

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS  
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Benkő Pálné - Diószegi Ferencné - Serény György

**MATEMATIKA FELADATTÁR**  
**II.**

**Valós egyváltozós függvények  
differenciál- és integrálszámítása**

Szerkesztette:  
Antos Péter



**Műegyetemi Kiadó, 2002.**

*Írta:*

**Serény György** (I. fejezet)  
**Benkő Pálné** (II. fejezet)  
**Diószegi Ferencné** (III. fejezet)

(Nyolcadik utánnnyomás)

Azonosító: **051387**

**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**

**Természettudományi Karának**  
megrendelése alapján kiadja a

**Műegyetemi Kiadó**

Felelős vezető: Hajdu István

Terjedelem: 27,7 (A/5) ív

Nyomta és kötötte:

**Műegyetemi Nyomda**

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 0142-02

## TARTALOMJEGYZÉK

	Feladat	Megoldás
I. Egyváltozós függvények alapvető tulajdonságai.		
Határérték, folytonosság . . . . .	5	121
1. Alapfogalmak . . . . .	5	121
1.1 Értelmezési tartomány, értékészlet . . .	5	121
1.2 Monotonitás . . . . .	5	123
1.3 Korlátosság, szélsőérték . . . . .	7	125
1.4 Konvexitás-konkávitás, párosság-páratlan- ság, periodicitás . . . . .	10	129
1.5 Műveletek függvények körében . . . . .	11	130
1.6 Invertálhatóság . . . . .	13	137
1.7 Határérték, folytonosság, egyenletes folytonosság . . . . .	15	142
2. Gyakorló feladatok függvények tulajdonságainak vizsgálatára . . . . .	22	150
2.1 Elemi tulajdonságok . . . . .	22	150
2.2 Határértékszámítás . . . . .	27	174
2.3 Folytonosságvizsgálat . . . . .	46	190
2.4 Függvények ábrázolása, folytonos függvények speciális tulajdonságai . . . . .	54	209
3. Vegyes feladatok . . . . .	57	223
II. Differenciálszámítás . . . . .	63	236
1. Differenciálhányados. Differenciálhatóság. Formális deriválás. Magasabbrendű derivál- tak. Összetett és inverz függvény deriváltja . . . . .	63	236
2. A differenciálhányados és a differenciál geometria és fizikai alkalmazásai . . . . .	70	244
3. L'Hospital szabály . . . . .	72	247
4. Taylor-polinom . . . . .	75	252
5. Közéértéktételek (Rolle, Lagrange, Cauchy) . . . . .	76	255
6. Függvényvizsgálat . . . . .	78	257
7. Szöveges szélsőértékfeladatok . . . . .	84	274
8. Egyenletek közelítő megoldása . . . . .	84	275
9. Paraméteresen és polárkoordinátás alakban adott görbék és deriváltjaik . . . . .	85	277

	Feladat	Megoldás
10. Vegyes feladatok .....	89	282
<b>III. Integrálszámítás</b> .....	93	287
1. Határozatlan integrál .....	93	287
1.1 Alapintegrálokra visszavezethető feladatok	93	287
1.2 Trigonometrikus szorzat integrálok ....	94	288
1.3 $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx$ alakú integrálok ....	94	289
1.4 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ alakú integrálok .....	95	290
1.5 $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$ alakú integrálok ...	95	291
1.6 Teljes négyzetté kiegészítve alapintegrálokra visszavezethető feladatok .....	96	291
1.7 Parciális integrálás .....	96	291
1.8 Racionális törtfüggvények integrálása ...	97	294
1.9 Integrálás helyettesítéssel .....	97	295
1.10 Vegyes feladatok .....	99	298
2. Határozott integrál .....	100	300
3. Változó felső határu határozott integrál (integrál függvény) .....	108	308
4. Improprius integrál .....	111	311
5. Az integrálszámítás alkalmazásai .....	114	313
5.1 Területszámítás .....	114	313
5.2 Ívhossz-számítás .....	116	315
5.3 Forgástestek térfogata .....	118	316

# I. EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

## 1. ALAPFOGALMAK

### 1.1 Értelmezési tartomány, értékészlet

1. Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékészletét!

1. a)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

8.  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{xn+1}{n} \right)^n$

b)  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

9. a)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k$

2.  $f(x) = 3-x^2$

b)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$

3.  $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$

10. a)  $f(x) = \frac{x}{3}$ , ha  $x$  osztható 3-mal

4.  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{ha } x \text{ osztható } 3 \text{ -mal} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

5.  $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$

11. a)  $f(x) = x$       b)  $f(x) = (\sqrt{x})^2$

6.  $f(x) = \frac{1}{[x]}$

c)  $f(x) = \sqrt{x^2}$

7.  $f(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sign}x}$

12.  $f(x) = y$  akkor és csak akkor ha  $y^3 + x^3 = 1$ .

### 1.2 Monotonitás

2. 1. Legyen  $E \subset \mathbb{R}$ .

a) Mely  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  függvényekre igaz az, hogy:

minden  $x, y \in E$  esetén ha  $f(x) < f(y)$  akkor  $x < y$ .

b) Mely  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  függvényekre igaz az, hogy: minden  $x, y \in E$  esetén fennáll, hogy vagy  $f(x) < f(y)$  vagy  $x \leq y$ ,

## EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI HÁTÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában (nem használva a "nem" szót) azt a tulajdonságot, hogy egy függvény egy  $H$  halmazon nem monoton.

3. Definíció. Egy  $H$  halmazt a legbővebb - valamilyen kiszemelt  $F$  tulajdonsággal rendelkező - halmaznak neveztünk, ha rendelkezik az  $F$  tulajdonsággal és nincsen olyan  $H'$  -  $F$  tulajdonsággal rendelkező - halmaz, hogy  $H \subset H'$ ,  $H \neq H'$ .

1. Bizonyítsuk be, hogy egy függvény akkor és csak akkor monoton egy  $I$  intervallumon, ha annak minden részintervallumán monoton.

2. Legyen  $f$  monoton az  $(a,b)$  és  $(c,d)$  intervallumokon. Mi következik ebből  $f$  monotonitására nézve az  $(a,b) \cup (c,d)$  halmazon, ha  $(a)$   $a < c < b < d$ ; illetve

$b) a < b < c < d$  és  $f$  monoton növekvő  $(a,b)$ -n is,  $(c,d)$ -n is.

!  $(3)$  Legyen  $f$  értelmezve az  $I$  intervallumon és legyen  $x_0$  egy belső pontja  $I$ -nek, melytől az  $I_1, I_2$   $x_0$ -ban zárt intervallumokra osztja.

Bizonyítsuk be, hogy ha  $f$  szigorúan monoton csökkenő az  $I_1$ -en és szigorúan monoton növekvő az  $I_2$ -ön akkor  $I_1$  és  $I_2$

két legbővebb intervallum, melyeken  $f$  monoton.

4. Legyen  $f$  monoton csökkenő az  $[a,b]$  és monoton növekvő a  $[b,c]$  intervallumon ( $a < b < c$ ). Következik-e ebből, hogy  $f$  nem monoton az  $[a,c]$  intervallumon?

4. 1. Keresünk az alábbi függvények esetén az értelmezési tartományban olyan legbővebb részintervallumokat (lásd 3. pl. Definíció) - ha léteznek ilyenek -, melyeken az adott függvény monoton.

$$(a) f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$e) f(x) = x^2 + ax + b \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{1+x^3}$$

2. Van-e olyan  $\delta > 0$  szám, amelyre az  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$  függvény az egész  $(0, \delta)$  intervallumon monoton?

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

1.3 Korlátosság, szélsőérték

5. a) Megválaszolható-e egyértelműen az alábbi kérdés:

Korlátos-e az  $f(x) = \frac{1}{x}$  függvény?

- b) Ekvivalens-e az alábbi definíció az  $f$  függvény felülről való korlátosságának definíciójával: Van olyan  $M$  szám, hogy  $f(x) < M$   
 c) Létezik-e legbővebb olyan intervallum, (lásd 3. pl. Definíció) melyen az alábbi függvények korlátosak?

$$1. f(x) = x^2 \qquad 2. f(x) = \begin{cases} \frac{[x]}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

6. 1. Legyen  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ .

a) Ekvivalensek-e az alábbi állítások?

1. Van olyan  $m$  és  $M$  szám, hogy minden  $x \in E$  esetén  $m \leq f(x) \leq M$ .
2. Van olyan  $K > 0$  szám, hogy minden  $x \in E$  esetén  $|f(x)| \leq K$ .
3. Van olyan  $K > 0$  szám, hogy minden  $x \in E$  esetén  $|f(x)| < K$ .

b) Ekvivalens-e az alábbi állítások valamelyike  $f$   $E$ -n való korlátosságának definíciójával?

1. Van olyan  $x_1, x_2 \in E$ , hogy minden  $x \in E$  esetén  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ .

2. Minden  $x \in E$  esetén van olyan  $K > 0$ , hogy  $|f(x)| < K$ .

2. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában (nem használva a "nem" szót) azt a tulajdonságot, hogy egy függvény nem korlátos egy  $E$  halmazon!

7. Legyen  $E \subset \mathbb{R}$  és  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ .

Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

1. a)  $\sup_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x)$

b)  $\inf_{x \in E} (f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x)$

2. a)  $\sup_{x \in E} (-f(x)) = -\inf_{x \in E} f(x)$                       b)  $\inf_{x \in E} (-f(x)) = -\sup_{x \in E} f(x)$

3. Mutassuk meg, hogy 1.-ben  $\leq$  helyett nem állhat =!

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

8. Definíció. Egy függvényt értelmezési tartományának egy pontjában lokálisan korláatosnak mondunk, ha e pontnak van olyan  $S$  környezete, hogy  $f$  korlátos  $S \cap D_f$ -en.

1. a) Legyen  $f$  lokálisan korlátos egy tetszőleges intervallum minden pontjában. Következik-e, hogy  $f$  korlátos az egész intervallumon?
- b) Legyen  $f$  lokálisan korlátos egy zárt intervallum minden pontjában. Következik-e, hogy  $f$  korlátos az egész intervallumon?
2. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ x = \frac{m}{n}, & n > 0, \\ m, n \in \mathbb{N}, & \text{relatív príme} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény egyetlen pontban sem lokálisan korlátos!

9. Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából az alábbi függvényeket az adott intervallumokon! Adjuk meg a függvények megfelelő intervallumbeli supremumát és infimumát, ill. maximumát és minimumát is, amennyiben ezek léteznek!

1.  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$       a)  $I = (1, \infty)$       b)  $I = [2, 4]$

2.  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$       a)  $I = (-\infty, \infty)$       b)  $I = (-1, 2]$

3.  $f(x) = \frac{x}{1+x}$       a)  $I = [0, \infty)$       b)  $I = (-\infty, -1)$

c)  $I = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

10. Igazoljuk, hogy az  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$  függvény az egész számegeyenesen korlátos.



EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

11. Legyen  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ .

- a) Minden  $\delta > 0$  szám esetén van olyan  $x \in (a, b)$ , hogy  $|x - x_0| < \delta$  és  $f(x) \leq f(x_0)$ .
- b) Van olyan  $\delta > 0$  szám, hogy van olyan  $x \in (a, b)$ , hogy  $|x - x_0| < \delta$  és  $f(x) \leq f(x_0)$ .
- c) Van olyan  $\delta > 0$  szám, hogy minden  $x \in (a, b)$  esetén ha  $|x - x_0| < \delta$ , akkor  $f(x) \leq f(x_0)$ .
- d) Minden  $\delta > 0$  szám és minden  $x \in (a, b)$  esetén ha  $|x - x_0| < \delta$ , akkor  $f(x) \leq f(x_0)$ .

1. Mutassunk példát a fenti tulajdonságokat kielégítő függvényekre!
2. Következik-e valamelyik tulajdonságból az, hogy a függvénynek lokális maximuma van  $x_0$ -ban?
3. Következik-e abból, hogy a függvénynek lokális maximuma van  $x_0$ -ban az, hogy valamelyik tulajdonsággal rendelkezik?

12.

1. Legyen  $f(x)$  az  $[a, b]$  intervallumon ( $a < b$ ) szigorúan monoton növekedő. Következik-e ebből, hogy a függvény
  - a) korlátos az  $(a, b)$  intervallumon?
  - b) felveszi maximumát az  $(a, b)$  intervallumon?
2. Lehet-e egy függvénynek egy pontban egyszerre lokális maximuma és minimuma?
3. Lehet-e egy függvénynek egy intervallum minden pontja lokális maximuma?
4. Legyen  $I_1 \subset \mathbb{R}$ ,  $I_2 \subset \mathbb{R}$  tetszőleges valódi<sup>(\*)</sup> intervallumok,  $\bar{I}_1, \bar{I}_2$  a megfelelő azonos végponttal rendelkező zárt intervallumok és  $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = \{a\}$ . Legyen  $f: \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 \rightarrow \mathbb{R}$  monoton csökkenő  $I_1$ -en, monoton növekvő  $I_2$ -n. Következik-e, hogy  $f$ -nek lokális szélsőértéke van  $a$ -ban?<sup>(\*\*)</sup> van belső pontja)

13.

1. Legyen  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

Bizonyítsuk be, hogy  $x=1$ -ben a függvénynek lokális maximuma,  $x=-1$ -ben lokális minimuma van.

2. Legyen  $f(x) = (x-1)^2 (x-2)^2$ .

Bizonyítsuk be, hogy az  $x=1$  és  $x=2$  pontok a függvénynek lokális minimumhelyei!

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

14. Keressük meg az alábbi függvények összes lokális szélsőértékhelyeit!

a)  $f(x) = (x^2 - 4)^2 + 2$  ;

b)  $f(x) = x^2 + ax + b$  ,  $a, b \in \mathbb{R}$  rögzített;

c)  $f(x) = |x-1|$ ;

d)  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

1.4 Konvexitás - konkávitás, párosság - páratlanság, periódicitás

15. 1. Bizonyítsuk be, hogy ha az  $f$  függvény konvex az  $[a, b]$  intervallumon, akkor tetszőleges  $x_1, x_2 \in [a, b]$  esetén

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

2. Bizonyítsuk be, hogy  $f$  akkor és csak akkor konvex az  $[a, b]$  intervallumon, ha itt  $-f$  konkáv.

3. Bizonyítsuk be, hogy az  $f(x) = x^2$  függvény konvex a  $(-\infty, \infty)$  intervallumon.

16. Az alábbi függvények közül melyek párosak, páratlanok vagy periodikusak? A periodikusak esetében - ha lehetséges - adjuk meg a legkisebb periódust!

1.  $f(x) = x^2 - x$

9.  $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$

2.  $f(x) = x \operatorname{sign} x$

10.  $f(x) = x \sqrt{x^2 - 1}$

3.  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

11.  $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 1}$

4.  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$

12.  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 1$

5.  $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

13.  $f(x) = \frac{\cos 2x}{x^4}$

6.  $f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x$

14.  $f(x) = x^3 \cos x + \sin^2 x$

7.  $f(x) = \sin^2 \frac{x}{\pi}$

15. a)  $f(x) = \sin^2 \frac{\pi}{3} x + \sin^2 \frac{\pi}{4} x$

8.  $f(x) = x - [x]$

b)  $f(x) = \sin \frac{\pi}{3} x + \sin \frac{\pi}{4} x$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

17. ① Lehet-e egy függvény egyszerre páros és páratlan?  
 2. Bizonyítsuk be, hogy ha  $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ , páros és  $f$  szigoruan monoton növekedő a  $(-a, 0)$  intervallumban, akkor  $f$  szigoruan monoton csökkenő a  $(0, a)$  intervallumban.
18. a) Létezik-e olyan  $f$  periodikus függvény melynek értelmezési tartományára fennáll, hogy  $\mathbb{R} \setminus D_f \neq \emptyset$ ?
- ! ② Ha létezik ilyen  $f$ , lehet-e úgy kiterjeszteni az egész valós számegegyenesre, hogy periodikus maradjon, azaz van-e olyan  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodikus függvény ( $D_g = \mathbb{R}$ ), amelyre
- $$g(x) = f(x), \text{ ha } x \in D_f?$$

1.5 Műveletek függvények körében

19. Lgyen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 Vizsgáljuk meg milyen következtetéseket lehet levonni értelmezési tartományukon a

$-f$ ,  $\frac{1}{f}$ ,  $f+g$ ,  $f \cdot g$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$  függvények viselkedésére vonatkozóan, ha értelmezési tartományukon

1. a)  $f$  és  $g$  korlátos  
 ②  $f$  és  $g$  nem korlátos  
 ③  $f$  korlátos  $g$  nem korlátos.
2. a)  $f$  és  $g$  monoton növekedő  
 ②  $f$  monoton csökkenő,  $g$  monoton nő.
3. a)  $f$  és  $g$  páros  
 b)  $f$  és  $g$  páratlan  
 c)  $f$  páros  $g$  páratlan.

- ② Tegyük fel, hogy az  $(a, b)$ -n értelmezett  $f$  és  $g$  valós függvényeknek lokális maximumuk van az  $x_0 \in (a, b)$  pontban.

Mit mondhatunk  $-f$ ,  $\frac{1}{f}$ ,  $f+g$ ,  $f \circ g$  viselkedéséről  $x_0$ -ban?

- ② Határozzuk meg  $f(x)$ -et, mint  $x$  algebrai kifejezését, ha

a)  $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$

b)  $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

22. Legyen  $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)) \quad \forall n > 1$  esetén, ahol

$$a) f_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$b) f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Határozzuk meg  $f_n(x)$ -et, mint  $x$  és  $n$  algebrai kifejezését!

23. Határozzuk meg szakaszonként algebrai kifejezéseként az fof, fog, gof, gog összetett függvényeket, ha

$$1. f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ x & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$2. f(x) = x^2 + 1 \quad g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$3. f(x) = \text{sign } x$$

$$\alpha) g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\gamma) g(x) = x(1-x^2)$$

$$\beta) g(x) = 1+x^2$$

$$\delta) g(x) = 1+x - [x]$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ egész} \\ x & \text{ha } x \text{ nem egész} \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$5. f(x) = x+x^2$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ páros egész} \\ -1 & \text{ha } x \text{ páratlan egész} \end{cases}$$

$$6. f(x) = -|x| \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 2-x & \text{ha } 1 < x < 2 \end{cases}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 2-x & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

$$8. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

1.6 Invertálhatóság

- ! (24.) Legyen  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  tetszőleges.  
Legyen  $H \subset E$  olyan, hogy  $H$ -n  $f$  kölcsönösen egyértelmű, azaz, tetszőleges  $x_1, x_2 \in H$  esetén

$$\text{ha } f(x_1) = f(x_2), \text{ akkor } x_1 = x_2 .$$

$$\text{Legyen } f(H) = \{ y \in \mathbb{R}_f : \exists x \in H, \text{ hogy } f(x) = y \} .$$

Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

1. Egyetlen olyan  $g: f(H) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény van, melyre

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in H .$$

2. Az alábbi két állítás ekvivalens:

a)  $g: f(H) \rightarrow \mathbb{R}$  olyan, hogy  $g(f(x)) = x \quad \forall x \in H$

b)  $g: f(H) \rightarrow \mathbb{R}$  olyan, hogy  $\forall x \in H$  és  $\forall y \in f(H)$  esetén  $g(y) = x$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $f(x) = y$

3. Bármely  $g: f(H) \rightarrow H$  esetén  $g(f(x)) = x \quad \forall x \in H$  akkor és csak akkor, ha  $f(g(y)) = y \quad \forall y \in f(H)$

- (25.) Bizonyítsuk be a következő állításokat!

1. Ha  $f$  invertálható  $H$ -n, akkor  $f^{-1}$  is invertálható  $f(H)$ -n, és

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \quad \forall x \in f(H) .$$

2. Invertálható függvények összetett függvénye is invertálható, azaz ha  $g$  invertálható  $H$ -n,  $f$  invertálható  $g(H)$ -n, akkor  $f \circ g$  is invertálható  $H$ -n, és

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) \quad \forall x \in (f \circ g)(H) .$$

3. Ha  $f \circ g$  invertálható  $H$ -n, akkor  $g$  invertálható  $H$ -n,  $f$  pedig  $g(H)$ -n.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

26. Legyen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Melyek igazak, és melyek hamisak az alábbi állítások közül?  
(Az állításokban szereplő tulajdonságok mindegyike az egész  $[a, b]$ -re vonatkozik.)
- $f$  monotonitása szükséges feltétele invertálhatóságának.
  - $f$  monotonitása elégséges feltétele invertálhatóságának.
  - Ha  $f$  szigoruan monoton, akkor invertálható.
  - Ha  $f$  invertálható és monoton akkor szigoruan monoton.
  - Ha  $f$  invertálható  $I_1$ -en és  $I_2$ -n ( $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$  intervallumok) akkor invertálható  $I_1 \cup I_2$ -n is.

27. Legyen  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  kölcsönösen egyértelmű.  
Melyek igazak, és melyek hamisak az alábbi állítások közül?
- Ha  $f$  korlátos  $E$ -n, akkor inverze korlátos  $f(E)$ -en.
    - Ha  $f$  szigoruan monoton növekedő  $E$ -n, akkor inverze szigoruan monoton növekedő  $f(E)$ -en.
  - Legyen  $E = [-a, a]$  ( $a > 0$ ).
    - Ha  $f$  páros, akkor inverze is páros.
    - Ha  $f$  páratlan, akkor inverze is páratlan.

28. Legyen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f = R_f = \mathbb{R}$ ;  $A, B \subset \mathbb{R}$ .

Definíció szerint legyen:

$$f^{-1}(B) = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \in B \} \text{ és}$$

$$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} : \text{van } x \in A \text{ melyre } f(x) = y \}.$$

Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

1.  $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B)$

2.  $f^{-1}(f(A)) \supset A$

3. Van olyan  $f$  függvény és  $A \subset \mathbb{R}$  halmaz, hogy

$$f^{-1}(f(A)) \neq A.$$

29. Az összes alábbi függvény esetén keressünk az értelmezési tartományban olyan legbővebb részhalmazokat (lásd 3. pl. Definíció) - ha léteznek ilyenek - melyeken a függvény invertálható és amelyek egyesítése az értelmezési tartomány.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSAI  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

Adjuk meg a megfelelő inverz függvényeket is!

1. a)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

4.  $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$

b)  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

5.  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

2.  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

6.  $f(x) = (x^2-9)^2 - 1$

3.  $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$

7.  $f(x) = x^2+ax+b$      $a, b \in \mathbb{R}$  rögzített

1.7 Határérték, folytonosság, egyenletes folytonosság

30. (1.) Legyen  $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a,b)$ .

Tegyük fel: van olyan  $A$  szám, hogy tetszőleges  $\varepsilon > 0$  szám esetén van olyan  $\delta > 0$  szám, hogy minden  $x \in (a,b)$  esetén ha  $|f(x)-A| < \varepsilon$ , akkor  $|x-x_0| < \delta$ .

Következik-e ebből az, hogy  $f$ -nek van határértéke  $x_0$ -ban.

! 2. a) Legyen  $E \subset \mathbb{R}$   $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in E$ .

Tegyük fel, hogy van olyan  $A$  szám, hogy tetszőleges  $\varepsilon > 0$  szám esetén van olyan  $\delta < 0$  szám, hogy minden  $x \in E$  esetén, ha  $|f(x)-A| < \varepsilon$ , akkor  $|x-x_0| < \delta$ .

Milyen tulajdonságot definiál ez a meghatározás?

b) Mutassunk példát olyan mindenütt értelmezett függvényre, melyre fennáll, és olyanra, melyre nem áll fenn valamely pontban ez a tulajdonság.

(31.) Legyen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Milyen összefüggés van a függvény  $-\infty$ -beli határértékének létezése és az alábbi tulajdonság között:

minden  $A$  szám esetén van olyan  $\varepsilon > 0$  szám, hogy minden  $K$  szám esetén van olyan  $x < K$  szám, hogy  $f(x) - A > \varepsilon$

! 32. Legyen  $x_0 \in (a,b)$ ,  $A \in \mathbb{R}$ .

Ekvivalens-e az alábbi tulajdonságok valamelyike azzal, hogy az  $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $A$  szám a határértéke  $x_0$ -ban?

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

1. Minden  $\varepsilon > 0$  szám esetén nem minden  $\delta > 0$  számhoz van olyan  $x \in (a, b)$ , hogy

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

2. Nincs olyan  $\varepsilon > 0$  szám, melyhez ne lenne olyan  $\delta > 0$  szám, hogy minden  $x \in (a, b)$  esetén vagy  $|x - x_0| \geq \delta$  vagy  $|f(x) - A| < \varepsilon$  fenn ne álljon.

3. Minden  $\varepsilon > 0$  szám esetén nem minden  $\delta > 0$  számhoz van olyan  $x \in (a, b)$ , hogy

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

!33. Legyen  $x_0 \in (a, b)$ .

Mely  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  függvények rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal: Van olyan  $K$  szám, hogy minden  $\delta > 0$  szám esetén van olyan  $x \in (a, b)$  szám, hogy  $x_0 < x < x_0 + \delta$  és  $f(x) < K$ .

Mutassunk példát olyan függvényre, (ha ilyen létezik) mely kielégíti a fenti definíciót és nem korlátos  $(a, b)$ -n.

!34. Legyen  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ .

Tekintsük az alábbi tulajdonsággal rendelkező függvényeket:

Van olyan  $A$  és  $\delta > 0$  szám, hogy minden  $\varepsilon > 0$  számhoz van olyan  $x \in (a, b)$ , hogy  $0 < |x - x_0| < \delta$  és  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

1. Igazak-e az alábbi következtetések?

(a) Ha  $f$  rendelkezik a fenti tulajdonsággal, akkor van határértéke  $x_0$ -ban.

b) Ha  $f$ -nek van határértéke  $x_0$ -ban, akkor rendelkezik a fenti tulajdonsággal.

2. Mutassunk példát a fenti tulajdonsággal rendelkező függvényre!

35. 1. a) Bizonyítsuk be, hogy ha  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty.$$

(b) Igaz-e az állítás megfordítása?

(2.) Abból, hogy az  $f(x)$  függvény  $x_0$ -ban nem lokálisan korlátos (lásd 8. pld Definíció) következik-e, hogy  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ?

(3.) Abból, hogy  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$

következik-e, hogy  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ?



EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

4. Bizonyítsuk be, hogy  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  akkor és csak akkor teljesül,

ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - A) = 0$ .

36. Adjunk példát egy-egy olyan függvényre, - ha vannak ilyenek - melyeknek

1. nincs határértéke a 0-ban, de létezik a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)$ ;

2. van határértéke a 0-ban, de nem létezik a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)$ .

37. Vizsgáljuk meg a határérték definíciója alapján, hogy léteznek-e az alábbi határértékek! Ha igen, állapítsuk meg értéküket is!

1. a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2)$

4. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \left[ \frac{1}{x} \right] \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1}$

2. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (|x| - x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x-1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| - x)$

5. a)  $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{(x-1)^2}$

3. a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 1)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{(x-1)^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 2)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{3+x}$

6. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x + 1)$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{1+x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x^2}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

7. a)  $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$

8. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign} x$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$

9. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \operatorname{sign}^2 x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign} |x|$

10. a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} \right]$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{[x]}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{x} \right]$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\dot{1}}{[x]}$

11. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$

12.  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$

13.  $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racionális} \\ x^2, & x \text{ irracionális} \end{cases}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

!38. Legyen  $x_0 \in (a, b)$ .

Az alábbi definíciók közül melyik ekvivalens az  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $x_0$ -beli folytonosságának definíciójával?

a) Minden  $\varepsilon > 0$  szám esetén nem minden  $\delta > 0$  számhoz van olyan  $x \in (a, b)$ , hogy

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

b) Van olyan  $\varepsilon > 0$  szám, melyhez nincsen olyan  $\delta > 0$  szám, hogy minden  $x \in (a, b)$  esetén

$$\text{ha } |x - x_0| < \delta, \text{ akkor } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

c) Minden  $\varepsilon > 0$  szám esetén nem minden  $\delta > 0$  számhoz van olyan  $x \in (a, b)$ , hogy

$$|x - x_0| < \delta \text{ és } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

d) Van olyan  $A$  szám, hogy minden  $\varepsilon > 0$  szám esetén van olyan  $\delta > 0$  szám, hogy minden  $x \in (a, b)$  esetén, ha  $|x - x_0| < \delta$ , akkor  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

39. Legyen  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$  és  $E \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

Tegyük fel, hogy minden  $\varepsilon \in E$  esetén van olyan  $\delta > 0$  szám, hogy ha  $x \in (a, b)$ ,  $|x - x_0| < \delta$ , akkor  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Milyen tulajdonságu  $E$  halmaz esetén következik ebből a tulajdonságból az, hogy  $f$  folytonos  $x_0$ -ban?

40. Legyen  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ .

Tegyük fel, hogy minden  $\delta > 0$  szám esetén van olyan  $\varepsilon > 0$  szám, hogy ha

$$x \in (a, b) \text{ és } |x - x_0| < \delta, \text{ akkor } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

1. Milyen tulajdonságot definiál a fenti meghatározás?

2. Mondjunk példát a fenti tulajdonsággal rendelkező függvényre.

3. Következik-e egy függvény  $x_0$ -beli folytonossága abból, ha rendelkezik a fenti tulajdonsággal?

41. Legyen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Tegyük fel, hogy minden  $x, y \in [a, b]$  és minden  $\varepsilon > 0$  szám esetén van olyan  $\delta > 0$  szám, hogy ha  $|f(x) - f(y)| < \delta$  akkor  $|x - y| < \varepsilon$

Mit mondhatunk ekkor az  $f$  függvényről?

42. 1. Bizonyítsuk be, hogy: ha  $f$  folytonos egy  $[a, b]$  zárt intervallumon, akkor van olyan az egész  $\mathbb{R}$ -en folytonos  $g$  függvény, hogy  $f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b]$  esetén.

2. Igaz-e 1. állítása az  $(a, b)$  nyílt intervallumon folytonos  $f$  függvény esetén is?

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

43. Legyen  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ .

Hogyan függ össze az alábbi két tulajdonság  $f$ -nek  $x_0$ -beli folytonosságával?

a)  $\lim_{h \rightarrow 0} |f(x_0+h) - f(x_0-h)| = 0$

b)  $\lim_{h \rightarrow 0} |f(x_0+h) - f(x_0)| = 0$

44. Legyen  $f$  tetszőleges valós függvény.

Hogyan függ össze az alábbi két tulajdonság?

a) Van olyan  $a \in \mathbb{R}$ , hogy  $f$  folytonos  $[a, \infty)$ -en.

b)  $f$ -nek van határértéke  $\infty$ -ben.

45. Legyen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  rögzített.

1. Mit mondhatunk az  $f+g$  és az  $f \cdot g$  függvények  $x_0$ -beli folytonosságáról, ha

a)  $f$  folytonos,  $g$  nem folytonos  $x_0$ -ban;

b)  $f$  és  $g$  egyike sem folytonos  $x_0$ -ban?

2. Igaz-e, hogy ha  $f^2$  folytonos  $E \subset \mathbb{R}$ -en, akkor  $f$  is az?

46. Legyen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  rögzített.

Mit mondhatunk  $f$  és  $g$   $x_0$ -beli folytonosságáról, ha

a)  $g$  folytonos  $x_0$ -ban, de  $f$  nem folytonos  $x_0$ -ban;

b)  $g$  nem folytonos  $x_0$ -ban, de  $f$  folytonos  $x_0$ -ban;

c)  $g$  nem folytonos  $x_0$ -ban,  $f$  nem folytonos  $x_0$ -ban.

47. Vizsgáljuk meg a folytonosság definíciója alapján az alábbi függvények folytonosságát a megadott pontokban, illetve intervallumokon.

1. a)  $f(x) = x^2$   $(0, \infty)$

5.  $f(x) = \frac{1}{x}$   $(0, \infty)$

b)  $f(x) = |\operatorname{sign} x|$   $x_0=0$

6.  $f(x) = [x]$   $(0, 2)$

2.  $f(x) = ax+b$   $(-\infty, \infty)$

7.  $f(x) = x^3$   $(-\infty, \infty)$

3.  $f(x) = \sqrt{x}$   $(0, \infty)$

4.  $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ irrac.} \\ 0 & x \text{ rac.} \end{cases}$  a)  $x_0 = 1$   
b)  $x_0 = 0$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

8. a)  $f(x) = |x| \quad (-\infty, \infty)$

9.  $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ rac.} \\ -x & x \text{ irrac.} \end{cases}$

b)  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sign} x} \quad (-\infty, \infty)$

a)  $x_0 = 1$

b)  $x_0 = 0$

48. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi függvény minden irracionális  $x$  helyen folytonos és minden racionális  $x$  helyen szakadása van:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ha } x = \frac{m}{n}, \text{ m és n relatív prim egészek, } n > 0. \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

49. Legyen  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Következik-e az alább megadott tulajdonságok valamelyikéből, hogy  $f$  egyenletesen folytonos  $(a, b)$ -n?

a) Minden  $x_0 \in (a, b)$  esetén minden  $\varepsilon > 0$  szám esetén van olyan  $\delta > 0$  szám, hogy minden  $x \in (a, b)$  esetén ha  $|x - x_0| < \delta$ , akkor

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

b) Minden  $\varepsilon > 0$  szám esetén van olyan  $\delta > 0$  szám, hogy minden  $x_0 \in (a, b)$  és  $x \in (a, b)$  esetén ha  $|x - x_0| < \delta$ , akkor  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

2. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában (nem használva azt a szót, hogy "nem") azt, hogy  $f$  nem egyenletesen folytonos  $(a, b)$ -n.

50. Igazak-e az alábbi állítások?

1. Ha egy függvény nem korlátos egy halmazon akkor ott nem lehet egyenletesen folytonos.

2. Ha egy függvény folytonos és korlátos egy halmazon, akkor ott egyenletesen folytonos.

3. Ha egy függvény egyenletesen folytonos egy intervallumon, akkor egyenletesen folytonos annak minden részintervallumán is.

51. Igazak-e a következő állítások?

Egy  $I \subset \mathbb{R}$  intervallumon egyenletesen folytonos függvények

a) összege

b) szorzata

c) összetett függvénye

is egyenletesen folytonos  $I$ -n.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

52. Vizsgáljuk meg a definíció alapján az alábbi függvényeket egyenletes folytonosság szempontjából a megadott intervallumokon!

1. a)  $f(x) = x \quad (-\infty, \infty)$

b)  $f(x) = x^2 \quad (-\infty, \infty)$

2.  $f(x) = \sqrt{x} \quad [1, \infty)$

3.  $f(x) = x^3$

a)  $(0, \infty)$

b)  $(0, 1)$

4.  $f(x) = \frac{1}{x}$

a)  $(0, 2)$

b)  $(1, 2)$

5.  $f(x) = \cos \frac{1}{x} \quad (0, 1)$

2. GYAKORLÓ FELADATOK FÜGGVÉNYEK  
TULAJDONSÁGAINAK VIZSGÁLATÁRA

2.1 Elemi tulajdonságok

53. Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

1.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{x}$

2.  $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sin \frac{1}{x}} - 1}$

3.  $f(x) = \sqrt{\ln \frac{1+x}{1-x}}$

4.  $f(x) = \frac{1}{1+2^{x-x}}$

5.  $f(x) = \ln \left( \arccos(\arctg x) - \frac{\pi}{2} \right)$

6.  $f(x) = \ln (e^{c \cdot s x} - 1)$

7.  $f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2(\arcsin(x-1))}$

8.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{sh}(1 - e^{\operatorname{arch}^2 x})}$

9.  $f(x) = \frac{1}{1 + [\operatorname{ch} x]}$

10.  $f(x) = \sqrt[3]{\ln \sqrt{|x|} - 1}$

11.  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\sqrt{\arccos x}}}$

12.  $f(x) = \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

54. Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékészletét!

$$1. f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

$$2. f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$$

$$3. f(x) = \arccos(\ln x)$$

$$4. f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 1}$$

$$5. f(x) = \ln\left(\ln \frac{1}{x}\right)$$

$$6. f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x}$$

$$7. f(x) = \ln(\arccos e^x)$$

$$8. f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ch} \frac{1}{x}\right)}$$

$$9. f(x) = \sqrt{\frac{1}{1 - \operatorname{th} x}}$$

$$10. f(x) = e^{\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x}\right)}$$

$$11. f(x) = \operatorname{sh} \sqrt{\frac{x}{1 - |x|}}$$

$$12. f(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$13. f(x) = \frac{1}{1-x^3}$$

55.

Állapítsuk meg  $f(H)$ -t az alábbi esetekben!

$$1. f(x) = \ln \sin x \quad H = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$2. f(x) = \operatorname{ch}(x+2)^2 \quad H = [-3, -1)$$

$$3. f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad H = (-\infty, 1)$$

$$4. f(x) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right) \quad H = (-\infty, 0)$$

$$5. f(x) = e^{\operatorname{sign}(\cos x)} \quad H = [1, \infty)$$

56. Értelmezési tartományuk mely legbővebb részintervallumaiban (lásd 3. pl. Def.) monotonok az alábbi függvények?

$$1. f(x) = \frac{1}{1 - |\ln x|}$$

$$2. f(x) = 1 - \operatorname{sh} \frac{1}{1+x^4}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$3. f(x) = e^{\sin^2 x}$$

$$⑤. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x^2}{1-x}$$

$$4. f(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{\operatorname{ch}(x^2 - 1) - 1}$$

57. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket abból a szempontból, hogy a megadott halmazokon

1. korlátosak-e,

2. felveszik-e minimumukat, illetve maximumukat,

3. van-e lokális szélsőértékük!

Ha léteznek, adjuk meg a megfelelő supremumokat és infimumokat, illetve maximumokat és minimumokat, valamint a lokális szélsőértékek helyeit!

$$①. f(x) = \sin x(1 - \sin x), [-\pi, \pi] \quad 3. f(x) = \arccos \sqrt{1-x^2}, D_f$$

$$2. f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{1+|\ln|x||} & x \neq 0 \end{cases}$$

a)  $D_f$

a)  $D_f$

b)  $(-\infty, 1)$

b)  $[1, \infty)$

c)  $(1, \infty)$

$$5. f(x) = \sqrt[3]{1 - e^{-x}}$$

d)  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

a)  $D_f$

e)  $(2, 3)$

b)  $[0, \infty)$

⑤8. Vizsgáljuk meg, invertálhatóak-e az alábbi függvények a megadott intervallumokon!

$$1. f(x) = \arccos \sqrt{x^2(1-x^2)}$$

$$2. f(x) = e^x + x \quad (-\infty, \infty)$$

a)  $[0, 1]$

$$3. f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

b)  $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

a)  $(0, 1]$  b)  $(0, 2]$  c)  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

c)  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{1 + \sqrt{\ln(1+x)}}, D_f$$



EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

59. (1.) a) Hány olyan mindennütt értelmezett  $y = f(x)$  függvény van, mely kielégíti az  $y + \ln y = x^3$  függvényegyenletet?  
 ! b) Hány olyan  $[0, \infty)$ -en értelmezett  $y = f(x)$  folytonos függvény van, mely kielégíti az  $y^2 + chy = x+1$  függvényegyenletet?  
 2. a) Mely  $c$  valós számok esetén van megoldása (és ekkor hány) az  $\operatorname{sh} x + x + c = 0$  egyenletnek  $(-\infty, \infty)$ -en?  
 b) Mely  $c$  valós számok esetén van megoldása (és ekkor hány) az  $x \operatorname{tg} x = c$  egyenletnek  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -en?

60. Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét. Adjunk meg az értelmezési tartományban olyan legbővebb részhalmazokat (lásd 3. pl. Def.) minden egyes esetben, amelyeken az adott függvény invertálható, és az inverz függvény megadható szakaszonként elemi függvényekből alpműveletekkel, illetve összetett függvény képzéssel előálló függvényként! Adjuk meg az inverz függvényt és értékkészletét!

a) 1.  $f(x) = \cos e^{(x+2)^2}$                       7.  $f(x) = \arcsin (\operatorname{th}(x-1)^4)$

2.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{2x-1}} + 1$                       8.  $f(x) = \arccos \frac{4x}{1+x^2}$

3.  $f(x) = \sqrt{\ln \left( \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right)}$                       9.  $f(x) = (\operatorname{ch}(x+1)-2)^2$

4.  $f(x) = \frac{1}{1+\sin 2x}$                       10.  $f(x) = \log_2 x^3$

5.  $f(x) = e^{\ln^3(x-1)}$                       11.  $f(x) = \ln(16-x^2) + 3$

6.  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1-x^2}{1+x^2}$                       12.  $f(x) = \frac{\ln x}{1+\ln x}$

b) (1.)  $f(x) = e^{-x|x|}$                       3.  $f(x) = \begin{cases} x & -\infty < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x & 4 < x < \infty \end{cases}$

2.  $f(x) = \operatorname{arctg} |\ln x|$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI,  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ \sqrt{1-x} & 0 < x < 1 \\ x-1 & 1 < x \leq 2 \\ -\cos \frac{\pi(x-2)}{2} & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$(5.) f(x) = x + [x] \quad (x \geq 0)$$

$$! c) (1.) f(x) = e^{2x} - e^x$$

$$(2.) f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x$$

$$(3.) f(x) = \operatorname{sh}^2 x - 3\operatorname{sh} x + 2$$

(61.) 1. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, és adjuk meg a függvényeket szakaszonként algebrai függvények segítségével!

$$a) 1. f(x) = \cos(\arccos x) \quad 7. f(x) = \operatorname{tg}(\arcsin x)$$

$$2. f(x) = \arcsin(\sin x) \quad 8. f(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x)$$

$$3. f(x) = \sin(\arccos x) \quad 9. f(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)$$

$$4. f(x) = \arcsin(\cos x) \quad 10. f(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{arch} x)$$

$$5. f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \quad 11. f(x) = \operatorname{arch}(\operatorname{ch} x)$$

$$6. f(x) = \sin(\operatorname{arctg} x)$$

$$b) 1. f(x) = \sin(2 \arcsin x) \quad 3. f(x) = \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$2. f(x) = \cos(\arcsin \sqrt{1-x^2})$$

2. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat!

$$1. \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{tetsz. } x \in [-1, 1] \text{ -re}$$

$$2. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{tetsz. } x \in (-1, 1) \text{ -re}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$3. a) \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{ha } x > 0$$

$$b) \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ha } x < 0$$

2.2 Határértékszámítás

62. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

1. Ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  létezik, akkor  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$  is létezik és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|.$$

2. a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = \infty.$$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = \infty.$$

3. Ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C > 0$  és  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty.$$

4. Ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  és  $g(x)$  korlátos  $x_0$  valamely  $S$  környe-

zetében, akkor  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$ .

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

5. Ha létezik a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , akkor tetszőleges  $k \in \mathbb{N}$  esetén lé-

tezik a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^k$  és  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{1/k}$  és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^k = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^k, \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{1/k} = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{1/k}. \quad (2)$$

6. Ha létezik a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  és  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , valamint van  $x_0$ -nak

egy olyan  $S$  környezete, hogy

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in S, \text{ akkor } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

(63.) Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

Legyen  $f: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E_1 \subset \mathbb{R}$ ) tetszőleges.

1. Ha  $x_0 \in (a, b)$  és van olyan  $g: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E_2 \subset \mathbb{R}$ )  $E_2$ -n folyto-

nos és invertálható függvény, hogy  $D_f \supset R_g \supset (a, b)$ , akkor, ha

létezik a  $\lim_{y \rightarrow g^{-1}(x_0)} f(g(y))$ , akkor létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ is, és } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{y \rightarrow g^{-1}(x_0)} f(g(y)).$$

2. Ha létezik a  $\lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right)$ , akkor létezik a  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  és

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right).$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

Vizsgáljuk meg, léteznek-e az alábbi határértékek! Amelyik létezik, azt határozzuk meg!

- 64.
- |   |  |
|---|--|
| <p>1. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign} x</math></p> <p>2. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign} x^2</math></p> <p>3. <math>\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sign} x)^2</math></p> <p>4. <math>\lim_{x \rightarrow 0} [x]</math></p> <p>5. <math>\lim_{x \rightarrow 0} [x]^2</math></p> | <p>6. <math>\lim_{x \rightarrow 0} [x^2]</math></p> <p>7. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} [x]</math></p> <p>8. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} \right]</math></p> <p>9. <math>\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right]</math></p> <p>10. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{[x]}</math></p> |
|---|--|
- 
- 65.
- |   |  |
|---|--|
| <p>1. a) <math>\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 2)</math></p> <p>b) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 1)</math></p> <p>2. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 4)</math></p> <p>3. <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 4x^2 + 1)</math></p> <p>4. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 2x + 3)</math></p> <p>5. <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 4x + 2)</math></p> | <p>6. <math>\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x)</math></p> <p>7. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\sqrt{x} + 1}</math></p> <p>8. <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1}</math></p> <p>9. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 5\sqrt{x})</math></p> <p>10. <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x} \right)</math></p> |
|---|--|
- 
- 66.
- |   |   |
|---|---|
| <p>1. <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}</math></p> <p>2. <math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 2x - 1}{(x-1)(x-2)}</math></p> | <p>3. <math>\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{3x^2 + x + 1}{6x^2 + 2x + 1}}</math></p> <p>4. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}</math></p> |
|---|---|

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 + \sqrt{x}}}{3 \sqrt{9 - \sqrt{x}}}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left( \left( \frac{x}{x^2 + 2} \right)^3 - 1 \right)$$

$$67. \quad \boxed{1.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{3x^2 + 5}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2}{6x^2 + 2x - 1} \right)^2$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 7x - 5}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4x + 5}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{2x}}} + 1 \right)^3$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - 2x^2}{6x^3 + 1}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 - 6x^2 + 1}{3x + 1}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x+2}{4x-1}}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^n (x^k + 1)}{(nx)^n + 1}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[5]{x+1}}$$

$$\frac{n+1}{2}$$

$$10. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x^2+1}}$$

$$18. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x+1}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - x}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \right)$$

$$20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{4x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 1} + x \sqrt{2x + 1}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1} + x \sqrt{2x + 1}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 1} + 1}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

68. ① Legyenek  $s(x)$  és  $n(x)$  polinomok,  $f(x) = \frac{s(x)}{n(x)}$  és  $x_0$   $s(x)$ -nek  $k_1$ ,  $n(x)$ -nek  $k_2$  multiplicitásu gyöke. (Utóbbi feltétel azt jelenti, hogy  $s(x)$  és  $n(x)$  felírható  $s(x) = (x-x_0)^{k_1} \hat{s}(x)$  ill.  $n(x) = (x-x_0)^{k_2} \hat{n}(x)$  alakban, ahol  $\hat{s}(x_0) \neq 0$ ,  $\hat{n}(x_0) \neq 0$ .)

Használjuk a formális  $c \cdot \infty$ ,  $c = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$  jelölést!

Bizonyítsuk be, hogy a fenti feltételek mellett:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k_2 > k_1 \text{ és } k_2 - k_1 \text{ páros} \\ \text{sign } \frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} \cdot \infty & \text{ha } k_2 > k_1 \text{ és } k_2 - k_1 \text{ páratlan} \\ \frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} & \text{ha } k_1 = k_2 \end{cases}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

valamint ha  $k_2 > k_1$  és  $k_2 - k_1$  páratlan, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \text{sign} \frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} \cdot \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\text{sign} \frac{\hat{s}(x_0)}{\hat{n}(x_0)} \cdot \infty$$

2. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)^2}{x - 3}$

③  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x^2 - 9)^4}$

2. a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x^2 - 9)^3}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{(x^2 - 9)^3}$

Vizsgáljuk meg léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

69. a) ①  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+1)(x+2)}{(x-2)^2(x+3)}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$

7.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - x - 2}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^3-1} \right)$

5.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+3)}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$



EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x}$

13. 3.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x^2 - x - 6}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x^2 - x - 6}$

13. 1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - x - 6}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - x - 6}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2 - x - 6}$

14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+x)^4}{x}$

! (b) 1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x-1}$ ,  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$  rögzített

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 2x + 1}{x^m - 2x + 1}$ ,  $m > 2, n, m \in \mathbb{N}$  rögzített

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  rögzített

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  rögzített

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  rögzített

70. 1. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x-1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \sqrt{x})^2 - 1}{\sqrt{x}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{(x-1)^2}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x} - 6}{\sqrt{x} - 2}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[5]{\frac{\frac{1}{3} + 1}{x + 1}}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + 1} + 1}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1} + 1}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{x} \right)$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} + x}{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - x}}$$

$$8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1}$$

$$\underline{71.} \text{ a) } \textcircled{1.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} \right)$$

$$\textcircled{b) 1.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{1-x^3} + x \right)$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt{x-4}}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$7. \text{ 1. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x)$$

$$\textcircled{2.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt{x^2+1} + x)$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$5. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} \left( \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right)$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^4} \left( \sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1} \right)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x^2-1)^2} \right)$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x} \right)$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x \right)$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} \right)$$

! c) 1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  rögzített

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  rögzített

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  rögzített

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right), \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{a+x} - \sqrt[n]{a-x}}{x}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 + 1})^n}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{(x+a_1) \dots (x+a_n)} - x \right), \quad a_i \in \mathbb{R} \quad i=1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \dots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ rögzített}$$

72. Vizsgáljuk meg léteznek-e az alábbi függvények esetén a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

határértékek, és ha igen mivel egyenlők!

$$1. \boxed{1.} f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{2x}}$$

$$4. f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

$$2. f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$5. f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{1 - e^{\frac{2}{x}}}$$

$$3. f(x) = \frac{e^{2x}}{1 - e^x}$$

$$6. f(x) = \frac{\frac{1}{e^x}}{1 + e^x}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$7. f(x) = \frac{x}{1 - e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$9. f(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$$

$$8. f(x) = \frac{x + e^{\frac{1}{x}}}{1 + 2e^{\frac{1}{x}}}$$

$$2. 1. f(x) = \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{th} \frac{1}{x}}$$

$$3. f(x) = \frac{1 + \operatorname{th} \frac{1}{x}}{1 + \operatorname{th} x}$$

$$2. f(x) = \frac{\operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} 2x}$$

$$4. f(x) = \frac{x \operatorname{th}^2 x}{1 + x^2 \operatorname{th} x}$$

$$3. 1. f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

$$3. f(x) = \frac{x}{\sin \frac{1}{x}}$$

$$\textcircled{2} f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

73. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

$$1. \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$$

$$7. 1. \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln e^x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{(x-2)^2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$8. 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2e^x + 3e^{2x}}{1-e^x + e^{2x}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2e^x + 3e^{2x}}{1-e^x + e^{2x}}$$

$$9. 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x - 1} + 2 \ln x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x - 1} + 2 \ln x}$$

$$10. 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+2x^2+3x^3)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{\ln(1+2x^2+3x^3)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1+x^2}{1+2x^2+3x^3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1+x^2+x^3}{1+2x^2+3x^3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1+\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}$$

$$\textcircled{11.} \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt[3]{\cos \frac{1}{2x}}$$

$$\textcircled{12.} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(1 - \sqrt{1-e^x})$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2ch2x-chx-2chx})$$

74. Állapítsuk meg, mely  $a$  valós számok esetén léteznek - és ekkor mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \cos^x a$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a - x^{-a}}{x^a + x^{-a}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{1+a^{2x}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x$$

$$\textcircled{3.} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{1+a^x}}{1+e^{ax}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a+a^{2ax}}{1+e^{ax}}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

75. Felhasználva, hogy  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , vizsgáljuk meg léteznek-e és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

a) ①.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  fix  
 $a \neq 0$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

②.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  fix  
 $b \neq 0$

⑦.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

③.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

⑨.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

b) 1. 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{\arcsin bx}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$   
 $b \neq 0$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (1 - \cos \frac{1}{x})$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \operatorname{arctg} x}$

2. ①.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

⑧.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

! 9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$

! 10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$

⑪.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

12. 1.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$

17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

18. 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{\arcsin x}$

13.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  fix

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg} x}$

14.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$

19. 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln \sin x - \ln x)$

15.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln \sin \frac{1}{x} + \ln x)$

16.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}$

76. 1. Felhasználva, hogy  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  bizonyítsuk be, hogy

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$

2. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$  ( $a > 0$  fix)

2. Felhasználva 1. 1. eredményét vizsgáljuk meg: léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

A. 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} ax}{x}$   $a \in \mathbb{R}$  rögzített



EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{rögzített} \\ b \neq 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arth} x}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sh} \frac{1}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arth} \frac{1}{x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arsh} x}{x}$$

B. 1. 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arth} ax}{\operatorname{arsh} bx}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$   
 $b \neq 0$  rögzített

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( \operatorname{ch} \frac{1}{x} - 1 \right)$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{arsh} x}{2x + \operatorname{arth} x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\operatorname{ch} x}}{x^2}$

5.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}{x - a}$

3. Felhasználva az 1.-ban szereplő határértékeket, vizsgáljuk meg: léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlők az alábbi határértékek!

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  rögzített

②.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$ ,  $a > 0$  rögzített

③.  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( x + e^{x^{\frac{1}{x}}} \right)$

6. 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^3 + x + 1)}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}$

! 7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}, \quad a > 0, b > 0 \text{ rögzített}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

$$\textcircled{11}. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x - 1}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ rögzített}$$

$$! 12. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, \quad a > 0 \text{ rögzített}$$

$$! 13. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1}$$

$$! 14. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}, \quad a > 0 \text{ rögzített}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt[x]{a} - 1 \right), \quad a > 0 \text{ rögzített}$$

77. 1.  $\textcircled{a}$  Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $f$  valós függvény és  $x_0 \in \mathbb{R}$  esetén, ha van  $x_0$ -nak olyan  $S$  környezete, hogy  $S \subset D_f$

és  $f(x) > 0$ , ha  $x \in S$ , valamint létezik a véges

$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)$ , akkor létezik  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  is, és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x)}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

b) Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be az a)-ban kimondott állítás megfelelőjét a  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  határértékre vonatkozóan!

2. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

①.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

! 8.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

②.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$

9.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

! 3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ ,  $a > 0$ ,  
 $b > 0$   
rögzített

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x$ ,  $a \in \mathbb{R}$   
rögzített

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x}}$

11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x-2} \right)^{5x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

! 12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$

! 13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^x \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{x} \right)$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1-2x}$

! 14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 2e^{\frac{x}{x+1}} - 1 \right)^{\frac{x+1}{x}}$

78. Vizsgáljuk meg, léteznek-e, és ha igen, mivel egyenlőek az alábbi határértékek!

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{arth} bx}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  fix  
 $b \neq 0$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \operatorname{ch} x) \cdot \sin(x \operatorname{sh} x)}{x^3}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$   
 $b \neq 0$   
rögzített

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + ax \right)}{\sin bx}$ ,  $a \in \mathbb{R}$   
rögzített

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \cos x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x^2}$

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{2a+x}{a+x}$  ( $a \in \mathbb{R}$  fix)

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{x^2+1}{x-2} \right)^{x^2}$

11.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2$

12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1+2^x) \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)$

! (13.)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-1}{x^2} \right)^{x^4}$

15. 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

(2.)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

17.  $f(x) = \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{1-x}$

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(18.) 1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{2x+2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{2x^2} \right)^{x^2}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{x} \right)^x$

19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{1}{2^x} \right)^{\frac{1}{x}}$

20. 1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$(21.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}$$

$$(22.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(\arctg x - \frac{\pi}{2})$$

(79.) Az alábbi függvények esetén állapítsuk meg, léteznek-e olyan  $a, b \in \mathbb{R}$  számok, hogy fennálljon

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

Ha léteznek ilyenek, határozzuk meg őket!

1.  $f(x) = x^2 + 1$

2. a)  $f(x) = \frac{(2x)^2 + 1}{x+1}$       b)  $f(x) = \frac{2-3x}{3+2x}$       c)  $f(x) = \frac{4x}{1+3x^3}$

3. a)  $f(x) = \sin x$       b)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

4.  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

5. a)  $f(x) = \arctg x$       b)  $f(x) = x \arctg x$

6.  $f(x) = \sqrt[3]{c^3 - x^3}$       ( $c \in \mathbb{R}$  fix)

80. A. Vizsgáljuk meg, konvergensek-e az alábbi számsorozatok, és ha igen mi a határértékük!

a) 1.  $a_n = n \sin \frac{1}{n}$

5.  $a_n = \cos^n \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$        $x \in \mathbb{R}$  rögzített

2.  $a_n = \frac{n^2 \operatorname{arsh} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n+1}$

6.  $a_n = \left( \frac{a-1}{a} \cdot \sqrt[n]{b} \right)^n$ ,       $a > 1$ ,  
rögzített       $b > 0$

3.  $a_n = \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n+1}$       ( $n > 1$ )

7.  $a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^n$

4.  $a_n = n^2 (\ln(n^2 + 1) - 2 \ln n)$

8.  $a_n = \frac{\ln n}{n}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$\textcircled{9}. a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$! \text{ b) } \textcircled{1}. a_n = \sin \left( \pi \sqrt{n^2 + 1} \right)$$

$$\textcircled{2}. 1. a_n = \sin \left( \pi \cdot \sqrt{n^2 + n} \right)$$

$$2. a_n = \sin^2 \left( \pi \cdot \sqrt{n^2 + n} \right)$$

$$\textcircled{3}. 0 < a_1 < \frac{\pi}{2} \text{ rögzített, } a_n = \sin a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

! B. Állapítsuk meg konvergensek-e az alábbi sorozatok!

$$\textcircled{1}. a_1 > 0 \text{ rögzített, } a_n = \operatorname{arctg} \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$2. a_1 > 1 \text{ rögzített, } a_n = \frac{1 + \ln a_{n-1}}{\ln a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$\textcircled{3}. a_1 > 0 \text{ rögzített, } a_n = a_{n-1} + e^{\frac{n}{n+1}} \quad (n \geq 2)$$

2.3 Folytonosságvizsgálat

81. Állapítsuk meg, hol értelmezettek, hol folytonosak és hol nem folytonosak az alábbi függvények!

Az értelmezési tartományba, vagy annak határára eső nem folytonossági pontok esetén állapítsuk meg

1. a függvény határértékét (ha létezik),
2. a függvény jobb- illetve bal oldali határértékét (ha létezik),
3. a szakadások jellegét.

Határozzuk meg a függvény határértékét a  $+\infty$ -ben, illetve a  $-\infty$ -ben (ha létezik)!

$$\textcircled{a} f(x) = 1 + \operatorname{th} \frac{1-2x^2}{1+x}$$

$$\text{b) 1. 1. } f(x) = \operatorname{sign} x^3$$

$$2. f(x) = \operatorname{sign} x^4$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

2.  $f(x) = [x]$
3.  $f(x) = \frac{1}{x} \cdot [x]$
- c) 1.  $f(x) = x^3 + 2x - \sqrt{x} + 1$
2. 1.  $f(x) = \frac{x}{x-2}$
2.  $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$
3.  $f(x) = \frac{x}{x-4}$
4.  $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$
5. 1.  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{2(x-2)}$
2.  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{2|x-2|}$
6.  $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{3-\sqrt{x}}}$
7.  $f(x) = \frac{(\sqrt[4]{x+1})(\sqrt[4]{x-1})}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}}$
8.  $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$
9.  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2}$
10.  $f(x) = \frac{x-2}{|x-2|} + \frac{1}{|x-3|} + \frac{1}{x-3}$
- d) 1.  $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$
2.  $f(x) = \operatorname{th} \frac{2x}{1-x^2}$
3.  $f(x) = \ln \frac{x^2}{1-x^3}$
4.  $f(x) = \frac{1+x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2 + \operatorname{arctg}^2 x}$
5.  $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
6.  $f(x) = \frac{1+x+e^x}{2+e^x - e^{2x}}$
7.  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{-x^2}$
8.  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{|x-2|}}$
9.  $f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{1}{1-2x}}$
10.  $f(x) = \operatorname{th} \ln \frac{1}{|1-x|}$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI.  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$11. \quad f(x) = \operatorname{tg} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$(20.) \quad f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$$

$$12. \quad f(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$$

$$21. \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$13. \quad f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$22. \quad f(x) = e^{-e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$14. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-e^{-x^2}}}$$

$$23. \quad f(x) = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$$

$$15. \quad f(x) = \sqrt[3]{1-\operatorname{sign}^2 x}$$

$$24. \quad f(x) = \sqrt[3]{1-e^{-\sin x}}$$

$$16. \quad f(x) = \frac{1}{1-2^{-x}}$$

$$(25.) \quad f(x) = \frac{2x}{x-\sin x}$$

$$17. 1. \quad f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$$

$$26. \quad f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x(x+1)^2}$$

$$2. \quad f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

$$27. \quad f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \cdot 3^{\frac{1}{x}}$$

$$3. \quad f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

$$28. \quad f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{1}{1+2 \frac{2-x}{x-1}}$$

$$(18.) \quad f(x) = (1 + \sin x)^{x^2}$$

$$19. \quad f(x) = \operatorname{sign} \left( \sin \frac{\pi}{x} \right)$$

$$29. \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)(x^2+1)}{x}$$

$$30. \quad f(x) = \sqrt{1-\ln(x-1)^2}$$



EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI,  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$e) 1. \quad f(x) = \begin{cases} \ln x^2 & -\infty < x \leq -1 \\ \operatorname{arth} x & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{e^{x^2-1}} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2-2x} & 1 \leq x < \infty, x \neq 2 \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \\ (x-2)^2 & 2 \leq x < 3 \\ 1+e^{-\frac{1}{x-3}} & 3 < x < \infty \end{cases}$$

$$③. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+\pi}{2x} & x \leq -\pi \\ \frac{|\sin x|}{x} & -\pi < x < \pi, x \neq 0 \\ (1+\sin \frac{1}{x-\pi})(1+e^{\frac{1}{\pi-x}}) & x > \pi \end{cases}$$

$$④. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{arch} x & |x| > 1 \\ \frac{\sin \pi x}{x-x} & |x| < 1, x \neq 0 \end{cases}$$

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{4} - x & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{\ln(x-2)} & x > 2, x \neq 3 \end{cases}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI  
HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x & \text{ha } x \notin \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\ 0 & \text{ha } x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \end{cases}$$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{x} & x < -1 \\ \frac{x}{\operatorname{sign} x} & -1 < x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{x}{\operatorname{sign} x} & 0 < x < 1 \\ \frac{x}{\operatorname{sign} x} & 1 < x \leq 2 \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{x-5} & 2 < x < 5 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 5 \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{1}{5-x} & x > 5 \end{cases}$$

$$f) \quad 1. \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad 3. \quad f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x+e^{xt}}{1+e^{xt}} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$2. \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad 4. \quad f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)} \quad (t \in \mathbb{R})$$

82. Adjunk példát olyan függvényre, mely elemi függvényekből összetett függvény képzéssel és alpműveletekkel áll elő és:

1. csak egész  $x$ -ekre értelmezett,
2. csak pozitív egész  $x$ -ekre értelmezett,
3. csak egy adott  $a \in \mathbb{R}$  pontban értelmezett,
4. sehol sem értelmezett,
5. egy előre adott  $a \in \mathbb{R}$  pontnak sem olyan  $S_1$  környezete nincs, hogy  $S_1 \setminus \{a\} \subset D_f$ , sem olyan  $S_2$  környezete, hogy  $S_2 \cap D_f = \emptyset$ .