

**BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR**

MATEMATIKAI FELADATTÁR

III.

**Valós többváltozós függvények
differenciál és integrálszámítása**

Szerkesztette:
Antos Péter



Műegyetemi Kiadó, 2000.

Szerkesztette:

Antos Péter

Szerzők:

**Stubnya Gusztávné dr.
dr. Tóth Judit**

(Negyedik utánnomás)

Azonosító: **051401**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Karának

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó

Felelős vezető: Veress János

Terjedelem: 7,7 (A/5) ív

Nyomtatta és kötötte:

Műegyetemi Nyomda

Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 0082/00

Tartalomjegyzék

I. VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA	feladat	megoldás
1. Ponthalmazok az m -dimenziós térben ...	5	41
1.1 Távolság	5	41
1.2 Pontsorozatok	5	42
1.3 Ponthalmazok	6	42
2. A többváltozós függvények általános tulajdonságai	7	44
2.1 Értelmezési tartomány	7	44
2.2 Határérték	8	46
2.3 Folytonosság	11	48
3. A többváltozós függvények differenciálhatósága	13	51
3.1 Parciális deriváltak	13	51
3.2 Totális differenciálhatóság	14	52
3.3 Összetett függvények differenciálhatósága	15	54
3.4 Magasabbrendű parciális deriváltak	15	55
3.5 Iránymenti derivált	16	57
4. A többváltozós differenciálszámítás alkalmazása	18	58
4.1 Differenciálok, Taylor polinom	18	58
4.2 Hibaszámítás	19	60
4.3 Érintősík	19	60
4.4 Szélsőérték	20	62
4.5 Implicit függvények	23	70
II. JORDAN MŰVEK	25	71

III. VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK		
INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA	feladat	megoldás
1. Integrálfogalom, integrálhatóság	28	74
2. Kettős integrál kiszámítása, transzformációk alkalmazása, az integrálás sorrendjének felcserélése . . .	29	78
3. Az integrálszámítás középértéktételének alkalmazása kettős integrálok becslésére .	33	80
4. Hármass integrálok kiszámítása, transzformációk alkalmazása, az integrál sorrendjének cseréje, becslések .	34	81
5. Kettős és hármass integrál alkalmazásai .	35	82
6. Kettős és hármass Impropius integrálok .	37	84
7. Paraméteres integrálok	38	86
 MEGOLDÁSOK	 41	

I. VALÓS TÖBBVÁLTÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

1. Ponthalmazok az m -dimenziós térben

1.1 Távolság

1. Vizsgáljuk meg, hogy távolságot definiál-e a $d(x, y)$ függvény az adott térben.

① $d(x, y) = \sqrt{|x-y|}$ \mathbb{R} -ben.

② $d(x, y) = |x-2y|$ \mathbb{R} -ben.

③ $d(x, y) = |x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2|$ \mathbb{R}^2 -ben.

④ $d(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ \mathbb{R}^2 -ben.

⑤ $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i|$ \mathbb{R}^m -ben.

1.2 Pontsorozatok

2. Határozzuk meg az $a_n \in \mathbb{R}^m$ (m rögzített) pontsorozat limesz-pontját, ha létezik!

① $a_n = \left(\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+m} \right)$.

② $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{n^2}{n+2}, \dots, \frac{n^{m-1}}{n+m-1} \right)$.

3. $a_n = \left(\sqrt[n]{n}, \sqrt[n]{n+1}, \dots, \sqrt[n]{n+m-1} \right)$.

4. $a_n = \left(n(\sqrt[n]{2}-1), n(\sqrt[n+1]{2}-1), \dots, n(\sqrt[n+m-1]{2}-1) \right)$.

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

1.3 Ponthalmazok

3. Vizsgáljuk meg az adott térben az alábbi halmazokat nyíltság, zártság, korlátosság és ívszerűen összefüggőség szempontjából.

1. $A = \left\{ x: x = \frac{1+n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ \mathbb{R} -ben.

2. $A = \left\{ x: x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N} \right\}$ \mathbb{R} -ben.

3. $A = \left\{ x: a < x < b \right\}$ \mathbb{R} -ben.

4. $A = \left\{ (x, y): a < x < b, y = 0 \right\}$ \mathbb{R}^2 -ben.

5. $A = \left\{ (x, y): x \geq 0, y \in \mathbb{R} \right\}$ \mathbb{R}^2 -ben.

6. $A = \left\{ (x, y): |x| = |y| \right\}$ \mathbb{R}^2 -ben.

7. $A = \left\{ (x, y): x, y \text{ egész} \right\}$ \mathbb{R}^2 -ben.

8. $A = \left\{ (x, y): x, y \in \mathbb{Q} \right\}$ \mathbb{R}^2 -ben.

9. $A = \left\{ (x, y): x^2 - y^2 < 1 \right\}$ \mathbb{R}^2 -ben.

10. $A = \left\{ (x, y): x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N} \right\}$ \mathbb{R}^2 -ben.

11. $A = \left\{ (x, y): x \neq 0, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ \mathbb{R}^2 -ben.

12. $A = \left\{ P_1, P_2, \dots \right\}$ és $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = P_0$ \mathbb{R}^n -ben.

4. Legyen $E \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz. Igaz-e, hogy E minden pontja torlódási pontja E -nek? Válaszoljunk ugyancsak a kérdésre \mathbb{R}^2 -beli zárt halmazok esetén.

5. Legyen $E \subset \mathbb{R}^n$. Jelölje \bar{E} az E komplementumát és $[E]$ az E lezárását. Bizonyítsuk be, hogy

1. $\text{int}E$ nyílt,

2. E nyílt $\Leftrightarrow E = \text{int}E$,

3. $G \subset E$ és G nyílt $\Rightarrow G \subset \text{int}E$,

4. $\overline{\text{int}E} = [E]$.

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

Igazak-e az alábbi állítások?

5. $E = \text{int}E$

6. $E = [\text{int}E]$

6. Jelöljük E' -vel az $E \subset \mathbb{R}^n$ halmaz torlódási pontjainak halmazát. Bizonyítsuk be, hogy

1. E' zárt,

2. $[E] = E \cup E'$;

3. E és $[E]$ torlódási pontjai megegyeznek. Vizsgáljuk meg, megegyeznek-e mindig E és E' torlódási pontjai?

2. A többváltozós függvények általános tulajdonságai

2.1 Értelmezési tartomány

7. Adjuk meg az f függvény értelmezési tartományát! Az értelmezési tartomány zárt-e, nyílt-e, korlátos-e, ívszerűen összefüggő-e?

1. $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$

2. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

3. $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$

4. $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$

5. $f(x, y) = \ln(x+y-1)$

6. $f(x_1, x_2) = \ln \sqrt{x_1 + x_2}$

7. $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\ln(x_1^2 + x_2^2)} + \frac{x_1^3 \cdot \sqrt{4-x_1^2-x_2^2}}{x_1^2 + x_2^2}$

8. $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4}$

9. $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 x_2 x_3)$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

$$10. f(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{1 - x_1^2 - \dots - x_m^2}$$

$$11. f(x_1, \dots, x_m) = e^{-\frac{1}{x_1^2 + \dots + x_m^2}}$$

8. Határozzuk meg az alábbi függvények szintvonalait! Vizsgáljuk meg, hogy a szintvonal pontjaiból álló \mathbb{R}^2 -beli halmaz zárt vagy nyílt!

1. $f(x, y) = x \cdot y$

2. $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$

3. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1$

4. $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 8x_2^2$

9. Határozzuk meg az alábbi függvények szintfelületeit!

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2}$

2. $f(x, y, z) = x + y^2 + z^2$

3. $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2)$

2.2 Határérték

10. Létezik-e határértéke az

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

függvénynek a $(0, 0)$ pontban az $A = \{(x, y) : y = x\}$ és a $B = \{(x, y) : y = x^2\}$ \mathbb{R}^2 -beli halmazokra vonatkozóan?

11. Határozzuk meg az alábbi határértékeket, ha léteznek!

1. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x - 2y}{3x + y}$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

$$2.) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$$

$$3.) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$4. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x y}{x^2 + y^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x y}{x^2 + y^2}, \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x y}{x^2 + y^2}$$

$$5. \lim_{(x, y) \rightarrow (1, -2)} \frac{x}{x + y}$$

$$6.) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}, \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

$$7.) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

$$8.) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$9.) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2}$$

$$10. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$11. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

$$12. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y},$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}.$$

$$(13.) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

$$14. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$$

$$(15.) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (y \cdot \sin \frac{1}{x} + x \cdot \sin \frac{1}{y})$$

$$16. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x \cdot y}$$

$$(17.) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin(x \cdot \ln y^2)$$

$$(18.) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1-0)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}$$

$$19. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 5} - 1}{x^2 + y^2 - 4y + 4}$$

$$20. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{xy}{x^2 - y^2}}$$

$$21. \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

$$\textcircled{22.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{1}{1 + x^2 - y}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x^2 - y}$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x^2 - y}$$

$$\textcircled{23.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$$

2.3 Folytonosság

12. Hol folytonosak az alábbi függvények?

$$1. \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } y \geq x \\ 0 & \text{ha } y < x \end{cases}$$

$$2. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\textcircled{3.} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 16y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$4. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{xy} & \text{ha } xy \neq 0 \\ 1 & \text{ha } xy = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{5.} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sin x \cdot \sin y} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

$$\textcircled{6.} \quad f(x, y) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{y} & \text{ha } y \neq 0 \\ 0 & \text{ha } y = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{7.} \quad f(x, y) = \begin{cases} (2x + 3y) \cdot \ln(x^2 + y^2) & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$8. \quad f(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{e^{x^2 + y^2}} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\textcircled{9.} \quad f(x, y) = \frac{x + y}{x^3 + y^3}$$

$$10. \quad f(x, y) = \sin \frac{1}{xy}$$

$$\textcircled{11.} \quad f(x, y, z) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}$$

$$12. \quad f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

13. Folytonos-e az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{xy} & \text{ha } xy \neq 0 \\ 1 & \text{ha } xy = 0 \end{cases}$$

függvény a $(0, 0)$ pontban a $A = \{(x, y) : y = 2x\}$ és a $B = \{(x, y) : y = -x\}$ \mathbb{R}^2 -beli halmazokra vonatkozóan?

$\textcircled{14.}$ Korlátos-e az

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

függvény az értelmezési tartományán?

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

15. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények egyenletesen folytonosak-e az $A \subset D_f$ ponthalmazon.

$$\textcircled{1.} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$A = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

$$\textcircled{2.} \quad f(x, y) = \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad A = \left\{ (x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1 \right\}.$$

$$\textcircled{3.} \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad A = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

$$\textcircled{4.} \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad A = \left\{ (x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \right\}.$$

3. A többváltozós függvények differenciálhatósága

3.1 Parciális deriváltak

16. Határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltfüggvényeinek értelmezési tartományát és a parciális deriváltfüggvényeket!

$$1. \quad f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$$

$$2. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy^2}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$3. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{x^2 + y^2}{2}}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$4. \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2$$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁL SZÁMÍTÁSA

5. $f(x, y) = x \cdot y + \frac{x}{y}$
6. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
7. $f(x, y) = x \cdot \sin(x + y)$
8. $f(x, y) = x^y$
9. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
10. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
11. $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$
12. $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$

3.2 Totális differenciálhatóság

17. Mely pontokban differenciálható az f függvény?

$$\textcircled{1.} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\textcircled{2.} \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{3.} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$4. \quad f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} x^2 y^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

$$(6.) \quad f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{ch} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(7.) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x^2 + y^2}} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3.3 Összetett függvények differenciálhatósága

(18.) Legyen $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $x = t$, $y = t + t^2$. Differenciálható-e az $f(x(t), y(t))$ függvény a $t = 0$ pontban?

(19.) Legyen $f(x, y, z) = xy^2\sqrt{z}$, $x = \cos \frac{\pi}{2}t$, $y = 2\sin \frac{\pi}{2}t$, $z = t^2$. Differenciálható-e az $f(x(t), y(t), z(t))$ függvény a $t = 0$ és a $t = 1$ pontokban?

20. Határozzuk meg az alábbi deriváltakat!

1. $f(x, y) = \ln(xy)$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = \sqrt{t}$. $\frac{df}{dt} = ?$

2. $f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{x} - 2y^2 x^2$, $x = \ln(1+t)$, $y = \operatorname{ch} 2t$. $\frac{df}{dt} = ?$

3. $f(x, y) = \operatorname{sh} \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = 2t^3 - 1$, $y = e^t$. $\frac{df}{dt} = ?$

21. Határozzuk meg az alábbi parciális deriváltakat.

1. $f(x, y) = 3xy$, $x = \sin(u+v)$, $y = \cos(u+v)$. $f_u = ?$ $f_v = ?$

2. $f(x, y, z) = xyz$, $x = \ln(u+v)$, $y = u^2 + 3v$, $z = 2uv$. $f_u = ?$
 $f_v = ?$

3. $f(x, y) = \arcsin(xy)$, $x = w \cdot e^{uv}$, $y = 2u - 3wv$, $f_u = ?$ $f_v = ?$
 $f_w = ?$

3.4 Magasabbrendű parciális deriváltak

$$(22.) \quad \text{Legyen } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + xy^3}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$!

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

23. Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 y - xy^5}{x^4 + y^4} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$!

24. Határozzuk meg azt a pontthalmazt, amelynek minden pontjában igaz az adott f függvényre vonatkozó egyenlőség!

1. $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$, $f_{xx} + f_{yy} = 4(x^2 + y^2 + 1) \cdot f$

2. $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2}$, $f_{xy} = f_{yx}$

3. $f(x, y) = \operatorname{arth} \frac{y}{x}$, $f_{yy} - f_{xy} = \frac{1}{(x-y)^2}$

4. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x \cdot f_x + y \cdot f_y = -f$

5. $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 - y^2}$, $f_{xx} - f_{yy} = 0$

6. $f(x, y) = x^2 \ln \sqrt{xy}$, $f_{xy} - f_{yx} = 0$

7. $f(u)$ differenciálható függvény és $u = x^2 + y^2$,
 $y \cdot f_x - x \cdot f_y = 0$

3.5 Iránymenti derivált

25. Határozzuk meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját a megadott pontban és irányban!

1. $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, $P_0(-2, 1)$, \underline{v} az \underline{i} vektorral 30° -os szö-
 get zár be az XY síkban.

2. $f(x, y) = x^2 y + \operatorname{sh}(2x + y)$, $P_0(0, 0)$, $\underline{v} = \underline{i} + 2\underline{j}$.

3. $f(x, y) = x + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $P_0(2, 1)$, $\underline{v} = 4\underline{i} + 3\underline{j}$.

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

4. $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $P_0(2, -1)$, \underline{v} az \underline{i} vektorral 120° -os szöget zár be az XY síkban.

5. $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$, $P_0(1, 0)$, $\underline{v} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$.

6. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$, $P_0(1, -1)$, \underline{v} a maximális iránymenti derivált-hoz tartozó irány.

7. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $P_0(1, 1)$, \underline{v} a maximális iránymenti deriválthoz tartozó irány.

8. $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $P_0(0, 0)$, $\underline{v} = \underline{i}$.

9. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, $P_0(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $\underline{v} = \underline{i} - \underline{j}$.

10. $f(x, y, z) = e^{-x^2 - y^2 - z}$, $P_0(1, 0, 1)$, $\underline{v} = 3\underline{i} + 2\underline{j} - 5\underline{k}$.

26. Határozzuk meg azon pontok összességét, amelyekben minden irányban az

$$f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

függvény iránymenti deriváltjának abszolút értéke kisebb vagy egyenlő, mint $\frac{1}{2}$.

27. Határozzuk meg azon pontok összességét, amelyekben minden irányban az

$$f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}$$

függvény iránymenti deriváltjának abszolút értéke kisebb, mint $\frac{1}{3}$.

4. A többváltozós differenciálszámítás alkalmazása

4.1 Differenciálok, Taylor-polinom

28. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi kifejezések egy többváltozós függvény teljes differenciáljai-e?

1. $(6xy - 2y^2) dx + (3x^2 - 4xy) dy$

2. $(1+x^2) ydy + (y^2-3) xdx$

3. $y \sin 2x \cdot dx + \sin^2 x \cdot dy$

4. $\frac{y-x}{y^2} dy + \frac{1}{y} dx$

29. Határozzuk meg az alábbi kifejezésekben α értékét úgy, hogy teljes differenciálokat kapjunk!

1. $xydx + \alpha \cdot x^2 dy$

2. $e^{-x} \cdot ydx + \alpha \cdot e^{-x} dy$

3. $\frac{1}{1+(x-y)^2} dx + \frac{\alpha}{1+(x-y)^2} dy$

30. Határozzuk meg az alábbi magasabbrendű differenciálokat!

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, df, d^2f.$

2. $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, d^2f.$

3. $f(x, y) = x \ln(xy), d^2f, d^3f.$

4. $f(x, y, z) = xyz, d^2f.$

31. Irjuk fel az f függvény $P_0(x_0, y_0)$ ponthoz tartozó $T_n(x, y)$ Taylor-polinomját!

1. $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5, P_0(1, -2), T_2(x, y).$

2. $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, P_0(0, 0), T_2(x, y).$

3. $f(x, y) = \frac{x}{y}, P_0(1, 1), T_3(x, y)$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

4.2 Hibaszámítás

32. Hibaszámítási feladatok.

1. Egy bikonvex lencse fókusztávolságát az $\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$

képlettel számoljuk. Legyen $r_1 = 8 \text{ cm} \pm 0,02 \text{ cm}$,

$r_2 = 10 \text{ cm} \pm 0,02 \text{ cm}$, $n = 1,5 \pm 0,03$.

Mekkora legfeljebb a kiszámított fókusztávolság hibája?

2. Egy egyenáramú körben $U = 110 \text{ V}$ feszültség hatására $I = 15 \text{ A}$ erősségű áram folyik. A feszültségmérő leolvasásánál $\pm \frac{1}{20} \text{ V}$, az ampermérőnél pedig $\pm \frac{1}{10} \text{ A}$ az elkövethető hiba. Mekkora az Ohm törvény alapján számított ellenállás abszolút és relatív hibakorlátja?

3. Megmértük egy háromszög két oldalát és az általuk bezárt szöget. Mérési eredményeink 27 m , 34 m , és 73° . A mérési hibák $\pm 0,04 \text{ m}$ -nek, illetve $\pm 0,07^\circ$ -nak vehetők. Mekkora a harmadik oldal számított értékének maximális hibája?

4. Az ingaóra járását szabályozó ingát fizikai ingának kell fel-fognunk, melynek lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{Mgs}}$$

Tegyük fel, hogy K 2%-kal, M 5%-kal kisebb a kelleténél. Milyen pontatlanságot okoz ez az inga járásában?

5. Egy elektromos rezgőkör rezonáns körfrekvenciáját az $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ összefüggéssel számítjuk. Mekkora a rezgőkör számított frekvenciájának százalékos hibakorlátja, ha $\left|\frac{\Delta L}{L}\right| \leq 0,03$ és $\left|\frac{\Delta C}{C}\right| \leq 0,02$?

4.3 Érintősík

33. Írjuk fel az alábbi felületek érintősíkjának az egyenletét a megadott helyhez tartozó pontban!

1. $z = x^2 + 2y^2$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$.

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

2. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1.$

3. $z = x^2 y^2 - 3x + 2y, \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 1.$

4. $z = \arcsin \frac{y}{x}, \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 1.$

34. Határozzuk meg az $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$ felületnek a $2x + 3y + 2z = 0$ síkkal párhuzamos érintősíkjaikat!

35. Határozzuk meg az $xyz = 1$ felületnek az $x + y + z = 3$ síkkal párhuzamos érintősíkját!

36. Határozzuk meg az $f(x, y, z) = \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}$ függvény $P_0(0, 0, 0)$ ponton átmenő szintfelületének P_0 pontbeli érintősíkját!

37. Határozzuk meg az $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$ függvény $P_0(2, 0, 1)$ ponton átmenő szintfelületének az $x + 2y + 3z = 0$ síkkal párhuzamos érintősíkjaikat!

38. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ felület $P_0(1, 2, 2)$ pontbeli érintősíkjának a koordináta-rendszer tengelyeivel bezárt szögeit!

39. Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2 - 2x$ felület azon pontjait, amelyek ben az érintősík normálisa a koordináta-rendszer tengelyeivel azonos szöget zár be!

40. Igazoljuk, hogy az $xyz = a^3$ ($a > 0$) felület érintősíkjai a koordinátasíkokkal állandó térfogatu tetraédereket alkotnak!

41. Igazoljuk, hogy a $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ felület érintősíkjai a koordinátatengelyekből állandó összegű darabokat vágnak le!

42. Igazoljuk, hogy a $z = x \cdot \cos \frac{y}{x}$ felület érintősíkjai a $P_0(0, 0, 0)$ ponton haladnak keresztül!

4.4 Szélsőérték

43. Határozzuk meg az f függvény lokális szélsőértékeit.

1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

2. $f(x, y) = x^3 y^2 (4 - x - y)$

3. $f(x, y) = x^4 - 4x + 2y^2 - 2y$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

4. $f(x, y) = e^{3x^2 + y^2}$
5. $f(x, y) = e^{-x^2 - 3y^2} + 3xy$
6. $f(x, y) = (x - 2y) \cdot e^{-x^2 - y^2}$
7. $f(x, y) = \operatorname{ch}(x^2 + y^2)$
8. $f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$
9. $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - y \cdot e^y$
10. $f(x, y) = (y - x^2) \cdot (y - 3x^2)$

44. Határozzuk meg az f függvény szélsőértékeit az adott halmazon.

1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$,
 $T = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4 \right\}$
2. $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 5x + 2y - 1$,
 $T = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \right\}$
3. $f(x, y) = x^3 + y^3 + x + y$,
 $T = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x \right\}$
4. $f(x, y) = \operatorname{ch}(x^2 + y^2)$
 $T = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x \right\}$
5. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2 + y^2)}$,
 $T = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$
6. $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$,
 $T = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi - x \right\}$
7. $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2) \cdot x^2$,
 $T = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

$$8. \quad f(x, y) = (x - y + 1)^2,$$

$$T = \left\{ (x, y): -1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq x + 1 \right\}$$

$$9. \quad f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$T = \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x \right\}$$

$$10. \quad f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$T = \left\{ (x, y): x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

$$11. \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$$T = \left\{ (x, y): x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

$$12. \quad f(x, y) = x^2 - xy + y^2,$$

$$T = \left\{ (x, y): |x| + |y| \leq 1 \right\}$$

$$13. \quad f(x, y, z) = xyz,$$

$$T = \left\{ (x, y, z): x + y + z = 3, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \right\}$$

45. Határozzuk meg az f függvény szélsőértékeit a megadott feltételek mellett!

$$1. \quad f(x, y) = x^2 + xy + 1, \quad x + 2y = 3.$$

$$2. \quad f(x, y) = x^3 + 3xy + 4y^2, \quad 2x + y = 1$$

$$3. \quad f(x, y) = x^m + y^m, \quad m = 2, 3, \dots, \quad x + y = 2c, \quad c > 0$$

állandó.

$$4. \quad f(x, y) = x + y, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}.$$

$$5. \quad f(x, y) = xy, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

$$6. \quad f(x, y, z) = xy + xz + yz,$$

$$x + y + z = 1, \quad x + 2y - z = 2.$$

$$7. \quad f(x, y, z) = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

46. Adott körbe írható háromszögek kerülete mikor a legnagyobb?

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

47. Adott körbe írható háromszögek területe mikor a legnagyobb?
48. Adott körbe írható háromszögek közül határozzuk meg azt, amely oldalainak a négyzetösszege a legnagyobb.
49. Egy adott ponton áthaladó síkok közül melyik van legmesszebb az origótól?
50. A $z = 2x^2 + y^2$ elliptikus paraboloidnak a $z = 5$ sík által kimetszett szeletébe írjuk be a legnagyobb térfogatú, koordináta-tengelyekkel párhuzamos élű, derékszögű hasábot.
51. Határozzuk meg a $z = 4x^2 + 9y^2$ elliptikus paraboloid azon pontjait, amelyeknek a $P_0(0, 0, 2)$ ponttól vett távolsága lokális szélsőértéket mutat!
52. A $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 0)$, $P_3(0, 1)$ csúcspontokkal adott háromszöglap mely pontjaiban legnagyobb, illetve legkisebb a csúcsoktól mért távolságok négyzetösszege?
53. Az R^3 tér n különböző pontjában legyen egy-egy tömegpont. Határozzuk meg a tér azon pontját, amelyre a tömegpont-rendszer másodrendű nyomatéka minimális!

4.5 Implicit függvények

54. Legyen $F(u, v)$ differenciálható függvény, a és b állandó. Igazoljuk, hogy az $F(x - az, y - bz) = 0$ egyenletet kielégítő $z(x, y)$ függvényre fennáll az $a \cdot z_x + b \cdot z_y = 1$ összefüggés!
55. Legyen $F(x, y) = y^2 \cdot \frac{x + y}{x - y}$, és $F(\frac{10}{3}, 2) = 0$. Igazoljuk, hogy az $F(x, y) = 0$ egyenlet az $x_0 = \frac{10}{3}$ környezetében differenciálható $y(x)$ függvényt határoz meg! Adjuk meg $y'(x_0)$ értékét!
56. Legyen $F(x, y, z) = \arctg \frac{z}{y} + e^{xz} - z - \frac{\pi}{4}$, és $F(0, 1, 1) = 0$. Igazoljuk, hogy az $F(x, y, z) = 0$ az $(x, y) = (0, 1)$ pont környezetében differenciálható $z(x, y)$ függvényt határoz meg! Adjuk meg $z_x(0, 1)$, $z_y(0, 1)$ értékét!
57. Legyen $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}$, és $F(e, 1, e) = 0$. Igazoljuk, hogy az $F(x, y, z) = 0$ az $(x, y) = (e, 1)$ pont környezetében differenciálható $z(x, y)$ függvényt határoz meg! Adjuk meg $z_x(e, 1)$ és $z_y(e, 1)$ értékét!

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

58. Határozzuk meg az $f(x, y)$ függvény parciális deriváltjait az $(1, 0)$ pontban, ha $f = \frac{x+z}{y+z}$ és $z \cdot e^z = x \cdot e^x + y \cdot e^y$!

! 59. Határozzuk meg az

$$x \cdot u - y \cdot v = 0$$

$$y \cdot u - x \cdot v = 1$$

egyenletek által definiált $u(x, y)$ és $v(x, y)$ függvények parciális deriváltjait!

! 60. Mely pontokban határozza meg a $z(x, y)$ függvényt az

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3 \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

egyenletrendszer? Határozzuk meg z_x -t és z_y -t!

II. JORDAN MÉRTÉK

1. Állapítsuk meg, hogy az alábbi halmazoknak létezik-e külső mértéke, belső mértéke, illetve mértéke! Amelyik létezik, azt határozzuk meg!

1. Az $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ halmaz \mathbb{R} -ben.
2. $A \cup B = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ -1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ halmaz \mathbb{R} -ben.
3. Az egy torlódási pontu korlátos $C = \left\{ a_n : n \in \mathbb{N} \right\}$ valós számhalmaz \mathbb{R} -ben.
4. A természetes számok \mathbb{N} halmaza \mathbb{R} -ben.
5. A $[0, 1]$ intervallum racionális pontjainak Q_1 halmaza \mathbb{R} -ben.
6. A $[0, 1]$ intervallum irracionális pontjainak I_1 halmaza \mathbb{R} -ben.
7. A véges sok torlódási pontu korlátos $D = \left\{ b_n : n \in \mathbb{N} \right\}$ valós számhalmaz \mathbb{R} -ben.
8. Az $A_1 = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ halmaz \mathbb{R}^2 -ben.
9. Az egy torlódási pontu, korlátos $A_2 = \left\{ (a_n, b_n) : n \in \mathbb{N} \right\}$ halmaz \mathbb{R}^2 -ben.
10. $A \cup B = \left\{ (x, 1/m) : x \in [0, 1], m \in \mathbb{N} \right\}$ halmaz \mathbb{R}^2 -ben.
11. $A \cup C = \left\{ (x, y) : x, y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \right\}$ halmaz \mathbb{R}^2 -ben.
12. $A \cup D = \left\{ (x, y) : x, y \in [0, 1], x, y \text{ irracionális} \right\}$ halmaz \mathbb{R}^2 -ben.
13. Az $E = \left\{ (n, 0) : n \in \mathbb{N} \right\}$ halmaz \mathbb{R}^2 -ben.
14. Az $F = \left\{ (x, y) : x \in [0, 1], x \neq 1/n, y \in [0, 1] \right\}$ halmaz \mathbb{R}^2 -ben.
15. $A \cup G = \left\{ (x, y) : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, y \in [0, 1] \right\}$ halmaz \mathbb{R}^2 -ben.

JORDAN MÉRTÉK

16. A $H = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) : n, m \in \mathbb{N} \right\}$ halmaz \mathbb{R}^2 -ben.
17. Az $I = \left\{ (x_i, y_i) : i \in \mathbb{N} \right\}$ véges sok torlódási pontu korlátos halmaz \mathbb{R}^2 -ben.
18. A $J = \{ (x, x^2) : x \in [0, 1] \}$ halmaz \mathbb{R}^2 -ben.
19. A $K = \{ (x, 0) : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \}$ halmaz \mathbb{R}^2 -ben.
20. Az $L = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \}$ halmaz \mathbb{R}^3 -ban.

2. Igazak-e az alábbi állítások? Bizonyítsuk be azt amelyik igaz és adjunk ellenpéldát arra, amelyik hamis!

1. Ha A_i ($i = 1, \dots, n$) mérhető halmazok, akkor $\bigcup_{i=1}^n A_i$ és $\bigcap_{i=1}^n A_i$ is mérhető halmaz.

2. Ha A_i ($i = 1, 2, \dots$) mérhető halmazok, akkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ is mérhető.

3. Ha A_i ($i = 1, 2, \dots$) mérhető halmazok, akkor $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ is mérhető.

4. Ha $t(A_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), akkor $\bigcup_{i=1}^n A_i$ és $\bigcap_{i=1}^n A_i$ is mérhető és $t\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = t\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = 0$.

5. Ha $t(A_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots$), akkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ is mérhető és $t\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$.

6. Ha $t(A_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots$), akkor $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ is mérhető és $t\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$.

3. Additív függvény-e a külső mérték?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B mérhető és $A \subset B$, akkor $t(B - A) = t(B) - t(A)$.

5. Legyen $f(x, y)$ folytonos a mérhető és zárt $A \subset D_f$ halmazon. Határozzuk meg az $\{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in A\}$ halmaz \mathbb{R}^3 -beli mértékét!

6. Mutassuk meg, hogy \mathbb{R}^m -beli hipersík minden korlátos része nullmértékű \mathbb{R}^m -ben! (\mathbb{R}^m -ben hipersíknak nevezzük az

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_m) : \sum_{i=1}^m c_i x_i = c, c, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m; \text{ és van olyan } j, \text{ amelyre } c_j \neq 0 \right\} \text{ halmazokat.}$$

III. VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

1. Integrálfogalom, integrálhatóság

1. Számítsuk ki az $\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy$

integrál értékét, mint közelítő összegek sorozatának határértékét, a következő módon: az integrációs tartományt négyzetekre osszuk fel és reprezentáns pontoknak a jobb felső sarokba eső pontokat válasszuk.

2. Osszuk fel az $1 \leq x \leq 2$; $1 \leq y \leq 3$ tartományt az $x = 1 + i/n$; $y = 1 + 2j/n$ ($i, j = 1, 2, \dots, n-1$) egyenesekkel téglalapokra. Számítsuk ki az

$$\iint_T (x^2 + y^2) dx dy$$

integrálnak ehhez a felosztáshoz tartozó alsó és felső összegét, valamint az integrál értékét!

3. Integrálható-e az $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)$ függvény az $x^2 + y^2 \leq 4$ tartományon? Ha igen, számítsuk ki az értékét:

4. Vizsgáljuk meg, léteznek-e az alábbi függvény kétszeres integráljai és kettősintegrálja az értelmezési tartományon:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq y \leq 1/2 \text{ és } x \text{ racionális} \\ 0 & \text{ha } 1/2 \leq y \leq 1 \text{ és } x \text{ racionális} \\ 0 & \text{ha } 0 \leq y \leq 1/2 \text{ és } x \text{ irracionális} \\ 1 & \text{ha } 1/2 \leq y \leq 1 \text{ és } x \text{ irracionális!} \end{cases}$$

5. Legyen $T = \{(x, y) : |x| \leq 4, |y| \leq 4\}$

$$f(x, y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } |x| \leq 4, |y| \leq 4 \text{ és } |y| \text{ nem egész szám} \\ -1, & \text{ha } |x| \leq 4, |y| \leq 4 \text{ és } |y| \text{ egész szám.} \end{cases}$$

Létezik-e $\iint_T f(x, y) dx dy$?

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

6. Legyen $f(x, y) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{n}, & \text{ha } x = \frac{1}{n}, \text{ vagy } y = \frac{1}{n}, \\ 2 & \text{különben} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

a) integrálható-e f a $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ négyzeten?

b) integrálható-e f az $A = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \neq \frac{1}{n}, y \neq \frac{1}{n} \right\}$ $0 \leq y \leq 1,$ halmazon?

7. Legyen $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$. Fejezzük ki az

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy$$

integrált az $F(x, y)$ függvény segítségével!

2. Kettősintegrál kiszámítása, transzformációk alkalmazása az integrálás sorrendjének felcserélése

8. Számítsuk ki az alábbi kettősintegrálokat!

a) $\int_T (x + y) \, dx \, dy, \quad T \text{ az } A(2, 0), B(0, 0) \text{ és } C(0, 1) \text{ csúcspontu háromszög.}$

b) $\int_T e^{x+y} \, dx \, dy, \quad T = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 8 - 2y, 0 \leq y \leq 2 \right\}$

c) $\int_T x \, y \, dx \, dy, \quad T = \left\{ (x, y) : \sqrt{\frac{y}{2}} \leq x \leq \sqrt{y}, 2 \leq y \leq 4 \right\}$

d) $\int_T \sin(x+y) \, dx \, dy, \quad T = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 1 \right\}$

e) $\int_T (x + y) \, dx \, dy, \quad T = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$

f) $\int_T x \, dx \, dy, \quad T = \left\{ (x, y) : (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \right\}$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

- g) $\iint_T xy \, dx dy$, T az $(x-1)^2 + y^2 = 1$ és $(x-2)^2 + y^2 = 4$ körök által határolt síkrész.
- h) $\iint_T y \sin x \, dx dy$, T a $2x=y$, $x=4$, $y=0$ és $y=2$ egyenesek által határolt síkrész.
- i) $\iint_T (y^2 - 2x) \, dx dy$, T az $y^2 = x+3$ és $x=0$ görbék által határolt tartomány.
- j) $\iint_T (3x - y^2) \, dx dy$, T az A(0, 0), B(3, 0), C(2, 1) és D(1, 1) csúcspontu trapéz.

9. Számítsuk ki az alábbi tartományok területét!

- a) $T = y = x/3$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt tartomány.
- b) $T = \{(x, y) : x \leq y \leq 2x; 0 \leq x \leq 1\} \cap \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- c) $T = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \geq 1\} \cap \{(x, y) : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$.

10. Határozzuk meg az $\int_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4} \int_{x \geq 0} \frac{x - y}{x^2 + y^2} \, dx dy$

integrál értékét!

11. Milyen T tartományok esetén kapunk a polárkoordinátás helyettesítés után, állandó integrációs határokat?

Határozzuk meg a következő kettős integrálok értékét!

12. $\iint_T y^2 \, dx dy$, $T = x = a(t - \sin t)$ $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ egyenletű ciklois első ívével és az X tengellyel határolt tartomány.

13. $\int_{|x| \leq 1} \int_{0 \leq y \leq 2} \sqrt{|y - x^2|} \, dx dy$

14. $\int \int |\cos(x+y)| \, dx dy$
 $0 \leq x \leq \pi$
 $0 \leq y \leq \pi$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

15.
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy$$

16. Bizonyítsuk be, hogy

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0,$$

ha az m és n természetes számok közül legalább az egyik páratlan!

17. Milyen arányban osztja ketté az $y^2 = 2x$ parabola az $x^2 + y^2 = 8$ kör területét?

18. Számítsuk ki az alábbi 4-4 görbével határolt tartományok területét!

a) $y^2 = x, y^2 = x/2, y = x/2, y = x/3$

b) $xy = 1, xy = 4, y = x, y = 2x \quad (x > 0, y > 0)$

c) $xy = 1, xy = 4, y = x^2, y = x^2/2$

d) $x^2 = ay, x^2 = by, x^3 = cy^2, x^3 = dy^2 \quad (0 < a < b, 0 < c < d)$

e) $y^2 = 2x, y^2 = 4x, x^2 = y, x^2 = 2y$

19. Határozzuk meg az $\iint (x^2 + y^2) dx dy$ integrál értékét, ha

$$T = x^2 - y^2 = 1,$$

$$x^2 - y^2 = 9,$$

$$y = 1/2x,$$

$$y = 2/x \quad \text{görbék által határolt első síknegyedbeli tartomány.}$$

20. Legyen T origóközéppontu, egységnyi és R sugaru körökkel határolt körgyűrű. Határozzuk meg R értékét úgy, hogy

$$\iint_T \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = 3 \quad \text{teljesüljön!}$$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

21. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét az alábbi feladatokban!

$$\textcircled{a} \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) \, dy \, dx$$

$$\text{b) } \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^2 f(x, y) \, dy \, dx + \int_0^2 \int_0^{4-x} f(x, y) \, dy \, dx$$

$$\text{c) } \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx + \int_{\sqrt{2}}^4 \int_0^2 f(x, y) \, dy \, dx.$$

22. Számítsuk ki a következő integrálok értékét!

$$\boxed{\text{a)}} \int_0^1 \int_y^1 y e^{-x^2} \, dx \, dy.$$

$$\text{b) } \int_0^1 \int_{3\sqrt{y^2}}^1 y \cos x^2 \, dx \, dy$$

$$\text{c) } \int_0^1 \int_x^1 \frac{x \sin y}{y} \, dy \, dx$$

$$\text{d) } \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3} \, dx \, dy$$

23. Határozzuk meg a következő kettős integrál értékét!

$$\int \int_{|x| + |y| \leq 1} dx \, dy$$

24. Számítsuk ki az alábbi kettős integrál értékét!

$$\iint_T x^2 y \, dx \, dy, \quad T = \left\{ (x, y) : -3 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \right\}$$

**3. Az integrálszámítás középérték tételének alkalmazása
kettős integrálok becslésére**

25. Adjunk alsó, illetve felső becslést az alábbi integrálokra!

$$\text{a)} \iint_T [(x^2 + y^2 - 1)^2 - 6x^2] dx dy, \quad T = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\text{b)} \iint_T (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy, \quad T = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\text{c)} \iint_T (x y e^{-x+y}) dx dy, \quad T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 0\}$$

26. Számítsuk ki az $f(x, y) = \sin^2 x \cdot \sin^2 y$ függvény

$T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi\}$ tartományra vonatkozó integrál középértékét!

Mutassuk meg, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőségek!

$$\text{27.} \quad -\frac{\ln 4}{2} \leq \iint_T \ln \frac{x^2 + y^2}{2} dx dy \leq 0, \quad \text{ahol } T = \{(x, y) : x=1 \wedge y=1 \wedge y=1-x\}$$

$$\text{28.} \quad \frac{1}{5e} \leq \int_{0 \leq x \leq 1} \int_{1 \leq y \leq 2} \frac{1}{e^x (x^2 + y^2)} dx \leq 1$$

29. Mekkora hibát követünk el, ha az alábbi integrál valódi értéke helyett, az integrálszámítás középérték tételéből adódó alsó és felső becslések számtani közepével számolunk?

$$\iint_T x^2 (1 - x^2 - y^2) dx dy, \quad T = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

4. Hármastegrálok kiszámítása, transzformációk alkalmazása, az integrál sorrendjének cseréje, becslések

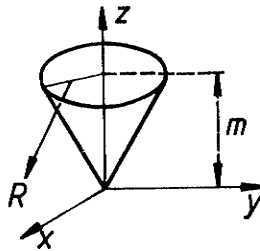
30. Számítsuk ki az alábbi hármastegrálok értékeit

a) $\iiint_V z y x^2 dx dy dz, \quad V = \{ (x, y, z) : x=0, \geq y \geq 0, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \}$

b) $\iiint_V e^{x+y+z} dx dy dz, \quad V = \{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq x+y, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1 \}$

c) $\iiint_V (y^2+z^2) dx dy dz, \quad V$ az $x^2+y^2 \leq 4$ alapkörű egyenes-hengernek a $z=0$ és $z=8$ síkok közé eső része.

d) $\iiint_V (x^2+y^2) dx dy dz, \quad V$ az ábrán látható egyenes körkup, amelynek magassága m , alapkörének sugara R .



e) $\iiint_V x y^2 z^3 dx dy dz, \quad \{ V = (x, y, z) : 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1 \}$

f) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}, \quad V$ az $x+y+z=1, x=0, y=0$ és $z=0$ síkokkal határolt tartomány.

g) $\iiint_V x y z dx dy dz, \quad V$ az $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ gömb $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ része.

h) $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \right) dx dy dz, \quad V = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \leq 1 \right\}$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

i) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz$, V az $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$ felületekkel határolt tartomány.

31. Fejezzük ki egyetlen hármasintegrállal az alábbi 2-2 hármas integrál összegét!

a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x} f(x, y, z) \, dy dz dx + \int_0^1 \int_x^1 \int_{z-x}^1 f(x, y, z) \, dy dz dx$

b) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^1 f(x, y, z) \, dy dz dx + \int_0^1 \int_x^{x^2+1} \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) \, dy dz dx$

32. Határozzuk meg az $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ függvény integrál középértékét az $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ tartományon, ahol $x + y + z \geq 0$.

33. Adjunk alsó és felső becslést az alábbi integrállal

$$\iiint_{x^2 + y^2 + z^2 < R} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \, dx dy dz, \quad \text{ahol } a^2 + b^2 + c^2 > R^2.$$

5. A kettős és hármas integrál alkalmazásai

(térfogatszámítás, mechanikai alkalmazások
tömeg, súlypont, nyomatékok stb.)

34. Számítsuk ki az alábbi felületekkel határolt testek térfogatát!

a) $z = x^2 - y^2$ nyeregfelület $z > 0$ része,
 $z = 0$ sík,
 $x^2 + y^2 = 1$ alapkörű egyenes körhenger.

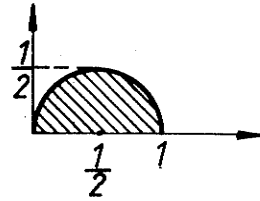
b) $z = x^2 + y^2$ paraboloid,
 $z = 0$ sík,
 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ alapkörű egyenes körhenger.

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

- c) $z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ kup,
 $z = 0$ sík, $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$ alapkörű henger.
- d) $2x = y^2 + 4z^2$ elliptikus paraboloid,
 $x = 1$ sík.
- e) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kup,
 $z = 6 - x^2 - y^2$ forgásparaboloid.
- f) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömb,
 $x^2 + y^2 - x = 0$ alapkörű egyenes körhenger. (Viviani féle test)
- g) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ (ellipszoid térfogata)
35. Határozzuk meg a $\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 2 - x - y, x^2 + y^2 = 1\}$ test térfogatát!
36. Számítsuk ki az R sugaru $2\pi/3$ nyílásszögű gömbcikk térfogatát!
37. Határozzuk meg a $z = Ax^2 + By^2$; $A > 0$, $B > 0$, elliptikus paraboloid által a $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ alapú négyszögre állított hasább $z \geq 0$ részéből levágott test térfogatát!.
38. Határozzuk meg a $z = x^2 - y^2$ felület $z > 0$ része, a $z = 0$ sík által határolt homogén test súlypontjának koordinátáit!
39. Számítsuk ki az $y^2 = x$ vezérgörbéjű, z tengellyel párhuzamos alkotóju hengerből az $x = 1$, $z = 0$ és $5x + 4y = 20$ síkokkal lemetszett homogén térrész súlypontjának koordinátáit!
40. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2/4$,
 $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}/3$ felületekkel határolt homogén tömegeloszlású test súlypontjának koordinátáit!
41. Határozzuk meg a $z = x^2 - y^2$ nyeregfelület $z > 0$, $y > 0$ része, az $x^2 + y^2 = 1$ vezérgörbéjű egyenes körhenger és az $y = 0$, $z = 0$ síkok által bezárt homogén test súlypontját!

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

42. Határozzuk meg az $r = \phi$ egyenletű archimedesi spirális és a $\phi = 0$, $\phi = \pi/2$ egyenletű félegyenesekkel határolt egységnyi sűrűségű lemez súlypontját és centrális tehetetlenségi nyomatékát!
43. Számítsuk ki egy kockának a testátlóira vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát homogén sűrűség esetén!
44. Számítsuk ki az ábrán látható lemezszerű test centrális tehetetlenségi nyomatékát, ha sűrűsége: $\rho = xy + 1$!
45. Határozzuk meg a $z = 4 - y^2$, $z > 0$ parabolikus henger, az $x^2 + y^2 = 1$ alapkörű egyenes körhenger és a $z = 0$ sík által határolt egységnyi sűrűségű test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!



6. Kettős és hármas improprius integrálok

46. Határozzuk meg a $z = 0$ sík, az $x^2 + y^2 = 1$ alapkörű egyenes körhenger és a $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ felület által határolt térrész térfogatát!
47. Számítsuk ki az $\iint_T \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ $T = \{(x, y) : x \geq y^2\}$ integrál értékét!
48. Milyen kitevők mellett konvergens a $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^n}}$ integrál, ha a V tartomány:
- a) a $z \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq 0$ tégelytestből kivágott $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ térrész;
- b) origó körüli egységsugarú gömb?
49. Határozzuk meg az $\iint_T e^{-(x+y)} dx dy$ integrál értékét, ha T
- a) az $x > 0, y > 0$ síknegyed;
- b) az $x > 0, y > 0$ síknegyed!

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

50. Számítsuk ki az $\iiint_V e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} dx dy dz$ integrál értékét

ha az integrációs tartomány a három dimenziós tér!

51. Határozzuk meg a $z = e^{-(x^2 + y^2)}$ felület és az (x, y) sík által adott egységnyi sűrűségű test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

7. Paraméteres integrálok

(folytonosság, határérték képzés, differenciálás, integrálás, improprius paraméteres integrálok.)

52. Tegyük fel, hogy $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} [f(t+h) - f(t)] dt = f(\alpha) - f(\alpha).$$

53. Ábrázoljuk az $F(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y) dx$ függvényt!

54. Számítsuk ki a következő határértékeket!

a) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^{1+t} \frac{1}{1+x^2 + t^2} dx$

b) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + t^2} dx$

c) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos tx dx$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + \frac{x}{n})^n}$

VALÓS TÖBBVÁLTOZOS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

55. Oldjuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n \sin x} dx$ határérték feladatot!

56. Határozzuk meg az alábbi $F(x)$ függvények derivált függvényét!

a) $F(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} \cos(\pi t^2) dt$

b) $F(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$

c) $F(x) = \int_x^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

d) $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xt^2} dt$

e) $F(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} e^x \sqrt{1-t^2} dt$

57. Legyen $f(x)$ differenciálható függvény és

$$F(x) = \int_0^x (x+t) f(t) dt.$$

Határozzuk meg az $F''(x)$ függvényt!

58. Legyen $F(x) = \int_0^x f(t) (x-t)^{n-1} dt.$

Határozzuk meg az $F^{(n)}(x)$ függvényt!

59. Igazoljuk a $\frac{d}{du} \int_u^v \sin x^2 dx + \frac{d}{dv} \int_u^v \sin x^2 dx = \int_u^{v^2} \cos x dx$

egyenlőséget! (u és v egymástól független változók)

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

60. Legyen $f(x) \geq 0$ folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy $x \geq 0$ esetén

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt} \quad \text{monoton növekedő függvény!}$$

61. Határozzuk meg az $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x t}}{1+t^2} dt$ improprius paraméteres integrál konvergencia tartományát!

62. Felcserélhető-e az integrálás és a határértékképzés sorrendje a

$$\lim_{t \rightarrow +} \int_0^{+\infty} t e^{-t x} dx$$

kifejezésben?

MEGOLDÁSOK

I. Valós többváltozós függvények differenciálszámítása

1. Az \mathbb{R}^m tér bármely két x és y pontjához hozzárendelt $d(x, y)$ függvény távolság, ha rendelkezik az

$$1. d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

$$2. d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$3. d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

$$4. d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^m$$

tulajdonságokkal.

1. Igen. Az 1., 2., 3. tulajdonságok teljesülése a \sqrt{x} és az $|x|$ definíciójából következik. A 4. tulajdonság, azaz $\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}$ is teljesül, mert

$$\begin{aligned} |x-y| &\leq |x-z| + |z-y| \leq |x-z| + |z-y| + 2\sqrt{|x-z||z-y|} \\ &= (\sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|})^2. \end{aligned}$$

2. Nem. A 2. tulajdonság nem teljesül. Például:

$$x = 2, \quad y = 1, \quad x \neq y, \quad |x - 2y| = |2 - 2| = 0.$$

3. Nem. A 2. tulajdonság nem teljesül. Példa:

$$(x_1, x_2) = (1, 1), \quad (y_1, y_2) = (-1, -1), \quad (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2),$$

$$|x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2| = 0.$$

4. Nem. A 4. tulajdonság nem teljesül. Példa:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad (y_1, y_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (z_1, z_2) = (1, 1),$$

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 2, \quad (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 = \frac{1}{2},$$

$$(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{és} \quad 2 \not\leq \frac{1}{2}.$$

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

5. Igen. Az 1., 2., 3. tulajdonság teljesülése nyilvánvaló. A 4. tulajdonság is teljesül, mert

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i| &= \max_{1 \leq i \leq m} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \leq \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - z_i| + \\ &+ \max_{1 \leq i \leq m} |z_i - y_i|. \end{aligned}$$

2. 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = (1, 1, \dots, 1)$, mert $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+k} = 1$,
 $k = 1, 2, \dots, m$.

2. Az (a_n) sorozat divergens $m \geq 3$ esetén, mert
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{n+k} = +\infty$, ha $k \geq 2$. $m = 2$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = (0, 1), \quad m = 1 \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = (1, 1, \dots, 1)$.

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = (\ln 2, \ln 2, \dots, \ln 2)$.

3. 1. Az A halmaz korlátos, mert

$$\left| \frac{1 \pm n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} + 1 \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nem nyílt: Az A halmaznak nincs belső pontja.

Nem zárt: Tekintsük az $x_n = 1 + \frac{1}{n} \in A$ és $x'_n = -1 + \frac{1}{n} \in A$ sorozatokat. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ és $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = -1$. Az A halmaz torlódási pontjai $1 \notin A$ és $-1 \notin A$. Nem ívszerűen összefüggő: Az $x_1 = 2 \in A$ és $x_2 = \frac{3}{2} \in A$ nem köthető össze A -beli pontokból álló folytonos görbével.

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

2. Korlátos, nem nyílt (pl. az $x_0 = 2 \in A$ nem belső pont), nem zárt ($x_n = \frac{2}{n} \in A$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \notin A$ és torlódási pont), nem ívszerűen összefüggő.
3. Korlátos, nyílt, nem zárt, ívszerűen összefüggő.
4. Korlátos, nem nyílt, nem zárt, ívszerűen összefüggő.
5. Nem nyílt ($(0, 0) \in A$ és nem belső pont), zárt (minden határpont $\in A$), nem korlátos $\forall P > 0, \exists a_1(x_1, 0) \in A, x_1 > 0$, melyre $d(0, a_1) = x_1 > P$), ívszerűen összefüggő.
6. Nem nyílt ($(0, 0) \in A$ és nem belső pont), zárt (minden határpont $\in A$), nem korlátos, ívszerűen összefüggő.
7. Nem nyílt, zárt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
8. Nem nyílt, nem zárt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
9. Nyílt, nem zárt, nem korlátos, ívszerűen összefüggő.
10. Nem nyílt ($(1, 1) \in A$ és nem belső pont), nem zárt ($a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in A, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = (0, 0) \notin A$ és torlódási pont), korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
11. Nyílt, nem zárt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
12. Ha $P_0 \in A$, akkor A zárt halmaz. Az A halmaz nem lehet nyílt.
4. Nyílt halmaz esetén igaz, zárt halmaz esetén nem.
- a) Legyen $E \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, és $x_0 \in E$ tetszőleges pont. Mivel x_0 belső pont, $\exists \delta > 0$, hogy $K(x_0, \delta) \subset E$. Ebből következik, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -ra $K(x_0, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$, tehát x_0 torlódási pont.
- b) Van olyan zárt halmaz, melynek nem minden pontja torlódási pont. Pl.: $E = \{(1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$. E zárt halmaz és $(1, 1) \in E$ nem torlódási pont.
5. 1. int E és a nyílt halmaz definíciójából következik.
3. $\forall x_0 \in G$ -re, x_0 az E belső pontja $\Rightarrow x_0 \in \text{int } E$.

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

4. a) $\overline{\text{int } E} \subset \overline{[E]}$. Ugyanis, legyen $x \notin \text{int } E$ tetszőleges pont. Két eset lehetséges:
 vagy $x \notin E \Rightarrow x \in \overline{E} \Rightarrow x \in [E]$, vagy $x \in E \Rightarrow x$ az \overline{E} torlódási pontja $\Rightarrow x \in [E]$.
 b) $[E] \subset \overline{\text{int } E}$. Ugyanis, legyen $x \in [E]$. Ha x belső pontja $[E]$ -nak, akkor $x \in \text{int } E$; tehát $x \in \overline{\text{int } E}$. Ha x határpontja \overline{E} -nek, akkor $x \in \text{int } E$.

5. Nem.

6. Pl.: $E = \{1\}$, $\text{int } E = \emptyset$, $[\text{int } E] = \emptyset$, $[\text{int } E] \neq E$.

6. 1. Jelölje x_0 az E' tetszőleges torlódási pontját.

$\forall \varepsilon > 0$ -ra $\dot{K}(x_0, \frac{\varepsilon}{3}) \cap E' \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_1 \in \dot{K}(x_0, \frac{\varepsilon}{3})$, melyre $x_1 \in E' \Rightarrow \dot{K}(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow \dot{K}(x_0, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x_0 \in E'$. Ezzel beláttuk, hogy E' minden torlódási pontját tartalmazza, tehát E' zárt.

2. a) $[E] \subset E \cup E'$; ugyanis legyen $x_0 \notin E$ és $x_0 \in [E] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ -ra $\dot{K}(x_0, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x_0$ az E torlódási pontja $\Rightarrow x_0 \in E' \Rightarrow x_0 \in E \cup E'$.
 b) $E \cup E' \subset [E]$; ugyanis legyen $x_1 \in E'$ és $x_1 \notin E \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ -ra $\dot{K}(x_1, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x_1$ az E határpontja $\Rightarrow x_1 \in [E]$.
 Tehát $[E] = E \cup E'$.

3. Legyen x_0 az E torlódási pontja. $\forall \varepsilon > 0$ -ra $\dot{K}(x_0, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow \dot{K}(x_0, \varepsilon) \cap [E] \neq \emptyset$. Tehát x_0 az $[E]$ -nek is torlódási pontja.
 Legyen x_1 az $[E]$ torlódási pontja. Ekkor $x_1 \in [E]$.
 Ha $x_1 \in E$, akkor x_1 az E torlódási pontja. Ha $x_1 \in F$, akkor $\forall \varepsilon > 0$ -ra $\dot{K}(x_1, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x_1$ az E torlódási pontja.
 E és E' torlódási pontjai nem mindig egyeznek meg. Pl.:
 $E = \{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ \mathbb{R} -ben, $E' = \{0\}$, $(E')' = \emptyset$.

7. 1. $D_f = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ zárt, korlátos, ívszerűen összefüggő.

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

2. $D_f = \{ (x, y) : x^2 + y^2 > 1 \}$ nyílt, nem korlátos, ívszerűen összefüggő.
 3. $D_f = \{ (x, y) : 2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi, k = 0, 1, 2, \dots \}$ zárt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
 4. $D_f = \{ (x, y) : |y| \leq |x|, x \neq 0 \}$ nem zárt, nem nyílt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
 5. $D_f = \{ (x, y) : x + y > 1 \}$ nyílt, nem korlátos, ívszerűen összefüggő.
 6. $D_f = \{ (x_1, x_2) : x_1 + x_2 > 0 \}$ nyílt, nem korlátos, ívszerűen összefüggő.
 7. $D_f = \{ (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 4, x_1^2 + x_2^2 \neq 1, x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \}$ nem zárt, nem nyílt, korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
 8. $D_f = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \geq 4 \}$ zárt, nem korlátos, ívszerűen összefüggő.
 9. $D_f = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > 0 \}$ nyílt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
 10. $D_f = \{ (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \neq 1 \}$ nyílt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
 11. $D_f = \{ (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1^2 + \dots + x_m^2 \neq 0 \}$ nyílt, nem korlátos, ívszerűen összefüggő.
8. (1.) Szintvonalak: $x \cdot y = c$. $c = 0$ esetén $x = 0$ és $y \in \mathbb{R}$ vagy $x \in \mathbb{R}$ és $y = 0$; $c \neq 0$ esetén az $x \cdot y = c$ feltételt kielégítő pontok összessége hiperbola.
A szintvonal pontjaiból alkotott \mathbb{R}^2 -beli halmaz zárt.
- (2.) Szintvonalak: $e^{x^2 + y^2} = c \geq 1$; $x^2 + y^2 = \ln c$. $c = 1$ esetén $\{(0, 0)\}$; $c > 1$ esetén $\{(x, y) : x^2 + y^2 = \ln c\}$, azaz $\sqrt{\ln c}$ sugarú, $(0, 0)$ középpontú körvonal. E halmazok zártak.
- (3.) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = c$; $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = c + 1$. $c = -1$ esetén $\{(1, 0)\}$; $c > -1$ esetén $\{(x_1, x_2) : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = c + 1\}$, azaz $\sqrt{c + 1}$ sugarú, $(1, 0)$ középpontú körvonal. E halmazok zártak.

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

4. $\{ (x_1, x_2) : 4x_1 + 8x_2^2 = c \}$, azaz parabola. E halmaz zárt.
9. 1. A szintfelület $c = 0$ esetén az $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = 0$ kúp,
 $c \neq 0$ esetén az $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = c$ egy- vagy kétköpenyű hiperboloid.
2. A szintfelület $x + y^2 + z^2 = c$ egyenletű paraboloid.
3. A szintfelület $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 = e^c$ ($c \in \mathbb{R}$) egyenletű ellipszoid.

10. Igen. $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} f(x,y) = 0, \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in B}} f(x,y) = \frac{1}{2}.$

11. 1. Nem létezik.

② Nem létezik, mert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{x} = 1,$ míg

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y + y^2}{y} = -1.$$

③ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$ A definíciót felhasználva és az

$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi$ helyettesítést elvégezve kapjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -ra

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = r \cdot \cos^2 \varphi |\sin \varphi| \leq r < \varepsilon, \text{ ha}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta(\varepsilon) = \varepsilon.$$

4. Nem létezik; 0; 0.

5. -1.

⑥ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ nem létezik, mert $\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0,$

míg $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1.$ Az iterált határértékek léteznek, és értékük 0.

⑦ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[(x^2 + y^2) - \frac{2x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right] = 0,$

VALÓS TOBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

$$\text{mert } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2y \cdot \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

(Lásd 11.3. feladat).

8.) Nem létezik, lásd 10. feladat.

$$9.) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} = 0, \text{ mert az } \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} \text{ függvény korlá-}$$

$$\text{tos, } \lim_{y \rightarrow 0} y = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} = 0.$$

10. $+\infty$ 11. 0 12. 0; nem létezik; nem létezik.

$$13.) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} y \cdot \frac{\sin(xy)}{xy} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} y \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 2 \cdot 1 = 2.$$

14. Nem létezik.

$$15.) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (y \cdot \sin \frac{1}{x} + x \cdot \sin \frac{1}{y}) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cdot \sin \frac{1}{x} +$$

$$+ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \sin \frac{1}{y} = 0 + 0 = 0.$$

16. 0

17.) Nem létezik, mert $\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \sin 0 = 0$, míg

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x, \frac{1}{2^{1/x}}) = \lim_{x \rightarrow +0} \sin(x \cdot \ln \frac{1}{2^{2/x}}) = \lim_{x \rightarrow +0} \sin \ln \frac{1}{4} =$$

$$= -\sin(2 \ln 2).$$

$$18.) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1-0)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-y}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1-0)} (\sqrt{x} + \sqrt{1-y}) = 0.$$

19. 0,5

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

20. Nem létezik. 21. 0

$$\textcircled{22.} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{1}{1+x^2-y} \text{ nem létezik, mert } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n, n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+n^2-n} = 0, \text{ míg } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n, n^2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Az iterált határértékek léteznek, és értékük 0

$$\textcircled{23.} \text{Egyrészt } x > 0, y > 0 \text{ esetén } x^2 + y^2 < (x+y)^2, \text{ más-}$$

$$\text{részt } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x+y)^2 e^{-(x+y)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{e^u} = 0. \text{ Ezért a}$$

$$0 < (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x+y)} < (x+y)^2 e^{-(x+y)} \text{ egyenlőtlen-}$$

$$\text{ségből } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x+y)} = 0 \text{ következik.}$$

12. 1. Ha $y \neq x$, akkor a függvény folytonos.

2. Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor a függvény folytonos.

3. Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor a függvény folytonos, mert ekkor $x^2 + 16y^2 \neq 0$ és folytonos függvények hányadosa mindenhol folytonos, ahol a nevező nem nulla. Most vizsgáljuk meg a folytonosságot a $(0, 0)$ pontban.

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-4y^2}{16y^2} = -\frac{1}{4}, \text{ és } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1, \text{ ezért } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ nem létezik} \Rightarrow (0, 0)$$

ponthban a függvény nem folytonos.

4. Ha $xy \neq 0$, akkor a függvény folytonos.

5. Ha a nevező, $\sin x \cdot \sin y \neq 0$, azaz $x \neq k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) és $y \neq \ell\pi$ ($\ell=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), akkor a függvény biztosan folytonos. A $(0, 0)$ pontban: $f(0, 0) = 1$,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{y}{\sin y} = 1 \Rightarrow \text{a } (0, 0) \text{ pontban a függvény}$$

folytonos. A többi pontban nem folytonos.

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

6. Ha $y \neq 0$, akkor a függvény folytonos. Az $(a, 0)$, $a \neq 0$ pontokban nem létezik határérték, a függvény nem folytonos.

A $(0, 0)$ pontban $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{1}{y} = 0 = f(0, 0)$, tehát a függvény folytonos ebben a pontban.

7. \mathbb{R}^2 -ben folytonos. A folytonosságot csak a $(0, 0)$ pontban kell külön vizsgálni. $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy

$$|(2x + 3y) \ln(x^2 + y^2) - 0| = |2x + 3y| \cdot |\ln(x^2 + y^2)| =$$

$$= r |2\cos\varphi + 3\sin\varphi| \cdot |\ln r^2| \leq 5r |\ln r^2| < \varepsilon, \text{ ha}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta(\varepsilon). \text{ Ilyen } \delta(\varepsilon) \text{ létezik, mert}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r |\ln r| = 0.$$

8. \mathbb{R}^2 -ben folytonos.

9. Ha $x + y \neq 0$, akkor $x^3 + y^3 \neq 0$, tehát a függvény folytonos. (Folytonos függvények hányadosa folytonos, ha a nevező nem nulla.)

10. Ha $xy \neq 0$, akkor a függvény folytonos.

11. Ha $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z \neq 0$, azaz $x \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $y \neq l\pi$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) és $z \neq n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), akkor a függvény folytonos.

12. A $(0, 0, 0)$ pontot kivéve a függvény folytonos.

13. Az A halmazra vonatkozóan nem, a B halmazra vonatkozóan folytonos a függvény.

14. A függvény nem korlátos az értelmezési tartományán.

$$D_f = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 < 1 \right\}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ a } D_f \text{ torlódási pontja}$$

$$\text{és } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-2x^2}} = +\infty.$$

15. 1. Az A halmaz korlátos és zárt, $f(x, y)$ folytonos $A - n \Rightarrow f(x, y)$ egyenletesen folytonos A -n.

- 2.] Nem. Legyen $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\forall \delta > 0$ -hoz $\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ úgy, hogy $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$ és $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \geq \varepsilon_0$. Válasszuk meg $k \in \mathbb{N}$ érté-

VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

két úgy, hogy az $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}}, 0\right)$ és $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{k\pi}}, 0\right)$

pontok távolságára $\left| \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}} - \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \right| < \sigma$ teljesüljön. Ekkor $|\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - \sin k\pi| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon_0$.

3. Az $f(x, y)$ függvény folytonos az A korlátos és zárt halmazon. Ebből következik, hogy a függvény egyenletesen folytonos A -n.

4. Igen. $|\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}| \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ miatt $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ jó.

16. 1. $D_{f_x} = D_{f_y} = \{(x, y) : x + y > 0\}, f_x = \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 + y^3}},$

$$f_y = \frac{3y^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 + y^3}}.$$

2. $D_{f_x} = D_{f_y} = \{(x, y) : |x| \neq |y|, x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0)\}$

$$f_x = \begin{cases} \frac{-3yx^2 - 3y^3}{(x^2 - y^2)^2} & \text{ha } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_y = \begin{cases} \frac{3x^3 + 3xy^2}{(x^2 - y^2)^2} & \text{ha } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. $D_{f_x} = D_{f_y} = \mathbb{R}^2$

$$f_x = \begin{cases} \frac{2xy(x^2 + y^2) \cos(x^2 y) - 2x \sin(x^2 y)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$