $\quad -\infty < t < +\infty$

3. $x = t^2 - 1$
$y = t^2$, $-\infty < t < +\infty$

4. $x = \cos^3 t$
$y = \sin^3 t$, $0 \leqq t < 2\pi$

108. a) Irjuk fel a ciklist is, azaz annak a görbének a paraméteres egyenletrendszerét, amelyet egy egyenes mentén csuszásmentesen gördülő körvonal egy kiszemelt pontja leir. Jelöljük a kör sugarát ϱ-val, az egyenest, amely mentén gördül, válasszuk az x tengyelnek, s a kiindulóhelyzetben a kör az origóban érintse az x tengelyt. A kör origóbeli P pontjának pályáját irjuk le. A t paraméter választása az ábrán látható.



37. ábra

b) Számitsuk ki a ciklois P(x,y) pontbeli érintőjének iránytangensét! Adjunk módszert az érintő megszerkesztésére!

109. Irjuk fel az $\left.\begin{array}{l} x = \sin t - t\cos t \\ y = \cos t + t\sin t \end{array}\right\}$ egyenletrendszerrel adott

görbe $t = \frac{\pi}{4}$ paraméterü pontjában az érintő és a normális egyenletét!

110. a) Igazoljuk, hogy bármely $y = f(x)$ alakban megadott görbe átirható paraméteres alakba!
b) Igaz-e, hogy bármely paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbe átirható $y = f(x)$ alakba?

$\boxed{111.}$ Vizsgáljuk meg az $\left.\begin{aligned} x &= t^3 + 2t^2 + 3 \\ y &= t^3 + 3t + 5 \end{aligned}\right\}$ alakban megadott görbét

a $t = -2$ paraméterü pont környezetében!

Megjegyzés a 112-121. feladatokhoz: Az alábbiakban a polárkoordináta-rendszert és a derékszögü koordináta-rendszert ugy helyezzük egymásra, hogy az origó egybeessék a pólussal, a polártengely pedig az x tengely pozitiv felével.

112. Irjuk fel az alábbi görbék polárkoordinátás egyenletét!

1. $x = a$ egyenes
2. $y = b$ egyenes
3. $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, $(a > 0$ konstans$)$

113. Adjuk meg az alábbi görbék egyenletét derékszögü koordináta-rendszerben, és állapitsuk meg milyen görbéről van szó!

1. $r = \dfrac{4}{\cos\varphi}$

2. $r = 6\cos\varphi$

! 3. $r = \dfrac{4}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$

! $\boxed{4.}$ $r = \dfrac{1}{\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}$

Határozzuk meg a görbe egy paraméteres alakját!

114. a) Irjuk fel a kardoid polárkoordinátás alakját! E görbe ugy keletkezik, hogy egy kör érintőire a kör kerületének egy rögzitett pontjából merőlegeseket bocsátunk, a kardioid e merőlegesek talppontjainak mértani helye. Jelöljük a kör sugarát ϱ-val, a kört helyezzük ugy el, hogy átmérője a polártengelyen, a rögzitett pont a pólusban legyen.

$\boxed{b)}$ Határozzuk meg a kardioid azon paraméteres alakját, amikor paraméternek a polárszöget választjuk, valamint a görbe azon érintőinek egyenletét, amelyek párhuzamosak a polártengellyel!

!115. Milyen görbét határoznak meg az alábbi polárkoordinátás alakban adott függvények? Irjuk fel a görbék paraméteres egyenletrendszerét paraméternek a polárszöget választva, valamint a görbék adott pontbeli érintőjének egyenletét!

1. $r = 3\varphi$, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$

2. $r = e^{3\varphi}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$

3. $r = \frac{1}{\varphi}$, $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$

4. $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$. $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$

5. $r = 2\cos\varphi$, $\varphi_0 = 0$

! 116. Bizonyitsuk be az alábbi állitást:
Legyen egy g görbe polárkoordinátás egyenlete $r = r(\varphi)$. Ha az $r(\varphi)$ függvény differenciálható és $r' \neq 0$, akkor g egy P pontjához tartozó r rádiuszvektor és a P-beli érintő által bezárt ω szögre fennáll: $\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'}$.

! 117. Igazoljuk, hogy az $r = a\,e^{k\varphi}$ ($a > 0$, $k \neq 0$ konstansok) logaritmikus spirális bármely P pontjához tartozó rádiuszvektor és érintő által bezárt szög állandó! Ábrázoljuk a spirálist!

! 118. Igazoljuk, hogy az $r = \frac{a}{\varphi}$ ($a > 0$ konstans) hiperbolikus spirális aszimptotája az $y = a$ egyenes!

119. Bizonyitsuk be, hogy az $r = 2\cos\varphi$ és az $r = 2\sin\varphi$ görbék derékszögben metszik egymást!

! 120. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát! Milyen görbéket határoznak meg a függvények?

1. $r = \cos\varphi$
2. $r = \sqrt{\cos\varphi}$
3. $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$
4. $r = \sqrt{\cos 4\varphi}$
5. $r = \sqrt{\cos n\varphi}$ ($n > 0$ egész)

! 121. A lemniszkáta azon pontok mértani helye, amelyeknek 2 adott ponttól való távolságainak szorzata egyenlő a 2 adott pont féltávolságának négyzetével.
a) Irjuk fel a lemniszkáta egyenletét polárkoordinátás alakban, a 2 pontot az x tengelyen az origóra szimmetrikusan helyezve el!
b) Vázoljuk fel a görbét!
c) Irjuk fel a görbe egyenletét derékszögü koordináták segitségével!

122. Differenciálhatók-e az alábbi függvények az $x = 1$ pontban?

a)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

b)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{e^{x-1} - 1}, & \text{ha } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

!123. a) Bizonyitsuk be, hogy ha f differenciálható az $[a, +\infty)$ intervallumon, és léteznek a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ véges határértékek, akkor $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

b) A $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ feltételből következik-e, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ véges?

124. Határozzuk meg a p és q paraméterek értékét ugy, hogy az $y = \dfrac{m^2}{|x|}$ $(|x| > c)$ görbedarabot kiegészitve az $y = p + q\,x^2$ $(|x| \leq c)$ parabolaivvel sima (azaz folytonos és minden pontban érintővel rendelkező) görbét kapjunk!

125. Mutassuk meg, hogy az $y = y(x)$ függvény, amelyet az

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t + t \\ y &= 5t^2 + 4t|t| \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszer definiál, differenciálható $x = 0$

esetén, azonban a derivált nem számitható a $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \dfrac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)}$ formulával!

!126. $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. Határozzuk meg $y'(x)$ értékét az $(1, 0)$ pontban!

!127. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ $(x > 0)$ függvény lineáris aszimptotáját!

!128. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot, és ábrázoljuk vázlatosan az alábbi függvényeket!

1. $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ 2. $f(x) = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

129. Legyen a $\varphi(x)$ függvény n-szer differenciálható $x = a$ -ban. Határozzuk meg

$$\left[\frac{d^n(x-a)^n \varphi(x)}{dx^n}\right]_{x=a}$$ értékét!

!130. Bizonyitsuk be, hogy:

a) $\left[x^{20} \cos x\right]^{(40)}_{x=o} = \dfrac{40!}{20!}$;

b) $(x^n e^{-x})^{(n)} = e^{-x} \sum\limits_{k=o}^{n} (-1)^k \dfrac{(n!)^2 x^k}{(k!)^2 (n-k)!}$;

c) $\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)} = n! \sum\limits_{k=o}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k}$.

131. Bizonyitsuk be, hogy a $p(x) = \prod\limits_{k=o}^{10} (x-k)$ polinom deriváltjára

$p'(n) = (-1)^n n!\,(10-n)!$, $(n=0,1,2,\dots,10)$.

!132. Legyen $p_n(x) = x^n - x^{n-1} - 1$. $(n=2,3,\dots)$.

a) Bizonyitsuk be, hogy a $p_n(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke van az $[1,2]$ intervallumban: ξ_n (tetszőleges $n = 2,3,\dots$ esetén)!

b) Igazoljuk, hogy a ξ_n gyökök monoton fogyó sorozatot alkotnak!

133. Milyen c valós szám esetén van az alábbi egyenleteknek egy, illetve két megoldása?

a) $x \ln x = c$

b) $x e^{-x} = c$

134. Legyen f értelmezési tartománya $(-\infty, +\infty)$, és tegyük fel, hogy $|f(x) - f(y)| \leqq (x - y)^2$ $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$ esetén. Bizonyitsuk be, hogy f = állandó!

135. Bizonyitsuk be, hogy $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign} x$ bármely $x \neq 0$ valós szám esetén!

136. Legyen $f(x) = e^{-x|x|}$.

a) Bizonyitsuk be, hogy f invertálható $(-\infty, +\infty)$-ben, és adjuk meg f^{-1}-et!

b) Hol folytonos és hol differenciálható f^{-1}?

137. Bizonyitsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $e^x < 1 + (e-1)x$, ha $0 < x < 1$

b) $\cos x > 1 - \frac{2}{\pi} x$, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$

c) $\left|\frac{4}{\pi} x\right| \leqq |\operatorname{arctg} x| \leqq |x|$, ha $-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$

d) $x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x$, ha $x > 0$

e) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$

f) $1 - \frac{x^2}{2} \leqq \cos x \leqq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

g) $py^{p-1}(x-y) \leqq x^p - y^p \leqq px^{p-1}(x-y)$, ha $0 < y < x$ és $p > 1$

138. Hol konvex az $f(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ függvény a $(0, +\infty)$ intervallumon?

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

!139. a) Bizonyitsuk be, hogy ha az f függvény nem korlátos az (a,b) intervallumon, akkor f' sem lehet korlátos (a,b)-n!

b) Igaz-e a tétel megforditása?

!140. Bizonyitsuk be, hogy ha f kétszer differenciálható, és $f''(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ esetén, akkor $\forall \xi \in (a,b)$-hez található olyan $c,d \in (a,b)$, hogy $f'(\xi) = \dfrac{f(c) - f(d)}{c - d}$.

!141. Legyen az f és a g függvény legalább 3-szor differenciálható a $[2,+\infty)$ intervallumban, $f^{(k)}(2) = g^{(k)}(2)$, ha $k=0,1,2$, és $f^{(3)}(x) > g^{(3)}(x)$, ha $x > 2$. Igazoljuk, hogy $f(x) > g(x)$, ha $x > 2$!

III. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

1. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

1. Igazoljuk, hogy a $F(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$ függvény az $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ függvény egyik primitív függvénye, a $F(x) + c$ függvénysereg pedig $f(x)$ határozatlan integrálja a $(-|a|, |a|)$ intervallumon.

2. Keressük meg az $f(x) = 3x^2$ függvény azon primitív függvényét, amelynek görbéje illeszkedik a $P(2, 6)$ pontra.

3. Irjuk fel az $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ függvény azon integrálgörbéjének egyenletét, amely átmegy a $P(1,1)$ ponton.

4. Adjuk meg azon görbesereg $y = F(x) + C$ alaku egyenletét, amelynek görbéihez vont érintő iránytangense tetszőleges x helyen: $y' = \operatorname{ctg} x$.

5. Irjuk fel azon görbe $y = F(x) + c_0$ alaku egyenletét, melynek érintője az x helyen $y' = \frac{4}{\sin^2 2x}$ iránytangensü, s amely átmegy a $P(\frac{\pi}{4}, 1)$ ponton.

A következő feladatokban adjuk meg a primitív függvényeket és azok értelmezési tartományát is. (6-132)

1.1. Alapintegrálokra visszavezethető feladatok

6. $\int \frac{x^2 - 7x + 8}{x^2} dx$

7. $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$

8. $\int \sqrt{x \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x}} \, dx$

9. $\int \frac{x^6}{x^2 + 1} dx$

10. $\int \frac{-2}{5x^2 + 5}\,dx$

11. $\int \left(\frac{x^2 - 1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} dx$

12. $\int \frac{x + 1}{x - 1}\,dx$

13. $\int \frac{2x + 3}{x - 2}\,dx$

14. $\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

15. $\int (\cos 4x - \sin\frac{x}{5})\,dx$

16. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x}\right) dx$

17. $\int \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}\,dx$

18. $\int \frac{1}{\sin^2 x . \cos^2 x}\,dx$

19. $\int (3\mathrm{sh}\, x - 2\mathrm{ch}\, 3x)\,dx$

20. $\int \mathrm{th}^2 x\,dx$

21. $\int \frac{1}{e^{3-x}}\,dx$

22. $\int \frac{e^{2x} + 1}{e^{3x}}\,dx$

23. $\int \frac{1 - e^x}{1 + e^{\frac{x}{2}}}\,dx$

24. $\int e^{3x}\,\mathrm{ch}\, 5x\,dx$

25. $\int e^x\,\mathrm{sh}\, x\,dx$

1.2. Trigonometrikus szorzat integrálok

26. $\int \cos 5x \,.\, \cos 7x\,dx$

27. $\int \sin 2x . \cos 5x\,dx$

28. $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$

29. $\int \sin^2(1-2x)\,dx$

30. $\int \sin^4 x\,dx$

1.3. $\int [f(x)]^n . f'(x)\,dx$ alaku integrálok

31. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - 5x}}\,dx$

32. $\int \frac{2x - 5}{\sqrt[3]{(x^2 - 5x + 10)^7}}\,dx$

$\boxed{33.}$ $\int \frac{5x^2}{5-4x^3}\,dx$

$\boxed{34.}$ $\int \cos^3 x\,dx$

35. $\int \sin^3 x.\ \cos x\,dx$

36. $\int \sin 3x\ .\ \sqrt{1-\cos 3x}\,dx$

37. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

38. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$

39. $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}\,dx$

40. $\int \sqrt{\frac{\operatorname{ar\,sh} x}{1+x^2}}\,dx$

41. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt[3]{\operatorname{sh} x}}\,dx$

42. $\int e^x.\ \sqrt{1+e^x}\,dx$

43. $\int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}\,dx$

44. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$

1.4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ alaku integrálok

45. $\int \operatorname{tg}x\,dx$

46. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

47. $\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}\,dx$

48. $\int \frac{x-3}{x^2-6x+27}\,dx$

49. $\int \frac{x}{1-2x}\,dx$

50. $\int \frac{9x^2}{4x^3+5}\,dx$

51. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$

$\boxed{52.}$ $\int \frac{e^x(\operatorname{ch}2x+\operatorname{sh}2x)}{\operatorname{ch}3x}\,dx$

1.5. $\int f(\varphi(x))\ .\ \varphi'(x)\,dx$ alaku integrálok

53. $\int \frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}\,dx$

54. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

55. $\int x.\ \sin x^2\ dx$

56. $\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$

57. $\int \frac{1}{\cos^2 x.\ \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\ dx$

58. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\ dx$

1.6. Teljes négyzetté kiegészitve alapintegrálokra visszavezethető feladatok

59. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 6}$

60. $\int \frac{dx}{2x^2-12x + 23}$

61. $\int \frac{dx}{x^2-6x + 1}$

62. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x + 40}}$

63. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 2x - x^2}}$

64. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x}}$

1.7. Parciális integrálás

65. $\int x \sin 2x\ dx$

66. $\int x \cos^2 x\ dx$

67. $\int (2x-x^2)\ \operatorname{sh}x\ dx$

68. $\int (3x - 5)\ e^{2x+3}\ dx$

69. $\int \ln(x^2 + 1)\ dx$

70. $\int \ln^2 x\ dx$

71. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\ dx$

72. $\int x^5 .\ e^{x^2}\ dx$

73. $\int \frac{x\ e^x}{(x+1)^2}\ dx$

74. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\ dx$

75. $\int \arcsin x\ dx$

76. $\int x \operatorname{arc\,tg} x\ dx$

77. $\int \operatorname{arch} x\ dx$

78. $\int e^{3x}.\cos 5x\ dx$

79. $\int \cos x . \operatorname{sh} x \, dx$

80. $\int \frac{\sin x}{e^{2x}} dx$

1.8. Racionális törtfüggvények integrálása

81. $\int \frac{3x - 1}{x^2 - 2x - 3} dx$

82. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 16}$

83. $\int \frac{x - 3}{x^3 - x} dx$

84. $\int \frac{3x - 5}{x^2 + 2x + 1} dx$

85. $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$

86. $\int \frac{2x^5 - 3x^2}{1 + 3x^3 - x^6} dx$

87. $\int \frac{2x^2 - 5}{(x-2)(x-1)(x+1)} dx$

88. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$

89. $\int \frac{x - 5}{(x+1)(x-2)^2} dx$

90. $\int \frac{x^2 \, dx}{1 - x^4}$

1.9. Integrálás helyettesitéssel

$\int R(x^{\frac{a}{b}}, \ldots, x^{\frac{k}{l}}) \, dx$ alaku irracionális integrálok racionalizálása:

91. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 + x}}$

92. $\int \frac{dx}{x(1 - \sqrt[3]{x})}$

93. $\int x . \sqrt[4]{x + 3} \, dx$

94. $\int (x-3) \sqrt[5]{x + 1} \, dx$

95. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$

96. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt{x}} dx$

INTEGRÁLSZÁMITÁS

Racionális törtfüggvények integráljára vezető helyettesitések:

97. $\int \frac{e^{2x}}{e^{x}+1}\,dx$

98. $\int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx$

99. $\int \frac{e^{x}\sqrt{e^{x}-1}}{e^{x+3}}\,dx$

100. $\int \frac{e^{x}}{\operatorname{sh}^{2} x}\,dx$

101. $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

102. $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

103. $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

104. $\int \frac{1}{2-\cos x}\,dx$

105. $\int \frac{1}{\sin x+\cos x+1}\,dx$

106. $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx$

107. $\int \frac{1}{\sin x+\operatorname{tg} x}\,dx$

108. $\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\,dx$

109. $\int \frac{1}{1-\operatorname{tg}^{2} x}\,dx$

110. $\int \frac{1}{\cos^{3} x}\,dx$

$R\left(\sqrt{ax^{2}+bx+c}\right)$ integrálja:

111. $\int \frac{x^{2}}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx$

112. $\int \frac{\sqrt{x^{2}-1}}{x^{4}}\,dx$

113. $\int \sqrt{x^{2}+6x+10}\,dx$

114. $\int \sqrt{1+2x-x^{2}}\,dx$

115. $\int \sqrt{2x^{2}+8x+5}\,dx$

116. $\int \sqrt{5x^{2}-7}\,dx$

117. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^{2}+4x+2}}\,dx$

118. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^{2}-2x+5}}\,dx$

1.10. Vegyes feladatok

119. $\int (x - 3)\mathrm{tg}\,(x^2 - 6x + 7)\,dx$

120. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

121. $\int \sin \sqrt{x}\,dx$

122. $\int \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx$

123. $\int \sin(2x-1)\,\mathrm{ch}(3x + 2)\,dx$

124. $\int \frac{2x + 3}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

125. $\int \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2 dx$

126. $\int \frac{3x - 5}{2x^2 - 12x + 23}\,dx$

127. $\int \arccos \frac{1}{x}\,dx$

128. $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\,dx$

129. $\int \frac{1}{\sin^2(3x - 2)}\,dx$

130. $\int \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}\,dx$

131. $\int \frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}\,dx$

132. $\int \frac{x e^x}{\sqrt{1 + e^x}}\,dx$

A primitiv függvények számitással történő meghatározásainak gyakorlásával párhuzamosan célszerü megismerkedni a Bronstejn-Szemengyajev: Matematikai Zsebkönyv c. munkájában található integráltáblázat használatával is (426. old.-474. old.). Az alábbiakban megadjuk a feladattár néhány feladatának számát, melyeknél ajánljuk, hogy az integráltáblázat segitségével is keressük meg a primitiv függvényt: III/1.: 26, 29, 59, 63, 67, 77, 78, 91, 92, 98, 103, 106, 108, 111, 117.

Állapitsuk meg az alábbi végtelen sorok összegét határozott integrál segitségével:

133. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right]$$

134. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}\right]$$

135. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{2}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]$$

136. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right]$$

137. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}} \qquad (m>0)$$

138. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+\frac{k}{n})}{n}$$

Számitsuk ki az alábbi határozott integrálok értékét az integrálási szakasz megfelelő felosztásával integrál-közelitő összeg határértékeként:

139. $\int_0^a x^k\,dx$ $(a \neq 0,\ k \neq -1,$ egyenletes szakaszbeosztással)

! 140. $\int_a^b x^k\,dx$ $(a,b>0,\ k\neq -1;$ mértani sorozat szerint változó osztópontok alkalmazásával)

141. $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$ (az előző feladat speciális esete $k = -1$-re)

!142. $\int_0^1 e^x\,dx$ (egyenletes felosztással)

!143. $\int_a^b \sin x\,dx$ (egyenletes felosztással)

Állapitsuk meg, hogy integrálhatók-e a következő függvények a megadott intervallumon:

144. $f(x) = \dfrac{\sin \frac{\pi}{x}}{\left|\sin \frac{\pi}{x}\right|}$; $x \in [-a^2, a^2]$

145. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sg}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$; $x \in [0,1]$

146. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ x, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$; $x \in [0,1]$

147. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$; $x \in [0, a^2]$

148. $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x^2}\right)$; $x \in [-1,1]$.

149. a) Legyen $f(x) + g(x)$ integrálható $[a,b]$-ben. Következik-e ebből $f(x)$ és $g(x)$ $[a,b]$-beli integrálhatósága?

b) Legyen $f(x) \cdot g(x)$ integrálható $[a,b]$-ben. Következik-e ebből, hogy $f(x)$ és $g(x)$ is integrálható $[a,b]$-ben?

c) Legyen $|f(x)|$ integrálható $[a,b]$-ben. Következik-e ebből, hogy $f(x)$ integrálható $[a,b]$-ben?

!150. a) Igazoljuk, hogy ha $\int_a^b f(x)\,dx$ létezik, akkor van olyan $\xi \in (a,b)$, ahol f folytonos.

b) Igazoljuk, hogy ha $\int_a^b f(x)\,dx$ létezik, akkor $[a,b]$ minden belső részintervallumában van f-nek folytonossági helye.

c) Igazoljuk, hogy ha $\int_a^b f(x)\,dx$ létezik, $f(x) \geqslant 0$, és $[a,b]$-n ill. egy $\xi \in (a,b)$ folytonossági helyen $f(\xi) > 0$, akkor $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

d) Legyen $f(x)$ integrálható $[a,b]$-ben. Bizonyitsuk be, hogy az $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x)$ minden $[a,b]$-beli folytonossági pontjában $f(x) = 0$.

151. Legyen $f(x)$ korlátos és monoton függvény a $[0,1]$ intervallumban. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

(A $\varphi(x) = 0(\psi(x))$, $x \in X$ (nagyordó) kifejezés azt jelöli, hogy létezik olyan A állandó, melyre $|\varphi(x)| \leqslant A\,|\psi(x)|$ minden $x \in X$-re.)

Döntsük el, léteznek-e a következő integrálok; indokoljuk meg válaszunkat:

152. a) $\int_0^2 f(x)\,dx$; b) $\int_0^2 |f(x)|\,dx$; c) $\int_0^2 f^2(x)\,dx$;

ahol $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -1, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$

153. $\int_{-2}^{2} (\operatorname{sg} x)\, x^2 \cos x\, dx$

154. $\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{|x|}\, e^{-x^2}\, dx$

155. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{1}{x}\, dx$

156. $\int_{-1}^{0} \frac{x(e^x + 1)}{e^{2x} - 1}\, dx$

157. $\int_0^1 f(x)\,dx$, ahol $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = \frac{1}{m} \\ x & \text{egyébként } (m > 0, \text{ egész}). \end{cases}$

Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

158. $1 - \frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2}\, dx < 1$

159. $$0 < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x + 100}\, dx \leqslant 1$$

160. $$\frac{4\pi}{3} \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \frac{1}{2}\cos x} \leqslant 4\pi$$

161. $$0 < \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{1 + x^6}}\, dx < \frac{1}{8}$$

162. $$\frac{1}{3} < \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}}\, dx < \frac{1}{2}\ln 2$$

163. $$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{n+1} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x\, dx \qquad (n=1,2,\ldots,)$$

164. $$\left| \int_0^1 \frac{\cos cx}{x + 1}\, dx \right| \leqslant \ln 2 \qquad (c \text{ tetszőleges valós szám})$$

165. $$\left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{1}{x}\, dx \right| < \pi$$

166. Adjunk alsó és felső becslést $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-a^2 \operatorname{tg} x}\, dx$ értékére.

167. Vizsgáljuk meg, hogy $f(x) = x^x$ integrálható-e $[0,1]$-ben; ha igen, adjunk alsó és felső becslést az integrál értékére.

168. Bizonyitsuk be, hogy ha $f(x)$ differenciálható, konkáv függvény $[a,b]$-ben, akkor

$$(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Számitsuk ki az alábbi integrálok értékét:

169. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x\,e^{-x}\,dx$

170. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$

171. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$

172. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,dx$

173. $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\,dx$

174. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}$

175. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, ahol $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & \text{ha } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

176. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, ahol $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq t \\ t\,\dfrac{1-x}{1-t}, & \text{ha } t < x \leq 1 \end{cases}$

177. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{1-2|x|+x^2}\,dx$

178. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

179. $\displaystyle\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

180. $\displaystyle\int_1^3 x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$

181. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$

182. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx$

183. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}\, dx$

184. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x\,(1-x)}}\, dx$

Alkalmazható-e a Newton-Leibniz formula az alábbi integrálok kiszámitásánál:

185. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}\right) dx$

186. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}\right) dx$

Magyarázzuk meg, hogy az alábbi integrálok esetében az x változó megadott helyettesitése miért vezet hamis eredményre:

187. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}\,, \quad x = \frac{1}{t}$

188. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}\,, \quad \operatorname{tg} x = t$

189. $\displaystyle\int_0^{3} x\sqrt[3]{1 - x^2}\, dx\,, \quad x = \sin t$

190. Bizonyitsuk be, hogy ha $f(x)$ folytonos $[a,b]$-ben, akkor

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) \int_0^1 f(a+(b-a)\, x)\, dx\,.$$

!191. Igazoljuk, hogy ha $a > 0$, akkor

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x\,f(x)\,dx\,.$$

Rekurziós formulák segitségével számitsuk ki a következő, n-től mint paramétertől függő integrálokat.

($n > 0$ egész)

!192. $I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx \qquad (m > 0)$

!193. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx$

!194. $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$

Számitsuk ki az alábbi határozott integrálokat, amelyekben az integrandus korlátos, szakadásos függvény:

195. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)\,dx$

196. $\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x)\,dx$

197. $\int_0^2 \left[e^x\right] dx$

198. $\int_1^{n+1} \ln[x]\,dx \quad (n > 0,\ \text{egész})$

3. VÁLTOZÓ FELSŐ HATÁRÚ HATÁROZOTT INTEGRÁL (INTEGRÁLFÜGGVÉNY)

Határozzuk meg az alábbi deriváltakat:

199. a) $\frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 \, dx$ (a áll.)

b) $\frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 \, dx$ (b áll.)

c) $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 \, dx$ (a és b áll.)

200. $\frac{d}{dx} \int_x^{2x} \ln (1 + t) \, dt \qquad (x > 0)$

201. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^4}}$

202. $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos (\pi t^2) \, dt$

$\boxed{203.}$ Mutassuk meg, hogy ha u nem függ v-től, akkor

$$\frac{d}{du} \int_u^v \sin x^2 \, dx + \frac{d}{dv} \int_u^v \sin x^2 \, dx = \int_{u^2}^{v^2} \cos x \, dx .$$

204. Igazoljuk, hogy $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin 2t}{t}\, dt$ kielégiti az $x \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} =$

$= 8\, x \cos 2x^2$ differenciálegyenletet.

205. Milyen folytonos függvényekre áll fenn az alábbi egyenlőség ?

$$\int_1^x y(x)\, dx = 2y - 1 .$$

206. Legyen $f(x) > 0$, folytonos függvény. Bizonyitsuk be, hogy $x \geqslant 0$ esetén

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t\, f(t)\, dt}{\int_0^x f(t)\, dt}$$ növekvő függvény.

207. a) Hogyan kell "a" értékét megválasztani, hogy

$$f(x) = \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$$

folytonos függvény legyen?

b) Differenciálható-e a $g(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ függvény?

208. Vizsgáljuk meg, hogy az

$f(x) = \int_0^x \frac{t^2 + t - 2}{t^2 + 1}\, dt$ függvénynek létezik-e a $[0, \sqrt{3}]$ intervallumban helyi szélsőértéke.
Amennyiben igen, határozzuk meg.

209. Legyen $f(x) = \int_0^x t^2 \arcsin t \, dt$.

a) Milyen pozitiv x-ekre differenciálható f(x)?

b) Irjuk fel a függvény $x_0 = \frac{1}{2}$ pontbeli érintőegyenesének egyenletét.

c) Határozzuk meg $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x t^2 \arcsin t \, dt}{x}$ értékét.

210. Legyen $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -1 \leq x < 1 \\ 2x^2, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

Adjuk meg a $[-1,2]$ intervallumhoz tartozó integrálfüggvényt.

211. Legyen $f(x) = \begin{cases} (1-x)^2, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{ha } 1 \leq x < 2 \\ x-1, & \text{ha } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Adjuk meg a $[0,3]$ intervallumhoz tartozó integrálfüggvényt. Állapitsuk meg, hogy ez a $[0,3]$ mely pontjaiban folytonos, ill. differenciálható.

Számitsuk ki az alábbi határértékeket:

212. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \cos t^2 \, dt}{x}$

213. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \ln(1+t) \, dt}{x^2}$

$\boxed{214.}$ $$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}$$

215. $$\lim_{x\to +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,dt}$$

4. IMPROPRIUS INTEGRÁL

Számitsuk ki az alábbi integrálok értékét, amennyiben konvergensek:

$\boxed{216.}$ $$\int_0^\infty e^{-4x}\,dx$$

217. $$\int_0^\infty e^{6x}\,dx$$

218. $$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

219. $$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2x-1)^2}\,dx$$

220. $$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

221. $$\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx$$

222. $$\int_0^\infty x\,e^{-x^2}\,dx$$

223. $$\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$$

224. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$

225. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$

226. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+3x^2}\,dx$

227. $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}\,dx$

228. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

229. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$

Számitsuk ki az alábbi integrálok értékét, amennyiben konvergensek:

230. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

231. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$

232. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

233. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

234. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

235. $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

236. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

237. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$

238. $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$

239. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$

240. $\int_0^1 \ln^n x\,dx$

241. $\int_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{e^{bx}}\,dx$

!242. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

Vizsgáljuk meg a következő integrálok konvergenciáját:

243. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

244. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}}\,dx$

245. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$

246. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$

247. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x + \sqrt{1+x^2})^m}$; $(m > 1)$

248. $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(-x+b)}}$; $(b > a)$

249. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x}\,dx$

250. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$

!251. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x . \cos^q x}$

!252. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$

Számitsuk ki az alábbi határértékeket:

253. $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$

254. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1 + t^4}\,dt}{x^3}$

! 255. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int\limits_x^{\infty} t^{-1} e^{-t}\, dt}{\ln \frac{1}{x}}$

5. AZ INTEGRÁLSZÁMITÁS ALKALMAZÁSAI

5.1. Területszámitás

Készitsünk vázlatot, majd határozzuk meg az alábbi görbék által határolt siktartomány geometriai területét:

256. $y = 4 - x^2$ és $y = 0$

257. $y = \frac{1}{x}$ és $y = 2{,}5 - x$

258. $y = x(x-1)$ és $y = 3x$

259. $y = \sin x$ és $y = \frac{2}{\pi} x$

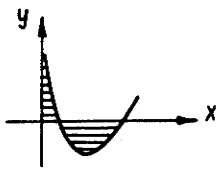
260. $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$ és $x + y = 1$

261. $y = x^2 + 2x$ és $y = 4 - x^2$

262. $y = x^4$ és $y = 3x^2 - 2$

263. $x = y^2$ és $x = \frac{3}{4} y^2 + 1$

264. Határozzuk meg az $y = x^2 - 4x + 3$ függvény görbéje és a koordinátatengelyek által bezárt véges területet.



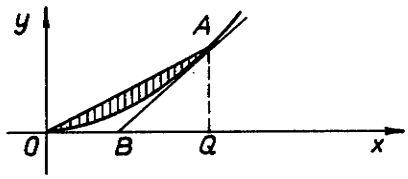
265. Határozzuk meg azt a területet, amelyet az y -tengely, az $y = \sqrt{x}$ görbe, valamint annak $x_0 = 4$ abszcisszáju pontjához tartozó érintője határol.

266. Határozzuk meg az $y = x(1-x)$ parabola, továbbá az $x_0 = 0$ és $x_1 = 2$ abszcisszáju pontjaiban huzott érintők által határolt területet.

267. Határozzuk meg az $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ görbék által bezárt idom területét.

268. Állapitsuk meg, milyen területü részekre bontja az $x^2 + y^2 = 16$ kört az $y^2 = 6x$ parabola.

269. Igazoljuk, hogy a bevonalkázott parabolaszelet területe $\frac{2}{3}$ -része a hur, az x - tengely és az érintő által határolt $OAB\triangle$ területének!



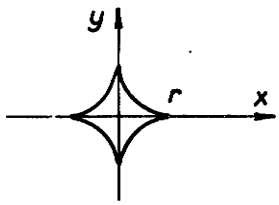
270. Számitsuk ki az $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ görbe $x > 0$ darabja és a görbe aszimptotája által bezárt terület nagyságát.

271. Számitsuk ki az $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$ paraméteres görbe alatti területet a $0 \leqslant t \leqslant 2$ határok között.

272. Számitsuk ki az $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott ellipszis területét.

273. Mekkora az $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b \sin t$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumhoz tartozó ive alatti terület?

274. Mekkora az $\begin{cases} x = r \cos^3 t \\ y = r \sin^3 t \end{cases}$ asztroid területe?



INTEGRÁLSZÁMITÁS

275. Kiszámitandó egy teljes ciklois-ív alatti terület! A ciklois egyenletrendszere:

$$x = r(t-\sin t),\ y = r(1-\cos t).$$

276. Mekkora az $x = \cos 2t$, $y = \cos t$ egyenletrendszerü parabola és az y-tengely közé eső síkrész területe?

277. Mekkora az $r = 2a\cos\varphi$ görbe $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ive alatti terület?

278. Számitsuk ki az $r = e^{\frac{\varphi}{2}}$ logaritmikus spirális $0 \leq \varphi \leq \pi$ ive által meghatározott szektortartomány területét!

279. Számitsuk ki az $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkáta $\frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ive által meghatározott szektortartomány területét!

280. Határozzuk meg az $r = 4$ sugaru kör $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkátán kivül eső részének területét!

281. Határozzuk meg az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkáta $r = 2$ körön kivül eső részének területét!

282. Mekkora az

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}$$

poláregyenletü görbe $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ive által meghatározott szektortartomány területe?

283. Határozzuk meg φ_0 értékét ugy, hogy az $r = 2\varphi$ archimedesi spirális $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ ive által meghatározott szektortartomány területe 20 területegység legyen.

5.2. Ivhossz-számitás

Számitsuk ki az alábbi görbék megadott intervallumhoz tartozó ivelnek hosszát:

284. $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 4$

285. $y = \ln(1-x^2)$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

286. $y = 1 - \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

287. $y = e^x$, $\ln 2 \leq x \leq \ln 3$

288. $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq 1$

289. Határozzuk meg x értékét ugy, hogy az $y = \operatorname{ch} x$ görbe 0-tól x-ig terjedő ivének hossza 15 egység legyen!

290. Számitsuk ki az $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ egyenlettel megadott görbe (asztroid) teljes ivhosszát!

Határozzuk meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerekkel megadott görbék ivhosszát:

291. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

292. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{8} \sin 2t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

293. Számitsuk ki a ciklois egy teljes ivének hosszát!

294. $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$,

$y = (2-t^2) \cos t + 2t \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$

Határozzuk meg az alábbi polárkoordinátás egyenletekkel megadott görbék ivhosszát:

295. $r = a\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $(a > 0)$

296. $r = 2a(1 + \cos\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; $(a > 0)$

297. $r = \frac{1}{\varphi}$, $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$

298. $r = \frac{1}{1+\cos\varphi}$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$

5.3. Forgástestek térfogata

Forgassuk meg az alábbi görbeiveket az x-tengely körül és számitsuk ki a keletkező forgástestek térfogatát:

299. $y = \frac{1}{x}$, a) $1 \leq x \leq 3$, b) $1 \leq x < \infty$

300. $1 = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $1 \leq x \leq 4$

301. $y = 1 + \cos \frac{x}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

302. $y = x\, e^{x}$, a) $0 \leq x \leq 1$, b) $-\infty < x \leq 0$.

Számitsuk ki az alábbi egyenletekkel megadott görbeivek y-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástestek térfogatát:

303. $y = \frac{1}{1 + x^2}$, $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$

304. $y = \ln x$, $0,5 \leq y \leq 1,5$

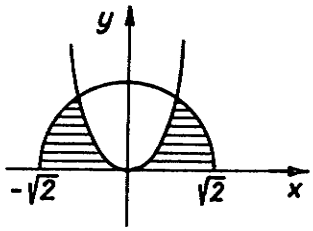
305. $y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$, $2 \leq y \leq 4$

306. $y = e^{x}$, $1 \leq y \leq 2$

307. Az $y = x^2$ görbe y-tengely körüli megforgatásával keletkező tartályban 2 egység magasságig folyadék van. Mennyire emelkedik a szabad folyadékfelszin, ha térfogategységnyi folyadékot töltünk még hozzá?

! 308. Az $y = x^{3/2}$ görbe (Neil-féle parabola) $y \geq 0$ ágának $0 \leq x \leq a$ ivét megforgatjuk mindkét tengely körül. Milyen "a" érték mellett lesz a megfelelő két forgástest térfogata egyenlő?

309. Messük el az $x^2 + y^2 = 2$, $y \geq 0$ félkört az $y = x^2$ parabolával. Számitsuk ki az ábrán bevonalkázott siktartomány x-tengely körüli megfogatásával nyert test térfogatát!



Határozzuk meg az alábbi görbeívek x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástestek térfogatát:

310. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

311. $\begin{cases} x = c^2 \cos^3 t \\ y = -\frac{c^2}{2} \sin^3 t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

312. $\begin{cases} x = t - \operatorname{th} t \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch} t}, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0$

MEGOLDÁSOK ÉS ÚTMUTATÁSOK

I. FEJEZET

1. $\boxed{1.}$

a) 1. Értelmezési tartomány $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ hiszen a 0 kivételével minden számra értelmezett az osztás.

2. Értékkészlet. Kérdés: mely y valós számok esetén van olyan $x \in D_f$, hogy

$$y = \frac{1}{x+1} \tag{1}$$

(1) akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$x = \frac{1}{y} - 1 \tag{2}$$

Mivel
(2) jobb oldala, minden $y \neq 0$ valós számra értelmezett, így az értékkészlet:

$$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

b) 1. Értelmezési tartomány.
Mivel a nevező mindig pozitív, és tetszőleges pozitív számmal való osztás értelmezett: $D_f = \mathbb{R}$.

2. Értékkészlet. Ugyanugy, ahogy a)-ban, azt vizsgáljuk, hogy mely $y \in \mathbb{R}$ számok esetén van $x \in D_f$, hogy

$$y = \frac{1}{x^2+1} \tag{3}$$

(3) akkor és csakis akkor áll fenn, ha

$$x^2 = \frac{1}{y} - 1 \tag{4}$$

Mivel $x^2 \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, (4)-ből az adódik, hogy csak olyan y valós számok lehetnek az értékkészlet elemei, melyekre

$$\frac{1}{y} - 1 \geqslant 0 \tag{5}$$

azaz $0 < y \leqslant 1$.

Minden ilyen y eleme az értékkészletnek, mert (5)-tel (4) akkor és csak akkor áll fenn, ha

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{y} - 1}$, azaz minden $y \in (0,1)$ esetén két olyan x is van, melyekre $y = \frac{1}{x^2+1}$, és $x = 0$ esetén $y = 1$.

Tehát $R_f = (0,1]$.

2. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = (-\infty, 3]$

3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

4. $D_f = [-3,3]$, $R_f = [0,3]$

5. $D_f = [-1,0) \cup [1,\infty)$, $R_f = [0,\infty)$

6. $D_f = \mathbb{R} \setminus [0,1)$, $R_f = \left\{\frac{1}{n} : n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\right\}$

7. $D_f = [0,\infty)$, $R_f = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$

8. $D_f = (-1,1]$, $R_f = \{0, e\}$

9. a) $D_f = (-1,1)$, $R_f = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

   b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{o\}$

10. a) $D_f = \{ 3\,k: \quad k = o, \pm 1, \pm 2, \dots \}$,

$R_f = \{ k: \quad k = o, \pm 1, \pm 2, \dots \}$

b) $D_f = \mathbb{R}$,

$R_f = \{ k: \quad k = o, \pm 1, \pm 2, \dots \}$

11. a) $D_f = R_f = \mathbb{R}$ c) $D_f = R$, $R_f = [0, \infty)$

b) $D_f = R_f = [o, \infty)$

12. $D_f = R_f = \mathbb{R}$

2. 1. a) E-n monoton növő függvények.
b) E-n szigoruan monoton csökkenő függvények.

2. Van olyan $x_1, x_2 \in H$, hogy $x_1 < x_2$ és $f(x_1) < f(x_2)$,

valamint olyan $x_3, x_4 \in H$, hogy $x_3 < x_4$ és $f(x_3) > f(x_4)$.

3. 2. a) f monoton $(a,b) \cup (c,d)$ -n
ha $a < x < c$ és $b < y < d$, akkor (például ha f monoton növő)

$f(x) \leq f(c) \leq f(b) \leq f(y)$,

a többi eset triviális

b) f akkor és csak akkor monoton, ha

$\sup\limits_{x \in (a,b)} f(x)$ és $\inf\limits_{x \in (c,d)} f(x)$ léteznek, és

$\sup\limits_{x \in (a,b)} f(x) \leq \inf\limits_{x \in (c,d)} f(x)$.

3. Ha volna olyan $I' \subset I$, melyen f monoton és pl. $I_1 \subset I'$, $I_1 \neq I'$, akkor kellene lennie olyan $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$ pontoknak, hogy $x_1, y_1 \in I' \cap I_1$, $x_2, y_2 \in I' \cap I_2$ és $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$; de a feltételből: $f(x_1) > f(y_1)$ és $f(x_2) < f(y_2)$, ami ellentmond annak, hogy f az I'-n monoton.

4. Nem.

$$\text{pl.}\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leqslant x \leqslant o \\ 0 & o \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \qquad a = -1,\ b=o,\ c=1$$

(Ha szigoru monotonitást követelünk meg, akkor igen.)

4. 1. $\boxed{a)}$ $D_f = [-1,1]$

Ha $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, akkor

$$1 \geqslant \sqrt{1-x^2} > \sqrt{1-y^2} \geqslant 0.$$

Tehát ha $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, akkor $f(x) > f(y)$. Ugyanígy látható be, hogy ha $-1 \leqslant x < y \leqslant 0$, akkor $f(x) < f(y)$. Ezért végeredményben: a függvény $[-1,0]$-án szigoruan monoton növő és $[0,1]$-en szigoruan monoton csökkenő, és 3. pl. 3. alapján ezek legbővebb ilyen intervallumok.

Megjegyzés. Az eredmény megkapható abból is, hogy ha

$$x,y \in D_f, \quad \text{akkor} \quad f(x) - f(y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} =$$

$$= \frac{(1-x^2) - (1-y^2)}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}} = \frac{y^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}}.$$

E kifejezés előjelét vizsgálva az előbbi eredményt kapjuk.

(b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ha $x,y \in D_f$, akkor

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{y-1} = \frac{y-x}{(x-1)(y-1)}, \quad \text{azaz ha } y > x, \text{ akkor}$$

$$f(x) - f(y) > 0, \quad \text{ha } x,y \in (-\infty,1) \text{ vagy } x,y \in (1,\infty).$$

Az, hogy ezek a legbővebb ilyen intervallumok, abból következik, hogy $f(x) < 0$, ha $x < 1$, és $f(x) > 0$, ha $x > 1$.

(c) $(-\infty,-1)$-en és $(-1,\infty)$-en szigoruan monoton csökken.

Ha $x, y \in D_f$.

$$f(x) - f(y) = \frac{y^3 - x^3}{(1+x^3)(1+y^3)}$$

d) $(-\infty, 0]$-n szigoruan monoton csökkenő, $[0, \infty)$-en szigoruan monoton növekedő.

e) $\left(-\infty, -\frac{a}{2}\right]$-en szigoruan monoton csökken, $\left[-\frac{a}{2}, \infty\right)$-en szigoruan monoton nő.

2. Nincs (a függvény az $x_0=0$ tetszőleges környezetében felveszi a $+1$ és a -1 értéket is).

5. a) Nem: nincs egyértelmü válasz, mert pl. az $[1,2]$ intervallumon korlátos, de a $(0,1]$ intervallumon nem.

b) Nem: a korlátosság ténye függ a tekintett halmaztól is (lásd a) pont), nem pusztán a függvény tulajdonsága.

c) 1. Nem: $(-\infty, \infty)$-en nem korlátos, de $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén $[a,b]$-n igen.

2. Igen: a $[0, \infty)$-en korlátos és tetszőleges $\alpha < 0$ esetén az (α, ∞)-en már nem.

6. 1. a) Igen.

b) Nem: 1-hez: a korlátosságból nem következik, hogy a függvény fel is veszi maximumát és minimumát; 2. pedig fennáll minden E-n értelmezett függvényre.

2. Minden K valós számhoz van olyan $x \in E$, hogy $|f(x)| > K$.

7. 1. a) Mivel $f(x) \leq \sup\limits_{x \in E} f(x)$ $\forall x \in E$-re, és $g(x) \leq \sup\limits_{x \in E} g(x)$

$\forall x \in E$-re, igy $f(x) + g(x) \leq \sup\limits_{x \in E} f(x) + \sup\limits_{x \in E} g(x)$

$\forall x \in E$-re. Ebből látszik, hogy $\sup\limits_{x \in E} f(x) + \sup\limits_{x \in E} g(x)$ felső korlátja $f(x) + g(x)$-nek, tehát nem lehet $\sup\limits_{x \in E} (f(x)+g(x))$-nél kisebb.

b) Hasonlóan a)-hoz.

2. a) $f(x) \geq \inf\limits_{x \in E} f(x)$ $\forall x \in E$-re, igy $-f(x) \leq -\inf\limits_{x \in E} f(x)$ $\forall x \in E$-re, tehát $\sup\limits_{x \in E} (-f(x)) \leq -\inf\limits_{x \in E} f(x)$.

Indirekt módon bizonyitunk. Tegyük fel, hogy

$\sup\limits_{x \in E} (-f(x)) < -\inf\limits_{x \in E} f(x)$. Ekkor $-\sup\limits_{x \in E} (-f(x)) > \inf\limits_{x \in E} f(x)$,

de akkor van olyan $x_0 \in E$ hogy $-\sup\limits_{x \in E} (-f(x)) > f(x_0) \geqslant$

$\geqslant \inf\limits_{x \in E} f(x)$, amiből $\sup\limits_{x \in E} (-f(x)) < -f(x_0)$: ellentmondás.

b) a)-ból $-f(x)$ helyettesitéssel.

3. pl. $f(x) = \sin x$, $g(x) = -\sin x$.

8. 1. a) Nem pl. $y = \frac{1}{x}$, $I = (0,1)$

b) Igen: Heine-Borel lefedési tétel miatt.
Minden ponthoz választva egy környezetet, amelyben lokálisan korlátos, ezekből kiválasztható véges sok, melyek uniója lefedi az egész intervallumot, és amelyekhez tartozó korlátok közül a legnagyobb jó az egész intervallumon.

2. Ha pl. x_0-ban f lokálisan korlátos volna, akkor x_0-nak lenne olyan $S(x_0)$ környezete, hogy $x \in S(x_0)$, $x = \frac{m}{n}$ esetén $f(x) = n < K$ (1) teljesülne. Ha $x \in S(x_0)$ akkor $|x| \leqslant L$ valamely L-re azaz

$$|x| = \left|\frac{m}{n}\right| = \frac{|m|}{n} \leqslant L \quad \text{igy} \quad |m| \leqslant n \cdot L \leqslant K \cdot L$$

azaz csak olyan racionális számok eshetnek $S(x_0)$-ba melyek számlálója abszolut értékben kisebb $K \cdot L$-nél és melyeknek nevezője K-nál kisebb ((1) miatt). Ilyen törtből azonban csak véges sok van, ellentmondásban azzal, hogy tetszőleges valós szám tetszőleges környezetében végtelen sok racionális szám van.

9. $\boxed{1.}$ a) 1. Felülről nem korlátos. Ugyanis: Legyen $K > 0$ tetszőleges valós.

$$\frac{1}{(1-x)^2} > K \quad \text{akkor és csak akkor, ha}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{K}} < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{K}} \qquad (1)$$

Igy $\forall K > 0$ esetén $y = 1 + \frac{1}{2\sqrt{K}}$ -ra fennáll, hogy

egyrészt $y \in (1, \infty)$, másrészt (1) miatt

$$f(y) = \frac{1}{(1-y)^2} > K .$$

Azaz tetszőleges $K > 0$ és ebből közvetlenül adódóan tetszőleges K valós esetén van olyan $y \in (1, \infty)$, hogy $f(y) > K$, ami a korlátosság definiciójával összevetve állításunk igazolása.

2. Alulról korlátos, hiszen $\frac{1}{(1-x)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

3. $\inf\limits_{x \in (1,\infty)} f(x) = 0$ <u>Ugyanis:</u> Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges

$$\frac{1}{(1-x)^2} < \varepsilon \quad \text{akkor és csak akkor ha} \quad |x-1| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad (3)$$

Mivel $x \in (1, \infty)$ esetén $x-1 > 0$, így ha $x > 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,

akkor egyrészt $x \in (1, \infty)$, másrészt (3)-ból

$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} < \varepsilon$, ami (2)-vel az állítást adja.

4. Nincs olyan $x \in (1, \infty)$ melyre $f(x) = \inf\limits_{x \in (1,\infty)} f(x) = 0$,

hiszen egy tört akkor és csak akkor 0, ha a számlálója az.

b) Mivel $f(x)$ monoton csökkenő $(1, \infty)$-en, így

$$\max_{x \in [2,4]} f(x) = f(2) = 1 ,$$

$$\min_{x \in [2,4]} f(x) = f(4) = \frac{1}{9} .$$

2. a) $\max\limits_{x \in (-\infty, \infty)} f(x) = f(o) = 1$, $\inf\limits_{x \in (-\infty, \infty)} f(x) = 0$, nem veszi fel.

b) $\max\limits_{x \in (-1,2]} f(x) = f(o) = 1$, $\min\limits_{x \in (-1,2]} f(x) = f(2) = \frac{1}{17}$.

3. a) $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} f(x) = 1$, nem veszi fel, $\min\limits_{x\in[0,\infty)} f(x) = f(0) = 0$.

b) $\sup\limits_{x\in(-\infty,-1)} f(x)$ nem létezik: $f(-\infty,-1)$-en felülről nem korlátos.

$\inf\limits_{x\in(-\infty,-1)} f(x) = 1$, nem veszi fel.

c) $\sup\limits_{x\in(1-,-\frac{1}{2})} f(x) = -1$, nem veszi fel.

$\inf\limits_{x\in(-1,-\frac{1}{2})} f(x)$ nem létezik: $f(-1, -\frac{1}{2})$-en alulról nem korlátos.

$\boxed{10.}$ Ha $|x| \leq 1$, akkor $|f(x)| = f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4} \leq 1+x^2 \leq 1+1 = 2$.

Ha $|x| \geq 1$, akkor $|f(x)| = f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4} \leq \dfrac{1+x^2}{x^4} = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^2} \leq 1+1 = 2$

Igy $|f(x)| \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$-re.

11. 1. a) b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ rac} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irr} \end{cases}$ $x_0 = 0$, $a = -1$, $b = 1$,

b)-hez $\delta = \frac{1}{2}$

c) d) $f(x) = -x^2$ $x_0 = 0$, $a = -1$, $b = 1$

2. A c)-ből és a d)-ből.
3. Az a) b) és c) tulajdonság következik.

12. 1. a) Igen. b) Nem.
2. Igen: ha a pont egy környezetében konstans.
3. Igen: ha az egész intervallumon konstans.
4. Ha $a \in I_1 \cap I_2$ igen, egyébként nem:

pl.: $f(x) = \operatorname{sign} x$ $I_2 = (-\infty, 0]$, $I_1 = (0, \infty)$, $a=0$.

13. 1. a) $f(1) = \frac{1}{2}$, és mivel $(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, így

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $f(-1) = -\frac{1}{2}$, és mivel $(x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, így

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \geq -\frac{1}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. $f(1) = f(2) = 0 < f(x) \quad \forall x \neq 1,\ x \neq 2$ esetén.

14. $\boxed{a)}$ 1. $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, esetén és $f(2) = f(-2) = 2$,

igy $x = 2$ és $x = -2$ lokális minimumhelyek és egyben az egész számegyenesre vonatkozó abszolut minimumhelyek is.

2. Ha $|x| \leq 2$, akkor $0 \leq (4-x^2)^2 \leq 16$, azaz $f(x) \leq 18$, és $f(o) = 18$, igy $x = o$ lokális maximumhely.
Az egész értelmezési tartományon nem abszolut maximumhely, mert pl. $f(4) = 146 > f(o) = 18$.

3. Belátható, hogy f a$(-\infty, -2)$ és a $(o,2)$ intervallumokon szigoruan monoton csökkenő, illetve a $(-2,o)$ és $(2,\infty)$ intervallumokon szigoruan monoton növekedő, igy lokális szélsőértéke csak a már megállapitott helyeken ($x = -2$, $x = 0$ és $x = 2$) lehet.

b) $x = -\frac{a}{2}$ minimum

(lásd 4. e) és 12. 4.)

c) $x = 1$ minimum.

d) $x = o$ minimum. (Lásd 4.1.d) és 12.4. példákat.

15. 1. Mutassuk meg, hogy az $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ pont rajta van az $(x_1,f(x_1))$-et és $(x_2,f(x_2))$-t összekötő huron.

3. Legyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x < x_2$. Ekkor

$$f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}(x-x_1) - f(x) = x_1^2 + \frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}(x-x_1)-x^2 =$$

$= (x-x_1)(x_2-x) > 0$, tehát

$$x_1 < x < x_2 \quad \text{esetén} \quad f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x-x_1).$$

16. 1. Egyik sem.
2. Páros.
3. Páratlan.
4. Páros, periodikus: minden racionális szám periódusa.
5. Páros.
6. Periodikus, periódus 2π.
7. Páros, periodikus, periódus: π^2.
8. Periodikus, periódus: 1.
9. Páratlan, periodikus, periódus: 1.
10. Páratlan.
11. Páros, periodikus, periódus: π.

(Megjegyzés: csak az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ helyeken van értelmezve!)

12. $f(x) = 2$ páros, periodikus: periódusa minden pozitív valós szám.
13. Páros.
14. Egyik sem.
15. a) Páros, periodikus, periódusa: 12.
b) Páratlan, periodikus, periódusa: 24.

17. (1) Akkor és csak akkor, ha $f(x) = 0 \quad \forall x \in D_f$.

18. a) Van: pl. $f(x) = \sqrt{\sin x}$

(b) Igen, pl. $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in D_f \\ 1, & \text{ha } x \notin D_f, \end{cases}$

hiszen ha f periódusa p, akkor $g(x) = g(x \pm p) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (1), mert ha $x \in D_f$, akkor (1) következik f periodikus voltából; ha $x \notin D_f$, akkor $g(x) = 1$ és $x \pm p \notin D_f$ (hiszen ha indirekte pl. $x+p \in D_f$ volna, akkor mivel f periodikus: $(x+p)-p = x \in D_f$ volna), így $g(x \pm p) = 1 = g(x)$.

19. 1. a) $-f$, $f+g$, $f \cdot g$, fog, gof korlátos; ha $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| > 0$, akkor $\frac{1}{f}$ korlátos, egyébként nem.

b) fog, gof lehet korlátos is, nem is: pl. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < o \\ o, & x \geq o \end{cases}$

esetén $f o f \equiv o$ és $f o(-f) \equiv f$;

$f+g$, $f \cdot g$ lehet korlátos is, nem is:

pl. $f(x) = x$, $g(x) = -x$ esetén $f+g$ korlátos, $f \cdot g$ nem.

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq o \\ 1 & x = o \end{cases}$, $g(x) = x$ esetén

$f+g$ nem korlátos, $f \cdot g$ igen;

$-f$ nem korlátos, $\frac{1}{f}$-re ua., mint a)-ban.

c) $-f$, fog korlátos; ha $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| > 0$, akkor $\frac{1}{f}$ korlátos, egyébként nem.

$f+g$ nem korlátos; $f \cdot g$, gof lehet korlátos is, nem is:

<u>pl.:</u> $f(x) = 1$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq o \\ 0 & x = o \end{cases}$ esetén

$f \cdot g$ nem korlátos, gof korlátos ($gof \equiv 1$),

$f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} & x \neq k \cdot \pi \quad k = o, \pm 1, \pm 2 \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}$ esetén

$f \cdot g$ korlátos ($|(f \cdot g)(x)| \leq 1$), gof nem korlátos.

2. a) $-f$ monoton csökkenő; $f+g$, fog, gof monoton növekedő, $f \cdot g$ lehet akár nem monoton is:

<u>pl.:</u> $f(x) = \operatorname{sign} x$, $g(x) = x$ esetén
$(f \cdot g)(x) = |x|$ nem monoton;

$\frac{1}{f}$ monoton csökken tetsz. $H \subset D_f$-en, melyen f előjeltartó $x \in H$ esetén $f(x) \neq 0$.

b) $-f$ mon. nő; $\frac{1}{f}$ mon. nő tetsz. $H \subset D_f$-en, melyen f előjeltartó $x \in H$ esetén $f(x) \neq 0$; fog, gof monoton csökkenő, $f+g$, $f \cdot g$ lehet akár nem monoton is:

pl. $f(x) = -\operatorname{sign} x$, $g(x) = \operatorname{sign}(x+1)$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 & x = -1 \\ 2 & -1 < x < o \\ 1 & x = o \\ 0 & x > o \end{cases} \qquad (f\cdot g)(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ 1 & -1 < x < o \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x > o\,. \end{cases}$$

3. a) mind páros

b) $-f$, $\frac{1}{f}$, $f+g$, fog, gof páratlan, $f\cdot g$ páros

c) $-f$, $\frac{1}{f}$, gof, fog páros, $f\cdot g$ páratlan, $f+g$ általában sem páros sem páratlan.

20. 1. - f-nek lok. minimuma van.

2. Ha $f(x_o) \neq 0$, akkor $\frac{1}{f}$-nek lok. minimuma van.

3. f+g-nek lok. maximuma van.

4. $f\cdot g$-nek lehet lok. maximuma, lok. minimuma, és lehet, hogy nincs egyáltalában szélsőértéke, pl.

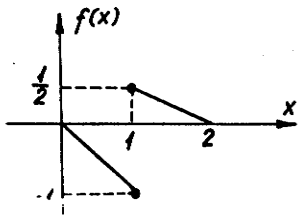
a) Legyen $f(x) = -x^2$, $g(x) = -x^2+1$, $x_o = 0$, $a = -1$, $b = 1$.

Ekkor $h(x) = (f\cdot g)(x) = x^4-x^2$-nek $x_o = 0$ lok. maximumhelye.

b) Legyen $f(x) = g(x) = -x^2$, $x_o = 0$, $a = -1$, $b = 1$.

Ekkor $(f\cdot g)(x) = x^4$-nek $x_o = 0$ lok. minimumhelye.

c) Legyen $f(x) = g(x) = \begin{cases} -x & 0 < x < 1 \\ 1-\frac{x}{2} & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ $a=o$, $b=2$.



Ennek $x_o = 1$ nyilván lok. maximumhelye, de a

$$h(x) = (f\cdot g)(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ (1-\frac{x}{2})^2 & 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$$

függvénynek $x_o = 1$-ben nincs lokális szélsőértéke: ha

$\frac{1}{2} < x < 1$, akkor $h(x) = x^2 > \frac{1}{4} = h(1)$, és ha

$1 < x < 1$, akkor $h(x) = (1 - \frac{x}{2})^2 < \frac{1}{4} = h(1)$. (lásd 1.ábra)

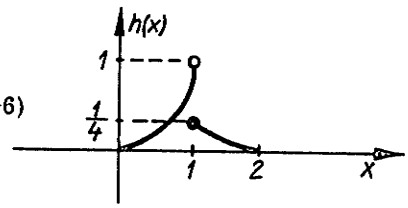
21. a) $f(x) = x^2-5x+6$

$(x+1 = y$ helyettesitéssel

$f(y) = (y-1)^2 -3(y-1) + 2 = y^2 - 5y+6)$

b) $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$

$(\frac{x}{1+x} = y$ helyettesitéssel)



1. ábra

22. a) $f_{3k}(x) = x$, $f_{3k+1}(x) = f_1(x)$, $f_{3k+2}(x) = \frac{x-1}{x}$

tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén.

b) $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+n\cdot x^2}}$

(mindkét esetben bizonyitsunk teljes indukcióval)

23. 1. a)

$$y = f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant o \\ x & x > o \end{cases} \quad (1), \qquad z = f(y) = \begin{cases} 0 & y \leqslant o \\ y & y > o \end{cases}$$

$$z = f(y) = f(f(x)) = \begin{cases} 0 & f(x) \leqslant o \\ f(x) & f(x) > o \end{cases} \quad (2) .$$

(1)-ből $f(x) \leq 0$, ha $x \leq 0$ és $f(x) > 0$, ha $x > 0$.

Így (2)-ből

$$z = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ f(x) & \text{ha } x > 0 \end{cases} \qquad (3),$$

de ugyancsak (1)-ből, ha $x > 0$, akkor $f(x) = x$, így (3)-ból

$$z = f(f(x)) = (fof)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} = f(x) .$$

Tehát $D_{fof} = D_f = \mathbb{R}$, $fof = f$.

b) $D_{fog} = D_g = \mathbb{R}$, $fog = 0$

c) $D_{gof} = D_f = \mathbb{R}$, $gof = g$

d) $D_{gog} = D_g = \mathbb{R}$, $gog = 0$

2. <u>Megoldásvázlat:</u>

a) $R_f \subset D_f$, igy $D_{fof} = D_f = \mathbb{R}$,

$$(fof)(x) = f(f(x)) = f^2(x) + 1 = (x^2+1)^2+1 = x^4+2x^2+2 .$$

b) $R_g \subset D_f$, igy $D_{fog} = D_g = [-1, \infty)$,

$$(fog)(x) = f(g(x)) = g^2(x)+1 = (\sqrt{x+1})^2+1 = (x+1)+1 = x+2.$$

c) $R_f \subset D_g$, igy $D_{gof} = D_f = \mathbb{R}$.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) + 1} = \sqrt{(x^2+1)+1} = \sqrt{x^2+2} ,$$

d) $R_g \subset D_g$, igy $D_{gog} = D_g = [-1, \infty)$,

$$(gog)(x) = g(g(x)) = \sqrt{g(x)+1} = \sqrt{\sqrt{x+1} + 1} .$$

3. $D_{fof} = \mathbb{R}$, $fof = f$

α) a) $D_{fog} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(fog)(x) = \text{sign } x = f(x)$, ha $x \neq 0$.

b) $D_{gof} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(gof)(x) = \text{sign } x = f(x)$, ha $x \neq 0$.

c) $D_{gog} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(gog)(x) = x$

β) a) $D_{fog} = \mathbb{R}$, $fog = 1$

b) $D_{gof} = \mathbb{R}$, $(gof)(x) = \begin{cases} 2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

c) $D_{gog} = \mathbb{R}$, $(gog)(x) = x^4+2x^2+2$

γ) a) $D_{fog} = \mathbb{R}$,

$$(fog)(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ -1 & -1 < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$$

b) $D_{gof} = \mathbb{R}$, $gof = 0$

c) $D_{gog} = \mathbb{R}$, $(gog)(x) = x^9-3x^7+3x^5-2x^3+x$

δ) a) $D_{fog} = \mathbb{R}$, $fog = 1$

b) $D_{gof} = \mathbb{R}$, $gof = fog = 1$

c) $D_{gog} = \mathbb{R}$, $gog = g$

4. a) $D_{fof} = \mathbb{R}$, $fof = f$

b) $D_{fog} = [0, \infty)$, $(fog)(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ négyzetszám} \\ \sqrt{x}, & \text{ha } x \text{ nem négyzetszám} \end{cases}$

c) $D_{gof} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{-k\} \cup [0, \infty)$, $(gof)(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ egész} \\ \sqrt{x}, & \text{ha } x \text{ nem egész} \end{cases}$

d) $D_{gog} = [0, \infty)$, $(gog)(x) = \sqrt[4]{x}$

5. a) $D_{fof} = \mathbb{R}$, $(fof)(x) = x^4+2x^3+2x^2+x$

b) $D_{fog} = \{ x \in \mathbb{R} : x \text{ egész} \}$

$(fog)(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \text{ páros egész} \\ 0, & \text{ha } x \text{ páratlan egész} \end{cases}$

c) $D_{gof} = \{ x \in \mathbb{R} : x \text{ egész} \}$, $gof = 1$

d) $D_{gog} = \{ x \in \mathbb{R} : x \text{ egész} \}$, $gog = -1$

6. a) $D_{fof} = \mathbb{R}$, $fof = f$

b) $D_{fog} = \{ x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0 \}$, $(fog)(x) = -\sqrt{x} = -g(x)$

c) $D_{gof} = \{0\}$, $gof = 0$

d) $D_{gog} = [0, \infty)$, $(gog)(x) = \sqrt[4]{x}$

7. a) $D_{fof} = (0,2)$, $fof = f$

b) $D_{fog} = (0,2)$, $fog = f$

c) $D_{gof} = (0,2)$, $(gof)(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ rac. és } 0 < x \leqslant 1 \text{ vagy } x \text{ irrac. és } 1 < x < 2 \\ 2-x, & \text{ha } x \text{ rac. és } 1 < x < 2 \text{ vagy } x \text{ irrac. és } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

d) $D_{gog} = \mathbb{R}$, $(gog)(x) = x$

8. a) $D_{fof} = (0, \infty)$, $(fof)(x) = \sqrt[4]{x}$

b) $D_{fog} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(fog)(x) = |x|$

c) $D_{gof} = (0, \infty)$, $(gof)(x) = x$

d) $D_{gog} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(gog)(x) = x^4$

24. 1. Indirekt módon: legyen $g_1 \neq g_2$ és $g_1(f(x)) = x = g_2(f(x))$ $\forall x \in H$ (1)
Legyen $y \in f(H)$ tetszőleges. Ekkor van olyan $x \in H$, amelyre $y = f(x)$. Így (1)-ből $g_1(y) = g_2(y)$.
Mivel $y \in f(H)$ tetszőleges volt, ezért $g_1 = g_2$.

2. - Álljon fenn a) és legyen $y \in f(H)$ tetszőleges. Ekkor van $x_o \in H$, hogy $f(x_o) = y$ legyen.
Ha $g(y) = x$, akkor ezzel és a)-val $g(f(x_o)) = x$ illetve $g(f(x_o)) = x_o$, azaz $x = x_o$, tehát $f(x) = y$.
Álljon fenn a) és legyen $x \in H$ tetszőleges. Ha $f(x) = y$, akkor ezzel és a)-val $g(f(x)) = g(y)$ illetve $g(f(x)) = x$, azaz $g(y) = x$.
- Álljon fenn b) és legyen $x \in D_f$ tetszőleges, ekkor $f(x) = y \in f(H)$ és b)-vel $g(y) = x$.
Így $g(f(x)) = g(y) = x$.

3. - Legyen $g(f(x)) = x$ $\forall x \in H$.
Legyen $y \in f(H)$ tetszőleges, ekkor van $x \in H$, hogy $y = f(x)$ legyen, így $g(y) = g(f(x)) = x$ és $f(g(y)) = f(x) = y$.
- Legyen $f(g(y)) = y$ $\forall y \in f(H)$.
Legyen $x \in H$ tetszőleges, ekkor $f(x) \in f(H)$, így $f(g(f(x))) = f(x)$, de f kölcsönösen egyértelmü H-n, ezért $g(f(x)) = x$.

25. 1. a) Ha f kölcsönösen egyértelmü H-n, akkor f^{-1} is az $f(H)$-n.
b) Mivel tetszőleges g függvény H-beli inverzére (ha létezik):

$$g^{-1}(g(x)) = x \qquad \forall x \in H,$$

igy

$$(f^{-1})^{-1}(x) = (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(f(x))) = ((f^{-1})^{-1} \circ f^{-1})(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in H.$$

2. a) Ha g kölcsönösen egyértelmű H-n, illetve f $g(H)$-n, akkor fog kölcsönösen egyértelmű H-n.

b) $(g^{-1} \circ f^{-1})((fog)(x)) = g^{-1}(f^{-1}(f(g(x)))) = g^{-1}(g(x)) = x$,

és lásd 24. példa 1.-et.

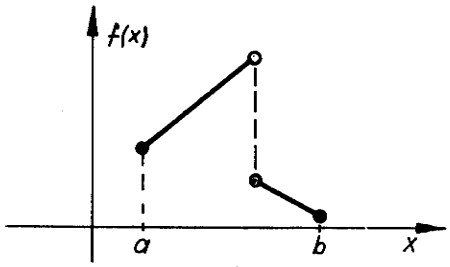
3. a) Tegyük fel, hogy g nem invertálható H-n: van olyan $x_1, x_2 \in H$, $x_1 \neq x_2$, hogy $g(x_1) = g(x_2)$.

Akkor $(fog)(x_1) = f(g(x_1)) = f(g(x_2)) = (fog)(x_2)$,

azaz fog nem invertálható H-n, ellentmondás.

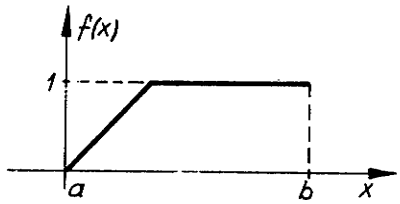
b) a)-ból tehát g invertálható H-n, 1.-ből g^{-1} is a $g(H)$-n, a feltétel szerint fog is invertálható H-n, és mivel nyilván $g^{-1}(g(H)) = H$ így 2.-ből $(fog)og^{-1}$ invertálható $g(H)$-n, és persze $((fog)og^{-1})(x) = f(x)$ $\forall x \in g(H)$.

26. a) Nem igaz, pl.



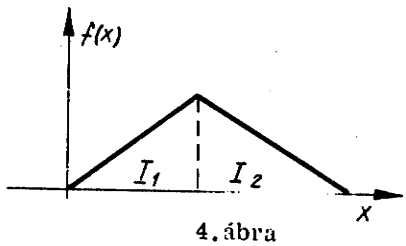
2. ábra

b) Nem igaz, pl.



3. ábra

c) Igaz.
d) Igaz.
e) Nem igaz, pl. (4. ábra)



4. ábra

27. 1. a) Nem igaz $\left(\text{pl. } f(x) = \frac{1}{1+x} \quad E = (0, \infty)\right)$

b) Igaz. (Indirekt: van olyan $y_1 < y_2$, hogy $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$.

Mivel f szigoruan monoton növő, ezért

$$y_2 = f\left(f^{-1}(y_2)\right) < f\left(f^{-1}(y_1)\right) = y_1 .)$$

2. a) Nem igaz: ha f páros, akkor nem kölcsönösen egyértelmü E-n.

b) Igaz.

$$\left(f^{-1}(-y) = f^{-1}\left(-f(x)\right) = f^{-1}\left(f(-x)\right) = -x = -f^{-1}(y)\right)$$

28. 1. $x \in \mathbb{R} \setminus f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}\setminus B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\mathbb{R}\setminus B)$.

3. Legyen $f(x) = |x|$, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, ekkor

$f(A) = A$ és $f^{-1}\left(f(A)\right) = \mathbb{R} \neq A$.

29. $\boxed{1.}$ a) $y = \frac{1}{x-1}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = \frac{1+y}{y}$. Igy a függvény az egész $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ -en kölcsönösen egyértelmü - ezért invertálható -, és az inverz:

$$f^{-1}(x) = \frac{1+x}{x}, \qquad D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. $y = \frac{1}{x^2-1}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x^2 = \frac{1+y}{y}$, azaz vagy ha $x = \sqrt{\frac{1+y}{y}}$ (1), vagy ha $x = -\sqrt{\frac{1+y}{y}}$ (2).

Ezért egyrészt $R_f = \left\{y \in \mathbb{R} : \frac{1+y}{y} \geq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus (-1,0]$ (3),

másrészt egyetlen pozitiv és egyetlen negativ $x \in D_f$ van egy adott $y \in R_f$-hez, hogy $y = \frac{1}{x^2-1}$ legyen, ha $y \neq -1$ ($y = -1$-re $x = o$).

Az $\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0 \}$,

$\mathbb{R}^- = \{ x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0 \}$ jelöléssel a megoldás a következő:

1. a függvény invertálható a $H_1 = D_f \cap \mathbb{R}^+$ halmazon, itt inverze $f_1^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$,

   és $D_{f_1^{-1}} = f(H_1) = \mathbb{R} \setminus (-1,0]$, hiszen (1)-ből és (3)-ból leolvasható, hogy $f(H_1) = R_f$.
2. a függvény invertálható a $H_2 = D_f \setminus \mathbb{R}^-$ halmazon, itt inverze $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1+x}{x}}$,

   és $D_{f_2^{-1}} = f(H_2) = \mathbb{R} \setminus (-1,0]$,

   hiszen (2)-ből és (3)-ból látható, hogy $f(H_2) = R_f$.
3. Nyilván $H_1 \cup H_2 = D_f$.
4. Marad az a kérdés, hogy vajon H_1, H_2 az értelmezési tartomány legbővebb olyan részhalmazai-e, melyeken a függvény invertálható.

   Fennáll, hogy $f(x) - f(y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2-1)(y^2-1)}$ (4).

   Tekintsünk egy olyan $H \subset D_f$ halmazt, hogy például

   $H_1 \subset H$, $H_1 \neq H$.

   Ekkor van $x \neq 0; x, -x \in H$, amiből $x \neq -x$, és (4)-ből $f(x) - f(-x) = 0$.

Tehát f H-n nem kölcsönösen egyértelmü. Ugyanigy látható be, hogy H_2-nél sincs bővebb halmaz, melyen a függvény invertálható volna.

1. Megjegyzés. Egyébként (4)-ből leolvasható az is, hogy a függvény $(-\infty, -1)$-en és $(-1, 0]$-n szigoruan monoton növekvő, illetve, hogy $[0, 1)$ -en és $(1, \infty)$-en szigoruan monoton csökkenő, igy, mivel ezenkivül $f(x) > 0$, ha $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ és $f(x) < 0$, ha $x \in (-1, 1)$, ebből is kiadódik, hogy invertálható H_1-en és H_2-n.

2. Megjegyzés. A megoldás nem egyértelmü. A kivánt tulajdonságuak pl. a $H_1 = (-\infty, -1) \cup [0, 1)$ és a $H_2 = (-1, 0] \cup (1, \infty)$ halmazok is.

2. 1. $[-1, 1]$, $f_1^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$D_{f_1^{-1}} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, $f_2^{-1}(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$, $D_{f_1^{-1}} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$

3. 1. $[-1, 0)$, $f_1^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{x^4+4}}{2}$, $D_{f_1^{-1}} = [0, \infty)$

2. $[1, \infty)$, $f_2^{-1}(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{x^4+4}}{2}$, $D_{f_2^{-1}} = [0, \infty)$

(Megjegyzés: Vegyük észre, hogy mig pl. $g(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{x^2+4}}{2}$-re $D_g = \mathbb{R}$, addig $D_{f_1^{-1}} = [0, \infty) \neq \mathbb{R}$!
hiszen $f([-1, 0)) = [0, \infty)$)

4. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ -en invertálható,

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1-x}}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

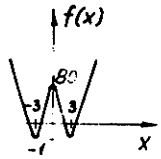
5. $D_f = [-3,3]$

1. $[0,3]$, $f_1^{-1}(x) = \sqrt{9-x^2}$, $D_{f_1^{-1}} = [0,3]$

2. $[-3,0]$, $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{9-x^2}$, $D_{f_2^{-1}} = D_{f_1^{-1}}$

6. 1. $[3,\infty)$, $f_1^{-1}(x) = \sqrt{9+\sqrt{x+1}}$, $D_{f_1^{-1}} = [-1,\infty)$

2. $[0,3]$, $f_2^{-1}(x) = \sqrt{9-\sqrt{x+1}}$, $D_{f_2^{-1}} = [-1,80]$



3. $[-3,0]$, $f_3^{-1}(x) = -\sqrt{9-\sqrt{x+1}}$, $D_{f_3^{-1}} = [-1,80]$

4. $(-\infty,-3]$, $f_4^{-1}(x) = -\sqrt{9+\sqrt{x+1}}$, $D_{f_4^{-1}} = [-1,\infty)$

7. 1. $\left(-\infty,-\frac{a}{2}\right]$, $f_1^{-1}(x) = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + y - b}$

$$D_{f_1^{-1}} = \left[b - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \infty\right)$$

2. $\left[-\frac{a}{2},\infty\right)$, $f_2^{-1}(x) = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + y - b}$

$$D_{f_2^{-1}} = \left[b - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \infty\right)$$

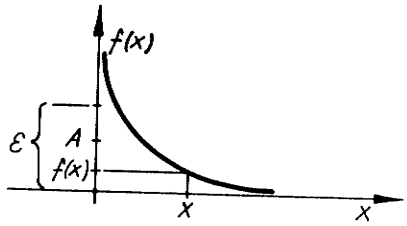
30. 1. Nem, a feltétel minden f függvényre fennáll: $\delta = |b-a|$ jó mindig.

2. a) Ha $H \subset f(E)$ korlátos, akkor $f^{-1}(H)$ is az. (Illetve, ha f invertálható, akkor: f^{-1} korlátos halmazon korlátos.)

b) Legyen pl. $f(x) = x$, $E = \mathbb{R}$ és $x_0 = 0$. Ekkor $A = 0$ megfelelő, hiszen ha $|f(x)| < \varepsilon$ akkor $|x| < \varepsilon$, azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = \varepsilon$ jó.

Az $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ -re nem áll fenn $E = \mathbb{R}$

és $x_0 = 0$ esetén: A-t bárhogy választva az $|A|$-nél nagyobb ε-okhoz nincs megfelelő δ.
(ha $f(x) \to 0$ $|f(x) - A| < \varepsilon$ de $x \to \infty$).



5. ábra

31. Ha egy függvényre fennáll az említett tulajdonság, akkor nem létezhet határértéke a $-\infty$-ben, de ha nincs határértéke a $-\infty$-ben abból nem következik, hogy fennáll az említett tulajdonság:

pl. legyen $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ rac.} \\ o & x \text{ irrac.} \end{cases}$ $A = K = 0$ -val: minden

$\varepsilon > 0$ esetén minden $x < K$ -ra $f(x) - A < \varepsilon$, hiszen $x - 0 = x < 0 < \varepsilon$, ill. $o - o = o < \varepsilon$.

32. 1. Nem: a tulajdonság pont azt jelenti, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - A| = \infty$

2. Igen.
3. Igen.

33. Minden olyan (a,b)-n értelmezett függvény, melyre nem igaz, hogy x_0-ban a jobb oldali határértéke $+\infty$.

pl. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \frac{1}{|x|} \notin \mathbb{N} \\ 0 & \frac{1}{|x|} \in \mathbb{N} \end{cases}$ $a = -1$, $b = 1$, $x_0 = 0$ (pl. $K = 1$ jó.)

34. 1. a) Nem igaz (lásd 2.-beli $f(x)$-nek nincs határértéke x_0-ban, de fennáll rá az említett tulajdonság).
b) Igaz.

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{|x|} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$ $a = -1$, $b = 1$, $x_0 = o$.

(pl. $A = 1$ jó.)

35. 1. b) Nem, pl. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \text{ rac.} \\ -\frac{1}{x} & x \text{ irrac.} \end{cases}$ $a = 0$

2. Nem, pl. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \text{ irrac.} \\ 0 & x \text{ rac.} \end{cases}$ $x_0 = 0$

3. Nem, pl. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0$, de nem létezik $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

36. 1. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rac.} \\ 0 & x \text{ irrac.} \end{cases}$

2. Ilyen nincs.

37. $\boxed{1.}$ a) Állitás: $\lim\limits_{x \to 2} (x^2+2) = 6$

Ugyanis legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{10}\right\}$. (1)

Ekkor ha $|x-2| < \delta$, akkor

$2-\delta < x < \delta+2$ igy $-4-\delta < 4-\delta < x+2 < \delta+4$

tehát $|x+2| < \delta + 4 \leqslant 4,5 < 5$

Ezzel jelölve $f(x) = x^2+2$, $|f(x)-6| = |x^2-4| = |x+2|\,|x-2| < 5|x-2|$

azaz (1)-ből $|f(x) - 6| \leqslant 5 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ha $|x-2| < \delta$

b) Állitás: Az $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ jelöléssel

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nem létezik.

u. is:

α) $0 \leqslant f(x) < 1$ igy nem lehet $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$ vagy

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

β) Indirekt, tegyük fel $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = A$, $|A| < \infty$ (1)

Legyen $\varepsilon = 0,2$ ekkor (1)-el van $\delta > 0$ hogy minden

$0 < x < \delta$ és $0 < y < \delta$ esetén

$$|f(x)-f(y)| = |f(x)-A+A-f(y)| \leq |f(x)-A| + |f(y)-A| <$$

$$< 0,2 + 0,2 = 0,4 \qquad (2)$$

De legyen n pozitiv egész olyan, hogy $n > \frac{1}{\delta}$, ekkor

$x = \frac{1}{n} < \delta$ és $y = \frac{1}{n+0,5} < \delta$, de

$$|f(x)-f(y)| = \left| \frac{1}{\frac{1}{n}} - \left[\frac{1}{\frac{1}{n}}\right] - \left(\frac{1}{\frac{1}{n+0,5}} - \left[\frac{1}{\frac{1}{n+0,5}}\right] \right) \right| = |0-0,5| =$$

$$= 0,5 > 0,4$$

ami ellentmond (2)-nek.

2. a) 0
   b) ∞
3. a) $-\infty$
   b) 1
   c) $-\frac{1}{2}$
   d) ∞
4. a) nem létezik
   b) ∞
   c) $-\infty$
5. a) ∞
   b) ∞
   c) ∞
6. a) 2
   b) ∞
   c) 0
7. a) nem létezik
   b) 2
   c) 1
8. a) nem létezik
   b) 1
   c) -1
9. a) nem létezik
   b) 1
10. a) ∞
    b) nem létezik
    c) 0
    d) 0
11. a) nem létezik
    b) 0
    c) nem létezik
    d) 0
12. a) nem létezik
    b) nem létezik
13. a) 1
    b) nem létezik

38. b) és c) nem:
b) pont azt jelenti, hogy f <u>nem</u> folytonos x_0-ban,
c) -t viszont egyetlen olyan függvény sem elégíti ki, mely x_0-ban értelmezve van.

a) és d) igen
(d)-ből következik, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, másrészt mivel $\forall \delta > 0$

esetén $0 = |x_0 - x_0| < \delta$, ezért minden $\varepsilon > 0$-ra

$|f(x_0)-A| < \varepsilon$, ami csak ugy lehet, ha $f(x_0) = A$.)

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

39. $\inf E = 0$

40. 1. Korlátosság.

2. $f(x) = x$ (tetsz. $a < b$ és $x_0 \in \mathbb{R}$ mellett $\varepsilon = \delta$ jó).

3. Nem, pl. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rac.} \\ 0 & x \text{ irrac.} \end{cases}$ $a = -1,\ b = 1,\ x_0 = 0$.

($\varepsilon = 2$ minden $\delta > 0$-ra jó.)

41. Invertálható és folytonos

1. Kölcs. egyértelmü: ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor

$|f(x_1)-f(x_2)| = 0 < \delta$ tetsz. $\delta > 0$-ra, igy $|x_1-x_2| < \varepsilon$

tetsz. $\varepsilon > 0$ esetén, azaz $x_1=x_2$.

2. Ha létezik inverz, a megadott tulajdonság az inverz függvény egyenletes folytonosságának definiciója.

3. Ha f^{-1} folytonos akkor f is az.

42. 1. Legyen $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \in [a,b] \\ f(a) & \text{ha } x < a \\ f(b) & \text{ha } x > b \end{cases}$

2. Nem, pl. ha $f(x) = \frac{1}{x}$, akkor f folytonos $(0,1)$-en, de bárhogy is definiáljuk $g(x)$-et, ha $g(x) = f(x)$ $\forall x \in (0,1)$ esetén, akkor

$\lim\limits_{x \to 0+} g(x)$ nem lehet véges.

43. 1. Ha f folytonos, akkor mindkét tulajdonság fennáll.

2. Az a) tulajdonságból még az sem következik, hogy létezik a

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$: pl. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rac.} \\ 0 & x \text{ irrac.} \end{cases}$ $a=-1,\ b=1,\ x_0=0$.

3. A b) tulajdonságból következik a függvény folytonossága.

44. Sehogy:

1. Ha f folytonos egy $[a, \infty)$-en, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ lehet véges, végtelen, és lehet, hogy nem létezik:

   pl. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ nem létezik.

2. Ha f-nek van határértéke ∞-ben, akkor lehet folytonos egy $[a, \infty)$-en: pl. $f(x) = e^{-x}$; de lehet, hogy nincs olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy f folytonos legyen $[a, \infty)$-en:

   <u>pl.</u> $f(x) = \dfrac{\operatorname{sign}(\sin x)}{x}$ $\quad (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0)$.

45. 1. a) $f+g = h$ nem folytonos (hiszen ellenkező esetben $g = h-f$ folytonos volna).

Ha $f(x_0) \neq 0$, akkor $h = f\cdot g$ nem folytonos (hiszen ellenkező esetben $g = \frac{h}{f}$ folytonos volna).

Ha $f(x_0) = 0$ és x_0-ban g lokálisan korlátos, (lásd 8. pl. Def.) akkor $f\cdot g$ folytonos x_0-ban.

Ha $f(x_0) = 0$ és g nem lokálisan korlátos x_0-ban, akkor $f\cdot g$ lehet folytonos x_0-ban:

<u>pl.</u> $x_0 = 0$, $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 , \end{cases}$

és lehet nem folytonos x_0-ban, <u>pl.</u> $x_0 = 0$,

$f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 . \end{cases}$

b) Mind $f+g$ mind $f\cdot g$ lehet folytonos is, lehet nem folytonos is x_0-ban:

<u>pl.</u> $f(x) = \operatorname{sign} x$, $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

esetén $f+(-f)$ folytonos, $f+f$ nem folytonos
$g\cdot g$ folytonos, $f\cdot g$ nem folytonos x_0 -ban

2. Nem

pl. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -1 & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$ $E = (-\infty, \infty)$

46. fog mindhárom esetben lehet folytonos és lehet nem folytonos x_0-ban: pl.

a) Ha $x_0 = 0$, $g(x) = x^2$ és $f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, $f_2(x) = \text{sign } x$,

akkor $f_1 o g = 1$ folytonos, $f_2 o g = \text{sign}^2 x$ nem folytonos $x_0 = 0$-ban. (ha pl. $g(x) = x$, akkor $f_2 o g = f_2$-nek még határértéke sem létezik $x_0 = 0$-ban)

b) Ha $x_0 = 1$, $g(x) = \begin{cases} x & x \geqslant 1 \\ -x & x < 1 \end{cases}$ és $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x$, akkor

$(f_1 o g)(x) = x^2$ folytonos, $f_2 o g = g$ nem folytonos $x_0 = 1$-ben.

c) Ha $x_0 = 0$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ és $f_1(x) = g(x)$, $f_2(x) = \text{sign}x$,

akkor $(f_1 o g)(x) = x$ folytonos, $f_2 o g = f_2$ nem folytonos $x_0 = 0$-ban.

47. $\boxed{1.}$ a) Folytonos, ugyanis legyen $x_0 \in (0, \infty)$ tetszőleges és $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Legyen $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3x_0}, x_0 \right\} > 0$ (1).

Ha $|x-x_0| < \delta$, mivel (1)-el ekkor $x_0 \geqslant \delta$

igy $-x_0 \leqslant -\delta < x-x_0 < \delta \leqslant x_0$ azaz

$0 < \delta \leqslant x_0 < x+x_0 < 3x_0$

amiből $|x+x_0| < 3x_0$ (2), igy (1) és (2)-vel ha $|x-x_0| < \delta$

$$|f(x)-f(x_0)| = |x^2-x_0^2| = |x+x_0|\cdot|x-x_0| < 3x_0\,\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3x_0}\cdot 3x_0 = \varepsilon .$$

b) Nem folytonos, ugyanis
$f(o) = 0$ és $f(x) = 1$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ mellett, igy pl. $\varepsilon = 0,5$ esetén tetszőleges $\delta > 0$-hoz van olyan $|x| < \delta$, hogy $|f(x) - f(o)| > 0,5$.

2. Folytonos
3. Folytonos
4. a) Nem folytonos
   b) Folytonos
5. Folytonos
6. $x_0=1$-ben nem folytonos
7. Folytonos
8. a) Folytonos
   b) $x_0=0$-ban nem folytonos
9. a) Nem folytonos
   b) Folytonos.

48. a) ha $x = \frac{m}{n}$, akkor pl. $\varepsilon = \frac{1}{2n}$ -hez nincs megfelelő $\delta > 0$, mert minden racionális szám tetszőleges környezetében van irracionális szám.

b) ha x irrac., akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n} < \varepsilon$, ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$, és x tetszőleges korlátos környezetébe csak véges sok $\frac{1}{\varepsilon}$ - nál kisebb nevezőjü racionális szám eshet.

Megjegyzés: Egyébként b) mintájára bel ható, hogy $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, azaz f szakadása minden racionális helyen megszüntethető.

49. 1. a)-ból nem: csak az, hogy az egész (a,b)-n folytonos,
   b) az egyenletes folytonosság definiciója.
   2. Van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy minden $\delta > 0$ szám esetén van olyan $x,y \in (a,b)$, hogy $|x-y| < \delta$ és $|f(x)-f(y)| \geqslant \varepsilon$.

50. 1. Nem: pl. $f(x) = x$ egyenletesen folytonos $(-\infty, \infty)$-en.
   2. Nem: pl. $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ folytonos és korlátos, de nem egyenletesen folytonos $(0,1)$-en (lásd 89. pl. 3. a).
   3. Igen.

51. a) és c) igaz, b) nem: pl. $f(x) = x$ egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$ -en, de $(f\cdot f)(x) = f^2(x) = x^2$ már nem. Ellenben ha a függvények korlátosak (vagy korlátos intervallumon tekintjük őket, mert ha ott egyen-

letesen folytonos akkor korlátos: lásd 103. pl. 1.) akkor a szorzat is egyenletesen folytonos: lásd 104. pl. 2.

52. 1. a) Egyenletesen folytonos
Ugyanis: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, a $\delta = \varepsilon$ választás megfelelő, mert tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$|f(x)-f(y)| = |x-y| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |x-y| < \varepsilon .$$

b) Nem egyenletesen folytonos.
Ugyanis: Legyen $\delta > 0$ tetszőleges és legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan, hogy $x > \frac{1}{\delta}$ valamint $y = x + \frac{\delta}{2}$.

Ekkor $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$,

és $|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |x+y| \cdot |x-y| = (x+y)\,|x-y| =$

$$= \left(2x + \frac{\delta}{2}\right) \cdot \frac{\delta}{2} > \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta}{2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 .$$

Azaz $\varepsilon = 1$-hez minden $\delta > 0$ esetén van $x, y \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x)-f(y)| > 1$, pedig $|x-y| < \delta$.

2. Egyenletesen folytonos
3. a) nem egyenletesen folytonos
b) egyenletesen folytonos
4. a) nem egyenletesen folyt.
b) egyenletesen folytonos
5. nem egyenletesen folytonos.

53. 1. $[0,1)$

2. $\forall x \in (-\infty, \infty)$

ha $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{k \cdot \pi}$ $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. $[0,1)$

4. $(0, \infty)$

5. $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

6. $\forall x \in \mathbb{R}$, hogy ha

$$(4k-1)\frac{\pi}{2} < x < (4k+1)\frac{\pi}{2}$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7. $(0,2) \setminus \left\{\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\right\}$

8. $\{1\}$

9. $\mathbb{R}$

10. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

11. $\mathbb{R}$

12. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

54. $\boxed{1.}$ a) $D_f = \mathbb{R}$ mert $0 < e^{-x^2} \leqslant 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ -re, igy

$$1 > 1-e^{-x^2} \geqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ -re.} \qquad (1)$$

b) (1)-ből $0 \leqslant f(x) < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (2), és $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ (3),

hiszen az összetett függvény határértékére vonatkozó tétellel $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ -ből: $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2} = \infty$.

c) <u>Állitás:</u> $f(x)$ tetszőleges 0 és 1 közötti értéket felvesz.
Ugyanis: Legyen $0 < c < 1$.
(2) és (3) miatt: van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $c < f(x) < 1$.
f folytonos az egész $\mathbb{R}$ -en, igy folytonos a $[0,x]$ -en is,
Bolzano tétellel felveszi a $0 < c < f(x)$ értéket is.
Mivel $f(o)= o$, az előbbiekből azt kapjuk, hogy $[0,1) \subset R_f$.
Másrészt (2)-ből $R_f \subset [0,1)$, igy $R_f = [0,1)$.

2. $D_f = \bigcup\limits_{k=o}^{\infty} \left[4k^2 \cdot \pi^2,\ (4k^2 + 4k + 1)\ \pi^2\right]$ $\qquad R_f = [0,1]$

3. $D_f = \left[\frac{1}{e},\ e\right]$ $\qquad R_f = [0,\ \pi]$

4. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k=0, \pm1, \pm2, \dots \right\}$ $\qquad R_f = \{0\}$

5. $D_f = (0,1)$ $\qquad R_f = (-\infty, \infty)$

6. $D_f = \left[-\frac{1}{3},\ 1\right]$ $\qquad R_f = \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$

7. $D_f = (-\infty,\ 0)$ $\qquad R_f = \left(-\infty,\ \ln\frac{\pi}{2}\right)$

8. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad R_f = \left(\frac{1}{1+\frac{\pi}{4}},\ \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}\right)$

9. $D_f = \mathbb{R}$ $\qquad R_f = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \infty\right)$

10. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad R_f\ (0,1]$

11. $D_f = (-\infty,-1) \cup [0,1)$ $\quad R_f = (0, \infty)$

12. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\quad R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

13. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\quad R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

55. 1. $(-\infty,0]$ $\quad$ 4. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

2. $[1, \mathrm{ch}1)$ $\quad$ 5. $\left\{\frac{1}{e}, 0, e\right\}$

3. $(-1, \frac{1}{2})$

56. $\boxed{1.}$ a) $\frac{1}{1-x}$ a $(-\infty,1)$ és az $(1,\infty)$-en monoton növő.

b) $|\ln x|$ monoton csökken a $(0,1]$ -ben, és monoton nő az $[1,\infty)$-en, ugyanis

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & \text{ha } \ln x \geqslant 0, \text{ azaz ha } x \geqslant 1 \\ -\ln x, & \text{ha } \ln x < 0, \text{ azaz ha } 0 < x < 1 \end{cases}$$

és $\ln x$ monoton növő $(0,\infty)$-en.

c) Miután monoton növő függvények összetett függvénye monoton nő, illetve monoton növő és csökkenő függvények összetett függvénye monoton csökken, a) és b)-ből $f(x)$ monoton nő, ha

$|\ln x| < 1$ vagy $|\ln x| > 1$ (1)

és $x \geqslant 1$ (2)

(1) akkor és csak akkor áll fenn, ha $\frac{1}{e} < x < e$ vagy $x > e$ vagy $x < \frac{1}{e}$, így ebből (2)-vel: $f(x)$ monoton nő, ha $1 \leqslant x < e$ és ha $x > e$ (3). Ugyanígy $f(x)$ monoton csökken, ha $\frac{1}{e} < x < e$ vagy $x > e$ vagy $x < \frac{1}{e}$ és $0 < x \leqslant 1$, amiből: $f(x)$ monoton csökken ha $0 < x < \frac{1}{e}$ illetve $\frac{1}{e} < x < 1$.

Összefoglalva tehát

	$0 < x < \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e} < x \leq 1$	$1 \leq x < e$	$x > e$
f(x)	csökken	csökken	nő	nő

Az, hogy ezek legbővebb olyan intervallumok, melyeken a függvény monoton, következik egyrészt abból, hogy

$0 < x < \frac{1}{e}$ és $x > e$ esetén $f(x) < 0$,

mig $\frac{1}{e} < x < e$ esetén $f(x) > 0$,

másrészt a 3. pl. 3.-ból.

2. $(-\infty, 0]$ -n monoton csökkenő, $[0, \infty)$-en monoton növő.
3. Minden $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ esetén

a $\left[k \cdot \pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$ -n monoton növő, és

a $\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}, k \cdot \pi\right]$ -n monoton csökkenő.

4. A $(-\infty, -1)$ -en és az $(1, \infty)$-en monoton csökkenő, a $(-1, 1)$-en monoton növő.
5. A $(-\infty, -1)$-en és a $(-1, 0]$ -n monoton csökkenő, a $[0, 1)$-en és az $(1, \infty)$-en monoton növő.

$$\left(\frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{1+y^2}{1-y^2} = 2\,\frac{x^2 - y^2}{(1-x^2)(1-y^2)}\right).$$

57. 1. Korlátos, $\inf\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) = \min\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$

$\sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) = \max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$

Lokális maximuma van az $x = \frac{\pi}{6}$ és az $x = 5\frac{\pi}{6}$ pontokban.

Lokális minimuma van az $x = \pm\frac{\pi}{2}$ pontokban.

A $g(x) = x(1-x)$ jelöléssel

1. $|g(x)| \leq 2$, ha $|x| \leq 1$ és $g(-1) = -2$.

2. Vagy a 4. pl. 1. e)-ből, vagy mivel

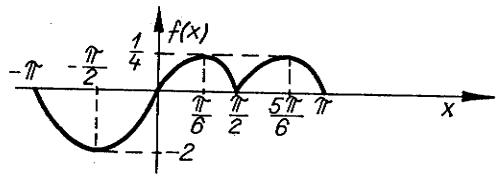
$g(x) - g(y) = (x-y)\,(1-(x+y))$, látható, hogy $x \leqslant \frac{1}{2}$ -re $g(x)$ monoton nő, $x \geqslant \frac{1}{2}$ -re monoton csökken. Így egyrészt:

a) $0 \leqslant g(x) \leqslant g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, ha $0 \leqslant x \leqslant 1$, és

$g(x) < 0$, ha $x < 0$;

másrészt:

b) sin x monoton szakaszai alapján belátható, hogy $f(x)$ a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$-ban és a $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ -ban monoton nő, valamint a $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ és $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ - ben monoton csökken.



6. ábra

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

a) alulról korlátos, $\inf f(x) = 0$, nem veszi fel, nincs lokális szélsőértéke.

b) alulról korlátos, $\inf\limits_{x \in (-\infty, 1)} f(x) = 1$, nem veszi fel,

c) korlátos $\inf\limits_{x \in (1, \infty)} f(x) = 0$, $\sup\limits_{x \in (1, \infty)} f(x) = 1$, egyiket sem veszi fel.

d) korlátos, $\inf\limits_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} f(x) = \min\limits_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} f(x) = f(0) = 2$,

$\sup\limits_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} f(x) = \max\limits_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} f(x) = f(\frac{1}{2}) = 4$.

e) korlátos, $\inf\limits_{x\in(2,3)} f(x) = f(2) = \frac{1}{2}$, $\sup\limits_{x\in(2,3)} f(x) = f(3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

egyiket sem veszi fel az intervallumon.

3. $D_f = [-1,1]$

Korlátos, $\sup f(x) = \max f(x) = f(1) = f(-1) = \frac{\pi}{2}$,

$\inf f(x) = \min f(x) = f(o) = 0$,

lokális minimuma van $x = 0$-ban.

4. $D_f = \mathbb{R}$

a) Korlátos, $\sup f(x) = \max f(x) = f(1) = f(-1) = 1$,

$\inf f(x) = \min f(x) = f(o) = 0$,

lokális maximuma van az $x = \pm 1$-ben,
lokális minimuma van az $x = 0$ -ban.

b) Korlátos, $\sup\limits_{x\in[1,\infty)} f(x) = \max\limits_{x\in[1,\infty)} f(x) = f(1) = 1$,

$\inf\limits_{x\in[1,\infty)} f(x) = 0$, nem veszi fel.

Lokális szélsőértéke nincs.

5. $D_f = \mathbb{R}$

a) Felülről korlátos, $\sup f(x) = 1$, nem veszi fel.
Lokális szélsőértéke nincs.
b) Korlátos $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} f(x) = 1$, nem veszi fel,

$\inf\limits_{x\in[0,\infty)} f(x) = \min\limits_{x\in[0,\infty)} f(x) = f(o) = 0$.

58. 1. a) Nem
b) Nem
c) Igen

(Mivel a függvény a $\left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ és a $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ intervallumban szig. monoton csökken, valamint a $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$ és az

$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ intervallumban szig. mon. nő

$(x^2(1-x^2) - y^2(1-y^2) = (x^2-y^2)(1-(x^2+y^2)))$ és folytonos, igy egyetlen olyan I nyilt intervallumban sem invertálható, melyre $-\frac{1}{\sqrt{2}} \in I$ vagy $\frac{1}{\sqrt{2}} \in I$ (lásd 101. pl. a)), de a

$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$-ben szigoruan monoton nő.)

2. Igen (mindenütt szigoruan monoton növő).
3. a) Igen
   b) Nem
   c) Nem

   (Mivel $f(x) > 0$, ha $x \neq 1$ és $f(x) = 0$, ha $x = 1$ és f folytonos, igy egyetlen olyan I nyilt intervallumban sem invertálható, melyre $1 \in I$ (lásd 101. pl. a)).
   De a $(0,1]$-en szigoruan monoton csökken.)

4. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$-n invertálható.

   (pl. az $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = \frac{x}{x+1}$, $f_3(x) = \ln x$, $f_4(x) = \sqrt{x}$

   invertálható függvények összetett függvénye:

   $f_2 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_1 = f$,

   és lásd 25. pl. 2.)

59. 1. a) Egyetlen.

   (A $g(y) = \sqrt[3]{y + \ln y}$ $(0, \infty)$-en szigoruan monoton, igy invertálható, valamint $R_g = \mathbb{R}$.
   Igy 24. pl. 1. -el egyetlen $y = f(x)$ van

(a $g(y)$ inverze), hogy $x = g(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)+\ln f(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

azaz $f(x) + \ln f(x) = x^3$ $\forall x \in \mathbb{R}$.)

b) Pontosan kettő.

A $g(y) = y^2 + \operatorname{ch} y - 1$ jelöléssel

1. $g(y)$ akkor és csak akkor 0, ha $y = 0$ (hiszen $g(o) = 0$ és $\operatorname{ch} y > 1$ ha $y \neq 0$).
2. $R_g = [0, \infty)$
3. $g(y)$ invertálható (mert szigoruan monoton) $[0, \infty)$-en és $(-\infty, 0]$-n, itt folytonos, tehát <u>egyetlen</u> folytonos $f_1: [0, \infty) \to [0, \infty)$ függvény van,

   hogy $g(f_1(x)) = x$ $\forall x \in [0, \infty)$,

   és $f_1(x) > 0$ ha $x > 0$ (1)

   és <u>egyetlen</u> folytonos $f_2: [0, \infty) \to (-\infty, o]$ van,

   hogy $g(f_2(x)) = x$ $\forall x \in [0, \infty)$,

   és $f_2(x) < 0$, ha $x < 0$ (2)

   (mellesleg: $f_2 = -f_1$).

4. Tegyük fel, hogy van folytonos $f_3: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, hogy

   $g(f_3(x)) = x$ $\forall x \in [0, \infty)$. (3)

   Ekkor $f_3(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$. Igy $f_3(x)$ folytonossága miatt vagy $f_3(x) > 0$

   $\forall x \in (0, \infty)$ vagy $f_3(x) < 0$ $\forall x \in (0, \infty)$,

   amiből (1)- és (2)-vel látható, hogy vagy $f_3 = f_2$ vagy $f_3 = f_1$.

2. a) Minden $c \in \mathbb{R}$ esetén egyetlen.
   b) Minden $c > 0$ esetén pontosan kettő, $c=0$-ra csak $x=0$.

60. a) $\boxed{1.}$ Megoldás.

1. $D_f = \mathbb{R}$ $\qquad R_f = [-1,1]$

2. Miután a cos x függvény inverzén, arccos x -en, definiciószerüen a $[0, \pi]$ -hez tartozó inverzét értjük, f(x) invertálhatóságához 25. pl. 3. alapján fenn kell állnia:

$$0 \leqslant e^{(x+2)^2} \leqslant \pi \qquad (1)$$

Mivel egyrészt a bal oldali egyenlőtlenség mindig teljesül ($e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$), másrészt ln x monoton növő függvény, igy (1) akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$-2 - \sqrt{\ln \pi} \leqslant x \leqslant \sqrt{\ln \pi} - 2 \qquad (2).$$

Miután az e^x kölcsönösen egyértelmü mindenütt, és az $(x+2)^2$ kölcsönösen egyértelmü

egyrészt a $[-2, \infty)$

másrészt a $(-\infty, -2]$

intervallumon igy, miután invertálható függvények összetett függvénye invertálható (lásd 25. pl. 2.), az $e^{(x+2)^2}$ függvény kölcsönösen egyértelmü egyrészt $x \geqslant -2$, másrészt $x \leqslant -2$ esetén. Ezt (2)-vel összevetve a cos $e^{(x+2)^2}$ függvény invertálható egyrészt az $I_1 = [-2, -2+\sqrt{\ln \pi}]$ (3)
másrészt az $I_2 = [-2-\sqrt{\ln \pi}, -2]$ (4)
intervallumon.

3. Az inverzhez az inverz függvény definiciója segitségével jutunk.

A megengedett intervallumokon cos $e^{(x+2)^2} = y$ akkor és csak akkor teljesül, ha $e^{(x+2)^2} = \arccos y$, ami akkor és csak akkor igaz, ha $(x+2)^2 = \ln \arccos y$ (5).
a) ha $x \geqslant -2$, (5) akkor és csakis akkor áll fenn, ha

$$x = \sqrt{\ln \arccos y} - 2 .$$

Igy az inverz itt $f_1^{-1}(x) = \sqrt{\ln \arccos x} - 2$.

Ennek értelmezési tartományát a következőképpen állitjuk elő: az inverz függvény definiciójából: ha f H-n invertálható, a H-hoz tartozó inverzére

$$D_{f^{-1}} = f(H),$$

ezért $D_{f_1^{-1}}$ a (3)-beli inervallum f szerinti képe,

Mivel $f(x) = \cos e^{(x+2)^2}$ folytonos, és mivel $(x+2)^2$ az $x \geq -2$ esetben monoton nő, e^x monoton nő, cos x monoton csökken, tehát f(x) monoton csökken (lásd 19. pl. 2.), igy $-2 \leq x \leq -2 + \sqrt{\ln \pi}$ akkor és csak akkor, ha

$$\cos 1 \geq f(x) \geq \cos \pi = -1, \quad \text{azaz} \quad D_{f_1^{-1}} = [-1, \cos 1].$$

És valóban ellenőrizhető, hogy az

$$f(x) = \sqrt{\ln \arccos x} - 2$$

mint elemi függvények összetett függvénye értelmezve van a $[-1, \cos 1]$ intervallumon, mert egyrészt mivel $\cos 1 < 1$, ezért $[-1, \cos 1] \subset D_{\arccos x}$, másrészt ha $x \leq \cos 1$, akkor $\arccos x \geq 1$, igy $\ln \arccos x \geq 0$.

b) Ugyanugy, ahogy a)-ban csináltuk, az f invertálható a $[-2-\sqrt{\ln \pi}, -2]$ intervallumon és itt inverze

$$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{\ln \arccos x} - 2$$

$$D_{f_2^{-1}} = [-1, \cos 1].$$

4. Az, hogy I_1, I_2 két legbővebb halmaz, amin a függvény invertálható, következik abból, hogy egyrészt 2. miatt bármely olyan $H \subset D_f$-re, melyen f invertálható:

$$H \subset [-2-\sqrt{\ln \pi}, -2+\sqrt{\ln \pi}] = H_o$$

(lásd (2)),

másrészt, ha $H \subset H_0$ olyan, hogy például $I_1 \subset H$, $I_1 \neq H$, akkor egy $x \in H$ $x \notin I_1$ esetén kell, hogy $x \in I_2$ teljesüljön ($I_1 \cup I_2 = H_0 \supset H$), ekkor $-2 - \sqrt{\ln \pi} \leq x \leq -2$, de így az $y = -4-x$-re $-2 \leq y \leq -2 + \sqrt{\ln \pi}$, azaz $y \in I_1 \subset H$. Vagyis $x, y \in H$, $y = -4-x$, $y \neq x$ ($x \notin I_1$, $y \in I_1$) és $f(x) = \cos e^{(x+2)^2} = \cos e^{(y+2)^2} = f(y)$, azaz f H-n nem kölcsönösen egyértelmű. Ugyanígy látható be, hogy I_2-nél sincs bővebb halmaz, melyen f invertálható volna.

5. Összefoglalva:

$$f_1^{-1}(x) = \sqrt{\ln(\arccos x)} - 2$$

$$D_{f_1^{-1}} = [-1, \cos 1]$$

$$R_{f_1^{-1}} = \left[-2, -2 + \sqrt{\ln \pi}\right]$$

$$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{\ln(\arccos x)} - 2$$

$$D_{f_2^{-1}} = D_{f_1^{-1}}$$

$$R_{f_1^{-1}} = \left[-2 - \sqrt{\ln \pi}, -2\right]$$

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left[-1, \frac{1}{2}\right]$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{1 - \ln \sqrt{2}\}$,

f invertálható egész D_f-en:

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{2(x-1)} + 1}{2e^{2(x-1)} - 1}, \qquad D_{f^{-1}} = R_f .$$

3. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} < x \leq \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{4}} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$,

$R_f = [0, \infty)$. Invertálható a $\left(\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right]$ intervallumon, az

inverz $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} e^{x^2}}$,

$D_f^{-1} = [0, \infty)$, $R_f^{-1} = \left(\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right]$.

4. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq (4k-1)\frac{\pi}{4} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$,

$R_f = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Invertálható a $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon,

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1-x}{x}$,

$D_f^{-1} = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, $R_f^{-1} = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

5. $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x > 1 \}$, $R_f = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$.

Invertálható az egész D_f-en,

$f^{-1}(x) = e^{\sqrt[3]{\ln x}} + 1$, $D_f^{-1} = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$, $R_f^{-1} = D_f$.

6. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = (\operatorname{tg}(-1), \operatorname{tg} 1]$.

Invertálható a pozitiv, illetve a negativ valós féltengelyen:

$f_1^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{arctg} x}{1 + \operatorname{arctg} x}}$, $D_{f_1}^{-1} = (\operatorname{tg}(-1), \operatorname{tg} 1]$,

$R_{f_1}^{-1} = \{ x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0 \}$,

$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{arctg} x}{1 + \operatorname{arctg} x}}$, $D_{f2}^{-1} = (\operatorname{tg}(-1), \operatorname{tg} 1]$,

$R_{f_2}^{-1} = \{ x \in R : x \leqslant 0 \}$.

7. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Invertálható az $[1, \infty)$ és a $(-\infty, 1]$ intervallumon:

$$f_1^{-1}(x) = \sqrt[4]{\operatorname{arthsin} x} + 1 ,$$

$$D_{f_1^{-1}} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad R_{f_1^{-1}} = [1, \infty) ,$$

$$f_2^{-1}(x) = -\sqrt[4]{\operatorname{arthsin} x} + 1 ,$$

$$D_{f_2^{-1}} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad R_{f_2^{-1}} = (-\infty, 1] .$$

8. $D_f = (-\infty, -2-\sqrt{3}] \cup [-2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}, \infty)$,

$R_f = [0, \pi]$.

Invertálható egyrészt a $H_1 = (-\infty, -2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}, \infty)$ halmazon, itt

$$f_1^{-1}(x) = \frac{2}{\cos x} + \frac{\sqrt{4-\cos^2 x}}{\cos x} ,$$

$$D_{f_1^{-1}} = [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} , \quad R_{f_1^{-1}} = H_1 ,$$

másrészt a $H_2 = [-2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}]$ halmazon, itt

$$f_2^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\cos x} - \dfrac{\sqrt{4-\cos^2 x}}{\cos x} & x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & x = \dfrac{\pi}{2} , \end{cases}$$

$$D_{f_2^{-1}} = [0, \pi] , \quad R_{f_2^{-1}} = H_2 .$$

(Megj.: lásd 29. pl. 2.)

9. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \}$. Invertálható az

1. $I_1 = (-\infty, -\text{arch}2 -1]$-en, itt

$$f_1^{-1}(x) = -\text{arch}(\sqrt{x}+2) -1,$$

$$D_{f_1^{-1}} = [0, \infty), \quad R_{f_1^{-1}} = I_1 .$$

2. $I_2 = [-\text{arch}2 -1, -1]$-n, itt

$$f_2^{-1}(x) = -\text{arch}(-\sqrt{x}+2)-1 ,$$

$$D_{f_2^{-1}} = [0,1], \quad R_{f_2^{-1}} = I_2 .$$

3. $I_3 = [-1, \text{arch}2 -1]$-n, itt

$$f_3^{-1}(x) = \text{arch}(-\sqrt{x}+2)-1 ,$$

$$D_{f_3^{-1}} = [0,1], \quad R_{f_3^{-1}} = I_3 .$$

4. $I_4 = [\text{arch}2 -1, \infty)$-en, itt

$$f_4^{-1}(x) = \text{arch}(\sqrt{x}+2) -1 ,$$

$$D_{f_4^{-1}} = [0, \infty), \quad R_{f_4^{-1}} = I_4 .$$

10. $D_f = (0, \infty)$, $R_f = \mathbb{R}$. Az egész D_f-en invertálható:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2^x}, \quad D_f^{-1} = \mathbb{R}, \quad R_f^{-1} = (0, \infty).$$

11. $D_f = (-4,4)$, $R_f = (-\infty, \ln 4+3)$. Invertálható az

1. $I_1 = (-4,0]$-n, itt

$$f_1^{-1}(x) = -\sqrt{4-e^{x-3}}, \quad D_{f_1^{-1}} = (-\infty, \ln 4+3),$$

$$R_{f_1^{-1}} = I_1 .$$

2. $I_2 = [0,4)$-en, itt

$$f_2^{-1}(x) = \sqrt{4-e^{x-3}}, \quad D_{f_2^{-1}} = D_{f_1^{-1}} = R_f, \quad R_{f_2^{-1}} = I_2 .$$

12. $D_f = (0,\infty) \setminus \left\{\frac{1}{e}\right\}, \quad R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Invertálható az egész D_f-en,

$$f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{1-x}}, \quad D_f^{-1} = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad R_f^{-1} = (0,\infty) \setminus \left\{\frac{1}{e}\right\} .$$

b) 1. Mivel

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{ha } x \geqslant 0 \\ e^{x^2} & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = (0,\infty) .$$

Mivel e^{-x^2} kölcsönösen egyértelmű $x \geqslant 0$ esetén, és e^{x^2} kölcsönösen egyértelmű $x \leqslant 0$ esetén, valamint e^x kölcsönösen egyértelmű:

$e^{-x^2} = e^{y^2}$ akkor és csak akkor ha $-x^2 = y^2$, azaz $x = y = 0$, így $f(x)$ az egész D_f-en invertálható, és az inverz

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{\ln \frac{1}{x}}, & \text{ha } 0 < x \leqslant 1 \\ -\sqrt{\ln x}, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$$

$D_f^{-1} = (0, \infty)$, $R_f^{-1} = \mathbb{R}$.

2. $D_f = (0, \infty)$, $R_f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Invertálható a $(0,1]$-en, itt

$f_1^{-1}(x) = e^{-\operatorname{tg} x}$, $D_{f_1}^{-1} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $R_{f_1}^{-1} = (0,1]$,

valamint az $[1, \infty)$-en, itt

$f_2^{-1}(x) = e^{\operatorname{tg} x}$, $D_{f_2}^{-1} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $R_{f_2}^{-1} = [1, \infty)$.

3. $D_f = R_f = \mathbb{R}$. Mindenütt invertálható:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -\infty < x \leqslant 1 \\ \sqrt{x}, & \text{ha } 1 \leqslant x \leqslant 16 \\ \log_2 x, & \text{ha } 16 < x < \infty, \end{cases}$$

$D_f^{-1} = R_f^{-1} = \mathbb{R}$.

4. $D_f = (-\infty, 4]$, $R_f = [-1, \infty)$. Invertálható az

1. $I_1 = (-\infty, 1]$-en, itt

$$f_1^{-1}(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{ha } 0 \leqslant x < 1 \\ \ln \frac{1}{x}, & \text{ha } 1 \leqslant x < \infty, \end{cases}$$

$D_{f_1}^{-1} = [0, \infty)$, $R_{f_1}^{-1} = I_1$.

2. $I_2 = [1,3]$-on, itt

$$f_2^{-1}(x) = \begin{cases} 2\left(1+\frac{1}{\pi}\arccos(-x)\right), & \text{ha } -1 \leqslant x < 0 \\ x+1, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$D_{f_2^{-1}} = [-1,1], \quad R_{f_2^{-1}} = I_2 .$$

3. $I_3 = [3,4]$-en, itt

$$f_3^{-1}(x) = 2\left(1+\frac{1}{\pi}\arccos(-x)\right),$$

$$D_{f_3^{-1}} = [0,1], \quad R_{f_3^{-1}} = I_3 .$$

5. $D_f = [0,\infty)$, $R_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} [2k, 2k+1)$.

Az egész D_f-en invertálható:

$$f^{-1}(x) = x - \frac{[x]}{2},$$

$$D_f^{-1} = \{x \geqslant 0 : [x] \text{ páros}\} = R_f,$$

$$R_f^{-1} = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}.$$

($f(x) = y = x+k \quad k \leqslant x < k+1$,

amiből $x = y-k \quad 2k \leqslant y < 2k+1$)

c) 1. 1. $D_f = \mathbb{R}$

2. $y = e^{2x} - e^x$ -ből $\quad z = e^x \quad (1)$

helyettesítéssel z-ben másodfoku egyenletre jutunk, melyből

$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}}$ (2), igy a függvény invertálható a

$z \geqslant \frac{1}{2}$ illetve $z \leqslant \frac{1}{2}$ intervallumokon, azaz, ha

$e^x \geqslant \frac{1}{2}$ illetve $e^x \leqslant \frac{1}{2}$, ami az $\ln x$ monotonitása miatt,

és mert $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, akkor és csak akkor teljesül,

ha $x \geqslant \ln \frac{1}{2}$ illetve $x \leqslant \ln \frac{1}{2}$.

Miután $f(x)$ folytonos az egész $\mathbb{R}$ -en, és a fentiek szerint invertálható az

$$I_1 = \left[\ln \frac{1}{2}, \infty\right) \text{ és az } I_2 = \left(-\infty, \ln \frac{1}{2}\right] \qquad (3)$$

intervallumokon, igy ezeken monoton (lásd 101. pl. b)-vel analóg tételt $\mathbb{R}$ -re). Mivel $\ln \frac{1}{4} < \ln \frac{1}{2} < 0$ és

$$f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \quad f(o) = 0,$$

$$f\left(\ln \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16},$$

azaz

$$f\left(\ln \frac{1}{4}\right) > f\left(\ln \frac{1}{2}\right) \quad \text{és} \quad f(o) > f\left(\ln \frac{1}{2}\right),$$

ezért I_1-en monoton csökkenő és I_2-n monoton növő.

(Megjegyzés.
Ez az eredmény megkapható 4. pl. 1. e)-ből is hiszen a $g(z) = z^2 - z$ jelöléssel $f(x) = g(e^x)$, és $g(x)$ az idézett példa szerint $z \leqslant \frac{1}{2}$ -re szigoruan monoton csökkenő, $z \geqslant \frac{1}{2}$ -re szigoruan monoton növő, valamint, mivel e^x mindenütt szigoruan monoton növő, és szigoruan monoton növő függvények összetett függvénye szigoruan monoton növő, egy

szigoruan monoton növő és egy szigoruan csökkenő függvény összetett függvénye szigoruan monoton csökkenő, és szigoruan monoton függvény invertálható. Most a szigoru monotonitásból következtettünk az invertálhatóságra, mig az előbb - a folytonosság felhasználásával - forditva.)

Ebből következik, hogy $f\left(\ln \frac{1}{2}\right) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (4)

Ezzel $\inf R_f = f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. (5)

Másrészt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ és f folytonos, igy ezzel és (5)-tel $R_f = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$.

3. (1), (2) és (3)-ból: f invertálható I_1-en, és itt

$$f_1^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right),$$

$D_{f_1^{-1}} = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$, $R_{f_1^{-1}} = \left[\ln \frac{1}{2}, \infty\right) = I_1$, illetve

I_2-n, és itt

$$f_2^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right),$$

$D_{f_2^{-1}} = \left[-\frac{1}{4}, 0\right)$, $R_{f_2^{-1}} = \left(-\infty, \ln \frac{1}{2}\right] = I_2$.

2. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

(R_f-hez:

a $z = \sin^2 x$ helyettesitéssel az $y(z) = z^2 - z + 1$ polinomhoz jutunk. Miután folyt. függvények összetett függvényeiről van szó és $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, azt kell megnéznünk, melyek $y(z)$ szélsőértékei a $[0,1]$-ben.
Ugyanugy ahogy az 1. példánál tettük, abból, hogy $y(z)$ $z \leq \frac{1}{2}$ és $z \geq \frac{1}{2}$ -re invertálható, adódik, hogy minimuma van

$z = \frac{1}{2}$ -ben és maximuma az intervallum szélein.)

Invertálható az alábbi intervallumokban

1. $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ -en, itt

$$f_1^{-1}(x) = -\arcsin\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}},$$

$$D_{f_1^{-1}} = \left[\frac{3}{4}, 1\right] = R_f, \quad R_{f_1^{-1}} = I_1.$$

2. $I_2 = \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ -n, itt

$$f_2^{-1}(x) = -\arcsin\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{3}{4}}},$$

$$D_{f_2^{-1}} = \left[\frac{3}{4}, 1\right] = R_f, \quad R_{f_2^{-1}} = I_2.$$

3. $I_3 = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ -n, itt

$$f_3^{-1}(x) = \arcsin\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{3}{4}}},$$

$$D_{f_3^{-1}} = R_f, \quad R_{f_3^{-1}} = I_3.$$

4. $I_4 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ -n, itt

$$f_4^{-1}(x) = \arcsin\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}},$$

$$D_{f_4^{-1}} = R_f, \quad R_{f_4^{-1}} = I_4.$$

3. $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$.

(R_f-hez: $z = \operatorname{sh} x$ helyettesitéssel az $y(z) = z^2-3z+2$ polinomhoz jutunk. 14. pl. b)-ből ennek minimuma $z = \frac{3}{2}$ -ben van és $y(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$, valamint $R_{\operatorname{sh}x} = \mathbb{R}$.) Invertálható az

1. $I_1 = (-\infty, \operatorname{arsh}\frac{3}{2}]$-en, itt

$$f_1^{-1}(x) = \operatorname{arsh}\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{1+4x}}{2}\right),$$

$$D_{f_1^{-1}} = R_f, \qquad R_{f_1^{-1}} = I_1 .$$

2. $I_2 = [\operatorname{arsh}\frac{3}{2}, \infty)$-en, itt

$$f_2^{-1}(x) = \operatorname{arsh}\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{1+4x}}{2}\right),$$

$$D_{f_2^{-1}} = R_f, \qquad R_{f_2^{-1}} = I_2 .$$

61. 1. a) 1. $D_f = [-1,1]$, $f(x) = x$.

(cos x a $[0, \pi]$-n arccos x inverze)

2. $D_f = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} \end{cases},$$

és $f(x+2k\pi) = f(x)$ tetszőleges $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$-re. Vagy másképpen

$$f(x) = \begin{cases} x - 2k\pi & \text{ha } (4k-1)\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant (4k+1)\frac{\pi}{2} \\ (2k+1)\pi - x & \text{ha } (4k+1)\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant (4k+3)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(α) arcsin x a sin x $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-hez tartozó inverze: definició szerint

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{ha} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (1)$$

β) Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin x = \sin(\pi - x) \qquad (2)$$

és ha $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ akkor $(\pi - x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Igy (1)- és (2)-vel:

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x, \quad \text{ha} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \qquad (3)$$

γ) sin x 2π szerint periodikus és valamely $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ -re

$$x - 2k\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Ezzel a k-val tehát felhasználva (1) és (3)-at:

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x - 2k\pi)) =$$

$$= \begin{cases} x - 2k\pi & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x - 2k\pi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - (x - 2k\pi) & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x - 2k\pi \leqslant \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

3. $D_f = [-1, 1]$,

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

$(\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R})$

4. $D_f = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases} ,$$

és $f(x+2k\pi) = f(x)$ tetsz. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$-ra.

($\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ és lásd 2.)

5. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$,

$f(x) = x$ ha $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ és $f(x+k\pi) = f(x)$

tetsz. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ -ra.

(vagy másképp $f(x) = x - k\pi$ ha $x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

tetsz. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ -ra.)
(az eljárás analóg a 2.-belivel).

6. $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

($\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

7. $D_f = (-1,1)$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

($\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

8. $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

9. $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

$(\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R})$

10. $D_f = \{ x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1 \}$, $f(x) = x$.

11. $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

b) 1. $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, ha $x \in [-1,1]$.

$(\sin 2x = 2\sin x \cos x)$

2. $f(x) = |x|$, ha $x \in [-1,1]$.

$(\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, igy

$\cos(\arcsin \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2})$

3. $f(x) = |x|$, ha $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$.

$(\cos(\mathrm{arctg}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}})$

2. 1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Ebből $x = \arcsin y$ helyettesítéssel $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right) = y$, ha $y \in [-1,1]$,

tehát $\frac{\pi}{2} - \arcsin y = \arccos y$, ha $y \in [-1,1]$.

2. 1.a) 7.-ből $\mathrm{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $x \in (-1,1)$ (1).

Másrészt 1.a) 5.-ből, ha $x \in (-1,1) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x$, igy (1)-ből $\arcsin x = \mathrm{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\frac{1}{\operatorname{tg} y}$ $\forall y \neq 0$, $y = \operatorname{arctg} x$ helyettesítéssel:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0 \qquad (2).$$

Ha $x > 0$, akkor $0 < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, amiből

$$-\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2},$$ tehát 1.a)5. és (2)-ből

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

Ugyanígy kapjuk, ha $x < 0$ (1.a)5.-ben ilyenkor $k = 1$), hogy

$$\operatorname{arctg} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x - \pi = \operatorname{arctg}\frac{1}{x},$$

azaz $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

63. 1. Jelöljük $f(g(y)) = h(y)$. A feltétel szerint létezik a $\lim\limits_{y \to g^{-1}(x_0)} h(y)$ (1). Miután g^{-1} folytonos (a,b)-n, ezért létezik $\lim\limits_{x \to x_0} g^{-1}(x) = g^{-1}(x_0)$ (2), és mivel invertálható is, így szigoruan monoton (lásd 101. pl. b)) (3).
Így (1)-, (2)-, (3)-mal h-ra és g^{-1}-re fennállnak az összetett függvény határértékére vonatkozó tétel feltételei, és mivel $h(y) = f(g(y))$ és $h(g^{-1}(x)) = f(g(g^{-1}(x))) = f(x)$, így létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{y \to g^{-1}(x_0)} f(g(y))$.

2. Legyen $\varepsilon > 0$ tetsz. Feltétel szerint van $A \in \mathbb{R}$ és $\delta > 0$, hogy $\left|f\left(\frac{1}{y}\right) - A\right| < \varepsilon$, ha $0 < y < \delta$ (1).

Legyen $x > \frac{1}{\delta}$, ekkor $0 < \frac{1}{x} < \delta$, és ezzel és (1)-gyel

$$|f(x) - A| = \left| f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) - A \right| < \varepsilon .$$

64. 1. nem létezik
2. 1
3. 1
4. nem létezik
5. nem létezik
6. 0
7. ∞
8. nem létezik
9. 1 $\left(\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}\right)$
10. 1 $(x-1 \leq [x] \leq x)$

65. $\boxed{1.}$ a) Mivel a $g(x) = x$ folytonos, ezért az $f(x) = x^2-2x+2$ mint folytonos függvények szorzatösszege mindenütt folytonos,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1 .$$

b) Ha $x < 0$, akkor $x^3+2x^2-1 = x^3\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$, és könnyen beláthatóan $x^3 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$, valamint $\frac{2}{x}, -\frac{1}{x^3} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$, (63. pl. 2. mintájára), igy $1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 1$. Mivel fennáll (62. pl. 3. mintájára), hogy ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ és $\lim_{x \to -\infty} g(x) = c > 0$, akkor $\lim_{x \to -\infty} f(x) \cdot g(x) = -\infty$, igy

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3+2x^2-1) = -\infty .$$

2. ∞
3. $-\infty$
4. ∞
5. ∞
6. 14
7. ∞
8. ∞
9. ∞
10. $-\infty$

66. a) 1. 0
2. -1
3. $\sqrt{\frac{1}{2}}$
4. 0
5. 1
6. $-\frac{26}{27}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

(Algebrai tört kifejezések folytonosak mindenütt, ahol a nevező nulla és a 2n-edik gyökvonások argumentuma nem negatív.)

67. $\boxed{1.}$ Ha léteznek a megfelelő határértékek, akkor az alapműveletek a határértékképzés sorrendjével felcserélhetőek:

$x > 0$ esetén

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-2}{3x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x} - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}} = \frac{1-0-0}{3+0} = \frac{1}{3}.$$

2. 1
3. 0
4. 0
5. 0
6. ∞
7. $-\infty$
8. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$
9. $\frac{1}{3}$
10. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
    b) ∞
11. $\frac{1}{9}$
12. $-\infty$
13. 8
14. -1
15. 1
16. $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$
17. $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$
18. a) $\frac{1}{2}$
    b) $-\frac{1}{2}$ $\left(\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,!\right)$
19. 4
20. a) $\sqrt{2}$
    b) 0
    c) ∞
21. ∞

68. 1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} (x-x_0)^{k_1-k_2}$

2. 1. 0

2. a) ∞ b) $-\infty$

3. nem létezik ($\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = -\infty$)

4. 6

69. a) $\boxed{1.}$ Mivel mind a számlálónak, mind a nevezőnek gyöke az $x = 1$, így mindkettőben szerepel az $x-1$ gyöktényező.
Így, ha $x \neq 1$, akkor

$$\frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3} = \frac{x^3 + x^2 + x - 2}{x^4 + x^3 + x^2 + x-3} .$$

Az utóbbi kifejezés folytonos az $x = 1$-ben, így

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3} = 1 .$$

2. $-\frac{1}{2}$

3. $\frac{1}{2}$

4. 0

5. nem létezik

6. $-\infty$

7. ∞

8. 1

9. nem létezik

10. 6

11. 10

12. $(\frac{3}{2})^{10}$

13. 1. nem létezik
2. $\frac{1}{5}$
3. nem létezik
4. $\frac{1}{2}$
5. 0

14. -1

b) 1. $\frac{n(n+1)}{2}$

(Teljes indukcióval igazolható: $\forall x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x^n+x^{n-1}+\ldots+x-n = (x^{n-1} + 2x^{n-2}+3x^{n-3}+\ldots+(n-1)x+n)(x-1))$$

2. $\frac{n-2}{m-2}$

(Teljes indukcióval igazolható: $\forall x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x-1)(x-1) = x^n -2x +1)$$

3. $\frac{nm(n-m)}{2}$

(A számláló kettőnél magasabbfoku tagjai x^2 -el osztva is 0-hoz tartanak.)

4. $\frac{m}{n}$

(Teljes indukcióval igazolható: $\forall x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1))$$

5. $\frac{n(n+1)}{2}$

(Teljes indukcióval belátható: $\forall x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x^{n+1} - (n+1)x + n = (x^n + x^{n-1} + \ldots + x - n)(x-1)$$

és lásd 1. Utmutatását.)

70. 1. a) 2
b) nem létezik
2. 2
3. 5
4. $-\sqrt[5]{3}$
5. 1
6. 2
7. 1
8. a) ∞
b) $-\infty$

71. a) $\boxed{1.}$ Miután $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$, igy, ha $a+b \neq 0$, akkor

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$ Mivel $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \neq 0$, igy

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - x^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 .$$

2. $\frac{1}{2}$
3. 1
4. 3
5. $\frac{1}{2}$
6. 0
7. 1. 0
2. $-\frac{1}{2}$ ($x=-y$ helyettesítés)

(b) Teljes indukcióval igazolhatóak:

α) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

β) 1.-ből $b=-b$ helyettesitéssel páratlan n-re:

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b \pm \ldots + b^{2k}) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

1. 0
2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{5}{3}$
4. $\frac{7}{36}$ (itt α)-beli $n = 12$)
5. $\frac{112}{27}$ (itt α)-beli $n=6$)
6. $\frac{4}{3}$
7. $\frac{2}{3}$
8. 0
9. $\frac{3}{2}$
10. (itt α)-beli $n=6$)
11. $-\frac{1}{4}$

$$(x(\sqrt{x^2+2x} - 2\cdot\sqrt{x^2+x} + x) = x((\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x}) + (x - \sqrt{x^2+x})))$$

12. $\frac{1}{2}$ ($x = y^6$ helyettesités)

c) 1. $\frac{1}{n}$
2. $\frac{1}{n}$
3. $\frac{n}{m}$
4. $\frac{a+b}{2}$
5. $\frac{2a^{\frac{1-n}{n}}}{n}$
6. $\frac{na-mb}{mn}$
7. 2^n
8. $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$

9. $\frac{1}{n!}$

$$\left(\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdot\ldots\cdot\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}\right.$$

és lásd 1.)

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

72. $\boxed{1.}$ 1. a) Ha $x > 0$, akkor $e^{2x} > 1$, azaz $e^{2x}-1 > 0$, és mivel

$$e^{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1, \text{ ezért } \frac{1}{1-e^{2x}} \xrightarrow[x\to 0+]{} \infty, \text{ amiből}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{1-e^{2x}} \xrightarrow[x\to 0+]{} \infty, \text{ hiszen } e^x \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \text{ (mivel } e^x \text{ min-}$$

denütt folytonos, és $e^0 = 1$).

b) ugyanugy ahogy a)-ban $f(x) \xrightarrow[x\to 0-]{} -\infty$, hiszen $e^{2x} < 1$, ha $x < 0$.

c) $$f(x) = \frac{e^x}{1-e^{2x}} = \frac{e^x}{e^{2x}} \cdot \frac{1}{e^{-2x}-1} = e^{-x}\frac{1}{e^{-2x}-1},$$

és mivel $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, így

$$\lim_{x\to\infty} e^{-2x} = \lim_{x\to\infty} (e^{-x})^2 = (\lim_{x\to\infty} e^{-x})^2 = 0 \quad (1), \text{ ezért}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1-e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\frac{1}{e^{-2x}-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x}-1} = 0 \cdot \frac{1}{0-1} = 0 .$$

d) Mivel $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ugyanugy, ahogy (1)-et kaptuk:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0, \text{ és így } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1-e^{2x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x}{1 - \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}} = \frac{0}{1-0} = 0 .$$

2. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 0

3. $-\infty$, ∞, $-\infty$, 0

4. 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

5. ∞, 0, ∞, $-\infty$

6. ∞, 0, 0, 1

7. 0, 0, ∞, ∞

8. $\frac{1}{2}$, 0, ∞, $-\infty$

9. -1, 1, $-\infty$, ∞

2. 1. 0, 0, ∞, ∞

2. 0, 0, ∞, $-\frac{1}{2}$

3. 2, 0, $\frac{1}{2}$, ∞

4. 0, 0, 0, 0

3. 1. nem létezik, nem létezik, 0, 0

2. 0 ($\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$), 0, 1 ($y = \frac{1}{x}$ helyettesítés), 1

3. nem létezik, nem létezik, ∞, ∞

73. 1. 1. $1\left(\frac{\ln(1+e^x)}{x} = \frac{\ln e^x + \ln(1+e^{-x})}{x}\right)$

2. 0

2. $\frac{\ln 3}{\ln 2}\left(\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \frac{\ln 3^x + \ln(1+3^{-x})}{\ln 2^x + \ln(1+2^{-x})}\right)$

3. $\ln 2\left(x - \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = x - \ln e^x - \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\right)$

4. $-\frac{\pi}{2}$

5. $\frac{\pi}{3}$

6. $-\frac{\pi}{4}$

7. 1. $\frac{\pi}{2}$

2. $-\frac{\pi}{2}$

3. $-\frac{\pi}{2}$

8. 1. 3

2. 1

9. 1. $\frac{1}{3}$

2. 1

10. 1. $\frac{2}{3}$

2. 1

3. $\frac{3}{2}$

4. $-\infty$

5. $\frac{1}{3}$

6. ∞

11. $0\left(\left|x\sqrt[3]{\cos\frac{1}{x^2}}\right| \leq |x|\right)$

12. $\frac{1}{2}\left(e^{-x}(1-\sqrt{1-e^x}) = e^{-x}\frac{e^x}{1+\sqrt{1-e^x}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{1}{2}\right)$

13. $-\frac{1}{4}$

74. 1. $\forall a > 0$-ra (a^x csak pozitív alapra értelmezett)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} & a = 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

2. $\forall a > 0$-ra (lásd 1.)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} & a = 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

3. $\forall a > 0$-ra (lásd 1.)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < a \leq 1 \\ a & a > 1 \end{cases}$$

($x > 0$ - ra

$1 \leq \sqrt[x]{1+a^x} \leq \sqrt[x]{2} = 2^{\frac{1}{x}}$, ha $0 < a < 1$, és

$a = \sqrt[x]{a^x} \leq \sqrt[x]{1+a^x} \leq \sqrt[x]{a^x+a^x} = 2^{\frac{1}{x}} \cdot a$, ha $a > 1$.)

4. Ha $\cos a > 0$ (lásd 1.), azaz ha

$a \in \left((4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ valamely $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ -ra,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & a \neq 2k\pi \\ 1 & a = 2k\pi \end{cases} \quad \text{valamely } k=0,\pm1,\pm2,\dots\text{-ra}$$

5. $\forall a \in \mathbb{R}$ -re $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{sign} a$

6. $\forall a \in \mathbb{R}$ -re $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} a & a \leqslant 0 \\ a^2 & a > 0 \end{cases}$

7. $\forall a \in \mathbb{R}$ -re $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{sign} a$

75. a) 1. a ($ax = y$ helyettesités)

2. $\frac{a}{b}$ $\left(x \neq 0: \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}} \cdot \frac{a}{b}\right)$

3. 1 ($x - \frac{\pi}{2} = y$ helyettesités)

4. 1

5. 0

6. 1

7. 1 ($x = \sin y$ helyettesités)

9. . ($x = \frac{1}{y}$ helyettesités)

10. 1

b) 1. 1. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{2}$

2. 1. $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3 \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2}\right)$

2. $\frac{1}{2}$

3. $-\frac{1}{4}$

4. $\sqrt{2}$

5. 0

6. $\frac{a}{b}$

7. $\frac{1}{3}$

8. $\frac{1}{4}$ (lásd 2.1.)

9. $-\frac{1}{12}$

10. $\frac{3}{2}$

11. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})$

12. 1. 1 $(y = \frac{\pi}{2} - x$ helyettesítés és $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - y) = \frac{1}{\operatorname{tg} y})$

2. $\frac{2}{\pi}$ $(1 - x = y$ helyettesítés és $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin z)$

13. cos a

14. $-\frac{1}{2}$ 15. $\frac{\pi}{2}$ (lásd a) 4.) 16. $-\frac{1}{2}$ 17. 1

18. 1. 1 (x = arcsiny helyettesítés után: $\frac{\operatorname{arctg} y}{\arcsin(\arcsin y)} =$

$$= \frac{\frac{\operatorname{arctg} y}{\arcsin y}}{\frac{\arcsin(\arcsin y)}{\arcsin y}} \xrightarrow[y \to 0]{} 1)$$

2. 1 (ugyanugy ahogy 1.)

19. 1. 0
2. 0

76. 1. $\boxed{1.}$ $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, igy $\frac{\operatorname{sh} x}{x} = e^{-x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x}$.

Miután e^x mindenütt folytonos, $\lim_{x \to 0} e^{-x} = e^0 = 1$. (1)

$y = 2x$ helyettesitéssel (ez megengedett helyettesités, hiszen $y = 2x$ mindenütt folytonosan invertálható: lásd 63. pl. 1.):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y} = 1 \text{, igy (1)-ből}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x-1}}{2x} = 1 \cdot 1 = 1 .$$

2. a) $x = e^{y}-1$ folytonosan invertálható megengedett helyettesitéssel:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{y}{e^{y}-1} \xrightarrow[y\to 0]{} 1 .$$

b) a)-ból $x = -y$ helyettesitéssel
c) a)-ból $x+1 = y$ helyettesitéssel

3. $a > 0$, igy $a^{x} = e^{\ln a^{x}} = e^{x \ln a}$, amivel $\frac{a^{x}-1}{x} = \frac{e^{x\cdot \ln a}-1}{x} =$

$= \ln a \cdot \frac{e^{x\cdot \ln a}-1}{x\cdot \ln a}$, és ebből $y = x\ln a$ helyettesitéssel

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^{x}-1}{x} = \ln a .$$

2. A. 1. a 3. 0 5. 1 7. 1

2. $\frac{a}{b}$ 4. 1 6. 1 8. 1

B. 1. 1. $\frac{1}{2}$ 2. $-\frac{1}{4}$ 4. $\frac{1}{3}$

2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{a}{b}$ 5. cha

(A trigonometrikus és hiperbolikus függvényekre fennálló analóg azonosságok alapján a feladatok megoldása analóg a 75. pl. a) 1., 2., 5., 6., 7., 8., illetve b) 1., 3., 6., 7., 13. feladatainak megoldásával.)

3. 1. a

2. $\frac{1}{a}\left(x-a = y \text{ helyettesitéssel } \frac{\ln(a+y)-\ln a}{y} = \frac{\ln(1+\frac{y}{a})}{y}\right)$

3. $2\left(\ln(x+e^x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{\frac{x}{e^x}} \cdot e^x\right)$

4. $\frac{1}{2}$ 6. 1. - 1 7. 1 9. e^a

5. $\frac{2}{9}$ 2. $\frac{1}{2}$ 8. $\ln\frac{a}{b}$ 10. a-b

11. a $\left(\frac{x^a-1}{x-1} = \frac{e^{a\cdot\ln x}-1}{x-1}\right.$ ha $x > 0$. $y = x-1$ helyettesitéssel

$$\frac{e^{a\cdot\ln(y+1)}-1}{y} = \frac{e^{a\cdot\ln(y+1)}-1}{a\cdot\ln(y+1)} \cdot \frac{a\cdot\ln(y+1)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} a\ )$$

12. a^a (lna-1) 13. 1 14. a^a.(lna+1) 15. ln a

77. 1. a) Miután ln x az e^x inverze, ha $f(x) > 0$, akkor $f(x) = e^{\ln f(x)}$ (lásd 24. pl. 2.).
Ebből mivel e^x mindenütt folytonos és szigoruan monoton, az összetett függvény határértékére vonatkozó tétellel

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x)}$$

b) Tetszőleges f valós függvény esetén, ha van $a \in \mathbb{R}$, hogy $(a, \infty) \subset D_f$ és $f(x) > 0$ ha $x > a$, valamint létezik a $\lim\limits_{x\to\infty} \ln f(x)$, akkor létezik a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ is, és

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln f(x)}$$

A bizonyítás gondolatmenete analóg az a)-beli állítás bizonyításának gondolatmenetével.

2. 1. e^2 (lásd 1. a) és 76. pl. 3. 3.)

2. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ $\left(\frac{\ln \cos \sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1-\sin^2 \sqrt{x})}{\sin^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}\right.$ ha $x > 0$)

3. $\sqrt{ab}$ 4. e 5. e 6. 1 7. e^{-2} 8. $\frac{1}{e}$

9. 1 10. e^{2a} 11. e^{-5} 12. e 13. e^2 14. e^2

78. 1. $\frac{a}{b}$ 2. 1 3. 1 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ 6. $2\frac{a}{b}$

7. -1 8. 1 9. a 10. 3 11. -ln 2 12. ln 8

13. 1 ($x > 0$ esetén az $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ megengedett helyettesítéssel:

$x \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = y \cdot \frac{\arccos y}{\sqrt{1-y^2}}$, amiből $y = \cos z$ helyettesítéssel

(ez megengedett: $0 < y < 1$) $y \cdot \frac{\arccos y}{\sqrt{1-y^2}} = \cos z \cdot \frac{z}{\sin z} \xrightarrow[z \to o]{} 1$)

14. 0

15. 1. 0

2. nem létezik

($x = \frac{1}{y}$ helyettesítéssel $\left|\frac{1}{y \cdot \sin \frac{1}{y}} \cdot \frac{\sin y}{y}\right| \xrightarrow[y \to o]{} \infty$, mert

$y \sin \frac{1}{y} \xrightarrow[y \to o]{} 0$, de $\lim\limits_{y \to o+} \operatorname{sign}(y \cdot \sin \frac{1}{y})$ nem létezik)

16. 1 17. 1. $\frac{1}{2}$ 2. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 3. 1

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

18. 1. $e^2 \left((2x+2)(\ln(2x+3) - \ln(2x+1))\right) = 2(x+1)\left(\ln(x+\frac{3}{2}) - \ln(x+\frac{1}{2})\right)$,

$y = \frac{1}{x}$ helycttesitéssel:

$$2(1+y)\left(\frac{\ln\left(1+\frac{3}{2}y\right)}{y} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}y\right)}{y}\right) \xrightarrow[y\to 0+]{} 2 \;)$$

2. $0 \left(x^2 \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} -\infty : \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \ln\frac{1}{2} < 0\right)$

3. $\infty \left(x \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty : \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \ln 2 > 0\right)$

19. e 20. 1. ∞ 2. 0

21. $0 \left(\ln \frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1} \xrightarrow[x\to\infty]{} \ln\frac{3}{2}$ és $\frac{x^3}{1-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} -\infty\right)$

22. -1 (arctg $x - \frac{\pi}{2} = -$ arctg $\frac{1}{x}$ ha $x > 0$ (lásd 61 pl. 2. 3. a)))

79. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik a

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ és a $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b$, igy:

1. Nincs megfelelő a,b

2. a) $a = 4$, $b = -4$

   b) $a = 0$, $b = -\frac{3}{2}$

   c) $a = b = 0$

3. a) Nincs megfelelő a,b

   b) $a = b = 0$

4. $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$

5. a) $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$

   b) $a = \frac{\pi}{2}$, $b = -1$ (lásd 78. pl. 22.)

6. $a = -1$

   $b = 0$

80. A. a) $\boxed{1.}$ Az $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ jelöléssel a 72. pl. 3.2.-ből

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$, ezért tetszőleges (b_n) sorozatra, melyre

$b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, és $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$, fennáll:

$$\lim_{n \to \infty} b_n \sin \frac{1}{b_n} = 1 .$$

A példában $b_n = n$ sorozat választással tehát

$$\lim_{n \to \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1 .$$

2. 1 3. e 4. 1 5. $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 6. $\sqrt[a]{b}$ 7. e

8. 0 $\left(\frac{\ln n}{n} = \ln \sqrt[n]{n}\right)$

9. Nem konvergens: $\lim\limits_{k \to \infty} a_{2k+1} = 1$, $\lim\limits_{k \to \infty} a_{4k} = 2$,

$\lim\limits_{k \to \infty} a_{4k+2} = 0$.

b) 1. 0

$$\left(\sqrt{n^2+1} = \left(\sqrt{n^2+1}-n\right) + n = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} + n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} + n \right.$$

$$\text{igy} \quad \sin\left(\pi \sqrt{n^2+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} + n\pi\right) =$$

$$= \sin\left(\pi \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) \cos n\pi + \cos\left(\pi \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) \sin n\pi \Big)$$

2. 1. Nem létezik. (lásd b) 1.)
2. 1 (lásd b) 1.)

3. 0

(Tetszőleges $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ esetén a $\sin x$ függvény definíciójából $0 < \sin x < x$ (1), igy teljes indukcióval bizonyitható,

hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$ (2), azaz a sorozat korlátos, és $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+1} < a_n$ azaz a sorozat monoton csökkenő. Így (a_n) konvergens és a definiáló összefüggésből $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ -ra fenn kell álljon $\sin A = A$ (3).

Miután (2)-ből $0 \leqslant A \leqslant \frac{\pi}{2}$ így (1) miatt csak $A = 0$ elégítheti ki (3)-at.)

B. 1. Konvergens.

(Az $\operatorname{arctg} \frac{x}{1+x}$ függvény a 19. pl. 2. a) alapján monoton növekedő $(0, \infty)$-ben.

Másrészt $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$. Ha monoton növekedő függvénynek létezik véges határértéke a végtelenben akkor az felső korlátja, így $\forall x > 0$ esetén

$$0 < \operatorname{arctg} \frac{x}{1+x} \leqslant \frac{\pi}{4} .$$

Fentiekből teljes indukcióval bizonyítható, hogy (a_n) monoton növekedő és felülről korlátos).

2. Konvergens.

3. Nem konvergens.

($\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n-1}| = e$ így nem lehet Cauchy sorozat).

81. a) Miután $f(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezett folytonos függvényekből összeadással, kivonással, szorzással, osztással és összetett függvényképzéssel áll elő, így értelmezett és folytonos minden olyan $x \in \mathbb{R}$ helyen, ahol a nevezőkben szereplő függvények nem nullák, tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ és f folytonos D_f-en.

A függvény tehát nem folytonos az $x = -1$ pontban.

α) A függvény viselkedése $x = -1$-ben.

Mivel $\lim\limits_{x\to -1+} \frac{1-2x^2}{1+x} = -\infty$ (lásd 68. pl. 1.), ezért az

összetett függvény határértékére vonatkozó tétellel, felhasználva, hogy $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = -1$, adódik, hogy

$$\lim_{x \to -1+} \left(1 + \operatorname{th} \frac{1-2x^2}{1+x}\right) = 0 .$$

Hasonlóan adódik, hogy $\lim\limits_{x \to -1-} \left(1 + \operatorname{th} \frac{1-2x^2}{1+x}\right) = 2$.

Azaz $f(x)$-nek $x = -1$ -ben ugrása van.

β) A függvény viselkedése a végtelenben.
Az eddigiekhez hasonlóan összetett függvény határértékére vonatkozó tételt felhasználva:

$$\frac{1-2x^2}{1+x} \xrightarrow[x \to \infty]{} -\infty, \text{ így}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. Ugyanigy kapható, hogy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

b) 1. 1. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ -n.

$x = 0$ ugrás,

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1 .$$

2. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ -n.

$x = 0$ megszüntethető szakadás, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 .$$

2. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos, ha $x \neq k$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Az $x = k$ helyeken ugrás:

$$\lim_{x \to k+} f(x) = f(k) = k, \quad \lim_{x \to k-} f(x) = k-1,$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty .$$

3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos, ha $x \neq k$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Az $x = k$, $k \neq 0$ helyeken ugrás:

$$\lim_{x \to k+} f(x) = f(k) = 1, \quad \lim_{x \to k-} f(x) = 1 - \frac{1}{k} .$$

Az $x = 0$-ban másodfaju szakadás:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

c) 1. $D_f = [0, \infty)$, folytonos $(0, \infty)$-en és $x = 0$-ban jobbról folytonos:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = f(0) = 1 \text{ és } \lim_{x \to 0-} f(x) \text{ nem létezik.}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ nem létezik.}$$

2. 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, folytonos D_f-en.

$x = 2$-ben másodfaju szakadás.

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \to 2-} f(x) = -\infty ;$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 .$$

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, folytonos D_f-en.

$x = 2$-ben másodfaju szakadás:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \infty ; \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 .$$

3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, folytonos D_f-en.

$x = \pm 2$-ben másodfaju szakadás:

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to -2+} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to -2-} f(x) = -\infty ;$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 .$$

4. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, folytonos D_f-en.

$x = 2$-ben másodfaju szakadás:

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \to 2-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty .$$

5. 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, folytonos D_f -en.

$x = 2$-ben megszüntethető szakadás:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 ; \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty .$$

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, folytonos D_f-en.

$x = 2$-ben ugrás:

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 2-} f(x) = -2; \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty .$$

6. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \setminus \{9\}$,

folytonos $D_f \setminus \{0\}$ -n .

$x = 0$-ban jobbról folytonos:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = f(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} , \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0-} f(x) \quad \text{nem létezik;}$$

$x=9$-ben másodfaju szakadás:

$$\lim_{x \to 9+} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \to 9-} f(x) = \infty ; \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{nem létezik.}$$

7. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \setminus \{1\}$, folytonos $D_f \setminus \{0\}$ -n.

$x = 0$-ban jobbról folytonos:

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ és $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ nem létezik.

$x = 1$ -ben megszüntethető szakadás:

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \sqrt{3}$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ nem létezik.

8. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, folytonos, D_f-en, $x=1$-ben megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -8$;

$x = 2$-ben másodfaju szakadás:

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

9. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \setminus \{2\}$, folytonos $D_f \setminus \{1\}$ -ön,

$x = 1$-ben jobbról folytonos:

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = f(1) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$ nem létezik.

$x = 2$-ben megszüntethető szakadás:

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ nem létezik.

10. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$, folytonos D_f-en.

$x = 2$-ben ugrás: $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = -1$.

$x = 3$-ban másodfaju szakadás:

$\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

d) 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban másodfaju szakadás: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \infty$.

$x = 1$-ben ugrás:

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} .$$

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, folytonos D_f-en.

$x = \pm 1$ ugrás:

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-} f(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

3. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} \setminus \{0\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$ -ban másodfaju szakadás: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

$x = 1$-ben másodfaju szakadás:

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$ nem létezik.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ nem létezik.

4. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban másodfaju szakadás: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

5. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

($|x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}| \leq \frac{\pi}{2} \cdot x$ tetsz. $x \neq 0$ esetén;

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{y \to 0+} f(\frac{1}{y})$)

6. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$, folytonos D_f-en.

$x = \ln 2$-ben másodfaju szakadás:

$\lim\limits_{x \to \ln 2+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \ln 2-} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

(a nevező e^x másodfoku kifejezése)

7. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

8. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban másodfaju szakadás:

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \infty$.

$x = 2$-ben megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

9. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left((0,1) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$, folytonos $D_f \setminus \{0,1\}$ -en.

$x = 0$-ban balról és $x = 1$-ben jobbról folytonos:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = f(0) = \frac{3}{\pi}, \quad \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1) = \frac{3}{2\pi} \quad \text{és}$$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$ nem létezik.

$x = -\frac{1}{2}$ -ben másodfaju szakadás:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\frac{1}{2}-} f(x) = \infty.$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{6}{\pi}.$$

10. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, folytonos D_f-en.

$x = 1$-ben megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1.$$

11. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left(\{0\} \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{\frac{1}{\ln \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}}\right\}\right)\right)$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban másodfaju szakadás:

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ nem létezik.

$x_k = \dfrac{1}{\ln \dfrac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}}$ helyeken ($k=1,2,3,\ldots$) másodfaju szakadás:

$$\lim_{x \to x_k^+} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \to x_k^-} f(x) = \infty ;$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \operatorname{tg} 1 .$$

12. Nincs értelmezve az $x_k = (4k-1)\frac{\pi}{4}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ és az $y_k = (2k-1)\frac{\pi}{2}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ pontokban.

Mindenütt másutt értelmezve van és folytonos.
Az x_k pontokban másodfaju szakadás:

$$\lim_{x \to x_k^+} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \to x_k^-} f(x) = -\infty .$$

Az y_k pontokban megszüntethető szakadás: $\lim_{x \to y_k} f(x) = 0$.

A $\lim_{x \to \infty} f(x)$ és $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ nem létezik.

13. $D_f = (-1,1)$, folytonos D_f -en.

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \to -1+} f(x) = -\infty$$

és $\lim_{x \to 1+} f(x)$, $\lim_{x \to -1-} f(x)$ nem létezik.

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ és $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ nem létezik.

14. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos D_f-en. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos $D_f \setminus \{0\}$ -n.

$x = 0$-ban megszüntethető szakadása van: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 .$$

16. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban másodfaju szakadás: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

17. 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban másodfaju szakadás: nem létezik sem

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ sem $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

18. Mindenütt értelmezett, ahol $x \neq (4k-1)\frac{\pi}{2}$ $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$
Értelmezési tartományán folytonos.

Az $x_k = (4k-1)\frac{\pi}{2}$ $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ pontokban megszüntethető szakadása van: $\lim\limits_{x \to x_k} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ nem létezik.

($h(x) = f(x)^{g(x)}$ esetén $D_h = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ és
$h(x) = e^{g(x)\ln f(x)}$)

19. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az $x_k = \frac{1}{k}$ $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ helyek kivételével folytonos.
Az $x=0$-ban másodfaju szakadás:

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ nem létezik.

Az x_k helyeken ugrás: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2n}-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2n+1}+} f(x) = 1$,

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2n+1}-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2n}+} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

20. $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$, folytonos D_f-en.

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ nem létezik,

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ nem létezik.

(lásd 18. Utm.)

21. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban ugrása van: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

22. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$-ban ugrása van: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{e}$.

23. Az $x_k = \frac{1}{k\pi}$ $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, és az $x = 0$ helyek kivételével mindenütt értelmezve van és folytonos.
Az $x = 0$ helyen másodfaju szakadás: nem létezik a

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$; az $x_k = \frac{1}{k\pi}$ $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ helyeken

másodfaju szakadás:

$$\lim_{x \to \frac{1}{(2n+1)\pi}-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2n\pi}+} f(x) = -\infty ,$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{(2n+1)\pi}+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2n\pi}-} f(x) = \infty ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty .$$

24. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos D_f-en.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ nem létezik.

25. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban másodfaju szakadás: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 .$$

($x \neq 0$ esetén $f(x) = \dfrac{2}{1 - \frac{\sin x}{x}}$ és $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$)

26. Az $x = 0$, $x = -1$ és $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ helyek kivételével értelmezett és folytonos. Az $x = 0$-ban megszüntethető szakadás:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 .$$

Az $x = -1$ -ben másodfaju szakadás: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$.

Az $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ pontokban másodfaju szakadás:

ha $k \geqslant 0$, akkor $\lim\limits_{x \to x_k^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to x_k^-} f(x) = \infty$,

ha $k < 0$, akkor $\lim\limits_{x \to x_k^+} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x \to x_k^-} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ nem létezik.

27. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, folytonos D_f-en.

Az $x = -2$-ben másodfaju szakadás: $\lim\limits_{x \to -2+} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x \to -2+} f(x) = -\infty$.

Az $x = 0$-ban másodfaju szakadás: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$.

Az $x = 2$-ben megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

28. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, folytonos D_f -en.

$x = 0$-ban ugrás: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \frac{9}{5}$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\frac{1}{5}$.

$x = 1$-ben ugrás: $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 1$. $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 2$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \frac{5}{3}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$.

29. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$.

30. $D_f = [1-\sqrt{e}, 1+\sqrt{e}] \setminus \{1\}$, folytonos az $(1-\sqrt{e}, 1+\sqrt{e}) \setminus \{1\}$ -ben. A D_f két végpontján jobbról, illetve balról folytonos, mivel nem létezik a

$\lim\limits_{x\to(1-\sqrt{e})-} f(x)$ és a $\lim\limits_{x\to(1+\sqrt{e})+} f(x)$, és $\lim\limits_{x\to(1-\sqrt{e})+} f(x) =$

$= \lim\limits_{x\to(1+\sqrt{e})-} f(x) = f(1-\sqrt{e}) = f(1+\sqrt{e}) = 0.$

$x = 1$-ben másodfaju szakadás: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$.

A $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ és a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ nem létezik.

e) 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, folytonos a $D_f \setminus \{-1,0,1\}$ -en.

$x = -1$-ben másodfaju szakadás: $\lim\limits_{x\to-1-} f(x) = f(-1) = 0$,

$\lim\limits_{x\to-1+} f(x) = -\infty$.

$x = 0$-ban ugrás: $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0) = e$.

$x = 1$-ben ugrás: $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = f(1) = 0$.

$x = 2$-ben másodfaju szakadás $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = -\infty$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

2. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} \setminus \{3\}$, folytonos a $D_f \setminus \{0,1,3\}$ -ban.

$x = 0$-ban jobbról folytonos, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ nem létezik.

$x = 1$, $x = 3$-ban megszüntethető szakadás:

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ nem létezik.

3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, \pi\}$, folytonos D_f-en.

$x = 0$-ban ugrás: $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$.

$x = \pi$ -ben másodfaju szakadás:

$\lim\limits_{x \to \pi-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \pi+} f(x)$ nem létezik, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

($\lim\limits_{x \to \pi+} f(x)$-hez: $\lim\limits_{x \to \pi+} \sin \frac{1}{x-\pi}$ nem létezik)

4. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, folytonos D_f -en.

$x = -1$ -ben másodfaju szakadás: $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = \frac{\sin(\pi(-1))}{(-1)^2-(-1)} = 0$,

$\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = -\infty$.

$x = 0$-ban megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\pi$.

$x = 1$-ben másodfaju szakadás:

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = -\pi$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

($\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$ -hez: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{x^2-x}$ meghatározható $y = x-1$ helyettesitéssel:

$$\frac{\sin \pi x}{x(x-1)} = \frac{\sin \pi (y+1)}{y(y+1)} = \frac{\sin \pi y \cdot \cos \pi + \sin \pi \cdot \cos \pi y}{y(y+1)} =$$

$$= - \frac{\sin \pi y}{y} \cdot \frac{1}{y+1} \;)$$

5. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, folytonos $D_f \setminus \{-1,2\}$ -n.

$x = -1$-ben ugrás: $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

$x = 2$-ben ugrás: $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \frac{\pi}{4} - 2$.

$x = 3$-ban másodfaju szakadás:

$\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

6. $D_f = \mathbb{R}$, folytonos, ha $x = k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; mindenütt másutt másodfaju szakadás; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ nem létezik.

7. $D_f = \mathbb{R}$.

Az $x = k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ helyek kivételével mindenütt folytonos, az $x_k = k$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ helyeken másodfaju szakadása van: $\lim\limits_{x \to x_k} f(x) = \infty$.

A $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ nem létezik.

8. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, folytonos $D_f \setminus \{0,2\}$ -n.

$x = -1$-ben ugrás: $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = -\frac{\pi}{3}$.

$x = 0$-ban megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

$x = 1$-ben megszüntethető szakadás: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

$x = 2$-ben ugrás:

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = -\frac{\pi}{6}, \quad \lim_{x \to 2-} f(x) = 2; \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

f) 1. $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x > -1 \}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 1 \\ \frac{\pi}{2}(x-1) & x > 1 , \end{cases}$$

amiből látható, hogy f folytonos D_f-en, $x = -1$-ben:

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -1-} f(x)$ nem létezik;

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ nem létezik.

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ -1 \}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 1 & |x| > 1 , \end{cases}$$

amiből: f folytonos $D_f \setminus \{1\}$ -en.

$x = -1$-ben és $x = 1$ -ben ugrás:

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = 1 .$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 .$$

3. $D_f = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 , \end{cases}$$

amiből látható, hogy f folytonos $D_f \setminus \{0\}$ -n,

x = 0-ban ugrás: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

4. $D_f = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0, \end{cases}$$

amiből látható, hogy f folytonos D_f-en.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

<u>82.</u> 1. 1. $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos^2 \pi x - 1}}{\sqrt{x}}$

3. $f(x) = \sqrt{e^{-(x-a)^2} - 1}$

4. $f(x) = \ln(-x^2)$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{x-a}}$

2. 1. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x-a} \cdot e^{\frac{1}{x-a}}$

2. α) $f(x) = \sin e^{\frac{1}{(x-x_0)^2}}$

β) $f(x) = \sin e^{-\frac{1}{x-x_0}}$

3. α) $f(x) = \cos x$

β) $f(x) = e^{-x} \cos x$

4. $f(x) = \dfrac{a+b+(a-b)\cdot\dfrac{\sqrt{(x-x_0)^2}}{x-x_0}}{2}$

83. 1. 1. $f(x) = \dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{x+1}{x+1}\cdot(x-1)\cdot\dfrac{1}{2-x}\cdot(3-x)$

2. $f(x) = (x+1)\cdot(x-2)\cdot\dfrac{x-3}{x-3}\cdot\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{(x+2)^2}\cdot(x+5)^4$

2. 1. $f(x) = \left(\dfrac{3}{2}\operatorname{th}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1-x}\right)-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{x+2}{x+2}\cdot\dfrac{1}{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1}+e^{x^2(x-1)}-1$

2. $f(x) = \left(\sin e^{\frac{1}{x}} - \sin e + \operatorname{th}\dfrac{1}{x-1}+1\right)\cdot\dfrac{2}{x^2+1}+\operatorname{th}(x-1)$

84. 1. $a = 1$
2. a tetsz., $b=1$
3. $a = \dfrac{1}{2}$
4. nincs ilyen a,b
5. $a=1$, $b=2k$ tetsz. $k=\pm1,\pm2,\ldots$
6. nincs ilyen a,b .
7. Tetszőleges $a < 1$.
8. Nincs ilyen a.

85. 1. a) $D_{fog} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ -n folytonos, $x = 0$-ban megszüntethető szakadás.
b) $D_{fog} = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ -n folytonos, $x = 0$-ban megszüntethető szakadás.
2. $D_{fog} = \mathbb{R}$ -en folytonos.
3. a) $D_{fog} = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ -n folytonos; $x=0$, $x=1$-ben megszüntethető szakadás.
b) $D_{fog} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ -en folytonos, $x=0$-ban megszüntethető szakadás.
4. $D_{fog} = \mathbb{R}$ -en folytonos.
5. $D_{fog} = \mathbb{R}$ -en folytonos.
6. $D_{fog} = (-1,\infty)\setminus\{0\}$, $x=0$-ban megszüntethető szakadás.

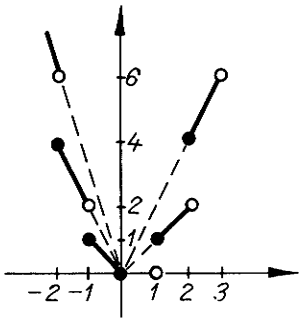
7. a) $D_{fog} = \mathbb{R}$ -en folytonos.

b) $D_{fog} = \mathbb{R}$,

folytonos az $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ pontokban, mindenütt másutt másodfaju szakadása van.

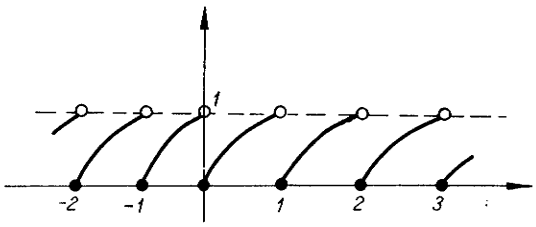
c) $D_{fog} = \mathbb{R}$ -en folytonos $((fog)(x) \equiv x)$

86. a) 1.



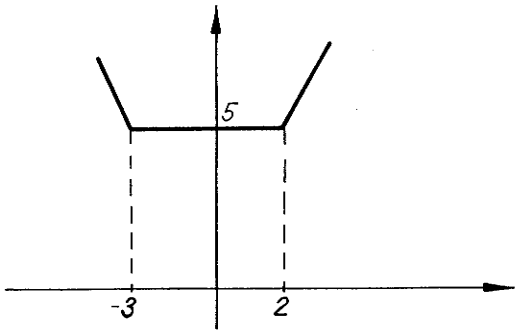
7. ábra

2.



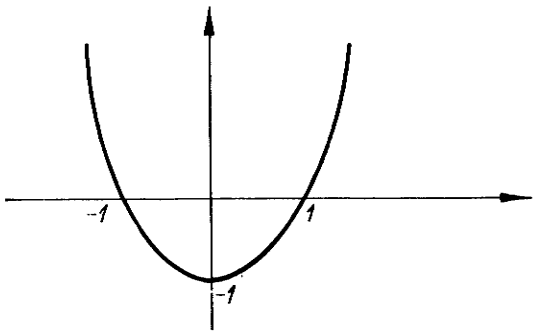
8. ábra

b) 1.



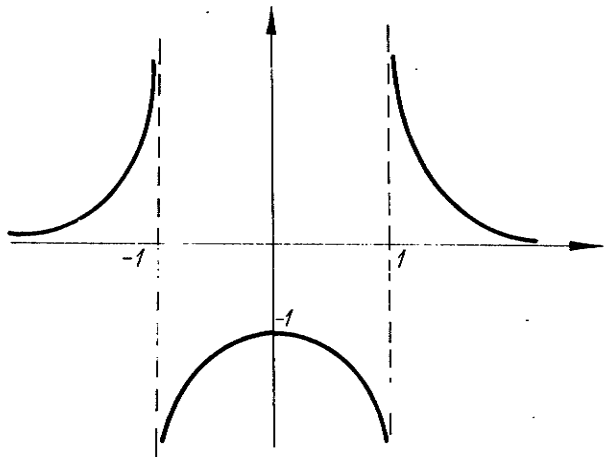
9. ábra

α)



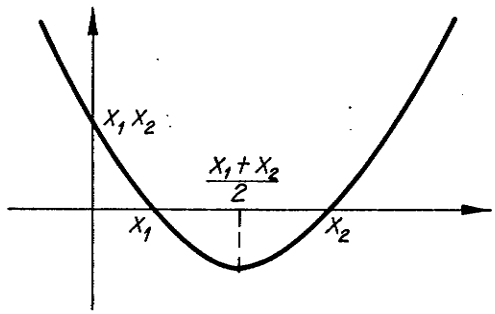
10. ábra

(β)



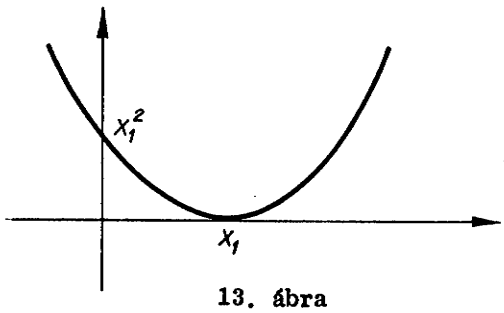
11. ábra

(S) 1. ha $x_1 \neq x_2$, pl. $0 < x_1 < x_2$:



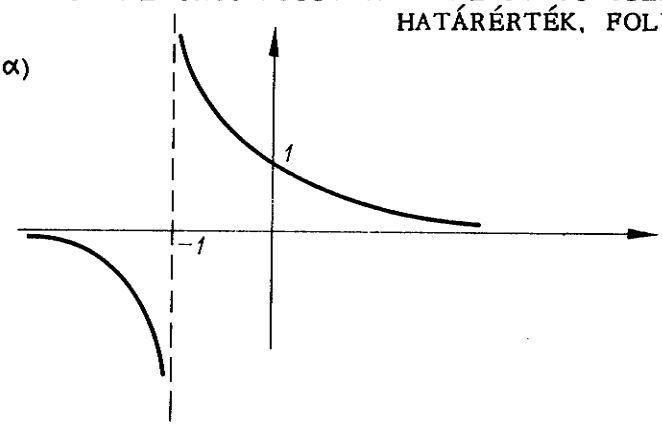
12. ábra

$$\left((x-x_1)(x-x_2) = \left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + x_1 \cdot x_2 \right)$$



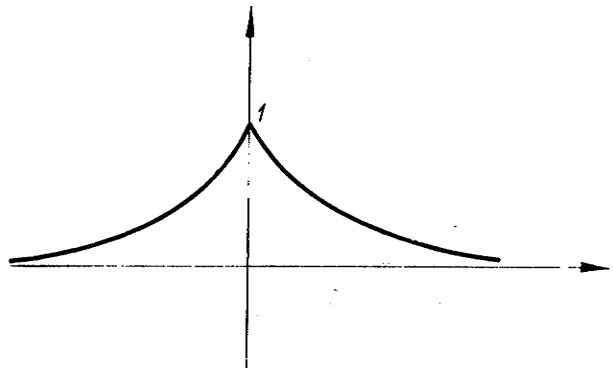
13. ábra

4. α)



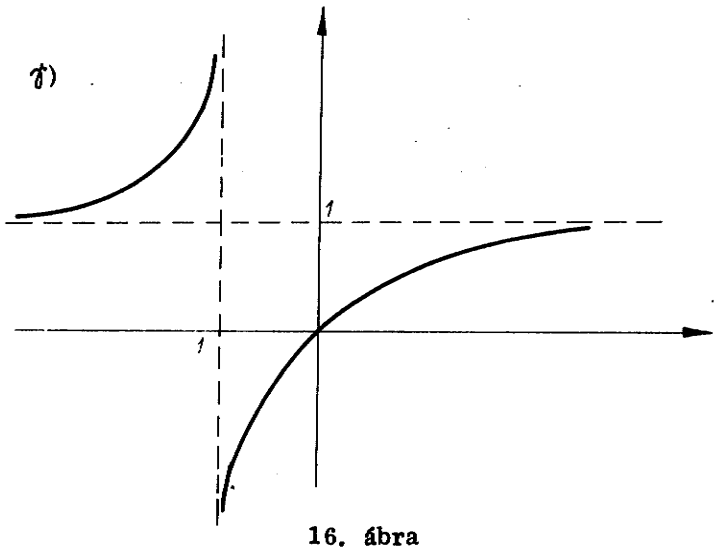
14. ábra

β)



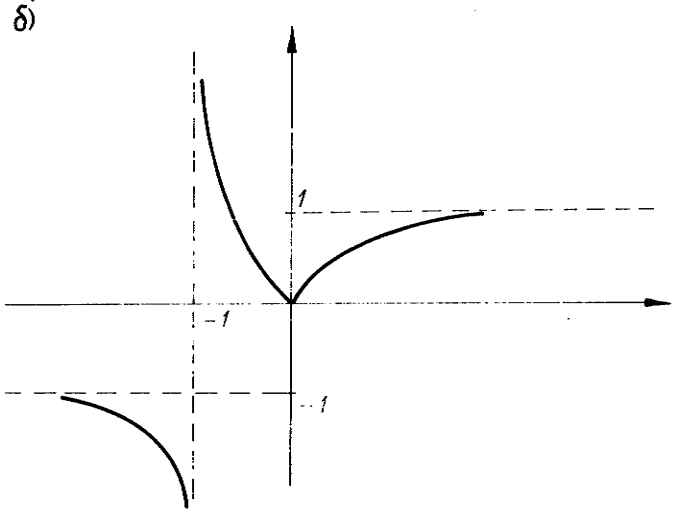
15. ábra

γ)



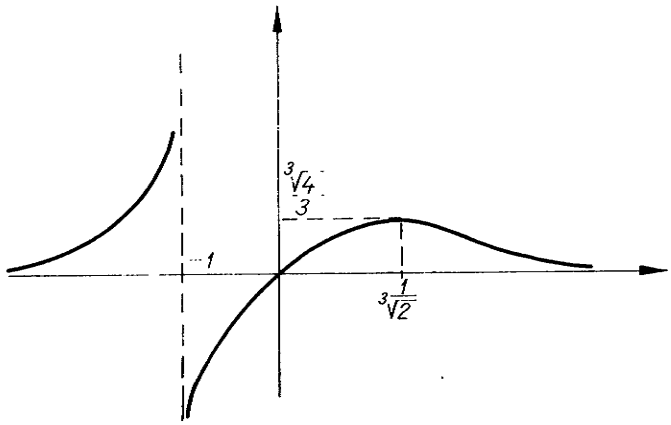
16. ábra

δ)



17. ábra

5.



18. ábra

(Ha $x,y \in D_f$: $f(x)-f(y) = \dfrac{(x-y)(1-xy(x+y))}{(x^3+1)(y^3+1)}$

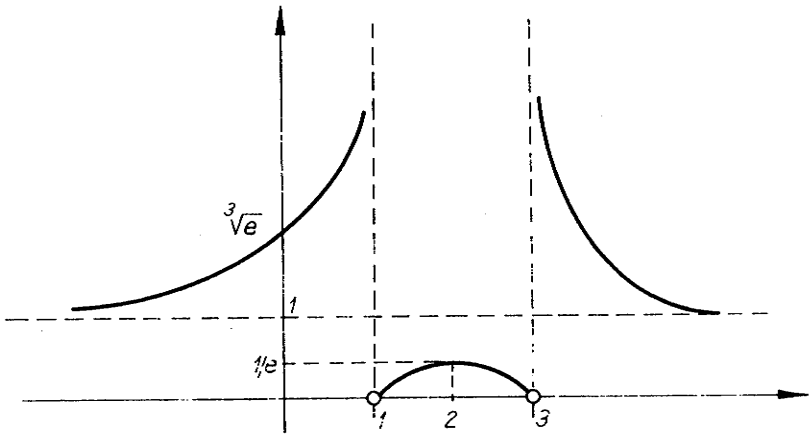
így leolvasható, hogy ha $x > y$, akkor

2. ha $x_1 = x_2$, pl. $x_1 > 0$:

$$f(x)-f(y) \begin{cases} > 0 & x,y < -1 \\ > 0 & -1 < x,y \leq 0 \\ > 0 & 0 < x,y \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ < 0 & x,y \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \end{cases}$$

amiből $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \in D_f$ miatt $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ lokális maximum)

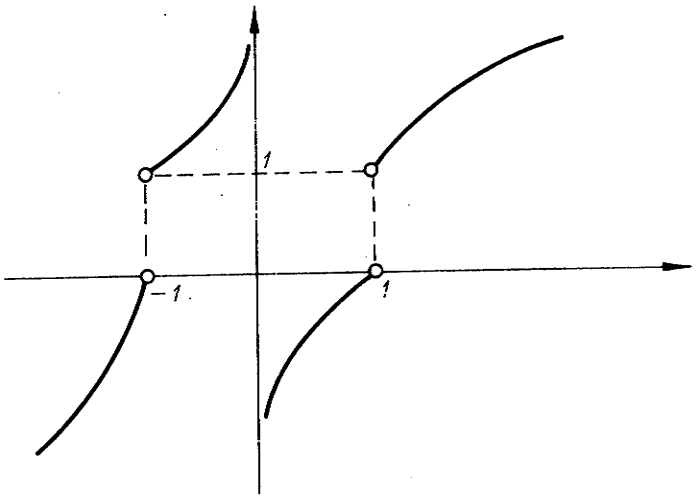
c) 1.



19. ábra

(lokális maximum helyéhez: lásd b) 3.)

2.



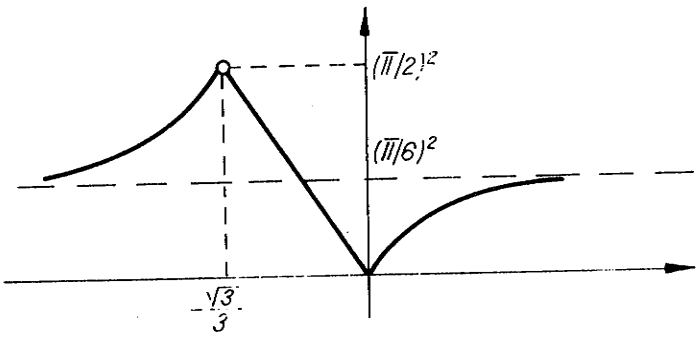
20. ábra

($g(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ monotonitásához:

ha $x,y \in D_g$: $f(x)-f(y) = (x-y) \cdot \dfrac{1+xy}{(1-x^2)(1-y^2)}$

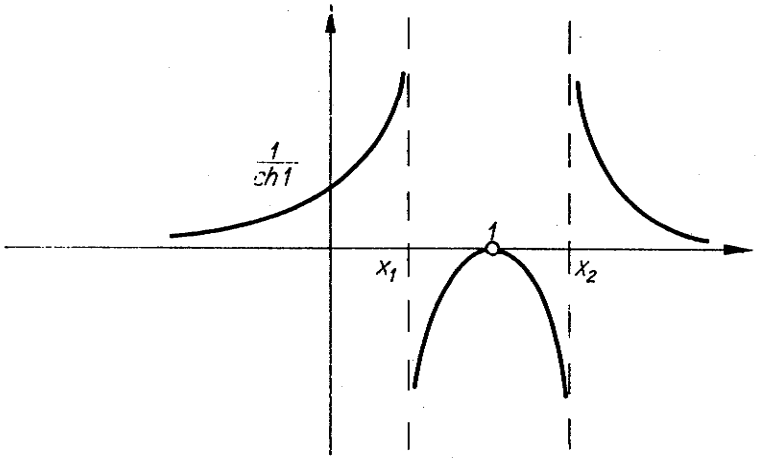
amiből ha $x > y$: $f(x)-f(y) > 0$ akkor,
ha $x,y < -1$ vagy ha $-1 < x,y < 1$ (ekkor $-1 < x \cdot y < 1$ is fennáll) vagy ha $x,y > 1$)

3.



21. ábra

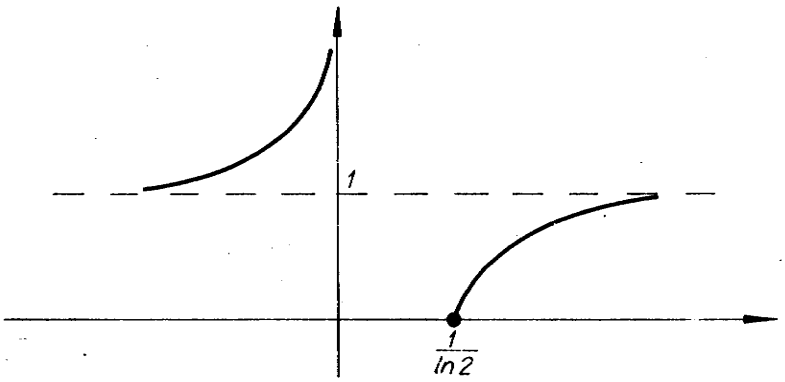
4.



22. ábra

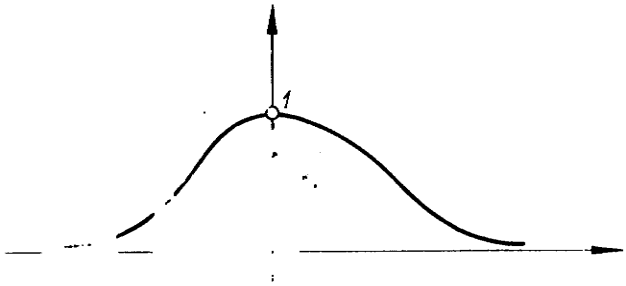
(Miután $g(x) = ch(x-1) + \ln(x-1)^2$ folytonos $[0,1)$-en és $g(o) = ch(-1) > 0$, valamint $\lim\limits_{x \to 1-} g(x) = -\infty$, így van olyan $0 < x_1 < 1$, amelyre $g(x_1) = 0$. Ugyanigy van olyan $1 < x_2 < \infty$, amelyre $g(x_2) = 0$. A monoton szakaszokhoz: $ch(x-1)$ és $\ln(x-1)^2$ azonos intervallumokon azonos jelleggel szigoruan monotonok.)

5.



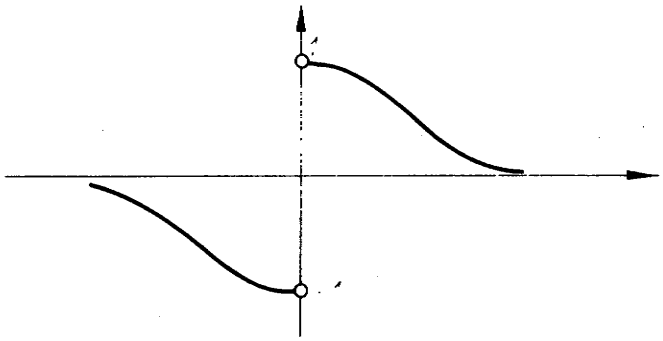
23. ábra

6. α)



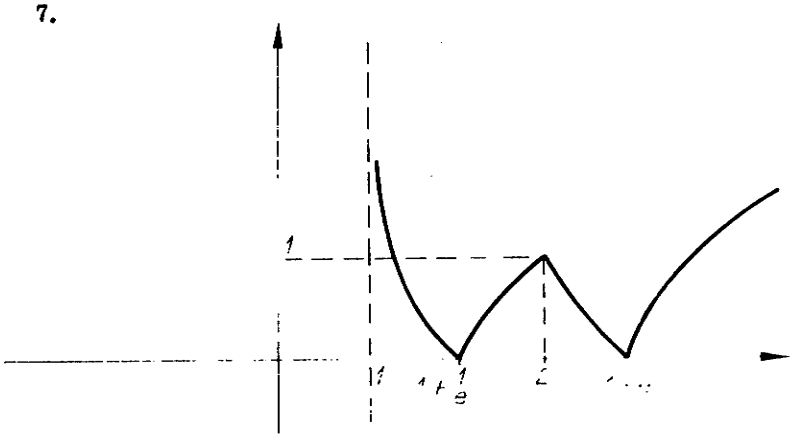
24. ábra

β)



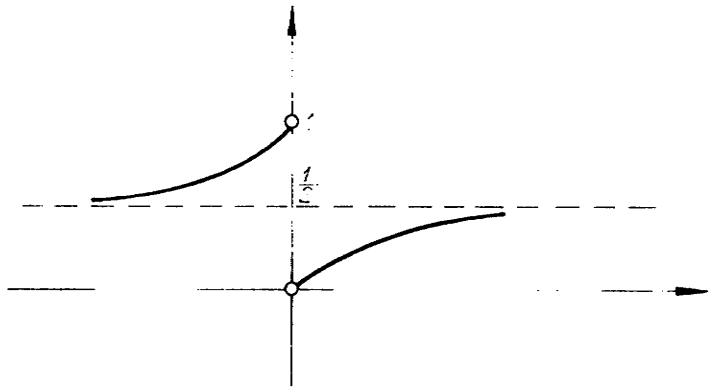
25. ábra

7.



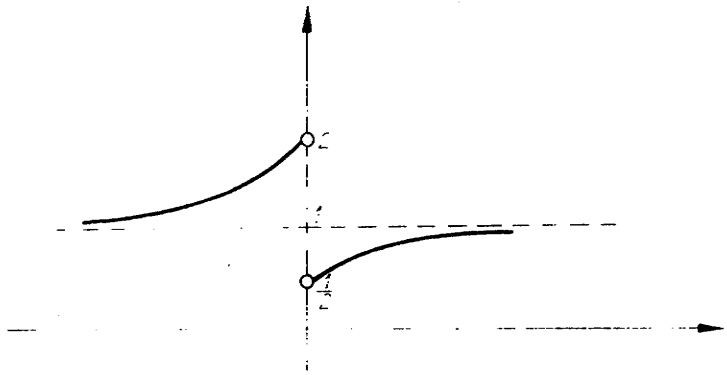
26. ábra

8. α)



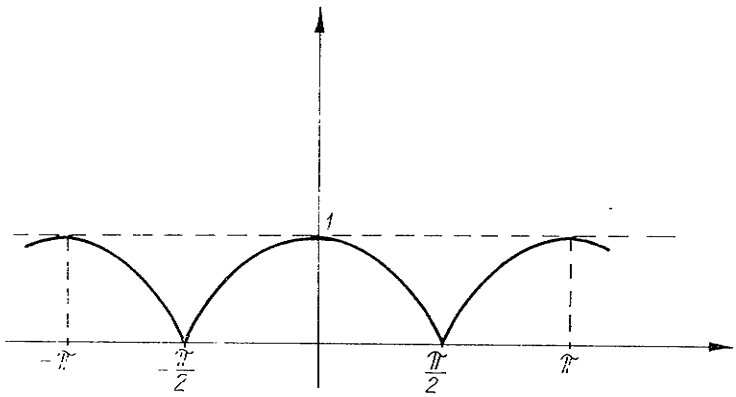
27. ábra

β)



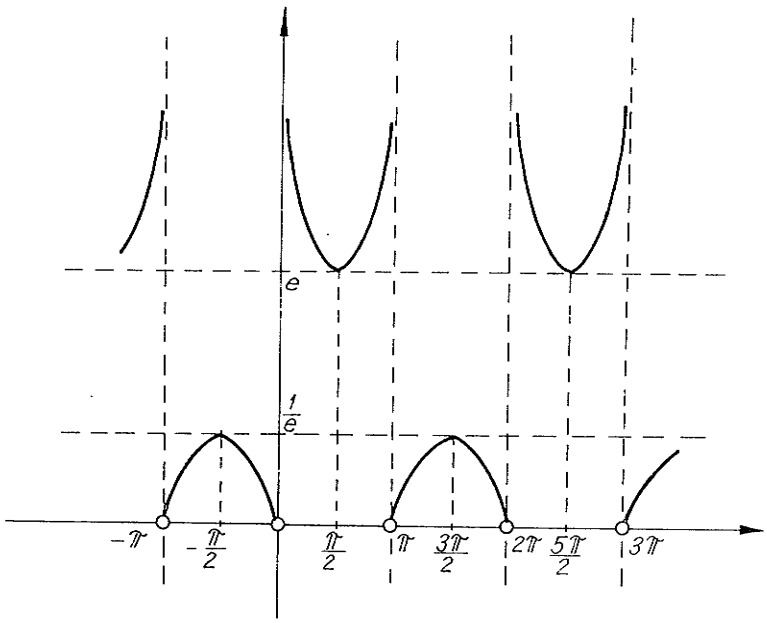
28. ábra

9.



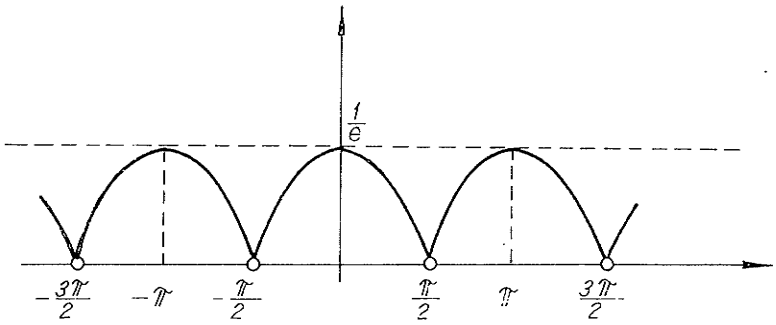
29. ábra

10. α)



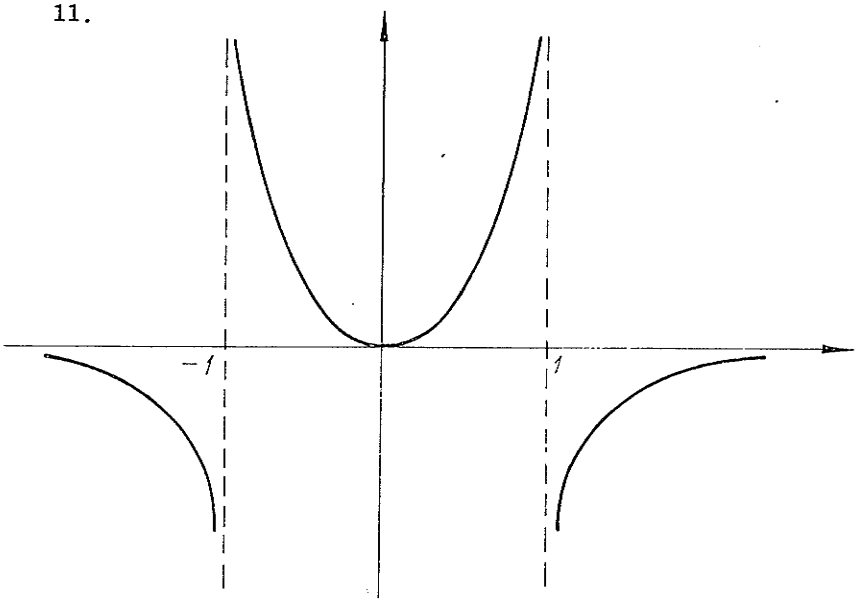
30. ábra

(β)



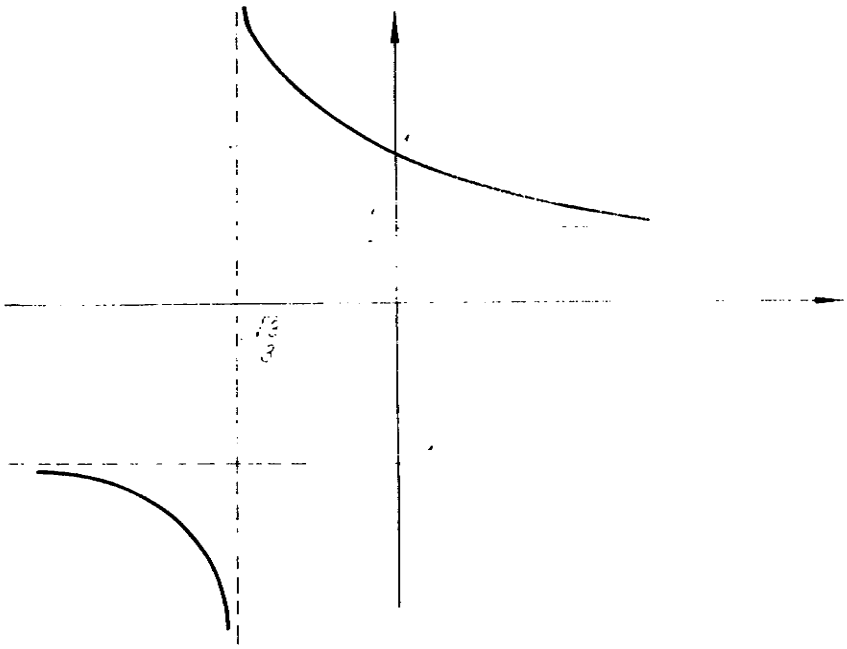
31. ábra

11.



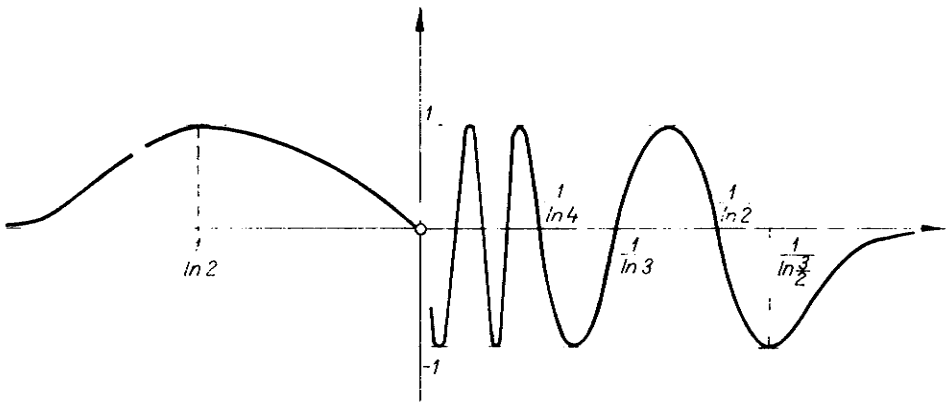
32. ábra

12.



33. ábra

13.

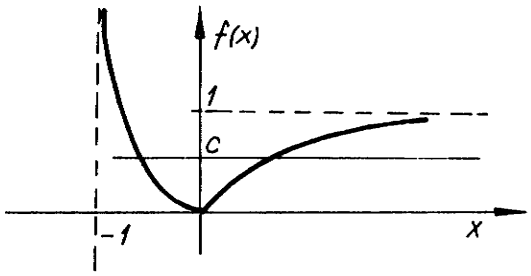


34. ábra

87. 1. a) Tetszőleges $c < 0$ esetén pontosan egy megoldás, $c \geq 0$ esetén nincs megoldás.
($f(x) = -(x+1) \ln x$ szigoruan monoton és folytonos $(1, \infty)$-en, és $R_f = (-\infty, 0)$)

b) Tetszőleges $0 < c < 1$ esetén pontosan két megoldás; $c = 0$ és $c > 1$ esetén pontosan egy megoldás; $c < 0$ esetén nincsen megoldás.

($f(x) = \frac{x}{x+1} \cdot \text{th}\, x$ $(-1, \infty)$-en folytonos; $(0, \infty)$-en szigoruan monoton növekvő és $f((0, \infty)) = (0,1)$, valamint $(-1,0)$-n szigoruan monoton csökkenő, $f((-1,0)) = (0, \infty)$ és $f(0) = 0$:



35. ábra

2. a) 1. Van ($\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ és f folytonos $(-\infty, \infty)$-en.)

2. Nincs ($f(x) \geq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

b) Van (f folytonos, $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 2^{n-1} - 1 \geq 0$)

c) Van ($\lim_{x \to a+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to b-} f(x) = -\infty$, f folytonos (a,b)-n.)

88. 1. a) $(-2,2)$-ben lokális minimum.
($f(-2) = 11$, $f(2) = 19$, $f(0) = -1$, tehát $f(0) < f(-2)$, $f(0) < f(2)$, és valahol felveszi minimumát $[-2,2]$ -ben.)

b) Nincs ($f(x)$ szigoruan monoton $\mathbb{R}$ -en)

c) $(1,2)$-ben lokális minimum.

(A $g(x) = x^5 - 2x - 1$ függvényre

$g(1) = -2 < 0$,

$g(2) = 27 > 0$,

igy van nullahelye (1,2)-ben, f(x)-nek van nullahelye $x = 1$-ben, igy (1,2)-ben kell legyen lok. szélsőérték. Ez minimum (vagy ha több van" szerepelnie kell közöttük minimumnak is), mert g folytonos, $g(1) < 0$ miatt van $x = 1$ - nek olyan S környezete, hogy $g(x) < 0$, ha $x \in S$, igy ha $x > 1$, $x \in S$, akkor $f(x) < 0$.)

d) (-1,1)-ben lokális minimum, (1,2)-ben lokális maximum, $x = 2$-ben lokális minimum.

$(f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)^2+1)$

2. a) Nem. $(f(x) > 0 \quad \forall x \in I, \inf\limits_{x \in I} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0)$

b) Igen ($x = \pi$ -ben)

c) Nem (lásd a))

d) Igen (f(x) folytonos az I zárt intervallumon)

89. 1. a) Egyenletesen folytonos. ($[0,4\pi]$-ben folytonos és 4π szerint periodikus)

b) Nem egyenletesen folytonos.

$$\left(\text{Ha } x_k = \sqrt{k\pi}, \quad y_k = \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2}}, \text{ akkor}\right.$$

$$\left. |x_k - y_k| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0; \quad x_k, y_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty, \ |\sin x_k^2 - \sin y_k^2| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}\right)$$

2. a) Egyenletesen folytonos

$$\left(g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad [0,1]\text{-ben}\right.$$

folytonos, igy itt egyenletesen folytonos, de akkor egyenletesen folytonos a $(0,1) \subset [0,1]$ -ben, és $f(x) = g(x)$, ha $x \in (0,1)$)

b) Nem egyenletesen folytonos (Nem folytonos: $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$)

3. a) Nem egyenletesen folytonos

$$\left(\text{Ha } x_k = \frac{1}{k}, \ y_k = \frac{2}{2k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ akkor}\right.$$

$$\left. x_k, y_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \quad \text{és} \quad \left|\sin\frac{\pi}{x_k} - \sin\frac{\pi}{y_k}\right| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}\right)$$

b) Egyenletesen folytonos.

$$\left(g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}\right.$$ folytonos $[0,1]$-ben, igy itt

egyenletesen is folytonos, tehát $(0,1) \subset [0,1]$ -ben is, és

$f(x) = g(x)$, ha $x \in (0,1)$.)

90. 1. a) 1. $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0,1)$-en

2. $f(x) = x$ $(0,1)$-en

3. $f(x) = \sin x$ $(-\pi, \pi)$-n

b) $f(x) = \operatorname{sign} x$ $(-1,1)$-en

c) 1. $f(x) = 1-e^{-x}$ $[0, \infty)$-en

2. $f(x) = (1-e^{-x}) \cdot \sin x$ $[0, \infty)$-en

2. a) Ilyen $f(x)$ nincs (lásd 100 pl. 2.)
b) $f(x) = x-[x]$ tetszőleges olyan $[a,b]$ -n, melyre valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n, n+1 \in [a,b]$

3. a) $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0,1)$-en

b) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ $(0,1)$-en (lásd 89. pl. 3. a) Utm.)

c) $f(x) = \operatorname{sign} x$ $[0,1]$ -en

d) $f(x) = x$ $[0, \infty)$ -en

e) $f(x) = \sin x^2$ $[0, \infty)$ -en (lásd 89. pl. 1. b) Utm.)

91. 2. Jelöljük $H = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ és $(*)$-gal azokat az eseteket, melyben H értéke függ a konkrét f, g választásától.

a) Miután $f(x) > 0$, ha $x \in S$, igy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ miatt $a \geqslant 0$ mindig.

1.
$$H = \begin{cases} \infty & a > 1 \\ 0 & a < 1 \\ (\pi) & a = 1 \end{cases}$$

2.
$$H = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ \infty & a < 1 \\ (\pi) & a = 1 \end{cases}$$

3.
$$H = \begin{cases} a^b & a \neq 0 \quad b \neq 0 \\ 0 & a = 0 \quad b > 0 \\ \infty & a = 0 \quad b < 0 \\ 1 & a \neq 0 \quad b = 0 \\ (\pi) & a = 0 \quad b = 0 \end{cases}$$

b)
$$H = \begin{cases} \infty & b > 0 \\ 0 & b < 0 \\ (\pi) & b = 0 \end{cases}$$

α) $h(x) = e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$ és e^x mindenütt folytonos, így $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ meghatározható $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \cdot \ln f(x)$ segitségével, felhasználva ennek kiszámitásához 1.-et.

β) A (π) esetek. Legyen $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tetszőleges, és $x_0 = 0$

- Az a) 1. esethez legyen $f(x) = c^{x^2}$ és $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

  Ekkor $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} c^{x^2} = 1$,

  és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$,

  és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \left(c^{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = c$, ami függ c-től.

- Az a) 2. esethez legyen $f(x) = c^{-x^2}$ és $g(x) = -\frac{1}{x^2}$.

  Ugyanugy ahogy az előbb, kapjuk, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = c$.

- Az a) 3. esethez legyen $f(x) = \left(\frac{1}{1+c^2}\right)^{x^{\frac{1}{2}}}$ és $g(x) = x^2$.

Ekkor $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{1+c^2}\right)^{x^{\frac{1}{2}}} = 0$

és $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$,

és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \left[\left(\frac{1}{1+c^2}\right)^{x^{\frac{1}{2}}}\right]^{x^2} = \frac{1}{1+c^2}$, függ c-től.

- A b) esethez: hasonlóan az előbbiekhez, legyen

$f(x) = (1+c^2)^{x^{\frac{1}{2}}}$ és $g(x) = x^2$.

Ugyanugy, ahogy az előbb, kapjuk, hogy

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = 1+c^2$, függ c -től.

92. 1. a) 1. Létezik az $s = \sup\limits_{x \in [a, \infty)} f(x)$, melynek definiciójából, és a monoton növekedésből: $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz van $x \in [a, \infty)$, hogy tetsz. $y > x$ esetén $s - \varepsilon < f(x) \leqslant f(y) \leqslant s$

2. Miután f alulról mindenképpen korlátos: $f(x) \geqslant f(a)$ $\forall\, x \in [a, \infty)$, így felülről nem korlátosság és monotonitás miatt: $\forall\, K \in \mathbb{R}$ esetén van $x \in [a, \infty)$, hogy minden $y > x$ esetén $f(y) \geqslant f(x) > K$.

b) Igen 1.-ben pont ezt bizonyitottuk.

2. a) 1. Ha az (a,b)-n monoton növő f függvény korlátos, akkor léteznek a véges $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ határértékek.

2. Ha f alulról nem korlátos, akkor $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$,

ha f felülről nem korlátos, akkor $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \infty$.

93. 1. a) Tegyük fel: létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Ekkor

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq |f(x_1)-A| + |f(x_2)-A| .$$

b) Tegyük fel: fennáll a kivánt tulajdonság, és legyen

$(x_n) \subset (a,b)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ tetszőleges(*), ekkor

$(f(x_n))$ Cauchy sorozat, és nem létezhet olyan

$(x_n),(y_n) \subset (a,b)$, amelyre $x_n \neq x_0$, $y_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$,

$y_n \to x_0$, és amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$, mert

akkor

$$z_n = \begin{cases} x_n & n = 2k \\ y_n & n = 2k+1 \end{cases} \quad \text{-re}$$

$z_n \to x_0$, $z_n \neq x_0$ de $(f(z_n))$ nem konvergens.

2. Például $+\infty$ -re: $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ esetén a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ véges határérték akkor és csak akkor létezik, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy ha $x_1, x_2 > K$, akkor $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$.

(*) Itt és a továbbiakban is használjuk az alábbi röviditett irásmódot: $(x_n) \subset H$ jelöli a következő állitást: (x_n) olyan sorozat, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \in H$

94. 1. a) Igaz.

b) Nem, hiszen ha pl. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $g(y) = y$, $x_0 = 0$,

akkor $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = 0$, de nem létezik

$\lim\limits_{y \to 0} f(g(y))$.

2. Nem, hiszen

pl. ha $f(x) = \sin \pi x$, $g(y) = \left[\frac{1}{|y|}\right]$, $y_0 = 0$,

akkor $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = \infty$, nem létezik $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, de létezik a

$\lim\limits_{y \to 0} f(g(y)) = \lim\limits_{y \to 0} \sin \pi \cdot \left[\frac{1}{|y|}\right] = 0$.

3. Van $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x_n \to \infty$ hogy nem létezik a $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ véges, vagy végtelen határérték (1).

$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$, g folytonos: van $K \in \mathbb{R}$, $x_0 > a$, hogy az (x_0, ∞) intervallumon g felvesz minden K-nál nagyobb értéket, tehát van $(y_n) \subset (x_0, \infty)$, hogy valamely küszöbindextől kezdve $g(y_n) = x_n$;

g folytonossága és $x_n \to \infty$ miatt $y_n \to \infty$, és (1)-től $\lim\limits_{n \to \infty} f(g(y_n))$ véges vagy végtelen nem létezik.

4. Nem: $g(x)$ a 0 minden környezetében felveszi a 0-t az

$x = \frac{1}{k\pi}$ $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ helyeken. Valóban:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ $\left(\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|\right)$,

de mivel

$$f(g(x)) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \quad x \neq \frac{1}{k\pi} \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 1 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

igy nem létezik $\lim\limits_{x \to 0} f(g(x))$,

hiszen ha $x_k = \frac{1}{k\pi} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, akkor

$$\lim_{k\to\infty} f(g(x_k)) = 1, \quad \text{és ha} \quad y_k = \frac{1}{(4k+1)\cdot\frac{\pi}{2}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \text{ akkor}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(g(y_k)) = 0 \quad (f(g(y_k)) = y_k).$$

5. Ekvivalensek egymással: az Átviteli elvvel bizonyitható az összetett függvények határértékére vonatkozó tétel, mig előbbi az utóbbinak azon speciális esete, mikor $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(y_0 = \infty)$ alaku függvényekre szoritkozunk.

95. Van $K \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x) - A| < |A|$, ha $x > K$,

azaz $|f(x)| < 2\,|A|$ ha $x > K$ (1).

Ha $K < a$: készen vagyunk.
Ha $K > a$: f folytonos $[a, K]$-n igy ott korlátos, (1)-ből tehát korlátos $[a, K] \cup (K, \infty) = [a, \infty)$-en is.

96. 1. Csak $\varphi(x)$-re.
Könnyen látható, hogy tetszőleges $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ esetén, ha $a < b$, $c < d$, akkor $\min\{a,c\} < \min\{b,d\}$, hiszen $\min\{a,c\} \leqslant a < b$ és $\min\{a,c\} \leqslant c < d$.
Másrészt ugyanigy látható, hogy tetszőleges $a,b,c \in \mathbb{R}$-re

$\min\{a+b, c+b\} \leqslant \min\{a,c\} + b$, hiszen

$\min\{a+b, c+b\} \leqslant a+b$, $\min\{a+b, c+b\} \leqslant c+b$, igy

$\min\{a+b, c+b\} - b \leqslant a$, $\min\{a+b, c+b\} - b \leqslant c$.

Ezért mivel f, g folytonosságából $\forall \varepsilon > 0$ esetén van $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor

$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$,

$g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon$, igy

$$\min\{f(x_0), g(x_0)\} - \varepsilon < \min\{f(x), g(x)\} < \min\{f(x_0), g(x_0)\} + \varepsilon.$$

2. Csak $m(x)$ jobb oldali folytonosságára:
Legyen $x_0 \in (a,b]$ (az $x_0 = a$ eset triviális), f felveszi infinumát $[a,x_0]$-on: van $z \in [a,x_0]$, hogy $f(z) = m(x_0)$. Két eset van:
a) $z \in [a,x_0)$. Ekkor, ha $z < x < x_0$, mivel bővebb halmaz infinuma nem nagyobb és $z \in [a,x]$, ezért

$$f(z) = m(x_0) \leq m(x) \leq f(z), \text{ azaz } m(x_0) = m(x), \text{ ha } z < x < x_0.$$

b) $z = x_0$. Ekkor ugyanugy, ahogy az előbb $\forall x \in [a,x_0]$-ra:

$$m(x_0) = f(x_0) \leq m(x) \leq f(x), \text{ de } f \text{ folytonos}$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0), \text{ igy } m(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} m(x_0).$$

97. 1. Belátjuk: f mindenütt folytonos, ugyanis $f(o) = f(o+o) = f(o)+f(o)$ miatt $f(o) = 0$, igy, mivel ha $x \to x_0$, akkor $(x-x_0) \to 0$, tehát $f(x-x_0) = f(x) - f(x_0) \to 0$, azaz $f(x) \to f(x_0)$.
2. Belátjuk: f homogén, azaz $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén $f(cx) = c\, f(x)$; ugyanis, egyrészt mivel $f(o) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, igy $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, másrészt ha $k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $f(kx) = f(x+x+\ldots+x) = f(x)+\ldots+f(x) = k \cdot f(x)$ (1), amivel $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ esetén:

$$f(y) = f\left(k \cdot \frac{y}{k}\right) = k \cdot f\left(\frac{y}{k}\right), \text{ azaz } \frac{1}{k} f(y) = f\left(\frac{y}{k}\right). \qquad (2).$$

(1)- és (2)-vel tetszőleges r racionális esetén $f(rx) = rf(x)$ (3). Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek, van $(r_n) \subset \mathbb{R}$, $r_n \to c$, r_n racionális; mivel 1.-ből f mindenütt folytonos, igy (3)-mal $f(r_n x) \to f(cx)$, másrész $r_n f(x) \to c\, f(x)$ és $f(r_n x) = r_n f(x)$. Ezekkel $f(cx) = c\, f(x)$.
3. Legyen $x \neq 0$ 2.-vel $\frac{1}{x} \cdot f(x) = f\left(\frac{x}{x}\right) = f(1) = \text{const.}$

98. 1. Vagy $\forall x > 0$ esetén $f(x) > 0$, és van $y > x$, hogy $f(y) < f(x)$, vagy u. igy, ha $\forall x > o$-ra $f(x) < o$.

2. $\forall x \in (a, x_o)$ esetén van $y \in (x_o, b)$, hogy $f(y) > f(x)$ és van $z \in (x_o, y)$, hogy $f(z) > f(y)$.

3. Legyen pl. f monoton növő, és indirekte tegyük fel például, hogy van $x_o \in [a,b)$, $\varepsilon > o$, $x_n \to x_o$, $x_o < x_n < b$, hogy $\forall N \in \mathbb{N}$ esetén van $n > N$, amelyre $f(x_n) - f(x_o) > \varepsilon$ (1).

Legyen $\varepsilon_o = \min \{ f(b) - f(x_o), \varepsilon \}$, feltételből kell lennie $x \in [a,b]$ -nek, hogy

$$f(x_o) < f(x) < f(x_o) + \varepsilon_o \leqslant f(x_o) + \varepsilon \qquad (2),$$

és monoton növés miatt ekkor $x_o < x$.

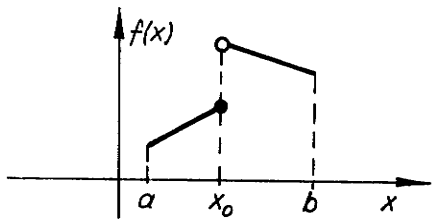
De $x_n \to x_o$, $x_n > x_o$ miatt van $N \in \mathbb{N}$, hogy tetszőleges $n > N$ esetén $x_o < x_n < x$ (3).

Legyen $n > N$ olyan, mely kielégiti (1)-et, igy (3)-ból monotonitással és (1)- illetve (2)-vel:

$$f(x_n) < f(x) < f(x_o) + \varepsilon < f(x_n),$$

ami ellentmondás. Ugyanigy vizsgálhatjuk a bal oldali határértékeket is.

99. 1. Nem, pl.



36. ábra

Ha f folytonos (a,b)-n akkor igaz, hiszen egyrészt $f(x) \leqslant f(x_o)$, ha $x \in (a, x_o]$ (1), másrészt, ha volna $y \in (x_o, b)$, hogy $f(y) > f(x_o)$, akkor Bolzano tétellel volna $x_o < z < y$, amelyre

$$f(y) > f(z) > f(x_o),$$

ellentmondásban f monoton csökkenésével (x_o, b)-n.

2. a) Legyen x_o, y_o két lokális minimumhely, $I = [x_o, y_o]$.

Ha f constans egy $I' \subset I$ intervallumon, készen vagyunk. Ha nem, akkor f felveszi I-n maximumát, melynek helye nem lehet sem x_o, sem y_o, mert itt lokális minimumok vannak.

b) f például monoton nő $[0, \infty)$-en, ekkor $f(o) \leq f(x)$, ha $x > 0$ (2), és ha $y < 0$ $-y = x > 0$ jelöléssel

$f(y) = f(-y) = f(x) \geq f(o)$ (2) miatt.

c) Van $k_1 > 0$, hogy $f(x) > f(o)$ $\forall x > k_1$,

és $k_2 < 0$, hogy $f(x) > f(o)$ $\forall x < k_2$. (3)

f $[k_1, k_2]$-n felveszi minimumát egy x_o-ban, így

$f(x_o) \leq f(x)$, ha $x \in [k_1, k_2]$, valamint (3)-mal $(0 \in [k_1, k_2])$

$f(x_o) \leq f(o) < f(x)$, ha $x \notin [k_1, k_2]$.

3. a) 95. pl.-ból f korlátos, létezik $\sup\limits_{x \in [a, \infty)} f(x)$, $\inf\limits_{x \in [a, \infty)} f(x)$, és van $(x_n), (y_n) \subset [a, \infty)$ konvergens, vagy végtelenhez divergáló sorozat, hogy

$$\lim_{x \to \infty} f(x_n) = \sup_{x \in [a, \infty)} f(x), \quad \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \inf_{x \in [a, \infty)} f(x) \quad (4).$$

Ha $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$, mivel létezik a $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{x \to \infty} f(x),$$

igy (4)-ből $\sup\limits_{x \in [a, \infty)} f(x) = \inf\limits_{x \in [a, \infty)} f(x)$,

azaz f constans, tehát minden pontban felveszi minimumát is, és maximumát is. Ha pl. $x_n \to x_o$, f folytonossága miatt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o),$$

azaz (4)-ből $\sup\limits_{x\in[a,\infty)} f(x) = f(x_0)$.

b) Nem, pl. $f(x) = (1-e^{-x}) \cdot \sin x$ $[a, \infty)$-ben

4. a) $p(x) = (x-x_0)^{2k} \cdot p_{2k}(x)$,

$p_{2k}(x)$ folytonos, $p_{2k}(x_0) \neq 0$, igy van x_0-nak olyan S környezete, hogy $p_{2k}(x) > 0$, ha $x \in S$, vagy $p_{2k}(x) < 0$, ha $x \in S$. Másrészt $p(x_0) = 0$, és $(x-x_0)^{2k} > 0$, ha $x \neq x_0$, igy vagy $p(x) \geqslant 0 = p(x_0)$, ha $x \in S$, vagy $p(x) \leqslant 0 = p(x_0)$, ha $x \in S$.

b) $p(x) = (x-x_0)^{2k+1} \cdot p_{2k+1}(x)$

Ugyanugy, ahogy a)-nál: van x_0-nak egy olyan környezete, ahol p_{2k+1} előjeltartó, és $(x-x_0)^{2k+1}$ x_0-ban előjelet vált.

5. f $[a,b]$-n felveszi M maximumát és m minimumát, valamint minden közéjük eső értéket, igy $f([a,b]) = [m,M]$.

100. 1. a) Legyen pl. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < c < \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Ekkor a határérték definiciójából: van $x,y \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) < c < f(y)$; $[x,y]$ -on alkalmazható a Bolzano tétel.

b) Ugyanugy látható be, ahogy a)

c) Ha $p(x)$ páratlan, akkor

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} p(x) = \infty, \text{ és lásd a).}$$

d) f $[a,b]$-n felveszi M maximumát $x_1 \in [a,b]$-ben, m minimumát $x_2 \in [a,b]$-ben, igy

$$f(x_2) = m = \frac{mn}{n} \leq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \leq \frac{Mn}{n} = M = f(x_1),$$

és $[x_1,x_2]$-re (vagy $[x_2,x_1]$-re) alkalmazható a Bolzano-tétel.

e) Legyen $x_1 \in [a,b]$ tetszőleges, és $x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$ $\forall n > 1$.

Ha pl. $f(x_1) - x_1 > 0$ (1) – feltéve, hogy $x_n \leq f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (2) – $(x_n) \subset [a,b]$ monoton növő sorozat; mivel korlátos, így konvergens és c határértékére fenn kell állnia: $c \in [a,b]$, $c = \frac{c + f(c)}{2}$, amiből $c = f(c)$. Ha (2) nem áll fenn, akkor van $x_m \in [a,b]$, hogy $f(x_m) - x_m < 0$, így (1)-ből Bolzano-tétellel: van $c \in [a,b]$, hogy $f(c) - c = 0$. A másik eset ugyanígy vizsgálható.

f) Ha lenne $x \in (0, \infty)$, hogy $f(x) > 0$, és $y \in (0, \infty)$, hogy $f(y) < 0$, akkor Bolzano-tétellel kellene lennie $z \in (0, \infty)$-nek: $f(z) = 0$.

2. Ekvivalens a Bolzano-tétellel:

α) Bolzano tétel ennek azon speciális esete, mikor $I = [a,b]$ korlátos zárt intervallum és $x_1 = a$, $x_2 = b$.

β) Ha a Bolzano tétel fennáll, alkalmazható az $[x_1, x_2]$ zárt, korlátos intervallumra.

101. a) $x_0 \in (c,d) \cap (a,b)$, így van olyan $S = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq \varepsilon \}$ környezete, hogy $S \subset (c,d) \cap (a,b)$.
Legyen $S_1 = \{ x \in \mathbb{R} : -\varepsilon + x_0 \leq x \leq x_0 \}$, és

$S_2 = \{ x \in \mathbb{R} : x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon \}$.

Mivel S_1, S_2 zárt intervallumok, f folytonos itt és $f(x) > 0$, ha $x \neq x_0$, így $\max\limits_{x \in S_1} f(x) > 0$, $\max\limits_{x \in S_2} f(x) > 0$.

Legyen pl.: $0 < \max\limits_{x \in S_1} f(x) \leq \max\limits_{x \in S_2} f(x)$.

Ekkor f minden $[0, \max\limits_{x \in S_1} f(x)]$ értéket felvesz S_1-en és

S_2-n is, azaz nem kölcsönösen egyértelmű $S = S_1 \cup S_2$-n, így (mivel $S \subset (c,d)$) (c,d)-n sem.

b) Indirekte tegyük fel, hogy nem szigoruan monoton, ekkor van olyan

$x_1 < x_2 < x_3$ $(x_1, x_2, x_3 \in (a,b))$, hogy pl.:

$f(x_1) < f(x_2)$, $\quad f(x_2) \geqslant f(x_3)$.

Legyen pl. $f(x_1) \leqslant f(x_3)$, ezzel $f(x_1) \leqslant f(x_3) \leqslant f(x_2)$, f folytonos (a,b)-n, $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in (a,b)$, így $[x_1, x_2]$-re alkalmazható a Bolzano tétel: van olyan $x_o \in [x_1, x_2]$, hogy

$f(x_o) = f(x_3)$. De $x_1 \leqslant x_o \leqslant x_2 < x_3$, így $x_o \neq x_3$, azaz f nem kölcsönösen egyértelmü, nem invertálható. (A többi eset hasonlóan vizsgálható).

102 1. pl. legyen f monoton növő. Léteznek a $c = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$ (1), $d = \lim\limits_{x \to b-} f(x)$ véges határértékek (lásd 92. pl. 2.), és fennáll $c < f(x) < d \quad \forall x \in (a,b)$ (2). (Ellenkező esetben ugyanis pl. ha volna $x \in (a,b)$, $c \geqslant f(x)$, akkor rögzitett $y_o \in (a,x)$-el fennáll $\forall y \in (a, y_o)$-ra, hogy $f(y) < f(y_o) < f(x) \leqslant c$, ami ellentmond (1)-nek.)

$$\text{Legyen } g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ c & x = a \\ d & x = b \end{cases}$$

(2)-ből és $f(a,b)$ -n való szigoru monotonitásából g szigoruan monoton $[a,b]$-n, valamint folytonos itt, így $g([a,b]) = [g(a), g(b)] = [c,d]$. A szigoru monotonitás miatt kölcsönösen egyértelmü is, tehát $g((a,b)) = (c,d)$, de $g(x) = f(x)$, ha $x \in (a,b)$, így $f((a,b)) = (c,d)$.

2. Nem. <u>Pl.</u> $\sin((0, 4\pi)) = [-1,1]$

103 1. Legyenek a tekintett korlátos intervallum végpontjai:

$-\infty < a < b < \infty$.

Tegyük fel indirekte, hogy f például felülről nem korlátos, ekkor van $(x_n) \subset (a,b)$, $x_n \to x_o \in [a,b]$ sorozat, hogy $f(x_n) \to \infty$ (1). Másrészt f egyenletes folytonossága és (x_n) konvergenciája miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van $N \in \mathbb{N}$, hogy $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, ha $n, m > N$, azaz $(f(x_n))$ Cauchy sorozat, ami ellentmond (1)-nek.

2. a) Tegyük fel, hogy f egyenletesen folytonos (a,b)-n, és indirekte tegyük fel, hogy például nem létezik a véges $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

Mivel 1.-ből f korlátos (a,b)-n, ekkor van $(x_n), (y_n) \subset (a,b)$,

$x_n \to a$, $y_n \to a$, hogy $f(x_n) \to A$, $f(y_n) \to B$, $A \neq B$.

Ebből az adódik, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre

$$|f(x_n) - f(y_n)| > \frac{A-B}{2}, \text{ ha } n > N,$$

ami $|x_n - y_n| \to 0$ miatt ellentmond f egyenletes folytonosságának.

b) Tegyük fel, hogy f folytonossá tehető $[a,b]$-n.

Legyen
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \neq a,\ x \neq b \\ \lim\limits_{x \to a+} f(x) & \text{ha } x = a \\ \lim\limits_{x \to b-} f(x) & \text{ha } x = b \end{cases}$$

Ekkor g folytonos $[a,b]$-n, így ott egyenletesen folytonos, ezért egyenletesen folytonos $(a,b) \subset [a,b]$-n is, de $f(x) = g(x)$, ha $x \in (a,b)$.

104 1. a) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. $\frac{\varepsilon}{4}$-hez van olyan $K > a$, hogy $|f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{4}$, ha $x \geq K$ (1). Mivel f folytonos $[a,K]$-n, így ott egyenletesen folytonos, azaz $\frac{\varepsilon}{4}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ ha $|x-y| < \delta$, $\forall x,y \in [a,K]$ (2).

Legyen $x,y \in [a, \infty)$, $|x-y| < \delta$.

Ekkor, ha

1. $x,y \in [a,K]$, akkor $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ (2) miatt,

2. $x,y \in [K, \infty)$, akkor $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-A| + |f(y)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1) miatt,

3. $x \in [a,K]$, $y \in [K,\infty)$, akkor

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(K)| + |f(y)-f(K)| ,$$

és mivel ilyenkor $x,K \in [a,K]$
illetve $K,y \in [K,\infty)$, így hivatkozhatunk 1. és 2.-re.

b) Nem, pl. $f(x) = x$ egyenletesen folyt. $[1,\infty)$-en és $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, illetve $f(x) = \sin x$ egyenletesen folyt. $[1,\infty)$-en (lásd 89. 1. a) pl.), és nem létezik sem véges, sem végtelen határértéke a végtelenben.

2. $f(x)\cdot g(x) - f(y)\cdot g(y) = f(x)(g(x)-g(y)) + g(y)(f(x)-f(y))$

3. Legyen pl. f monoton növő,
a) ha I korlátos: f folytonossá tehető $\bar{I}$-n ($\bar{I}$ az I-vel azonos végpontu zárt intervallum) (lásd 103. pl. Def., illetve 92. pl. 2.), így egyenletesen folytonos $\bar{I}$-n, tehát $I \subset \bar{I}$-n is;
b) ha I nem korlátos, pl.-ul $I = [a,\infty)$: létezik a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (lásd 92. pl. 1. a)) és ebből 1. a)-val f egyenletesen folytonos I-n.
c) a többi eset ugyanigy vizsgálható.

105. 1. b) Nem: hiszen ekkor az sem biztos, hogy f folytonos I-n: pl. $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x_0 = 0$, $I = [-1,1]$.

2. $[0,1]$-en folytonos,

$[1,\infty)$-re: $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left|\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \leq |x-y|$

és lásd 1. a).

II. FEJEZET

1. $\boxed{1.}$ $f'(5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(5+h)^2-5^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(10+h)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} (10+h) = 10$

2. $-\frac{1}{9}$ 3. $-\frac{1}{16}$ 4. $\frac{1}{e}$ 5. -3 .

2. 1. $-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x \neq 0)$, 2. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x > 0)$.

$\boxed{3.}$ $$\lim_{n \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{\sqrt{(x+h)^2-1} - \sqrt{x^2-1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{[(x+h)^2 - 1] - (x^2-1)}{h(\sqrt{(x+h)^2-1} + \sqrt{x^2-1})} = \lim_{h \to o} \frac{32x\,h + h^2}{h(\sqrt{(x+h)^2-1} + \sqrt{x^2-1})} =$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (|x| > 1) .$$

4. $-\frac{1}{x^2}$, $(x \neq 0)$. 5. $-\frac{2}{x^3}$, $(x \neq 0)$.

6. $2 \cos 2x$.

3. $2f(x)\, f'(x)$

4. B. f a -beli differenciálhatóságának definiciója.

$A \not\Rightarrow B$. pl. $f(x) = |x|$ $a = 0$ -ban $A_1 = 0$, A nem létezik.

B. $\Rightarrow$ A. $$\lim_{h \to o} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \right) = 2f'(a),$$

ha f differenciálható az a helyen. B $\Longleftrightarrow$ C. Igy A. $\not\Rightarrow$ C., de C. $\Longrightarrow$ A.

5. 1. $\frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2}$, $(x > 0)$. 2. $3(3-\frac{1}{x})^2 \frac{1}{x^2}$, $(x \neq 0)$.

$\boxed{3.}$ Alkalmazzuk a következő jelöléseket:

$$f = \sqrt{\varphi} \; ; \qquad \varphi(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{3+5x}{3-5x} .$$

Az $f = \sqrt{\varphi}$ differenciálható φ szerint, ha $\varphi > 0$, azaz $-\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}$, és a hatványfüggvény deriválási szabálya szerint

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{1}{2}\varphi^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} .$$

A $\varphi = \frac{u}{v} = \frac{3+5x}{3-5x}$ differenciálható x szerint, ha $v = 3 - 5x \neq 0$, $x \neq \frac{3}{5}$, és a hányados deriválási szabályát alkalmazva:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{5(3-5x)+5(3+5x)}{(3-5x)^2} = \frac{30}{(3-5x)^2} .$$

Igy $f(x)$ differenciálható $\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$-ben, és az összetett függvény deriválási szabálya (láncszabály) szerint:

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{df}{d\varphi}\right)\Bigg|_{\varphi = \frac{3+5x}{3-5x}} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\right)\Bigg|_{\varphi = \frac{3+5x}{3-5x}} \cdot \frac{30}{(3-5x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{3+5x}{3-5x}}} \cdot \frac{30}{(3-5x)^2} = \frac{15}{\sqrt{3-5x}\,(\sqrt{3+5x})^3} .$$

4. $\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$ $\quad (x \neq k\pi, \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

5. $$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{1+x^2}, & \text{ha } x > 0 \\[2ex] \dfrac{2}{1+x^2}, & \text{ha } x < 0 . \end{cases}$$

6. $\dfrac{2x}{1+x^4} \cdot e^{\operatorname{arctg} x^2} + \dfrac{3}{3x+1}, \quad \left(x > -\frac{1}{3}\right).$

$10^x \ln 10 + \dfrac{1}{x \ln 10}, \quad (x > 0) .$

8. $\operatorname{tg}^3 x$, $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi\right.$, $\left.k=0,\pm1,\pm2,\dots\right)$.

9. $\dfrac{6(\operatorname{arctg} 2x)^2}{1+(2x)^2}$, $x \in R$.

10. $(\operatorname{arctg} 2x)^x \left[\ln(\operatorname{arctg} 2x) + \dfrac{2x}{(1+4x^2)\operatorname{arctg} 2x}\right]$, $(x > 0)$.

11. $\dfrac{-\ln^2 x}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} + \dfrac{2\ln x}{x}\arcsin\dfrac{1}{x}$, $(x > 1)$.

12. $3(\operatorname{ch} 3x)\sqrt{6x+5} + \operatorname{sh} 3x \cdot \dfrac{3}{\sqrt{6x+5}}$, $\left(x > -\frac{5}{6}\right)$.

13. $\dfrac{2x}{x^2-1}\operatorname{arth}\dfrac{x}{3} + \ln(x^2-1)\dfrac{1}{3\left[1-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]}$, $(1 < |x| < 3)$.

14. $\dfrac{1}{x\ln 3} + 3^x \ln 3 + 3x^2 + x^x(\ln x + 1)$, $(x > 0)$.

6. $\boxed{1.}$ Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$(x^2 + y^2(x))' = 2x + 2y(x)\,y'(x) = 0$. Innen $y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)}$.

Az $x_0 = 1$ és $y_0 = \sqrt{3}$ értékeket behelyettesitve kapjuk, hogy

$y'(1) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $\dfrac{3}{2}$ 3. -2.

7. $\boxed{1.}$ Az $f_1(x) = \sin^2 x$ és $f_2(x) = \sin x \operatorname{ch} x$ jelöléssel

$f^{(5)}(x) = f_1^{(5)}(x) + f_2^{(5)}(x)$.

$f_1^{(5)}(x) = (2 \sin x \cos x)^{(4)} = (\sin 2x)^{(4)} = 2^4 \sin 2x = 16 \sin 2x.$

A Leibnitz formulát alkalmazva

$$f_2^{(5)}(x) = \sum_{k=o}^{5} \binom{5}{k} (\sin x)^{(5-k)} (\operatorname{ch} x)^{(k)} = \cos x \operatorname{ch} x + 5 \sin x \operatorname{sh} x +$$

$$+ 10 (-\cos x) \operatorname{ch} x + 10(-\sin x) \operatorname{sh} x + 5 \cos x \cdot \operatorname{ch} x +$$

$$+ \sin x \operatorname{sh} x = - 4 (\cos x \operatorname{ch} x + \sin x \operatorname{sh} x).$$

Ezért $f^{(5)}(x) = 16 \sin 2x - 4(\cos x \operatorname{ch} x + \sin x \operatorname{sh} x)$.

2. $- \sin x$ 3. $x^2 \sin x - 200x \cos x - 9900 \sin x$.

4. $e^x(n+x)$

5. $e^{ax}\left[a^n x^2 + 2n x a^{n-1} + n(n-1) a^{n-2}\right]$.

6. $(-1)^n \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

7. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x} = -1 + \dfrac{2}{1-x}$; $f^{(n)}(x) = 2 \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

8. $e^x \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

<u>8.</u> a) Az 5. kivételével minden függvény folytonos $x = 0$-ban, mert teljesül, hogy $\lim_{x \to o} f(x) = f(0)$.

5. Jobbról folytonos.

b) 1. Nem, mert $f'_-(0) = -1 \neq f'_+(0) = 1$.

2. $f'(0) = \lim_{h \to o} \dfrac{h|h| - 0}{h} = \lim_{h \to o} |h| = 0.$

$\boxed{3.}$ Nem, mert $f'_+(0) = \lim_{h \to o} \dfrac{|\sin h| - 0}{h} = \lim_{h \to +o} \dfrac{\sin h}{h} = 1$;

$$f'_-(0) = \lim_{h \to -0} \frac{|\sin h|}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{-\sin h}{h} = -1 \text{ , és}$$

igy $f'_+(0) \neq f'_-(0)$.

4. $f'(0) = 0$

5. Jobbról differenciálható és $f'_+(0) = -1$.

6. Nem, mert $f'_+(0) = 3 \neq f'_-(0) = -3$.

7. Nem, mert $f'_+(0) = -1$; $f'_-(0) = +1$.

$\boxed{8.}$ Nem, mert a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{h}}$ határérték nem létezik ($h \to +0$ esetén $+\infty$, $h \to -0$ esetén $-\infty$).

9. Nem, mert a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h \cos \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \cos \dfrac{1}{h}$ határérték nem létezik, $f'_+(0)$ és $f'_-(0)$ sem létezik.

10. Differenciálható, és $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} h \cos \dfrac{1}{h} = 0$, mivel $\left|\cos \dfrac{1}{h}\right| \leqq 1$.

11. Nem, $f'_+(0) = \dfrac{\pi}{2}$; $f'_-(0) = -\dfrac{\pi}{2}$.

12. Igen, és $f'(0) = 1$.

! 13. Nem, mert $f(x) = \begin{cases} x^2 , & \text{ha } x \geqq 0 \\ x , & \text{ha } x < 0 \end{cases}$, $f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = 1$.

9. 1. a) Igen b) Igen, és $f'(0) = 0$.

c) $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} , & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 , & \text{ha } x = 0 . \end{cases}$

$f'(x)$ nem folytonos, mert $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ nem létezik.

d) $f''(0)$ nem létezik, mert $f'(x)$ nem folytonos $x = 0$ -ban.

2. a) b), c), d) Igen.

10. a) $n > 0$ b) $n > 1$ c) $n > 2$ d) $n > 3$.

! 11. a) $n > 0$, m tetszőleges b) $n > 1$, m tetszőleges

c) $n > m + 1$.

12. 1. Mindenütt folytonos, $x = 0$-ban nem differenciálható.
2. Mindenütt folytonos, $x = -1$ -ben nem differenciálható.
3. és 4. Mindenütt folytonos és differenciálható.
5. Mindenütt folytonos, $x = +1$ -ben nem differenciálható.
6. Mindenütt folytonos, nem differenciálható $x = k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ helyeken.
7. Csak $x = 0$-ban folytonos, sehol sem differenciálható.
8. Csak $x = 0$-ban folytonos és differenciálható.

13. $f = |x-1| + |x-2| + |x-3|$.

14. a) $x = \dfrac{2}{2k+1}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ helyeken nem differenciálható,

de $f'(0) = 0$.

b) Nem.

15. $f' = 3(x-2)\,|x-2|$; $f'' = 6\,|x-2|$. Nem létezik $f'''(2)$.

16. Minden $x \neq 2$ -re egyszer és minden $x \neq 1$, $x \neq 2$ kétszer differenciálható.

$\boxed{17.}$ a) Igen, mert $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x-a)\,\varphi(x)}{x-a} =$

$= \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$ létezik és véges.

b) $g'_+(a) = \varphi(a)$, $g'_-(a) = \lim\limits_{x \to a-o} \dfrac{|x-a|\,\varphi(x) - 0}{x - a} =$

$= \lim\limits_{x \to a-o} \left[- \varphi(x) \right] = - \varphi(a)$. $g'(a)$ csak akkor létezik, ha

$g'_+(a) = g'_-(a)$. Ezért $\varphi(a) = - \varphi(a) \Rightarrow \varphi(a) = 0$.

18. Ha n páros, akkor akárhányszor; ha n páratlan, akkor (n-1)-szer.

19. Legyen $g(x) = f(x) - f(0)$, ekkor $g'(0) = f'(0)$ és

$g(0) = 0$. $g'_+(0) = \lim\limits_{h \to +o} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = \lim\limits_{h \to +o} \dfrac{g(h)}{h} = A$,

$g'_-(0) = \lim\limits_{h \to -o} \dfrac{g(h)}{h} = \lim\limits_{h \to +o} \dfrac{g(-h)}{-h} \lim\limits_{h \to +o} \dfrac{g(h)}{-h} = - A$ és

$A = g'_+(0) = g'(0) = g'_-(0) = - A$. Igy $A = - A$, azaz

$A = 0 \Rightarrow g'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$.

20. a) $f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = - f'(-x)$

b) $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f'(x) = f'(-x)$

c) $f(x + T) = f(x) \Rightarrow f'(x + T) = f'(x)$

! 21. Ha $f'(x)$ folytonos $[a,b]$-ben, akkor Bolzano tételéből következik az állitás. De a tétel akkor is igaz, ha $f'(x)$ nem folytonos. Legyen C valamely $f'(a)$ és $f'(b)$ közé eső érték pl. $f'(a) < C < f'(b)$. A $\varphi(x) = Cx - f(x)$ függvény folytonos $[a,b]$-ben. Igy a Weierstrass-tétel szerint létezik $\xi \in [a,b]$, ahol $\varphi(x)$ a legnagyobb értékét veszi fel. De $\varphi'(a) = C - f'(a) > 0$ és $\varphi'(b) = C - f'(b) < 0$ miatt $\varphi(x)$ az a helyen lokálisan növő, b helyen fogyó, igy a-tól jobbra felvesz $\varphi(a)$-nál nagyobb, b-től balra $\varphi(b)$-nél nagyobb függvényértéket. Ezért $[a,b]$ belsejében van az a ξ hely, ahol φ a legnagyobb értékét veszi fel, és itt $\varphi'(\xi) = C - f'(\xi) = 0$. Tehát $f'(\xi) = C$, $\xi \in (a,b)$.

22. a) $f = |x|$, $x_o = 0$.

b) $f = \begin{cases} x^2 & , \text{ ha } x \text{ irracionális} \\ -x^2 & , \text{ ha } x \text{ racionális} \end{cases}$, $x_o = 0$.

23. $a = 2x_o$, $b = -x_o^2$.

24. a) Igen b) Nem.

25. a) Nem, pl. $g(x) = x$, $h(x) = |x|$, $x_o = 0$ (lásd 8. 2.)

b) Nem, pl. $g(x) = h(x) = |x|$, $x_o = 0$.

26. a), b), c) Semmit, az összetett függvény lehet differenciálható is, meg nem is. (Pl. a) $g(x) = x^2$ és $h(x) = |x|$; b) $g(x) = |x|$ és $h(x) = x^2$; c) $g(x) = 2x + |x|$ és $h(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$. Az ezekből képzett $f(x) = g(h(x))$ függvény differenciálható $x_o = 0$-ban.

d) Differenciálható x_o-ban.

!27. Az inverz $[f^{-1}(y)]' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, a reciprok és az összetett függfény deriválási szabályát felhasználva:

$$[f^{-1}(y)]'' = -\frac{1}{[f'(f^{-1}(y))]^2} \cdot \frac{f''(f^{-1}(y))}{f'(f^{-1}(y))} .$$

28. 1. Érintő: $y = -2x + 7$; normális: $y = \frac{1}{2}x + 2$.

2. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$, igy $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Érintő: $y - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, azaz

$y - \frac{\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$; normális $y - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

3. a) Érintő: $y = \sqrt[3]{4}(x+1)$; normális: $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1)$.

b) $y = 3$; $x = 2$. c) $x = 3$; $y = 0$.

29. 1. $x = \pm 1$, $y = 3x - 1$, $y = 3x + 3$.

2. $P_1\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $P_2\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$, $y - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x-3)$,

$y + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x - 1)$.

3. $P_1(-3,4)$, $P_2(3,-4)$, $y - 4 = \frac{3}{4}(x + 3)$ és $y+4 = \frac{3}{4}(x-3)$

4. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $y = \sqrt{2}$ és $y = -\sqrt{2}$.

30. $\boxed{1.}$ Az $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ helyeken metszik egymást,

$x = \frac{\pi}{4}$-nél $y_1'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{tg} \alpha$,

$y_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{tg} \beta$; $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = 2\sqrt{2}$

$\alpha - \beta = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \approx 70^\circ 30'$. Máshol is ilyen szögben metszik egymást.

2. $P_1(0,0)$-ban $\frac{\pi}{2}$, $P_2(1,1)$-ben $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} \approx 37^\circ$.

3. $P_1(2,2)$-nél $\frac{\pi}{4}$, $P_2(2,-2)$ is $\frac{\pi}{4}$.

4. $y'(1) = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

31. $x^2 - y^2 = a$ miatt $2x - 2yy' = 0$, innen $y' = \frac{x}{y} = m_1$, $xy = b$ miatt $y + xy' = 0$, innen $y' = -\frac{y}{x} = m_2$. Mivel tetszőleges (x,y) esetén $m_1 m_2 = -1$, igy valóban merőlegesek.

32. $x = 0$ -ban metszik egymást és $y_1'(0) = f'(0)$;

$$y_2'(0) = \left[f'(x)e^{-x^2} + f(x)e^{-x^2}(-2x)\right]_{x=o} = f'(0) .$$ Igy

$$y_1'(0) = y_2'(0) = f'(0) .$$

33. Igaz, $y(0) = 0$ és $y'(0) = 1$ minden függvénynél.

34. a) Létezik vizszintes érintő az $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ helyeken.

b) az $x = \frac{9}{5}$ helyen érintő, $x = 0$ -ban jobb oldali félérintő van.

35. $y - ax_o^2 = 2ax_o(x-x_o)$ és $y = 0$ metszése $x = \frac{x_o}{2}$ -nél van.

36. $a = -\frac{1}{6}$, $b = 3$.

37. A hiperbola egy tetszőleges $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ pontjában az érintő egyenlete $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a)$. Ennek $x = 0$ -val való metszéspontja

$P_1\left(0, \frac{2}{a}\right)$, $y = 0$-val való metszéspontja $P_2(2a, 0)$. $T = \frac{1}{2}\frac{2}{a} \cdot 2a = 2$.

38. a) $v(2) = s'(2) = \frac{4}{5}$; $a(2) = s''(2) = -\frac{6}{25}$.

b) $v(0) = 6$, $a(0) = 2 \ln 3$.

39. 1. $df = -\frac{1}{x^2}\,dx$ 2. $\frac{dx}{x^2 - 1}$ 3. $(3x^2 + \frac{3}{x^4})\,dx$

$\boxed{40.}$ a) $\Delta f = f(x_o + h) - f(x_o) = (x_o+h)^3 - x_o^3 = 3x_o^2h + (3x_oh+h^2)h.$

Itt $A = 3x_o^2$, $\Delta x = h$ és $\varepsilon = 3x_oh+h^2 \to 0$, ha $h \to 0$.

b) $\Delta f = f(0,99) - f(1) \approx df = f'(1)(-0,01) = \left[3.x^2\right]_{x=1}(-0,01)$

$= -0,03;$

$f(0,99) = f(1) - 0,03 = 1 - 0,03 = 0,97$.

41. a) $\Delta V \approx 30\ dm^3$, b) $\Delta a \approx \frac{1}{30}\ dm \approx 0,33\ cm.$

! $\boxed{42.}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ -ből $g = \frac{4\pi^2.\ell}{T^2} = \frac{8\pi^2}{T^2}$; $400\ T = 1135 \pm 0,5$,

így a fenti összefüggések felhasználásával:

$$\left|\frac{\Delta g}{g}\right| \approx \left|\frac{dg}{g}\right| = \left|-\frac{2}{T}\right| \ |\Delta T| = \frac{2}{\frac{1135}{400}} \cdot \frac{0,5}{400} = \frac{1}{1135} \approx 0,0009 .$$

Így $0,0009.100\% = 0,09\%$ a bizonytalanság (relatív hiba).

43. 3% 44. 0,021 dm.

45. Vezessük be a következő rövidítést:
l'Hospital szabály = l' H. Nem vezet célra l' H alkalmazása: 6., 7., 8., 14., 15., 16. feladatoknál. $\left(\frac{0}{0}\right)$ alak: 1.-11.; $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ alak: 12., 13., $a > 1$ eset, 14., 15., 16. $b > 1$ eset; $(0.\infty)$ alak: 17., 18., 22.; $(\infty - \infty)$ alak: 19., 20., 21., (0^0) alak: 23., 24.; (0^∞) alak: 25.; (∞^0) alak: 26., 27., 28.; (1^∞) alak: 29., 30., 31., 32., 33., 34.

1. 1 2. 0 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x}{6} = \frac{1}{6}$

l'H-t 3-szor egymás után alkalmaztuk (mindig $\frac{0}{0}$ alakot kaptunk).

$\boxed{4.}$ l'H-t alkalmazva: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1-x^2}}{3\sin^2 x \cos x}$. Ez ismét $\left(\frac{0}{0}\right)$ alaku, de l'H-t gépiesen tovább alkalmazni nem célszerü. Egyszerübb alakra hozva:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{3(1-x^4)\sin^2 x \cos x} = -\frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \frac{1}{(1-x^4)\cos x}\right].$$

Alkalmazzuk a szorzat határértékére vonatkozó szabályt és a

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1.$ összefüggést. Igy

$$-\frac{2}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x^4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = -\frac{2}{3}.$$

5. $-\dfrac{2}{\pi}$ $\boxed{6.}$ l'H nem alkalmazható, mert

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ nem létezik, ui. a számlálónak nincs határértéke. (* Létezik ugyan a $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$, mert $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$. Mivel a szorzat egyik tényezője korlátos, a másik 0-hoz tart, igy $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$. De $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ nem létezik.)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ mégis létezik: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) =$

$= 1.0 = 0$

(Itt alkalmaztuk a * megjegyzést és a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ összefüggést.)

$\boxed{7.}$ l'H közvetlenül nem vezet célra, mert a

$$\lim_{x\to+0} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x\to+0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$ határértékhez jutnánk.

Ismét alkalmazva l'H-t $\lim\limits_{x\to+0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}$ -t kapnánk, tehát egyre bonyolultabb kifejezés lenne, a nevezőben x egyre magasabb hatványkitevőre kerülne. De $u = \frac{1}{x}$ helyettesitéssel:

$$\lim_{x\to+0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{u\to+\infty} \frac{e^{-u}}{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{e^u}$$

határérték kiszámitása l'H -lal egyszerü $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{1}{e^u} = 0.$

8. 0 9. 0 10. $a^a(\ln a - 1)$ 11. $\ln \frac{a}{b}$

(12) l'H n-szeri alkalmazása után: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$.

(13) $a > 1$ esetén n-szer alkalmazva l'H : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x(\ln a)^n} = 0$;

$0 < a < 1$ esetén $+\infty$.

$\boxed{14.}$ l'H nem vezet célra: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \ldots,$ mert itt minden határérték $\frac{\infty}{\infty}$ tipusu.

Másképp okoskodva:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 .$$

15. e^{2a} 16. $1 < b$ esetén 1; $1 \geqq b$ esetén közvetlenül adódik a 0 határérték. 17. 0 18. $\frac{1}{\pi}$

19. Közös nevezőre hozva és l'H kétszeri alkalmazása után:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-2\sin^2 x}{\sin^2 x + 2x\sin 2x + x^2\cos 2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2}{1 + 4\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x + \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cos 2x} = -\frac{1}{3}$$

20. $\frac{1}{2}$ 21. $\frac{1}{2}$

22. Alakitsuk a $0\cdot\infty$ tipus $\frac{\infty}{\infty}$ tipusura, majd l'H-t alkalmazzuk:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to 1-0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{\left(-\frac{1}{\ln^2 x}\right)\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x\ln^2 x}{1-x} = \ldots = 0 .$$

23. Alkalmazzuk az $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ összefüggést, igy $(1-2^x)^{\sin x} = e^{\sin x\ln(1-2^x)}$. A kitevőben levő $0.\infty$ tipusu kifejezést $\frac{\infty}{\infty}$ alakra hozzuk: $\lim\limits_{x \to -0} \sin x\ln(1-2^x) =$

$$= \lim_{x \to -0} \frac{\ln(1-2^x)}{\frac{1}{\sin x}},$$ majd alkalmazzuk l'H-t: $$\lim_{x \to -0} \frac{\frac{1}{1-2^x}(-2^x)\ln 2}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} .$$

Egyszerübb alakra hozva, a szorzat határértékére vonatkozó szabályt alkalmazva és a második tényező határértékét l'H-lel

számolva $$\lim_{x \to -0}\left(\frac{-2^x\ln 2}{\cos x}\right)\cdot\lim_{x \to -0}\frac{\sin^2 x}{2^x-1} =$$

$= -\ln 2 \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{2 \sin x \cos x}{2^x \ln 2} = 0$ a kitevő határértéke.

Tehát $\lim\limits_{x \to -0} (1-2^x)^{\sin x} = \lim\limits_{x \to -0} e^{\sin x \ln(1-2^x)} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to -0} \sin x \ln(1-2^x)} = e^0 = 1$. (Itt felhasználtuk az e^u függvény folytonosságát: $\lim\limits_{u \to a} e^u = e^a$.)

24. 1 25. 0 26. $\frac{1}{e}$ 27. 1 28. 1 29. e

30. e^a 31. $e^{-\frac{1}{6}}$ 32. $\frac{1}{e}$ 33. 1

34. $e^{\frac{2}{\sin 2a}}$, $\left(a \neq \frac{k\pi}{2}, k \text{ egész}\right)$.

46. $\boxed{1.}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$, mert $|\sin x| \leqq 1$,

és igy $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$ (lásd 45. 6. * megjegyzést). l'H nem alkalmazható, mert a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ határérték nem létezik.

2. a határérték nem létezik.
3. a $\leqq 1$ esetén nem létezik (lásd 2.), a > 1 esetén létezik és 0.

! $\boxed{47.}$ a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h} + \dfrac{f'(x_0) - f'(x_0-h)}{2h} \right] =$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \to o} \left[\frac{f'(x_o+h)-f'(x_o)}{h} + \frac{f'(x_o-h)-f'(x_o)}{-h} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[f''(x_o) + f''(x_o) \right] = f''(x_o),$$ ahol az első lépésben a $\frac{g(h)}{h^2}$ függvény határértékének kiszámitásánál a l'H-t alkalmaztuk.

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & , \text{ ha } x \neq 0 \end{cases}$, $x_o = 0$

és általában minden olyan $f(x)$ páratlan függvény $x_o = 0$ esetén, amelyre $f(0) = 0$ és $x_o = 0$-ban kétszer nem differenciálható.

Ekkor $\lim_{h \to o} \frac{f(0+h) + f(0-h) - 2f(0)}{h^2} = \lim_{h \to o} \frac{f(h)-f(h)-2.0}{h^2} = 0.$

(Felhasználtuk, hogy f páratlan, azaz $f(-h) = -f(h)$.)

48. 1. $R_n(x) = \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$

2. $\frac{1}{3840} < 3.10^{-4}$ 3. $|R_4(x)| = \frac{ch\,\xi}{5!} |x|^5 \leq \frac{ch\,\frac{1}{3}}{5!} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \leq 4.\ 10^{-5}$

49. $|x| < 0,3$

50. a) és b) 1. $x_o = 1$ körüli elsőrendü Taylor polinom a Lagrange-féle maradéktaggal:

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + \frac{6\xi}{2!} (x-1)^2 , \quad (0,99 < \xi < 1)$$

$0,99^3 \approx 1 - 3.0,01 = 0,97$. Mivel az elhagyobb maradéktag pozitiv, a számitott közelitőérték a valódi értéknél kisebb. A hiba $|H| = |R_1| = |3\,\xi\,(0,01)^2| < 3.10^{-4}$. Tehát

$0,9700 < 0,99^3 < 0,9703$, azaz $0,99^3 = 0,970$ 3 tizedesre pontos.

2. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\cos\xi}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2$,

$x_1 = 28.\frac{\pi}{180}$ (radián), $x_1 - \frac{\pi}{6} = -2\frac{\pi}{180}$,

$\cos x_1 = \cos 28^o = \cos 28.\frac{\pi}{180} \approx 0,883$,

$|H| = |R_1(x_1)| = \left|\frac{\cos\xi}{2} \quad 4\left(\frac{\pi}{180}\right)^2\right| < 7.10^{-4} < 10^{-3}$.

51. a) $x^5 + e^{x-1} = 2+6(x-1) + \frac{21}{2}(x-1)^2 + \frac{61}{6}(x-1)^3 + \frac{121}{24}(x-1)^4 +$

$+ \frac{121}{120}(x-1)^5$, $|R_5(x)| = \left|\frac{e^{\xi-1}(x-1)^6}{6!}\right| < \frac{e}{6!} < 5.10^{-3}$

b) $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{1+(x-1)} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \binom{\frac{1}{3}}{2}(x-1)^2 =$

$= 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2$,

$|R_2(x)| = \left|\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\xi^{-\frac{8}{3}}(x-1)^3}{3!}\right| < \frac{5}{3^4}.1.(0,25)^3 < 10^{-3}$

52. I. Megoldás: Az e^x függvény $x = 0$ helyhez tartozó 8-adrendü Taylor polinomja a Lagrange-féle maradéktaggal:

$$e^x = 1+x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^8}{8!} + \frac{e^{\xi}x^9}{9!}.$$

Ebből $x^2e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \ldots + \frac{x^{10}}{8!} + \frac{e^{\xi}x^{11}}{9!}$.

Igy $(x^2e^x)^{(10)}_{x=o} = \left[\frac{10!}{8!} + \frac{e^{\xi}.11!}{9!}.x\right]_{x=o} = \frac{10!}{8!} = 90.$

II. Megoldás: Leibnitz szabállyal: $\left[\sum_{k=o}^{10} \binom{10}{k} (x^2)^{(k)} (e^x)^{(10-k)}\right]_{x=o} =$

$$= \left[x^2 e^x + \binom{10}{1} 2xe^x + \binom{10}{2} 2e^x\right]_{x=o} = \frac{10!}{2!8!} \cdot 2 = 90.$$

53. a) 2,71828 b) 2,2361 $\left(\sqrt{5} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}} = \ldots\right)$

54. $\boxed{a)}$ A sin x függvény x=0 helyhez tartozó másodrendü Taylor polinomja a Lagrange féle maradéktaggal:

$$\sin x = x + \frac{[\sin x]'''_{x=\xi} \cdot x^3}{3!}. \quad \text{Mivel}$$

$$[\sin x]'''_{x=\xi} = -\cos\xi \geqq -1, \quad \text{igy} \quad \sin x \geqq x - \frac{x^3}{3!}$$

Másrészt sin x negyedrendü Taylor polinomját a Lagrange féle maradéktaggal felirva, majd felülről becsülve:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{[\sin x]^{(5)}_{x=\xi}\, x^5}{5!} \leqq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Itt felhasználtuk: $[\sin x]^{(5)}_{x=\xi} = \cos\xi \leqq 1$.

55. $$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\operatorname{sh}\xi}{(2n+1)!} x^{2n+1} \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = T_{2n}(x),$$

$$|R_{2n}(x)| < \frac{\operatorname{sh} 1}{(2n+1)!} < \frac{1}{100}, \quad \text{ha} \quad n \geqq 3 \quad \text{és} \quad x \in [0,1];$$

pl. $T_6(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}$ ilyen.

56. 1. Igen, $\xi = 2$. 2. Nem, $f(x)$ nem folytonos $[-1,1]$-ban.
3. Nem, $f(x)$ ugyan folytonos $[-1,1]$-ben, de nem differenciálható $(-1,1)$-ben, mert $x = 0$-ban nem differenciálható.
4. Nem.
5. Igen, mert $f(1) = f(e) = 0$, $f(x)$ folytonos $[1,e]$-ben és differenciálható $(1,e)$-ben, tehát a Rolle-tétel feltételei teljesülnek.
Mivel $f' = \frac{1}{x}(1-2\ln x)$, ezért $f'(\xi) = 0$, ha

$$\xi = \sqrt{e} \approx 1{,}65 \in (1,e).$$

57. Alkalmazható Rolle-tétele $p(x)$-re pl. a $2{,}1 \leqq x \leqq 2{,}3$ intervallumban, tehát létezik olyan $\xi_1 \in (2{,}1\ ;\ 2{,}3)$, hogy $p'(\xi_1) = 0$.
A gyök $\xi_1 \approx 2{,}2$, mert a hiba $|\xi_1 - 2{,}2| \leqq 0{,}1$. Hasonlóan látható, hogy a $[2{,}3;\ 2{,}5]$-ben is létezik p'-nek gyöke: $\xi_2 \approx 2{,}4$, és $[2{,}5\ ;\ 2{,}7]$-ben $\xi_3 \approx 2{,}6$.

58. $g(x)$ differenciálható $[-1,1]$-ben, $g(-1) = g(1)$, igy a Rolle-tétel alapján létezik olyan $\xi \in (-1,1)$, hogy $g'(\xi) = 0$.

59. 1. Igen, $\xi = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$. 2. Igen, $\xi = \pm\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$.

3. a) Nem, $f(x)$ nem differenciálható $\left(-\frac{1}{2},1\right)$-ben, mert nem differenciálható $x = 0$-ban.

b) Igen, $\xi = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$.

4. Igen, $\xi = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

60. Nem igaz. Ellenpélda az 56. 2.-ben szereplő függvény.

61. $\xi = \frac{\pi}{4}$.

62. 1. A Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan

$$\xi \in (b,a), \text{ hogy } [\sin x]'_{x=\xi} = \frac{\sin b - \sin a}{b-a}. \text{ Mivel}$$

$[\sin x]'_{x=\xi} = \cos \xi$, igy $\left|\frac{\sin b - \sin a}{b - a}\right| = |\cos \xi| \leqq 1$

miatt $|\sin b - \sin a| \leqq |b - a|$.

2. Lagrange tétel segitségével.

3. Alkalmazható a Lagrange tétel a $\operatorname{tg} x$ függvényre az

$\left[x, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumban: létezik olyan $\xi \in \left(x, \frac{\pi}{4}\right)$, hogy

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = (\operatorname{tg} x)'_{x=\xi} = \frac{1}{\cos^2 \xi}.$$

De $0 < x < \xi < \frac{\pi}{4}$ esetén $\frac{1}{\cos^2 \xi} < \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2.$

Igy $\frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} < 2$, s ebből $\operatorname{tg} x - 1 < 2x - \frac{\pi}{2}$.

4. Lagrange tétellel és $0 < x < \xi < y < \frac{\pi}{2}$ esetén a

$\cos x > \cos \xi > \cos y$ összefüggés felhasználásával.

5. A $\cos x$ és $\sin x$ függvényekre a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumban alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel: létezik olyan $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, hogy

$$\frac{\cos a - \cos b}{\sin a - \sin b} = \frac{(\cos x)'_{x=\xi}}{(\sin x)'_{x=\xi}} = \frac{-\sin \xi}{\cos \xi} = -\operatorname{tg} \xi .$$

Igy $\left|\frac{\cos a - \cos b}{\sin a - \sin b}\right| = |\operatorname{tg} \xi| < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$

64. a) Rolle tétele alkalmazásával adódik.

b) $p_n(0) = p_n(x_o) = 0$, ezért Rolle tétele szerint létezik olyan $\xi \in (0, x_o)$, melyre $p'_n(\xi) = 0$.

!65. Rolle tétele miatt f'-nek létezik legalább $(n-1)$ gyöke, bármely (x_k, x_{k+1})-ben $(k=1,2,\dots,n)$ létezik gyök. De $f(a) > 0$, $f'(a) > 0$ és $f(x_1) = 0$ miatt létezik (a, x_1)-ben legalább még egy gyök.

! 66. a) Indirekt módon bizonyitjuk. Tegyük fel, hogy $f'(x)$-nek megszüntethető szakadása van $x = c$ -ben, azaz létezik a $\lim\limits_{x \to c} f'(x) = A$ véges határérték. Megmutatjuk, hogy ekkor f' értelmezett c -ben és $f'(c) = A$. Alkalmazzuk a $[c,x]$ intervallumban (illetve $[x,c]$ -ben az f függvényre a Lagrange tételt. Létezik olyan $\xi \in (c,x)$, melyre $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi)$. Ha $x \to c$, akkor $\xi \to c$, igy ha létezik a $\lim\limits_{\xi \to c} f'(\xi) = A$ véges határérték, akkor létezik $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim\limits_{\xi \to c} f'(\xi) = A$, tehát $f'(c)$ értelmes és $f'(c) = A$.

b) Lehet. Pl. $f(x) = \sqrt{|x|}$ a $[-1,1]$-ben, $c = 0$.

67. Be kell látnunk, hogy: $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \text{ ha } |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

esetén. Lagrange tétele alapján van olyan $\xi \in (x_1, x_2)$, amelyre

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi). \text{ Ekkor}$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)|\,|x_1 - x_2| \leq K\,|x_1 - x_2| < \varepsilon, \text{ ha}$$

$$|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{K} = \delta.$$

68. 1. Szigoruan monoton növekedő $(-\infty, +\infty)$-ben.

2. $(-\infty, 0]$-ban és $\left[\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$-ben szigoruan monoton fogyó, $\left[0, \frac{2}{\ln 2}\right]$ -ben szigoruan monoton növő.

3. $(-\infty, 0]$ -ban szigoruan monoton fogyó, $[0, +\infty)$-ben növő.

4. Szigoruan monoton növő $(-\infty, +\infty)$-ban.

5. $(-\infty,-1]$-ben és $[0,1]$ -ben szigoruan monoton fogyó, $[-1, 0]$-ban és $[1,+\infty)$-ben szigoruan monoton növő.

6. $f(x) = 2 \ln |x| - 3 \ln (x+1)$. D_f: $(-1,0) \cup (0,+\infty)$;

$$f' = \frac{2 - x}{x(x + 1)} .$$

f szigoruan növő $(0,2]$-ben, mert itt $f' \geqq 0$ és az $x = 2$ hely kivételével $f' > 0$;
f szigoruan monoton fogyó $(-1,0)$ - ban és $[2, +\infty)$ -ben, mert itt $f' \leqq 0$ és az $x = 2$ hely kivételével $f' < 0$.

7. Szigoruan monoton növő $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$-ben, fogyó $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$-ben.

8. Szigoruan monoton fogyó, ha

$$x \in \left(0+k2\pi , \frac{\pi}{2} + k2\pi\right] \text{ és } x \in \left[\frac{3\pi}{2} + k2\pi , 2\pi + k2\pi \right),$$

szigoruan monoton növő, ha

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + k2\pi , \pi + k2\pi \right) \text{ és } x \in \left(\pi + k2\pi , \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right],$$

ahol $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

69. D_f: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi , \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$, ahol $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ mert ezen a halmazon $\cos x > 0$. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ -ben $x < \operatorname{tg} x$, ezért $f'(x) = 2x - 2\operatorname{tg} x < 0$; $f'(0) = 0$. Tehát $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$-ben $f'(x) < 0$ egyetlen pont, az $x = 0$ kivételével, itt $f'(0) = 0$, ezért $f(x)$ szigoruan monoton fogyó $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$-ben.

70. Vizsgáljuk a $h(x) = f(x) - g(x)$ függvényt.

71. Alkalmazzuk 70.-t $g(x) = mx$ esetén.

72. $$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x+x^2 \sin \frac{2}{x}}{x} =$$

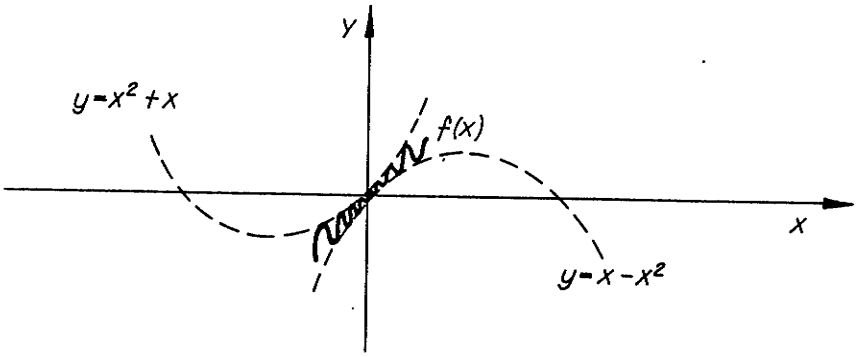
$= \lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x \sin \frac{2}{x}\right) = 1$, igy $f'(0) > 0$, ezért $f(x)$ lokálisan

növekszik $x = 0$-ban. $f'(x)$ létezik $x = 0$ környezetében és az

$x_k = \dfrac{1}{k \frac{\pi}{2}}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ helyeken

$$f'(x_k) = 1 - 2 \cos k\pi = \begin{cases} -1, & \text{ha } k \text{ páros} \\ 3, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Tehát $x = 0$ minden környezetében van olyan hely, ahol $f' < 0$ és olyan is, ahol $f' > 0$. Ezért egyetlen $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumban sem monoton növő f.



38. ábra

73. 1. Páratlan függvény, lok. minimum $x=1$-nél, lok. maximum $x = -1$ -nél.

$\boxed{2.}$ $D_f = R - \{0\}$, $f(x)$ páros. $x > 0$ -ra $f' = \ln x + 1$. Ezért $f' < 0$, ha $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ és $f' > 0$, ha $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Tehát f' az $x = \frac{1}{e}$ helyen előjelet vált és $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$.

Igy az $x = \frac{1}{e}$ hely $f(x)$ lokális minimumhelye. Mivel f páros, igy $x = -\frac{1}{e}$ is lokális minimumhely.

DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

74. a) $k = -1$

b) $k = 1$

$\boxed{c)}$ nincs ilyen k, mert kétszer differenciálható függvény esetén inflexiós pont létezésének szükséges feltétele, hogy $f'' = 0$ legyen. Ez csak $k = 0$-nál teljesülne, de ekkor $f(x) = x$ a függvény.

!75. $f'(0) = 0$; $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ esetén $f'\left(\frac{1}{k\pi}\right) < 0$, ha k páros, $f'\left(\frac{1}{k\pi}\right) > 0$, ha k páratlan, tehát $x = 0$ minden környezetében f' negativ és pozitiv értéket is felvesz. Mégis létezik lok. minimum $x = 0$-ban, mert $0 < \frac{1}{2}x^2 \leq x^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}\right)$, ha $x \neq 0$ és $f(0) = 0$.

76. a) Létezik $f'(0) = 0$, nem létezik $g'(0)$.

b) Mindkét függvénynek az $x = 0$ helyen lokális minimuma van.

!77. Érintő $y = 0$; legyen $g(x) = x^2 - x^3$. Mivel $g(x)$-nek $x = 0$ lokális minimumhelye, $g(0) = f(0) = 0$, és $0 \leq g(x) \leq f(x)$, ezért az $x = 0$ -nak létezik olyan környezete, hogy ott $f(x)$ az $y = 0$ érintő fölött halad. Nincs $x = 0$ -nak olyan környezete, ahol f konvex, mert $x = 0$ bármely környezetében $f''(x) = 2 + 6x \sin\frac{1}{x} - 4\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ az $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ tag miatt akármilyen nagy abszolutértékü pozitiv és negativ értéket is felvesz (a többi tag korlátos).

78. $\boxed{1.}$ $f' = \arcsin x$, ha $|x| < 1$; $f' = 0$, ha $x = 0$; $f' < 0$, ha $x < 0$, és $f' > 0$, ha $x > 0$. Tehát $x = 0$ -ban lok. minimum van: $f(0) = 1$. Más lokális szélsőérték nincs a $(-1,1)$ intervallumban. A végpontokban $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{2}$ a $[-1,1]$ -beli maximum, és $f(0) = 1$ nemcsak lokális, hanem $[-1,1]$ -beli minimum.

2. $x = -\frac{\pi}{6}$ -nál lok. minimum, $x = \frac{\pi}{6}$ -nál lok. maximum

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$,

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = +\frac{\pi}{2}$. Tehát $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ -beli minimum $x = \frac{\pi}{2}$ -nél van, mert $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, és max $x = -\frac{\pi}{2}$ -nél, mert $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) > f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

79. f konvex, ha $x \in \left[\frac{\pi}{2} + k2\pi\ ,\ \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right]$,

f konkáv, ha $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k2\pi\ ,\ \frac{\pi}{2} + k2\pi\right]$.

Inflexiós pontok $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ helyeken $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

80. 1. $y = x + 2$ és $x = 0$.

$\boxed{2.}$ $y = Ax + B$ aszimptota létezéséhez szükséges feltétel, hogy létezzék a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = A$ véges; elégséges feltétel, hogy létezzék a $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - Ax) = B$ véges határérték. Itt

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$B = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}.$$ Alkalmazzuk a l'Hopsital szabályt.

Igy $$B = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1.$$ Tehát

$y_1 = \frac{\pi}{2}x - 1$ az egyik aszimptota, amelyre $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y_1) = 0$.

Mivel $f(x)$ páros, igy $y_2 = -\frac{\pi}{2}x - 1$ a másik aszimptota, melyre $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - y_2) = 0$. (lásd 81. 13. ábráját.)

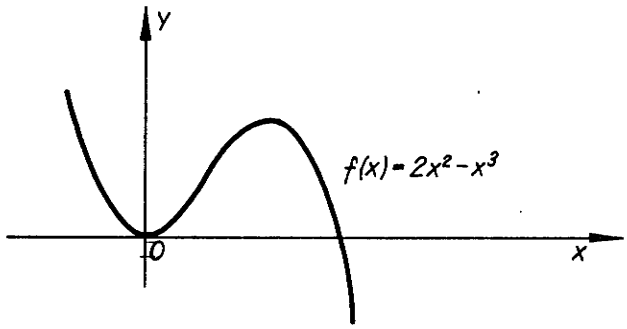
3. $y = 1$ 4. $y = x - 1$

81. $\boxed{1.}$ $D_f = (-\infty, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$. Gyökök: $x_1 = 0$ és

$x_2 = 2$. $f' = 0$, ha $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$; $y'' = 0$, ha $x = \frac{2}{3}$.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{4}{3}, +\infty)$
f'	-	0	+	+	+	0	-
f	fogy	lok. min.	szig.	mon.	növő	lok. max.	fogy
f''	+	+	+	0	-	-	-
f	konvex			infl. pont	konkáv		

$P_{min}(0,0)$; $P_{max}\left(\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right)$; $P_{infl}\left(\frac{2}{3}, \frac{16}{27}\right)$; f-nek nincs lineáris aszimptotája.



39. ábra

2. f(x) páros, gyökei: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$.

Szélsőértékpontok: $P_{1\ max}(-1,1)$, $P_{2\ max}(1,1)$, $P_{min}(0,0)$.

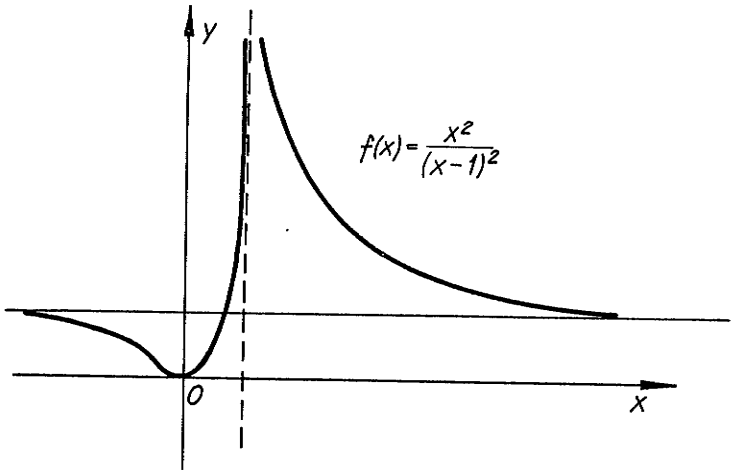
Inflexiós pontok: $P_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$.

3. $f = (x-1)^3+2$, tehát egyszerü eltolással keletkezik az $f = x^3$ görbéből (x tengely irányában +1, y irányában + 2).

4. $D_f:(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f = 1 \pm 0$; $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f = +\infty$.

Egyenes aszimptotái $y = 1$ és $x = 1$.

Gyökhely $P(0,0)$. Lokális minimum $P(0,0)$. Inflexió: $P_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{9}\right)$.



40. ábra

5. Gyöke $x = -1$. Nincs értelmezve $x = 0$ -ban. $\lim\limits_{x\to 0} f = +\infty$.

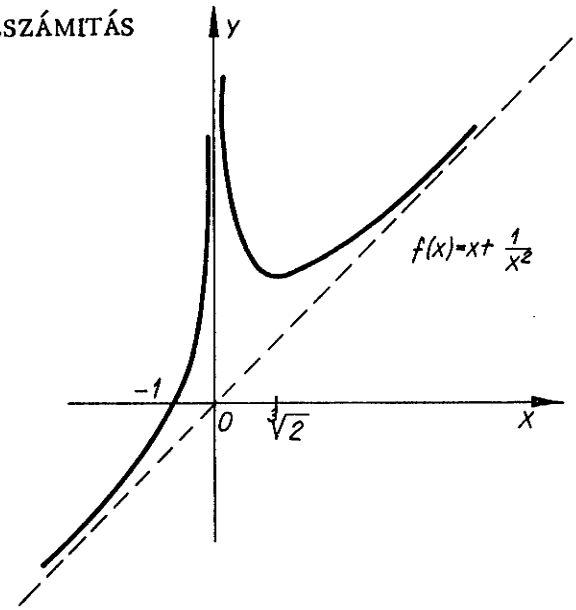
Lok. minimum $P\left(\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$. Inflexiós pontja nincs.

Aszimptotái $y = x$ és $x = 0$. (41. ábra, 1. köv. old.)

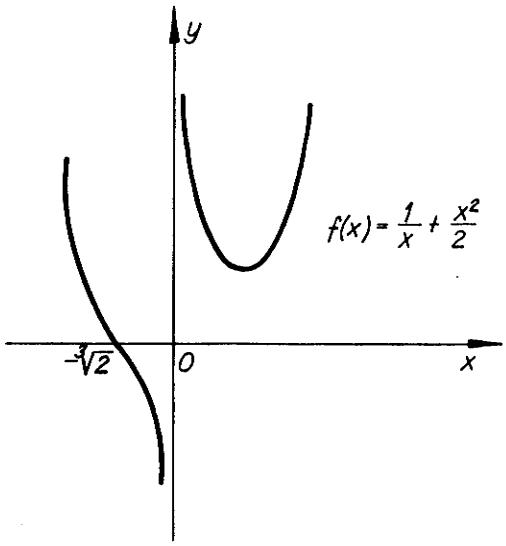
6. $D_f:(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm 0} f = \pm\infty$;

Lok. min $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$, inflexiós pont $P\left(-\sqrt[3]{2},0\right)$.

Aszimptota az $x = 0$ egyenes. Más egyenes aszimptotája nincs. (42. ábra)



41. ábra



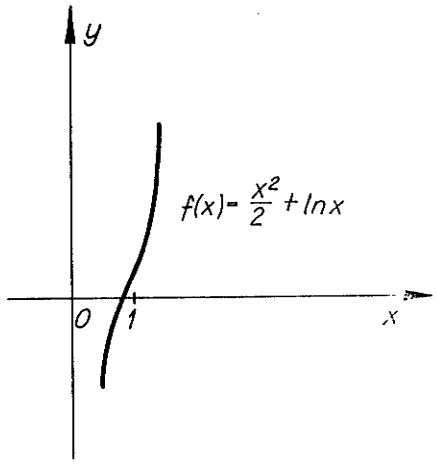
42. ábra

7. $D_f = (0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+0} f = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f = +\infty$; $x > 0$

esetén $f' = x + \frac{1}{x} > 0$, tehát f szigoruan monoton növő. $f'' = 1 - \frac{1}{x^2}$; $f'' = 0$,

ha $x = 1$ és itt előjelet váltva tünik el (negativból megy át pozitivba), tehát inflexiós pont van $x = 1$ helyen. $f'(1) = 2$, az inflexiós érintő iránytangense 2. f-nek nincs lineáris aszimptotája.

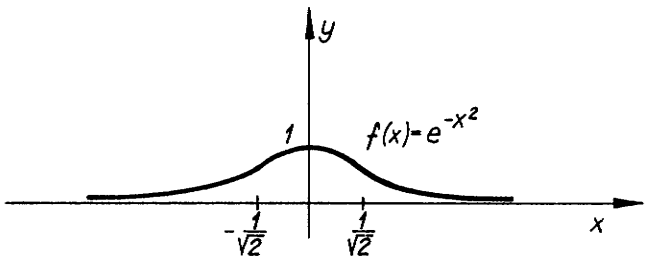


43. ábra

8. $D_f = (-\infty,+\infty)$. Páros fv. Gyökhelye nincs $f > 0$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f$

lokális maximum $P(0,1)$. Inflexió $P_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ és

$P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. Lineáris aszimptota $y = 0$.



44. ábra

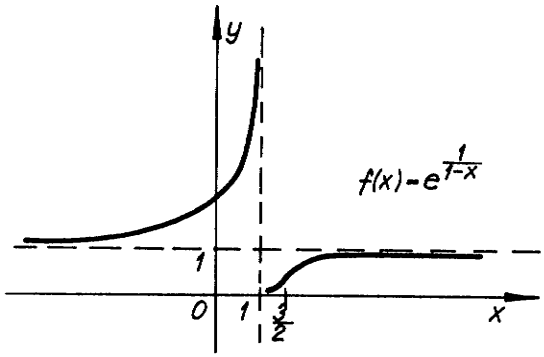
9. $D_f = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to1+0} f = 0$; $\lim\limits_{x\to1-0} f = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f = 1$; $f' = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} > 0$, igy a $(-\infty,1)$ és a

$(1,+\infty)$ intervallumokban f szigoruan monoton növő.

$$f'' = e^{\frac{1}{1-x}} \frac{3-2x}{(1-x)^4}; \quad f'' = 0, \text{ ha } x = \frac{3}{2}, \text{ és az } x = \frac{3}{2}$$

helyen f'' pozitivból negativba megy, tehát f konvexből konkávba. Igy létezik inflexiós pont az $x = \frac{3}{2}$ pontban. $f'' > 0$ $x < 1$ esetén is. Tehát f konvex $x < 1$ és $1 < x \leqq \frac{3}{2}$ esetén. Lineáris aszimptoták: $y = 1$ és $x = 1$. (Utóbbinál csak bal oldali aszimptota.)



45. ábra

$\boxed{10.}$ $D_f = (-\infty, +\infty)$. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$;

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 .$$

(a 2. és 3. lépésben l'Hospital szabályt alkalmaztunk a $\frac{\infty}{\infty}$ tipusu határértéknél)
Gyökhely $x = 0$ -nál $P(0,0)$.
f mindenütt folytonos és akárhányszor differenciálható.

$$f' = -e^{-x} x(x-2); \quad f' = 0, \text{ ha } x_1 = 0 \text{ és } x_2 = 2 .$$

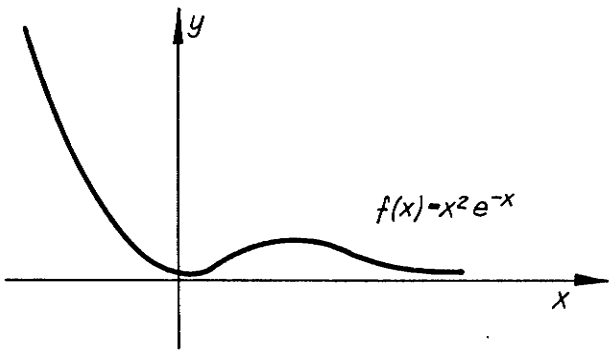
Ezeken a helyeken lehet lokális szélsőértéke f-nek. Mivel $f' < 0$ a $(-\infty, 0)$ és $(2, +\infty)$ intervallumokban, igy f itt szigoruan monoton fogyó. $f' > 0$ a $(0,2)$ intervallumban, ezért f

itt szigoruan monoton növő. Igy $x = 0$-ban és $x = 2$ -ben is van f-nek lokális szélsőértéke, mégpedig $x = 0$ -ban lokális minimum, $x = 2$ -ben lok. maximum.

$f(0) = 0, \quad f(2) = 4e^{-2}$.

$f'' = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

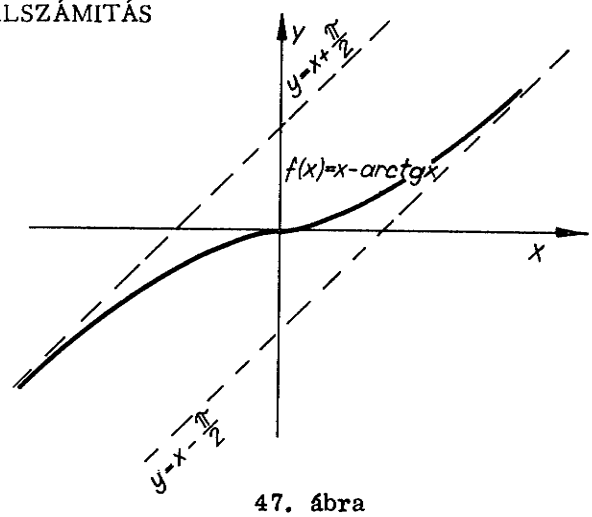
(A lokális szélsőértéket f'' segitségével is megállapithatjuk: Mivel $f'(0) = 0$ és $f''(0) > 0$, igy $x = 0$-ban lok. minimum; $f'(2) = 0$ és $f''(2) < 0$, igy $x = 2$ -ben lok. maximum van.) $f'' = 0$ az $x_3 = 2 - \sqrt{2}$ és $x_4 = 2 + \sqrt{2}$ helyeken. Itt lehet inflexiós pontja f-nek. $f'' < 0$ a $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$-ben, igy itt konkáv; $f'' > 0$ a $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ és $(2 + \sqrt{2}, +\infty)$ intervallumokban, igy f itt konvex. Tehát az $x = 2 - \sqrt{2}$ és $x = 2 + \sqrt{2}$ helyeken inflexiós pont van. A függvénynek nincs lineáris aszimptotája $x \to \infty$ esetén, mert nem létezik a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ véges határérték. (Aszimptota létezéséhez szükséges feltétel nem teljesül.)



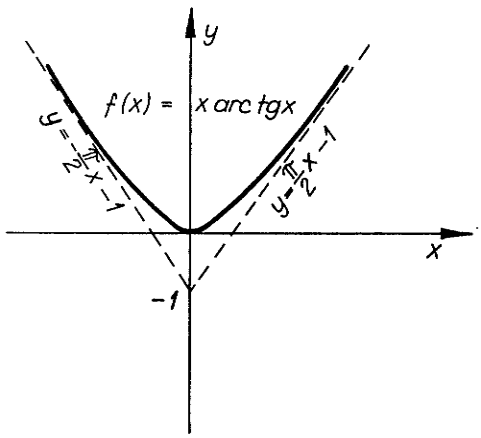
46. ábra

11. $\lim\limits_{x \to +0} f = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty$, lok. min $P\left(\frac{1}{e}, \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)$, alulról konvex minden x -re.

12. Aszimptoták $y = x - \frac{\pi}{2}$ és $y = x + \frac{\pi}{2}$; páratlan függvény. Inflexiós pont $P(0,0)$.



47. ábra



48. ábra

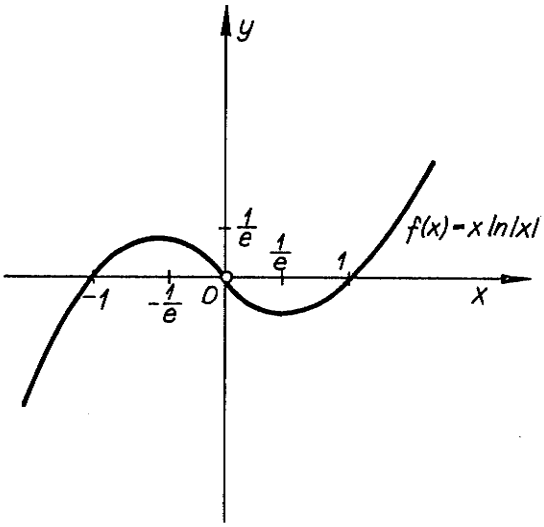
13. Aszimptoták: $y = \frac{\pi}{2} x - 1$ és $y = \left(-\frac{\pi}{2}\right) x-1$; páros függvény. f konvex $(-\infty, +\infty)$-ben. Lokális minimumhely $P(0,0)$.

$\boxed{14.}$ $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, mert $\ln x$ csak $x = 0$ -ra nincs értelmezve. f páratlan függvény, mert $f(-x) = -x \ln |-x| = -x \ln |x| = -f(x)$. Így elég $x > 0$ -ra vizsgálni, majd a görbét origóra tükrözzük. $x > 0$ esetén $f = x \ln x$ folytonos és akárhányszor differenciálható.

$$\lim_{x \to +\infty} f = +\infty ; \quad \lim_{x \to +0} x \ln x = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$= \lim_{x \to +0} (-x) = 0$. (l'Hospital szabályt alkalmaztuk.) Gyökhely: $x = 1$. $f' = 1 + \ln x$; $f'' = \frac{1}{x}$; $f' = 0$, ha $x = \frac{1}{e}$ és $f''\left(\frac{1}{e}\right) > 0$, így $x = \frac{1}{e}$ helyen lokális minimum van. $f' < 0$,

igy f szigoruan monoton fogyó $\left(0, \frac{1}{e}\right)$-ben; $f' > 0$, igy f szigoruan monoton növő $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$-ben. $f'' > 0$, igy f konvex $(0, +\infty)$-ben. Mivel $\lim\limits_{x \to +0} f = 0$, igy $\lim\limits_{x \to -0} f = 0$, tehát f-nek $x = 0$ helyen megszüntethető szakadása van. $y = Ax + B$ lineáris aszimptotája nincs f-nek. (A szükséges feltétel nem teljesül.)



49. ábra

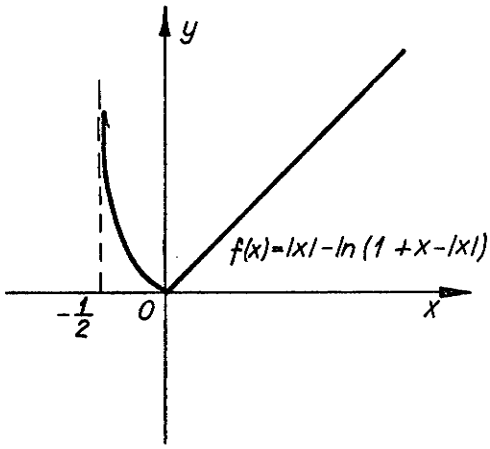
15. $D_f = \{x > 0\}$; $\lim\limits_{x \to +0} f = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty$. Gyökhely $x = 1$; lok. min. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ -nél; infl. pont $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ -nál.

16. $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Páros fv., ezért elég az $x > 1$ esetet vizsgálni, majd tükrözés az y tengelyre. $x > 1$ esetén $f = (x - 1)\ln(x - 1)$, lok. min $x = 1 + \frac{1}{e}$ -nél, f(x) alulról konvex.

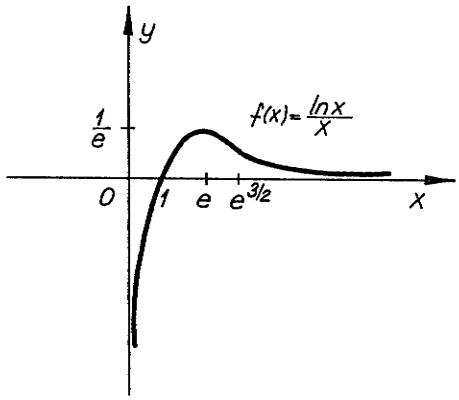
17. $D_f = \left\{ -\frac{1}{2} < x \right\}$, $f = \begin{cases} x - \ln 1 = x \ , & \text{ha } x \geq 0 \\ -x - \ln(2x + 1) \ , & \text{ha } -\frac{1}{2} < x < 0 \ ; \end{cases}$

$\left(-\frac{1}{2} < x < 0\right)$-ban $\begin{cases} f' = -1 - \frac{2}{2x+1} < 0, \text{ igy } f \text{ szig mon. fogyó} \\ f'' = \frac{4}{(2x+1)^2} > 0, \text{ ezért } f \text{ konvex.} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}+0} f = +\infty$, aszimptota $x = -\frac{1}{2}$.



50. ábra

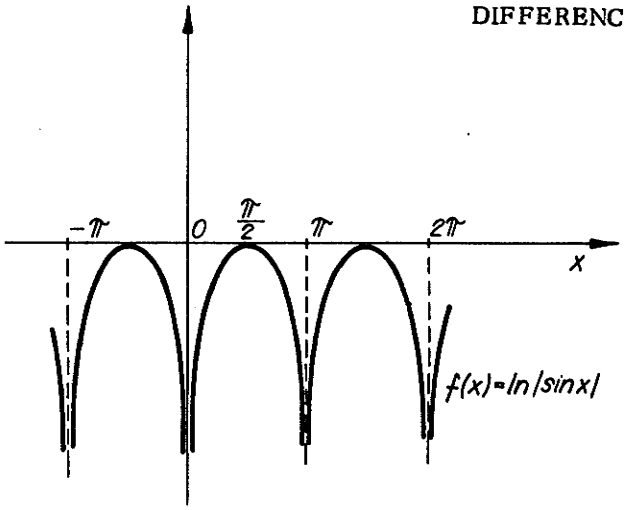


51. ábra

18. $D_f = \{x > 0\}$; $\lim\limits_{x \to +0} f = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$; gyökhely: $x = 1$, lok. maximum $x = e$ -nél, inflexiós pont $x = e^{3/2}$-nél.

19. $D_f = (k\pi, \pi + k\pi)$, ahol $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; $f(x)$ π szerint periodikus, tehát elég $(0, \pi)$-ben vizsgálni.

$\lim\limits_{x \to +0} f = \lim\limits_{x \to \pi - 0} f = -\infty$. Gyökhely: $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$; lokális maximumhelyek az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ helyeken. $f'' < 0$, ezért f konkáv $(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ intervallumokban $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.



52. ábra

20. Növekvő amplitudóju rezgés, ha $x \to +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f = 0$;

A részletes vizsgálat $0 \leqq x \leqq 2\pi$ -ben:

	$x=0$	$(0, \frac{\pi}{4})$	$x=\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4}, \pi)$	$x=\pi$	$(\pi, \frac{5\pi}{4})$	$x=\frac{5\pi}{4}$	$(\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$	$x=2\pi$
f'	+	+	0	-	-	-	0	+	+
f''	0	-	-	-	0	+	+	+	0
f	infl. pont	mon. növő konkáv	lok. max.	mon. fogyó konkáv	infl. pont	mon. fogyó konvex	lok. min.	mon. növő konvex	infl.

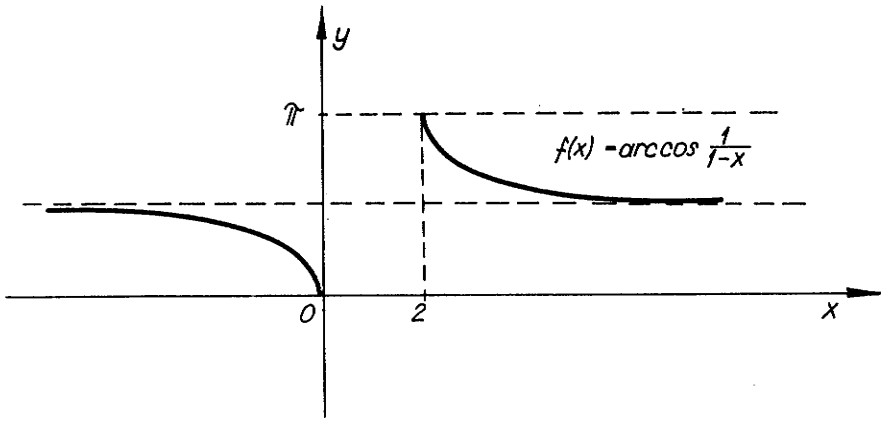
21. $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +1) \cup (1, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f = \pm\infty$;

$\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} f = \pm\infty$;

$\lim\limits_{x \to -1 \pm 0} f(x) = \mp\infty$; gyökhely $x = 0$. $f(x)$ páratlan, így elég $x > 0$-ra vizsgálni.

$x = -1$, $x = 1$ és $y = x$ az aszimptotái; lok. min $x = 2{,}1$ -nél $\Rightarrow$ lok. maximum $x = -2{,}1$-nél. Inflexiós pont $x = 0$-ban.

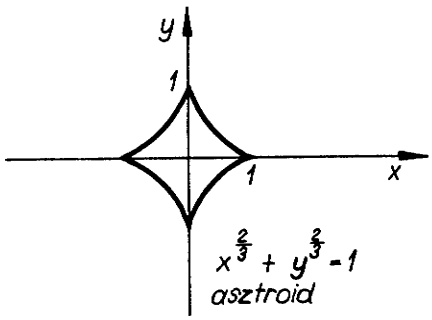
22. $D_f \left| \frac{1}{1-x} \right| \leq 1$-ből $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Nincs lokális szélsőérték, $y = \frac{\pi}{2}$ az aszimptotája.



53. ábra

82. A sorozat tagjai az $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ függvénynek egész helyeken felvett értékei. Ez a függvény $x = e$-ig nő, onnan fogy, tehát $x = e$ helyen veszi fel maximumát. Az adott sorozat tagjainak legnagyobbika tehát $\sqrt{2}$, vagy $\sqrt[3]{3}$, mert e két szám veszi közre $x = e$ helyet. Mivel $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$, igy $\sqrt[3]{3}$ a sorozat legnagyobb eleme.

! 83. a) Páros, $y = x$ és $y = -x$ az aszimptoták.
b) $y = -x$

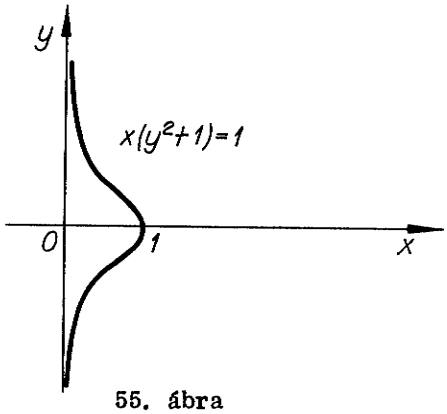


54. ábra

84. a) A görbe szimmetrikus az x és az y tengelyre is. Ezért elég $x \geq 0$, $y \geq 0$ esetén vizsgálni. Itt minden x -hez egyetlen y tartozik, másrészt a görbe egyenletében x-et és y-t felcserélve az változatlan marad, tehát a görbe szimmetrikus az $y = x$ egyenesre. Értelmezési tartomány:

$0 \leqq x \leqq 1$. Zérushely $x = 1$; $y' < 0$ $(0,1)$-ben, tehát y szigoruan monoton fogyó; $y'' > 0 \Longrightarrow y$ alulról konvex;

(b) Vizsgáljuk az $x = \dfrac{1}{1+y^2}$ függvényt, mint y független változó függvényét.



55. ábra

85. 1. Nem. Ha még feltesszük, hogy pl. $f(x)$ szigoruan monoton növő (v. fogyó), akkor igaz.

$\boxed{2.}$ Legyen $f = x^5 + 2x^3 - 4$; $\left[\lim\limits_{x\to+\infty} f = +\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f = -\infty\right] \Rightarrow$ létezik olyan a,b, hogy $f(a)\ f(b) < 0$; f folytonos $[a,b]$-ben, így Bolzano tétele miatt $\exists\ \xi \in (a,b)$, hogy $f(\xi) = 0$.
$f' = 5x^4 + 6x^2 \geqq 0$ és $f' = 0$ csak 1 helyen ($x = 0$-ban), ezért f szigoruan monoton növő $(-\infty,+\infty)$-ben, tehát $f = 0$ -nak csak egy gyöke van.

86. a) Nem (b) Van: $x = 1$-nél $f(1) = 1$, mert $(x+1)^3$ és $\sqrt[3]{x}$ is szigoruan monoton növő $[-1,1]$-ben, ezért $(x+1)^3\ \sqrt[3]{x}$ is szigoruan monoton növő, mert $\sqrt[3]{x} \geqq 0$ és $(x+1)^3 \geqq 0$
(c) Inverz függvény létezéséhez elégséges feltétel, hogy $f(x)$ szigoruan monoton növő $[-1, 1]$-ben, tehát létezik inverz.

87. $\boxed{1.}$ Ha f $(-\infty,+\infty)$-ben konvex, akkor minden $x \neq x_0$ pontban a függvény görbéje az x_0 -beli érintője felett halad. Mivel $(e^x)'' = e^x > 0$, így e^x konvex $(-\infty,+\infty)$ -ben, $y = x + 1$ az $x = 0$ pontbeli érintője, így $e^x > 1 + x$, $(x \neq 0)$.
(2.) $\ln x$ konkáv, és az $x = 1$ -beli érintője a görbe fölött halad.
(3.) 2.-ből következik.
(4.) $\sin x$ konkáv ; $y = x$ $x = 0$ -beli érintője, $y = \frac{2}{\pi}x$ pedig a $P(0,0)$ és $P_1\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ pontokat összekötő hur.

(88.) f konvex, így a hur a görbe fölött halad.

(89.) e^x és $x \ln x$ konvex, így alkalmazható 88.

[90.] f' monoton növő $\Longrightarrow f$ alulról konvex, így $\forall\, 0 < x_1 < x_2$ esetén

$$f(x_1) \leqq \frac{f(x_2)}{x_2}\, x_1, \quad \text{azaz} \quad \frac{f(x_1)}{x_1} \leqq \frac{f(x_2)}{x_2}$$

[91.] Keressük meg az $f = x^p + (1 - x)^p$ függvény abszolut maximumát és minimumát $[0,1]$-ben. $f' = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1} = 0$, ha $x = \frac{1}{2}$; $f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, tehát lokális minimuma van f-nek az $x = \frac{1}{2}$ helyen. De $f(0) = f(1) = 1$ és $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$, így az $x = \frac{1}{2}$ helyen f-nek abszolut minimuma van, tehát $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}} \leqq f$.

Mivel $f(x)$ a $[0,1]$-ben differenciálható és az $x = \frac{1}{2}$ hely kivételével $f' \neq 0$, így f a végpontokban veszi fel abszolut maximumát. Tehát $f \leqq f(0) = f(1) = 1$.

92. a) lokális minimum van $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ és $f^{(4)}(0) > 0$ miatt.
b) inflexiós pont.
c) ha n páratlan; inflexiós pont; ha n páros: lokális minimum.

93. $f(x) \geqq 0$, $f(0) = 0$; $g(x) < 0$, ha $x < 0$; $g(x) > 0$, ha $x > 0$.

94. a) $y = x(12 - x)$. $y' = 12 - 2x = 0$, ha $x = 6$; $y''(6) = -2 < 0$, így az $x = 6$ helyen lokális maximum van és $y(6) = 36$. Ez $0 \leqq x \leqq 12$ -ben a maximális függvényérték, mert $y(0) = y(12) = 0$.

b) $y = x^2 + (12 - x)^2$; $y' = 0$, ha $x = 6$; $y''(6) = 4 > 0$, tehát lokális minimum van $x = 6$ -nál és $y(6) = 72$ a $[0,12]$-beli legkisebb függvényérték, mert $y > 72$, ha $x \neq 6$.

95. $4r + 2m = 10 \Longrightarrow m = 5 - 2r$. $V = r^2 \pi (5-2r)$-t kell vizsgálni;

$r_{max} = \frac{5}{3}$ és $m_{max} = \frac{5}{3}$.

96. $x = 40$ m, $y = 80$ m.

97. $x = \sqrt[3]{2V}$; $m = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$.

98. $F = 2r^2\pi + 2r\pi\, m \Rightarrow m = \frac{F}{2r\pi} - r$; [illegible] $r\left(\frac{F}{2r\pi} - r\right) \geqq 0$,

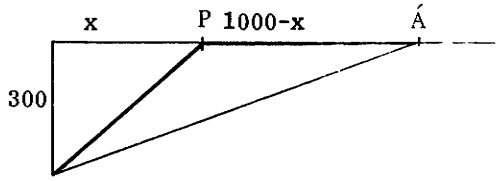
ha $0 \leqq r \leqq \sqrt{\frac{F}{2\pi}}$. $r = \sqrt{\frac{F}{6\pi}}$ nemcsak lokális, ha[illegible]

$\left[0, \sqrt{\frac{F}{2\pi}}\right]$-beli maximumhelye $V(r)$-nek; $m_{max} = \frac{1}{3}\sqrt{[illegible]}$.

99. $a = r\sqrt{2}$ oldalu négyzet.

100. $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

101.

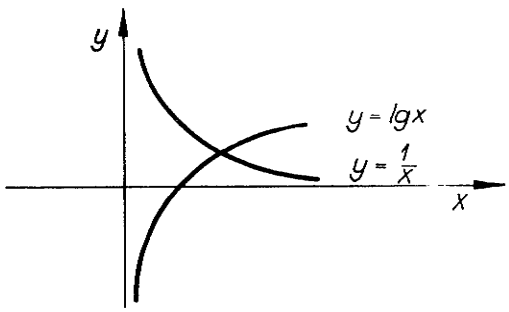


P-vel jelöljük a partraszá[illegible]lás helyét,
T = az Á állomá[illegible] eléré[illegible]s hez szüksége[illegible].

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + 300^2}}{48} + \frac{1000-x}{60}\ ; \quad T' = \frac{[illegible]}{48\sqrt{x^2 + 300^2}} - \frac{[illegible]}{60},$$

$T' = 0$, ha $x = 400$. Mivel $T''(400) > 0$, igy az $x = 400$ helyen lokális minimum van. De $T(400) \approx 20{,}42$ perc az [illegible] $\leqq x \leqq 1000$ intervallumbeli legkisebb függvényérték is, mert $T(0) > T(400)$ és $T(1000) > T(400)$. Az állomás tehát 21 perc alatt elérhető.

102. $x^x = 10 \Leftrightarrow x \lg x = 1 \Leftrightarrow \lg x = \frac{1}{x}$. Célszerü a gör[illegible]bet felvázolni, s a metszéspont abszcisszáját megbecsülni.



56. ábra

Néhány próbálgatás után kiderül, hogy az $f(x) = \lg x - \frac{1}{x}$ függvény gyöke a $[2,3]$-ban van, mert $f(2)<0$ és $f(3) > 0$. A $[2,3]$ intervallumban $f'(x) = \frac{\lg e}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ és

$f''(x) = -\left(\frac{\lg e}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) < 0$. Tehát alkalmazható (konvergál) a Newton-módszer. Kezdőpont $x_o = 2$, mert $f(2) < 0$, azaz

$$\operatorname{sg} f''(2) = \operatorname{sg} f(2).\ x_n = x_{n-1} - \frac{\lg x_{n-1} - \frac{1}{x_{n-1}}}{\frac{\lg e}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-1}^2}} =$$

$$= x_{n-1}\left[1 - \frac{x_{n-1}\lg x_{n-1} - 1}{0{,}434\ x_{n-1} + 1}\right];\quad x_1 = 2\left[1 - \frac{2\lg 2 - 1}{0{,}868 + 1}\right] \approx 2{,}426;$$

$$x_2 = 2{,}426\left[1 - \frac{2{,}426 . \lg 2{,}426 - 1}{0{,}434\ .\ 2{,}426 + 1}\right] \approx 2{,}5\ ;$$

az eljárást folytatva a gyök 4 tizedesre $\underline{x \approx 2{,}5062;}$

$(x^x - 10)_{x=2{,}5062} = 0{,}0003042.$

103. a) $\left[f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1 > 0\right.$ minden x-re és $\left.\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\right] \Rightarrow f(x)$ szigoruan monoton növő, igy 1 valós gyök van. Mivel $f(0) = -1 < 0$ és $f(1) = 3 > 0$, igy a $[0,1]$ intervallumban van a gyök. $f''(x) = 20x^3 + 12x > 0$ a $(0,1]$-ben, tehát $x_o = 1$-ből kiindulva alkalmazható a Newton módszer.

b) $f(0{,}572) \approx 0{,}0075$, tehát a gyök közelitőleg $\underline{x \approx 0{,}572}$

104. A görbéket felvázolva látható, hogy a legkisebb pozitiv gyök a $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumban van, ui. az $y = x$ egyenes az $y = \operatorname{tg} x$ görbe $\left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$ $x = 0$-beli érintője. Mivel $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \geqq 1$, ezért $x = \operatorname{tg} x$-re nem alkalmazható az

iteráció. Helyette inverzére térve át $\operatorname{arctg} x + \pi = x$ esetén már alkalmazható, $(\operatorname{arctg} x + \pi)' = \frac{1}{1+x^2} \leqq 1$, és ez az egyenlet az előbbivel ekvivalens. A gyök közel van a $\frac{3\pi}{2}$-hez, így legyen kezdőpont $x_1 = 4,7$; $x_2 = \operatorname{arctg} 4,7 + \pi = 4,5$;

$x_3 = \operatorname{arctg} 4,5 + \pi = 4,494$; $x_4 = \operatorname{arctg} 4,494 + \pi = 4,4935$, a gyök: $\underline{x \approx 4,4935}$

105. $\boxed{1.}$ Az $[1,2]$-ben van gyök és alkalmazható a Newton-módszer. A helyettesitési értékeket Horner elrendezéssel számithatjuk. Egyik gyök $\underline{x_1 \approx 1,09}$. Most a $p_3(x) = (4x^4+2x^3 - 3x - 5):$ $:(x - 1,09) \approx 4x^3 + 6,35x^2 + 6,9x + 4,5$ harmadfoku polinomnak keressük a gyökét, a gyök a $[-1, -0,55]$ intervallumban van, ahol alkalmazható a Newton-módszer: $\underline{x_2 \approx -0,98.}$

A $p_2(x) = p_3(x):(x+0,98) = 4x^2 + 2,43x + 4,52$ polinom 2 gyöke gyökképlettel már meghatározható lenne, de nincs valós gyöke.

2. $x_1 \approx 0,711$ 3. $x = \frac{e^x}{10}$ iterációval $x_1 \approx 0,1117$

4. 0,45 5. 2,21

106. $\begin{aligned} x &= x_o + a \cos t \\ y &= y_o + a \sin t \end{aligned}$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$.

107. $\boxed{1.}$ $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{b} = \sin t$, négyzetre emelve és összeadva

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis $(a \neq b)$; ha $a = b$, akkor kör.

2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola jobb oldali ága, mivel $x > 0$ a paraméteres rendszerben.

3. $y = x + 1$ egyenes $y \geqq 0$, azaz $x \geqq -1$ része.

4. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ asztroid (lásd 84. a)-t) (Az asztroid ugy keletkezik, hogy egy R sugaru körön, azt belülről érintő $r = \frac{R}{4}$ sugaru kört gördítünk. A gördülő körvonal egy kiszemelt pontja asztroidot ir le.) Itt $R = 1$.

108. a) $\left.\begin{array}{l} x = \varrho\,(t - \sin t) \\ y = \varrho\,(1 - \cos t) \end{array}\right\}$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$.

b) $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=t_0} , \quad \text{ahol } x_0 = x(t_0).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varrho \sin t}{\varrho\,(1-\cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} ,$$

(az origóban függőleges az érintő).

109. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{t \cos t}{t \sin t} = \operatorname{ctg} t \; ; \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 .$$

Érintő: $y - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = x - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

Normális: $y - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = -\left[x - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

110. a) pl. $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = f(t) \end{array}\right.$ b) Nem igaz, pl. ciklois nem irható át.

111. $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x(-2)} = \left.\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right|_{t=-2} = \left.\frac{3t^2 + 3}{3t^2 + 4t}\right|_{t=-2} = \frac{15}{4} > 0 ,$$

tehát y lokálisan növő; $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x(-2)} = \left(\frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\dot{x}^3}\right)_{t=-2} =$

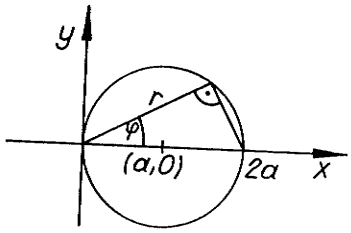
$$= \left.\frac{(3t^2+4t)6t - (6t+4)(3t^2+3)}{(3t^2+4t)^3}\right|_{t=-2} = \frac{9}{8} > 0,$$ tehát y lokálisan konvex.

112. 1. $r = \frac{a}{\cos\varphi}$, $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

2. $r = \frac{b}{\sin\varphi}$, $(0 < \varphi < \pi)$.

3. $r = 2a\cos\varphi \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

$a > 0$ konstans



57. ábra

113. 1. $x = 4$ egyenes; 2. $(x-3)^2 + y^2 = 9$ kör;

! 3. $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola;

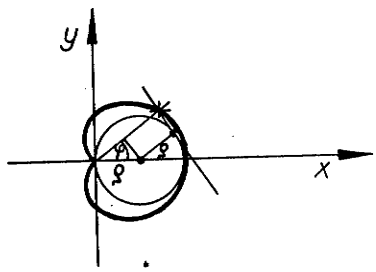
! $\boxed{4.}$
$$\left\{\begin{aligned} x &= r(\varphi)\cos\varphi = \frac{\cos\varphi}{\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2} = \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 1 - \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2} \\ y &= r(\varphi)\sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} \end{aligned}\right\}$$

-ből $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ parabola.

114. a) $r = \varrho(1 + \cos\varphi)$,
$(-\pi \leqq \varphi \leqq \pi)$.

$\boxed{b)}$ A kardioid egy paraméteres alakja:

$$\begin{cases} x = \varrho(1+\cos\varphi)\cos\varphi \\ y = \varrho(1+\cos\varphi)\sin\varphi, \end{cases}$$
$(-\pi \leqq \varphi \leqq \pi)$



58. ábra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{\dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi} =$$

$$= \frac{(-\sin\varphi).\sin\varphi + (1+\cos\varphi)\cos\varphi}{(-\sin\varphi).\cos\varphi - (1+\cos\varphi)\sin\varphi} ;$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 , \quad \text{ha} \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{3} .$$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ -hoz tartozó $P_1\left(\frac{3}{4}\varrho , \frac{3\sqrt{3}}{4}\varrho\right)$ pontbeli érintő $y = \frac{3\sqrt{3}}{4}\varrho$; $\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$ -hoz tartozó $P_2\left(\frac{3}{4}\varrho , -\frac{3\sqrt{3}}{4}\varrho\right)$ pontbeli érintő $y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\varrho$. ($\varphi = \pi$ esetén nem létezik $\frac{dy}{dx}$).

!115. 1. Archimedesi spirális: $\left\{\begin{array}{l} x = 3\varphi\cos\varphi \\ y = 3\varphi\sin\varphi \end{array}\right\}$ alakból az érintő irány-

tangense $m = \frac{dy}{dx} = \left.\frac{3\sin\varphi + 3\varphi\cos\varphi}{3\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} =$

$= \frac{6+\sqrt{3}\pi}{6\sqrt{3}-\pi} \approx 1{,}578$. Érintő: $y - 0{,}785 = 1{,}578(x - 1{,}360)$.

2. Logaritmikus spirális:

$\left\{\begin{array}{l} x = e^{3\varphi}\cos\varphi \\ y = e^{3\varphi}\sin\varphi \end{array}\right.$ Érintő: $y - 2{,}4 = 1{,}13(x - 4{,}166)$.

3. Hiperbolikus spirális: Érintő $y = \frac{2}{3\pi}(x-1)$.

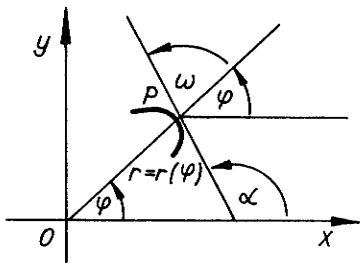
4. Lemniszkáta: $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ -nál az érintő vizszintes $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ -nél $y = x$ az érintő.

5. $(x-1)^2 + y^2 = 1$ kör. $\varphi = 0$ -hoz tartozó érintő függőleges egyenes: $x = 2$.

!$\boxed{116.}$ g egy paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$



59. ábra

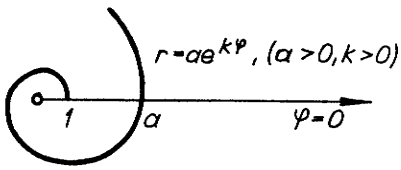
(*) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} =$

$= \dfrac{\operatorname{tg}\varphi + \frac{r}{r'}}{1 - \frac{r}{r'}\operatorname{tg}\varphi}$. Másrészt $\alpha = \varphi + \omega$,

(**) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\varphi + \omega) = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\omega}{1 - \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\omega}$.

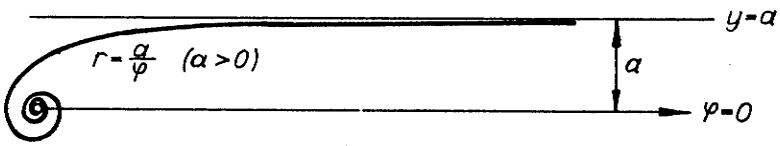
(*) és (**) egybevetéséből következik az állitás.

!(117) 116.-ból $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{r}{r'} = \dfrac{a\,e^{k\varphi}}{a\,k\,e^{k\varphi}} = \dfrac{1}{k}$



60. ábra

!(118) Mivel $x = \dfrac{a}{\varphi}\cos\varphi$; $y = \dfrac{a}{\varphi}\sin\varphi$, igy $\lim\limits_{\varphi\to+0} y = a$.



61. ábra

119. $(x-1)^2 + y^2 = 1$ és $x^2 + (y-1)^2 = 1$ a két görbe, s ezek derékszögben metszik egymást.

!120. 1. $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ kör, $-\frac{\pi}{2} + k2\pi \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} + k2\pi$,

$(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

2. $-\frac{\pi}{2} + k2\pi \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} + k2\pi$, un. egylevelü lóhere.

3. $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4} + k\pi$, un. kétlevelü lóhere (lemniszkáta).

4. $-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ un. négylevelü lóhere;

5. $-\frac{\pi}{2n} + k\frac{2\pi}{n} \leqq \varphi \leqq +\frac{\pi}{2n} + k\frac{2\pi}{n}$ un. n levelü lóhere.

!121. a) Legyen a két pont távolsága: 2a. Ekkor $r = \sqrt{2}\, a \sqrt{\cos 2\varphi}$ a lemniszkáta egyenlete.

b) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$

122. a) Nem, $f'_+(1) = 0 \neq f'_-(1) = 1$.

b) Igen, $f'(1) = -\frac{1}{12}$.

!123. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, ezért

$f(k+1) - f(k) = f'(\xi_k) \to 0$, ha $k \to +\infty$. Mivel

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = B$, ezért $\lim\limits_{k \to +\infty} f'(\xi_k) = B$. Igy $B = 0$.

b) Nem pl. $f(x) = \ln x$.

124. $p = \frac{3m^2}{2c}$, $q = -\frac{m^2}{2c^3}$.

125. $\dot{x}(0)$ nem létezik, de létezik $y(x)$ -nek jobb és bal oldali deriváltja $x = 0$ -ban, $y'(0) = 0$.

!126. 1

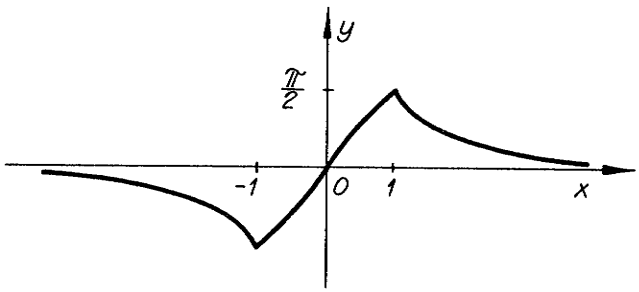
!127. $y = \frac{1}{e}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

! 128. 1. D_f :$(-\infty, +\infty)$. Páratlan függvény.

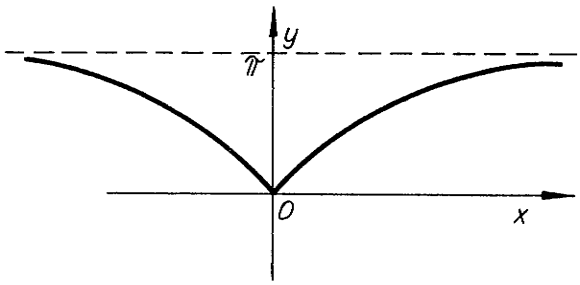
$\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$, igy aszimptota: $y = 0$. $f'(-1)$ és $f'(1)$ nem létezik, de lokális és abszolut minimum van $x = -1$ -nél, lokális és abszolut maximum $x = 1$-nél. f konkáv $(-\infty, -1]$ -ben és $[0, 1]$-ben; f konvex $[-1, 0]$-ban és $[1, +\infty)$-ben. Igy inflexiós pont van $x = 0$ -ban.

2. D_f: $(-\infty, +\infty)$. Páros függvény. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f = \pi$, igy aszimptota: $y = \pi$.

$f'(0)$ nem létezik, mert $f'_-(0) = -1$ és $f'_+(0) = 1$, de lokális és abszolut minimum van $x = 0$ -ban, mert $f(0) = 0$, $f(x) > 0$, ha $x \neq 0$. f konkáv.



62. ábra



63. ábra

129. $n!\ \varphi(a)$

! 130. a) Alkalmazva a Leibniz szabályt

$$\left[x^{20} \cos x\right]^{(40)}_{x=o} = \sum_{k=o}^{40} \binom{40}{k} \left[(x^{20})^{(k)} (\cos x)^{(n-k)}\right]_{x=o}$$

$$\left[(x^{20})^{(k)}(\cos x)^{(n-k)}\right]_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{ha } k > 20, \text{ mert } (x^{20})^{(k)} = 0 \\ 20! & \text{ha } k=20, \text{ mert } (x^{20})^{(20)} = 20!, \ (\cos x)^{(20)}_{x=o} = \cos 0 = 1 \\ 0, & \text{ha } k < 20, \text{ mert } (x^{20})^{(k)}_{x=o} = 0 \end{cases}$$

igy $\left[x^{20} \cdot \cos x\right]^{(40)}_{x=o} = \binom{40}{20} \cdot 20! = \frac{40!}{20!}$

131. $p'(n) = \lim\limits_{n \to n} \frac{p(x) - p(n)}{x - n} = \lim\limits_{n \to n} \frac{p(x)}{x-n} = \lim\limits_{x \to n} \prod\limits_{\substack{k=o \\ k \neq n}}^{10} (x-k) =$

$= n!\,(10 - n)!(-1)^{10-n} = n!(10 - n)!(-1)^n$

!**132.** a) $\left[p_n(1) < 0, \quad p_n(2) > 0, \quad p'(x) > 0\right] \Rightarrow$ (pontosan 1 gyök)

b) $p_n(\xi_n) = 0$, azaz $\xi_n^n - \xi_n^{n-1} = 1$, ezért

$p_{n+1}(\xi_n) = \xi_n\left(\xi_n^n - \xi_n^{n-1}\right) - 1 = \xi_n - 1$. Mivel

$p_{n+1}(\xi_n) > 0$ és $p_{n+1}(1) = -1 < 0$, igy a ξ_{n+1} gyökre

$1 < \xi_{n+1} < \xi_n$.

133. Függvényvizsgálattal.

a) $c \geqq 0$ és $c = -\frac{1}{e}$ esetén egy, $-\frac{1}{e} < c < 0$ esetén két megoldás.

b) $c \leqq 0$ és $c = \frac{1}{e}$ esetén egy, $0 < c < \frac{1}{e}$ esetén két megoldás

134. Legyen x és y tetszőleges $x \neq y$. A feltételből:

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqq |x - y| .$$

Mivel $\lim\limits_{x \to y} |x - y| = 0$ és $\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \geqq 0$, így

$\lim\limits_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0$. Ez azt jelenti, hogy f bármely y helyen differenciálható és $f'(y) = 0$, ezért f = állandó.

$\boxed{135.}$ $\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \equiv 0$, ha $x \neq 0$,

ezért $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = C_1$ konstans, ha $x > 0$, és C_2, ha $x < 0$. $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, így

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, ha $x > 0$ és $-\frac{\pi}{2}$, ha $x < 0$, mert a függvény páratlan.

136. (a) Mivel

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & \text{ha } x \geqq 0 \\ e^{x^2}, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \quad \text{szigoruan monoton fogyó}$$

$(-\infty, +\infty)$ -ben, ezért invertálható. f^{-1} értelmezési tartománya = f értékkészlete: $(0, +\infty)$.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-\ln x}, & \text{ha } 0 < x \leqq 1 \\ -\sqrt{\ln x}, & \text{ha } 1 < x < +\infty . \end{cases}$$

b) f^{-1} az értelmezési tartományban folytonos és $x = 1$ kivételével differenciálható.

137. $\boxed{a)}$ e^x konvex, görbéje bármely hurja alatt van.
A $P_1(0,1)$ és $P_2(1,e)$ pontokhoz tartozó hur egyenlete $y = 1 + (e - 1)x$.

(b) $\cos x$ konkáv a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ -ben.

d) e) f) bizonyitható $x = 0$ helyhez tartozó Taylor polinommal és Lagrange maradéktag becsléssel.
g) Lagrange középérték tétellel.

138. $$f'(x) = e^{-x}\left[\sum_{k=o}^{n} -\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!}\right] =$$

$$= e^{-x}\left[-\sum_{k=o}^{n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right];$$

$$f''(x) = e^{-x}\left[\sum_{k=o}^{n} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!}\right] =$$

$$= e^{-x}\left[\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right] > 0, \quad \text{ha} \quad x > n.$$

! 139. b) Nem. f' nem korlátos $\not\Rightarrow$ f nem korlátos.
Pl. $f = \arcsin x$ $(-1, 1)$-ben.

! 140. Tegyük fel, hogy $f''(x) > 0$, ekkor f' szigoruan monoton nő. Legyen

$x_1 < \xi < x_2$, $x_1, x_2 \in (a,b)$;

$f'(x_1) < f'(\xi) < f'(x_2)$.

$$\exists h, \quad \text{hogy} \quad \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} < f'(\xi) < \frac{f(x_2+h) - f(x_2)}{h}.$$

Mivel $g(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ folytonos $[x_1, x_2]$-ben, igy

$\exists x_3 \in (x_1, x_2)$, hogy $g(x_3) = f'(\xi)$, azaz $f'(\xi) =$

$$= \frac{f(x_3+h)-f(x_3)}{h}; \quad c = x_3 + h; \quad d = x_3.$$

Hasonlóan látható $f''(x) < 0$ esetén.

III. FEJEZET

1. $F'(x) = f(x)$, ill. $[F(x) + c]' = f(x)$

2. $f(x)$ primitív függvényei $y = x^3 + c$ alakuak. Most $c = 6-2^3 = -2$, tehát a keresett primitív függvény: $y = x^3 - 2$.

3. $\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$, így

$F(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x + c$. Most $c = 1 - (1-\operatorname{arc\,tg} 1) = \frac{\pi}{4}$, tehát

$F(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{4}$.

4. $y = F(x) + c = \ln \sin x + c = \ln C \sin x$

5. $\int \frac{4}{\sin^2 2x}\,dx = -2\operatorname{ctg} 2x + c$. Most $-2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} + c = 1$,

innen $c = 1$.
Tehát $y = -2\operatorname{ctg} 2x + 1$.

A 6.-132. feladatok megoldásaiban nem közöltük a primitív függvény értelmezési tartományát, ha $x \in (-\infty, \infty)$.

6. $x - 7\ln|x| - \frac{8}{x} + c \qquad (x > 0)$

7. $\frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x} + c \qquad (x > 0)$

8. $\frac{24}{41}x \cdot \sqrt[24]{x^{17}} + c \qquad (x \geq 0)$

9. $\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x - \operatorname{arc\,tg} x + c$

10. $-\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg} x + c$

11. $2\operatorname{arch} x + c \qquad (|x| < 1)$

$\boxed{12.}$ $\int \frac{x+1}{x-1}\,dx = \int \frac{(x-1)+2}{x-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) dx =$

$= x + 2\ln|x-1| + c, \quad (x \neq 1)$

13. $2x + 7\ln|x-2| + c \qquad (x \neq 2)$

14. $-\cos x + c$ 15. $\frac{\sin 4x}{4} + 5\cos\frac{x}{5} + c$

16. $2\,\mathrm{tg}\,x + 3\,\mathrm{ctg}\,x + c \qquad (x \neq k\frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \ldots)$

17. $-(x + \mathrm{ctg}\,x) + c \qquad (x \neq k\frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \ldots)$

18. $\mathrm{tg}\,x - \mathrm{ctg}\,x + c\,; \qquad (x \neq k\frac{\pi}{2},\ k=0, \pm 1, \ldots)$

(írjuk a számlálót $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ alakba)

19. $3\,\mathrm{ch}\,x - \frac{2}{3}\,\mathrm{sh}\,3x + c$

20. $x - \mathrm{th}\,x + c$ (használjuk fel az $\mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}^2 x - 1$ összefüggést.)

21. $e^{x-3} + c$ 22. $-e^{-x} - \frac{1}{3}e^{-3x} + c$

23. $x - 2e^{\frac{x}{2}} + c$ /ui. $1 - e^x = \left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)\left(1 + e^{\frac{x}{2}}\right)$/

24. $\frac{1}{16}\left(e^{8x} - 4e^{-2x}\right) + c$ 25. $\frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2x\right) + c$

26. $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 12x}{12} + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$ (alkalmazzuk a

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$ összefüggést.)

27. $\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 7x}{7}\right) + c$ /utm.: $\sin\alpha\cos\beta =$

$= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$/

28. $\frac{1}{2}(x + \sin x) + c$ $\left(\text{utm.: } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)$

29. $\frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin(2-4x) + c$ $\left(\text{utm.: } \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \right)$

30. $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2$ felhasználásával az eredmény:

$$\frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + c$$

31. $-\frac{2}{5}\sqrt{1 - 5x} + c$ $\left(x < \frac{1}{5}\right)$

32. $-\frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-5x+10)^4}} + c$

33. Mivel $\left(\sqrt{5-4x^3}\right)' = \frac{-12x^2}{2\sqrt{5 - 4x^3}}$, ezért

$$\int \frac{5x^2}{\sqrt{5 - 4x^3}}\,dx = -\frac{5}{12}\int (-12x^2)(5-4x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{5}{6}\sqrt{5 - 4x^3} + c\,;$$

$\left(x < \sqrt[3]{\frac{5}{4}}\right)$

34. $\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$

35. $\frac{1}{4}\sin^4 x + c$

36. $\frac{2}{9}\sqrt{(1-\cos 3x)^3} + c$

37. $-\frac{1}{\sin x} + c$ $(x \neq k\pi,\ k=0, \pm 1, \ldots)$

38. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + c$ $\left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k=0, \pm 1, \ldots\right)$

39. $2\sqrt{\arcsin x} + c$ $(|x| < 1,\ x \neq 0)$

40. $\frac{2}{3}\sqrt{(\text{ar sh } x)^3} + c$ $(x \geqslant 0)$

41. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\text{sh}^2 x} + c$ $(x \neq 0)$

42. $\frac{2}{3}\sqrt{(1 + e^x)^3} + c$

43. $\frac{2}{5}\sqrt{\ln^5 x} + c$ $(x > 0)$

44. $-\frac{1}{e^x + 1} + c$

45. $-\ln|\cos x| + c$ $(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k=0, \pm 1, \ldots)$

46. $\ln|\ln x| + c$ $(x > 0)$

47. $\ln|\text{arc tg } x| + c$ $(x \neq 0)$

48. $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 6x + 27) + c$ $(x^2-6x+27 > 0$ minden x-re)

49. $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln|1 - 2x| + c$ $(x \neq \frac{1}{2})$

50. $\frac{3}{4}\ln|4x^3 + 5| + c$ $(x \neq -\sqrt[3]{\frac{5}{4}})$

51. $\frac{1}{3}\ln(e^{3x} + 5) + c$

52. A hiperbolikus függvények definiciója alapján az integrál a következő alakban irható:

$$\int e^x \frac{\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right)}{\frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2}}\,dx = \int \frac{2\,e^{3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{2\,e^{6x}}{e^{6x} + 1}\,dx = \frac{1}{3}\ln(e^{6x} + 1) + c$$

53. $e^{\operatorname{tg} x} + c$ $\quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k=0, \pm 1, \ldots)$

54. $\arcsin e^{x} + c$ $\quad (x < 0)$ $\qquad$ 55. $-\frac{1}{2}\cos x^2 + c$

56. $2 \operatorname{ch} \sqrt{x} + c$ $\quad (x > 0)$

57. $\operatorname{ar\,sh} \operatorname{tg} x + c$ $\quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k=0, \pm 1, \ldots)$

58. $\ln^2 \sqrt{x} + c$ $\quad (x > 0)$ $\qquad$ 59. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{5}} + c$

60. $\frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{2}{5}}(x-3) + c$

61. $-\frac{1}{\sqrt{8}} \operatorname{ar\,th} \frac{x-3}{\sqrt{8}} + c = -\frac{1}{2\sqrt{8}} \ln \left| \frac{x-3+\sqrt{8}}{x-3-\sqrt{8}} \right| + c$; $\quad (x \neq 3 \pm \sqrt{8})$

62. $\operatorname{ar\,sh} \frac{x-2}{6} + c$

63. $\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{5}} + c$ $\quad (|x-1| < \sqrt{5})$

64. $\operatorname{ar\,ch} \frac{x+3}{3} + c$ $\quad (x \notin [-6, 0])$

65. $-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$ $\quad$ ($u' = \sin 2x$, $v = x$ választással)

66. $\frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\cos 2x + c$

67. $(-x^2 + 4x - 2)\operatorname{ch} x + (2x-2)\operatorname{sh} x + c$

68. $\frac{1}{4}(6x - 13)e^{2x+3} + c$ $\quad (u' = e^{2x+3},\ v = 3x - 5)$

69. $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arc\,tg} x + c$ $\quad (u' = 1,\ v = \ln(x^2+1))$

70. $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$; $\quad (x > 0)$

71. $\operatorname{tg} x \ln(\cos x) + \operatorname{tg} x - x + c \quad \left(u' = \frac{1}{\cos^2 x},\ v = \ln(\cos x)\right)$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k=0, \pm 1, \ldots$$

72. $e^{x^2}\left(\frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1\right) + c \quad \left(u' = x e^{x^2},\ v = x^4\right)$

73. $\frac{-x e^x}{x+1} + e^x + c \quad \left(u' = \frac{1}{(x+1)^2},\ v = x e^x,\ x \neq -1\right)$

74. Alakitsuk át az integrált a következő módon:

$$F(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(x^2+1) - x^2}{(1+x^2)^2}\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right) dx = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx -$$

$$- \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx$$

Az első integrandus éppen arc tg x deriváltja. A második integrált parciális integrálással számitjuk ki $v = x$, $u' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ választással (ekkor

$u = -\frac{1}{1+x^2}$):

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int x \frac{2x}{(1+x^2)^2}\, dx = -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + k$$ Ezért

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{x^2+1}\right) + c\,.$$

75. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \quad (|x| \leqslant 1,\ u' = 1,\ v = \arcsin x)$

76. $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{2} + c$

77. $x \operatorname{arch} x - \sqrt{x^2-1} + c \qquad (x \geqslant 1)$

78. Parciálisan integrálunk $u' = e^{3x}$ $\left(u = \frac{e^{3x}}{3}\right)$, $v = \cos 5x$ választással.

$$F(x) = \int e^{3x} \cos 5x\, dx = \frac{e^{3x}}{3} \cos 5x + \frac{5}{3} \int e^{3x} \sin 5x\, dx \quad \text{ill.}$$

$u' = \cos 5x \left(u = \frac{\sin 5x}{5}\right)$, $v = e^{3x}$ választással:

$$F(x) = \int e^{3x} \cos 5x\, dx = \frac{\sin 5x}{5} e^{3x} - \frac{3}{5} \cdot \int e^{3x} \sin 5x\, dx$$

Az első egyenletet $\frac{3}{5}$-del, a másodikat $\frac{5}{3}$ szorozva és a kettőt összeadva:

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{5}{3}\right) \int e^{3x} \cos 5x\, dx = \frac{1}{5} e^{3x} \cos 5x + \frac{1}{3} e^{3x} \sin 5x \text{, igy}$$

$$\int e^{3x} \cos 5x\, dx = \frac{\frac{1}{5} e^{3x} \cos 5x + \frac{1}{3} e^{3x} \sin 5x}{\frac{3}{5} + \frac{5}{3}} =$$

$$= e^{3x} \frac{3 \cos 5x + 5 \sin 5x}{34} + c$$

79. $\frac{1}{2}(\cos x \operatorname{ch} x + \sin x \operatorname{sh} x) + c$

80. $\dfrac{-e^{-2x}\cos x - 2e^{-2x}\sin x}{5} + c$

81. $\ln\left[(x-3)^2 \cdot |x+1|\right] + c$ (a felbontás: $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-3}$, $x \neq -1$, $x \neq 3$)

82. $\dfrac{1}{10}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+8}\right| + c$ $(x \neq -8,\ x \neq 2)$

83. $\ln \dfrac{|x^3|}{|x-1|\,(x+1)^2} + c$ $(x \neq 0,\ x \neq \pm 1)$

84. Bontsuk résztörtekre: $\dfrac{3x-5}{(x+1)^2} = -\dfrac{A}{(x+1)^2} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{A+Bx+B}{(x+1)^2}$,

innen $B = 3$, $A = -8$.

A végeredmény: $3\ln|x+1| + \dfrac{8}{x+1} + c$ $(x \neq -1)$

85. $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{16}\ln \dfrac{x^{16}}{\left|x-\frac{1}{2}\right|^7 \left|x+\frac{1}{2}\right|^9} + c$ (először végezzük el az osztást; $x \neq 0$, $x \neq \pm\frac{1}{2}$)

86. Résztörtekre bontás nélkül megoldható:

$$-\frac{1}{3}\int \frac{-3(2x^5 - 3x^2)}{-x^6 + 3x^3 + 1}\,dx = \frac{1}{3}\ln\left|-x^6 + 3x^3 + 1\right| + c$$

(az integrandus $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ alaku) $\left(x \neq \sqrt[3]{\dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}}\right)$

87. $\ln|x-2|\sqrt{\dfrac{|x-2|^3}{|x+1|}} + c$ $(x \neq 2,\ x \neq \pm 1)$

88. A résztörtek: $\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$; $(x \neq 1)$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2 (x^2 + 1)} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \ln |x-1| +$$

$$+ \frac{1}{4} \ln (x^2 + 1) + c$$

89. $\frac{1}{x - 2} + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| + c \qquad (x \neq -1,\ x \neq 2)$

90. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + x}{[illegible]} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x + c \qquad (x \neq \pm 1)$

91. $1 + x = t^2$ helyettesitéssel, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t\, dt$, igy

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x}} = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t\, dt = 2 \int (t^2 - 1)\, dt = \frac{2}{3} t^3 - 2t =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(1 + x)^3} - 2 \sqrt{1+x} + c \quad , \quad (x > -1) .$$

92. $3 \ln \left| \frac{\sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} \right| + c \qquad (x \neq 0,\ x \neq 1,\ \sqrt[3]{x} = t)$

93. $\frac{4}{9} \cdot \sqrt[4]{(x+3)^9} - \frac{12}{5} \sqrt[4]{(x+3)^5} + c$

$$\left(\sqrt[4]{x + 3} = t \ ; \ x \geq -3 \right)$$

94. $\frac{5}{11} \sqrt[5]{(x + [illegible])^{11}} - \frac{10}{3} \cdot \sqrt[5]{(x+1)^6} + c \qquad \left(\sqrt[5]{x+1} = t \right)$

95. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} - 3 \cdot \sqrt[3]{x+1} + 3 \ln \left| 1 + \sqrt[3]{x+1} \right| + c \qquad \left(\sqrt[3]{x+1} = t,\ x \neq -2 \right)$

96. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} + \ln\left|\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x+1}}\right| -$

$- 2\sqrt{3}\ \mathrm{arc\ tg}\ \frac{2\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{3}} + c \qquad (\sqrt[6]{x} = t,\ x \geqslant 0)$

97. $e^x = t$ helyettesitéssel $x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t}\,dt$, igy

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}\,dx = \int \frac{t^2}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t}{t+1}\,dt =$$

$$= t - \ln|t+1| + c = e^x - \ln(e^x+1) + c\ .$$

98. $\mathrm{arc\ tg}\ e^x + c$

99. $\frac{2}{e^3}\left(\sqrt{e^x - 1} - \mathrm{arc\ tg}\sqrt{e^x - 1}\right) + c \qquad (x \geqslant 0,\ e^x - 1 = t^2)$

100. $\ln\frac{|e^x - 1|}{e^x + 1} - \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} + c \qquad (x \neq 0)$

101. $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ helyettesitéssel:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + c$$

$$(x \neq k\pi\ ,\ k=0,\ \pm 1, \ldots)\ .$$

102. $2\ \mathrm{ar\ th}\left(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + c \qquad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k=0,\ \pm 1, \ldots)$

103. $\frac{2}{1 - \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} \qquad (x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k=0,\ \pm 1, \ldots)$

104. $\frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arc\ tg}\left(\sqrt{3}\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + c$

105. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|+c \qquad \left(x \neq \begin{cases} \pi+2k\pi \\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}\right)$

106. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c \qquad (x \neq k\pi\ ,\ k=0,\ \pm1,\dots)$

107. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+c \qquad (x \neq k\pi\ ,\ k=0,\ \pm1,\dots)$

108. $$\int\left[\frac{dx}{1+\operatorname{tg}x}\right]_{u=\operatorname{tg}x}=\int\frac{\frac{du}{1+u^2}}{1+u}=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{1+u}+\frac{-\frac{u}{2}+\frac{1}{2}}{1+u^2}\right)du=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln|1+u|-\frac{1}{4}\ln(1+u^2)+\operatorname{arc\,tg}u\right]_{u=\operatorname{tg}x}+c\ ;$$

$$\left(x \neq -\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k=0,\ \pm1,\dots\right)$$

109. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\right|+\frac{1}{2}x+c \qquad \left(x \neq \pm\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k=0,\ \pm1,\dots\right)$

110. $$F(x)=\int\frac{dx}{\cos^3x}=\int\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}{\cos^2x}\,dx$$

alakra hozva $\left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\ ,\ k=0,\pm1,\dots\right)$ $\operatorname{tg}x=\operatorname{sh}t$ helyettesítés, $\frac{dx}{\cos^2x}=\operatorname{ch}t\,dt$,

így az integrál: $F(x)=\int\sqrt{1+\operatorname{sh}^2t}\,\operatorname{ch}t\,dt=\int\operatorname{ch}^2t\,dt=$

$$=\int\frac{\operatorname{ch}2t+1}{2}=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t\,\operatorname{ch}t+t)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2t}+t\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}+\operatorname{arsh}\operatorname{tg}x\right)+c$$

111. A helyettesítés: $x=\sin t$, $dx=\cos t\,dt$ $(|x|<1)$, ekkor

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{\sin^2t}{\sqrt{1-\sin^2t}}\cos t\,dt=\int\sin^2t\,dt=\frac{1}{2}(t-\sin t\cos t)=$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right) + c$$

112. Az $x = \operatorname{ch} t$, $dx = \operatorname{sh} t\, dt$ helyettesitéssel:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx = \int \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}}{\operatorname{ch}^4 t}\operatorname{sh} t\, dt = \int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^4 t}\,dt =$$

$$= \int \operatorname{th}^2 t \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\,dt = \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 t = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}}{\operatorname{ch} t}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^3 + c \qquad (|x| \geqslant 1)$$

113. $\frac{1}{2}\left\{(x+3)\sqrt{x^2+6x+10} + \operatorname{ar\,sh}(x+3)\right\} + c \qquad (x+3 = \operatorname{sh} t)$

114. $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{2}\sqrt{1+2x-x^2} + c \qquad (x-1 = \sqrt{2}\sin t\ ;\ |x-1| \leqslant \sqrt{2})$

115. $\frac{x+2}{2}\sqrt{2x^2+8x+5} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{2}{3}}(x+2) + c \qquad (x+2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{ch} t)$

$|x+2| \geqslant \frac{3}{2}$

116. $\frac{x}{2}\sqrt{5x^2-7} - \frac{7}{2\sqrt{5}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{5}{7}}\,x + c \qquad (|x| \geqslant \sqrt{\frac{7}{5}})$

117. $\sqrt{x^2+4x+2} + c \qquad x \notin [-2-\sqrt{2},\ -2+\sqrt{2}]$

118. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{ar\,th}\frac{2}{\sqrt{5}}\left(e^{\operatorname{ar\,sh}\frac{x-1}{2}} + \frac{1}{2}\right) + c$

A helyettesités: $x - 1 = 2\operatorname{sh} t$. A továbbiakban alkalmazzuk sht exponenciális alakját, ill. az $u = e^t$ helyettesitést.

119. $-\frac{1}{2}\ln|\cos(x^2-6x+7)| + c$

$$(x^2 - 6x + 7 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k=0, \pm 1, \ldots)$$

120. $x - \sqrt{1 - x^2}\ \arcsin x + c$ ($x = \sin t$ helyettesités, $|x| < 1$)

121. $2(\sin \sqrt{x} - \sqrt{x} \cos \sqrt{x}) + c$ $(x \geq 0)$

122. $-\dfrac{1}{\ln x} + c$ $(x > 0)$

123. $\dfrac{1}{13} \left\{ 3 \sin (2x-1)\ \mathrm{sh}(3x+2) - 2\cos(2x-1)\ \mathrm{ch}(3x+2) \right\} + c$

124. $\dfrac{3x-2}{2(x^2+1)} + \dfrac{3}{2} \operatorname{arc\,tg} x + c$

125. $x + \ln (x-1)^4 - \dfrac{4}{x-1} + c$ $(x \neq 1)$

126. $\dfrac{3}{4} \ln \left| 2x^2 - 12x + 23 \right| + \dfrac{4}{\sqrt{10}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\dfrac{2}{5}}\,(x-3) + c$

127. $x \arccos \dfrac{1}{x} - \operatorname{ar\,ch} x + c$ $(|x| > 1)$

128. $2\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - x + c$ $(x \neq k\pi + 2k\pi,\ k=0, \pm 1, \ldots)$

129. $-\dfrac{1}{3} \operatorname{ctg} (3x - 2) + c$ $(3x-2 \neq k\pi,\ k=0, \pm 1, \ldots)$

130. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{1}{2} \operatorname{ar\,ch} (2x - 5) + c$ $(|2x - 5| > 1)$

131. $\dfrac{4}{x+2} + \ln |x + 1| + c$ $(x \neq -2,\ x \neq -1)$

132. $2(x-2) \sqrt{1 + e^x} - 2\ln \dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + c$

Megjegyzések a Bronstejn: Matematikai zsebkönyv integráltáblázatából keresendő megoldásokhoz:

29. $\int \sin^2 (1-2x)\, dx$ alak nem található a könyvben, csak az $1-2x = t$ helyettesítés után nyert $-\frac{1}{2}\int \sin^2 t\, dt$ alak (425. old. 275.).

67. Az $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ behelyettesítése és a szorzások elvégzése után nyert összeg tagjainak integráljai külön-külön megtalálhatók (468. old. 448, 449,).

92. Először a $\sqrt[3]{x} = t$ helyettesítést kell elvégezni.

98. Csak az $e^x = t$ helyettesítés után nyert alak található a könyvben.

Határozott integrál

133. Végezzük el a következő átalakitást:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}.$$

Itt $x_i = \frac{i}{n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, $f(x_i) = \frac{1}{1+x_i}$ és

$0 < x_i \leqslant 1$, $i = 1,2,\ldots n$. Tehát $I = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\Delta x_i =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$. Ez éppen az $f(x) = \frac{1}{1+x}$ egyenletes felosztás mellett vett integrálközelitő összegeinek határértéke $n\to\infty$, azaz $\frac{1}{n}\to 0$ esetén. Mivel $f(x)$ integrálható $[0,1]$-en, ezért

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

134. $\int_0^2 x\,dx = 2$

135. $2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[2 \arcsin \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$

136. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

137. $\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}$

138. $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1$

139. $I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(i\frac{a}{n}\right)^k \cdot \frac{a}{n} = a^{k+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{a^{k+1}}{k+1}$

(l. az 5. feladatot)

! 140. $\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$, ui. legyenek az osztópontok:

$x_i = a\,q^i$, $i=0,1,\ldots,n-1$, ahol $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.

Ekkor $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^k (aq^{i+1}-aq^i) = a^{k+1}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1} (q^{k+1})^i =$

$= a^{k+1}(q-1)\frac{(q^{k+1})^n-1}{q^{k+1}-1} = a^{k+1}(q-1)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1}-1}{q^{k+1}-1} = (b^{k+1}-a^{k+1})\frac{q-1}{q^{k+1}-1}$.

Ezért $I = \lim_{n\to\infty} \sigma = (b^{k+1}-a^{k+1}) \lim_{q\to 1} \frac{1}{\frac{q^{k+1}-1}{q-1}} = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$.

(Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{u\to 1} \frac{u^p-1}{u-1} = \left[\frac{du}{dp}\right]_{u=1} = p$)

141. $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (a\,q^i)^{-1} \cdot (aq^{i+1} - aq^i) = n(q-1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right)$

$$I = \lim_{n\to\infty} \sigma = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

142. $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n+1} - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{n+1}{n}} - 1\right) = 1.(e-1)$$

143. Vezessük be a $h = \frac{b-a}{n}$ jelölést. Mivel $2 \sin (a+ih)\sin \frac{h}{2} =$

$= \cos\left(a+i\,h - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + i\,h + \frac{h}{2}\right)$, ezért

$$\sigma = h \sum_{i=1}^{n} \sin (a+i\,h) = h \frac{\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a+nh + \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(b + \frac{h}{2}\right)\right].$$

Ekkor $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma = \cos a - \cos b$ $\quad$ ($n\to\infty$ azaz $h\to 0$).

144. f páratlan, korlátos $\left[-a^2, a^2\right]$-ben, a $o, \pm 1, \pm\frac{1}{2} \dots \pm\frac{1}{n}, \dots$ helyek kivételével folytonos. Tetszőleges $\delta > 0$ mellett $\left[\delta, a^2\right]$-be

ezek körül csak véges sok esik, ezért itt f integrálható, tehát

$(0, a^2]$-ben is integrálható; $\int_{-a^2}^{a^2} f(x)\,dx = 0$.

145. $x = \frac{1}{n}$ helyeken ugrása van f-nek, $[0,1]$-ben korlátos; integrálható.

146. Nem, mert ha reprezentáns pontoknak racionális pontokat veszünk, akkor az integrálközelitő összegek $\frac{1}{2}$-hez, ha a reprezentáns pontok irracionálisak, akkor az integrálközelitő összegek $\frac{1}{3}$-hoz tartanak.

147. Elég a $[0,1]$-beli integrálhatóságot vizsgálni, mert ha $a > 1$, akkor $[1, a^2]$-ben $\left[\frac{1}{x}\right] = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ és igy integrálható. $[0,1]$-ben $|f| \leq 1$ és tetszőleges $\delta > 0$-ra $[\delta, 1]$-ben integrálható, vagyis $[0,1]$-ben is integrálható.

148. f integrálható, mert tetszőleges $\delta > 0$ mellett $[-1, -\delta]$ és $[\delta, 1]$-ben integrálható, a 0 hely környezetében korlátos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{-2x}{x^4 + 1} = 0.$$ Mivel f páratlan, az

integrál értéke = 0.

149. a) nem; l. jegyzet 29. oldal.
b), c) nem, l. jegyzet 109. oldal, 3.7.1.

152. a) nem; b), c) igen.

153. Igen; az integrandus korlátos, $x = 0$ kivételével folytonos.

154. Igen.

155. Igen.

156. Igen. $\left(\lim_{x \to -0} \frac{(e^x + 1)\,x}{e^{2x} - 1} = 1\right)$

157. Igen.

158. Ha $x \in (0,1)$, akkor $0 < x^2 < x$, ezért $e^{-x} < e^{-x^2} < e^0 = 1$.

Igy $\int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - \frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx < \int_0^1 dx \quad 1$.

159. $f(x)$ monoton fogyó $(f'(x) < 0)$; a középértéktétel alapján

$$100 \,.\, f(100) \leq \int_0^{100} f(x)\,dx \leq f(0).100$$

160. $f'(x) > 0$, ha $x \in (0, \pi)$, $f'(x) < 0$, ha $x \in (\pi, 2\pi)$, tehát

$$\pi f(0) \leq \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \frac{1}{2}\cos x} \leq \pi f(\pi) \quad \text{és}$$

$$\pi \,.\, f(2\pi) \leq \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1 + \frac{1}{2}\cos x} \leq \pi f(\pi), \text{ vagyis}$$

$$\pi \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \frac{1}{2}\cos x} \leq \pi \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} .$$

161. $0 < \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^6}} < \int_0^1 x^7\,dx$, ha $x \in (0,1)$.

162. $\frac{x}{\sqrt{3x^2 + 1}} < \frac{x}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}} < \frac{x}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}} = \frac{x}{x^2 + 1}$,

ha $x \in (0,1)$.

163. $0 < \operatorname{tg} x < 1$, ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

164. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx\,, \quad |\cos c\,x| \leqslant 1.$

165. $\left|\cos\frac{1}{x}\right| < 1$

166. $e^{-a^2 \operatorname{tg} x}$ monoton fogyó $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$-ben;

$$x < \operatorname{tg} x < \frac{4}{\pi}x, \text{ azaz } e^{-a^2 \frac{4}{\pi}x} < e^{-a^2 \operatorname{tg} x} < e^{-a^2 x},$$

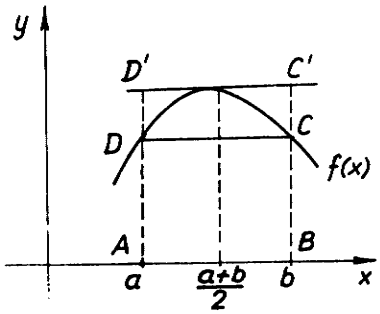
$$\text{igy } -\frac{\pi}{4a^2}\left(e^{-a^2} - 1\right) < \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-a^2 \operatorname{tg} x}\,dx < -\frac{1}{a^2}\left(e^{-a^2\frac{\pi}{4}} - 1\right)$$

167. f(x) a $[0,1]$-ben korlátos, $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x} = 1$.

f(x) monoton fogy a $\left(0, \frac{1}{e}\right)$-ben, $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$-ben monoton nő, igy

$$e^{-\frac{1}{e}} \leqslant \int_0^1 x^x\,dx \leqslant 1.$$

168. Mivel f(x) differenciálható, ezért folytonos, és igy integrálható. Ha $[a,b]$-ben $f(x) \geqslant 0$ nem állna fenn, akkor alkalmas $c > 0$ -ra $g(x) = f(x) + c \geqslant 0$.



$$T_{ABCD} = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant T_{ABC'D'} =$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

INTEGRÁLSZÁMITÁS

169. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}$

170. $2 - \frac{\pi}{2}$.

171. $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

172. $\frac{1}{6}$

173. 1

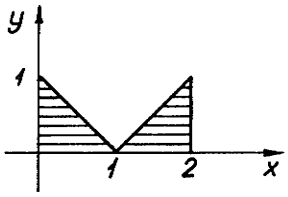
174. $\frac{\pi a^4}{16}$

175. $\frac{5}{6}$

176. $\frac{t}{2}$

177. $$\int_{-2}^{2} \sqrt{1 - 2\,|x| + x^2}\, dx = 2 \int_{0}^{2} \sqrt{1 - 2x + x^2}\, dx =$$

$$= 2 \int_{0}^{2} |1 - x|\, dx = 2$$



178. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0{,}4388$

179. $$\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx = \int_{0}^{100\pi} \sqrt{2 \sin^2 x}\, dx = \sqrt{2} \int_{0}^{100\pi} |\sin x|\, dx =$$

$$= \sqrt{2} \,.\, 100 \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = \sqrt{2} \,.\, 200$$ (ui. az $f(x) = |\sin x|$ függvény π szerint periodikus)

180. $$\int_{1}^{3} x^2 \sqrt[3]{1 + x^3}\, dx = \frac{1}{3} \int_{1}^{3} 3x^2 (1+x^3)^{1/3}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left(28 \,.\, \sqrt[3]{28} - 2 \sqrt[3]{2}\right) \approx 20{,}626$$

181. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ [illegible] $\frac{}{\sin u}$ du =

$= (x = \frac{\pi}{2} - u$ helyettesités) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\cos u + \sin u}\, du$;

ha $x = u$, $' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sin u + \cos u}\, du$. A két egyenletet összeadva:

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\cos u + \sin u}\, du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sin u + \cos u}\, du =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u + \sin u}{\cos u + \sin u}\, du = \frac{\pi}{2}, \quad \text{igy} \quad I = \frac{\pi}{4}.$$

182. $2 \ln (e^2 + 1) - 2 - 2 \ln 2 \approx 0,8676$

183. $x = t^2$ helyettesitéssel: $\frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2t^2}{1+2t}\, dt = 1 + \frac{1}{4} \ln 5 \approx 1,4023$

184. $\frac{\pi^2}{4}$.

185. l. a jegyzet 4.11.1. feladat, megoldás a 110. old.

186. Közvetlenül nem. Az integrál értéke $= \frac{2}{3}$.

187. $t = \frac{1}{x}$ az $x = 0$-ban nincs értelmezve.

188. $t = \operatorname{tg} x$ az $x = \frac{\pi}{2}$ -ben nincs értelmezve.

189. $0 \leqslant x \leqslant 3$ és $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$, ez a helyettesités tehát csak $\int_0^{a^2} f(x)\,dx$ $(a^2 \leqslant 1)$ esetén alkalmazható.

190. Alkalmazzuk az $a + (b-a)\,x = t$ helyettesitést.

191. Alkalmazzuk az $x^2 = t$ helyettesitést.

192. $I_n = \dfrac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}$

193. $I_n = (-1)^n \left[\dfrac{\pi}{4} - \left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{5} - \dots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right]$

194. $I_n = 2^{2n} \cdot \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

195. $\int_0^1 dx + \int_1^3 -dx = -1$,

ui. $\operatorname{sgn}(x-x^3) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ha } x = 1 \\ -1 & \text{ha } 1 < x \leqslant 3 \end{cases}$.

196. $-\dfrac{\pi^2}{4}$; $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -x\,dx = \dots\right)$

197. $14 - \ln 7!$

198. $\ln n!$

199. a) $\sin b^2$; b) $-\sin a^2$; c) 0.

200. $2\ln(1+2x) - \ln(1+x) = \ln\dfrac{(1+2x)^2}{1+x}$

201. $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$

202. $(\sin x - \cos x)\cos(\pi \sin^2 x)$

203. $I_1 = \dfrac{d}{du}\displaystyle\int_u^v \sin x^2\,dx =$

$$= -\frac{d}{du}\int_v^u \sin x^2\,dx = -\sin u^2 ,$$

$$I_2 = \frac{d}{dv}\int_u^v \sin x^2\,dx = \sin v^2 .$$

Ezért $I_1 + I_2 = \sin v^2 - \sin u^2 = \left[\sin x\right]_{u^2}^{v^2} = \displaystyle\int_{u^2}^{v^2} \cos x\,dx$.

204. $f'(x) = \dfrac{\sin 2x^2}{x^2}$. $2x$ felhasználásával igazolható az állitás.

205. Differenciálva: $2y' = y$, tehát $y = c\,e^{\frac{x}{2}}$.

Az eredeti egyenletből $2y(1)-1 = \displaystyle\int_1^1 y\,dx = 0$, tehát $y(1) = \frac{1}{2}$.

Igy $c\,e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}}$, ezért $y = \frac{1}{2}\,e^{\frac{x-1}{2}}$

$\boxed{206.}$ $$\varphi'(x) = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)\,dt - f(x)\int_0^x t\,f(t)\,dt}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)} > 0, \quad \text{mert}$$

$$f(x) > 0 \quad \text{és} \quad x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t\,f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^x \left[x\,f(t) - t\,f(t)\right]\,dt > 0,$$

hiszen $0 < t < x$ esetén az integrandus > 0.

207. $a > 1$; igen

208. $x = 1$ -ben min, értéke $1 + \ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}$

209. a) $x < 1$; b) $y - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{24}\left(x - \frac{1}{2}\right)$;

c) 0 (L'Hospital szabály)

210. $$F(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{x} t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} & \text{ha } -1 \leqslant x < 1 \\ \int_{-1}^{1} x\,dx + \int_{1}^{x} 2t^2\,dt = \frac{2x^3}{3} - \frac{2}{3}, & \text{ha } x \geqslant 1 \end{cases}$$

211. $F(x) = \begin{cases} \dfrac{-(1-x)^3}{3} + \dfrac{1}{3}, & \text{ha } x < 1 \\ \dfrac{1}{3}, & \text{ha } 1 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{1}{2}, & \text{ha } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

A függvény folytonos a $[0,3]$-ban, $x = 2$-ben nem differenciálható.

212. 1 (L'Hospital-szabály) 213. $\frac{1}{2}$

214. A L'Hospital-szabály ismételt alkalmazásával:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2}\,dt \,.\, e^{x^2}}{e^{2x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\,e^{x^2}}{e^{x^2} \,.\, 2x} = 0 \,.$$

215. 1 .

216. $$\int_0^\infty e^{-4x}\,dx = \lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega e^{-4x}\,dx = \lim_{\omega \to \infty} \left[\frac{-e^{-4x}}{4}\right]_0^\omega = \frac{1}{4}$$

217. Divergens. 218. Divergens.

219. $\frac{1}{2}$ 220. Divergens.

221. $\sqrt{2}$ 222. $\frac{1}{2}$ 223. $\frac{1}{2}$

224. 2 ; ($\sqrt{x} = t$ helyettesités) 225. ln 2

226. $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ $\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{0} f(x)dx + \lim_{B \to \infty} \int_{0}^{B} f(x)dx \right)$

227. $\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}$

228. $\frac{\pi}{2}$ (helyettesités: $x = \operatorname{tg} t$)

229. $\frac{\pi}{2}$ (helyettesités: $\sqrt{x} = u$)

230. 2 ui. $\lim_{\omega \to 0} \int_{\omega}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\omega \to 0} \left[2\sqrt{x} \right]_{\omega}^{1} = 2$

231. Divergens. 232. π 233. $\frac{\pi}{2}$ 234. 3

235. 1 236. $\frac{\pi^2}{8}$ 237. 4

238. Divergens, ui. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x-1}$ és $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x-1}$ divergens.

239. Divergens. 240. L. jegyzet 113. oldal

241. Az integrál konvergens, mert $\left| \frac{x \sin ax}{e^{bx}} \right| \leqslant \frac{x}{e^{bx}}$ és $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{e^{bx}}$ konvergens. Parciális integrálással az eredmény: $\frac{-2ba}{(a^2+b^2)^2}$.

242. Az integrál $u = \operatorname{tg} x$ helyettesitéssel improprius integrálba megy át, amely konvergens, értéke 1.

243. Konvergens.

244. Konvergens; $\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $0 < x < 1$.

245. Konvergens; $\sin x > \frac{x}{2}$, ha $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$

246. Divergens: $\frac{1}{x+\sin^2 x} \geqslant \frac{1}{x+1}$ és $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x}$ (minoráns) divergens.

247. Konvergens. 248. Konvergens. 249. Divergens.

250. Konvergens, ha $p > 1$, $q < 1$.

251. Konvergens, ha $p < 1$, $q < 1$.

252. Konvergens, ha $\min(p,q) < 1$, $\max(p,q) > 1$.

253. 1 254. $\frac{1}{3}$ 255. 1

Területszámitás 256. $\frac{32}{3}$

257. $\frac{15}{8} - 2\ln 2 \approx 0{,}49$ 258. $\frac{32}{3}$

259. $2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}428$

260. $T = \int_0^1 \left[(1-x) - (1-\sqrt{x})^2\right] dx = \frac{1}{3}$. 261. 9

262. 2,56; A két görbe metszéspontjai: $M_{1,2}(\pm 1, 1)$; $M_{3,4}(\pm\sqrt{2}, 4)$.
A szimmetriát felismerve

$$T = 2\left[\int_0^1 x^4\,dx + \int_1^2 (3x^2-2)\,dx - \int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^1 (3x^2-2)\,dx - \int_1^{\sqrt{2}} x^4\,dx + \left|\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} (3x^2-2)\,dx\right|\right] \approx 2{,}56 .$$

263. $\frac{8}{3}$ 264. $\frac{8}{3}$

265. Az érintő meredeksége $f'(4) = \frac{1}{4}$, s igy egyenlete $y = \frac{1}{4}x + 1$. Az érintó alatti területe 6. Igy $T = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$.

266. $\frac{2}{3}$

267. 2(ch 1-1)

268. $T_1 = \frac{32\pi - 4\sqrt{3}}{3}$, $T_2 = \frac{4\sqrt{3} + 16\pi}{3}$

270. $\frac{\pi}{2}$ 271. $\frac{8}{15}$ 272. $ab\pi$ 273. $ab\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

274. $\frac{3r^2\pi}{8}$ 275. $3r^2\pi$

276. A t paraméter kiküszöbölésével nyerhető a parabola explicit egyenlete: $y^2 = \frac{1}{2}(x+1)$, $T = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

277. $\frac{a^2\pi}{2}$ 278. $\frac{3}{4}e^{\frac{2\pi}{3}} - 1 \approx 5,3$ 279. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,29$

280. $16(\pi - 1)$

281. $\approx 10,28$; a kör és lemniszkáta metszéspontja: $\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}$.

Számitás közben $\sin(\arccos\frac{1}{4}) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos\frac{1}{4})} =$

$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $T = 4(\sqrt{15} - \arccos\frac{1}{4})$

282. $T = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\, d\varphi = ab\pi$ 283. $\sqrt[3]{30}$

Ivhossz számitás

284. $\frac{8}{27}\ (10\sqrt{10}-1) \approx 9{,}18$

285. $\ln 3 - \frac{1}{2} \approx 0{,}6$

286. $\ln(1+\sqrt{2})$

287. $\sqrt{10} - \sqrt{5} + \ln \frac{(\sqrt{10}-1)\,2}{(\sqrt{5}-1)\,3}$

288. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ \mathrm{ar\ sh}\ 1$

289. $\ln 30{,}03 \approx 3{,}4$

290. $S = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx = 6a$

291. $\sqrt{2}\,(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) \approx 5{,}5$

292. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

293. $8r$

294. $\frac{\pi^3}{3}$

295. $\frac{a}{2}\,(2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \mathrm{ar\ sh}\ 2\pi) =$

$= \frac{a}{2}\left[\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}) + 2\pi\sqrt{4\pi^2+1}\right]$

296. $8a$

$\boxed{297.}$ $S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}}\, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi^2}\, d\varphi =$

$= \int \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}^2 t}\, dt = [-\mathrm{ch}\ t + t] =$

($\varphi = \mathrm{sh}\ t$ helyettesitéssel)

$$= \left[-\frac{\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi} + \operatorname{ar\,sh}\varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi^2+4} - \sqrt{\pi^2+1}}{\pi} + \ln\left(\pi + \sqrt{\pi^2+1}\right) -$$

$$- \ln\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4}+1}\right) \approx 0,76$$

298. $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$ 299. a) $\frac{2}{3}\pi$, b) π

300. $\approx 0,73\,\pi$ 301. $\approx 11,4\pi$ 302. a) $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$; b) $\frac{\pi}{4}$

303. $V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = -\frac{\pi}{2} + \pi \ln 2 \approx 0,6$

304. $\frac{a\pi}{2}(e^2 - 1)$ 305. $\frac{26}{81}\pi$ 306. 0,6

307. A folyadékszint emelkedésének mértékét y_o-lal jelölve:

$$1 = \pi \int_{2}^{2+y_o} y\,dy\ ;\ \frac{\pi}{2}\left[(2+y_o)^2 - 4\right] = 1\text{-ből}\quad y_o = \sqrt{\frac{2}{\pi}+4} - 2\ .$$

308. A keresett a értéke a $\frac{\pi a^4}{4} = \frac{3\pi a^{\frac{7}{2}}}{7}$ egyenlet gyöke.

309. Tekintettel a szimmetriára:

$$V = 2\pi\left[\int_0^1 x^4\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2)\,dx\right] =$$

$$2\pi\left(\frac{1}{5} + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2 + \frac{1}{3}\right).$$

310. $\frac{8\pi}{15}$

311. $\frac{16\pi c^6}{420}$

312. $\frac{\pi}{3}\,\mathrm{th}^3\,t_o$