BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Reimann József

MATEMATIKA II/1.

Műegyetemi Kiadó, 2000.

(Harmadik utánnyomás)

Azonosító: **091262**

A **Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Veress János
Terjedelem: 40,6 A/5 ív
Nyomtatta és kötötte: **Műegyetemi Nyomda**
Felelős vezető: Frigy Ottó
Munkaszám: 255/00

TARTALOMJEGYZÉK

I. Rész. A komplex függvénytan elemei 7

1. Bevezetés 9
2. Komplex számsorozatok 14
3. Komplex tagú végtelen sorok 18
4. A Riemann-féle számgömb. A sztereografikus projekció 24
5. Lineáris függvények 27
6. Speciális lineáris leképezések. Kettősviszony 33
7. Komplex függvények 36
8. A Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek Laplace-egyenlet 42
9. Holomorf függvény által létesített leképezés (Konformis leképezés) 45
10. Komplex változós függvény integrálja 46
11. Egyszerű integráltételek 51
12. A Cauchy-féle integráltétel 52
13. A Cauchy-féle integráltétel következményei 58
14. A Cauchy-féle integrálformula 60
15. Integrálformulák deriváltakra 61
16. Komplex hatványsorok 63
17. Hatványsorral értelmezett függvény tulajdonságai .. 65
18. Hatvány- és gyökfüggvények 70
19. Az exponenciális- és a logaritmus függvények 74
20. A trigonometrikus függvények és inverzeik 79

II. Rész. Fourier-sorok 87

1. Trigonometrikus polinomok 89
2. A Fourier-sor fogalma. Konvergencia-kritériumok ... 96
3. Tetszőleges periodusú függvények Fourier-sora 107
4. Páros, illetve páratlan függvények Fourier-sora. Példák 109
5. Becslés a Fourier-sor részletösszege és a függvényérték közötti eltérésre 116
6. Fejér-féle összegek 119
7. Négyzetesen integrálható függvények 127
8. Fourier-polinomok minimum tulajdonságai 131

III. Rész. Differenciálegyenletek 141

Bevezetés 143

I. Fejezet
Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek

1. Elemi úton integrálható elsőrendű közönséges differenciálegyenletek 149
1.1 Szétválasztható változójú differenciálegyenletek 149
1.2 Homogén egyenletek 163
1.3 Homogén egyenletre visszavezethető egyenletek 166
1.4 Lineáris elsőrendű differenciálegyenletek 168
1.5 A Bernoulli-féle differenciálegyenletek 171
1.6 Egzakt-egyenletek. Multiplikátorok 172
1.7 Az $y' = f(x,y)$ elsőrendű differenciálegyenlet közelítő (numerikus) megoldási módszerei 181
1.7/a) A szukcesszív approximáció (fokozatos közelítés) módszere 181
1.7/b) A véges differenciák módszere Euler-féle poligon 191
1.7/c) Runge- és Kutta módszere 193
1.7/d) Integrálás sorfejtéssel 193
1.8 Szinguláris pontok 196
1.9 Néhány egyszerű műszaki feladat az elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazására 201

II. Fejezet
Magasabb rendű differenciálegyenletek

2.1 Egzisztencia- és unicitás-tétel magasabb rendű egyenletekre 201
2.2 Speciális esetek. Hiányos egyenletek 219
2.3 Hiányos másodrendű egyenletekre vezető műszaki feladatok 226
2.4 A lineáris differenciálegyenletek általános elmélete 233
2.4/a) Lineáris homogén egyenletek 234
2.4/b) A lineáris homogén egyenlet rendszámának csökkentése egy partikuláris megoldás ismeretében 251
2.5 Lineáris inhomogén egyenletek 253
2.5/a) Az állandók variálásának módszere 255
2.6 Állandó együtthatójú homogén lineáris egyenletek 261
2.7 Állandó együtthatójú inhomogén lineáris egyenletek 271

2.8 Állandó együtthatójú lineáris egyenletekre visszavezethető egyenletek. 1. Az Euler-féle egyenlet. 2. A Bessel-egyenlet 278
2.9 Lineáris másodrendű egyenletek oszcilláló megoldásokkal 282
2.10 Állandó együtthatójú másodrendű lineáris differenciálegyenletek műszaki alkalmazásai ... 290
A) Rezgéstani alkalmazások 290
B) Vastag falú cső alakváltozása 299
C) Szélén befogott körlemez lehajlása egyenletes megoszló teher alatt 301
D) Sajátérték-feladatok 304
E) Negyedrendű állandó együtthatójú lineáris egyenletek műszaki alkalmazásai ... 307
2.11 Közelítő megoldások másodrendű differenciálegyenletekre 318
2.12 Lineáris peremérték-feladatok közelítő megoldási módszerei 323

III. Fejezet
Parciális differenciálegyenletek

3.1 A parciális differenciálegyenletek osztályozása 331
3.2 A rezgő húr differenciálegyenlete 340
3.3 Rudak rezgése 346
3.4 A hővezetés differenciálegyenlete 352
3.5 Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása rácsmódszerrel 355

IV. Rész. Differenciálgeometria. Vektoranalízis ....

I. Fejezet
Differenciálgeometria

1. A térgörbe előállítása, érintővektor 361
2. Térgörbe ívhossza 366
3. Simulósík, kísérő trieder 370
4. Görbület 372
5. Sebesség és gyorsulás 376
6. Torzió, Frenet-képletek 377
7. A térgörbe menetének vizsgálata a kísérő háromél segítségével 386
8. Kinematikai alkalmazás kidolgozott feladat 390
9. A felület értelmezése 399
10. A felületi normális és az érintősík 399
11. Felületi görbék paramétervonalak 402
12. Felületi görbék ívhossza 402
13. Szögmérés 404

14. A második alapmennyiségek 405
15. Meusnier-tétele 406
16. Főnormális görbületek, a Gauss-féle görbület és az összeg-görbület 409
17. Euler-tétele 413
18. Felület darabfelszínének kiszámítása 416
19. A felületi pontok osztályozása 418

II. Fejezet
Vektoranalízis

1. A skalár-vektorfüggvény 425
2. Gradiens, iránymenti derivált 427
3. Vektor-vektorfüggvények 431
4. Vektormező görbementi és felületi integrálja 435
5. Vektormező divergenciája 443
6. Vektormező rotációja 448
7. Görbementi- és felületi integrálok átalakítására vonatkozó tételek 455
8. A Gauss-Osztrogradszkij-tétel és a Stokes-tétel néhány következménye 457

I. Rész

A KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN ELEMEI

1. Bevezetés

A komplex függvénytan kifejezés azoknak a vizsgálatoknak az összességét jelenti, amelyek a valós analízis (differenciál- és integrálszámítás) módszereit kiterjesztik arra az esetre, amikor az összes szereplő mennyiségek komplex számok.

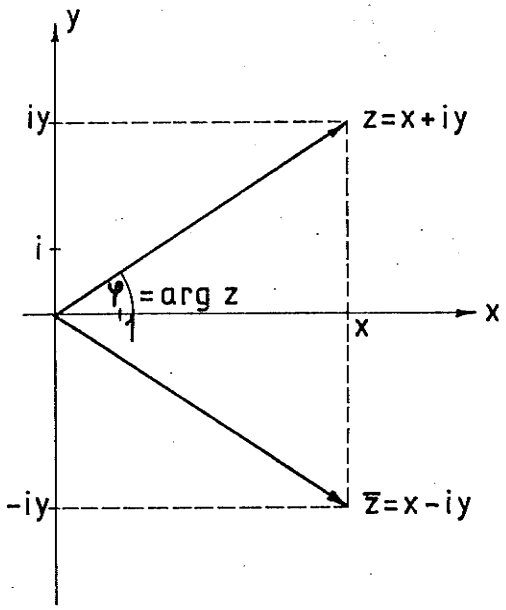
A komplex számok fogalmát és a velük való elemi műveleteket ismertnek tételezzük fel, mindössze néhány fogalomra emlékeztetünk.

Ha a z komplex számot mint a Gauss-féle számsík egy pontját (vagy vektorát)

$$z = x + iy \quad (x \text{ és } y \text{ valós számok}) \tag{1.1}$$

algebrai alakban adjuk meg, akkor

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$



1.1 ábra

A z komplex szám $\bar{z}$ konjugáltja:

$$\bar{z} = x - iy.$$

A z komplex szám abszolút értéke

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}$$

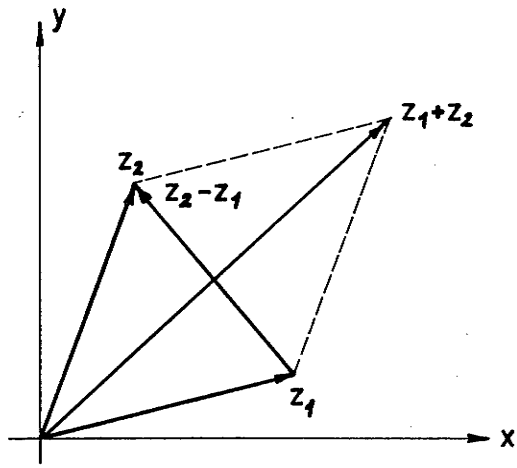
az origóból való távolságát jelenti.

A komplex számot trigonometrikus alakban a

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.2}$$

formulával adjuk meg, ahol $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ (mod 2π). A φ szöget a komplex szám argumentumának nevezzük.

A komplex számok összeadása és kivonása a vektorok paralelogramma szabálya szerint történik.



1.2 ábra

A háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenségek alapján érvényesek a következő relációk:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{1.3}$$

$$|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2| \tag{1.4}$$

Az (1.3) összefüggés érvényességét analitikusan is igazoljuk. Legyen $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$, ekkor (1.3) a következő alakban írható:

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \qquad (1.3')$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leq x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot$$
$$\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2} + x_2^2 + y_2^2.$$

Egyszerűsítés és ismételt négyzetre emelés után:

$$x_1^2y_2^2 - 2x_1y_2x_2y_1 + x_2^2y_1^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$$

adódik, ami (1.3') fennállását igazolja.
Az (1.4) összefüggés ugyancsak az abszolút érték definíciója alapján következik, az (1.3) egyenlőtlenség felhasználásával:

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) + (- z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$$

azaz

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| \qquad (1.4')$$

Továbbá:

$$|z_2| = |(z_2 + z_1) + (- z_1)| \leq |z_1 + z_2| + |z_1|$$

$$|z_1 + z_2| \geq |z_2| - |z_1| \qquad (1.4'')$$

Az (1.4') és (1.4") egyenlőtlenségek közös kifejezése az (1.4) formula. Az (1.3) összefüggés tetszőleges számú összeadandóra általánosítható:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \qquad (1.5)$$

(A bizonyítás indukcióval végezhető.)
Az abszolút értékek szorzatára viszont fenn áll a

$$|z_1z_2\dots z_n| = |z_1||z_2|\dots|z_n| \qquad (1.6)$$

egyenlőség.
Emlékeztetünk rá, hogy komplex számok szorzásakor az abszolút értékek szorzódnak, az argumentumok pedig összeadódnak, azaz, ha

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

akkor

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 =$$

$$= \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi} \tag{1.7}$$

Ugyanis:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) +$$

$$+ i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) +$$

$$+ i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \tag{1.7/a}$$

Osztás esetén pedig:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg z_1 -$$

$$-\arg z_2 \pmod{2\pi} \tag{1.8}$$

Az (1.8) összefüggés bizonyítására vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2};$$

ahol

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2(\cos\varphi_2 + i\varphi\sin_2)} \cdot \frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{1}{r_2}(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2).$$

Innen

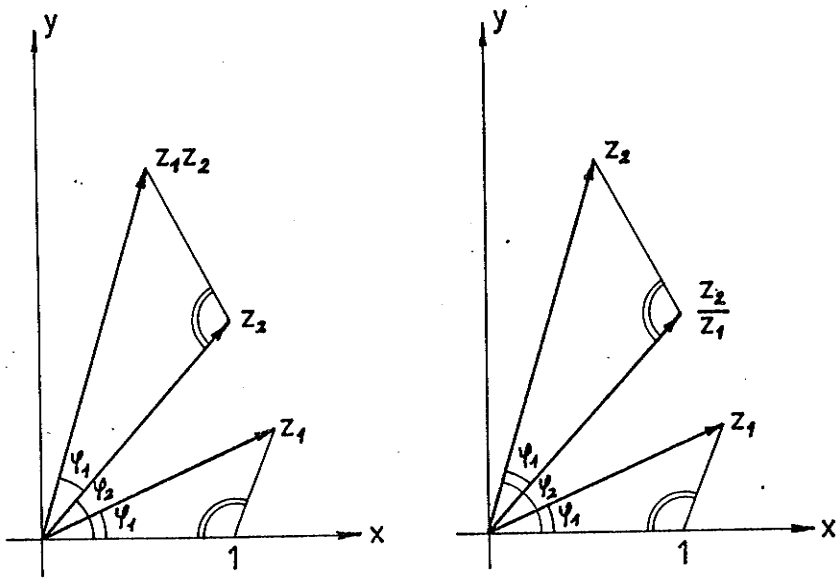
$$\frac{z_1}{z_2} = r_1 \cdot \frac{1}{r_2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Az (1.7/a) formula ismételt alkalmazásával kapjuk az ún. Moivre-képletet:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos n\varphi + i\sin n\varphi].$$

Az alábbi ábrák mutatják, hogy komplex számok szorzása és osztása grafikusan egyszerű módon ábrázolható:



1.3 ábra

A z_1 és z_2 pontok <u>távolságán</u> az őket ábrázoló síkbeli pontok távolságát, azaz a $|z_2 - z_1|$ mennyiséget értjük. Adott z_o ponttól r távolságra levő komplex számok halmaza a z_o középpontú r sugarú kör, amelyet a $|z - z_o| = r$ egyenlőség jellemez. E kör <u>belsejét</u> a $|z - z_o| < r$, <u>külsejét</u> a $|z - z_o| > r$ egyenlőtlenségek jellemzik. A kör és belseje együtt alkotják a zárt körlemezt, amelyet a

$$|z - z_o| \leq r \quad \text{egyenlőtlenség jellemez.}$$

A z_o pont <u>ε-környezetén</u> mindig a z_o körüli ε-sugarú kör belsejét, tehát mindazon komplex számok halmazát értjük, amelyek kielégítik a

$$|z - z_o| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget.

2. Komplex számsorozatok

Ha minden természetes számhoz valamilyen módon hozzárendelünk egy komplex számot, akkor egy $z_1, z_2, \ldots, z_n \ldots$ komplex számsorozatot kapunk. A z_k számok a sorozat tagjai. A tagok között lehetnek egyenlő értékűek is. (Sorozaton mindig végtelen sorozatot értünk. A sorozatnak végtelen sok egyforma tagja is lehet, sőt akár minden tagja ugyanaz lehet.)

Néhány egyszerű példa sorozatokra:

1. $\{z^n\} = 1, z, z^2, \ldots, z^n, \ldots$ ahol z adott tetszőleges komplex szám.
2. $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$
3. $z_n = \frac{1}{2}(z_{n-1} + z_{n-2})$, ahol $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $n = 3, 4, \ldots$

(írjuk fel a sorozat néhány tagját!)

A z_o pontról akkor mondjuk, hogy a $\{z_n\}$ sorozat torlódási pontja, ha tetszőleges pozitív ε-ra a sorozatnak végtelen sok eleme kielégíti a

$$|z_n - z_o| < \varepsilon \tag{2.1}$$

egyenlőtlenséget.
(Megjegyezzük, hogy ha van olyan z_k komplex szám, amely a $\{z_n\}$ sorozatban végtelen sokszor előfordul, akkor z_k a sorozatnak torlódási pontja.)
Érvényes a valósból ismert Bolzano-Weierstrass-féle

2.1 Tétel:
Bármely korlátos komplex számsorozatnak van legalább egy torlódási pontja.
A bizonyítás a valós esethez hasonlóan skatulyázással történhet, csupán egy dimenzió helyett két dimenzióra kell okoskodnunk.
A korlátosság miatt a $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ sorozatot befoglalhatjuk egy elég nagy N_o négyzetbe, amelynek oldalai a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. Osszuk fel az N_o négyzetet négy részre, majd vegyük egyik olyan negyedét N_1-et, amelyben a sorozatnak végtelen sok eleme van. (Ilyen negyed feltétlenül van, mivel ha N mindegyik negyedébe a sorozatnak csak véges sok eleme esnék, akkor a sorozat nem le-

hetne végtelen.) A negyedelési eljárást vég nélkül folytatva egymásba skatulyázott N_o, N_1, N_2,... négyzetek sorozatát kapjuk, amelyek egy z_o pontra zsugorodnak és mindegyik négyzetben a sorozatnak végtelen sok eleme van. A z_o pont nyilván torlódási pont.

Különösen fontos az az eset, amikor a $\{z_n\}$ sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, vagyis amikor a (2.1) összefüggés valamely n-től kezdve a sorozat minden tagjára érvényes. Ezt úgy szoktuk kifejezni, hogy ekkor a z_o pont ε-környezete a $\{z_n\}$ sorozat majdnem minden tagját tartalmazza (valamely n-től kezdve minden tagját).
Ez esetben z_o a $\{z_n\}$ sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_o$.

Definíció

A $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ komplex sorozatról akkor mondjuk, hogy a z_o ponthoz konvergál, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén megadható olyan $N_o = N_o(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy

$$|z_n - z_o| < \varepsilon, \quad \text{hacsak} \quad n \geq N_o(\varepsilon) .$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges kicsire választható, a fenti definíció azt fejezi ki, hogy a sorozat tagjainak a z_o ponttól való távolsága zérushoz tart:

$$|z_n - z_o| \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

A valós számsorozatok esetéhez hasonlóan bizonyítható be a Cauchy-féle konvergencia-kritérium, amelyet az alábbi tétel fejez ki:

2.2 Tétel:

A $\{z_n\}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N_o = N_o(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \quad \text{hacsak} \quad n,m \geq N_o. \tag{2.2}$$

Bizonyítás:

A (2.2) feltétel szükségessége a háromszög egyenlőtlenség alapján adódik. Ha a $\{z_n\}$ sorozat konvergens, $z_n \to z_o$, akkor valamely N_o indextől kezdve

$$|z_n - z_o| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{továbbá} \quad |z_m - z_o| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n,m > N_o).$$

Viszont

$$|z_n - z_m| = |z_n - z_o + z_o - z_m| \leq |z_n - z_o| + |z_m - z_o| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$$

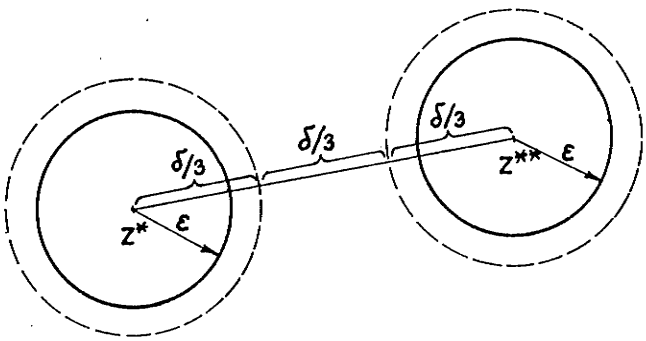
Az elégségesség bizonyításához vegyük figyelembe, hogy ha a (2.2) feltétel teljesül, akkor a $\{z_n\}$ sorozat korlátos, mivel $n > N_o$ esetén

$|z_n - z_{N_o}| < \varepsilon$, vagyis az N_o-nál nagyobb indexű tagok mindegyike benne van a z_{N_o} szám körüli ε-sugarú körben. E körön kívül legfeljebb $N_o - 1$ számú (tehát véges sok) tagja lehet a sorozatnak, ezek pedig befoglalhatók egy elég nagy négyzetbe.
Mivel a $\{z_n\}$ sorozat korlátos, van legalább egy torlódási pontja, jelöljük ezt z^*-gal. Könnyű belátni, hogy a sorozatnak több torlódási pontja nem is lehet. Tegyük fel ugyanis, hogy a $\{z_n\}$ sorozatnak van egy, a z^*-tól különböző - z^{**} - torlódási pontja is. Legyen z^* és z^{**} távolsága δ. Válasszuk ε-t $\frac{\delta}{3}$-nál kisebbnek. Mivel mind z^* mind z^{**} torlódási pontok, mind z^* mind z^{**} ε-környezetében a sorozatnak végtelen sok eleme található, tehát van akármilyen nagy $n > N_o$ index, amelyre

$$|z_n - z^*| < \varepsilon ,$$

és van akármilyen nagy $m > N_o$ index, amelyre

$$|z_m - z^{**}| < \varepsilon .$$



2.1 ábra

Ekkor azonban $|z_n - z_m| > \frac{\delta}{3} > \varepsilon$, vagyis a (2.2) feltétel nem teljesül.
Ezzel kimutattuk, hogy a (2.2) feltétel szükséges és elégséges a $\{z_n\}$ komplex (speciális esetben valós) számsorozat konvergenciájához.
Minden olyan végtelen komplex számsorozatot, amelynek egyetlen torlódási pontja van, konvergens sorozatnak nevezünk. A szóban forgó egyetlen torlódási pont a $\{z_n\}$ sorozat határértéke. Az olyan számsorozatot, amely 0-hoz konvergál, zérósorozatnak nevezzük. Minden olyan számsorozatot, amely nem konvergens, divergens sorozatnak nevezünk.

A konvergens sorozatokkal való számolásra az alábbi egyszerű szabályok érvényesek, amelyek megkönnyítik a sorozatok határértékének kiszámítását:

2.3 Tétel:

Ha $z_n \to z_o$, $z'_n \to z'_o$, továbbá c és c' tetszőleges komplex számok, és $w_n = c\, z_n + c'\, z'_n$, akkor a $\{w_n\}$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} (c\, z_n + c'\, z'_n) = c\, z_o + c'\, z'_o .$$

2.4 Tétel:

Az előző tételben foglalt feltételezések mellett a $w_n = z_n z'_n$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} z_n z'_n = z_o z'_o$$

2.5 Tétel:

Ha $z_n \to z_o$ és a $\{z_n\}$ sorozat egyik tagja sem 0 és $z_o \neq 0$, akkor a $w_n = \frac{1}{z_n}$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = \frac{1}{z_o} .$$

3. Komplex tagú végtelen sorok

Legyen $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ komplex számok sorozata és képezzük a sorozat tagjainak összegét, amelyet a

(3.1) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ vagy röviden $\sum z_n$ szimbólummal jelölünk és végtelen sornak nevezünk. A z_n számok a sor tagjai.
A sor részletösszegei a valós sorok analógiájára az

$$s_1 = z_1, \quad s_2 = z_1 + z_2, \ldots, \quad s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n, \ldots \tag{3.2}$$

sorozatot alkotják.
Ha a (3.2) sorozat konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a (3.1) sor konvergens. A részletösszegek sorozatának határértéke a sor összege:

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{3.3}$$

A Cauchy-féle konvergencia kritérium alapján sorokra vonatkozólag az alábbi tételek adódnak:

3.1 Tétel:
A $\sum z_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely előre megadott ε pozitív számhoz található olyan $N_o = N_o(\varepsilon)$ index, hogy minden $n > N_o$ és $p > 0$ természetes számra:

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon \tag{3.4}$$

3.2 Tétel:
Konvergens $\sum z_n$ sor tagjai zérósorozatot alkotnak:
$z_n \to 0$. Ugyanis (3.4)-ből $p = 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $|z_{n+1}| < \varepsilon$.

3.3 Tétel:
Ha a $\sum |z_n|$ sor konvergens (amely pozitív valós tagokból áll), akkor $\sum z_n$ sor is konvergens, ugyanis

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \ldots + |z_{n+p}|$$

Definíció:

A $\sum z_n$ sort akkor nevezzük abszolút konvergensnek, ha a $\sum |z_n|$ sor konvergens. Ha $\sum z_n$ konvergens, de $\sum |z_n|$ nem konvergens, akkor a $\sum z_n$ sort feltételesen konvergensnek nevezzük.

3/a) Komplex tagú sorok abszolút konvergenciájára vonatkozó kritériumok

1. A $\sum z_n$ sor akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha az

$$s_n = |z_1| + |z_2| + \dots |+ z_n|$$

valós számok monoton növekvő sorozata felülről korlátos.
A további kritériumok a konvergenciára elégséges (de nem szükséges) kritériumok. Az 1. kritériumból következik a majoráns kritérium:

2. Ha a $\sum c_n$ pozitív valós számokból álló sor konvergens és majdnem minden n-re $|z_n| \leq c_n$, akkor $\sum z_n$ abszolút konvergens sor.
Az alkalmazások szempontjából különösen fontos a következő két kritérium:

3. A $\sum z_n$ sor abszolút konvergens, ha van olyan 1-nél kisebb pozitív γ szám, hogy valamely n-től kezdve

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq \gamma < 1 \quad \text{vagy ha} \quad \lim_{n \to \infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lambda < 1.$$

(ha ugyanis a második feltétel teljesül, akkor $\gamma = \frac{1+\lambda}{2} < 1$-re valahonnan kezdve az első feltétel is teljesül).
A 3. feltétel elégséges volta abból következik, hogy ha valamely n-től kezdve

$$|z_{n+1}| \leq \gamma |z_n|$$

$$|z_{n+2}| \leq \gamma |z_{n+1}| \leq \gamma^2 |z_n|$$

$$\vdots$$

$$|z_{n+k}| \leq \gamma |z_{n+k-1}| \leq \dots \leq \gamma^k |z_n|$$

akkor $\vdots$

$$|z_n| + |z_{n+1}| + \dots + |z_{n+k}| + \dots \leq |z_n| (1 + \gamma + \gamma^2 + \dots)$$

vagyis a $\sum |z_n|$ sor majorálható egy $\gamma < 1$ hányadosú geometriai sorral.

Viszont a $\sum z_n$ sor divergens, ha valamely n-től kezdve

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geq \gamma > 1 \qquad \text{vagy ha} \qquad \lim \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lambda > 1,$$

mert ez esetben a sor általános tagja nem tart 0-hoz, hiszen $|z_{n+1}| \geq \gamma^k |z_n|$, ahol $\gamma > 1$.

4. A $\sum z_n$ sor abszolút konvergens, ha van olyan 1-nél kisebb pozitív γ szám, amelyre

$$\sqrt[n]{|z_n|} \leq \gamma < 1 \qquad \text{vagy ha} \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lambda < 1.$$

Ezzel szemben a $\sum z_n$ sor divergens, ha n-nek végtelen sok értékére

$$\sqrt[n]{|z_n|} \geq 1, \qquad \text{vagy ha} \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda > 1.$$

A 4. kritérium elégséges volta ismét a majoráns kritériumból következik, ugyanis ha

$$\sqrt[n]{|z_n|} \leq \gamma < 1, \quad \text{akkor}$$

$$|z_n| \leq \gamma^n, \quad \text{vagyis}$$

$$\sum |z_n| \leq \sum \gamma^n \quad \text{ahol} \quad \gamma < 1,$$ tehát konvergens geometriai sor majorálja a $\sum |z_n|$ sort.

3.b) A konvergens sorokkal való számolás szabályai

A komplex tagú konvergens sorokkal való számolás szabályai formálisan ugyanazok, mint a valósban és ugyanúgy következnek a konvergens számsorozatokkal való számolás megfelelő szabályaiból.

3.4 Tétel:

Ha $\sum z_n$ és $\sum z'_n$ konvergens sorok és $\sum z_n = s$, $\sum z'_n = s'$, továbbá c és c' két tetszőleges komplex szám, akkor a

$$\sum(cz_n + c'z'_n) = cz_1 + c'z'_1 + cz_2 + c'z'_2 + cz_3 +$$

$$+ c'z'_3 + \dots \text{ sor is konvergens és}$$

$$\sum(cz_n + c'z'_n) = c\,s + c'\,s'. \qquad (3.4)$$

(A szabály érvényességének bizonyítása a 2.3 Tétel alapján történik.)

A fenti szabály azt fejezi ki, hogy konvergens sorokat szabad tagonként összeadni ($c = c' = 1$ eset), valamint konvergens sorok tagjainak lineáris kombinációja ugyancsak konvergens sort eredményez.

Ha $\{k_n\}$ természetes számoknak olyan sorozata, amelyben minden természetes szám (és esetleg a 0) pontosan egyszer fordul elő, akkor azt a $\sum z'_n$ sort, amelyre $z'_n = z_{kn}$, a $\sum z_n$ sor átrendezésének nevezzük.

3.5 Tétel:

Ha a $\sum z_n$ sor abszolút konvergens, akkor e sor bármilyen $\sum z'_n$ átrendezése is abszolút konvergens és összege megegyezik a $\sum z_n$ sor összegével.

Bizonyítás

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges kis szám, akkor a feltevés szerint van olyan m szám, hogy

$$|z_{m+1}| + |z_{m+2}| + \dots + |z_{m+p}| < \varepsilon \qquad (3.5)$$

Legyen most N_o olyan nagy index, hogy a $k_o, k_1, \dots, k_{n_o}$ számok között az $1, 2, \dots, m$ számok mindegyike előfordul. Jelöljük a $\sum z_n$ sor összegét s-sel, részletösszegeit s_n-nel, $\sum z'_n$ összegét s'-vel, részletösszegeit pedig s'_n-vel. Ha $n > N_o$, akkor az $s'_n - s_n$ különbségben a $z_o, z_1, \dots, z_m$ tagok már mind kiesnek és csak véges számú olyan tag marad, amelyek abszolút értékeinek összege a (3.5) formula alapján kisebb mint ε. Tehát $n > N_o$-ra

$$|s'_n - s_n| < \varepsilon, \text{ ami azt jelenti, hogy } (s'_n - s_n) \to 0.$$

Mivel $s'_n = s_n + (s'_n - s_n) \to s$, és $s'_n \to s'$, következik, hogy

$$s' = s,$$

tehát $\sum z'_n$ is konvergens és összege azonos $\sum z_n$ összegével. Ugyanígy $\sum |z_n|$ konvergenciája folytán $\sum |z'_n|$ is konvergens.

1. <u>Megjegyzés:</u> Feltételesen konvergens sorokra ez a tétel nem érvényes!
2. <u>Megjegyzés:</u> A fenti tételből következik, hogy ha z_n abszolút konvergens, akkor minden $z_{\nu_0} + z_{\nu_1} + \ldots + z_{\nu_n} + \ldots$ $(0 \leq \nu_0 < \nu_1 < \ldots)$ részsora is abszolút konvergens.

5. Legyen most $\sum z_n$ és $\sum z'_n$ két tetszőleges végtelen sor. Mit kell értenünk két végtelen sor szorzatán? Szorozzuk meg a $\sum z_n$ sor minden elemét a $\sum z'_n$ sor minden elemével (képzeletben) és írjuk fel a szorzatokat négyzet alakban, mintha egy végtelen determinánst képeznénk:

$$\begin{array}{ccccc}
z_0 z'_0 & \ldots & z_0 z'_1 & & z_0 z'_2 \ldots \\
 & \ddots & & \ddots & \\
z_1 z'_0 & & z_1 z'_1 & & z_1 z'_2 \ldots \\
 & \ddots & & \ddots & \\
z_2 z'_0 & & z_2 z_1 & & z_2 z'_2 \ldots \\
 & \ddots & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Ebben az elrendezésben $z_k z'_\ell$ a k-adik sor ℓ-edik eleme $(k = 0,1,2,\ldots;\quad \ell = 0,1,2,\ldots)$.

A fenti elrendezésből többféle módon képezhetünk olyan végtelen $\sum \xi_n$ sort, amelynek tagjai a fenti szorzatok.

Átlós irányú elrendezés esetén azokat a tagokat adjuk össze, amelyekre $k + \ell = 0$, $k + \ell = 1$, $k + \ell = 2, \ldots$stb., mondjuk az első sortól kezdve:

$$z_0 z'_0 + z_0 z'_1 + z_1 z'_0 + z_0 z'_2 + z_1 z'_1 + z_2 z'_0 + \ldots =$$

$$= \xi_1 + \xi_2 + \ldots$$

A négyzetes elrendezés úgy kapható, hogy az átló irányú egyenesek helyett a nekik megfelelő négyzeteket vesszük (melyek átlóit alkotják), azaz először azt a szorzatot írjuk fel, amelyre $k = \ell = 0$, azután azokat a szorzatokat, amelyekre k is, ℓ is legfeljebb 1, majd k is, ℓ is legfeljebb 2 stb.:

$$z_o z_o' + z_o z_1' + z_1 z_1' + z_1 z_o' + z_o z_2' + z_2 z_2' + z_2 z_1' +$$
$$+ z_2 z_o' + \dots$$

Minden ily módon kapott $\sum \xi_n$ sor a $\sum z_n$ és $\sum z_n'$ sorok szorzatsora. Ezekre a következő tétel érvényes:

<u>3.6 Tétel:</u>

Ha $\sum z_n$ és $\sum z_n'$ abszolút konvergens sorok és összegük s ill. s', akkor bármely szorzatsoruk is abszolút konvergens és összege $s.s'$.

<u>Bizonyítás:</u>

Elég nagy m esetén

$$|\xi_o| + |\xi_1| + \dots + |\xi_n| \leq (|z_o| + |z_1| + \dots + |z_m|)(|z_o'| +$$
$$+ |z_1'| + \dots + |z_m'|)$$

A $\sum |\xi_n|$ sor részletösszegeinek sorozata tehát korlátos, azaz $\sum \xi_n$ abszolút konvergens. A 3.5 <u>Tétel</u> alapján minden szorzatsor összege ugyanaz, mert a szorzatsorok egymás átrendezései. Elegendő tehát egyetlen szorzatsor összegét kiszámítani.

Ha $\sum \xi_n$ a négyzetes elrendezésű szorzatsor, akkor

$$(z_o + z_1 + \dots + z_n)(z_o' + z_1' + \dots + z_n') =$$
$$= \xi_o + \xi_1 + \dots + \xi_{(n+1)^2-1}$$

$$\begin{array}{llll} z_o z_o' & z_o z_1' & z_o z_2' & \dots \\ z_1 z_o' & z_1 z_1' & z_1 z_2' & \dots \\ z_2 z_o' & z_2 z_1' & z_2 z_2' & \dots \end{array}$$

(amint a fenti ábra $n = 2$ esetén mutatja).

Ha most $n \to \infty$ határátmenetet végzünk a (3.6) egyenlet mindkét oldalán, akkor:

$$\lim_{n \to \infty} (z_o + z_1 + \dots + z_n)(z_o' + z_1' + \dots + z_n') =$$
$$\lim_{n \to \infty} s_n s_n' = s\, s' = \sum \xi_n .$$

(Lásd 2.4 Tétel!)

3.7 Tétel:

Ha a $\sum z_n$ konvergens sor egymás után következő tagjait zárójelek alkalmazásával egy-egy taggá vonjuk össze:

$$\underbrace{(z_o + z_1 + \dots + z_{k_o})}_{\xi_o} + \underbrace{(z_{k_{o+1}} + z_{k_{o+2}} + \dots + z_{k_1})}_{\xi_1} +$$

$$+ \underbrace{(z_{k_{1+1}} + z_{k_{1+2}} + \dots + z_{k_2})}_{\xi_2} + \dots =$$

akkor az így kapott $\sum \xi_n$ sor szintén konvergens és összege

$$\sum \xi_n = \sum z_n$$

A fenti módon történő tagcsoportosításra rendszerint az átlós elrendezésű szorzatsorok esetében van szükség:

$$\sum \xi_n = z_o z_o' + (z_o z_1' + z_1 z_o') + (z_o z_2' + z_1 z_o' + z_2 z_o') +$$

$$+ \dots + (z_o z_n' + z_1 z_{n1}' + \dots + z_n z_o') + \dots$$

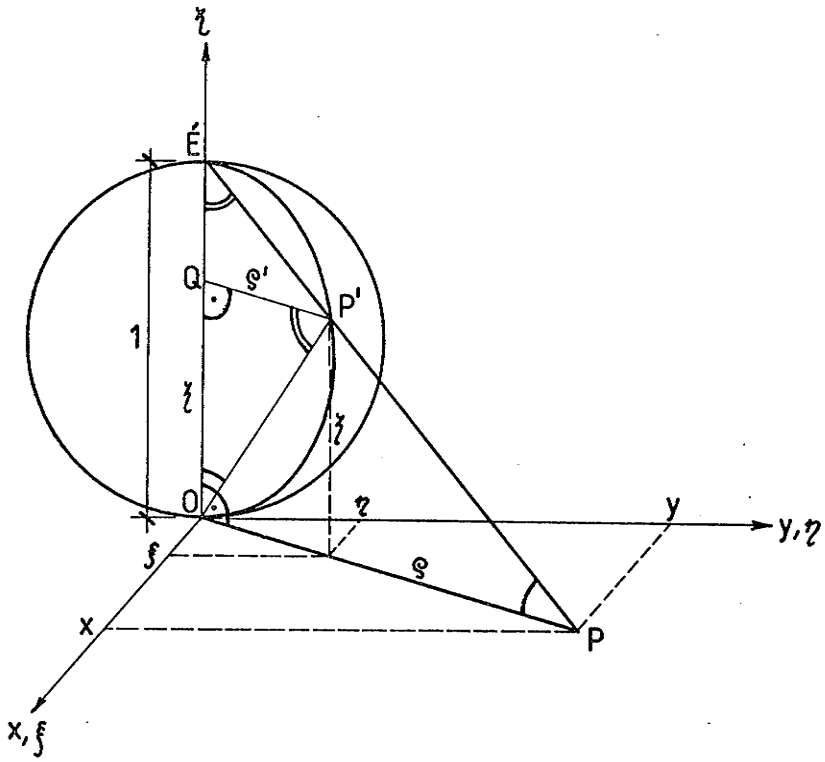
Ezt a sort a $\sum z_n$ és $\sum z_n'$ sorok Cauchy-szorzatának nevezzük.

4. A Riemann-féle számgömb. A sztereografikus projekció

A komplex számokat eddig a koordináta-rendszerrel ellátott síkon ábrázoltuk. Bizonyos célokra előnyös, ha a komplex számokat egy gömbfelületen ábrázoljuk, az ún. Riemann-féle vagy komplex számgömbön, amely a következő módon történik.

Az xy sík O origójára helyezzünk el egy egységnyi átmérőjű gömböt. Az érintkezési pontokat, az O origót nevezzük déli pólusnak, a gömb ezzel átellenes pontját az É északi pólusnak (4.1 ábra).

Az É pontból indítsunk félegyeneseket, amelyek mind a gömböt, mind a síkot egy-egy pontban metszik. A gömbnek és a síknak azokat a pontjait rendeljük egymáshoz, amelyek ugyanazon a félegyenesen vannak (az ábrán ilyen P és P' pontokat tüntettünk fel). A gömb É északi pólusától eltekintve ily módon kölcsönösen egyértelmű megfelelést létesítettünk a gömb és a sík pontjai között.



4.1 ábra

Könnyű belátni, hogy mivel a gömb átmérője egységnyi, a gömb egyenlítőjének pontjai a sík egységkörébe mennek át ennél a megfeleltetésnél. A gömb északi félgömbjének pontjait a fenti vetítés (sztereografikus projekció) az egységkör külsejébe, a déli félgömb pontjai pedig az egységkör belsejébe mennek át.

Jelöljük az ábrán látható P pontnak megfelelő komplex számot z-vel, a P' gömbi pontnak megfelelő komplex számot, a z komplex szám gömbi képét z'-vel. Ha a z szám a síkon minden határon túl távolodik, azaz $|z| \to \infty$, akkor $z' \to É$, azaz nagy abszolút értékű komplex számok gömbi képe közel van az É északi pólushoz. Magát az É északi pólust a sík ideális ∞ (végtelen) pontjának feleltetjük meg. Így a ∞ -nel lezárt sík és a teljes számgömb pontjai között a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű lesz.

A ∞ "környezeteit" a gömbi kép alapján úgy értelmezzük, mint azon z számok halmazát, amelyek gömbi képei a ∞ északi pólus körüli kicsiny gömbsüvegen fekszenek, a síkon pedig valamely nagy M sugarú körön kívül vannak.

A sík egyeneseit a sztereografikus vetítés nyilván a gömb északi sarkán áthaladó körökbe viszi át. A sík két egyenesének szöge mindig egyenlő a gömbön levő képkörök szögével. Ha ugyanis a síkon két egyenes egy P pontban metszi egymást, akkor a megfelelő képkörök a gömbön a P pontnak megfelelő P' pontokban és É-ben metszik egymást és nyilván mindkét helyen ugyanazon szögben. Az É pontban a képkörök érintői párhuzamosak az adott egyenesekkel, hiszen itt az érintősík párhuzamos az xy síkkal. Így az egyenesek szöge P-ben ugyanakkora, mint a képkörök szöge P'-ben. A sztereografikus vetítés tehát szögtartó (konformis). További nevezetes tulajdonsága a sztereografikus vetítésnek, hogy kört körbe visz át (speciális esetben egyenesbe). Ezt analitikusan a következő módon láthatjuk be.

Vezessünk be a térbe egy ξ, η, ζ derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy a ξ és η tengelyek az x ill. y tengellyel essenek egybe, a ζ tengely pedig az északi pólus felé mutasson.

A 4.1 ábráról leolvasható, hogy

$OQP' \Delta \sim POE \Delta$, ennélfogva

$\zeta : \rho' = \rho : 1$, azaz

$$\zeta = \rho'\rho \tag{4.1}$$

Továbbá

$QP'É \Delta \sim OPÉ \Delta$, amiből

$1 - \zeta : \rho' = 1 : \rho$, tehát

$$1 - \zeta = \frac{\rho'}{\rho} \tag{4.2}$$

A (4.1) és (4.2) egyenleteket összeadva:

$1 = \rho'\rho + \frac{\rho'}{\rho}$, innen

$\rho = \rho'(1 + \rho^2)$, azaz

$$\rho' = \frac{\rho}{1 + \rho^2}, \quad \text{tehát (4.1) alapján} \tag{4.3}$$

$$= \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \tag{4.4}$$

Minthogy $\varrho^2 = x^2 + y^2$, $\xi = \frac{\varrho'}{\varrho} x$, $\eta = \frac{\varrho'}{\varrho} y$, ezért a P pont (x,y) koordinátája és a P' pont ξ, η, ζ koordinátái között a következő összefüggések érvényesek:

Mivel $\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{1}{1 + \varrho^2} = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$, tehát:

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \tag{4.5}$$

illetve:

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}, \quad x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{1 - \zeta} \tag{4.6}$$

[itt felhasználtuk a (4.2) összefüggést is].

A sík egy körének vagy egyenesének az egyenlete

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad \text{alakú, ahol} \tag{4.7}$$

A,B,C,D valós együtthatók (egyenes esetében A = 0).

A képpontok koordinátái a (4.6) összefüggések alapján

$$A\zeta + B\xi + C\eta + D(1 - \zeta) = 0 \tag{4.8}$$

ami egy sík egyenlete, tehát a kör pontjainak gömbi képpontjai egy síkon vannak. A gömb és sík metszésvonala pedig kör, tehát a sztereografikus vetítés körtartó.

5. Lineáris függvények

Mielőtt a komplex változós függvények általános vizsgálatába kezdenénk, először a komplex függvények egyszerű, de fontos osztályát, a lineáris függvényeket tekintjük át.

A lineáris függvény általános alakja

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{5.1}$$

ahol a,b,c,d adott komplex számok és $ad - bc \neq 0$.

(Ha ugyanis $ad - bc = 0$, azaz $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, akkor

$$w = \frac{b}{d} \frac{\frac{a}{b} z + 1}{\frac{c}{d} z + 1} = \frac{b}{d}, \quad \text{vagyis a tört értéke állandó).}$$

A valósban egy $y = f(x)$ függvény menetét úgy szemléltetjük, hogy megrajzoljuk a függvény görbéjét. A komplexben két síkot kell alkalmaznunk. Az egyik síkon a z síkon megjelöljük a z független változó értékét, a w síkon pedig a hozzá tartozó $w = f(z)$ függvényértéket. Ez a függvény így a z síknak (vagy annak egy részhalmazának) a w síkra való leképzését származtatja. A számsíkok helyett számgömböket is használhatunk.

Az (5.1) függvény minden z értékhez egy w értéket rendel, kivéve, ha $z = -\frac{d}{c}$ feltesszük, hogy $c \neq 0$, ekkor ugyanis a nevező zérussá válik. Ha $z = -\frac{d}{c}$, akkor $|w| = \infty$, tehát célszerű az (5.1) függvény értelmezését úgy kiterjeszteni, hogy a $z = -\frac{d}{c}$ számnak a $w = \infty$ pontot feleltetjük meg. Ha viszont $|z| \to \infty$, akkor a határátmenet elvégzése előtt z-vel osztva:

$$w = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \to \frac{a}{c}$$

azaz a z sík ∞ pontjának a $w = \frac{a}{c}$ komplex számot feleltetjük meg. Ily módon az (5.1) függvény a ∞-ponttal lezárt z síkot a lezárt w síkba képezi. A számsíknak az ideális ponttal való kiegészítése tehát függvénytani szempóntból is indokolt. Az (5.1) alakú lineáris leképzéssel a ∞ pontot tetszőleges végesben levő pontba átvihetjük.

Könnyű kiszámítani az (5.1) függvény inverz függvényét:

$$wcz + wd = az + b$$

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a} \tag{5.2}$$

amely ugyancsak lineáris függvény.

Vizsgáljuk most az (5.1) függvény speciális eseteit.

1. Legyen $a = 1$, $c = 0$ és $d = 1$. Ekkor

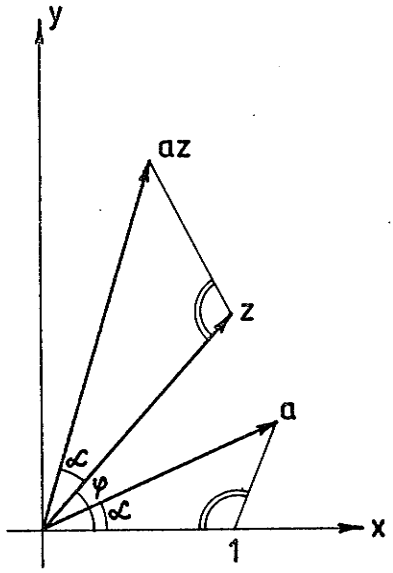
$$w = z + b \tag{5.3}$$

ami a z sík pontjainak b vektorral történő párhuzamos eltolódását jelenti.

2. Ha viszont $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, akkor

$$w = az \tag{5.4}$$

ami figyelembe véve, hogy $|w| = |a||z|$, $\arg w = \arg a + \arg z$, $|a|$ arányban történő nyújtást és $\arg a$-val való elforgatást (nyújtva forgatás) jelent.



5.1 ábra

3. Legyen $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$, ekkor

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\phi + i\sin\phi)} = \frac{1}{r}\,\frac{\cos\phi - i\sin\phi}{(\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\phi - i\sin\phi)} =$$

$$= \frac{1}{r}(\cos\phi - i\sin\phi) = \frac{1}{r}[\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)] \qquad (5.5)$$

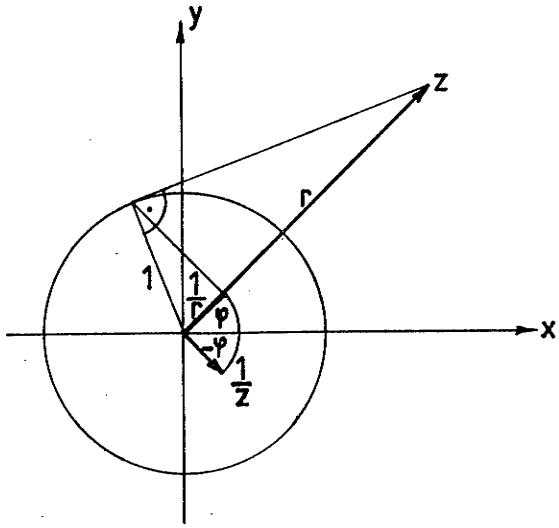
Tehát $|w| = \frac{1}{|z|}$, $\arg w = -\arg z$, vagyis az (5.5) leképzés tükrözést jelent az egységkörre, valamint tükrözés az x-tengelyre.

A z és $z' = \frac{1}{z}$ pontokat az egységkörre nézve tükrös pontoknak nevezzük. Megjegyezzük, hogy az egységkörre nézve tükrös pontok gömbi megfelelői az egyenlítőre nézve szimmetrikusan helyezkednek el.

Miként az 5.3 ábrán látható a P pont β szélességére vonatkozólag a

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = r$$

egyenlet érvényes, ennélfogva



5.2 ábra

a P' pont β' szélességére a

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta'}{2}\right) = \frac{1}{r}$$ összefüggés áll fenn, vagyis

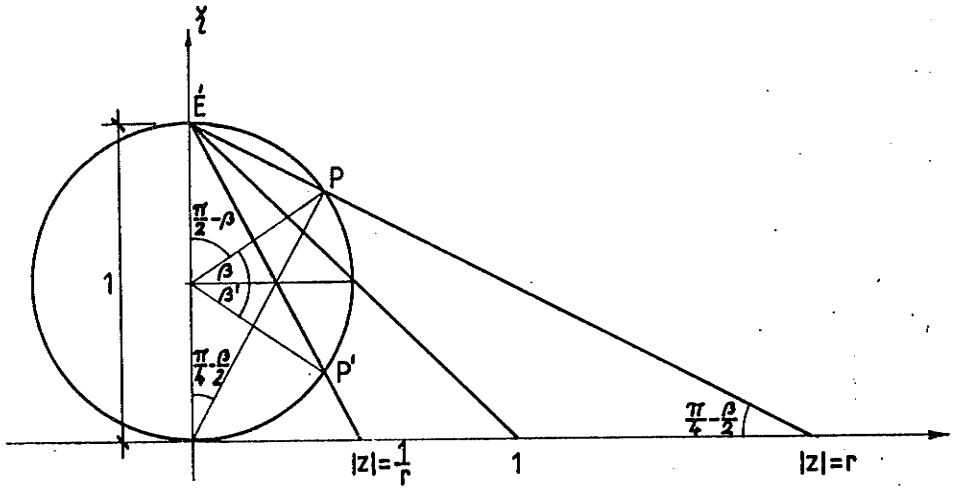
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta'}{2}\right) = r\cdot\frac{1}{r} = 1,$$ vagyis

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta'}{2}\right),$$ tehát

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta'}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta'}{2},$$ amiből

$$\beta' = -\beta .$$

Az egységkörre vonatkozó tükrözésnek tehát a számgömbön az egyenlítőre vonatkozó tükrözés felel meg. Mivel a gömbön az egyenlítőre vonatkozó tükrözés kör- és szögtartó, ugyanez érvényes az egységkörre vonatkozó inverzióra. Ebből következik, hogy az egységkört derékszögben metsző kör tükrözéskor önmagába megy át, mivel ilyen körnek a gömbön az egyenlítőre szimmetrikus helyzetű kör felel meg, amely a gömbön való tükrözéskor önmagába megy át. Továbbá, ha két - az egységkörre merőleges kör metszi egymást, akkor a két metszéspont egymás tükörképe az egységkörre vonatkozólag.
(A gömbön ugyanis a metszéspontoknak megfelelő pontok az egyenlítőre nézve szimmetrikus helyzetűek.) Ez utóbbi állítás meg is fordítható:



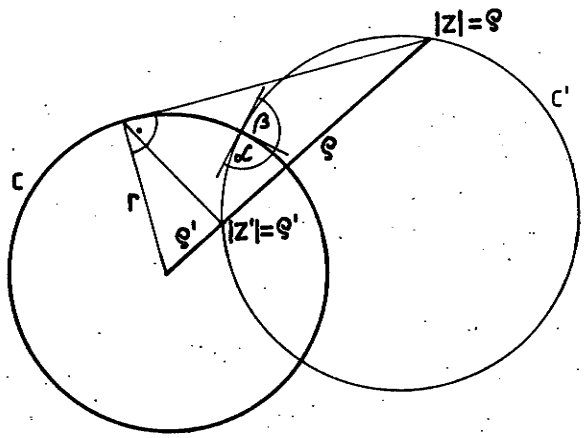
5.3 ábra

7. Tétel:

Ha egy kör átmegy két olyan ponton, amelyek az egységkörre vonatkozólag egymás inverzei, akkor ez a kör merőleges az egységkörre (derékszögben metszi).

Megjegyezzük, hogy az egységkörre való inverzióhoz teljesen analóg módon szerkesztjük tetszőleges c körre vonatkozó inverziót. Legyen z egy komplex szám és c egy kör a számsíkon. Ekkor a z pont c-re vonatkozó z' inverze a c kör középpontját z-vel összekötő egyenesen van és ha $|z| = \varrho$, $|z'| = \varrho'$, akkor

$$\varrho : r = r : \varrho' \ , \quad \text{vagyis} \quad \varrho\varrho' = r^2 .$$



5.4 ábra

8. Tétel:

Ha egy c' kör átmegy a c-re vonatkozólag tükrös z és z' pontokon, akkor c' merőleges c-re.

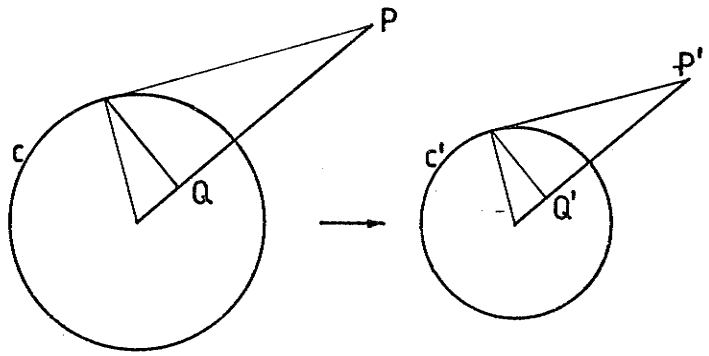
Bizonyítás:

A c-re vonatkozó inverzió során a c' körvonal c -n belüli és c -n kívüli részei felcserélődnek, az inverzió szögtartó volta miatt az ábrán látható α és β szögek egyenlők, ami csak úgy lehetséges, ha mindkettő derékszög.

Ha most a körre vonatkozó inverziót és az egyenesre való tükrözést közös névvel tükrözésnek nevezzük, akkor a lineáris leképzésre vonatkozólag a következő tételt mondhatjuk ki:

9. Tétel:

A $w = \frac{1}{z}$ leképzés a körre vagy egyenesre vonatkozó tükörpontokat a képkörre ill. képegyenesre vonatkozó tükörpontokba viszi át.

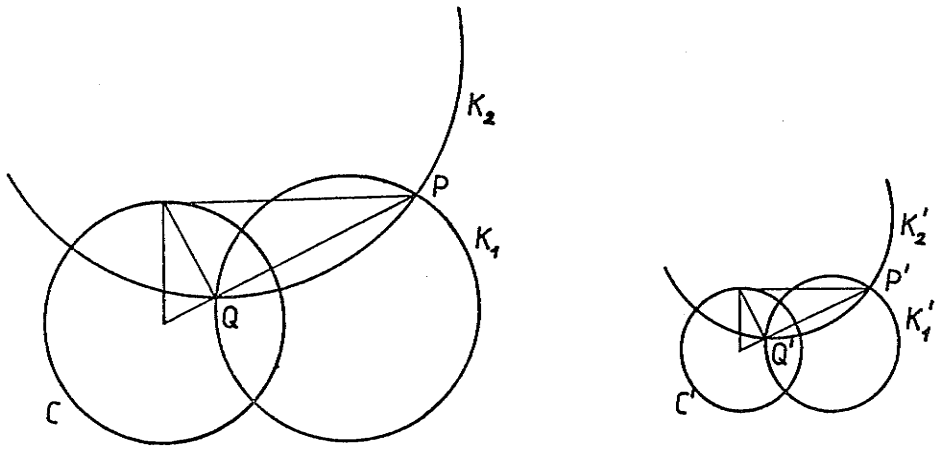


5.5 ábra

Bizonyítás:

Legyen a c körnek az egységkörre vonatkozó inverz képe a c' kör. Legyenek P és Q a c körre vonatkozó tükrös pontok. Rajzoljunk két kört K_1-et és K_2-t, amelyek átmennek a P és Q pontokon. Ekkor a 8. tétel alapján K_1 és K_2 merőlegesek a c körre.

Az egységkörre vonatkozó inverzió kör és szögtartó volta miatt a K_1 és K_2 körök inverz képei K_1' és K_2' merőlegesek a c' körre. Ebből viszont következik, hogy K_1' és K_2' metszéspontjai P' és Q' egymás tükörképei c'-re vonatkozólag.



5.6 ábra

Az (5.1) formulával megadott általános lineáris leképzés az (5.3); (5.4); (5.5) leképezésekből tevődik össze. Ugyanis a

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

formulában elvégezve a kijelölt osztást:

$$(az + b):(cz + d) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} =$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \qquad (5.6)$$

alakra hozható.

Mivel az (5.3) eltolás és (5.4) nyújtott forgatás nyilván kör- és szögtartóak, a fenti 9. tétel az (5.1) általános lineáris leképzésre is érvényes.

6. Speciális lineáris leképezések. Kettősviszony

Legyenek z_1, z_2, z_3, z_4 a z-komplex sík pontjai, amelyek képpontjai a w síkon a

$w = \frac{az + b}{cz + d}$ lineáris leképzésnél a

w_1, w_2, w_3, w_4 pontok.

A lineáris leképzés érdekes és fontos tulajdonsága, hogy

$$(w_1,w_2,w_3,w_4) = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} : \frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} =$$

$$= (z_1,z_2,z_3,z_4) \qquad (6.1)$$

azaz a fenti kettősviszony (hányadosok hányadosa) a független változó pontokra vonatkozólag ugyanaz, mint a függvényértékekre, vagyis a kettősviszony invariáns a lineáris leképezéssel szemben.

Ez könnyen igazolható a $w = z + b$, $w = az$ és $w = \frac{1}{z}$ speciális lineáris leképzések esetében, az általános eset pedig ezekből tevődik össze. (Lásd az (5.6) formulát!)

Adjunk meg most a z síkon három tetszőleges pontot: z_1,z_2,z_3 -at és a w síkon három tetszőleges pontot: w_1, w_2, w_3-at. Érvényes a következő

10. Tétel:

Létezik egy és csakis egy olyan lineáris leképzés, amely a z_1,z_2,z_3 adott pontokat az előírt w_1,w_2,w_3 pontokba viszi át. Ezt a leképzést a

$$(w_1,w_2,w_3,w) = (z_1,z_2,z_3,z)$$

kettősviszonyok közötti egyenlőség által adhatjuk meg.

Bizonyítás:

A $$\frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} \cdot \frac{w - w_2}{w - w_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1}$$

egyenletet w-re megoldva

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

alakú lineáris leképzést kapunk.

A felső félsík lineáris leképzése az egységkör lemezre

A felső félsíkot a z számsíkon az $\operatorname{Im} z \geq 0$ egyenlet jellemzi.
Határozzuk meg azt a

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (6.2)$$

lineáris leképzést, amely a z sík felső félsíkját a w sík $|w| \leq 1$ egységkör lemezére képezi le.

Egy ilyen leképzés a felső félsík határát, az x valós tengelyt az egységkörvonalba kell, hogy átvigye, a valós tengelyre tükröző z és $\bar{z}$ pontokat pedig az egységkörre nézve tükrös w és $\frac{1}{\bar{w}}$ pontokba kell, hogy leképezze (9. tétel).

A $w = 0$ pont tükörképe az $\frac{1}{\bar{w}} = \infty$ pont.

A (6.2) formulában $w = 0$, ha $z = -\frac{b}{a}$, $w =$, ha $z = -\frac{d}{c}$, tehát $-\frac{b}{a}$ és $-\frac{d}{c}$ egymás konjugáltjai kell legyenek (tükröző pontok a valós számegyenesre), tehát ha

$$-\frac{b}{a} = \alpha, \quad -\frac{d}{c} = \bar{\alpha}, \quad \text{azaz} \quad b = -a\alpha, \quad d = -c\bar{\alpha}.$$

Tehát

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az - a\alpha}{cz - c\bar{\alpha}} = \frac{a}{c}\,\frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

A $z = 0$ pont a felső félsík egyik határpontja, amely a $|w| = 1$ kör egyik pontjába kell, hogy átmenjen, azaz

$$|w| = \left|\frac{a}{c}\right| \left|\frac{0 - \alpha}{0 - \bar{\alpha}}\right| = \left|\frac{a}{c}\right| \left|\frac{-\alpha}{-\bar{\alpha}}\right| = 1, \quad \text{tehát} \quad \left|\frac{a}{c}\right| = 1$$

kell legyen (mivel $|-\alpha| = |-\bar{\alpha}|$)

A keresett leképzés a fentiek alapján

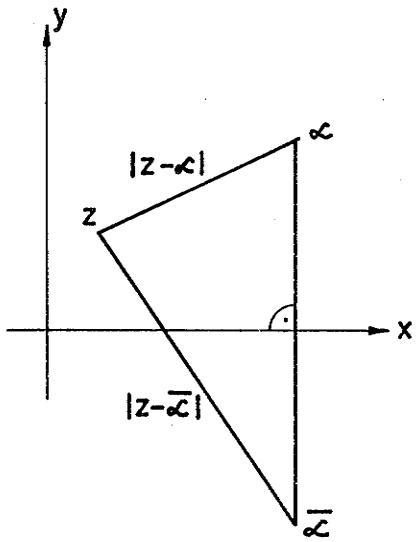
$$w = K\,\frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \tag{6.3}$$

alakú kell legyen, ahol $|K| = 1$. Mivel $z = \alpha$ esetén $w = 0$, vagyis a $z = \alpha$ pontot a (6.3) leképzés a $|w| = 1$ egységkör origójába viszi, kell, hogy α a z sík felső félsíkjának belső pontja legyen, azaz $\operatorname{Im}\alpha > 0$ teljesüljön. Valóban, ha $\operatorname{Im}\alpha > 0$, akkor a felső félsík tetszőleges z pontjára

$$\frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \leq 1, \quad \text{amint az ábrából is látható.}$$

$\operatorname{Im}\alpha > 0$ esetén tehát

$$|w| = |K| \left|\frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}\right| \leq 1.$$



6.1 ábra

7. Komplex függvények

Ha a komplex z sík valamely H halmazának minden pontjához hozzárendelünk egy meghatározott w komplex számot, akkor azt mondjuk, hogy w a z komplex szám függvénye:

$$w = f(z) \tag{7.1}$$

ahol f a számítási utasítást jelöli.

A (7.1) formulában z a független változó, a H halmaz az f(z) függvény értelmezési tartománya (a z változási tartománya).

Komplex függvényekre már láttunk példát a lineáris függvények vizsgálatakor. Mutatunk még néhány egyszerű példát.

1. Ha a $w = f(z)$ függvény úgy van értelmezve, hogy a w függvényérték minden z értékre ugyanaz a c szám:

$$w = f(z) = c$$

akkor azt mondjuk, hogy w állandó.

2. Ha $w = f(z) = z^2$, akkor mivel $z = x + iy$

$$f(z) = x^2 - y^2 + i\,2xy$$

Általában, ha $w = f(z)$ és $z = x + iy$, akkor

$w = u(x,y) + i\,v(x,y)$ alakban írható.

3. A lineáris függvények közvetlen általánosításai a racionális függvények, amelyekben a számolási utasítás a változó és az állandó számokon kívül csak racionális műveleteket tartalmaz:

$$w = \frac{b_o + b_1 z + b_z z^2 + \ldots + b_k z^k}{a_o + a_1 z + \ldots + a_\ell z^\ell \ldots} \qquad (7.2)$$

Ha számítási utasításban csak egész műveletek fordulnak elő, akkor

$$w = a_o + a_1 z + \ldots + a_n z^n \quad \text{racionális} \qquad (7.3)$$

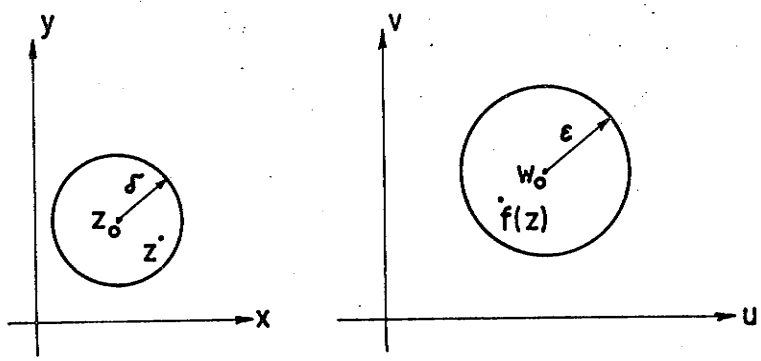
egészfüggvényről beszélünk.

<u>Definíció:</u>

A $w = f(z)$ függvény határértéke a $z_o \in H$ pontban a w_o komplex szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$, hogy

$$|f(z) - w_o| < \varepsilon \qquad \text{hacsak } |z - z_o| < \delta$$

A fenti definíció ekvivalens azzal, hogy w_o akkor határértéke $f(z)$-nek, ha $z_1, z_2, \ldots, z_n \ldots$ a z_o-hoz konvergáló sorozat a z síkon, akkor a megfelelő $f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_n)$, függvényértékek sorozata a w_o számúhoz konvergál a w síkon. (A definícióban feltettük, hogy z_o a H halmaznak torlódási pontja.)



7.1 ábra

A határérték jelölése: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, vagy $f(z) \to w_0$, $z \to z_0$. A fenti definíció formálisan megegyezik a valós függvények határértékeinek definíciójával. Ugyanígy megegyeznek a határértékekkel való számolási szabályok is.

a) Ha a H halmazon az $f_1(z)$ és $f_2(z)$ függvények mindegyike értelmezve van, akkor ott értelmezve van a

$w = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$ lineáris kombináció is, ahol c_1 és c_2 tetszőleges komplex számok.

Ha $z \to z_0$ esetén $f_1(z) \to \omega_1$, $f(z) \to \omega_2$, akkor

$$c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) \to c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2 \tag{7.4}$$

Speciálisan

$$f_1(z) \pm f_2(z) \to \omega_1 \pm \omega_2, \quad c_1 f_1(z) \to c_1 \omega_1 .$$

b) Ugyanazon feltételek mellett mint a)-ban

$$f_1(z) \cdot f_2(z) \quad \omega_1 \omega_2 \tag{7.5}$$

c) Ha $\omega_2 \neq 0$, továbbá $f_2(z) \neq 0$ a $0 < |z - z_0| < \delta$ tartományban, akkor

$$\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \to \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{7.6}$$

Néhány egyszerű példa határérték kiszámítására:

1. Ha $w = f(z) = c$, akkor $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c$ (akármi is a z_0 értéke).

2. Ha $w = f(z) = z$, akkor $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = z_0 = f(z_0)$

3. Ha $f(z) = z^k$, akkor a b) szabály ismételt alkalmazásával

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} z^k = z_0^k = f(z_0)$$

4. Ha $f(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k$, akkor az a) és b) szabályok ismételt alkalmazásával

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = a_o + a_1 z_o + \ldots + a_k z_o^k = f(z_o)$$

Definíció:

A $w = f(z)$ függvényt értelmezési tartományának valamely z_o helyén akkor nevezzük folytonosnak, ha

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$$

vagyis a függvény z_o pontbeli határértéke megegyezik a függvény helyettesítési értékével.

A fenti definíció tömören azt fejezi ki, hogy $f(z)$ pontosan akkor folytonos a z_o pontban, ha tetszőleges, a z_o-hoz tartozó $\{z_n\}$ sorozat választásakor a megfelelő $\{f(z_n)\}$ függvényértékek sorozata $f(z_o)$-hoz konvergál.

Könnyű belátni, hogy a fenti 1.-4. példákban szereplő függvények folytonosak.

A valós differenciálszámítás mintájára definiáljuk az $f(z)$ komplex változós függvény differenciálhatóságát a következő módon:

Definíció:

A $w = f(z)$ függvényt a z_o pontban differenciálhatónak nevezzük, ha minden z_n z_o sorozatra a

$$\frac{f(z_n) - f(z_o)}{z_n - z_o} \tag{7.7}$$

különbségi hányadosok sorozata ugyanazon határértékhez konvergál. E határértéket

$$\lim_{z_n \to z_o} \frac{f(z_n) - f(z_o)}{z_n - z_o} = f'(z_o) = w'_o \tag{7.8}$$

a $w = f(z)$ függvény z_o pontbeli differenciálhányadosának vagy deriváltjának nevezzük.

Ez a definíció ekvivalens azzal, hogy

$$\left| f'(z_o) - \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} \right| < \varepsilon \quad \text{hacsak} \quad |z - z_o| < \delta(\varepsilon) \tag{7.9}$$

Nyilvánvaló, hogy a differenciálhatóság maga után vonja a folytonosságot, hiszen $z \to z_o$ esetén $f(z) \to f(z_o)$ kell, hogy teljesüljön ahhoz, hogy a különbségi hányados véges határértékhez tartson.

Ha egy $f(z)$ függvény egy H tartomány minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy $f(z)$ a H tartományban holomorf. A differenciálhatóságot a ∞ pontban nem értelmezzük. A h holomorfitási tartomány nem tartalmazhatja a ∞ pontot.

A differenciálási szabályok teljesen megegyeznek a valós függvények differenciálási szabályaival és bizonyításuk is azonos módon történik.

<u>A legfontosabb differenciálási szabályok:</u>

Ha a z_o helyen mind az $f_1(z)$, mind az $f_2(z)$ komplex függvény differenciálható, akkor ott az

1. $f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$ függvény is differenciálható és

$$f'(z_o) = c_1 f_1'(z_o) + c_2 f_2'(z_o) \tag{7.10}$$

2. Ugyanott az $f(z) = f_1(z)\, f_2(z)$ függvény is differenciálható és

$$f'(z) = f_1'(z_o) f_2(z_o) + f_1(z_o) f_2'(z_o) \tag{7.11}$$

3. Ha $f_2(z_o) \neq 0$, akkor a z_o pontban az $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ függvény is differenciálható és

$$f'(z_o) = \frac{f_1'(z_o) f_2(z_o) - f_1(z_o) f_2'(z_o)}{f_2^2(z_o)} \tag{7.12}$$

Példák differenciálható függvényekre:

1. Ha $f(z) = c$, ahol c tetsz. komplex szám, akkor

$$f'(z_o) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} = \lim_{z \to z_o} \frac{c - c}{z - z_o} = 0 \tag{7.13}$$

minden z_o helyen, tehát állandó deriváltja zérus a komplexben is.

2. Ha $f(z) = z$, akkor

$$f'(z_o) = \lim_{z \to z_o} \frac{z - z_o}{z - z_o} = 1 \quad \text{minden } z_o \text{ helyen.} \quad (7.14)$$

3. A szorzat deriválási szabály alapján (2. szabály) igazolható, hogy ha $f(z) = z^2 = z \cdot z$, akkor

$$f'(z) = z'z + z\,z'\Big|_{z=z_o} = 2z_o, \quad \text{mivel} \quad z' = 1. \quad (7.15)$$

Továbbá, ha $f(z) = z^k$, akkor a fenti szabály ismételt alkalmazásával:

$$f'(z_o) = k\, z_o^{k-1} \quad \text{adódik.} \quad (7.16)$$

4. Ha $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, akkor a 3.szabály alapján:

$$f'(z_o) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}\Bigg|_{z=z_o} \quad (7.17)$$

5. Ha az $f_1(z)$ függvény értelmezési tartománya a H_1 halmaz, értékkészlete pedig egy részét képezi egy másik, $f_2(z)$ függvény értelmezési tartományának és mind $f_1(z)$, mind $f_2(z)$ differenciálható, akkor az $f(z) = f_2[f_1(z)]$ összetett függvény differenciálása a láncszabály szerint történik:

$$f'(z) = f_2'[f_1(z)]\, f_1'(z)\Big|_{z=z_o} \quad (7.18)$$

6. A 2., 3. és 4. szabályok alapján következik, hogy a z változó minden polinomja (racionális egészfüggvénye), továbbá minden racionális törtfüggvénye:

$$\frac{a_o + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_o + b_1 z + \ldots + b_m z^m}$$

differenciálható (az utóbbi minden olyan helyen, ahol a nevező nem zérus).

Példák <u>nem differenciálható</u> függvényekre.

a) Legyen $f(z) = \mathrm{Re}\, z$. Vezessük be a $z = z_o + h$ jelölést, ekkor

$$\frac{\mathrm{Re}(z_o + h) - \mathrm{Re}(z_o)}{h} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h \text{ valós} \\ 0, & \text{ha } h \text{ tiszta képzetes.} \end{cases}$$

b) Legyen $f(z) = \bar{z}$

Ekkor

$$\frac{\overline{z_o + h} - \bar{z}_o}{h} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h \text{ valós} \\ -1, & \text{ha } h \text{ tiszta képzetes.} \end{cases}$$

8. A Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek. Laplace-egyenlet

A $w = f(z)$ függvény differenciálhatóságát úgy definiáltuk, hogy az

$\frac{f(z + h) - f(z)}{h}$ hányados $h \to 0$ esetén ugyanazon $f'(z)$ határértékhez kell, hogy tartson, bármilyen úton tart is a h komplex szám zérushoz. A $w = f(z)$ komplex függvény $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ alakban írható. Vizsgáljuk meg, milyen tulajdonságai vannak az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ kétváltozós függvényeknek, ha $f(z)$ differenciálható. Vegyük először azt az esetet, amikor h valós, azután pedig amikor h tiszta imaginárius számokon át tart 0-hoz.

Ha h valós, akkor

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u(x+h,y)+i\,v(x+h,y)-[u(x,y)+i\,v(x,y)]}{h} =$$

$$= \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\,\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h} \to u_x + iv_x$$

Ha h tiszta képzetes: $h = ik$, akkor

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u(x,y+k)+i\,v(x,y+k)-[u(x,y)+i\,v(x,y)]}{ik} =$$

$$= \frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{ik} + i\,\frac{v(x,y+k)-v(x,y)}{ik} \to \frac{1}{i}\,u_y+v_y =$$

$$= -iu_y+v_y$$

Mivel a határérték mindkét esetben ugyanaz kell legyen, tehát

$u_x + i\,v_x = -i\,u_y + v_y$ kell, hogy teljesüljön.

Ebből viszont a

$$u_x = v_y \qquad (8.1)$$
$$u_y = -v_x$$

összefüggések adódnak, amelyeket Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenletnek nevezünk.

Ha tehát a $w = f(z)$ függvény differenciálható, akkor $f(z)$ valós - és képzetes részének mindkét parciális deriváltja létezik és közöttük a (8.1) relációk is fennállnak.

Megjegyezzük, hogy a (8.1) relációk teljesülése csak szükséges, de nem elégséges feltétele $f(z)$ differenciálhatóságának. Tehát abból a tényből, hogy valamely (x,y) pontban a (8.1) egyenletek teljesülnek, még nem következik, hogy $f(z)$ az $x + iy$ helyen differenciálható.

Tekintsük pl. az

$$f(z) = \sqrt{|xy|}$$

függvényt. Ekkor $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$, $v(x,y) = 0$. A $v(x,y)$ mindenütt zérus, $u(x,y)$ pedig a koordinátatengelyek mentén zérus, így az origóban a Cauchy-Riemann-egyenletek teljesülnek. Mégis az $f(z)$ függvény a $z = 0$ pontban nem differenciálható, hiszen ha z valamely $(\alpha + i\beta)$ irányból tart zérushoz, azaz $z = (\alpha + i\beta)r$, ahol r valós, pozitív és $r \to 0$, akkor $x = \alpha r$, $y = \beta r$, továbbá

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{f(z)}{2} = \frac{r\sqrt{|\alpha\beta|}}{r(\alpha + i\beta)} \to \frac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha + i\beta}$$

vagyis a határérték függ az $\alpha + i\beta$ iránytól.

Ha azonban az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvényekről feltesszük, hogy elsőrendű parciális deriváltjaik egy tartomány minden pontjában léteznek és folytonosak, akkor a Cauchy-Reimann-egyenletek már elégséges feltételt is jelentenek $f(z)$ differenciálhatóságára nézve. Ennek belátásához emlékeztetünk, hogy a kétváltozós függvények növekménye:

$$\Delta u = z(x + h, y + k) - u(x,y) = u_x h + u_y k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k,$$

ahol

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0 \quad \text{ha}$$
$$h, k \to 0$$

Továbbá:

$$\Delta v = v_x h + v_y k + \eta_1 h + \eta_2 k, \quad \text{ahol } \eta_1, \eta_2 \to 0, \quad \text{ha}$$
$$h, k \to 0.$$

Ezek alapján, valamint a (8.1) összefüggéseket felhasználva:

$$f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v = (u_x + iv_x)(h + ik) + \varrho,$$

ahol $|\varrho| \leq [(|\varepsilon_1| + |\eta_1|)|h| + (\varepsilon_2| + |\eta_2|)|k|]$

Bevezetve a $h + i\,k = \Delta z$ jelölést

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\eta + i\,k} = u_x + v_x + \frac{\varrho}{h + ik},$$

ahol $\varrho \to 0$, ha $h,k \to 0$

Tehát $f'(z)$ létezik.

Tételezzük most fel, hogy $u(x,y)$ és $v(x,y)$ második parciális deriváltjai is léteznek és folytonosak (később bebizonyítjuk, hogy valóban ez a helyzet, lásd: (8.1) pont).

A Cauchy-Riemann-egyenletek mindkét oldalán ismét deriválva:

$$u_x = y \qquad u_y = -v_x$$

$$u_{xx} = y_{yx} \qquad u_{yy} = -v_{xy}$$

Innen:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Továbbá:

$$u_{xy} = v_{yy} \qquad u_{yx} = -v_{xx}, \quad \text{amelyből}$$

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$$

Tehát valamely K tartományban holomorf függvény valós és képzetes része egyaránt kielégíti a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Laplace-egyenletet.}$$

Az olyan kétváltozós függvényeket, amelyek a Laplace-egyenletet kielégítik, harmonikus függvényeknek nevezzük. Ilyen harmonikus függvények pl.: $x^2 + y^2$, $e^x \cos y$, $\log(x^2 + y^2)$.

9. Holomorf függvény által létesített leképzés

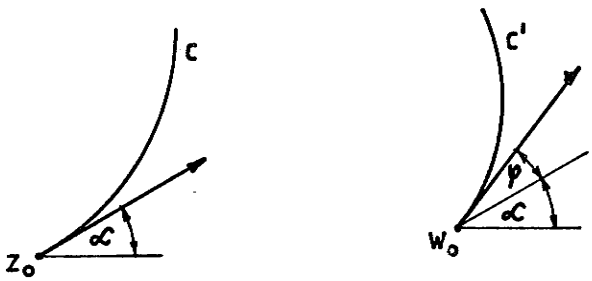
(Konformis leképzés)

Legyen a $w = f(z)$ függvény egy K tartományban holomorf, továbbá legyen $z_0 \in K$ olyan pont, ahol $f'(z_0) \neq 0$. Ha a z változó a z_0-ponthoz olyan C folytonos görbe mentén közeledik, amely görbének a z_0 pontban határozott félérintője van, amely α-szöget zár be az x tengellyel.

Ekkor a $w = f(z)$ változó a $w = f(z_0)$ ponthoz egy C' görbén fog közeledni. Mivel

$$\arg(w - w_0) - \arg(z - z_0) = \arg \frac{w - w_0}{z - z_0} \qquad \arg f'(z_0) = \phi$$

ezért a C' görbének is határozott félérintője van w_0-ban és ez a w sík valós tengelyével $\alpha + \phi$ szöget zár be.



9.1 ábra

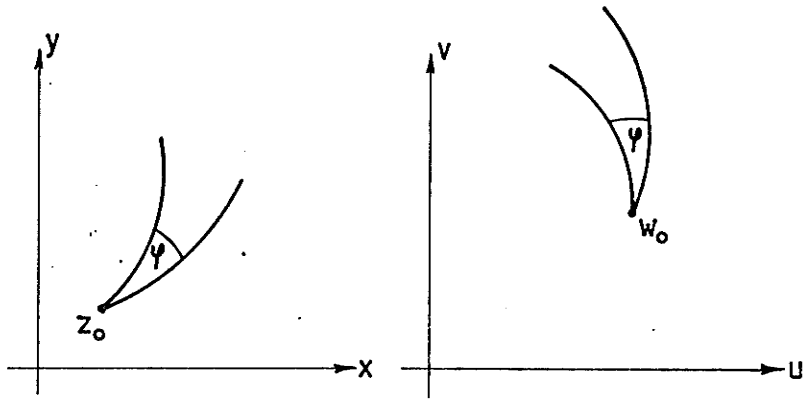
A C görbe tehát ϕ szöggel elfordult. Minthogy α csak a z_0 ponttól függ, tehát minden a z_0-ba futó görbe ugyanazon ϕ-szöggel fordul el, vagyis a $w = f(z)$ leképzés a z_0 pontban szögtartó (konformis). A leképzés a szögek forgásirányát is megtartja.

Továbbá

$$\left|\frac{w - w_0}{z - z_0}\right| \to |f'(z_0)|$$

azaz

$$|w - w_0| \to |f'(z_0)|\,|z - z_0|$$



9.2 ábra

vagyis a z_o pont környezetében a $w = f(z)$ leképzés a távolságokat $|f'(z_o)|$:1 arányban nagyítja fel (aránytartó).

10. Komplex változós függvény integrálja

A $w = f(z)$ komplex függvény integrálját a valós függvények görbementi integráljának analógiájára értelmezzük és kiszámítását is arra vezetjük vissza.

Legyen K a z sík egy tartománya és a G a K tartományban futó görbe, amely a K-beli z_o és Z pontokat köti össze. Legyen a $w = f(z)$ függvény a G görbén folytonos (akkor ott egyenletesen folytonos is).

Feltesszük, hogy a G görbe rektifikálható (van ívhossza), azaz a G görbét felosztva a $z_o, z_1, \ldots, z = Z$ osztópontokkal, a $\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$ hurpoligonok hosszai közös korlát alatt maradnak.

A G görbén egy befutási irányt úgy rögzíthetünk, hogy a z változót egy t paraméter függvényévé tesszük, $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Miközben t befutja a $[\alpha, \beta]$ intervallumot, $z(t)$ egy G görbét ír le a $z_o = z(\alpha)$ és $Z = z(\beta)$ pontok között.

Válasszunk a z_{k-1}, z_k íven egy ζ_k közbülső pontot és képezzük az

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \qquad (10.1)$$

összeget. A G görbe rektifikálhatósága, valamint f(z) folytonossága a G görbén biztosítja a (10.1) alakú összegek határértékének létezését, ha G felosztását (az osztópontokat) minden határon túl sűrítjük, azaz létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz \qquad (10.2)$$

határérték, amelyet az f(z) komplex függvény határozott integráljának nevezünk.

A (10.2) integrál kiszámítását visszavezetjük a valós görbementi integrál kiszámítására. A z változót egy t paraméter függvényévé tesszük.

Legyen $z(t) = x(t) + i(y)t$; $f[z(t)] = u[x(t), y(t)] + iv[x(t),y(t)]$

Ekkor $\dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \dot{x}(t) + i\,\dot{y}(t)$, továbbá

$$\int_{z=z_0}^{Z} f(z)dz = \int_{t=\alpha}^{\beta} f[z(t)]\,\dot{z}(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta}\{u[x(t),y(t)] +$$

$$+ i\,v[x(t),\ y(t)]\}[\dot{x}(t) + i\,\dot{y}(t)]dt = \qquad (10.3)$$

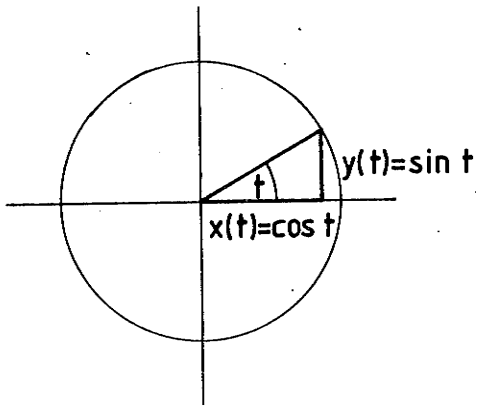
$$= \int_{\alpha}^{\beta} (u + iv)(\dot{x} + i\,\dot{y})dt = \int_{\alpha}^{\beta} (u\dot{x} - v\dot{y})dt + i\int_{\alpha}^{\beta} (u\dot{y} + v\dot{x})dt$$

<u>Példák:</u>

1. Legyen G az egységkör, $f(z) = \frac{1}{z}$

   Ekkor $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$

   $\dot{x}(t) = -\sin t$, $\dot{y}(t) = \cos t$



10.1 ábra

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$u[x(t),y(t)] = \frac{x(t)}{x^2(t) + y^2(t)} = \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos t$$

$$v[x(t),y(t)] = \frac{-y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} = \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = -\sin t$$

Tehát a (10.3) formula alapján:

$$\int_G \frac{dz}{z} \int_{t=o}^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t)dt + i \int_o^{2\pi} (\cos^2 t +$$

$$+ \sin^2 t)dt = 2\pi i$$

A komplex integrál kiszámítása gyakran az integrál definíciója alapján közvetlenül a legegyszerűbb.

2. Legyen K a teljes z sík, $f(z) = 1$, a G görbe tetszőleges. Ekkor a (10.1) integrálközelítő összeg:

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} 1.(z_k - z_{k-1}) = z_1 - z_o + z_2 - z_1 + \ldots +$$

$$+ Z - z_{n-1} = Z - z_o \,. \qquad (10.4)$$

Amennyiben G zárt görbe, azaz $Z = z_o$, akkor $I_n = 0$, azaz

$$\oint_G 1 \cdot dz = 0 \qquad (10.5)$$

3. K legyen ismét a teljes z sík, $f(z) = z$. Ekkor

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k (z_k - z_{k-1})$$

ahol ζ_k a $\widehat{z_{k-1}, z_k}$ ívdarab tetszőleges pontja. Válasszuk ζ_k-nak ezen ívdarab egyik határpontját. Legyen $\zeta_k = z_k$, ekkor

$$I_n^{(1)} = z_1(z_1 - z_o) + z_2(z_2 - z_1) + \ldots + Z(z - z_{n-1})$$

Válasszuk $\zeta = z_{k-1}$-et, ekkor

$$I_n^{(2)} = z_o(z_1 - z_o) + z_1(z_2 - z_1) + \dots + z_{n-1}(Z - z_{n-1})$$

Képezzük az $I_n = \frac{1}{n}(I_n^{(1)} + I_n^{(2)})$ számtani közepet; ekkor

$$I_n = \frac{1}{2}[(z_1 + z_o)(z_1 - z_o) + (z_2 + z_1)(z_2 - z_1) + \dots +$$

$$+ (Z + z_{n-1})(Z - z_{n-1})] = \frac{1}{2}[Z^2 - z_o^2] \qquad (10.6)$$

Amennyiben G zárt görbe, azaz $Z = z_o$, akkor $I_n = 0$, azaz

$$\oint_G z\, dz = 0. \qquad (10.7)$$

4. Legyen K a z_o pont körüli r -sugarú kör, $f(z) = (z - z_o)^n$. Ekkor

$$x(t) = x_o + r \cos t, \qquad y(t) = y_o + r \sin t$$

$$\dot{x}(t) = - r \sin t, \qquad \dot{y}(t) = r \cos t$$

$$z(t) - z_o = (x(t) - x_o) + i[y(t) - y_o] = r(\cos t + i \sin t) =$$

$$= r\, e^{it}$$

$$I = \int_{t=o}^{2\pi} r^n e^{int}(- r \sin t + i\, r \cos t)dt =$$

$$= r^{n+1} \int_{t=o}^{2\pi} (\cos n\, t + i \sin n\, t)(-\sin t + i \cos t)dt =$$

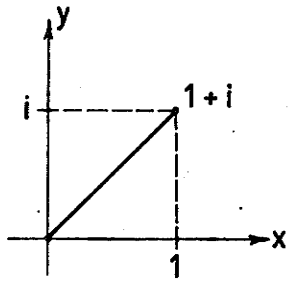
$$= -r^{n+1} \int_{t=o}^{2\pi} (\cos n\, t \sin t + \sin n\, t \cos t)dt +$$

$$+ i\, r^{n+1} \int_{t=o}^{2\pi} (\cos n\, t \cos t - \sin n\, t \sin t)dt =$$

$$= - r^{n+1} \int_{t=o}^{2\pi} \sin(n + 1)t\, dt + i\, r^{n+1} \int_{t=o}^{2\pi} \cos(n+1)t\, dt = 0. \qquad (10.8)$$

Ha $n = -1$, akkor

$$\oint_G \frac{dz}{z - z_o} = 2\pi i. \qquad (10.9)$$



10.2 ábra

5. Legyen $f(z) = \mathrm{Re}\,z = x$, $z_o = 0$, $Z = 1 + i$.
Ekkor $u[x(t),y(t)] = x(t)$, $v[x(t), y(t)] = 0$

a) Válasszuk a G görbének az origót az $1+i$ ponttal összekötő egyenes darabot (lásd: 10.2 ábra!)

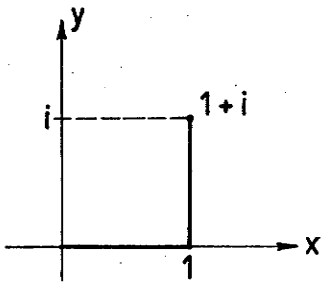
$$x(t) = t, \qquad y(t) = t, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\dot{x}(t) = 1, \qquad \dot{y}(t) = 1.$$

$$I = \int_{t=o}^{1} (u\dot{x} - v\dot{y})dt + i\int_{o}^{1} (u\dot{y} + v\dot{x})dt = \int_{o}^{1} t\,dt +$$

$$+ i\int_{o}^{1} t\,dt = \frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2} = \frac{1+i}{2}$$

b) Válasszuk meg most a G integrációs útnak a G_1:[0,1] valamint a G_2:[1, 1+i] szakaszokat (lásd: 10.3 ábra):



10.3 ábra

$$\int_G = \int_{G_1} + \int_{G_2}$$

A G_1 görbén: $x(t) = t, \quad y(t) = 0$

$\dot{x}(t) = 1, \quad \dot{y}(t) = 0.$

A G_2 görbén: $x(t) = 1, \quad y(t) = t$

$\dot{x}(t) = 0, \quad \dot{y}(t) = 1. \quad (0 \leq t \leq 1)$

A (10.3) formula alapján:

$$\int_G \operatorname{Re} z \, dz = \int_{t=o}^{1} t \, dt + i \int_{t=o}^{1} 1 \cdot dt = \frac{1}{2} + i.$$

Ebben a példában az adott $f(z) = \operatorname{Re} z$ függvény adott határpontok (0 és 1+i) közötti integrálját különböző utakon számítva különböző eredményt kaptunk. (Emlékeztetünk rá, hogy az $f(z) = \operatorname{Re} z$ függvény folytonos, de nem differenciálható.)

11. Egyszerű integrálértékek

Az alábbi egyszerű tételek az integrál definíciója alapján közvetlenül adódnak:

1. $$\int_{z_o(G)}^{Z} = -\int_{Z(G)}^{z_o}$$

azaz, ha a G görbe befutási irányát megváltoztatjuk, az integrál előjelet vált.

2. Ha a G görbén a z_o és Z pontok között egy z' közbenső pontot választunk, akkor

$$\int_{z_o(G)}^{Z} = \int_{z_o}^{z'} + \int_{z'}^{Z}$$

azaz az integrációs út szakaszokra bontható.

3. $$\int_G c \, f(z)dz = C \int_G f(z)dz$$

4. $\int_G [f_1(z) + f_2(z)]\,dz = \int_G f_1(z)dz + \int_G f_2(z)dz$

azaz összeg integrálja az integrálok összegével egyenlő.

5. $\int_G |f(z)dz| \leq M\,L$, ahol L a G görbe ívhossza (z_o-tól Z-ig) és $M \geq |f(z)|$ (felső korlát a G görbén $f(z)$ abszolút értékére).

Az 5. tételből következik pl., hogy ha G az egységkör, akkor számolás nélkül:

$\left|\int_G \frac{dz}{z}\right| \leq 1 \cdot 2\pi = 2\pi$, mivel az egységkör kerülete 2π,

és az egységkörön $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \leq 1$.

12. A Cauchy-féle integráltétel

A komplex integrál definíciója alapján, az integrál értéke nemcsak az integrációs határoktól (z_o-tól és Z-től), hanem magától az integrációs úttól is erősen függhet, miként a 10. pont 5. példa mutatja. Cauchy észrevette, hogy ha a $w = f(z)$ függvény abban a K tartományban, amelyben a G görbe fut, nemcsak folytonos, hanem differenciálható is (azaz K-ban holoform), akkor az integrál értéke nem függ az úttól, hanem csak az út kezdő és végpontjától. Cauchynak ez a felismerése az egész komplex függvénytan szempontjából alapvető jelentőségű, amelyet tétel formájában az alábbi módon fogalmazott meg:

12.1 <u>Alaptétel:</u>
Legyen a $w = f(z)$ függvény egy tetszőleges K tartományban folytonos és differenciálható (röviden holoform). Legyenek z_o és Z a K tartomány belső pontjai, ekkor a

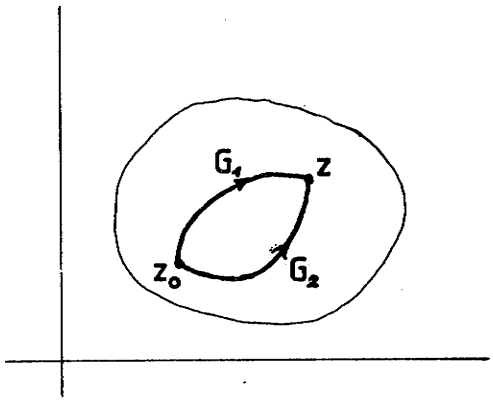
$\int_{z_o}^{Z} f(z)dz$ integrál a K-ban futó tetszőleges úton

számítva ugyanazt az értéket veszi fel. Ha G_1 és G_2 két ilyen út, akkor

$$\int_{G_1} f(z)dz = \int_{G_2} f(z)dz, \quad \text{vagy} \quad \int_{G_1} - \int_{G_2} = \int_{z_o(G_1)}^{Z} + \int_{Z(-G_2)}^{z_o} = 0.$$

Amennyiben zárt úton integrálunk, amely K-ban fut:

$$\oint_G f(z)dz = 0.$$



12.1 ábra

Az alaptételt tehát úgy is fogalmazhatjuk, hogy holoform függvénynek a holomorfitási tartományban futó tetszőleges zárt görbe menti integrálja zérus.

A következőkben ezt fogjuk bebizonyítani három lépésben. Előzőleg emlékeztetünk rá, hogy mint a 10. pont 2. és 3. példái mutatják, tetszőleges zárt G görbe esetén

$$\oint_G dz = 0 \quad \text{és} \quad \oint_G z\,dz = 0.$$

<u>Az alaptétel bizonyítása:</u>

a) Legyen a G zárt görbe egy háromszög. Osszuk fel a Δ-t az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel 4 egybevágó háromszögre Δ_1, Δ_2, Δ_3 és Δ_4-re. Ha most ezen háromszögek kerületei mentén integrálunk, akkor

$$\int_\Delta = \int_{\Delta 1} + \int_{\Delta 2} + \int_{\Delta 3} + \int_{\Delta 4}$$ (mivel a belső élek mentén ide-oda integrálunk).

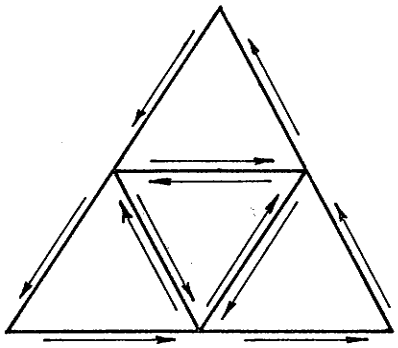
A négy részintegrál között a legnagyobbnak az integrációs útját jelölje Δ_1. Ekkor

$$\left|\int_\Delta\right| \leq 4\left|\int_{\Delta_1}\right|$$

Ezután a Δ_1 háromszöget osztjuk négy részre stb. Ha ezt az eljárást n-szer ismételjük, akkor

$$\left|\int_{\Delta}\right| \leq 4^n \left|\int_{\Delta_n}\right|$$

ahol Δ_n az n-edik felosztásnál a legnagyobb abszolút értékű integrálit adó út.



12.2 ábra

A fenti felosztásokat minden határon túl folytatva a kapott háromszögek egymásba vannak skatulyázva és egy pontra zsugorodnak, legyen ez a pont z_o.

Mivel $f(z)$ a z_o pontban deriválható, ezért tetszőlegesen $\varepsilon > 0$-hoz található olyan δ, hogy

$$\left|\frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} - f'(z_o)\right| < \varepsilon \qquad \text{hacsak } |z - z_o| < \delta.$$

Innen:

$$|f(z) - f(z_o) - f'(z_o)(z - z_o)| \leq \varepsilon |z - z_o|$$

vagy másként írva:

$$f(z) = f(z_o) + (z - z_o)f'(z_o) + \eta(z - z_o)$$

ahol $|\eta| < \varepsilon$

Válasszuk most n-et olyan nagyra, hogy Δ_n teljes egészében z_o-nak a $|z - z_o| < \delta$ egyenlőtlenséggel jellemzett környezetébe essék, azaz Δ_n-beli és annak kerületén levő z pontokra $|z - z_o| < \delta$ teljesüljön.

Ekkor

$$\int_{\Delta_n} f(z)dz = \int_{\Delta_n} f(z_o)dz - \int_{\Delta_n} z_o f'(z_o) \ldots +$$

$$+ \int_{\Delta_n} zf'(z_o)dz + \int_{\Delta_n} \eta(z - z_o)dz$$

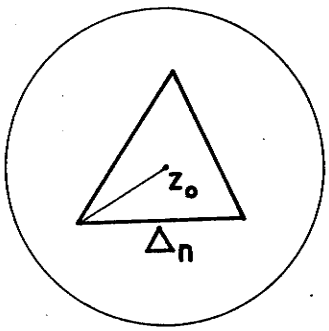
Mivel Δ_n zárt görbe, z_o, $f(z_o)$ és $f'(z_o)$ állandók, továbbá $\int_{\Delta_n} dz = \int_{\Delta_n} z\, dz = 0$, következik

$$\int_{\Delta_n} f(z)dz = \int_{\Delta_n} \eta(z - z_o)dz.$$

Minthogy $|\eta| < \varepsilon$, következik, hogy

$$\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| \leq \varepsilon \cdot \frac{s_n}{2} s_n = \varepsilon \frac{s_n^2}{2}$$

ahol s_n a Δ_n háromszög kerülete. Mivel Δ_n a $|z - z_o| < \delta$ körön belül van, a Δ_n kerületén levő bármely z pontra $|z - z_o| < \frac{s_n}{2}$.



12.3 ábra

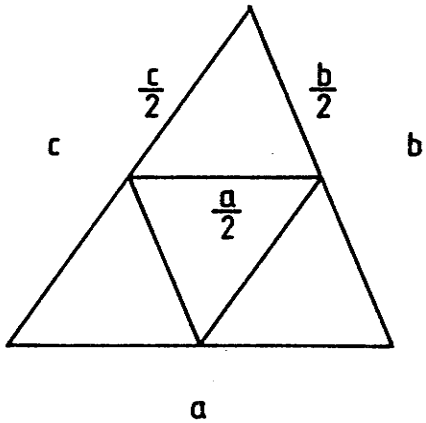
Ha most az eredeti Δ háromszög kerülete s, akkor

Δ_1 kerülete: $s_1 = \frac{s}{2}$,

Δ_2 kerülete: $s_2 = \frac{s}{2^2}$,

$\vdots$

Δ_n kerülete: $s_n = \frac{2}{2^n}$.



12.4 ábra

Ennek alapján:

$$\left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| \leq 4^n \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{s^2}{4^n} = \varepsilon \frac{s^2}{2}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, következik, hogy

$$\left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| = 0, \quad \text{amiből} \quad \int_{\Delta} f(z)dz = 0 \text{ következik.}$$

b) Legyen most G egy P polinom. Nyilvánvaló, hogy bármely sokszög átlókkal háromszögekre bontható és e háromszögeken számított integrálok összege a sokszög kerületén vett integrállal egyenlő. Az egyes háromszögeken számított integrálok értéke azonban mind zérus, így a sokszögön számított integrál értéke zérus, tehát tetszőleges P poligonra:

$$\int_P f(z)dz = 0.$$

c) Legyen most G egy tetszőleges zárt görbe. Az integrál definíciója szerint

$$\int_G f(z)dz = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

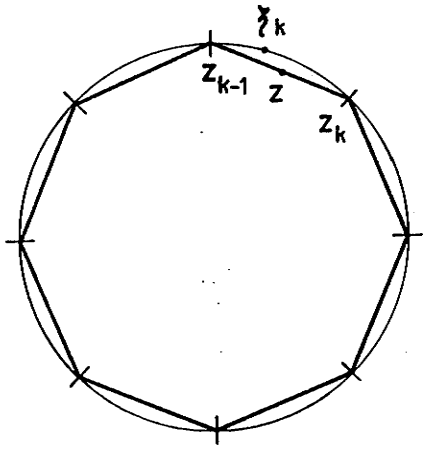
Válasszuk n-et olyan nagyra, hogy 1. a z_k osztópontok mindegyike a K tartományon belül legyen

2. $\left|\int_G f(z)dz - I_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ és

3. $|f(z) - f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2L}$ ha z a (z_{k-1}, z_k) húrdarab pontja és L a G görbe hossza.

A 3. feltételt így is írhatjuk:

$$f(z) = f(\xi_k) + \eta_k \ , \quad \text{ahol} \quad |\eta_k| < \frac{\varepsilon}{2L}$$



12.5 ábra

(Ha a felosztás elég sűrű, akkor $f(z)$ differenciálhatóságából következő folytonosság alapján ez teljesíthető.)

Ha most a P húrpoligonon integrálunk, akkor

$$\int_P f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} [f(\xi_k) + \eta_k]dz =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \eta_k dz \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) + \frac{\varepsilon}{2L} \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \leq I_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

mivel $\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$ a húrpoligon kerülete kisebb mint L, a C görbe ívhossza.

Tehát

$$\left| \int_P f(z)dz - I_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ .$$ A 2. feltétel alapján

$$\left|\int_G f(z)dz - I_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Ezek alapján

$$\left|\int_P f(z)dz - \int_G f(z)dz\right| = \left|\int_P f(z)dz - I_n + I_n - \right.$$

$$\left. - \int_G f(z)dz\right| \leq \left|\int_P f(z)dz - I_n + \left|\int_G f(z)dz - I_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

13. A Cauchy-féle integrál-tétel következményei

Mint láttuk a komplex integrál Cauchy-féle alaptétele azt mutatja ki, hogy ha a K tartomány az $f(z)$ függvény holomorfitási tartománya és G a K tartomány belsejében futó tetszőleges zárt görbe, akkor az $f(z)$ függvény ezen zárt görbe mentén számított integrálja zérus.

Legyen most G_1 és G_2 két zárt görbe a K tartományon belül úgy, hogy a G_2 görbe teljes egészében a G_1 görbén belül van. (Az ilyen tartományt kétszeresen összefüggő tartománynak nevezzük.) (24. ábra). Ezen két görbén és az általuk bezárt "körgyűrűn" legyen $f(z)$ holomorf. Integráljunk a két görbén és az őket összekötő egyenes szakaszon az ábrán látható úton, ekkor

$$\int_{G_1} + \int_g + \int_{-G_2} + \int_{-g} = 0,$$ vagyis érvényes az alábbi

<u>13.1 Tétel:</u>

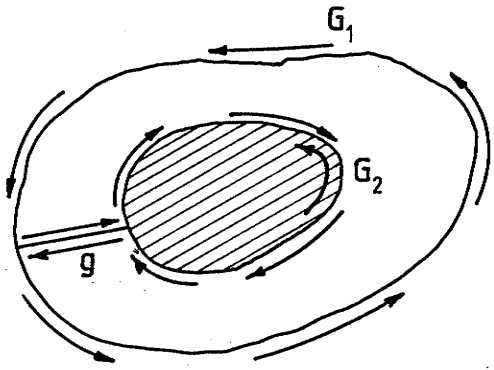
$$\int_{G_1} f(z)dz = \int_{G_2} f(z)dz$$

Miként a 10. pont 1. példából láttuk, ha G az egységkör az origó körül, akkor

$$\int_G \frac{dz}{z} = 2\pi i. \qquad (13.1)$$

A fenti tétel alapján ha G az origó körüli tetszőleges zárt görbe (akár az egységkörön belül, akár kívül fut) az integrál értéke ugyanannyi: $2\pi i$.

A 10. pont 4. példa alapján, ha G a z_0 középpontú r sugarú kör, akkor is igaz, hogy



13.1 ábra

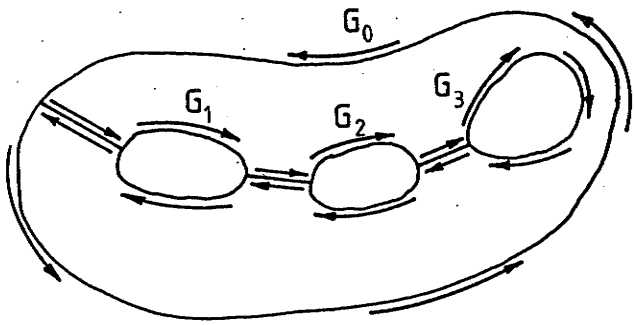
$$\int_G \frac{dz}{z - z_o} = 2\pi i. \qquad (13.2)$$

A fenti két tétel alapján ugyanez az eredménye a z_o pontot körülvevő tetszőleges zárt G görbe menti integrálnak, ha az az $f(z)$ függvény holomorfitási tartományában fut.

Teljesen analóg módon bizonyítható a következő tétel:

Ha az $f(z)$ függvény K holomorfitási tartományában futó G_o zárt görbén belül vannak a diszjunkt $G_1, G_2, \ldots, G_n$ görbék[$(n + 1)$-szeresen összefüggő tartomány], akkor

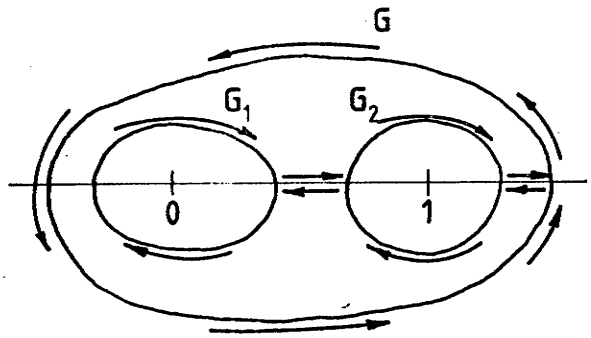
$$\int_{G_o} f(z)dz = \int_{G_1} f(z)dz + \int_{G_2} f(z)dz + \ldots + \int_{G_n} f(z)dz.$$



13.2 ábra

Példa:

$$\int_G \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \int_G \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)dz = \int_{G_1} \frac{dz}{z} + \int_{G_2} \frac{dz}{z-1} = 4\pi i.$$



13.3 ábra

14. A Cauchi-féle integrál-formula

14.1 Tétel:
Ugyanazon feltételek mellett, amelyek mellett a 12. t alaptétele érvényes, fennáll a következő összefüggés:

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{z - z_o} dz \qquad (14.1)$$

ha z_o a G zárt görbén belül van.

(A tétel azt mondja ki, hogy ha az f(z) függvényről csak azt tudjuk, hogy egy K tartományban holomorf és egy a K-ban futó G zárt görbe mentén ismerjük f(z) értékeit, akkor ezáltal a G görbén belül a függvényértékek a (14.1) formula által meg vannak határozva. A képlet tehát szoros kapcsolatot fejez ki a zárt görbe mentén felvett függvényértékek és a görbe által körülzárt tartomány belső pontjaiban felvett függvényértékek között.) A tétel rendkívül jelentős, mint azt később látni fogjuk.

Bizonyítás:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{z - z_o} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z_o)}{z - z_o} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} dz =$$

$$= I_1 + I_2.$$

Az I_1 első integrál: $\frac{1}{2\pi i} f(z_o) \int_G \frac{dz}{z - z_o} = f(z_o)$.

Az I_2 második integrálban a G zárt görbe egy, a z_o pontot körülvevő tetszőleges kicsi ϱ sugarú körrel helyettesíthető a 13.1 tétel alapján. Válasszuk a c-kör sugarát, ϱ-t olyan kicsinek, hogy $|f(z) - f(z_o)| < \varepsilon$, ami $f(z)$ folytonossága miatt lehetséges, akkor

$$|I_2| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} dz\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varrho} \cdot 2\varrho\pi = \varepsilon,$$

azaz $I_2 = 0$.

Tehát $I_1 + I_2 = f(z_o)$, amiből a tétel állítása következik.

15. Integrál-formula deriváltakra

15.1 Tétel:
Az előző tételekben szereplő feltételek mellett az $f(z)$ függvény deriváltjára vonatkozólag a következő összefüggés érvényes:

$$f'(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{(z - z_o)^2} dz \qquad (15.1)$$

A tétel lényegében azt mondja ki, hogy a holomorfitási tartományon belül egy zárt G görbével határolt tartomány belső pontjaiban az $f(z)$ függvény deriváltjának értékét meghatározzák $f(z)$-nek a G görbén felvett értékei.

Bizonyítás:
Azt kell kimutatnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{f(z_n) - f(z_o)}{z_n - z_o} - \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{(z - z_o)^2} dz\right\} = 0 \qquad (15.2)$$

Minthogy a 14.1 tétel alapján

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{z - z_o} dz, \qquad f(z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{z - z_n} dz$$

ha z_n a z_o-hoz olyan közel van, hogy a G görbén belül fekszik, ami biztosan bekövetkezik, ha n_o elég nagy és $n \geq n_o$.

Tehát:

$$\frac{f(z_n) - f(z_o)}{z_n - z_o} = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{z_n - z_o}\left[\frac{1}{z - z_n} - \frac{1}{z - z_o}\right] dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{(z - z_o)(z - z_n)} dz \qquad (15.3)$$

Jelöljük A_n-nel a (15.2) összefüggésben a kapcsos zárójelen belüli különbséget, ekkor

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_G f(z)\left[\frac{1}{(z - z_o)(z - z_n)} - \frac{1}{(z - z_o)^2}\right] dz =$$

$$= \frac{z_n - z_o}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{(z - z_o)^2 (z - z_n)} dz$$

Az $\dfrac{f(z)}{(z - z_o)^2 (z - z_n)}$ függvény a G görbe mentén folytonos lévén ott korlátos is, van tehát olyan M szám, hogy

$|A_n| < \frac{1}{2\pi} ML |z_n - z_o|$, ahol L a G görbe ívhossza,

következőleg $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = 0$.

<u>Megjegyzés:</u>
A (15.1) formulát a (14.1) összefüggésből megkapjuk, ha mindkét oldalon a z_o változó szerint deriválunk, a jobb oldalon az integráljel alatt differenciálhatunk a tétel alapján.
<u>Ezt a műveletet akárhányszor ismételhetjük,</u> így:

$$f''(z_o) = \frac{2!}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{(z - z_o)^3} dz \qquad (15.4)$$

$$f^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{(z - z_o)^{n+1}} dz \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (15.5)$$

Ezek alapján, ha az $f(z)$ komplex függvény a z_o pontban differenciálható, akkor ott akárhányszor differenciálható. Az első derivált létezéséből tehát a magasabb deriváltak létezése következik. Ez a valósban nem igaz. Ott lehet, hogy a függvény első deriváltja létezik, de még csak nem is folytonos, így a magasabb deriváltak nem léteznek.

16. Komplex hatványsorok

Hatványsoron a következő alakú sort értjük a (valós hatványsorok analógiájára):

$$a_o + a_1(z - z_o) + a_2(z - z_o)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n \tag{16.1}$$

A valósban láttuk, hogy hatványsor konvergenciatartománya mindig egy véges vagy végtelen hosszúságú intervallum. A (16.1) komplex hatványsor konvergenciatartománya a z_o középpont körüli valamely ϱ sugarú kör, ahol ϱ végtelen is lehet, ekkor a hatványsor az egész síkon konvergens. A konvergenciasugár kiszámítására alkalmazhatjuk a Cauchy-féle kritériumot (lásd: 3/a. pont). Eszerint, ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_o)^n|} = |z - z_o| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} <1 & \text{a sor absz. konvergens} \\ <1 & \text{a sor divergens.} \end{cases} \tag{16.2}$$

Eredményünk az alábbi módon is fogalmazható:

16.1 <u>Tétel:</u> (Cauchy-Hadamard-tétel):
Legyen

$$\varrho = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad \text{ekkor ha } |z - z_o| < \varrho, \tag{16.3}$$

a hatványsor abszolút konvergens, míg ha $|z - z_o| > \varrho$, akkor a sor divergens. Tehát a hatványsor konvergenciatartománya a $z = z_o$ középpontú és a (16.2) egyenletnek eleget tevő ϱ sugarú kör belseje.

Ha speciálisan $\varrho = 0$, (vagyis $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$), akkor a konvergenciatartomány a z_o pontra zsugorodik, míg ha $\varrho = \infty$, akkor a sor az egész síkon konvergens.

16.2 <u>Tétel:</u>
A hatványsor konvergenciája a $\varrho' < \varrho$ sugarú körben egyenletes.

<u>Bizonyítás:</u>
Válasszunk ϱ' és ϱ között egy ϱ'' számot: $\varrho' < \varrho'' < \varrho$.

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\varrho} < \frac{1}{\varrho''}$, így majdnem minden n-re

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\varrho''}, \quad \text{azaz} \quad |a_n| < \left(\frac{1}{\varrho''}\right)^n$$

Ha $|z - z_o| < \varrho'$, akkor majdnem minden n-re

$$|a_n(z - z_o)|^n < (\varrho')^n \left(\frac{1}{\varrho''}\right)^n = \left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^n, \quad \text{ahol} \quad \frac{\varrho'}{\varrho''} < 1.$$

Ebből viszont következik, hogy a $\sum a_n(z - z_o)^n$ hatványsort valamely n-től kezdve a $\sum \left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^n$ konvergens geometriai sor majorálja. Ebből a hatványsornak a $|z - z_o| < \varrho'$ körben való egyenletes konvergenciája következik.

A hatványsor konvergenciasugarának kiszámítása sok esetben egyszerűbb a d'Alembert-féle hányados-kritérium alapján. Eszerint a

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z - z_o)^{n+1}}{a_n(z - z_o)^n} \right| = |z - z_o| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1, \qquad (16.4)$$

akkor a sor abszolút konvergens, míg

$$|z - z_o| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad \text{esetén biztosan divergens.}$$

Amennyiben $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ létezik, akkor a konvergenciasugár:

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (16.5)$$

Ha pl.: a hatványsor $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$, akkor

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1,$$

míg ha a sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{akkor}$$

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n + 1) = \infty, \qquad (16.6)$$

vagyis a sor az egész síkon konvergens.

Ha a hatványsor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$, akkor $a_n = \frac{1}{n^n}$, tehát a Cauchy-féle kritérium alapján

$$\varrho = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

17. Hatványsorral értelmezett függvény tulajdonságai

Amennyiben a $\sum_{n=o}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ hatványsor konvergenciasugara $o \neq 0$, akkor a sor a z_o körüli $0 \leq \varrho \leq \infty$ sugarú körben minden z értékhez egy komplex számot, a sor összegét rendeli, amelyet jelöljünk $f(z)$-vel:

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n(z - z_o)^n \qquad (17.1)$$

Például a $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ sor az egységkör bármely z pontjához a $w = \frac{1}{1 - z}$ számot (a geometriai sor összegét) rendeli.

Vizsgáljuk meg, milyen tulajdonságokkal rendelkezik a hatványsorral értelmezett függvény!

17.1 T[illegible]

Hatvá[illegible] zegfüggvénye a konvergenciakör középpontjában folytono[illegible]ggvény.

Bizonyítás:

Legyen a konvergenciasugár ϱ és válasszunk egy ϱ_1 o számot. Ekkor ha [illegible] $< \varrho_1$, a

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \varrho_1^{n-1}$ [illegible] konvergens. Jelöljük a sor összegét K-val.

Figyelembe véve, hogy $f(z_o) = a_o$,

$$\left|f(z) - f(\ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_o)^n\right| =$$

$$= |z - z_o| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |z - z_o|^{n-1} \leq |z - z_o| K$$

Ha most $|z - z_o|$ elég kicsi: $|z - z_o| < \frac{\varepsilon}{K}$, akkor $|f(z) - f(z_o)| < \varepsilon$, vagyis $f(z)$ a z_o helyen folytonos.

17.2 Tétel:
Ha a (17.1) hatványsor konvergenciasugara $\varrho > 0$, akkor az $f(z)$ összegfüggvény a z pontban differenciálható és $f'(z_o) = a_1$.

Bizonyítás:
Tekintsük az

$$a_1 + a_2(z - z_o) + a_3(z - z_o)^2 + \ldots +$$

$$+ a_n(z - z_o)^{n-1} + \ldots = \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} \qquad (17.2)$$

sort, amely a (17.1) sorból a_o elhagyásával és $(z - z_o)$-val való osztással keletkezik. A (17.2) sor konvergenciasugara nyilván megegyezik a (17.1) sor konvergenciasugarával,

hiszen $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \right|$.

A (17.2) sor összege $z = z_o$ esetén a_1, tehát:

$$f'(z_o) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} = a_1 . \qquad (17.3)$$

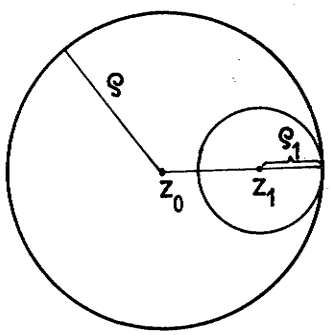
Eddigi eredményeink tehát azt mutatják, hogy a hatványsorral értelmezett függvény a konvergenciakör középpontjában folytonos és differenciálható. Most megmutatjuk, hogy a konvergenciakör tetszőleges belső pontjában rendelkezik a (17.1) formulával definiált függvény a folytonosság és a differenciálhatóság tulajdonságával. Ennek belátásához szükségünk lesz a következő tételre:

17.3 Tétel:
Ha a (17.1) sor konvergenciasugara $\varrho > 0$ és z_1 a konvergenciakör tetszőleges belső pontja, akkor a (17.1) sor átrendezhető $(z - z_1)$ hatványai szerint és az új sor konvergens, legalábbis a z_1 pont körüli $\varrho_1 < \varrho - |z_1 - z_o|$ sugarú körben.

Bizonyítás:

$$\sum a_n(z - z_o)^n = \sum a_n[(z - z_1) + (z_1 + z_o)]^n =$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} a_n[\sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} (z_1 - z_o)^{n-k}(z - z_1)^k] \qquad (17.4)$$



17.1 ábra

Ez utóbbi sor abszolút konvergens, mert

$$\sum_{n=o}^{\infty} |a_n| \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} |z_1 - z_o|^{n-k} |z - z_1|^k =$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} |a_n| [|z - z_1| + |z_1 - z_o|]^n \qquad (17.5)$$

ahol $|z - z_1| + |z_1 - z_o| < \varrho$ a feltevésünk szerint.

Mivel abszolút konvergens sor átrendezhető, a (17.4) sorból az átrendezett

$$b_o + b_1(z - z_1) + b_2(z - z_1)^2 + \ldots \text{ sort kapjuk,}$$

amelynek együtthatói: (17.6)

$$b_o = \sum_{n=o}^{\infty} a_n(z_1 - z_o)^n; \quad b_1 = \sum_{n=o}^{\infty} n\, a_n(z_1 - z_o)^{n-1}; \ldots$$

Mivel a (17.6) sor összege ugyanaz mint a (17.4) soré, gondolatmenetet ez utóbbi sorra alkalmazva adódik, hogy $f(z)$ a z_1 pontban folytonos és differenciálható és

$$f'(z_1) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(z_1 - z_o)^{n-1}$$

Mivel z_1 a $|z - z_o| < \varrho$ kör belsejének tetszőleges pontja, eredményünk tétel formájában a következő módon fogalmazható meg:

17.4 <u>Tétel:</u>

Ha a $\sum_{n=o}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ hatványsor konvergenciasugara $\varrho > 0$, akkor a sor összegfüggvénye $f(z)$ a konvergencia kör belsejében holomorf függvény és

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(z - z_o)^{n-1} \tag{17.7}$$

azaz a sor tagonként differenciálható.

Ha ezt a tételt ismételten alkalmazzuk a (17.7) deriváltsorra, majd annak derivált sorára stb., akkor azt kapjuk, hogy az

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$$

összegfüggvény a konvergenciakörén belül akárhányszor differenciálható és

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n - 1)\ldots(n - k + 1)a_n(z - z_o)^{n-k} \tag{17.8}$$

A (17.8) összefüggésből következik, hogy

$$f^{(k)}(z_o) = k!\, a_k, \qquad \text{azaz} \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(z_o)}{k!},$$

vagyis a (17.4) hatványsor a valósból ismert Taylor-sor:

$$\sum_{k=o}^{\infty} a_k(z - z_o)^k = f(z_o) + \frac{f'(z_o)}{1!}(z - z_o) +$$

$$+ \frac{f''(z_o)}{2!}(z - z_o)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(z_o)}{k!}(z - z_o)^k + \ldots$$

Láttuk tehát, hogy ha a hatványsor konvergenciasugara $\varrho > 0$, akkor a hatványsor összegfüggvénye a konvergenciakörön belül holomorf függvény. Ha az $f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ hatványsor konvergenciasugara végtelen, azaz a sor az egész komplex síkon konvergens, akkor a sor összegfüggvénye $f(z)$ egészfüggvény.

Az olyan egészfüggvényeket, amelyek hatványsorában végtelen sok zérustól különböző a_n együttható szerepel, transzcendens egész függvényeknek nevezzük. Ha az $f(z)$ függvény hatványsorában csak véges sok 0-tól különböző $a_o, a_1, \ldots, a_m$ együtthatók szerepelnek, akkor $f(z) = a_o + a_1(z - z_o) + \ldots + a_m(z - z_o)^m$ m-edfokú racionális egészfüggvények közé tartoznak e^z, sin z, cosz stb. Ha $f(z) \equiv c$ (minden z-re állandó), akkor $f(z)$ 0-adfokú polinom. A következő tételek erre a függvényre nem érvényesek.

17.4 Tétel: (Liouwille-tétele):
Ha $f(z)$ egészfüggvény (és nem állandó)

$$f(z) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k z^k,$$ akkor $f(z)$ bármely nagy körön kívül bármilyen nagy értéket felvehet, azaz ha R és K tetszőleges nagy számok, akkor van olyan z pont, amelyre $|z|>R$ és $|f(z)| > K$.

Bizonyítás:

Mivel $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, továbbá a (15.5) formula alapján:

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz$$

ahol G az origót megkerülő tetszőleges zárt görbe (pl. az origó körüli r sugarú kör), ezért:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz$$

Ha most $|z|>R$ esetén $|f(z)| \leq K$ lenne (minden ilyen z-re), akkor

$$|a_k| < \frac{1}{2\pi} \frac{K}{r^{k+1}} 2r\pi = \frac{K}{r^k}$$

Mivel a (17.9) formulában r tetszőleges nagyra választható, ezért az $a_1, a_2, \ldots$ együtthatók mindegyike 0 lenne, vagyis $f(z)$ állandó (a_o), ami ellenkezik a tétel feltevésével.

A tételt még így is fogalmazhatjuk, hogy ha az $f(z)$ egészfüggvény korlátos, azaz van olyan K szám, hogy $f(z) < K$ minden z-re teljesül, akkor $f(z)$ szükségképpen állandó.

17.5 Tétel:
Ha $f(z)$ m-edfokú racionális egészfüggvény $(m \geq 1)$ és K tetszőleges pozitív szám, akkor R megválasztható úgy, hogy $|z| > R$ esetén $|f(z)| > K$ mindig teljesül.

Bizonyítás:

$$f(z) = a_o + a_1 z + \ldots + a_m z^m = z^m\left(a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \ldots + \frac{a_o}{z^m}\right)$$

Ha tehát $|z| = r$, akkor

$$|f(z)| > r^m\left[|a_m| - \frac{|a_{m-1}|}{r} - \ldots - \frac{|a_o|}{r^m}\right]$$

Mivel $a_m \neq 0$, minden elég nagy r esetén $|f(z)| > K$.

Ezen tétel alapján egyszerűen bizonyítható az algebra alaptétele.

17.6 Tétel: (Az algebra alaptétele)
Ha $f(z)$ m-edfokú racionális egészfüggvény $(m \geq 1)$, akkor az $f(z) = 0$ egyenletnek van legalább egy megoldása (gyöke).

Bizonyítás:
Ha $f(z) \neq 0$ lenne minden z-re, akkor

$\frac{1}{f(z)} = g(z)$ egy egészfüggvény (amely nem állandó).
Ekkor a (17.4) tétel alapján bármely nagy körön kívül lenne olyan z, hogy $|g(z)| > 1$, azaz $|f(z)| < 1$, ami ellentétben áll a (17.5) tétellel.

18. Hatvány- és gyök-függvények

Komplex számok hatványozásával és a belőlük való gyökvonással már korábbi tanulmányainkban megismerkedtünk. Vizsgáljuk most meg a hatvány- ill. gyökfüggvény által létesített leképzést!
A

$$w = z^k \qquad (k > 1 \text{ természetes szám}) \qquad (18.1)$$

alakú hatványfüggvény a racionális egészfüggvények legegyszerűbb esetei közé tartozik. Már láttuk, hogy a hatványfüggvény az egész síkon holomorf és $w' = k\,z^{k-1}$. A derivált a 0 pontot kivéve mindenütt különbözik zérustól, ezért a (18.1) függvény az origótól eltekintve mindenütt konformis leképzést létesít.

Ezt a leképzést először $k = 2$ esetén vizsgáljuk.
Írjuk fel a z komplex számot trigonometrikus alakban:

$$z = \varrho(\cos\phi + i\sin\phi)$$

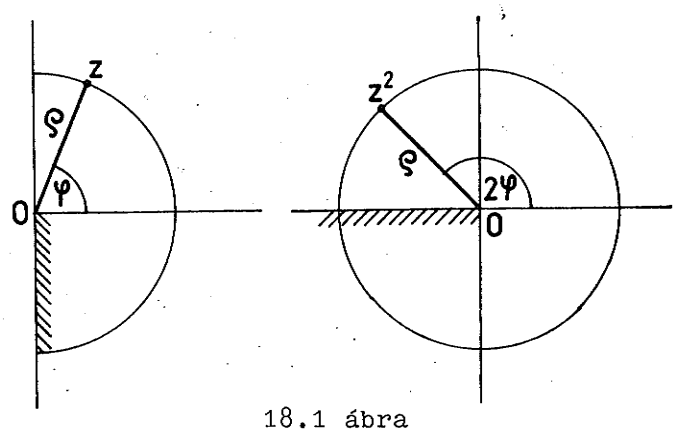
Ekkor

$$w = z^2 = \varrho^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi), \quad \text{azaz} \tag{18.2}$$

$$|w| = \varrho^2, \quad \arg w = 2\phi \tag{18.3}$$

Ha a z változó befutja a $|z| = \varrho$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ félkört, akkor w a ϱ^2 sugarú teljes kört futja be és a két görbe között kölcsönösen egyértelmű megfelelkezés áll fenn. Mivel z^2 nem lehet negatív, a leképzés során a síkot meg kell fosztanunk az origótól és a negatív valós tengelytől ahhoz, hogy egy-egy értelmű legyen a megfeleltetés.

Miközben ϱ befutja a $0 < \varrho < \infty$ félegyenest, ϱ^2 ugyanezen értékeket futja be és mindegyiket csak egyszer.



18.1 ábra

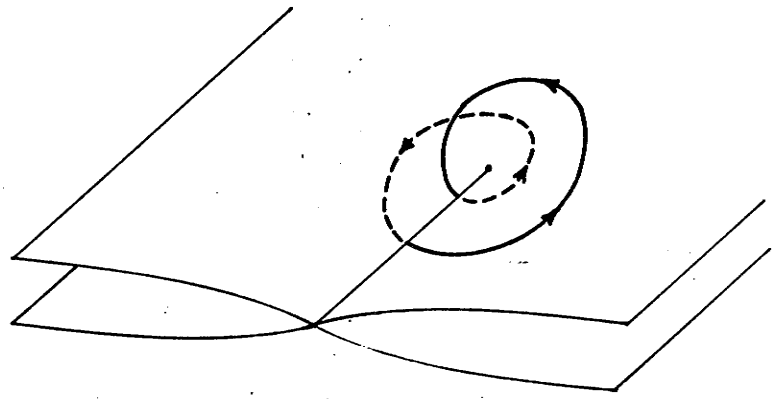
Azt mondhatjuk tehát, hogy a $w = z^2$ függvény a (nyílt) jobb oldai félsíkot kölcsönösen egyértelműen és konformisan képezi le a valós tengely negatív fele mentén (az origót is beleértve) felhasított w síkra (azaz az origótól és a negatív számoktól megfosztott w síkra).

A leképzés konformis, a 0 pontban azonban a szögtartás nem érvényes, mivel a (18.2) leképzés azokat a szögeket, amelyek csúcsa az origóban van, megkétszerezi.

Az $\operatorname{Re} z < 0$ bal oldali félsíkot - hozzászámítva a képzetes tengely negatív felét - (vagyis azon pontok halmazát, amelyekre $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$) a (18.2) függvény kölcsönösen egyértelműen képezi le a fentivel azonos módon felhasított w

síkra. A $w = z^2$ leképzés tehát az egész z síkot a kétszeresen számítható w síkra képezi le, azaz minden z-nek csak egy w érték felel meg, de minden w számhoz két különböző z érték tartozik $\left[(-z)^2 = z^2\right]$, kivéve a $w = 0$ pontot, amelyhez a $z = 0$ pont tartozik. A "kétszeresen számított" w sík szemléletes képét úgy képzelhetjük el, hogy a fent leírt módon felhasított w sík két példányát egymásra helyezzük, az origókat egyesítjük, majd az egyiknek a felső peremét (gondolatban) összeragasztjuk a másiknak az alsó peremével.

Ilyen formán egy kétlevelű ún. Riemann-felületet nyerünk. Ezen a felületen minden a 0-tól különböző pont kétszer van jelen, a 0 pont azonban csak egyszer. Erre a Riemann-felületre képezi le a $w = z^2$ függvény az egyrétű z síkot kölcsönösen egyértelműen és a 0 elágazási ponttól eltekintve konformisan.



18.2 ábra

A $w = z^2$ leképzést a

$z = x + iy$, $w = u + iv$ algebrai alak felhasználásával szemlélve, $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$, azaz

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy \quad \text{adódik.} \qquad (\ .1)$$

Ebből látható, hogy ha

$$u(x,y) = c, \quad \text{akkor} \quad x^2 - y^2 = c \quad (\text{const}),$$

vagyis a z síkon az $x^2 - y^2 = c$ hiperbolákon levő pontok a w síkon $u = c$ egyenesekbe mennek át.

A w sík $v = c$ egyeneseibe pedig a z sík

$x\,y = c$ hiperboláinak pontjai képződnek le.

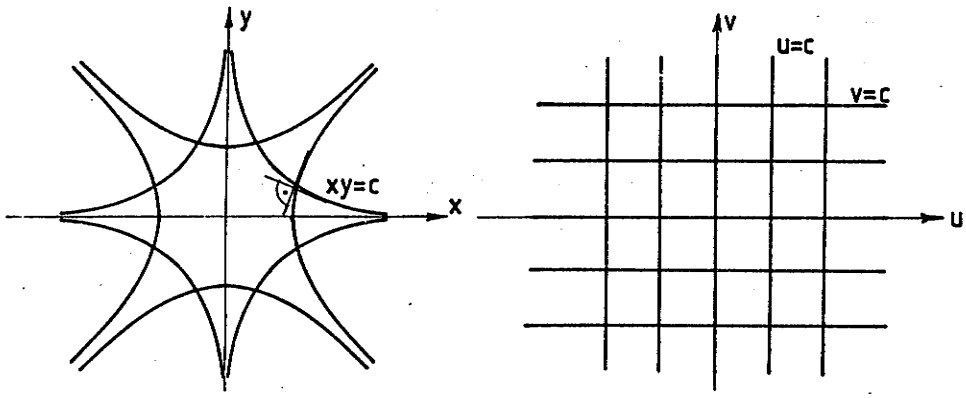
A leképezés szögtartó volta miatt egyik hiperbolasereg bármely hiperoblája derékszögben metszi a másik hiperbolasereg tagjait.

Könnyen belátható az is, hogy a z sík $x = c$ ill. $y = c$ egyeneseit a $w = z^2$ leképezés két konfokális parabolaseregbe viszi át, közös 0 fókusszal. Ugyanis ha $x = c$, akkor

$$u(x,y) = c^2 - y^2, \qquad v = 2c\cdot y,$$

ha $y = c$, akkor

$$u = x^2 - c^2, \qquad v = 2cx$$



18.3 ábra

A $w = z^k$ leképzés $k > 2$ esetén ugyanolyan könnyen vizsgálható, mint a $k = 2$ esetben. Ekkor a félsík helyébe a $\frac{2\pi}{k}$ nyílású szögtartomány lép (csúcsával a 0 pontban), amely a teljes w síkra képeződik le, a Reimann-felület k-szorosan tartalmazza a w síkot.

Mivel az egyrétű z síknak a k-szoros w síkra való leképezése (az 0 ponttól eltekintve) kölcsönösen egyértelmű, ezért z és w szerepe a fenti meggondolásokban felcserélhető, azaz w tekinthető a megadott értéknek, z pedig hozzárendelt értéknek.

A $w = z^k$ leképezésnél k darab olyan z pont van, amely ugyanazon w pontba megy át. Ezek a pontok a z síknak ugyanazon 0 középpontú körén vannak rajta - és szabályos k szöget alkotnak.

Ugyanis, ha $w = z^k$, akkor $z = \sqrt[k]{w}$

Legyen most $w = r(\cos\psi + i\sin\psi)$, $z = \varrho(\cos\phi + i\sin\phi)$, ekkor

$$w = \varrho^k(\cos k\phi + i\sin k\phi) \text{ lévén}$$

$$r = \varrho^k, \qquad \psi = k\phi \pmod{2\pi}$$

tehát $\varrho = \sqrt[k]{r}$,

$$\phi = \frac{1}{k}(\psi + 2\nu\pi) \quad (\nu = 0,1,2,\dots,k-1)$$

azaz

$$z = \sqrt[k]{r}\left(\cos\frac{\psi + 2\nu\pi}{k} + i\sin\frac{\psi + 2\nu\pi}{k}\right) \quad (\nu = 0,1,2,\dots,k-1) \tag{18.5}$$

A $z = \sqrt[k]{w}$ főértékének a (18.5) számok közül azt tekintjük, amelyre $\nu = 0$.

19. Az exponenciális- és a logaritmus függvények

A hatványsorok vizsgálatánál láttuk, hogy összegfüggvényük holomorf függvény a konvergenciatartományokon belül. Ha az x változó valamely $f(x)$ függvénye x-szerint az $x_o - h, x_o + h)$ intervallumban konvergens hatványsorba fejthető, akkor x helyébe a z komplex változót helyettesítve az $f(x) = \sum a_n(x - x_o)^n$ sorban, az $f(z) = \sum a_n(z - z_o)^n$ sor a $|z - z_o| < h$ sugarú körben konvergens és holomorf-függvényt értelmez. Ily módon az e^x, $\sin x$, $\cos x$ függvények kiterjeszthetők az egész komplex síkra a következő formulákkal:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots + \sum_{k=o}^{\infty}\frac{z^k}{k!} \tag{19.1}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2_n)!} + \dots =$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} \tag{19.2}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2_{n+1})!} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2_{k+1})!} \qquad (19.3)$$

Ezek a függvények transzcendens egészfüggvények, tehát az egész síkon konvergensek. A fenti sorok tagonként differenciálhatók, így az ismert

$$(e^z)' = e^z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z \qquad (19.4)$$

differenciálási szabályok komplex z változó esetén is érvényesek.

Mivel $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ stb. ezért

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \ldots + \frac{i^n z^n}{n!} + \ldots =$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots + i\left[z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right] = \cos z + i \sin z$$

Fennállnak tehát az Euler-féle összefüggések:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z \qquad (19.5)$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad (19.6)$$

A (19.5) formulában $z = \phi$ helyettesítéssel

$e^{i\phi} = \cos \phi + \sin \phi$ adódik. Ezek alapján a (19.7)

$z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ komplex szám

$z = re^{i\phi}$ alakban írható, amelyet a komplex szám exponenciális alakjának nevezünk. Komplex számok szorzása, osztása, a hatványozás és gyökvonás legegyszerűbben az exponenciális alak segítségével végezhető.

Ugyanúgy, mint a valósban, a komplexben is érvényes az exponenciális függvényre vonatkozó addíciós tétel:

$$e^{z_1} . e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \qquad (19.8)$$

Alkalmazva ugyanis a sorok Cauchy-szorzatát (lásd 3. pont) ekkor a szorzatsor n-edik tagja: e^{z_1} és e^{z_2} első k tagjából adódóan, mivel

$$e^{z_1} = 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots + \frac{z_1}{n!} + \dots;$$

$$e^{z_2} = 1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \dots ;$$

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1} z_2}{(n-1)!}\frac{z_2}{1!} + \frac{z_1^{n-2}}{(n-2)!}\frac{z_2^2}{2!} + \dots + \frac{z_2^n}{n!}\right) =$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \dots + \binom{n}{k} z_1^{n-k}\cdot z_2^k + \dots + z_2^n\right] =$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}$$

Ha a z komplex számot $z = x + iy$ algebrai alakban írjuk fel, akkor a (19.5) összefüggést felhasználva:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad (19.9)$$

azaz

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}z} = e^x, \quad \arg(e^z) = y = I_m z.$$

A (19.9) összefüggés alapján:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i,$$

$$e^{2\pi i} = 1.$$

Ennek alapján:

$$e^{z+2\pi i} = e^z.e^{2\pi i} = e^z \qquad (19.10)$$

azaz a $w = e^z$ exponenciális függvény periodikus $2\pi i$ periódussal.

A függvénynek más periódusa nincs, azaz ha $e^{z_1} = e^{z_2}$, akkor

$z_2 = z_1 + 2\pi i.$

Legyen ugyanis $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$, ekkor a

$e^{x_1 + i\,y_1} = e^{x_2 + i\,y_2}$ egyenletből

$e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2)$, vagyis

$e^{x_1} = e^{x_2}$, tehát $x_1 = x_2$, továbbá

$\arg e^{z_1} = \arg e^{z_2}$ azaz $y_1 \equiv y_2 \pmod{2\pi}$

Az e^z függvény a 0 értéket sehol sem veszi fel, mivel $|e^z| = e^x > 0$, minden más $w = r(\cos\psi + i \sin\psi)$ értéket azonban felvesz, mégpedig

a $z = \ln w = \ln r + i(\psi + 2k\pi)$ helyeken ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Mivel $e^{z+2k\pi i} = e^z$, végtelen sok olyan z_k érték van, amelyekre e^z ugyanazt a w értéket veszi fel. Ugyanis ha $e^{z_o} = w_o$, akkor a $z_k = z_o + 2k\pi i$ ($k = 1,2,\ldots$) számok mindegyikére $e^{z_k} = w_o$.

Ez azt jelenti, hogy ha a z síkon kijelölünk egy 2π szélességű vízszintes sávot:

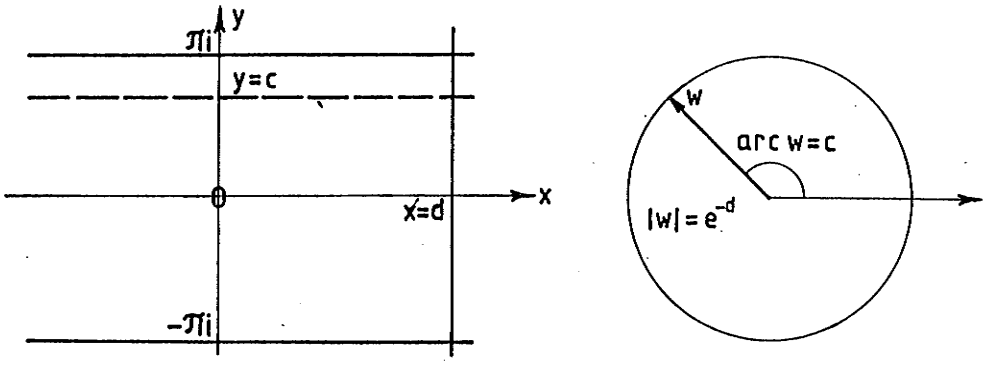
$-\infty < x < \infty$, $y_o - \pi < y \leq y_o + \pi$, ebbe a fenti z_k pontok közül pontosan egy esik.

Tehát a $w = e^z$ ezt a sávot kölcsönösen egyértelműen leképezi a teljes w síkra, kivéve belőle a 0 pontot. Az $y = c$ vízszintes egyenes képe a w síkon az $\operatorname{arc} w = c$ sugár lesz:

$$w = e^z = e^x . e^{iy} = r\,e^{i\psi} \qquad \psi = c = \operatorname{arc} w,$$

tehát a sávot felülről határoló $y = y_o + \pi$ egyenes képe az $\operatorname{arc} w = y_o + \pi$ félegyenestől megfosztott w síkra képződik le, kölcsönösen egyértelműen. A leképzés minden pontban konformis, hiszen $(e^z)' = e^z$ sehol sem 0. A z sík $x = d$ egyenesén végigfutó pont képe:

$$w = e^d . e^{iy} = e^{d+i(y+2k\pi)}$$



19.1 ábra

a w síkon végtelen sokszor befutja a $|w| = e^d$ sugarú kört és az $x = d$ egyenes minden 2π hosszúságú darabjának a kör egyszeri befutása felel meg.

Vizsgáljuk most a $w = e^z$ függvény inverz függvényét a

$z = \ln w$ függvényt!

Ha $w \neq 0$, akkor $\ln w$ végtelen sok értelmű, mivel a $w = e^z$ leképezés a z sík minden 2π-szélességű végtelen sávját a teljes w síkra képezi le. Ha $w = \varrho e^{i(\psi+2k\pi)}$, akkor

$$\ln w = \ln\varrho + i(\psi + 2k\pi) = \ln|w| + i(\arg w + 2k\pi) \quad (19.11)$$

A $z = \ln w$ értékek közül pontosan egy esik a

$$-\infty < x < \infty, \qquad -\infty < y \leq \pi$$

sávba, ezt szokás a $\ln w$ főértékének nevezni, amelyet $\ln^* w$-vel jelölünk. A $\ln w$ többi értéke:

$$\ln w = \ln^* w = 2k\pi i, \quad \text{ahol} \quad \ln^* w = \ln^*\varrho + i\psi \quad (19.12)$$

A fenti képlet szerint $\ln w$ összes értékének a valós része ugyanakkora, a különböző logaritmus értékek képzetes részei pedig 2π egész számú többszörösében különböznek egymástól.

A (19.12) formula alapján pl.:

$$\ln^*(-1) = \ln e^{i\pi} = i\pi, \quad \ln^* i = i\frac{\pi}{2}, \quad \ln^*(-i) = -i\frac{\pi}{2} \quad (19.13)$$

A természetes logaritmusokkal való számolás szabályai a komplexben is érvényesek:

$$\left.\begin{aligned} &\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \\ &\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2 \\ &\ln z^k = k \ln z \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &z_1 \neq 0, \quad z_2 \neq 0, \quad z \neq 0, \\ &k \text{ egész szám.} \end{aligned} \qquad (19.14)$$

Ezek a szabályok az exponenciális függvényre érvényes addíciós tétel következményei (lásd: (19.8) képlet!).

Az $\ln^* w$ függvény deriválási szabálya megegyezik a valósból ismert szabállyal, ugyanis ha $w_1 = e^{z_1}$, $w = e^z$, akkor

$$\frac{\ln^* w_1 - \ln w}{w_1 - w} = \frac{z_1 - z}{e^{z_1} - e^z} = \frac{1}{\dfrac{e^{z_1} - e^z}{z_1 - z}} \qquad \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}$$

ha $w_1 \to w \neq 0$.

Tehát:

$$(\ln^* w)' = \frac{1}{w} \qquad (w \neq 0)$$

20. A trigonometrikus függvények és inverzeik

Vizsgáljuk meg a $w = \cos z$ és a $w = \sin z$ függvények viselkedését.

A (19.6) fomula alapján

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Megmutatjuk, hogy ezeknek a függvényeknek a valósból ismert 0 helyeken kívül más 0 helyeik nincsenek.

Ha ugyanis pl. $\cos z = 0$, akkor $e^{iz} + e^{-iz} = 0$, tehát

$e^{iz} = - e^{-iz}$, mindkét oldalt e^{iz}-vel szorozva:

$e^{2iz} = - 1 = e^{i\pi}$, azaz $2iz = i\pi + 2k\pi i$, $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Ugyanúgy kapjuk, hogy ha $\sin z = 0$, akkor $z = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.
A valósból ismert addíciós tételek komplex változókra is érvényesek:

Pl.:

$$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 = \tag{20.1}$$

$$= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot$$

$$\cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2i} = \frac{1}{4i}\left[e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} + e^{i(z_1-z_2} - \right.$$

$$- e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} - e^{i(z_1-z_2)} -$$

$$\left. - e^{-i(z_1+z_2)}\right] = \frac{1}{4i}\left[2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{i(z_1+z_2)}\right] =$$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2)$$

$$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \tag{20.2}$$

$$= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot$$

$$\cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{4} +$$

$$+ \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_2 - z_1)} - e^{i(z_1 - z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{4} =$$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2)$$

Ezekből adódik csakúgy mint a valósban, hogy

$$\cos z_2 - \cos z_1 = 2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \tag{20.3}$$

A (20.3) formulából következik, hogy $\cos z_2 = \cos z_1$, akkor és csak akkor lehet, ha $z_2 = z_1 + 2k\pi$. Ugyanis

$$\cos z_2 - \cos z_1 = 0 \quad \text{csak akkor lehet, ha vagy } \frac{(z_1 + z_2)}{2}$$

$$\text{vagy } \frac{z_1 - z_2}{2}$$

a π-nek egész számú többszöröse.

A $\sin z_1 = \sin z_2$ egyenlőség pedig akkor és csak akkor következhet be, ha $z_2 = z_1 + 2k\pi$ vagy $z_2 = \pi - z_1 + 2k\pi$, ugyanúgy, mint a valósban.

Ugyancsak érvényes a

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} =$$

$$= \frac{4}{4} = 1 \qquad (20.4)$$

összefüggés.

Mind a $\cos z$, mind a $\sin z$ minden értéket felvesz. Ezt a következő módon láthatjuk be:

Legyen $w = \cos z$, akkor $\sin^2 z = 1 - \cos^2 z = 1 - w^2$, azaz $\sqrt{w^2 - 1} = i \sin z$,

tehát $\cos z + i \sin z = e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1}$, innen

$$z = \frac{1}{i} \ln(w + \sqrt{w^2 - 1}) \qquad (20.5)$$

Ez a $w = \cos z$ függvény inverz függvénye; arc cos w, amely minden w-re értelmezve van, mivel $w + \sqrt{w^2 - 1} \neq 0$.

Megjegyezzük, hogy amikor a $w = \cos z$ függvény inverz függvényéről beszélünk, akkor a (20.5) formulában w és z szerepét fel szoktuk cserélni, azaz

$$w = \arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \qquad (20.6)$$

A $w = \sin z$ függvény univerzét a $w = \arcsin z$ függvényt ugyancsak logaritmikus alakban állítjuk elő a következő módon:

Ha $w = \arcsin z$, akkor $z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$, azaz

$$e^{iw} - e^{-iw} = 2iz.$$

Az egyenlet mindkét oldalát e^{iw}-vel szorozva

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Innen:

$$e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{4z^2 + 4}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}, \quad \text{azaz}$$

$$w = -i\ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2}) = -i\ln\left[i(z \pm \sqrt{z^2 - 1})\right]$$

Figyelembe véve, hogy $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\ln i = i\frac{\pi}{2}$, tehát

$$w = \arcsin z = \frac{\pi}{2} - i\cdot\ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) \tag{20.7}$$

Tetszőleges z komplex számra értelmezzük a $w = \operatorname{tg} z$ és $w = \operatorname{ctg} z$ függvényeket az alábbi módon:

$$w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \tag{20.8}$$

$$w = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\operatorname{tg} z} \tag{20.9}$$

Ugyancsak egyszerűen származtatható a $w = \operatorname{tg} z$ függvény inverze a $w = \operatorname{arc\,tg} z$ függvény.
Ugyanis:

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}, \quad \text{azaz}$$

$$iz(e^{iw} + e^{-iw}) = e^{iw} - e^{-iw}, \quad \text{majd } e^{iw}\text{-vel szorozva:}$$

$$(iz - 1)e^{2iw} + iz + 1 = 0.$$

Innen:

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$w = \frac{1}{2i}\ln\frac{1 + iz}{1 - iz} = -\ln\sqrt{\frac{1 + iz}{1 - iz}} = \operatorname{arc\,tg} z.$$

Természetesen a megfelelő hatványsorokkal is értelmezhetők a $\sin z$ és $\cos z$ függvények (lásd: (19.2), (19.3) formulák). Hatványsoraik az egész komplex síkon konvergensek, tehát a trigonometrikus függvények transzcendens egészfüggvények, amelyek Lionwille-tétele értelmében (17.4 Tétel) nem korlátosak és minden értéket felvehetnek. A valósban

pl. a $\sin x = 2$ egyenletnek nyilván nincs értelme, mivel $\sin x \leq 1$. Más a helyzet a komplex z változó esetén. Határozzuk meg azt a z értéket, amelyre $\sin z = 2$!

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2, \quad \text{azaz}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i, \quad \text{végigszorozva az egyenletet } e^{iz}\text{-vel:}$$

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$$

Megoldva ezt az e^{iz}-ben másodfokú egyenletet:

$$e^{iz} = \frac{4i \pm -\sqrt{16 + 4}}{2} = (2 \pm \sqrt{3})i = (2 \pm \sqrt{3})e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$$

Innen

$$iz = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi + \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

$$z = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$$ az egyenlet összes megoldása ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

A $\operatorname{tg} z$ és $\operatorname{ctg} z$ függvények hatványsorba fejtése bizonyos kiegészítő ismereteket igényel.
Minthogy

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i\,\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} =$$

$$= i\,\frac{e^{2iz} - 1 + 2}{e^{2iz} - 1} = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1}$$

Innen:

$$z \operatorname{ctg} z = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} \tag{20.10}$$

A $z \operatorname{ctg} z$ függvény hatványsorát megkapjuk, ha a jobb oldalon álló összeg második tagját hatványsorba tudjuk fejteni.
Vizsgáljuk meg, hogyan fejthető (0 körüli) hatványsorba a

$$w = \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots} \quad \text{függvény!} \tag{20.11}$$

A keresett sor együtthatóit (történeti okokból) $\frac{B_k}{k!}$ -val jelöljük:

$$\frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots} = 1 + B_1 z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \dots$$

Innen:

$$(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots)(1 + B_1 z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \dots) = 1. \quad (20.12)$$

A bal oldalon álló két sor összeszorzása útján tehát olyan hatványsort kell kapnunk, amelynek állandó tagja 1, a többi tag együtthatója pedig 0. A szorzás az ún. Cauchy-féle szorzat alapján (20.12)-ből:

$$1 + (B_1 + \frac{1}{2!})z + (\frac{B_2}{2!} + \frac{B_1}{2!} + \frac{1}{3!})z^2 + \dots$$

ahol z^n együtthatója:

$$\frac{1}{1!}\frac{B_n}{n!} + \frac{1}{2!}\frac{B_{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{(n+1)!} = 0 \quad (20.13)$$

$$(n = 1,2,\dots)$$

kell legyen.

Így egy végtelen sok egyenletből álló egyenletrendszert kaptunk:

(z^n együtthatóját (n+1)!-sal szorozva):

$$\begin{aligned} 2B_1 + 1 &= 0 \\ 3B_2 + 3B_1 + 1 &= 0 \\ 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1 &= 0 \\ 5B_4 + 10B_3 + 10B_2 + 5B_1 + 1 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (20.14)$$

Innen

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0,$$

$$B_6 = \frac{1}{42}, \dots \quad (20.15)$$

A B_n számokat Bernoulli-féle számoknak nevezzük, amelyeket tehát ismerteknek tekinthetünk. ($B_{2k+1} = 0$, ha $k = 1,2,\ldots$).

A (20.11) és (10.15) formulák alapján:

$$w = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{6\cdot 2!} z^2 - \frac{1}{30\cdot 4!} z^4 + \frac{1}{42\cdot 6!} z^6 -$$

$$- \ldots = 1 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \ldots \qquad (20.16)$$

Eredményünk alapján a (20.10) összefüggést figyelembe véve:

$$z \operatorname{ctg} z = iz + 1 + B_1(2iz) + \ldots \qquad (20.17)$$

Mivel $B_1 = -\frac{1}{2}$, a többi páratlan index Bernoulli-féle szám pedig 0, ezért

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - \frac{2^2 B_2}{2!} z^2 + \ldots + (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{45} z^4 - \frac{2}{945} z^6 - \ldots \qquad (20.18)$$

A $w = \operatorname{tg} z$ sorfejtésben a $\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z - 2 \operatorname{ctg} 2z$ összefüggésből indulunk ki és (20.18) figyelembevételével a

$$\operatorname{tg} z = \frac{4\cdot 3}{2!} B_2 z + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1} +$$

$$+ \ldots = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \frac{17}{315} z^7 + \ldots \qquad (20.19)$$

sort kapjuk.

A (20.18) sor konvergenciasugara π, a (20.19) sor konvergenciasugara $\frac{\pi}{2}$. (Ezek meghatározása mélyebb függvénytani ismereteket kíván, ezért igazolásuktól itt el kell tekintenünk.)

Befejezésül megemlítjük még az általános hatvány fogalmát, amelyet a következő módon értelmezünk: tetszőleges z és ς komplex számokra

$$z^\varsigma = e^{\varsigma \ln z}, \quad \text{ahol} \quad z^\varsigma \text{ főértékét az } \ln^* z \text{ főérték} \qquad (20.20)$$

behelyettesítésével nyerjük.

Így pl.:

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i(i\frac{\pi}{2}+2k\pi i)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Látható, hogy az i^i hatvány értékei mind valósak, közülük a főérték $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

II. Rész

FOURIER-SOROK

1. Trigonometrikus polinomok

A differenciálegyenletek tárgyalása során már találkoztunk olyan problémákkal, amelyek megoldásában az x független változó többszöröseinek sinusát, ill. cosinusát kellett vennünk.

Ha pl. az x független változó az időt jelöli, akkor - mint láttuk - az $y = A \sin(kx + x_o)$ függvény az egyszerű harmonikus rezgőmozgást írja le, (ahol k a 2π-idő alatt végzett rezgések száma).

Ha a mozgó pontra egyidejűleg több olyan erő hat, amelyek mindegyike egyszerű harmonikus rezgést eredményezne, akkor ezek szuperpozíciója az

$$f(x) = \sum_{k=o}^{n} A_k(\sin kx + x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k(\sin kx \cos x_k + \cos k\,x \sin x_k) =$$

$$= \sum_{k=o}^{n} (a_k \cos k\,x + b_k \sin k\,x) \qquad (1.1)$$

alakú függvény, (ahol az $A_k \sin x_k = a_k$, $A_k \cos x_k = b_k$ jelölést alkalmaztuk). Az (1.1) alakú összetett harmonikus rezgéseket leíró függvények mindig 2π-szerint periodikusak, ha a frekvenciák egész számok, de egyébként igen különböző alakú függvények. Természetszerűleg vetődik fel az a kérdés, hogy adott 2π-periódusú f(x) függvény, - amelyre tehát: $f(x) = f(x + 2\pi)$ - előállítható-e véges vagy végtelen sok egyszerű harmonikus rezgés szuperpozíciójaként?

A kérdésre válaszolva a XIX. században bebizonyították - a matematikai analízis egyik legnagyobb vívmányaként -, hogy igen tág függvényosztályban 2π-szerint periodikus f(x) függvények előállíthatók végtelen (esetleg véges) sok egyszerű harmonikus rezgés összegeként, azaz

$$f(x) = \sum_{k=o}^{\infty} (a_k \cos k\,x + b_k \sin k\,x) \qquad (1.2)$$

alakban.

Definíció:

Az

$$f(x) = \Phi_n(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1.3)$$

alakú függvényeket n-edrendű trigonometrikus polinomoknak nevezzük. (Az egyenlet konstans tagját az együtthatókra vonatkozó képletek egyöntetűsége miatt írták $\frac{a_o}{2}$ alakban).

Látni fogjuk, hogy az (1.3) egyenlet jobb oldalán álló $a_o, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ együtthatókat ki lehet fejezni az $f(x)$ függvény segítségével. Más szóval, ha $f(x)$ adott trigonometrikus polinom, akkor a lineáris kombináció együtthatói egyértelműen meghatározottak.

Vegyük észre, hogy az (1.3) formula jobb oldala az

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \quad (1.4)$$

ún. trigonometrikus függvényrendszer tagjainak lineáris kombinációja. Könnyű belátni, hogy az (1.4) trigonometrikus rendszer tagjaira teljesülnek a következő összefüggések:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx \, dx = \frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (1.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin \ell x \, dx = -\frac{\cos \ell x}{\ell}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos \ell x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+\ell)x + \cos(k-\ell)x] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin(k+\ell)}{k+\ell}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\sin(k-\ell)x}{k-\ell}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (1.6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin \ell x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+\ell)x - \sin(k-\ell)x] \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\cos(k+\ell)x}{k+\ell}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\cos(k-\ell)x}{k-\ell}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin \ell x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+\ell)x - \cos(k-\ell)x] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sin(k+\ell)x}{k+\ell}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin(k-\ell)x}{k-\ell}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Továbbá:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 k\,x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2k\,x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2k\,x}{2k}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi \qquad (1.7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2k\,x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2k\,x}{2k}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

Ha most $f(x)$ trigonometrikus polinom, akkor az $a_o, a_1,\dots,a_n$, $b_1,b_2,\dots,b_n$ együtthatókat az (1.3) formulában könnyen meghatározhatjuk az (1.5) - (1.7) összefüggések figyelembevételével.

Integráljuk az (1.3) egyenlet mindkét oldalát a $(-\pi,\pi)$ intervallumon:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_o}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=o}^{n}\Big(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx +$$

$$+ b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\Big) = \frac{a_o}{2}\cdot 2\pi = a_o\pi.$$

Innen:

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (1.8)$$

Szorozzuk végig az (1.3) egyenletet $\cos kx$-szel, ekkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_o}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx + a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos kx dx +$$

$$+ \dots + a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx + \dots + a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\,x\cos kx dx +$$

$$+ b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos kx \, dx + \ldots + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \cos kx dx =$$

$$= a_k \pi$$

Tehát

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \tag{1.9}$$

Ha most az (1.3) egyenletet sin kx-szel szorozzuk végig és integrálunk, akkor az (1.6) relációk alapján

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \tag{1.10}$$

adódik.

Ezekből látható, hogy ha $f(x)$ trigonometrikus polinom, akkor az a_o, a_k, b_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ együtthatók egyértelműen meg vannak határozva.

Az (1.8), (1.9) és (1.10) formulákkal megadott a_o, a_k, b_k együtthatókat az (1.3) alatti $f(x)$ függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük.

A fenti módon számított együtthatókkal képezett

$$f(x) = \Phi_n(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.11}$$

trigonometrikus polinomot Fourier-polinomnak nevezzük.

Az (1.11) formulában szereplő $\Phi_n(x)$ polinomot zárt alakban is elő tudjuk állítani. Írjuk be az a_o, a_k, b_k együtthatók helyébe az (1.8), (1.9), (1.10) kifejezéseket, az integrációs változót t-vel jelölve:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cos kx \, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \sin kx \, dt \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t - x) \right] dt$$

Alkalmazzuk a $t - x = u$ helyettesítést, ekkor:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x + u)[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku]du \qquad (1.12)$$

Alakítsuk most át a szögletes zárójelben levő kifejezést:

$$C(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos nu$$

Az egyenlet mindkét oldalát $2 \sin \frac{u}{2}$ -lel szorozva és tekintetbe véve, hogy

$$2 \sin \frac{u}{2} \cos ku = \sin(k + \frac{1}{2})u - \sin(k - \frac{1}{2})u,$$

kapjuk:

$$2 \sin \frac{u}{2} C(u) = \sin \frac{u}{2} + 2 \sin \frac{u}{2} \cos u + 2 \sin \frac{u}{2} \cos 2u +$$

$$+ \ldots + 2 \sin \frac{u}{2} \cos nu = \sin \frac{u}{2} + [\sin(1 + \frac{1}{2})k -$$

$$- \sin(1 - \frac{1}{2})u] + [\sin(2 + \frac{1}{2})u - \sin(2 - \frac{1}{2})u] + \ldots$$

$$\ldots + [\sin(n + \frac{1}{2})u - \sin(n - \frac{1}{2})u] = \sin(n + \frac{1}{2})u$$

azaz

$$C(u) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} \qquad (1.13)$$

Az (1.13) összefüggést az (1.12) formulába helyettesítve:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x + u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du . \qquad (1.14)$$

Megmutatjuk, hogy a

$$\varphi(u) = f(x + u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

függvény 2π-szerint periodikus. Maga az $f(x)$ függvény, mivel trigonometrikus polinom, nyilván 2π -szerint periodikus, tehát $f(x + u + 2\pi) = f(x + u)$, továbbá:

$$\varphi(u + 2\pi) = f(x + u + 2\pi) \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})(u + 2\pi)]}{2 \sin \frac{1}{2} (u + 2\pi)} =$$

$$= f(x + u) \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})u + 2n\pi + \pi]}{2 \sin(\frac{1}{2} u + \pi)} =$$

$$= f(x + u) \frac{- \sin(n + \frac{1}{2})u}{-2 \sin \frac{u}{2}} = \varphi(u)$$

Könnyű belátni, hogy egy periodikus függvénynek a periódus hosszával megegyező hosszúságú intervallumon vett integrálja mindig ugyanakkora értékű. Ha a periódus hossza 2π, akkor

$$\int_a^{a+2\pi} \varphi(u)du = \int_a^0 \varphi(u)du + \int_0^{2\pi} \varphi(u)du + \int_{2\pi}^{a+2\pi} \varphi(u)du$$

Helyettesítsünk a jobb oldali harmadik integrálban $u = z + 2\pi - t$, ekkor a periodicitásból következik, hogy $\varphi(z + 2\pi) = \varphi(z)$, tehát

$$\int_{2\pi}^{a+2\pi} \varphi(u)du = \int_0^a \varphi(z + 2\pi)dz = - \int_a^0 \varphi(z)dz = - \int_a^0 \varphi(u)du$$

Ha itt $a = -\pi$ helyettesítést végzünk:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(u)du = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)du \tag{1.16}$$

Ha az (1.15) formulában $a = -\pi - x$, akkor

$$\int_0^{2\pi} \varphi(u)du = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \varphi(u)du, \quad \text{tehát (1.16) és (1.17)} \tag{1.17}$$

alapján:

$$\int_{-\pi-x}^{\pi-x} \varphi(u)du = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)du$$

Ezek alapján az (1.14) formula helyett írhatjuk, hogy

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

Ha az (1.18) összefüggés jobb oldalán álló integrált, amelyet Dirichlet-féle szinguláris integrálnak nevezzük, a $[-\pi, 0]$ és $[0, \pi]$ szakaszokon vett integrálok összegére bontjuk és az első összeadandóban u helyett (-u)-t írunk, akkor

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x + u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du + \tag{1.19}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x + u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} [f(x + u) - f(x - u)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} du$$

írjunk most az (1.19) formulában u helyébe 2t -t, ekkor

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [f(x + 2t) - f(x - 2t)] \frac{\sin(2n + 1)t}{\sin t} dt \tag{1.20}$$

Ezzel az n-edrendű Fourier-polinomot zárt alakban sikerült előállítani. A későbbiekben erre a formulára többször fogunk hivatkozni.

Az olvasóban felmerülhet a kérdés, hogy mi értelme van a bonyolultnak tűnő (1.20) formulának, amikor a $\Phi_n(x)$ Fourier-polinomot az $a_o, a_k, b_k, \ldots$ együtthatók (1.8)-(1.10) formulákkal való kiszámítása után (1.11) alapján fel tudjuk írni. Valóban, ha $f(x) = \Phi_n(x)$, akkor az (1.20) egyenlet egy azonosság, amire semmi szükségünk nincs. Ha azonban f(x) nem trigonometrikus polinom, hanem egy adott függvény, amely 2π-szerint periodikus és bizonyos feltételeknek eleget tesz, akkor közelíteni fogjuk a $\Phi_n(x)$ n-edrendű trigonometrikus polinommal, hasonló módon ahhoz, ahogy elég sokszor differenciálható f(x) függvényt Taylor-polinommal közelítettünk.

A közelítés pontosságának megítélésében az (1.20) formula hasznos lesz.

2. A Fourier-sor fogalma. Konvergencia-kritériumok

Definíció:
Az

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k x + b_k \sin kx) \qquad (2.1)$$

alakú végtelen sorokat trigonometrikus soroknak nevezzük.

2.1 Tétel:
Ha az $f(x)$ függvény egyenletesen konvergens trigonometrikus sorba fejthető:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (2.2)$$

akkor e sor együtthatói egyértelműen vannak meghatározva.

Bizonyítás:
Emlékeztetünk rá, hogy egyenletesen konvergens függvénysor tagonként integrálható. Ha (2.2) sor mindkét oldalát integráljuk a $(-\pi, \pi)$ intervallumon, akkor az (1.5) összefüggések alapján:

$$\frac{a_o}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad \text{adódik.} \qquad (2.3)$$

A (2.2) sort $\cos kx$-szel, ill. $\sin kx$-szel szorozva és a $(-\pi, \pi)$ intervallumon integrálva az

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \quad \text{ill.} \qquad (2.4)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx$$

értékek adódnak, miként a trigonometrikus polinomok tárgyalása során láttuk.

Definíció:
Legyen $f(x)$ 2π-szerint periodikus folytonos függvény. Ekkor a (2.3) és (2.4) formulákkal meghatározott a_o, a_k, b_k számokat az $f(x)$ függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük, az olyan trigonometrikus sort pedig, amelynek együtthatói az $f(x)$ függvény Fourier-együtthatói, e függvény Fourier-sorának hívjuk.

A 2.1 Tétel arra az esetre vonatkozik, amikor az $f(x)$ függvény és az 1. $\cos x$, $\sin x$, ..., $\cos nx$, $\sin nx$,... trigonometrikus rendszer tagjaival számított szorzatintegrálok útján kapott együtthatók segítségével képezett sor egyenletesen konvergens. Természetesen felmerül a kérdés, hogy az $f(x)$ függvénynek milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie ahhoz, hogy a (2.2) sor egyenletesen konvergens legyen.

Ha $f(x)$ integrálható függvény, akkor a (2.3) és (2.4) képletek segítségével az együtthatók kiszámíthatók és a (2.2) sor formálisan felírható, azonban egyáltalán nem biztos, hogy a sor konvergens, főként, hogy egyenletesen konvergens és hogy tetszőleges x helyen a (2.2) jobb oldalán álló sor összege megegyezik $f(x)$ értékével.

Az a kérdés, hogy az $f(x)$ függvénynek milyen feltételeket kell teljesítenie ahhoz, hogy a (2.2) sor egyenletesen konvergens legyen, a Fourier-sorok elméletének központi kérdése. Mutatunk majd néhány elégséges feltételt erre vonatkozólag.

Definíció:

Legyen $f(x)$ adott $[a,b]$ intervallumon értelmezett függvény. Ha az adott intervallumon belüli tetszőleges x_1 és x_2 értékekre teljesül az

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|^{\alpha} \quad (\alpha > 0) \tag{2.5}$$

egyenlőtlenség, akkor azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény α-rendű és M együtthatójú Lipschitz-feltételnek tesz eleget: $f(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$.

Amennyiben az M együttható értéke nem lényeges, akkor azt mondjuk, $f(x)$ α-rendű Lipschitz-feltételnek tesz eleget valamilyen együtthatóval és röviden így jelöljük:

$$f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$$

1. Megjegyzés

Könnyű belátni, hogy egy Lipschitz-feltételt kielégítő függvény az $[a,b]$ intervallumon egyenletesen folytonos.

2. Megjegyzés

Ugyancsak egyszerűen belátható, hogy ha $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, ahol $\alpha > 1$, akkor $f(x)$ állandó, ugyanis ekkor

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leq M|x_2 - x_1|^{\alpha-1}$$

Ha itt $x_2 \to x_1$, akkor $f'(x_1) = 0$ tetszőleges $x_1 \in [a,b]$-be tehát $f(x) = c$.

A következőkben feltesszük, hogy $\alpha \leq 1$.

3. Megjegyzés

Egyszerűen adódik, hogy ha az $[a,b]$ intervallumban $f(x)$ differenciálható és $|f'(x)| < M$, akkor $f(x) \in Lip_M 1$. Ugyanis a Lagrange-féle középértéktétel alapján

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(z)(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < z < x_2)$$

tehát

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1| .$$

2.2 Tétel:

Ha a 2π-periódusú folytonos $f(x)$ függvény differenciálhányadosa α-rendű Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor $f(x)$ egyenletesen konvergens Fourier-sorba fejthető.

Bizonyítás:

A Fourier-együtthatókból kiindulva, parciális integrálással:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[f(x) \frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} -$$

$$- \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx \qquad (2.6)$$

Az első tag a jobb oldalon $f(x)$ periodikus volta miatt zérus, így

$$-n\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx \qquad (2.7)$$

Végezzünk az utóbbi integrálban $x = t + \frac{\pi}{n}$ helyettesítést!

Az integrálandó függvény periodikus volta következtében az integrálás eredeti határait megtarthatjuk, így:

$$-n\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t + \frac{\pi}{n})\sin(nt + \pi)dt = - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t + \frac{\pi}{n}) \cdot$$

$$\cdot \sin nt dt = - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x + \frac{\pi}{n})\sin nx dx \qquad (2.8)$$

[mivel $\sin(nt + \pi) = \sin nt \cos\pi + \cos nt \sin\pi = - \sin nt$]

A (2.7) és (2.8) formulák összeadásával:

$$-2\pi n\, a_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x) - f'(x + \frac{\pi}{n})]\sin nx dx. \qquad (2.9)$$

Minthogy a feltételezés szerint a $(-\pi,\pi)$ intervallumon belüli minden x_1, x_2 értékpárra igaz

$$|f'(x_2) - f'(x_1)| \leqslant |M\, x_2 - x_1|^{\alpha} ,$$

$x_1 = x$, $x_2 = x + \frac{\pi}{n}$ választással a következő összefüggést kapjuk

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x) - f'(x + \tfrac{\pi}{n})] \sin nx dx \right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x) - f'(x + \tfrac{\pi}{n})| \cdot$$

$$\cdot |\sin nx| dx \leqslant M(\tfrac{\pi}{n})^{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx| dx \leqslant M(\tfrac{\pi}{n})^{\alpha} \cdot 2\pi$$

tehát (2.9)-ből:

$$|a_n| \leqslant \frac{M \pi^{\alpha}}{n^{1+\alpha}} \tag{2.10}$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$|b_n| \leqslant \frac{M \pi^{\alpha}}{n^{1+\alpha}} \tag{2.11}$$

Minthogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ sor a Cauchy-féle integrálkritérium alapján konvergens, következik, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \quad \text{sor konvergens.}$$

Ez a sor viszont majorálja az

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sort, amiből az utóbbi sor egyenletes konvergenciája következik.

Az előzőekben tett 3. Megjegyzés alapján következik, hogy ha a 2π-szerint periodikus folytonos és differenciálható $f(x)$ függvény deriváltja korlátos a $[-\pi,\pi]$ intervallumban, akkor egyenletesen konvergens Fourier-sorba fejthető.
A továbbiakban még egy - a gyakorlatban előforduló függvények széles osztályára érvényes-elégséges feltételt mutatunk be a Fourier-sor konvergenciájára vonatkozólag. Ehhez előzetesen néhány fogalmat kell megvilágítanunk.

Definíció:

Az $f(x)$ függvényt szakaszonként simának nevezzük, egy intervallumra vonatkozólag, ha ott szakaszonként folytonos (azaz legfeljebb véges számú elsőfajú* szakadási helye van) és ha ott az első deriváltja $f'(x)$ is szakaszonként folytonos.

Az $f(x)$ függvényt továbbra is 2π szerint periodikusnak tételezzük fel és a $[-\pi,\pi]$ intervallumra vonatkozó görbét az egész számegyenesen periodikusan folytatjuk. Az $f(x)$ görbét függvény szakadási helyén előírjuk, hogy $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ legyen, azaz ilyen pontokban legyen a függvény a jobb és bal oldali határértékeinek számtani közepe. Ezzel a megállapodással a következő tétel mondható ki:

2.3 Tétel:

Szakaszonként sima $f(x)$ függvény Fourier-sora minden x helyen konvergens és összege előállítja a függvényt, azaz

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Bizonyítás:

A tétel bizonyításához felhasználjuk az (1.18) Dirichlet-integrált, amelynek alapján a Fourier-sor n-edik részletösszege:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} dt \qquad (2.12)$$

alakban írható.

Az $S_n(x) \to f(x)$ konvergencia bizonyításához szükségünk lesz két segédtételre.

1. Lemma:

Ha az $s(x)$ függvény az $a \leq x \leq b$ intervallumban szakaszonként sima, akkor az

$$I = \int_a^b s(t) \sin \lambda t \, dt$$

integrál $\lambda \to \infty$ esetén zérushoz tart.

---

*Elsőfajú szakadási helyen olyan szakadási pontot értünk, ahol a függvény bal és jobb oldali határértéke létezik és ezek különbsége véges szám.

Bizonyítás:
Parciális integrálással adódik, hogy

$$\int_a^b s(t)\sin\lambda t\, dt = \frac{1}{\lambda}\Big[-s(t)\cos\lambda t)\Big]_a^b + \tag{2.13}$$

$$+\int_a^b s'(t)\cos\lambda t\, dt\Big] =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\Big\{\Big[s(a)\cos\lambda a - s(b)\cos\lambda b\Big] + \int_a^b s'(t)\cos\lambda t\, dt$$

Mivel a zárójelen belüli összeg korlátos, a jobb oldal $\lambda \to \infty$ esetén zérushoz tart.

2. Lemma:
Tetszőleges $a > 0$ esetén

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^a \frac{\sin\lambda t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\,. \tag{2.14}$$

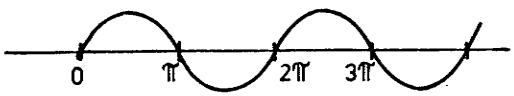
A (2.14) integrálban $\lambda t = \tau$ helyettesítéssel:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^a \frac{\sin\lambda t}{t} dt = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{a\lambda} \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau = \int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau \tag{2.15}$$

Ebből következik, hogy a (2.14) integrál határértéke a-tól független!
Azt kell tehát bebizonyítanunk, hogy

$$\int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}\,. \tag{2.16}$$

Azt, hogy a (2.15) integrál egyáltalán konvergens, könnyű belátni.



2.1 ábra

Osszuk fel ugyanis a pozitív félegyenest a $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ osztópontokkal π hosszúságú szakaszokra, ekkor figyelembe véve a $\sin x$ függvény görbéjét, amely a fenti szakaszokon változó előjelű, írhatjuk, hogy:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad (\nu = 1,2,\ldots) \quad (2.17)$$

Bevezetve az $a_\nu = \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ jelölést,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \quad (2.18)$$

Mivel a $[(\nu - 1)\pi, \nu\pi]$ intervallumon $\sin x$ értékeit kisebb x értékkel kell osztani, mint a $[\nu\pi, (\nu + 1)\pi]$ intervallumon, ezért $|a_{\nu+1}| < |a_\nu|$ vagyis a (2.17) sor monoton csökkenő abszolút értékű tagokból álló váltakozó előjelű sor, ahol

$$a_\nu \leqslant \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \leqslant \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \left|\frac{1}{x}\right| dx = \ln \nu\pi - \ln(\nu - 1)\pi =$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{\nu - 1}\right) \to 0,$$

ha $\nu \to \infty$, ezért a (2.17) sor a Leibniz-féle kritérium értelmében konvergens.

Most az 1. Lemmára támaszkodva megmutatjuk, hogy fennáll a

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^a \sin \lambda t \left(\frac{1}{2\sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right) dt = 0 \quad (2.19)$$

határérték reláció, ahol $a < 2\pi$ tetszőleges pozitív szám. Az egyenlőség érvényessége $t \neq 0$ esetén az 1. Lemmából rögtön következik.

A $t = 0$ helyen az integrandus második tényezője 0-hoz tart, mivel

$$\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{\frac{t}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}}\right)$$

Továbbá:

$$0 < \frac{\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}} < \frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}} = \frac{1 - \cos\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} \quad \text{ha} < 0 < t\pi .$$

A L'Hospital-szabály alkalmazásával:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x - x \sin x} = 0$$

Ezzel a (2.19) reláció érvényességet kimutattuk.
Ha a (2.19) formulában $a = \pi$, akkor tehát:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin \lambda t}{2 \sin\frac{t}{2}}\, dt \qquad (2.20)$$

A (2.20) egyenlet jobb oldalán álló integrálban $\lambda = n + \frac{1}{2}$ helyettesítést végezve, miként az (1.18) Dirichlet-formula származtatásánál láttuk:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin\frac{t}{2}}\, dt = \int_0^{\pi} (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt)dt = \frac{\pi}{2} \qquad (2.21)$$

amiről tagonkénti integrálással meggyőződhetünk, ugyanis az integrandus páros függvény, így

$$2\int_0^{\pi}(\frac{1}{2} + \sum \cos kt)dt = \int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt)dt =$$

$$= \pi + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\, dt = \pi .$$

Mivel a (2.20) egyenlet bal oldalán álló integrál határértéke a (2.15) összefüggés alapján a felső határtól független, ezért általában igaz, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{a} \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin \lambda t}{2 \sin\frac{t}{2}}\, dt = \frac{\pi}{2} . \qquad (2.22)$$

A fenti két lemmára támaszkodva könnyen adódik a 2.2 Tétel bizonyítása

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} dt = f(x) \qquad (2.23)$$

Az integrálás tartományát az origóval két szakaszra bontjuk $[-\pi,0]$ és $(0,\pi]$ intervallumokra. Legyen az 1. lemmában szereplő $s(t)$ függvény:

$$s(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

amely a $0 \leqslant t \leqslant \pi$ intervallumban szakaszonként sima. Az 1. lemma alapján:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} s(t)\sin\lambda t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{\sin\frac{t}{2}}dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+0)\frac{\sin\lambda t}{\sin\frac{t}{2}}dt \to 0, \quad \text{ha } \lambda\to\infty \tag{2.24}$$

Mivel $\lambda = n + \frac{1}{2}$, $\lambda\to\infty$ ha $n\to\infty$.

A második integrálban $f(x+0)$ az integráljel elé kiemelhető, a 2. lemma alapján pedig:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\lambda t}{2\sin\frac{t}{2}}dt \to \frac{\pi}{2}, \quad \text{ha } \lambda\to\infty, \quad \text{így}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+0)\frac{\sin\lambda t}{\sin\frac{t}{2}}dt = f(x+0)\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\lambda t}{2\sin\frac{t}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{2}f(x+0) \tag{2.25}$$

Ugyanígy kapjuk a $[-\pi, 0]$ intervallumra vonatkozóan, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{2}f(x-0) \tag{2.26}$$

A (2.25) és (2.26) egyenleteket összeadva kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt =$$

$$= \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x), \tag{2.27}$$

mivel minden folytonossági helyen $f(x)$ a jobb és bal oldali határértékeinek számtani közepe, szakadási helyen pedig ezt írtuk elő.

Ezzel a 2.3 tételt, amely mind elméleti - mind az alkalmazások szempontjából - alapvető jelentőségű, teljesen bebizonyítottuk.

Tehát szakaszonként sima $f(x)$ függvény Fourier-sora konvergens és a Fourier-sor összege minden x helyen megadja $f(x)$ értékét, ha a szakadási helyekre az $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0)+ f(x+0)]$ előírást tesszük. Felmerül a kérdés, hogy szakaszonként sima $f(x)$ függvény esetében az $f(x)$ függvénynek valamely (x_1,x_2) intervallumra vonatkozó határozott integrálja kiszámítható-e a Fourier-sor segítségével. Korábbi ismeretünkből tudjuk, hogy ha egy végtelen függvénysor egy adott intervallumban egyenletesen konvergens, akkor tagonként integrálható. Mivel $f(x)$ szakaszonként sima, tehát adott intervallumban véges számú szakadási helye lehet, ezeken a helyeken viszont a Fourier-sor nyilván nem lehet egyenletesen konvergens.

Ennek ellenére - és ez igen figyelemre méltó tény - szakaszonként folytonos $f(x)$ függvény Fourier-sora tagonként integrálható. Erre vonatkozik a következő tétel.

2.4 Tétel

Ha az $f(x)$ függvény a $-\pi \leq x \leq \pi$ intervallumban szakaszonként folytonos és ha az

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

sor az $f(x)$ függvény Fourier-sora, akkor

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} a_o dx + \sum_{k=1}^{\infty} = (a_k \cos kx + b_k \sin kx)dx \tag{2.28}$$

Bizonyítás:

Legyen $F(x) = \int_{-\pi}^{x} [f(t) - \frac{a_o}{2}]dt$

Ez a függvény szakaszonként sima és $F(\pi) = F(-\pi) = 0$,

mivel $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{a_o}{2}$.

$F(x)$ tehát a $(-\pi, \pi)$ intervallum végpontjaiban megegyező értékű, így az egész számegyenes periodikusan folytatható. Az $F(x)$ függvény Fourier-sora:

$$F(x) = \frac{1}{2} A_o + \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) \qquad (2.29)$$

egyenletesen konvergál $F(x)$-hez, mivel $F(x)$ szakaszonként sima.

Az A_k, B_k együtthatók parciális integrálással:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi k} [F(x) \sin kx]_{-\pi}^{\pi} -$$

$$- \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = - \frac{1}{k} b_k \qquad (2.30)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx \, dx = - \frac{1}{\pi k} [\cos kx]_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{k} a_k$$

A (2.29) sor egyenletes konvergenciája folytán ugyancsak egyenletesen konvergál a

$$F(x_2) - F(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k(\cos k x_2 - \cos k x_1) +$$

$$+ B_k(\sin k x_2 - \sin k x_1)] = \sum_{k=1}^{\infty} [- \frac{b_k}{k}(\cos k x_2 -$$

$$- \cos k x_1) + \frac{a_k}{k}(\sin k x_2 - \sin k x_1)] \qquad (2.31)$$

Ha most elvégezzük az $F(x) = \int_{-\pi}^{x} [f(x) - \frac{a_o}{2})] \, dx$ helyettesítést, (2.31) alapján,

$$\int_{x_1}^{x_2} [f(x) - \frac{a_o}{2}] dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] \qquad (2.32)$$

amit bizonyítanunk kellett.

Ismertetjük, bizonyítás nélkül, Dirichlet-tételét, amely ugyancsak elégséges feltételt jelent a Fourier-sor konvergenciájára és a gyakorlatban sokszor alkalmazható:

2.5 Tétel

Legyen $f(x)$ olyan függvény, amely a $(-\pi,\pi)$ intervallumban szakaszonként monoton, (azaz a $[-\pi,\pi]$ intervallum felosztható véges sok részintervallumra, amelyekben $f(x)$ monoton).

Ekkor $f(x)$ Fourier-sora a mindig létező $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ értékhez tart (specálisan magához az $f(x)$ függvényértékhez $f(x)$ minden folytonossági helyén). Az intervallum végpontjaiban a sor összege: $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$.

A Dirichlet-tétel éppen úgy, mint a 2.4 tétel, a függvényeknek igen kiterjedt osztályára vonatkozik. Ugyanakkor amikor a (2.5) tétel megengedi, hogy az $f(x)$ függvénynek a $(-\pi,\pi)$ intervallumban végtelen sok extrémum (maximum vagy minimum) helye legyen, de megköveteli a derivált folytonosságát véges számú pont kivételével, addig a 2.5 tétel csak véges számú extrémum hely létezését engedélyezi, viszont nem támaszt semmiféle követelményt a derivált létezésére vonatkozóan. Az analízisben és annak alkalmazásaiban, pl. a műszaki tudományokban előforduló periodikus függvények szinte kivétel nélkül kielégítik vagy a 2.4 tétel, vagy a 2.5 tétel (vagy mindkettő) feltételeit.

Megemlítjük még, hogy Dirichlet-tételét Jordan még tágabb függvényosztályra az ún. korlátos variációjú függvények osztályára kiterjesztette, így az irodalomban Dirichlet-Jordan-tétel néven szerepel. Bizonyítását lásd pl. [4].

3. Tetszőleges periódusú függvények Fourier-sora

Az eddigiekben 2π-szerint periodikus függvények Fourier-sorba fejthetőségét vizsgáltuk. Legyen most $f(x)$ valamely más 2ℓ -hosszúságú periódussal bíró függvény.

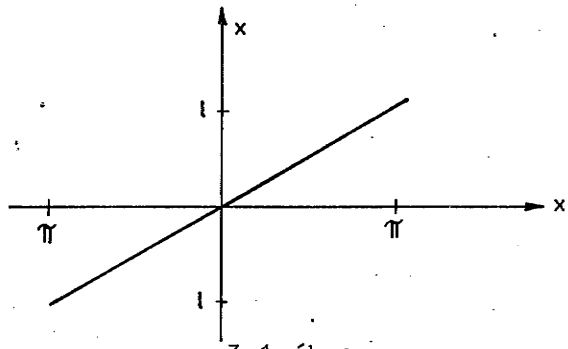
Vizsgáljuk $f(x)$ Fourier-sorba fejtését a $[-\ell,\ell]$ intervallumon! Tegyük fel, hogy $f(x)$ ezen az intervallumon eleget tesz a 2.4 vagy 2.5 tétel feltételeinek.

Alkalmazzuk az $x = \frac{\ell}{\pi} x^*$ transzformációt, vagyis $x^* = \frac{\pi}{\ell} x$.

Látható, hogy $x = \ell$ esetén $x^* = \pi$, $x = -\ell$ esetén $x^* = -\pi$.

Tehát a

$\varphi(x^*) = f(\frac{\ell}{\pi} x^*)$ függvény 2π szerint periodikus, mint x^* függvénye.



3.1 ábra

Számítsuk ki $\varphi(x^*)$ Fourier-együtthatóit!

$$\varphi(x^*) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx^* + b_k \sin kx^*), \quad \text{ahol:}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x^*)dx^* = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\pi}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\dfrac{\ell}{\pi} x^*)dx = \dfrac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx \\ a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x^*)\cos kx^* \, dx^* = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\pi}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\dfrac{\ell}{\pi} x^*), \\ \cdot(\cos k \dfrac{\pi}{\ell} x)dx = \dfrac{1}{\ell} \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos k \dfrac{\pi}{\ell} x \, dx \\ b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x^*)\sin kx^* dx^* = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\pi}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\dfrac{\ell}{\pi} x^*)\sin k \dfrac{\pi}{\ell} dx = \\ = \dfrac{1}{\ell} \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin k \dfrac{\pi}{\ell} x dx \end{cases} \tag{3.1}$$

ugyanis az $x = \frac{\ell}{\pi} x^*$ transzformáció folytán $f(\frac{\ell}{\pi} x^*) = f(x)$.

Itt a Fourier-sor összege 2ℓ-szerint periodikus függvény. Tehát tetszőleges hosszúságú periódussal bíró függvény Fourier sora mindig visszavezethető egy 2π-szerinti periodikus függvény Fourier-sorára, az együtthatók kiszámítását a (3.1) formulákkal kell végezni.

4. Páros, illetve páratlan függvények Fourier-sora. Példák

Tegyük fel, hogy a Fourier-sorba fejtendő $f(x)$ függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumban páros függvény. Ekkor $f(x) \sin kx$ páratlan függvény, amelynek a $(-\pi, \pi)$ intervallumon vett integrálja zérussal egyenlő, így az összes b_k együtthatók zérussal egyenlők. A páros $f(x)$ függvény Fourier-sora tehát:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad \text{ahol} \tag{4.1}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \tag{4.2}$$

az $f(x)$ függvény páros volta miatt.

Röviden úgy fogalmazhatjuk eredményünket, hogy páros függvény Fourier-sora tiszta cosinus-sor. Ha az $f(x)$ függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon kielégíti a 2.4 vagy 2.5 tétel feltételeit, akkor a (4.1) összefüggésben a "$\sim$" jel helyett "=" írandó.

Tegyük most fel, hogy $f(x)$ a $[-\pi, \pi]$ intervallumon páratlan függvény. Ekkor $f(x) \cos kx$ páratlan, így az összes a_k együttható zérussal lesz egyenlő. Mivel $\sin kx$ páratlan függvény, $f(x) \sin kx$ páros függvény, így

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \tag{4.3}$$

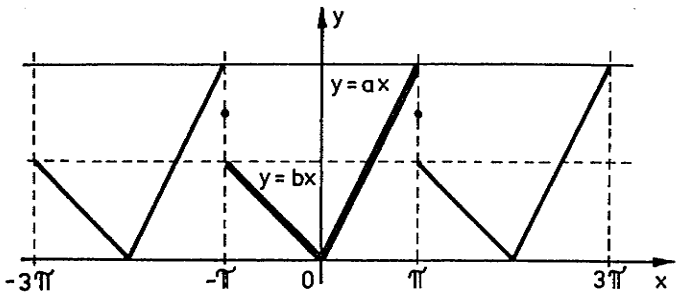
Tehát páratlan függvény Fourier-sora tiszta sinus-sor.

<u>Példák</u>

1. Fejtsük trigonometrikus sorba azt az $f(x)$ függvényt, amelyet a $[-\pi, \pi]$ intervallumban a következőképpen értelmezünk: $f(x) = ax$, ha $0 \leqslant x \leqslant \pi$ és $f(x) = bx$, ha $-\pi \leqslant x \leqslant 0$, a és b állandók. Ez a függvény természetesen kielégíti mindkét alaptétel feltételeit. Az $f(x)$ függvény görbéje az $y = ax$ és $y = bx$ egyenes darabokból álló törtvonal (4.1) ábra).

Számítsuk ki az $f(x)$ függvény Fourier-együtthatóit! Ha $n \neq 0$, kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} bx \cos nx \, dx +$$



4.1 ábra

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} ax\cos nx\,dx = \frac{b}{\pi}\left\{\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right\} +$$

$$+\frac{a}{\pi}\left\{\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right\} = \frac{b}{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}\Big[+\frac{a}{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\Big]_{0}$$

$$= \frac{b}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]+\frac{a}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right] = \frac{b-a}{n^2}\left[1-(-1)^n\right],$$

azaz

$$a_1 = \frac{b-a}{\pi\cdot 1^2}\cdot 2,\quad a_2 = 0,\quad a_3 = \frac{b-a}{\pi\cdot 3^2}\cdot 2,\quad a_4 = 0,\ \ldots$$

$n = 0$ esetén kapjuk:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} bx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} ax\,dx = \frac{a-b}{2}\pi.$$

Továbbá

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} bx\sin nx\,dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} ax\sin nx\,dx = \frac{b}{\pi}\left\{-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\}+$$

$$+\frac{a}{\pi}\left\{-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\} = \frac{b}{\pi}\frac{-\pi}{n}(-1)^n +$$

$$+\frac{a}{\pi}\frac{-}{n}(-1)^n = \frac{a+b}{n}(-1)^{n+1},$$

azaz

$$b_1 = \frac{a+b}{1},\quad b_2 = -\frac{a+b}{2},\quad b_3 = \frac{a+b}{3},\quad b_4 = -\frac{a+b}{4}.$$

Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$f(x) = \frac{a-b}{4}\pi + \left\{\frac{b-a}{\pi}\frac{2}{1^2}\cos x + \frac{a+b}{1}\sin x\right\} -$$

$$- \frac{a+b}{2}\sin 2x + \left\{\frac{b-a}{\pi}\frac{2}{3^2}\cos 3x + \frac{a+b}{3}\sin 3x\right\} -$$

$$- \frac{a+b}{4}\sin 4x + \ldots, \text{ ill.}$$

$$f(x) = \frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(b-a)}{\pi}\left\{\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \ldots\right\} +$$

$$+ (a+b)\left\{\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots\right\}.$$

A $(-\pi, \pi)$ intervallumban ez a sor az $f(x)$ függvényt állítja elő, az $x = \pm\pi$ pontokban pedig a sor az

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-b\pi + a\pi}{2} = \pi\frac{a-b}{2}$$

értékhez konvergál.

Ha $x = \pm\pi$ érdekes numerikus sort kapjuk:

$$\pi\frac{a-b}{2} = \frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\left\{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right\}$$

ahonnan

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

Ebből a sorból néhány más érdekes képletet is kaphatunk. Legyen

$$\sigma = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \quad \left(= \frac{\pi^2}{8}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

Ekkor

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \qquad \sigma_2 = \frac{1}{4}\sigma = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

vagyis

$$3\sigma_2 = \sigma_1, \quad \text{azaz} \quad \sigma_2 = \frac{\pi^2}{24}.$$

Ezek szerint

$$\sigma = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6},$$

azaz

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

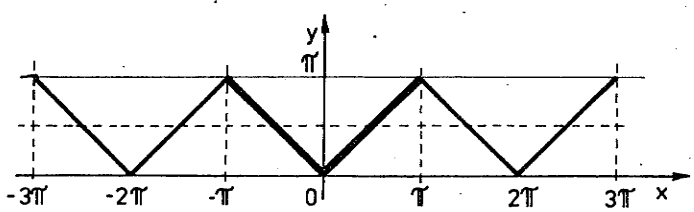
Bár a most tárgyalt $f(x)$ függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumban nem elemi függvény, a Fourier-sorba való fejtés lehetővé teszi, hogy ezt a függvényt közelítően igen egyszerű elemi függvényekkel fejezzük ki.

Vizsgáljuk meg a kapott sorfejtés speciális eseteit!

Tegyük fel, hogy $a = 1$ és $b = -1$. Ekkor a $[-\pi,\pi]$ intervallumban $f(x) = |x|$ (4.2 ábra). A következő sorfejtést kapjuk:

$$f(x) = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \dots\right)$$

Ez a sor minden x-re konvergens és a $[-\pi, \pi]$ zárt intervallumban az $|x|$ függvényt állítja elő, mivel az $f(x)$ függvény - periodikusan folytatva - olyan függvény, amely folytonos az egész X tengely mentén és a deriváltnak csak az $x = k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pontokban vannak szakadáspontjai.

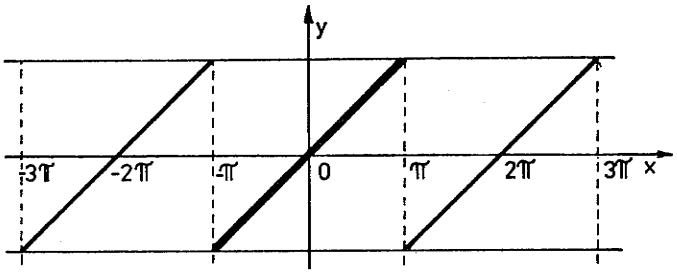


4.2 ábra

Az $f(x) = |x|$ függvény páros, tehát mint a $[0,\pi]$ intervallumban adott $y = x$ függvény "páros folytatása" által képzett függvényt tekinthetjük.

Legyen most $b = a = 1$. Ekkor $f(x) = xa$ $[-\pi,\pi]$ intervallumban (4.3 ábra) és a sor a következő alakot ölti:

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots\right).$$



4.3 ábra

Ez az egyenlőség igaz minden x-re, ha $-\pi < x < \pi$, míg $x = \pm\pi$ esetén a sor összege 0-val egyenlő, $x = \frac{\pi}{2}$ esetén a π számra kapott ismert Leibnitz-féle sort kapjuk (amely az arc tg x Taylor-sorba fejtésekor keletkezett

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

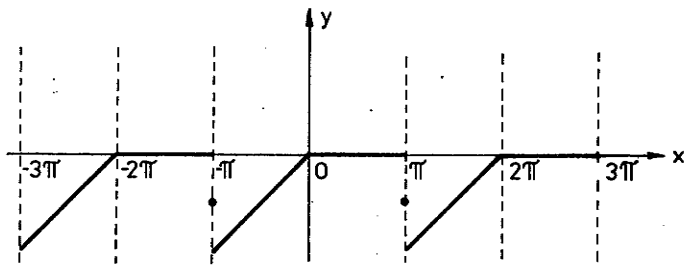
Az $f(x) = x$ függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumban páratlan, tehát mint a $[0, \pi]$ intervallumban adott $y = x$ függvény "páratlan folytatása" által keletkezett függvényt tekinthetjük.

Láthatjuk, hogy az $f(x) = x$ függvény a $[0, \pi]$ intervallumban akár mint "páros", akár mint "páratlan" trigonometrikus sor állítható elő:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \dots\right) =$$

$$= 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots\right).$$

Legyen $a = 0$, $b = 1$. Ekkor $f(x) = 0$, ha $\leqslant x \leqslant \pi$, és $f(x) = x$, ha $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ (4.4 ábra).



4.4 ábra

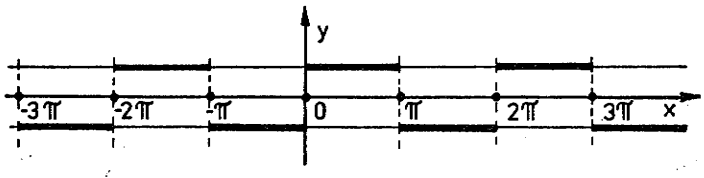
Ekkor a következő sort kapjuk:

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right) +$$

$$+ \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots\right).$$

Ez a sor a $[0,\pi]$ intervallumban mindenütt zérushoz tart, viszont a $(-\pi, 0]$ intervallumban x-szel egyenlő, ha pedig $x = \pm\pi$, a sor összege $-\frac{\pi}{2}$.

2. Fejtsük trigonometrikus sorba a $[0,\pi]$ intervallumban azonosan 1-gyel egyenlő függvényt: $f(x) = 1$. Ezt a függvényt a $[-\pi, 0]$ intervallumban tetszőleges módon, akár "párosan", akár "páratlanul" folytathatjuk (4.5 ábra).



4.5 ábra

Mint könnyen látható, "páros folytatás"-nál a Fourier-sor a konstans taghoz konvergál és az $1 = 1$ azonosságot kapjuk.
Vegyük a páratlan folytatást! Ekkor:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}\left[1 - (-1)^n\right],$$

azaz

$$b_1 = \frac{4}{\pi\cdot 1}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4}{\pi\cdot 3}, \quad \ldots$$

Tehát, ha $0 < x < \pi$ kapjuk, hogy

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right),$$

ahonnan

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots \quad (0 < x < \pi).$$

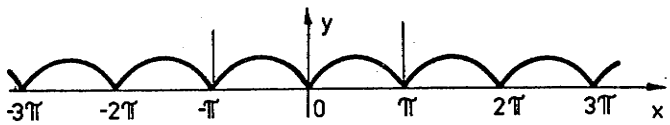
A $(-\pi, 0)$ intervallumban a sor összege mindenütt $\frac{\pi}{4}$-gyel egyenlő, míg az $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$ pontokban zérus. Hasonló módon viselkedik a sor bármely, a $[-\pi, \pi]$ alapintervallumtól eltérő $[(k-1)\pi, (k+1)\pi]$ intervallumban, ahol k páros szám.

Speciálisan, ha $x = \frac{\pi}{2}$, újból a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

sort kapjuk.

3. Határozzuk meg az $f(x) = |\sin x|$ függvény Fourier-sorát (4.6 ábra). Ezt a függvényt a $\sin x$ függvénynek a $[0,\pi]$ intervallumból a $[-\pi, 0]$ intervallumra való páros folytatásakor kapjuk.



4.6 ábra

Ezért:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]\, dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \dfrac{-4}{\pi(n^2-1)}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Következésképpen:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6x + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos 2nx + \dots\right).$$

A sorbafejtés igaz tetszőleges x-re. Speciálisan, ha $x = 0$, az

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

összefüggést kapjuk, ami egyébként könnyen igazolható elemi úton is.

5. Becslés a Fourier-sor részletösszege és a függvényérték közötti eltérésre

Definíció:
Az

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (5.1)$$

konvergens Fourier-sor n-edik részletösszegén az

$$S_n(x) = \frac{a_o}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \Phi_n(x) \qquad (5.2)$$

n-edrendű trigonometrikus polinomot értjük.

Az (5.1) sor részletössezgei tehát:

$$S_o(x) = \frac{a_o}{2}, \quad S_1(x) = \frac{a_o}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x, \dots \text{ stb.}$$

Vizsgáljuk azt a kérdést, hogy ha az $S_n(x)$ részletösszeget számítjuk ki, az mennyire tér el a végtelen sor összegétől, az $f(x)$ függvénytől!

Az (1.20) formula alapján az $S_n(x)$ részletösszeg zárt alakban:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)] \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt \qquad (5.3)$$

Lemma: Ha $n \geqslant 2$, akkor

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt < \frac{2 + \ln n}{2} \qquad (5.4)$$

Az (5.4) integrált bontsuk két részre a $[0, \frac{\pi}{2(2n+1)}]$ és a $[\frac{\pi}{2(2n+1)}, \frac{\pi}{2}]$ szakaszokon vett integrálokra:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4n+2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4n+2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt \qquad (5.5)$$

A jobb oldali első integrálra alkalmazzuk a

$$|\sin nt| \leqslant n|\sin t| \qquad (5.6)$$

egyenlőtlenséget, amelynek érvényessége teljes indukcióval könnyen belátható.

Ugyanis $n = 2$ esetén

$$|\sin 2t| = |2 \sin t \cos t| \leqslant 2|\sin t| \quad \text{mivel } |\cos t| \leqslant 1.$$

Tételezzük fel, hogy $(n - 1)$-re fenn áll:

$$|\sin(n-1)t| \leqslant (n-1)|\sin t|$$

Ekkor

$$|\sin nt| = |\sin[(n-1)t + t]| = |\sin(n-1)t \cos t +$$

$$+ \cos(n-1)t \sin t| \leqslant (n-1)|\sin t||\cos t| +$$

$$+|\cos(n-1)t||\sin t| \leqslant n|\sin t|$$

mivel $|\cos t| \leqslant 1$, $|\cos(n-1)t| \leqslant 1$.

Ezek alapján:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4n+2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt \leqslant \frac{1}{\pi}(2n+1)\frac{\pi}{2(2n+1)} = \frac{1}{2}. \qquad (5.7)$$

Az (5.5) formula jobb oldalán álló integrálra alkalmazzuk a

$$\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t \qquad (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}), \qquad \text{valamint a} \qquad (5.8)$$

$$|\sin(2n+1)t| \leqslant 1 \quad \text{becsléseket. Ez utóbbi} \qquad (5.9)$$

triviális.

Az (5.8 egyenlőtlenség abból adódik, hogy a $\frac{\sin t}{t}$ függvény a $[0, \frac{\pi}{2}]$ szakaszon csökken, ugyanis a deriváltja negatív ebben az intervallumban:

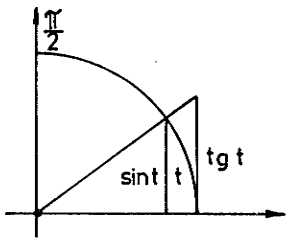
$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)' = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} < 0, \quad \text{mivel } t\cos t < \sin t,$$

mivel $t < \operatorname{tg} t$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-ben.

Ennek alapján:

$$\frac{\sin t}{t} \geqslant \left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{2}{\pi}$$

azaz $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$.



5.1 ábra

Innen adódik, hogy

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4n+2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4n+2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{2}{\pi}t}\,dt = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2(2n+1)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2n+1) \tag{5.10}$$

Azonban $2n + 1 < n\cdot e$, ha $n > 2$, tehát $\ln(2n+1) < 1 + \ln n$
Ezeket figyelembe véve:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| dt < \frac{1}{2} + \frac{1 + \ln n}{2} = \frac{2 + \ln n}{2} \tag{5.11}$$

ami a lemmát bizonyítja.

<u>Következmény:</u>
Ha a $[-\pi, \pi]$ intervallumban $|f(x)| \leqslant M$, akkor (5.3) alapján: az (5.9) egyenlőtlenségből következik, hogy:

$$S_n(x) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2M \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt < M(2 + \ln n) \qquad (5.12)$$

Ezzel a Fourier-sor részletösszegeire vonatkozólag felső korlátot nyertünk.

6. Fejér-féle összegek

Az előzőekben megadtunk bizonyos feltételeket 2π periódusú $f(x)$ függvényre vonatkozólag, amely feltételek teljesülése (Lipschitz-feltétel, a derivált korlátossága stb.) esetén $f(x)$ egyenletesen konvergens Fourier-sorba fejthető. Maga az a tény, hogy $f(x)$ folytonos függvény 2π periódussal lehetővé teszi a Fourier-együtthatók kiszámítását, de nem biztos, hogy a sor konvergens. Szerkesztettek olyan folytonos függvényt is, amelynek Fourier-sora végtelen sok x értékre divergens. Ez azt jelenti, hogy ilyen függvények esetében bizonyos x értékekre az $S_n(x)$ részletösszegek nagy n esetén végtelen nagyok lesznek. Fejér Lipótnak sikerült folytonos 2π periódusú $f(x)$ függvények esetében a Fourier-sor részletösszegei segítségével olyan trigonometrikus polinomokat konstruálni, amelyek egyenletesen konvergálnak az $f(x)$ függvényhez.

1. Tétel:
(Fejér L.): Legyen $f(x)$ 2π periódusú folytonos függvény és legyen $S_n(x)$ e függvény Fourier-sorának n-edik részletösszege.
Ekkor a

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n} \qquad (6.1)$$

összegek, (amelyeket Fejér-féle összegeknek neveznek) az egész x tengelyen egyenletesen konvergálnak az $f(x)$ függvényhez:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(x) = f(x).$$

A $\sigma_n(x)$ Fejér-féle összegek nem mások, mint a Fourier-sor első n számú részletösszegének számtani közepei.

Bizonyítás:
Mindegyik $S_k(s)$ részletösszeg előállítható a Dirichlet-integrál segítségével

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x + 2t) - f(x - 2t)] \frac{\sin(2k + 1)t}{\sin t} dt$$

alakban. Ebből (6.1) alapján:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x + 2t) - f(x - 2t)}{\sin t} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k + 1)t\right] dt \tag{6.2}$$

Azonban

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k + 1)t = \frac{\sin^2 nt}{\sin t} \tag{6.3}$$

A (6.3) összefüggést az alábbi módon láthatjuk be: Mivel $2 \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$, ezért:

$$2 \sin t \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k + 1)t = \sum_{k=0}^{n-1} [\cos 2kt - \cos(2k + 2)t] =$$

$$= 1 - \cos 2t + \cos 2t - \cos 4t + \cos 4t - \cos 6t + \ldots$$

$$+ \cos(2n - 2)t - \cos 2n t = 1 - \cos 2nt =$$

$$= \cos^2 nt + \sin^2 nt - [\cos^2 nt - \sin^2 nt] = 2 \sin^2 nt$$

A (6.2) és (6.3) összefüggések alapján:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x + 2t) + f(x - 2t)] \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \tag{6.4}$$

A (6.4) integrált Fejér-féle szinguláris integrálnak nevezik. Ily módon a $\sigma_n(x)$ Fejér-féle összegek kifejezhetők a Fejér-féle szinguláris integrállal.

Az $f(x) = 1$ függvény Fourier-sora: $1 + \sum_{k=1}^{\infty} 0$

Ennek a sornak valamennyi $S_n(x)$ részletösszege és a $\sigma_n(x)$ Fejér-féle összegek mindegyike is 1. Ha tehát a (6.4) formulában $\sigma_n(x) = 1$ és $f(x + 2t) = f(x - 2t) = 1$ helyettesítést végzünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$1 = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \tag{6.5}$$

Szorozzuk meg a (6.5) azonosság mindkét oldalát $f(x)$-szel és vonjuk ki a (6.4) egyenletből:

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x)] \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \tag{6.6}$$

Az $f(x)$ függvényről feltettük, hogy folytonos függvény. Adjunk meg egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot és válasszunk hozzá egy olyan $\delta > 0$ számot, hogy $|x'' - x'| < 2\delta$ esetén $|f(x'') - f(x')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ teljesüljön.

Ezek után bontsuk fel a (6.6) integrált a $[0, \delta]$ és $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ intervallumokon vett integrálokra.

A $[0, \delta]$ intervallumon $|t| < \delta$ lévén:

$$|f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x)| < \varepsilon$$

ezért a (6.5) összefüggést figyelembe véve:

$$\left|\frac{1}{n\pi}\int_0^{\delta} [f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x)]\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.7}$$

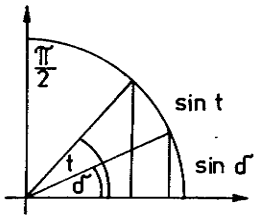
A $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ szakaszon vett integrálban figyelembe vesszük, hogy

$$|f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x)| \leqslant 4M \tag{6.8}$$

ahol $M = \max_x |f(x)|$ (zárt intervallum folytonos függvény korlátos!), továbbá, hogy $0 \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{2}$ esetén

$$\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\sin^2 \delta} \tag{6.9}$$

(Ugyanis most $\delta \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, tehát $\sin^2 t \geqslant \sin^2 \delta$ és $\sin^2 nt \leqslant 1$.)



6.1 ábra

Így adódik, hogy

$$\frac{1}{n\cdot\pi}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\right|\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n\pi}\,\frac{4M}{\sin^2\delta}\,\frac{\pi}{2} = \frac{2M}{n\sin^2\delta} \qquad (6.10)$$

Tehát (6.7), (6.8) és (6.9) figyelembevételével

$$\left|\delta_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\sin^2\delta}$$

Ha n olyan nagy, hogy $\frac{2M}{n\sin^2\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$, akkor minden X-re

$$\left|\delta_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon \qquad (6.11)$$

amivel Fejér-tételét bebizonyítottuk.

Megjegyzés: Fejér Lipót most bizonyított tételének messzemenő következményei vannak.

1. <u>Következmény:</u>

<u>Fejér-féle approximációs tétel:</u>

Minden 2π szerint periodikus folytonos $f(x)$ függvény tetszőleges pontossággal egyenletesen megközelíthető Fourier-sora részletösszegeinek $\delta_n(x)$ számtani közepeivel.

Mivel az $S_k(x)$ részletösszegek trigonometrikus polinomok, ezért $\delta_n(x)$ is trigonometrikus polinom. Ennek következtében Fejér-tétele tartalmazza Weierstrass approximációs tételét, amely azt mondja ki, hogy minden 2π szerint periodikus folytonos függvény tetszőleges pontossággal megközelíthető trigonometrikus polinomokkal.

Ilyen trigonometrikus polinomok a Fejér-féle összegek. Tehát Fejér Lipót a Weierstrass-féle tétel kontruktív bizonyítását adta.

Megjegyezzük, hogy a Fejér-féle összegek kifejezhetők közvetlenül a Fourier-sor tagjaival is.

$$\delta_n(x) = \frac{S_o(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n} =$$

$$= \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{n})[a_k \cos kx + b_k \sin kx] \qquad (6.12)$$

Ez utóbbi összefüggést a következő módon láthatjuk be: Tekintsük az

$$f(x) = u_o(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

függvénysort.
Ekkor

$$\delta_n(x) = \frac{1}{n}\{u_o(x) + [u_o(x) + u_1(x)] + [u_o(x) + u_1(x) +$$

$$+ u_2(x)] + \dots + u_o(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x)]\} =$$

$$= \frac{1}{n} n[u_o(x) + (n-1)u_1(x) + (n-2)u_2(x) + \dots +$$

$$+ u_{n-1}(x)] = \frac{1}{n}\sum_{k=o}^{n-1} (n-k)u_k(x) = \sum_{k=o}^{n-1} (1 - \frac{k}{n})u_k(x).$$

$u_o(x) = \frac{a_o}{2}$, $u_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$ helyettesítéssel kapjuk a (6.12) összefüggést, amelyből látható, hogy a Fejér-féle összegek kiszámítása semmivel sem bonyolultabb, mint maguknak az $S_k(x)$ részletösszegeknek a számítása.

2. <u>Következmény:</u>

Fejér tételéből következik, hogy az

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \qquad (6.13)$$

trigonometrikus rendszer a 2π-periódusú folytonos függvények osztályán belül ún. teljes rendszer. Ez azt jelenti, hogy ha $f(x)2\pi$ szerint periodikus folytonos függvény és ortogonális a (6.13) rendszer minden elemére, vagyis

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1.f(x)dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx \equiv 0$$

$$(k=1,2,\dots,n)$$

akkor $f(x) \equiv 0$.

Ha ugyanis $f(x)$ ortogonális a (6.13) rendszer minden elemére, akkor $f(x)$ Fourier-sorának valamennyi együtthatója zérus lévén, a sor minden $S_k(x)$ részletösszege és így $\sigma_n(x) = 0$. Viszont Fejér tétele alapján $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)=0$. Ez tehát azt jelenti, hogy a (6.13) rendszer elemein kívül nincs más függvény, amely a rendszer minden elemére ortogonális lenne, így a (6.13) rendszer nem bővíthető. Ez a tulajdonság a (6.13) rendszernek ugyan fontos tulajdonsága, amire később hivatkozni fogunk.

3. Következmény:

Ha $f(x) \leqslant M$, akkor (6.4) és (6.5) összefüggések alapján

$$\left|\sigma_n(x)\right| = \frac{1}{n\pi}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x + 2t) + f(x - 2t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\right| \quad (6.14)$$

$$\leqslant \frac{2M}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = \frac{2M}{n\pi}\frac{n\pi}{2} = M$$

tehát

$$\left|\sigma_n(x)\right| \leqslant M$$

ami azt jelenti, hogy bármely függvény Fejér-féle összegeinek abszolút értéke nem haladhatja meg e függvény abszolút értékének maximumát.

1. Megjegyzés:

Fejér-tételét 2π periódusú folytonos $f(x)$ függvényre bizonyítottuk be. A bizonyításból azonban az is következik, hogy ha egy x pontban az $f(x)$ függvénynek véges szakadása van, de az $f(x + o)$ és $f(x - o)$ jobb ill. bal oldali határértékei léteznek, akkor a $\sigma_n(x)$ összege az $\frac{f(x + o) + f(x - o)}{2}$ számtani középhez konvergál.

Ennek belátását a következő módon végezhetjük.

Feltehetjük, hogy a szakadási pontban $f(x)$ függvény a jobb és bal oldali határértékeinek számtani közepével egyenlő. (Ha ugyanis egyetlen pontban változtatjuk meg a függvényértéket, az a Fourier-sor összegét nyilván nem befolyásolja).

Legyen tehát az x pontban

$$f(x) = \frac{f(x + o) + f(x - o)}{2} \quad (6.15)$$

Ekkor a (6.7) formulában szereplő

$$f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x) = \quad (6.16)$$

$$= 2\left[\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2} - f(x)\right] \to 0 \quad \text{ha} \quad t \to 0.$$

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz található olyan δ, hogy $|t| < \delta$ esetén

$$\left|\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{2} - f(x)\right| < \varepsilon \text{ , vagyis a (6.7) for-}$$

mula alapján:

$$\left|\frac{2}{n\pi}\int_0^{\delta}\left[\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{2} - f(x)\right]\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

A (6.10) formula alapján pedig:

$$\frac{2}{n\pi}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{2} - f(x)\right|\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt \leqslant \frac{2M}{n\sin^2\delta}$$

Tehát (6.6) alapján

$$\left|\delta_n(x) - f(x)\right| = \left|\delta_n(x) - \frac{f(x+o)-f(x-o)}{2}\right| < \varepsilon \quad \text{ha}$$

n elég nagy ahhoz, hogy $\frac{2M}{n\sin^2\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$ legyen.

Tehát ez esetben

$$\delta_n(x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Ez a reláció $f(x)$ minden szakadási helyén érvényes, ha véges számú szakadási helye van és ezek korlátos nagyságúak.
Fejér tételét úgy is fogalmazhatjuk tehát, hogy ha $f(x)$ 2π-periódusú szakaszonként folytonos függvény (amelynek véges számú korlátos szakadása van), akkor a $\delta_n(x)$ összegek a függvény jobb és bal oldali határértékének számtani közepéhez konvergálnak. (Speciálisan magához a függvényértékhez, ha x folytonossági pont, hiszen ekkor $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$).

2. Megjegyzés:
Fejér tételéből az előző megjegyzés alapján az is következik, hogy ha a 2π-periódusú szakaszonként folytonos $f(x)$ függvény Fourier-sora egy x_o pontban konvergál, akkor ott a sor összege $\frac{f(x_o)+0)+f(x_o-0)}{2}$ -vel egyenlő (speciálisan $f(x_o)$-lal, ha x_o-ban $f(x)$ folytonos).

Ennek belátásához szükségünk van a következő egyszerű segédtételre:

<u>Lemma:</u>
Ha az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots$ sorozatnak van határértéke, akkor az $y_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} x_n .$$

<u>Bizonyítás:</u>
Ha

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \ell$$

akkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan n_o küszöbszám, hogy $n > n_o$ esetén

$$|x_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Az ilyen n indexű tagokra:

$$|y_n - \ell| \leq \frac{|x_1 - \ell| + \ldots + |x_{n_o} - \ell|}{n} + \frac{|x_{n_o+1} - \ell| + \ldots + |x_n - \ell|}{n} <$$

$$< \frac{A(\varepsilon)}{n} + \frac{(n - n_o)\frac{\varepsilon}{2}}{n} < \frac{A(\varepsilon)}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

ahol $A(\varepsilon) = |x_1 - \ell| + \ldots + |x_{n_o} - \ell|$

Ha n elég nagy, akkor $\dfrac{A(\varepsilon)}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, így

$$|y_n - \ell| \; \varepsilon$$

Legyen most $x_n = S_n(x)$ az $f(x)$ függvény Fourier-sorának n-edik részletösszege, $y_n = \sigma_n(x)$ a megfelelő Fejér-féle összeg.

A lemma alapján:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

amiben az 1. Megjegyzés alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x_o) = \frac{f(x_o+0)+f(x_o-0)}{2} = \lim_{n\to\infty} S_n(x_o)$$

7. Négyzetesen integrálható függvények

Definíció: Az $[a,b]$ intervallumon értelmezett valós értékű $f(x)$ függvényt négyzetesen integrálhatónak nevezzük, ha ott $f(x)$ és $f^2(x)$ integrálható, azaz

$$\int_a^b f(x)dx < \infty , \qquad \int_a^b f^2(x)dx < \infty .$$

A négyzetesen integrálható függvények halmazát $L^2(a,b)$-térnek nevezzük. (Hilbert-tér.)

A továbbiakban a négyzetesen integrálható $f(x)$ függvényre az $f(x)\in L^2$ jelölést alkalmazzuk és mindig valamely véges (a,b) intervallumra vonatkoztatjuk az integrálhatóságot.

7.1 Tétel:

Ha $f(x)\in L^2$ és $g(x)\in L^2$, akkor $f(x)$ és $g(x)$ szorzata integrálható.

Bizonyítás:

Ha λ tetszés szerinti pozitív szám, akkor

$$\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 dx = \lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx +$$

$$+ \int_a^b g^2(x)dx \geqslant 0. \qquad (7.1)$$

A (7.1) összefüggés λ-ban másodfokú polinom, amely legfeljebb érinti a λ tengelyt, tehát diszkriminánsa nem pozitív:

$$4\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \leqslant 0$$

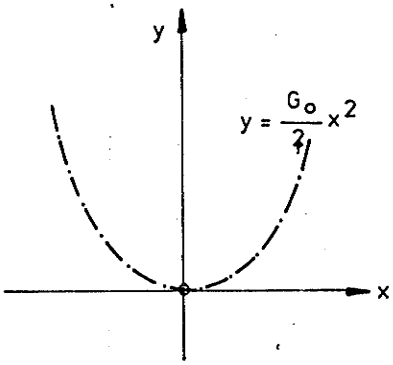
Innen

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx . \int_a^b g^2(x)dx \qquad (7.2)$$

azaz

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx} < \infty \qquad (7.3)$$

A (7.3) összefüggést Bunjakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenségnek nevezik.



7.1 ábra

Megjegyezzük, hogy a (7.3) összefüggésben az egyenlőség jele csak akkor érvényes, ha $f(x) = cg(x)$, ahol c állandó. A vektorterek analógiájára állapodjunk meg az alábbi jelölésekben:

Ha $f(x) \in L^2$ és $g(x) \in L^2$, akkor a két függvény skalárszorzatán az

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad \text{szorzatintegrált értjük.}$$

Az $f(x) \in L^2$ függvény normája (hossza):

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

(Ez a kifejezés teljesen analóg a vektor hosszával, ugyanis ha

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}, \quad \text{akkor}$$

$$\|\underline{r}\| = |\underline{r}| = \sqrt{(\underline{r},\underline{r})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad)$$

Nyilvánvaló, hogy $f \in L^2$ és $g \in L^2$ esetén:

$$(c \cdot f,g) = c(f,g); \quad (f_1 + f_2,g) = (f_1,g) + (f_2,g);$$

$$(f,g) = (g,f)$$

A bevezetett jelöléssel a Bunjakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség így írható:

$$|(f,g)| \leqslant \|f\| \, \|g\|$$

Két négyzetesen integrálható függvény összege ugyancsak négyzetesen integrálható, mivel

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx + 2 \int_a^b f(x)g(x) +$$

$$+ \int_a^b g^2(x)dx$$

és mint a (7.3) összefüggés mutatja $f(x)$, $g(x)$ integrálható. Érvényes az ún. Minkowski-féle egyenlőtlenség:

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\| \qquad (7.4)$$

A (7.4) összefüggést a Bunjakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenségből kapjuk:

$$|(f,f + g)| \leqslant \|f\| \, \|f + g\| \; ; \; |(g,f + g)| \leqslant \|g\| \, \|f + g\|$$

Innen:

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f,f + g) + (g,f + g) \leqslant$$

$$\leqslant (\|f\| + \|g\|)\|f + g\|$$

Az $\|f + g\|$-val osztva:

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

Ugyancsak a vektorterek analógiájára, az $f(x) \in L^2$ és $g(x) \in L^2$ függvények távolságán az

$$(f - g, f - g) = \|f - g\|^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \qquad (7.5)$$

kifejezést értjük.

<u>Definíció:</u>

Az L^2-beli f és g függvényeket egymásra ortogonálisnak (merőlegeseknek) nevezzük, ha

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Definíció:

Az L^2 -tér véges vagy végtelen sok $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ eleme ortogonális rendszert képez, ha

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)dx = 0 \qquad (i \neq j)$$

Példa: A $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = \cos x$, $\varphi_3 = \sin x$, ... $\varphi_{2x} = \cos kx$, $\varphi_{2k+1} = \sin kx$, ... trigonometrikus rendszer ortogonális $L^2[-\pi,\pi]$-ben.

Definíció:

Az L^2-térbeli $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ortogonális rendszer normált rendszer, ha

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad i \neq j \quad \text{és} \quad \|\varphi_i\| = 1. \quad i = 1,2,\ldots$$

Az ortogonális normált rendszert röviden ortonormált rendszernek mondjuk.

Példa: A trigonometrikus rendszer elemeinek normája:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\, dx = \pi,$$

tehát:

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}, \quad \|\cos kx\| = \sqrt{\pi}, \quad \|\sin kx\| = \sqrt{\pi}, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Az $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}$, ..., $\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}$, ...

rendszer ortonormált rendszer $L^2[-\pi, \pi]$-ben, mivel

$$\left\|\frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}\right\|^2 = \left(\frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}, \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}\right) = \frac{1}{\|\varphi_i\|^2}(\varphi_i, \varphi_i) = \frac{\|\varphi_i\|^2}{\|\varphi_i\|^2} = 1 \qquad (7.6)$$

A (7.6) összefüggés alapján minden $\{\varphi_n\}$ ortogonális rendszer normált ortogonális rendszerré tehető, ha a rendszer minden elemét elosztjuk a normájával, azaz a $\left\{\frac{\varphi_n}{\varphi_n}\right\}$ rendszert képezzük.

8. A Fourier-polinomok minimum tulajdonsága

Legyen $\{\varphi_n\}_2$ normált ortogonális rendszer L^2-ben és legyen f az L^2 tér tetszőleges eleme. (Tetszőleges négyzetesen integrálható függvény.)

Oldjuk meg a következő minimum feladatot: Keressük a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ függvényeknek azt a

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \tag{8.1}$$

lineáris kombinációját, amely négyzetes átlagban legjobban közelíti az f függvényt, azaz amelyre

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \right\|^2 = \int_a^b f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)^2 \, dx = \text{minimum.} \tag{8.2}$$

Mivel a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ függvények ortogonálisak és normáltak, a (8.1) formula bal oldala a következő módon írható:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k, \; f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right) =$$

$$= (f,f) - \sum_{k=1}^{n} c_k(f,\varphi_k) - \sum_{k=1}^{n} c_k(f,\varphi_k) + \tag{8.3}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} c_k c_h(\varphi_k, \varphi_h) = \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k(f,\varphi_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (f,\varphi_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} [(f,\varphi_k) - c_k)]^2$$

A (8.3) összefüggés jobb oldalát szemügyre véve, látható, hogy ennek értéke akkor minimális, ha

$$\sum_{k=1}^{n} [(f,\varphi_k) - c_k]^2 = 0$$

vagyis, ha

$$(f,\varphi_k) = c_k \tag{8.4}$$

Tehát ortonormált függvények (8.1) alakú lineáris kombinációja négyzetes átlagban akkor közelíti legjobban az $f(x)$ négyzetesen integrálható függvényt, ha a c_k együttható az f függvény és a φ_k függvények skalárszorzatai ($k = 1,2,\ldots$ $\ldots,n$), vagyis c_k az f függvény "vetülete" φ_k-ra.

A $c_k = (f,\varphi_k)$ együtthatókat az f függvény Fourier-együtthatóinak (általánosított értelemben) nevezzük. Rámutatunk arra, hogy az $L^2(-\pi,\pi)$ függvénytérbe tartozó $f(x)$ függvény

$$\Phi_n(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (8.5)$$

Fourier-polinomjának együtthatói:

$$a_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)dt\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$a_k \cos kx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos kt\, dt\cdot\cos kx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} dt\cdot\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$$

$$b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt\cdot\sin kx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} dt\cdot\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}$$

alakban írhatók, így ha $\Phi_n(x)$ polinomot az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots, \quad \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \qquad (8.6)$$

ortonormált rendszerben tekintjük, akkor az együtthatók az $f(t)$ függvénynek az ortonormált rendszer tagjaival vett skalárszorzatai.

Ebben az ortonormált rendszerben az $A_o, A_1, B_1, \ldots, A_k, B_k$ együtthatók a (8.5) együtthatókhoz képest, (amikor az ortogonális, de nem normált trigonometrikus rendszert használtuk fel):

$$A_o = \sqrt{2\pi}\, a_o, \quad A_k = \sqrt{\pi}\, a_k, \quad B_k = \sqrt{\pi}\, b_k \quad (k = 1,2,\ldots,n) \qquad (8.7)$$

Ha most a (8.3) formulában az őt minimalizáló $(f,\varphi_k) = c_k$ helyettesítést végezzük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\left\| f - \sum (f,\varphi_k)\varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (f,\varphi_k)^2 \geqslant 0 \qquad (8.8)$$

Innen

$$\sum_{k=1}^{n} (f,\varphi_k)^2 \leqslant \|f\|^2 \qquad (8.9)$$

azaz

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2 \qquad \text{minden n-re.}$$

Ezt az egyenlőtlenséget Bessel-féle egyenlőtlenségnek nevezzük.

Alkalmazva a (8.9) egyenlőtlenséget a (8.7) együtthatókra:

$$\frac{A_o^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} (A_k^2 + B_k^2) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \qquad (8.10)$$

Visszatérve az a_o, a_k, b_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ Fourier-együtthatókra a (8.10) összefüggés az

$$\pi \frac{a_o^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \qquad (8.11)$$

azaz

$$\frac{a_o^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \qquad (8.12)$$

(n minden értékére)

Ebből következik, hogy (8.12) $n \to \infty$ esetén is igaz, azaz

$$\frac{a_o^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \qquad (8.13)$$

Mivel $f(x)$ négyzetesen integrálható, következik, hogy a (8.13) összefüggés bal oldalán álló sor konvergens, azaz

$a_k^2 + b_k^2 \to 0$, ha $k \to \infty$, ami csak úgy lehetséges, hogy $k \to \infty$ esetén $a_k \to 0$ és $b_k \to 0$.

Ezzel a következő eredményt nyertük:

Lemma:
Ha az $f(x)$ függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható, akkor az

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cdot \cos kx \, dx = 0$$
$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kx \, dx = 0 \qquad (8.14)$$

Tehát négyzetesen integrálható függvény Fourier-együtthatói zérushoz tartanak, ha $k \to \infty$.

A (8.13) formulából további érdekes következtetések vonhatók le. Tekintsük a következő elemi egyenlőtlenségeket:

$$(A - B)^2 \geqslant 0$$

azaz

$$AB \leqslant \frac{A^2 + B^2}{2}$$

Ha most $A = |a_n|$, $B = \frac{1}{n}$, akkor

$$\frac{|a_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) \qquad (8.15)$$

Ebből következik, hogy a $\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{k}$ sor konvergens, mivel $\sum_1^{\infty} a_n^2 < \infty$ a (8.13) ö-szefüggés alapján $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ a Cauchy-féle integrálkritérium szerint,

Hasonlóan győződhetünk meg róla, hogy $\sum_1^{\infty} \frac{|b_n|}{n} < \infty$.

Ezek alapján bebizonyítjuk a következő tételt:

8.1 Tétel:
Ha $f(x)$ olyan függvény, amelynek deriváltja a $[-\pi, \pi]$ intervallumban szakaszonként sima és $f(\pi) = f(-\pi)$, akkor $f(x)$ Fourier-sora a $[-\pi, \pi]$ intervallumban egyenletesen konvergál az $f(x)$ függvényhez.

Bizonyítás:

Írjuk fel a Fourier-együtthatókra vonatkozó kifejezéseket:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx; \qquad k = 1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

Alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát.

$$a_k = \frac{1}{\pi} f(x) \left.\frac{\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\, dx = -\frac{b'_k}{k}$$

$$b_k = -\frac{1}{\pi} f(x) \left.\frac{\cos kx}{x}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\, dx = \frac{a'_k}{k}$$

mivel $f(-\pi) = f(\pi)$,

ahol a'_k és b'_k az $f'(x)$ Fourier-együtthatóit jelöli.

Minthogy $f'(x)$ szakaszonként sima, Fourier-sora konvergens a 2.3 tétel alapján, így a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a'_k|}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b'_k|}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

sorok konvergensek a (8.15) összefüggés alapján.

Mivel $|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leqslant |a_k| + |b_k|$ következik, hogy az

$$\frac{1}{2} a_o + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourier-sor a Weierstrass-kritérium szerint egyenletesen és abszolút konvergens. Ezzel a 8.1 tételt bizonyítottuk. A (8.1) tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha $f(x)$ eleget tesz a tétel feltételeinek, akkor az

$$R_n(x) = f(x) - \Phi_n(x) = f(x) - \left[\frac{a_o}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right] \qquad (8.16)$$

maradéktag egyenletesen zérushoz tart, ha $n \to \infty$.

Definíció:

Ah L^2 függvénytérbe tartozó $f_1(x), f_2(x),\dots,f_n(x),\dots$ valós függvénysorozatról akkor mondjuk, hogy átlagosan vagy másképpen: négyzetintegrálra tart az L^2-beli $f(x)$ függvényhez: ha $\|f_n - f\| \to 0$, azaz, ha

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{8.17}$$

Legyen most $f(x)$ olyan függvény, amely a $[-\pi, \pi]$ intervallumban folytonos és amelynek deriváltja, $f'(x)$ ebben az intervallumban szakaszonként sima, továbbá legyen $f(-\pi) = f(\pi)$.

Vizsgáljuk meg az ilyen $f(x)$ függvény $\Phi_n(x)$ Fourier-polinesujának négyzetes átlageltérését az

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_n^2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - \Phi_n(x)]^2\, dx = \tag{8.18}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x) - \left[\frac{a_o}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]\right\}^2 dx$$

kifejezést.

A (8.8) összefüggés alapján - mivel a Fourier-polinom négyzetátlagra legjobban közelítő polinom:

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_o^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right] = \tag{8.19}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{1}{2}a_o^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]\right\} \geqslant 0$$

Látható, hogy n növekedésével Δ_n^2 értékéhez újabb negatív tagok adódnak, így Δ_n^2 monoton csökkenő abszolút korlátos sorozat, tehát van határértéke. Mint láttuk a (8.1) tétel alapján R_n egyenletesen zérushoz tart, ha $n \to \infty$ (lásd: (8.16) formula). Ez azt jelenti, hogy tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan N küszöbszám, hogy minden $x \in [-\pi, \pi]$ pontban

$$|R_n| < \varepsilon \quad \text{hacsak} \quad n > N.$$

Következőleg $n > N$ esetén

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_n^2(x)dx < \frac{1}{2\pi}\cdot\varepsilon\cdot 2\pi = \varepsilon$$

ami azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n^2 = 0$.

Ennek alapján a (8.18) összefüggést figyelembe véve:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \qquad (8.20)$$

Tehát a 8.1 tétel feltételeit kielégítő f(x) függvény Fourier-sora átlagosan (négyzetintegrálra) konvergál az f(x függvényhez.

Ez egyben azt jelenti a (8.19) összefüggés alapján, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx, \qquad (8.21)$$

azaz

$$\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \qquad (8.22)$$

Ha az f(x) függvényt a normált trigonometrikus rendszer, az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots, \quad \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots$$

függvényei szerint fejtjük Fourier-sorba, akkor a_k együtthatók, mint a (8.7) összefüggés mutatja:

$$a_o^2 = \frac{1}{\pi}\frac{A_o^2}{2}, \quad a_k^2 = \frac{A_k^2}{\pi}, \quad b_k^2 = \frac{B_k^2}{\pi} \qquad (k = 1,2,\ldots)$$

Ennek alapján a (8.22) formulából

$$\sum_{o}^{\infty} c_k^2 = \left(\frac{A_o^2}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \|f\|^2 \qquad (8.23)$$

A (8.23) összefüggést Parseval-formulának nevezzük, amely nem más, mint a (8.9) formulával kifejezett Bessel-féle egyenlőség.

Ezt az eredményt úgy is kifejezhetjük, hogy a 8.1 tétel feltételeit kielégítő f(x) függvény Fourier-együtthatóinak négyzetösszege, normált trigonometrikus rendszer szerinti

sorfejtés esetén az $f(x)$ függvény normájának négyzetével egyenlő.

Rámutatunk arra, hogy Fejér-tételének következményeként láttuk, hogy a trigonometrikus rendszer teljes ortogonális rendszer, azaz nem bővíthető. Ugyanez természetesen igaz a normált trigonometrikus rendszerre. Megemlítjük, hogy a Parseval-formula minden teljes ortonormált rendszer szerinti sorfejtés esetében igaz.

Itt lényegében teljes analógia van a vektorterekkel. Legyen ugyanis $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ háromdimenziós vektor. Ekkor $x = (\underline{r},\underline{i})$, $y = (\underline{r},\underline{j})$, $z = (\underline{r},\underline{k})$, azaz a háromdimenziós térben

$$\underline{r} = (\underline{r},\underline{i})\underline{i} + (\underline{r},\underline{j})\underline{j} + (\underline{r},\underline{k})\underline{k} \tag{8.24}$$

Bevezetve az $\underline{r} = f$, $\underline{i} = \varphi_1$, $\underline{j} = \varphi_2$, $\underline{k} = \varphi_3$ jelölést:

$$f = (f,\varphi_1)\varphi_1 + (f,\varphi_2)\varphi_2 + (f,\varphi_3)\varphi_3 = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3$$

Továbbá:

$$|\underline{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

azaz

$$\|f\|^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

ami a Parseval-formula analógonja. Ha az $\underline{r}$ vektor valamelyik komponensét elhagyjuk, akkor a Bessel-egyenlőtlenség analógonját kapjuk.

Megjegyezzük, hogy az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ egységvektorok a háromdimenziós térben "teljes" ortonormált rendszert alkotnak, vagyis a rendszer nem bővíthető, azaz nincs még egy olyan $\underline{\ell}$ egységvektor, amelyik c vektorok mindegyikére ortogonális lenne.

Ha ugyanis lenne ilyen, akkor $(\underline{\ell}, \underline{i}) = (\underline{\ell}, \underline{j}) = (\underline{\ell},\underline{k}) = 0$-ból (8.24) alapján:

$$\underline{\ell} = (\underline{\ell},\underline{i})\underline{i} + (\underline{\ell},\underline{j})\underline{j} + (\underline{\ell},\underline{k})\underline{k} = 0\cdot\underline{i} + 0\cdot\underline{j} + 0\cdot\underline{k} = \underline{0}$$

következik, viszont a $\underline{0}$ nem egységvektor, hiszen $\|\underline{0}\| = 0$.

A Parseval formulából következik az alábbi érdekes megállapítás:

Két különböző négyzetesen integrálható függvénynek nem lehet ugyanaz a Fourier-sora, azaz a négyzetesen integrálható függvényt egyértelműen meghatározzák a Fourier-együtthatói.

Tegyük fel ugyanis, hogy az $f_1(x)$ és $f_2(x)$ négyzetesen integrálható függvényeknek azonosak a Fourier-együtthatói.

Ekkor az $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ függvénynek a Fourier-együtthatói mind zérusok és a Parseval képlet alapján:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 0$$

amiből

$f(x) \equiv 0$, vagyis $f_1(x) \equiv f_2(x)$ következik.

III. Rész

DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Bevezetés

Függvényegyenleten olyan összefüggést értünk, amelyben a független változón kívül annak egy vagy több függvénye is szerepel. Ilyen függvényegyenletek pl.:

$$e^y = x \tag{1}$$

amely egyenletet az $y = \ln x$ függvény kielégít, vagy

$$f(x + y) = f(x)f(y) \tag{2}$$

amely egyenletnek az $f(z) = e^{\lambda z}$ (λ = const) függvény eleget tesz.

Differenciálegyenleten olyan egyenletet értünk, amelyben a független változón vagy változókon kívül egy vagy több függvény és azok deriváltjai is szerepelnek.

Példák differenciálegyenletekre:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x} \tag{3}$$

Differenciálással könnyű meggyőződni róla, hogy a (3) egyenletnek az $y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$ függvény eleget tesz, azaz ezt a függvényt a (3) egyenletbe helyettesítve azonosságot nyerünk.

Az

$$y'^2 + y^2 = 1 \quad \text{egyenletet} \tag{4}$$

az $y = \sin x$ függvény kielégíti.

Műszaki problémák megoldása során igen sokszor szükségünk van differenciálegyenlet felállítására és a kapott egyenlet megoldására. A fizikai jelenségek leírása során arra törekszünk, hogy a jelenségben szereplő változók között függvénykapcsolatot adjunk meg. A függvénykapcsolat közvetlen felírására azonban ritkán van lehetőségünk. Ha azonban a kapcsolat származtatásakor az ismeretlen függvény deriváltját (vagy deriváltjait) is számításba vesszük, akkor igen gyakran fel tudunk írni olyan differenciálegyenletet, amelynek megoldása a keresett függvénykapcsolatot szolgáltatja. Mutatunk erre néhány példát.

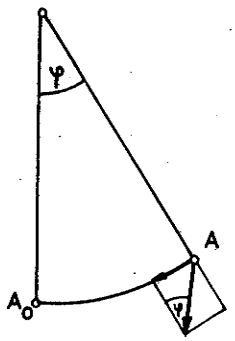
1. Példa

Vizsgáljuk először a matematikai ingát. Képzeljük el, hogy egy függőleges síkban az O felfüggesztési pontból induló ℓ hosszúságú (súlytalan és nem nyúló) fonalon függő m tömegű inga leng. Ha az inga mozgását befolyásoló erők közül csak a nehézségi erőre vagyunk tekintettel, akkor $\phi = \phi(t)$-vel jelölve a nyugalmi helyzettől való eltérés szögét, akkor az 1. ábrán látható erőparalelogramma alapján a BA érintő irányban az m tömegre $-mg \sin \phi$ erő hat. Másrészt a körív mentén a pálya menti gyorsulás $\ell\phi''(t)$. A Newton-féle mozgástörvény szerint az erő egyenlő a tömeg és gyorsulás szorzatával:

$$m\ell\phi''(t) = -mg \sin \phi(t)$$

azaz

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \phi(t) \qquad (5)$$



1.1 ábra

Az (5) differenciálegyenlet megoldásaként nyert $\phi = \phi(t)$ függvény tetszőleges t időpontban megadja a nyugalmi helyzettől való eltérés szögét, amelyet keresünk.

2. Példa

Valamely szabadon eső test esése közben a levegő ellenállásába ütközik, azaz fellép egy erő, amely a test mozgásával ellentétes irányú és így azt akadályozza. Az ellenállás arányos lehet a sebességgel vagy a sebesség négyzetével. A mozgástörvény alapján az első esetben az

$$m\, s'' = mg - ks' \qquad (6)$$

a második esetben az

$$m\, s'' = mg - ks'^2 \qquad (7)$$

differenciálegyenleteket kapjuk, ahol m a tömeg, g a nehézségi gyorsulás, k a közegellenállást jellemző arányossági tényező, $s = s(t)$ pedig az út-idő függvény, amelyet keresünk.

3. Példa

Vizsgáljuk a következő hígítási folyamatot!

Egy edényben 100 liter vízben 10 kg só van oldva. Engedjünk az edénybe tiszta vizet 3 ℓ/perc sebességgel és engedjünk ki egyidejűleg percenként 2 ℓ oldatot. Hogyan függ az edényben levő só mennyisége a folyamat kezdete óta eltelt időtől?

Jelöljük y-nal a só mennyiségét x perc múlva, ekkor mivel x perc alatt az oldathoz $3x$ liter vizet adtunk és $2x$ liter oldatot engedtünk ki, a só koncentrációja: $\frac{y}{100+x}$ lesz. (1 liter folyadék sótartalma.) Ha a folyamat teljesen egyenletes lenne, akkor 1 perc alatt a sóveszteség $\frac{2y}{100+x}$ lenne, mivel 1 perc alatt 2 liter folyadék távozik az edényből. A folyamatot kicsiny $(x, x+\Delta x)$ intervallumban tekintjük egyenletesnek, így a Δy sóveszteség kicsiny Δx idő alatt

$$\frac{2y\,\Delta x}{100+x} = -\Delta y$$

Ebből:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2y}{100+x},$$ amelyből határátmenettel az

$$y' = -\frac{2y}{100+x}$$ differenciálegyenlet adódik. (8)

A keresett $y = y(x)$ függvényt a (8) egyenlet megoldása szolgáltatja. Ha figyelembe vesszük, hogy az $x_0 = 0$ időpontban az edényben levő só mennyisége $y_0 = 10$ kg, kiszámíthatjuk, hogy x perc múlva hány kg só marad az oldatban. Az $x = x_0$ értékhez tartozó $y_0 = y(x_0)$ ún. kezdeti érték megadása nélkül ez utóbbi kérdésre nyilván nem tudnánk válaszolni.

4. Példa

Tekintsük a következő hővezetési problémát! Egy ℓ hosszúságú fémhuzal két vége legyen egy-egy állandóan 0° hőmérsékletű tartályhoz forrasztva, maga a huzal legyen hőszigetelő réteggel körülvéve. Kérdés az, hogy ha ismerjük a huzal minden pontjában a hőmérsékletet a $t = 0$ időpontban, hogyan számíthatjuk ki a hőmérséklet-eloszlást tetszőleges $t > 0$ időpontra vonatkozólag. A huzalt olyan vékonynak tételezzük fel, hogy bármely pontban a huzal merőleges keresztmetszetében a hőmérséklet ugyanaz. A huzal végpontjainak koordinátái legyenek $x = 0$, ill. $x = \ell$. Keressük tehát az x pontbe-

li hőmérsékletet a t időpontban. Jelöljük ezt a függvényt $u(x,t)$-vel. Erre az u függvényre teljesül, hogy

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad \text{ezek az ún. peremfeltételek.} \tag{9}$$

Továbbá ismertnek vesszük a $t = 0$ időpontbeli hőeloszlást, legyen ez a hőmérséklet-eloszlás

$$u(x,0) = f(x). \tag{10}$$

Ezt a feltételt kezdeti feltételnek nevezzük. Az $u = u(x,t)$ függvényt közvetlenül nem tudjuk felírni. A hőmennyiség változását illetőleg azonban fizikai meggondolások alapján összefüggést tudunk származtatni.

A huzal σ keresztmetszetén Δt idő alatt a pozitív x tengely irányában átfolyt ΔQ hőmennyiség arányos σ-val, Δt-vel és a $-\frac{\partial u}{\partial x}$ hőmérsékleteséssel:

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial x}\sigma\Delta t. \quad (k \text{ az ún. belső hővezetési együttható}).$$

A huzal egy $(x, x + \Delta x)$ szakaszának hőmennyisége Δt idő alatt annyival nő, amekkora az x ponton befolyt és az $x + \Delta x$ ponton kifolyt hőmennyiség különbsége a Lagrange-féle középértéktétel alapján:

$$-k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \sigma\Delta t + k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x+\Delta x)} \sigma\Delta t = k\sigma\Delta t\Delta x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x+\vartheta\Delta x)}$$

Ez a hőmennyiség-növekedés egyenlő $c\Delta m\Delta u$-val, ahol c a huzal fajhője, Δm a huzaldarab tömege az $(x,x + \Delta x)$ szakaszon, Δu pedig az átlagos hőmérséklet-növekedés. Ha ρ a huzal sűrűsége, akkor $\Delta m = \rho\sigma\Delta x$.
Tehát:

$$k\sigma\Delta t\Delta x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x+\vartheta\Delta x)} = c\rho\sigma\Delta x\Delta u,$$

innen:

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x+\vartheta\Delta x)} = c\rho\frac{\Delta u}{\Delta t} \tag{11}$$

Ha most $\Delta x \to 0$, és $\Delta t \to 0$, akkor a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial u}{\partial t} \tag{12}$$

egyenletet kapjuk, ahol $a^2 = \frac{c\rho}{k}$.

Megjegyezzük, hogy a (12) alakú ún. parciális differenciálegyenlet különböző diffúziós folyamatokra is alkalmazható, tehát nemcsak a hő terjedése írható le segítségével. Megemlítjük, hogy végtelenül hosszú vezető esetén, - amikor csak az $u(x,0) = f(x)$ kezdeti feltételt írhatjuk elő - akkor az

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad \text{függvény}$$

kielégíti a (12) egyenletet, amint arról differenciálással meggyőződhetünk.

Valamely differenciálegyenletet megoldani annyit jelent, mint megkeresni az összes olyan függvényt, amely kielégíti a differenciálegyenletet, azaz az egyenletbe helyettesítve azt azonossággá teszi. Mivel a differenciálegyenlet megoldásait integrálás útján nyerjük, a megoldás megkeresését a differenciálegyenlet integrálásának szokás nevezni.

A differenciálegyenleteket különböző szempontok szerint szokás osztályozni.

Ha a differenciálegyenletet kielégítő függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük (3-8 egyenletek). Ha a differenciálegyenletben az ismeretlen függvény többváltozós és ennek megfelelően az egyenletben parciális-deriváltak szerepelnek, akkor parciális differenciálegyenletről beszélünk (lásd pl.: a 12. egyenletet!).

A differenciálegyenlet rendjét az határozza meg, hogy az ismeretlen függvény hányadik deriváltja szerepel benne. Egy differenciálegyenletet n-edrendűnek nevezzük, ha a benne szereplő legmagasabb rendű derivált az ismeretlen függvény n-edik deriváltja.

A differenciálegyenlet lineáris, ha a benne szereplő deriváltak (és esetleg maga az ismeretlen függvény) első hatványon fordul elő.

A differenciálegyenlet explicit alakban van megadva, ha a benne szereplő legmagasabb rendű derivált ki van fejezve, azaz n-edrendű egyenlet esetén az egyenlet:

$$y^{(n)} = f(x,y,y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Ha az egyenletből a legmagasabb rendű derivált nincs kifejezve, akkor implicit alakban szerepel az egyenlet:

$$F(x,y,\ldots,y^{(n)}) = 0.$$

Az n-edrendű explicit lineáris differenciálegyenlet

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = q(x)$$

Ha itt $q(x) = 0$, akkor az egyenletet homogénnek-, ellenkező esetben inhomogénnek nevezzük.

Ha a differenciálegyenlet megoldható, akkor végtelen sok megoldása van. Ezt már az igen egyszerű $y' = 0$ differenciálegyenletből is láthatjuk, hiszen megoldása $y = c$ tetszőleges állandó. Ha az $y' = 2x$ differenciálegyenletet tekintjük, ennek megoldása: $y = x^2 + c$, ahol c tetszőleges állandó. A megoldásfüggvények parabolák seregét alkotják, amelyek az $y = x^2$ parabolából függőleges eltolással keletkeznek. Ha ezek közül egyetlen parabolát ki akarunk választani, akkor előírjuk, hogy pl. az $x_0 = 0$ helyen legyen $y(x_0) = y_0 = 1$. Ekkor az $y' = 2x$ egyenletet és az $y(0) = 1$ feltételt már csak az $y = x^2 + 1$ függvény elégíti ki. Ha a szabadesésnél arra vagyunk kíváncsiak, hogyan függ a megtett s út a t időtől (eltekintve a légellenállástól), azaz keressük az $s = s(t)$ út-idő függvényt, akkor kiindulhatunk abból, hogy a szabadon eső test gyorsulása állandó, azaz

$$s''(t) = g, \quad \text{amelyből}$$

$$s'(t) = gt + c_1 \quad \text{és}$$

$$s(t) = g\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Ha most előírjuk (a valóságnak megfelelően), hogy a $t = 0$ időpontban a megtett út és a test sebessége egyaránt zérus, azaz $s(0) = 0$ és $s'(0) = 0$, akkor ebből $c_2 = 0$ és $c_1 = 0$ következik, azaz az

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

formula szolgáltatja az út-idő függvényt.

A megoldásfüggvények közül tehát bizonyos "mellékfeltételek" előírásával tudjuk a számunkra megfelelőket kiválasztani. Ha a differenciálegyenlethez mellékfeltételként előírjuk a keresett függvény illetve deriváltjainak értékét a független változó adott értéke esetén, akkor <u>kezdeti feltételt</u> szabunk meg. Ha a mellékfeltétel olyan, hogy a keresett függvény értékét (vagy esetleg deriváltjainak értékét) írjuk elő legalább két pontban, akkor <u>peremfeltételt</u> adunk meg, miként a 4. példában. A mellékfeltételek számát a differenciálegyenlet rendje dönti el.

Ha a differenciálegyenlethez kezdeti feltételt írunk elő és olyan megoldásfüggvényt keresünk, amely kielégíti mind a differenciálegyenletet, mind a kezdeti feltételt, akkor <u>kezdeti érték feladatról</u> beszélünk.

Ha a differenciálegyenlethez peremfeltételek csatlakoznak, azaz olyan megoldásfüggvényt keresünk, amely kielégíti a differenciálegyenletet és az előírt peremfeltételeket <u>peremérték-feladatot</u> kell megoldanunk.

I. FEJEZET

Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek

1. Elemi úton integrálható elsőrendű közönséges differenciálegyenletek

1.1 Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Definíció:
Az elsőrendű közönséges differenciálegyenletet szétválasztható változójú egyenletnek nevezzük, ha

$$y' = f(x).g(y) \tag{1.1.1}$$

alakú, azaz az egyenlet jobb oldala egy csak x-től függő és egy csak y-tól függő függvény szorzata, vagy ilyen alakra hozható.

A szétválasztható változójú egyenleteket "szeparábilis" egyenleteknek is nevezik. Az (1.1.1) egyenlet esetében feltesszük, hogy $f(x)$ az $a<x<b$, $g(y)$ a $(c<y<d)$ intervallumban folytonos és $g(y) \neq 0$.

Vizsgáljuk először az (1.1.1) egyenlet két speciális esetét.

a) Speciális eset:
$g(y) = 1$. Ekkor az (1.1.1) egyenlet

$$y' = f(x) \tag{1.1.2}$$

ahol az $f(x)$ függvényről feltesszük, hogy valamely $a<x<b$ intervallumban folytonos függvény. Az integrálszámításban számos (1.1.2) alakú egyenletet megoldottunk. A megoldást közvetlenül fel tudjuk írni:

$$y(x) = \int f(x)dx + c. \tag{1.1.3}$$

Az (1.1.3) megoldást más alakban is felírhatjuk. Ha $x_0 \in (a,b)$ akkor az

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi \qquad (a<x<b) \tag{1.1.4}$$

változó felső határral számított integrál kielégíti az (1.1.2) egyenletet és ugyancsak kielégíti az

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi + c \qquad (a<x<b) \tag{1.1.5}$$

függvény, amely az (1.1.2) egyenlet összes megoldását tartalmazza.

Könnyű észrevenni, hogy

$$y(x_o) = \int_{x_o}^{x_o} f(\xi)d\xi + c = c \qquad (1.1.6)$$

Az (1.1.2) egyenlet megoldása tehát $y(x_o) = y_o$ jelöléssel:

$$y = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi \text{ alakban írható.} \qquad (1.1.7)$$

Ha pl. az (1.1.2) differenciálegyenletben $f(x) = 2x$, azaz az egyenlet

$$y' = 2x, \qquad (1.1.8)$$

akkor

$$y = \int 2\xi \, d\xi + c = x^2 + c \qquad (1.1.9)$$

ahol c tetszőleges állandó.

Az $y' = f(x)$ differenciálegyenlet geometriailag szemléletessé tehető a következő módon. Ha $y = y(x)$ egy megoldása az (1.1.2) egyenletnek, akkor minden (x,y) pontban az $y(x)$ görbe érintőjének iránytangense y'-vel egyenlő, vagyis az $y' = f(x)$ differenciálegyenlet az

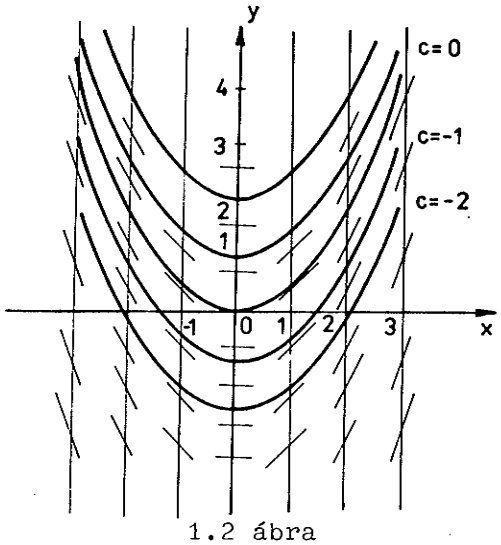
$$\{a < x < b, \qquad -\infty < y \infty\} \qquad (1.1.10)$$

sáv minden (x,y) pontjához egy irányt rendel, amely a kérdéses pontban az $y(x)$ görbe (integrálgörbe) érintőjének iránytangense: $y' = \mathrm{tg}\alpha$. Ezeket az irányokat egy-egy kis "vonalelemmel" jelölhetjük, melyek együttesen <u>iránymezőt</u> alkotnak.

Ha pl. az (a,b) intervallumnak a $(-1,1)$ intervallumot választjuk, akkor az (1.1.8) differenciálegyenlet iránymezőjét az alábbi 1.2 ábra szemlélteti.

Az (1.1.2) egyenletnél $y' = \mathrm{tg}\alpha$ csak x-től függ, azaz az egyenlet az y tengellyel párhuzamos egyenes minden pontjához ugyanazt az irányt rendeli. Ezek az egyenesek az (1.1.8) egyenlet izoklinái.

<u>A differenciálegyenletet megoldani geometriailag azt jelenti, mint olyan görbét keresni, amely az iránymezőhöz "illeszkedik"</u>, azaz a görbe bármely pontjában az érintő iránya egybeesik a vonalelemmel. Egy ilyen görbe az $x = c$ egyenest <u>csak egyszer metszheti,</u> mivel az egyenes minden pontjában a vonalelem ugyanolyan irányú.



1.2 ábra

Az iránymezőhöz illeszkedő görbét az egyenlet integrálgörbéjének nevezzük.

Az (1.1.8) differenciálegyenlet esetében nyilván végtelen sok ilyen görbe (az (1.1.9) egyenletű parabolák) található, amely az iránymezőhöz illeszkedik. Ha azonban előírjuk, hogy pl. az $x_o = 0$ helyen $y(x_o) = y_o = 1$ legyen, akkor az

$$y(x_o) = y_o + \int_{x_o}^{x} 2x\,dx = x^2 + 1$$

az egyetlen parabola, amely az (1.1.8) egyenletet és az $y(x_o) = y_o$ kezdeti feltételt is kielégíti.

1. Megjegyzés:

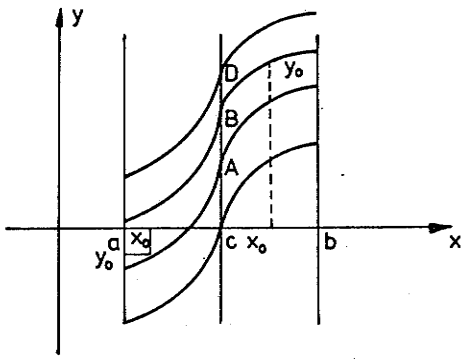
Az $y' = f(x)$ differenciálegyenlet vizsgálatakor feltettük, hogy az $f(x)$ függvény az $a < x < b$ intervallumban folytonos. Láttuk, hogy ekkor az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt sávon belül bármely (x_o, y_o) ponton az egyenletnek egyetlen integrálgörbéje halad át. Elméleti szempontból igen hasznos annak az esetnek a megvizsgálása, amikor az (a,b) intervallumon belül valamely $x = c$ pontban $(a < c < b)$ az $f(x)$ függvény végtelenné válik, ha $x \to c - o$ ill. $x \to c + o$. Ekkor az $(x_o = c,\ y_o)$ ponton már nem feltétlenül egyetlen integrálgörbe halad át. Vizsgáljuk meg közelebbről ezt az esetet!

Tegyük fel, hogy $f(x) \to \infty$ miközben $x \to c$ $(a < c < b)$, az (a,b) intervallum többi pontjaiban pedig legyen $f(x)$ folytonos. Az iránymezőt adjuk meg az $x = c$ helyen a

$\frac{dx}{dy} = 0$ egyenlettel. Mivel $y' = f(x)$, az iránymező egyre meredekebbé válik, miközben $x \to c$-hez, mert $f(x) \to \infty$. Az $a < x < c$ sávban ugyanaz a helyzet, mint a korábban vizsgált folytonos esetben és ugyanez a helyzet a $c < x < b$ sávban. Ha az (x_o, y_o) pont az első sávba esik, akkor rajta egyetlen integrálgörbe halad át, amelyet az

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi \quad \text{egyenlet ad meg.}$$

Ha az $\int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi$ integrál konvergens $x \to c - 0$ határátmenet esetén, akkor az $y(x)$ integrálgörbe az $x = c$ egyenes egy meghatározott pontjához közeledik, azaz ha $\lim_{x \to c-o} \int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi = d$, $y(c) = y_o + d$, vagyis az integrálgörbe az $y_o + d$ pontban metszi az $x = c$ egyenest (1.3 ábra).



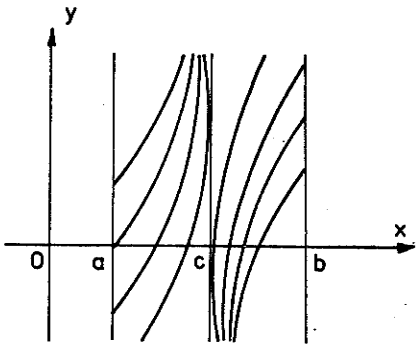
1.3 ábra

Ha az $\int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi$ integrál divergens, akkor az $y(x)$ integrálgörbe aszimptotikusan közeledik az $x = c$ egyeneshez (1.4 ábra). Az $x = c$ egyenes maga is egy integrálgörbe, hiszen illeszkedik a $\frac{dx}{dy} = 0$ iránymezőhöz $x = c$ esetén.

Hasonlóan vizsgálhatjuk az integrálgörbék viselkedését a $c < x < b$ sávban. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to c-0} \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi = \lim_{x \to c+0} \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi \text{ és}$$

$f(x) \to \infty$ ha $x \to c$.



1.4 ábra

Ekkor az $x = a$, $x = b$ egyenesek által határolt sáv bármely (x_0, y_0) pontján végtelen sok integrálgörbe halad át. Ha viszont a fenti integrálok $x \to c$ esetén divergensek, akkor a sáv bármely pontján egyetlen integrálgörbe halad át.

(Az 1.3 ábrán látható, hogy az (x_0, y_0) ponton áthaladó integrálgörbének az $x = c$ egyenestől balra eső ágán haladva az A pontig, folytathatjuk a görbét a jobb oldali ágon, de haladhatunk az $x = c$ egyenesen a B pontig és utána folytathatjuk a jobb oldali ágon, folytathatjuk a D pontig stb. Ily módon végtelen sok görbét kapunk, amely az $(x_0 y_0)$ ponton áthalad.)

b) <u>Speciális eset:</u>
$f(x) \equiv 1$.
Ebben az esetben az (1.1.1) egyenlet az

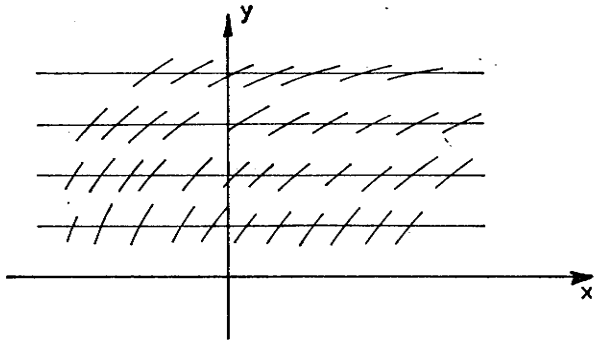
$$y' = g(y) \text{ alakot ölti,} \qquad (1.1.11)$$

ahol $g(y)$ a $c < y < d$ intervallumban legyen folytonos. Ennek a differenciálegyenletnek most az

$$\{-\infty < x < \infty\ ,\quad c < y < d\} \text{ sávban felel meg egy} \qquad (1.1.12)$$

$g(y) = y' = \operatorname{tg}\alpha$ iránymező. Pl.: az $y' = \frac{1}{y}$ egyenletnek a $0 < y < \infty$ végtelen intervallumban olyan iránymező felel meg, amely az x tengellyel párhuzamos egyenesek minden pontjához ugyanazt az irányt rendeli (1.5 ábra).

Az x tengellyel párhuzamos egyeneseket az $y' = \frac{1}{y}$ differenciálegyenlet izoklináinak nevezzük.



1.5 ábra

Ha az (1.1.11) egyenletben feltesszük, hogy $g(y) \neq 0$, az egész $c < y < d$ intervallumban, akkor $g(y)$ folytonossága miatt $g(y) > 0$ vagy $g(y) < 0$ a (c,d) intervallumban. Ezen kiegészítő kikötés mellett feltételezve, hogy az (1.1.11) egyenlet megoldható - legyen az egyenlet egy integrálgörbéje:

$$y = \phi(x). \tag{1.1.13}$$

Mivel $\phi'(x) = g[\phi(x)]$ vagy mindig pozitív, vagy mindig negatív, az $y = \phi(x)$ függvény monoton növekvő vagy monoton csökkenő, így az (1.1.13) egyenlet x-re egyértelműen megoldható (invertálható) a (c,d) intervallum valamely részintervallumán. Legyen a megoldásgörbe inverze

$x = \psi(y)$, ekkor az inverzfüggvény deriválási szabálya alapján:

$$\frac{dx}{dy} = \psi'(y) = \frac{1}{\phi'(x)} = \frac{1}{g(y)} \tag{1.1.14}$$

Az (1.1.14) differenciálegyenlet típusra megegyezik az (1.1.2) egyenlettel, csak a változók jelölése fel van cserélve, a független változót most y-nak nevezzük. Az (1.1.2) egyenletről mondottak alapján következik, hogy az (1.1.12) sáv minden pontján az (1.1.14) differenciálegyenletnek egyetlen integrálgörbéje megy át és ugyanez igaz az (1.1.11) egyenletre.

Megfordítva: az (1.1.14) egyenlet megoldása, amely átmegy az (1.1.12) sáv adott (x_o, y_o) pontján:

$$x(y) = x_o + \int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} \qquad (c < y < d) \qquad (1.1.15)$$

Mivel $g(y) \neq 0$, az $x = x(y)$ függvény y-nak olyan függvénye, amelynek deriváltja mindenütt zérustól különböző. Legyen

$$\alpha = x_o + \inf_{c<y<d} \int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}; \quad \beta = x_o + \sup_{c<y<d} \int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$$ [1]

ekkor az (1.1.15) egyenlet y-ra egyértelműen megoldható az $\alpha < x < \beta$ intervallumon és olyan $y = \phi(x)$ függvényt szolgáltat, amely az (1.1.11) egyenletet kielégíti. Az (1.1.12) sáv tetszőleges (x_o, y_o) pontján tehát egyetlen integrálgörbe halad át, amely az (1.1.11) egyenletet kielégíti. Mivel $\alpha > -\infty$ és $\beta < \infty$ is lehet, előfordulhat, hogy a megoldásfüggvény nem minden x-re létezik.

Az $y' = \frac{1}{y}$ egyenletre a tett feltevések mind teljesülnek. Az (x_o, y_o) ponton áthaladó integrálgörbe az (1.1.15) egyenlet alapján:

$$x = x_o + \int_{y_o}^{y} \eta \, d\eta = x_o + \frac{1}{2}(y^2 - y_o^2) = \frac{1}{2} y^2 + c \qquad (y > 0)$$

Az egyenlet y-ra megoldva:

$$y = \sqrt{y_o^2 + 2(x - x_o)} = \sqrt{2x - c} \qquad \text{ha} \quad x > x_o - \frac{1}{2} y_o^2$$

Az integrálgörbék geometriai szempontból könnyen értelmezhetők. Az $y = \sqrt{2x}$ parabolaág egy megoldásgörbe. Mivel az x tengellyel párhuzamos egyenesek mindegyikéhez az (1.1.11) egyenlet ugyanazt az irányt rendeli, minden olyan görbe, amely az $y = \sqrt{2x}$ görbéjének az x tengely irányú eltolásából keletkezik, ugyancsak megoldásgörbe, azaz tetszőleges c-re

$$y = \sqrt{2x - c} \quad \text{ha} \quad x > \frac{1}{2} c \quad \text{megoldásgörbe.}$$

---

[1] Valamely f(y) függvénynek a $c < y < d$ intervallumra vonatkozó alsó ill. felső határát (legnagyobb alsó ill. legkisebb felső korlátját) az $\inf_{c<y<d} f(y)$ ill. $\sup_{c<y<d} f(y)$ szimbólumokkal jelöljük.

Ily módon az $y > 0$ félsík minden pontján áthalad egy megoldásgörbe.

2. Megjegyzés:

Az $y' = g(y)$ egyenlet megoldását azon feltevés mellett vizsgáltuk, hogy $g(y)$ a (c,d) intervallumban folytonos és ott $g(y) \neq 0$. Ekkor egyenletünk $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(y)}$ alakban írható és a $c < y < d$ sáv bármely (x_o, y_o) pontján egyetlen integrálgörbe halad át, amelyet az

$$x = x_o + \int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} \quad \text{egyenlet ad meg.}$$

Az összes többi integrálgörbe ebből az x tengellyel párhuzamos eltolás útján keletkezik.

Tanulságos annak az esetnek a megvizsgálása, amikor $g(y)$ a (c,d) intervallumban folytonos, de ezen intervallum egyetlen $y = e$ pontjában zérussá válik. Mivel a $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(y)}$ egyenlet az $y' = f(x)$ egyenlettől csak abban különbözik, hogy x és y szerepét felcseréltük, most a következő esetek lehetségesek:

a) Ha az $\int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$ integrál divergens $y \to c \pm 0$

esetén, akkor az $y = c$ és $y = d$ egyenesek közti sáv minden pontján egy és csakis egy integrálgörbe halad át és az $y = e$ egyenes - amely maga is integrálgörbe - az összes integrálgörbék aszimptotája.

b) ha az $\int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$ integrál konvergens, ha $y \to c \pm 0$,

továbbá a $g(y)$ függvény nem vált előjelet, miközben y áthalad az $y = e$ értéken, akkor az említett sáv minden pontján végtelen sok integrálgörbe halad át.

(Az 1.4 ill. 1.3 ábrát ezen esetek szemléltetésére is felhasználhatjuk, ha a tengelyek szerepét felcseréljük és $a = c$, $b = d$ jelölést használunk.)

c) Általános $y' = f(x)g(y)$ szeparábilis egyenlet

Szemléletesség kedvéért vizsgáljuk először az (1.1.1) egyenlet iránymezőjét. A speciális esetek vizsgálata során láttuk, hogy az $y' = f(x)$ egyenlet esetében a vonalelemek iránytangense csak x-től függ, így az $x = c$ egyenesek mentén állandó. Az $y' = g(y)$ egyenlet esetében a vonalelemek

iránytangense csak y-tól függ, így az $y = c$ egyenes minden pontjában az iránytangens ugyanakkora. Az

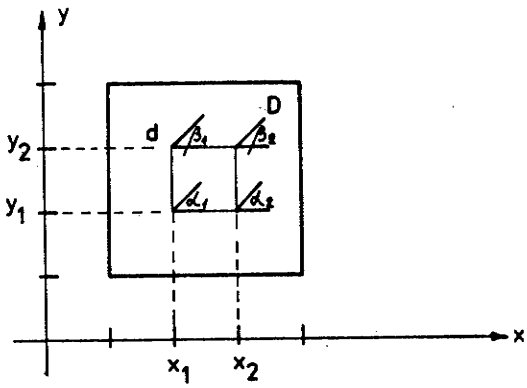
$$y' = f(x)g(y) \tag{1.1.15}$$

egyenlet vizsgálata során feltesszük, hogy $f(x)$ folytonos egy (a,b) intervallumban, $g(y)$ folytonos egy (c,d) intervallumban, továbbá $g(y) \neq 0$.

Ha most a

$$D:\{(a,b)x(c,d)\} \text{ téglalapon belül} \tag{1.1.16}$$

választunk egy $d < D$ résztéglalapot d párhuzamos oldalainak végpontjaiban a vonalelemek iránytangensei arányosak (1.6 ábra), ugyanis az (x_1,y_1) pontban



1.6 ábra

$$y' = tg\alpha_1 = f(x_1)g(y_1)$$

az (x_2,y_1) pontban

$$y' = tg\alpha_2 = f(x_2)g(y_1)$$

az (x_1,y_2) pontban

$$y' = tg\beta_1 = f(x_1)g(y_2)$$

az (x_2, y_2) pontban

$$y' = tg\beta_2 = f(x_2)g(y_2)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1} = \frac{f(x_2)g(y_2)}{f(x_1)g(y_2)} = \frac{f(x_2)}{f(x_1)} \; ; \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{f(x_2)g(y_1)}{f(x_1)g(y_1)} = \frac{f(x_2)}{f(x_1)}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{f(x_1)g(y_2)}{f(x_1)g(y_1)} = \frac{g(y_2)}{g(y_1)} \; ; \quad \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{f(x_2)g(y_2)}{f(x_2)g(y_1)} = \frac{g(y_2)}{g(y_1)}$$

Ez az észrevétel megkönnyítheti az iránymező felrajzolását és a megoldásgörbék grafikus meghatározását, mivel a megoldásgörbe integrálgörbe az (1.1.16) egyenlet esetében is az iránymezőhöz illeszkedő görbe.

Az (1.1.1) differenciálegyenlet megoldhatóságára vonatkozólag az alábbi tétel érvényes.

1.1 Tétel:

Ha az (1.1.1) differenciálegyenletben szereplő $f(x)$ függvény folytonos az (a,b) intervallumban, $g(y)$ folytonos a (c,d) intervallumban, $g(y) \neq 0$, továbbá $(x_o,y_o) \in D = \{(a,b)x(c,d)\}$, akkor az (1.1.1) egyenletnek egyetlen olyan $y = \phi(x)$ megoldásgörbéje van, amely átmegy az (x_o,y_o) ponton és amely értelmezve van egy $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ intervallumon, ahol $x_o \in (\alpha,\beta)$.

Azt az $y = \phi(x)$ függvényt, amely kielégíti az (1.1.1) egyenletet és amelyre $y(x_o) = y_o$, az

$$\int_{y_o}^{y} \frac{d}{g(\eta)} = \int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi \tag{1.1.17}$$

egyenlet megoldása útján kapjuk meg.

Bizonyítás:

Mivel $g(y) \neq 0$ a (c,d) intervallumban, ezért folytonossága miatt ott állandó előjelű, következésképpen a $G(y) = \int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$ függvény szigorúan monoton függvény és $G(y_o) = 0$.

Legyen $\underline{I} = \inf\limits_{y\in(c,d)} \int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$ és $\bar{I} = \sup\limits_{y\in(c,d)} \int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$.

Minthogy $y_o \in (c,d)$ és $G(y_o) = 0$, következik, hogy $\underline{I} \leq 0$ és $\bar{I} \geq 0$.

Mivel $\underline{I} = \inf\limits_{y\in(c,d)} G(y) < G(y) < \sup\limits_{y\in(c,d)} G(y) = \bar{I}$, továbbá

$$G(y) = \int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi$$

fennáll az $\underline{I} < \int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi < \bar{I}$ (hiszen $\int_{x_o}^{x_o} f(\xi)d\xi = 0$).

egyenlőtlenség az (a,b) intervallumban levő valamely rész-intervallum minden x pontjára. Legyen $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ a legnagyobb ilyen intervallum. A G(y) függvény szigorú monotonitásából következik, hogy minden $x \in (\alpha,\beta)$-hoz egyetlen $y \in (a,b)$ érték tartozik, amely x-szel együtt kielégíti az (1.1.17) egyenletet. Az ilyen összetartozó értékpárokat jelölje az $y = \phi(x)$ függvény. Az (1.1.17) egyenlet alapján:

$$\int_{y_o}^{y=\phi(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = G[\phi(x)] = \int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi \quad ; \quad x \in (\alpha,\beta)$$

Innen:

$$\phi(x) = G^{-1}\left[\int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi\right]; \quad x \in (\alpha,\beta) \tag{1.1.18}$$

a keresett megoldásfüggvény.

Azt, hogy az (1.1.18) összefüggésben szereplő $y = \phi(x)$ függvény kielégíti az (1.1.17) egyenletet, valamint az $y(x_o) = \phi(x_o) = y_o$ kezdeti feltételt, könnyen igazolhatjuk. Differenciáljuk az

$$\int_{y_o}^{\phi(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi \quad ; \quad x \in (\alpha,\beta)$$

azonosságot, amit az inverzfüggvény ill. az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tételek alapján megtehetünk, ekkor

$$\frac{1}{g[\phi(x)]}\,\phi'(x) = f(x)$$

vagyis

$$\phi'(x) \equiv f(x)g[\phi(x)] \tag{1.1.19}$$

tehát $\phi(x)$ kielégíti az (1.1.16) egyenletet, továbbá (1.1.18) alapján

$$\phi(x_o) = G^{-1}\left[\int_{x_o}^{x_o} f(\xi)d\xi\right] = G^{-1}(0) = y_o \tag{1.1.20}$$

Minthogy $G(y_o) = 0$, $\phi(x)$ kielégíti az $y(x_o) = y_o$ kezdeti feltételt is.

Indirekt úton bizonyítjuk, hogy az (1.1.18) megoldás az x_o pont egy környezetében egyértelmű. Tételezzük fel, hogy létezik egy másik $y_1 = \phi_1(x)$ megoldásfüggvény is, amely valamely $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$ intervallumban kielégíti az (1.1.11) egyenletet és amelyre $\phi_1(x_o) = y_o$.

Megmutatjuk, hogy az $\{(\alpha, \beta) \cap (\alpha_1, \beta_1)\}$ intervallumon $\phi_1(x) = \phi(x)$.

Mivel $\phi_1(x)$ kielégíti az $y' = f(x)\, g(y)$ egyenletet, azaz

$$\phi_1'(x) = f(x) g[\phi_1(x)],$$

következik, hogy

$$\int_{x_o}^{x} \frac{\phi_1'(\xi)}{g[\phi_1(\xi)]} = \int_{x_o}^{x} f(\xi) d\xi$$

Alkalmazva az $\eta = \phi_1(\xi)$ helyettesítést, mivel $\phi_1(x_o) = y_o$, adódik, hogy

$$\int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{x_o}^{x} f(\xi) d\xi$$

vagyis $\phi_1(x)$ kielégíti az (1.1.17) egyenletet is, amelynek a bal oldal szigorú monotonitása miatt egyetlen $y = \phi(x)$ megoldása van, tehát az $(\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha, \beta)$ intervallumban $\phi(x) = \phi_1(x)$.

Az $y' = f(x)g(y)$ szeparábilis differenciálegyenlet megoldása tehát az (1.1.17) formula segítségével végezhető, amelyet formálisan a

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

egyenletből a "változók szétválasztásával" úgy nyerünk, hogy az egyenletet

$$\frac{dx}{g(y)} = f(x) dx \quad \text{alakban írjuk,}$$

majd mindkét oldalon integrálunk változó felső határral, az integrál alsó határául pedig az $y(x_o) = y_o$ kezdeti érték-feladatban megadott mennyiségeket választjuk:

$$\int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi$$

Ezen formális eljárás helyességét az 1. tétel bizonyítása szolgáltatja.

Amennyiben az (1.1.1) egyenlet összes megoldásait akarjuk megkapni, tehát nem írunk elő kezdeti értékeket, akkor (1.1.1) megoldását az

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c \qquad (1.1.21)$$

egyenletben szereplő határozatlan integrálok kiszámításával kapjuk.

Példa:

Legyen adott az (1.1.22) $y' = -\frac{x}{y}$, $(y < 0)$ differenciálegyenlet. Az (1.1.16) formulának megfelelően most $f(x) = x$, $g(y) = -\frac{1}{y}$. Az (a,b) intervallum az $R = (-\infty,\infty)$ számegyenes, a (c,d) intervallumnak a $(-\infty, 0)$ félegyenes felel meg.

$$\int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{y_o}^{y} (-\eta)d\eta = -\frac{y^2 - y_o^2}{2}$$

$$\underline{I} = \inf_{y\in(-\infty,o)} \int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \inf_{y\in(-\infty,o)} \frac{y_o^2 - y^2}{2} = -\infty ,$$

$$\overline{I} = \sup_{y\in(-\infty,\infty)} \int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \sup_{y\in(-\infty,o)} \frac{y_o^2 - y^2}{2} = \frac{y_o^2}{2}$$

A megoldásfüggvény értelmezési tartománya az (1.1 tétel bizonyításában szereplő (α,β) intervallum):

$$-\infty < \int_{x_o}^{x} f(\xi)d\xi = \int_{x_o}^{x} x\,dx = \frac{x^2 - x_o^2}{2} < \frac{y_o^2}{2}, \quad \text{vagyis}$$

az $|x| < \sqrt{x_o^2 + y_o^2} = k$ sugarú, origó középpontú intervallum. Az $y = \phi(x)$ megoldásfüggvényt az

$$-\frac{y^2}{2} + \frac{y_o^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x_o^2}{2} \quad \text{egyenletből}$$

kapjuk:

$$y = -\sqrt{k^2 - x^2} \qquad |x| < k \,, \tag{1.1.23}$$

amely origó középpontú, az (x_o, y_o) ponton átmenő félkör.

Az (1.1.22) differenciálegyenlet izoklinái a

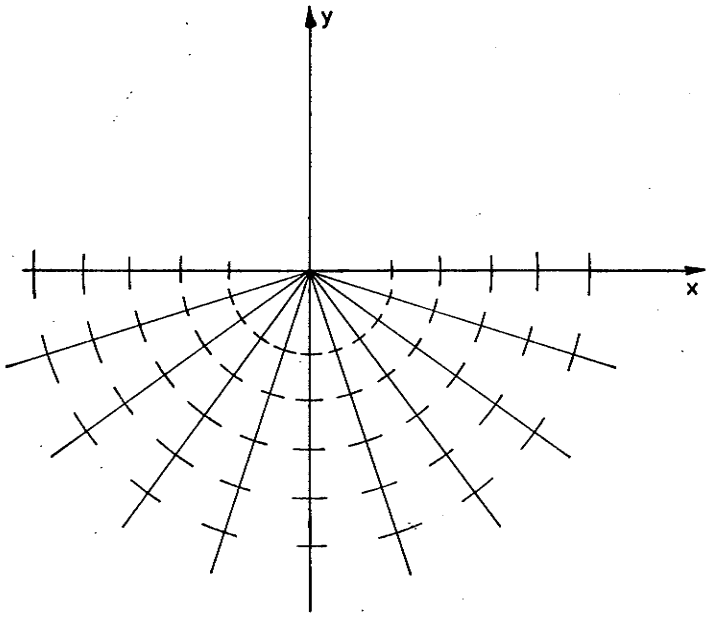
$$-\frac{x}{y} = c \quad \text{egyenletű görbék, vagyis azok a} \tag{1.1.24}$$

görbék, amelyekre $y' = c$ (állandó), azaz amely görbék minden pontjához az (1.1.22) egyenlet ugyanazt az irányt rendeli.

Az (1.1.24) összefüggést átrendezve az

$$y = -\frac{1}{c}x \qquad (c \neq 0) \tag{1.1.25}$$

és az $x = 0$ félegyeneseket kapjuk. Az (1.1.25) félegyenes minden pontjában az $y(x)$ integrálgörbe érintője: $y' = c$, vagyis az integrálgörbe érintője merőleges az izoklinákra, tehát az integrálgörbék az (1.1.23) összefüggésben szereplő félkörök.



1.7 ábra

A szeparábilis egyenletek megoldásának "technikája" az (1.1.21) formula alapján igen egyszerű, ezért ha valamely bonyolultabb differenciálegyenletet átalakítással szeparábilis egyenletre tudunk visszavezetni, máris megoldottnak tekintjük. Az explicit módon megoldható közönséges differenciálegyenletek valamennyien szeparábilis egyenletre vezethetők vissza. A továbbiakban ilyen differenciálegyenleteket vizsgálunk.

1.2 Homogén egyenletek

Definíció:
Homogénnek nevezzük az

$$y' = f(\frac{y}{x}) \qquad (1.2.1)$$

alakú differenciálegyenletet.[1)]

A homogén differenciálegyenlet $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel szeparálható egyenletre vezethető vissza, ugyanis

$$y = ux$$

$$y' = u'x + u = f(u), \quad \text{innen} \qquad (1.2.2)$$

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \qquad (1.2.3)$$

Az (1.2.3) egyenlet szeparálható egyenlet, amelynek megoldása:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{f(u) - u} = \Phi(u) + c \qquad (1.2.4)$$

azaz

$$\ln|x| = \Phi(\frac{y}{x}) + c \qquad (1.2.5)$$

ahol $\Phi(u)$ az $\frac{1}{f(u) - u}$ függvény valamely primitív függvénye. Ha az (1.2.2) formulában szereplő $f(u)$ függvény az $a < u < b$ intervallumban értelmezett, akkor $f(\frac{y}{x})$ olyan szögtartományban értelmezett, amelynek (x,y) pontjaira nézve $a < \frac{y}{x} < b$. E két szögtér tartományát G-vel jelölve az (1.2.1) egyenletre vonatkozólag a következő tétel érvényes:

1.2 Tétel:
Ha az $f(u)$ függvény folytonos az $a < u < b$ intervallumban és ezen intervallumban $f(u) \neq u$, akkor G minden (x_o, y_o) pontján egy és csak egy integrálgörbe megy át.

---

1) A homogén egyenletet nulladfokú homogén egyenletnek is nevezik az alábbi meggondolás alapján: Az $f(x,y)$ függvényt n-edfokú homogén függvénynek nevezzük, ha $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$. Az $f(x,y)$ ennek alapján nulladfokú homogén függvény, ha $f(tx,ty) = t^o f(x,y) = f(x,y)$. Az $f(\frac{y}{x}) = f(\frac{ty}{tx})$ nyilván nulladfokú homogén függvény.

Bizonyítás:
Az (1.2.1) egyenlet ekvivalens az (1.2.3) szeparálható egyenlettel, amelyre alkalmazható az (1.1) tétel.

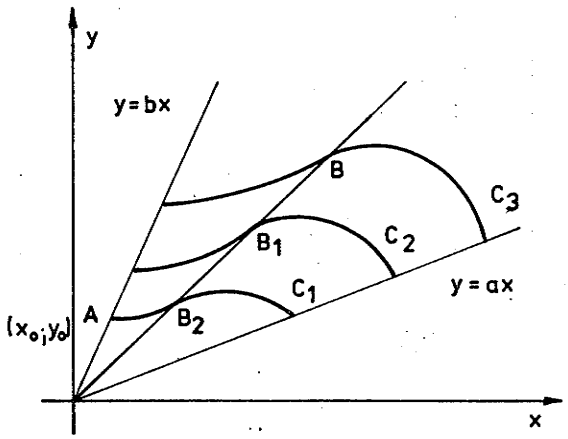
Megjegyzés:
Az 1.2 tételben kizártuk az $f(u) = u$ esetet. Ez esetben ugyanis az (1.2.2) összefüggés alapján

$$y' = \frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ lenne.} \qquad (1.2.6)$$

Az (1.2.6) differenciálegyenlet izoklinái (szintvonalai) az

$$y' = \frac{y}{x} = c, \text{ azaz az } y = cx \text{ egyenesek.}$$

Az ($x = o$, $y = o$) origóban az iránymező nem értelmezhető, így az origóhoz az (1.2.6) egyenlet semmilyen irányt nem rendel hozzá. Azt kell mondanunk, hogy az (1.2.6) egyenlet izoklinái és egyben integrálgörbéi az origóból kiinduló félegyenesek. Ha egyes $u_1, u_2, \ldots, u_n$ pontokban $f(u) = u$, azaz az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ számok gyökei az $f(u) - u = 0$ egyenleteknek, akkor az (1.2) tételben szereplő G tartomány bármely (x_o, y_o) pontján sok integrálgörbe mehet át. Ez akkor következik be, ha az (1.2.4) egyenlet jobb oldalán álló integrál, amely $\int_c^u \frac{d\xi}{f(\xi) - \xi}$ integrálhoz konvergál, ha u az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ számok valamelyikéhez, pl. u_1-hez közeledik. Az 1.8 ábra az integrálgörbék ilyen esetben való viselkedését mutatja.



1.8 ábra

Ekkor pl. az $A(x_o,y_o)$ ponton az AB_1C_1, $AB_1B_2C_2$, $AB_1B_3C_3$,... integrálgörbék mind áthaladnak. Az (1.2.1) differenciálegyenlet izoklinái ugyancsak az origóból kiinduló félegyenesek (sugarak), hiszen $y' = f(\frac{y}{x}) = c$ állandó, ha $\frac{y}{x} = c^*$, mivel $f(\frac{y}{x})$ csak az $\frac{y}{x}$ hányadostól függ. Az (1.2.1) differenciálegyenlet tehát az egy-egy sugár pontjaihoz egyforma irányokat rendel, vagyis az integrálgörbék adott sugarat azonos szögben metszenek. Ezért az integrálgörbék egymásba hasonlósági transzformációval (arányos nyújtással) vihetők át, ahol a hasonlósági centrum az origó.

Példa:
Oldjuk meg az

$$y' = \frac{y - x}{x + y} \quad \text{differenciálegyenletet!} \qquad (1.2.7)$$

Az $x = o$ esetben $y' \equiv 1$, azaz $y = x + c$, az egyenlet megoldása.

Ha $x \neq o$, a tört számlálóját és nevezőjét x-szel osztva:

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - 1}{1 + \frac{y}{x}}$$

Elvégezve az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítést, $y = ux$, tehát $y' = u'x + u$, innen az

$$u'x + u = \frac{u - 1}{u + 1}$$

differenciálegyenletet kapjuk, amelyből

$$u'x = \frac{du}{dx}\, x = -\frac{1 + u^2}{1 + u}$$

A változókat szétválasztva:

$$-\frac{1 + u}{1 + u^2}\, du = \frac{dx}{x}$$

majd mindkét oldalt integrálva:

$$-\int \frac{du}{1 + u^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{1 + u^2}\, du = -\operatorname{arc\,tg} u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) =$$

$$= \ln|cx|$$

Rendezzük az egyenletet és u helyébe írjuk vissza az $\frac{y}{x}$ hányadost:

$$\ln|cx| + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

A logaritmus azonosságait alkalmazva és áttérve a

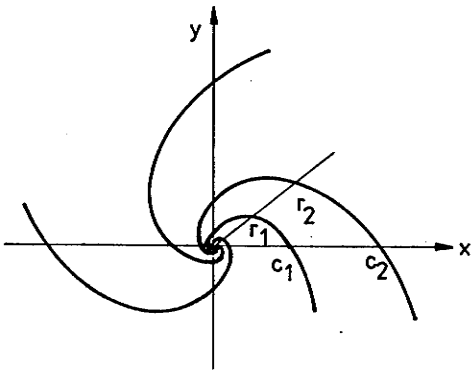
$$\operatorname{tg}\phi = \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{polárkoordinátákra,}$$

az egyenlet

$$\ln cr = -\phi \qquad \text{és a megoldás}$$

$$r = c_1 e^{-\phi} \qquad \text{alakot ölt.} \tag{1.2.8}$$

Az integrálgörbéket az 1.9 ábra szemlélteti.



1.9 ábra

Az (1.2.8) egyenletből látható, hogy az integrálgörbék hasonlósági transzformációval egymásba mennek át.

1.3 Homogén egyenletre visszavezethető egyenletek

Tekintsük az

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) \tag{1.3.1}$$

differenciálegyenletet, ahol a, b, c, α, β, γ adott állandók. Az (1.3.1) differenciálegyenlet a koordináta-rendszer origójának alkalmas eltolásával homogén differenciálegyenletre vezethető vissza.

Ha az

$$ax + by + c = 0 \quad \text{és} \tag{1.3.2}$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \text{ egyeneseknek van metszéspontja,}$$

akkor az origót ebbe a metszéspontba toljuk el. A metszéspont létezésének feltétele, hogy a fenti lineáris egyenletrendszer determinánsa zérustól különbözzék.

Tételezzük fel először, hogy

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.3.3}$$

Ekkor az (1.3.2) egyenletrendszer megoldható, legyen a megoldás: $x = x_o$, $y = y_o$.

Bevezetve az $x - x_o = \xi$, $y - y_o = \eta$ változókat:

$$\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \frac{a\xi + a\cdot x_o + b\eta + b\cdot y_o + c}{\alpha\xi + \alpha\cdot x_o + \beta\eta + \beta\cdot y_o + \gamma} = \frac{a\xi + b\eta}{\alpha\xi + \beta\eta}$$

mivel $ax_o + by_o + c = 0$ és $\alpha x_o + \beta y_o + \gamma = 0$.

Mivel $\frac{dy}{dx} = \frac{d\xi}{d\eta}$, ezért az (1.3.1) egyenletből az

$$\frac{d\xi}{d\eta} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{\alpha\xi + \beta\eta}\right) \tag{1.3.4}$$

egyenletet kapjuk, amely $u = \frac{\eta}{\xi}$ transzformációval homogén fokszámú.

Ha pedig

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a\beta - b\alpha = 0, \quad \text{akkor} \quad \frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = k, \tag{1.3.5}$$

tehát az (1.3.1) egyenlet

$$y' = f\left(\frac{(ax + by) + c}{k(ax + by) + \gamma}\right) = g(ax + by) \tag{1.3.6}$$

alakra hozható, ahol az egyenlet jobb oldala $ax + by$ függvénye.

Bevezetve a

$z = ax + by$ változót

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \quad \text{azaz} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx} - a}{b}, \quad \text{innen}$$

$$\frac{dz}{dx} = a + b\,g(z) \tag{1.3.7}$$

amely már szeparálható egyenlet.

1.4 Lineáris elsőrendű differenciálegyenletek

Definíció:
Lineáris elsőrendű differenciálegyenletnek nevezzük az

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.4.1}$$

alakú egyenletet. Ha $q(x) \equiv 0$, akkor az (1.4.1) egyenletet homogén lineáris egyenletnek nevezzük.

A műszaki alkalmazásokban a lineáris egyenletek igen gyakran előfordulnak és fontos szerepet játszanak.

Tétel:
Ha az (1.4.1) egyenletben szereplő $p(x)$ és $q(x)$ függvények valamely $a<x<b$ intervallumban folytonosak, akkor az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt sáv minden (x_o,y_o) pontján az (1.4.1) egyenlet egyetlen integrálgörbéje megy át, amely az (a,b) intervallum minden x értékére értelmezett.

Bizonyítás:
Tekintsük először az

$$y' + p(x)y = 0 \tag{1.4.2}$$

homogén lineáris differenciálegyenletet. Ez szeparálható egyenlet, mivel

$$y' = -\,p(x)y$$

Az (1.4.2) egyenletnek egy (x_o,y_o) ponton egyetlen megoldásgörbéje megy át, mivel $\int_c^y \frac{d\eta}{\eta}$ divergens,[1] / ha $y \to 0$. A megoldás, amely az $y(x_o) = y_o$ kezdeti feltételt kielégíti:

$$\int_{y_o}^{y} \frac{d\eta}{\eta} = -\int_{x_o}^{x} p(\xi)d\xi$$

---

[1] Lásd: az 1.1 ponthoz tett 2. Megjegyzést!

$$\ln y - \ln y_o = -\int_{x_o}^{x} p(\xi)d\xi$$

$$y(x) = y_o\, e^{-\int_{x_o}^{x} p(\xi)d\xi}$$

Keressük most az (1.4.1) inhomogén lineáris egyenletnek a kezdeti feltételt kielégítő megoldását ugyanilyen alakban, de az y_o állandó helyett írjunk egy az x változótól függő $z(x)$ függvényt (az állandó variálása), azaz keressük az (1.4.1) egyenlet megoldását

$$y(x) = z(x)e^{-\int_{x_o}^{x} p(\xi)d\xi} \quad \text{alakban.} \tag{1.4.3}$$

Az (1.4.3) egyenlet mindkét oldalát differenciálva az x változó szerint:

$$y'(x) = z'(x)e^{-\int_{x_o}^{x} p(\xi)d\xi} - z(x)p(x)e^{-\int_{x_o}^{x} p(\xi)d\xi} \tag{1.4.4}$$

adódik.

Az (1.4.4) összefüggést az (1.4.1) egyenletbe helyettesítve (figyelembe véve az (1.4.3) összefüggést)

$$z'(x)e^{-\int_{x_o}^{x} p(\xi)d\xi} - z(x)p(x)e^{-\int_{x_o}^{x} p(\xi)d\xi} +$$

$$+ p(x)z(x)e^{-\int_{x_o}^{x} p(\xi)d\xi} = q(x) \tag{1.4.5}$$

Innen

$$z'(x) = q(x)e^{\int_{x_o}^{x} p(\xi)\, d\xi} \tag{1.4.6}$$

Mivel $y(x_o) = z(x_o)e^{-\int_{x_o}^{x} p(\xi)d\xi} = y_o$ kell legyen, ezért:

$$z(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} q(t)e^{\int_{x_o}^{t} p(\xi)d\xi} dt \qquad (1.4.7)$$

A $z(x)$ függvényre kapott (1.4.7) összefüggést az (1.4.3) egyenletbe helyettesítve:

$$y(x) = e^{-\int_{x_o}^{x} p(\xi)d\xi} [y_o + \int_{x_o}^{x} q(t)e^{\int_{x_o}^{t} p(\xi)d\xi} dt] \qquad (1.4.8)$$

megoldást kapjuk, amely az (1.4.1) egyenletet és az $y(x_o) = y_o$ kezdeti feltételt kielégíti.

<u>Megjegyzés:</u>
Az (1.4.8) formulát, amely alakilag bonyolultnak tűnik, nem szükséges megjegyeznünk, mivel konkrét feladat esetében a levezetés igen egyszerűen elvégezhető. Példaként oldjuk meg az

$$y' + y = x \qquad (1.4.9)$$

lineáris egyenletet. A homogén egyenlet:

$$\frac{dy}{dx} = -y \qquad (1.4.10)$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln y = -x + \ln c$$

$$y = c\,e^{-x} \qquad (1.4.11)$$

Az állandó variálásával:

$$y = c(x)e^{-x}$$

$$y' = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x}$$

Ezeket az egyenleteket $y' + y = x$ egyenletbe helyettesítve

$$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = x$$

$$c'(x) = xe^x$$

$$c(x) = \int \underset{u}{x}\, \underset{v'}{e^x}\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = e^x(x - 1) + c_1$$

Tehát a megoldás:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + x - 1 \qquad (1.4.12)$$

Ha most pl. előírjuk, hogy az $x_0 = 0$ helyen $y(0) = 1$ legyen, akkor $c_1 = 2$ választandó. Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk az (1.4.8) formula alkalmazásával.

Vegyük észre, hogy az (1.4.12) egyenletben $c_1 e^x$ az (1.4.10) homogén lineáris egyenlet általános megoldása, míg $x - 1$ az (1.4.9) a $c_1 = 0$ paraméterértékhez tartozó partikuláris megoldása az inhomogén egyenletnek. Minden lineáris inhomogén differenciálegyenlet megoldása ilyen szerkezetű.

1.5 A Bernoulli-féle differenciálegyenlet

Definíció:
Az

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \qquad (m \neq 1,\ m \neq 0) \qquad (1.5.1)$$

alakú elsőrendű differenciálegyenletet Bernoulli-féle egyenletnek nevezzük.

(Megjegyezzük, hogy $m = 1$ esetén az (1.5.1) egyenlet $y' + [p(x) - q(x)]y = 0$ alakú homogén lineáris egyenletbe, $m = 0$ esetén pedig az (1.4.1) inhomogén egyenletbe megy át.)

A Bernoulli-egyenlet átalakítható lineáris egyenletté. Osszuk el az (1.5.1) egyenlet mindkét oldalát y^m-mel, ekkor az

$$y'y^{-m} + p(x)y^{1-m} = q(x) \quad \text{egyenletet kapjuk.} \qquad (1.5.2)$$

Alkalmazzuk az $y^{1-m} = u$ helyettesítést, ekkor $u' = (1 - m)y^{-m} \cdot y'$, így az (1.5.2) egyenletből

$$\frac{u'}{1 - m} + p(x)u = q(x) \quad \text{adódik, amely már} \qquad (1.5.3)$$

lineáris elsőrendű differenciálegyenlet, amely u-ra megoldható.

Mivel $u = y^{1-m}$, a Bernoulli-egyenlet megoldása:

$$y = u^{\frac{1}{1-m}} \tag{1.5.4}$$

1.6 Egzakt egyenletek. Multiplikátorok

Az $y' = f(x,y)$ elsőrendű közönséges differenciálegyenlet sok esetben

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \quad \text{alakban írható, vagy} \tag{1.6.1}$$

a vele ekvivalens

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \text{alakra hozható.} \tag{1.6.2}$$

<u>Definíció:</u>
Az (1.6.2) differenciálegyenletet egzakt differenciálegyenletnek nevezzük, ha létezik olyan $U(x,y)$ kétváltozós függvény, amelynek az (1.6.2) egyenlet teljes differenciálja, azaz amelyre a

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \tag{1.6.3}$$

relációk teljesülnek.
Ha van olyan $U(x,y)$ függvény, amelyre az (1.6.3) összefüggések teljesülnek, akkor a

$$dU(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} dy =$$

$$= P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.6.4}$$

összefüggés alapján az (1.6.2) egyenlet megoldása

$$U(x,y) = C \quad \text{(állandó)}, \tag{1.6.5}$$

ahol az $U(x,y)$ függvény az y változót mint x implicit függvényét határozza meg a sík valamely egyszeresen összefüggő G -tartományának minden olyan (x,y) pontjában, ahol $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \neq 0$. (Egyszeresen összefüggő valamely G síkbeli tartomány, ha korlátos és egyetlen folytonos zárt görbe határolja.) Ha $y = y(x)$ az (1.6.2) egyenlet megoldása, akkor az implicit függvény deriválási szabálya alapján az (1.6.5) egyenlet x szerinti deriválásával:

$$\frac{dU(x,y(x))}{dx} = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} y' =$$

$$= P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 .$$

vagyis $y(x)$ kielégíti az (1.6.1) egyenletet.

Ha az (1.6.1) egyenlet olyan megoldását keressük, amely az említett G tartomány (x_0,y_0) pontján halad át, akkor az (1.6.5) egyenletben $C = U(x_0,y_0)$ választandó. (Emlékeztetünk, hogy az $U(x,y(x)) = C$ egyenletet kielégítő $y(x)$ görbék az $U(x,y)$ felület szintgörbéi.)

Az (1.6.1) egyenlet megoldásával kapcsolatban két kérdés merül fel:

1. Hogyan dönthető el, hogy van-e olyan $U(x,y)$ kétváltozós függvény, amelyre az (1.6.3) relációk teljesülnek?
2. Ha van ilyen $U(x,y)$ függvény, hogyan található meg?

Mindkét kérdésre választ ad az alábbi tétel bizonyításának gondolatmenete.

Tétel:

Az (1.6.1) differenciálegyenletben szereplő $P(x,y)$ és $Q(x,y)$ függvények legyenek a sík valamely egyszeresen összefüggő G tartományában folytonos függvények és létezzenek ebben a tartományban

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad \text{elsőrendű parciális}$$

deriváltak és ezek is legyenek folytonosak. Ekkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az (1.6.1) egyenlet egzakt legyen, a

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{1.6.6}$$

egyenlőség teljesülése a G tartomány minden (x,y) pontjában.

Bizonyítás:

Az (1.6.6) feltétel szükséges volta annak következménye, hogy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y\, \partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x\, \partial y} \end{cases} \quad \text{továbbá} \tag{1.6.7}$$

mivel a feltevésünk alapján a jobb oldalon álló másodrendű vegyes parciális deriváltak folytonosak, ezért mint azt a parciális deriváltak tárgyalásakor megmutattuk, egyenlők.

Az (1.6.6) feltétel elégséges volta a következő módon látható be.

Kiindulva a

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$$ összefüggésből az

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi,y)d\xi + \phi(y), \qquad (1.6.8)$$

relációt nyerjük, (ahol x_0 a G tartományon belül tetszőlegesen választható), a $\phi(y)$ függvény az y-nak tetszőleges differenciálható függvénye. Deriváljuk az (1.6.8) összefüggést y szerint!

Mivel $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$, ezért

$$Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(\xi,y)}{\partial y} d\xi + \phi'(y) \qquad (1.6.9)$$

(Kimutatható, hogy a tételben tett feltevések mellett szabad az integráljel alatt differenciálni, azaz a differenciálás és integrálás sorrendje esetünkben felcserélhető.) Az (1.6.6) egyenlőség alapján az integráljel alatt $\frac{\partial P(\xi,y)}{\partial y}$ helyébe $\frac{\partial Q(\xi,y)}{\partial \xi}$ írható, így:

$$Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(\xi,y)}{\partial \xi} d\xi + \phi'(y) \qquad (1.6.10)$$

Elvégezve a kijelölt integrálást, a Newton-Leibniz-formula alapján:

$$Q(x,y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \phi'(y), \quad \text{azaz}$$

$$\phi'(y) = Q(x_0,y) \quad \text{tehát}$$

$$\phi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\eta)d\eta \qquad (1.6.11)$$

Az (1.6.11) összefüggést az (1.6.8) formulába helyettesítve megkapjuk a keresett U(x,y) függvényt és egyben igazoltuk az (1.6.6) feltétel elégséges voltát:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x_0\eta)d\eta \qquad (1.6.12)$$

ifferenciálással könnyen meggyőződhetünk róla, hogy az (1.6.12) formulával adott $U(x,y)$ függvényre teljesülnek az (1.6.3) relációk. Ugyanis (1.6.12)-ben a második integrál x-től nem függ, így

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \qquad \text{továbbá:}$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(\xi,y)}{\partial y}\, d\xi + Q(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(\xi,y)}{\partial \xi}\, d\xi +$$

$$+ Q(x_0,y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + Q(x_0,y) = Q(x,y)$$

(Itt ismét felhasználtuk az (1.6.6) összefüggést.)
Példa: Oldjuk meg a

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

differenciálegyenletet!
Itt $P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$, $Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3$.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 12xy, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 12xy, \quad \text{tehát az}$$

(1.6.6) feltétel teljesül, azaz a differenciálegyenlet egzakt. Keressük azt az $U(x,y)$ függvényt, amelyre

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$$

Integrálással:

$$U(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + \Phi(y)$$

Az egyenlet y szerint deriválva:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = 6x^2y + \Phi'(y) = Q(x,y)$$

Minthogy másrészt $Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3$, következik, hogy

$$\Phi'(y) = 4y^3 \qquad \text{vagyis}$$

$$\Phi(y) = y^4 + C.$$

Az egyenlet megoldása tehát:

$$U(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

Ha az (1.6.1) differenciálegyenlet nem egzakt, akkor megkísérelhetjük olyan $\mu(x,y)$ kétváltozós függvényt keresni, amellyel végigszorozva az (1.6.2) egyenletet, egzakt differenciálegyenletet nyerünk, mivel az egzakt differenciálegyenlet megoldása aránylag egyszerű.

Definíció:
Az $\mu(x,y)$ függvényt az (1.6.1) differenciálegyenlet integráló tényezőjének vagy multiplikátorának nevezzük, ha vele az egyenletet megszorozva egzakt egyenletet nyerünk, azaz ha

$$\mu(x,y)P(x,y) + \mu(x,y)Q(x,y)y' = 0 \qquad (1.6.13)$$

egyenlet egzakt, vagyis az (1.6.6) feltétel alapján:

$$\frac{\partial[\mu(x,y)P(x,y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu(x,y)Q(x,y)]}{\partial x} \qquad (1.6.14)$$

Adott (1.6.1) alakú egyenlethez - elég általános feltételek mellett - létezik, mégpedig végtelen sok multiplikátor, ezek megtalálása azonban általában bonyolult. Sok esetben létezik azonban az (1.6.1) egyenlethez olyan multiplikátor, amely csak egy változótól, vagy csak x-től, vagy csak y-tól függ. Az ilyen multiplikátor megkeresése viszonylag egyszerű feladat.

Tegyük fel, hogy az (1.6.1) egyenlethez létezik csak x-től függő $\mu(x)$ multiplikátor. Ekkor

$$\frac{\partial[\mu(x)P]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu(x)Q]}{\partial x} \qquad (1.6.15)$$

(ahol jobb áttekinthetőség kedvéért az x,y változókat P és Q mellett nem írtuk ki).
Innen

$$\frac{\partial\mu(x)}{\partial y}P + \mu(x)\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\mu(x)}{\partial x}Q + \mu(x)\frac{\partial Q}{\partial x} . \qquad (1.6.16)$$

Mivel $\mu(x)$ csak x-től függ, $\frac{\partial\mu(x)}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial\mu(x)}{\partial x} = \mu'(x)$, tehát

$$\mu(x)\frac{\partial P}{\partial y} = \mu'(x)Q + \mu(x)\frac{\partial Q}{\partial x} . \qquad (1.6.17)$$

Továbbá:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \qquad (1.6.18)$$

Az (1.6.18) egyenlet bal oldalán álló függvény csak x-től függ. Ha az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés is csak x-től függ, akkor létezik csak x-től függő multiplikátor, mégpedig:

$$\ln|\mu(x)| = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx. \qquad (1.6.19)$$

Hasonlóan könnyű megtalálni az (1.6.1) egyenlethez a csak y-tól függő $\mu(y)$ multiplikátort, amennyiben van ilyen. Tételezzük fel, hogy létezik (1.6.1)-hez csak y-tól függő multiplikátor, ekkor

$$\frac{\partial[\mu(y)P]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu(y)Q]}{\partial x}, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{\partial\mu(y)}{\partial y} P + \mu(y) \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\mu(y)}{\partial x} Q + \mu(y) \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Most $\frac{\partial\mu(y)}{\partial x} = 0$, ezért

$$\frac{\partial\mu(y)}{\partial y} \cdot \frac{1}{\mu(y)} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} \qquad (1.6.20)$$

Amennyiben az (1.6.20) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés csak y-tól függ, akkor van csak y-tól függő $\mu(y)$ multiplikátor:

$$\ln|\mu(y)| = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy \qquad (1.6.21)$$

Egyváltozós multiplikátor kereséséhez tehát az (1.6.18) ill. (1.6.20) egyenletek jobb oldalán álló kifejezéseket kell vizsgálnunk.

<u>Példa:</u>
Oldjuk meg a

$$(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0 \quad \text{egyenletet!}$$

Itt $P(x,y) = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}$; $\quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2$

$Q(x,y) = x^2 + y^2$; $\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$

Az egyenlet nyilván nem egzakt, mivel $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Mivel $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$, azaz

$$\frac{\partial \ln\mu(x)}{\partial x} = 1, \quad \mu = e^x, \quad \text{az}$$

$$e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0$$

egyenlet már egzakt. Integráljuk ezt az egyenletet! Minthogy

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})$$

$$U(x,y) = \int e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + \phi(y) =$$

$$= y\int e^x(2x + x^2)dx + \frac{y^3}{3}e^x + \phi(y)$$

Egyszerű számolással adódik, hogy $U(x,y) = ye^x(x^2 + \frac{y^2}{3}) + \phi(y)$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = e^x(x^2 + y^2) + \phi'(y)$$

Tegyük egyenlővé az egyenlet jobb oldalát az $\mu(x)Q(x,y) = e^xQ(x,y) = e^x(x^2 + y^2)$ kifejezéssel:

$$e^x(x^2 + y^2) + \phi'(y) = e^x(x^2 + y^2), \quad \text{innen:}$$

$$\phi'(y) = 0, \quad \phi(y) = C.$$

Az egyenlet általános integrálja:

$$U(x,y) = ye^x(x^2 + \frac{y^2}{3}) = C.$$

<u>Megjegyzés:</u>

Mint már a bevezetőben említettük, a közönséges elsőrendű differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(x,y), \quad \text{amely}$$

$$dy - f(x,y)dx = 0 \qquad (1.6.22)$$

alakban is írható. Az (1.6.22) egyenletet az (1.6.2) egyenlettel összehasonlítva a következőképpen alakítható át egzakt differenciálegyenletté:

$$P(x,y) = -f(x,y), \qquad Q(x,y) = 1 \qquad \text{adódik.}$$

Amennyiben az (1.6.18) összefüggésnek megfelelő

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = -\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad \text{kifejezés csak x-től}$$

függ, azaz

$$-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = p(x), \quad \text{akkor} \tag{1.6.23}$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \quad \text{a multiplikátor.} \tag{1.6.24}$$

Ha (1.6.2) teljesül, akkor integrálással:

$$f(x,y) = -p(x)y + q(x)$$

Minthogy $y' = f(x,y)$, ezért (1.6.23) teljesülése esetén az (1.6.22) egyenlet:

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.6.25}$$

lineáris elsőrendű differenciálegyenlet. A lineáris elsőrendű differenciálegyenlet multiplikátora tehát $e^{\int p(x)dx}$. Ezzel megszorozva az (1.6.25) egyenletet, egzakt egyenletet kapunk:

$$e^{\int p(x)dx} dy + e^{\int p(x)dx} [p(x)y - q(x)]dx = 0. \tag{1.6.26}$$

A keresett $U(x,y)$ kétváltozós függvényt, amelynek (1.6.26) a teljes differenciálja a

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = e^{\int p(x)dx} [p(x)y - q(x)]$$

összefüggésből kiindulva kapjuk meg:

$$U(x,y) = \int e^{\int p(x)dx} [p(x)y - q(x)]dx + \phi(y) \tag{1.6.27}$$

Mindkét oldalt y szerint differenciálva:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \int e^{\int p(x)dx} p(x)dx + \phi'(y) = e^{\int p(x)dx}$$

Innen:

$$\phi'(y) = e^{\int p(x)dx} - \int e^{\int p(x)dx} p(x)dx$$

$$\phi(y) = ye^{\int p(x)dx} - \int y\, e^{\int p(x)dx} p(x)dx \qquad (1.6.28)$$

Az (1.6.28) összefüggést az (1.6.27) formulába helyettesítve a

$$U(x,y) = y\, e^{\int p(x)dx} - \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx = C \qquad (1.6.29)$$

egyenletet kapjuk, amelyből y kifejezhető:

$$y = e^{-\int p(x)dx} c + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \qquad (1.6.30)$$

amely a lineáris elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldása.

Ily módon a multiplikátor segítségével a lineáris elsőrendű egyenlet integrálásának újabb módszerét nyertük.

Példa: Oldjuk meg az

$$y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$$

lineáris egyenletet! Ennek az egyenletnek az $\mu(x) = e^{-\int \operatorname{tg} x\, dx} = \cos x$ függvény multiplikátora. Ezzel megszorozva az egyenletet a

$$\cos x\, dy - (y \sin x + \cos^2 x)\, dx = 0$$

egyenletet kapjuk, amelynek bal oldala teljes differenciál. Itt most $P(x,y) = -y \sin x - \cos^2 x$, $Q(x,y) = \cos x$.

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = -y \sin x - \cos^2 x$$

$$U(x,y) = y \cos x - \int \cos^2 x\, dx + \phi(y)$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \cos x + \phi'(y) = \cos x, \quad \text{azaz} \quad \phi'(y) = 0,$$

$$\phi'(y) = C,$$

tehát:

$$U(x,y) = y \cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x = C$$

az egyenlet általános integrálja.

1.7 Az $y' = f(x,y)$ elsőrendű differenciálegyenlet közelítő (numerikus) megoldási módszerei

Az előzőekben ismertettük az elsőrendű közönséges differenciálegyenletek néhány típusát, amelyek kvadraturával megoldhatók. Kevés az olyan differenciálegyenlet, amelynek integrálgörbéi ilyen elemi módszerekkel meghatározhatók. Éppen ezért nagy jelentősége van a differenciálegyenletek közelítő megoldási módszereinek, amelyek a differenciálegyenletek igen széles osztályára alkalmazhatók, így a műszaki problémák megoldásában nagy szerepet játszanak. A matematikai irodalomban nagy számú közelítő módszer található. Ezek közül néhányat ismertetünk, amelyek leginkább használatosak.

Közelítő módszerekkel általában kezdetiérték feladatot oldunk meg, azaz keressük az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet olyan megoldását, amely eleget tesz az $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételnek is. Mielőtt hozzákezdenénk valamely közelítő módszer alkalmazásához, először meg kell győződnünk, hogy létezik-e egyáltalán megoldása az adott kezdetiérték feladatnak, s ha létezik, akkor csak egy ilyen megoldás van-e. Ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy viszgálnunk kell a megoldás egzisztenciáját és unicitását. Az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának létezése és a megoldás unicitása attól függ, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkezik az egyenlet jobb oldalán álló $f(x,y)$ függvény az (x_0,y_0) pont bizonyos környezetében.

Azok a feltételek, amelyeknek az $f(x,y)$ függvény eleget kell, hogy tegyen, az (x_0,y_0) pontot tartalmazó bizonyos tartományban, elég általánosak ahhoz, hogy a gyakorlatban igen sokszor teljesüljenek. Lényegében az kell, hogy teljesüljön, hogy az $f(x,y)$ függvény az (x_0,y_0) pont bizonyos környezetében folytonos és korlátos legyen, valamint, hogy létezzék és ugyancsak korlátos legyen $f(x,y)$ y szerinti parciális deriváltja. Ezt fejezi ki az alábbi ún. egzisztenciatétel, amelynek bizonyítása egyben iteratív numerikus módszert szolgáltat a közelítő megoldásra, mégpedig az egyik legjobb módszert.

1.7/a) A szukcesszív approximáció (fokozatos közelítés) módszere

Ha valamely

$$y' = f(x,y) \qquad (y = y(x), \quad a \leq x \leq b) \tag{1.7.1}$$

elsőrendű közönséges differenciálegyenlet

$$y(x_o) = y_o \qquad [x_o \in (a,b)] \tag{1.7.2}$$

kezdeti feltételt kielégítő folytonos megoldása létezik, akkor az

$y(x) = f(x,y(x))$ azonosságot integrálva az

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f[\xi, y(\xi)]\, d\xi \tag{1.7.3}$$

ún. integrálegyenletet kapjuk. Ha most az (1.7.3) egyenlet jobb oldalán $y(\xi) = y_o$ helyettesítést végzünk, akkor egy

$$y_1(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\xi, y_o)\, d\xi \tag{1.7.4}$$

függvényt kapunk, amelyre $y_1(x_o) = y_o$.

Helyettesítsük most a kapott $y_1(x)$ függvényt az (1.7.3) egyenlet jobb oldalába, ekkor egy másik

$$y_2(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f[\xi, y_1(\xi)]\, d\xi \tag{1.7.5}$$

függvényt nyerünk, amelyre ugyancsak $y_2(x_o) = y_o$. Folytatva az eljárást az

$$y_3(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f[\xi, y_2(\xi)]\, d\xi \tag{1.7.6}$$

függvényhez, majd az n-edik lépésben az

$$y_n(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f[\xi, y_{n-1}(\xi)]\, d\xi \tag{1.7.7}$$

függvényhez vezet az iteratív eljárás, ahol $y_n(x_o) = y_o$ stb.

A fenti eljárás során nyert függvények mindegyike átmegy az (x_o, y_o) ponton, azaz kielégítik az $y(x_o) = y_o$ kezdeti feltételt.

Kérdés, hogy az iterációval nyert $y_1(x), y_2(x), \ldots, \ldots, y_n(x)$ függvénysorozat konvergál-e valamilyen függvényhez és ha létezik ilyen határfüggvény, az megegyezik-e az (1.7.1) egyenlet $y(x)$ megoldásfüggvényével. Az egymás után nyert függvények behelyettesítése az (1.7.3) egyenletbe ugyanis teljesen önkényes eljárás.

A felvetett kérdésre a válasz attól függ, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkezik az (1.7.1) egyenlet jobb oldalán álló $f(x,y)$ kétváltozós függvény.

Tétel:
Az (1.7.1)egyenlet jobb oldalán álló $f(x,y)$ függvény, legyen az (x_o,y_o) pontot belsejében tartalmazó, $\bar{G}$ zárt tartományban korlátos, az x változóban folytonos és elégítse ki az

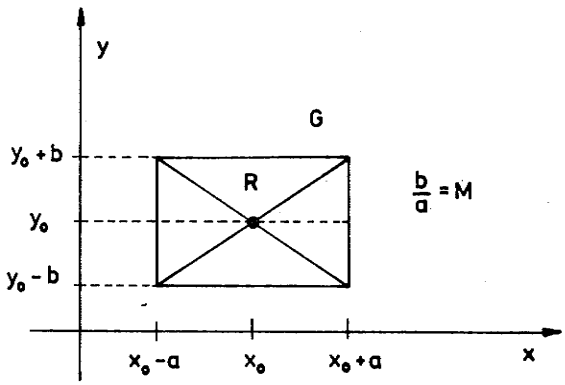
$$\left|f(x,y^{**}) - f(x,y^{*})\right| \leq K\left|y^{**} - y^{*}\right| \qquad (1.7.8)$$

ún. Lipschitz-féle feltételt. $[(x,y^{*}), (x,y^{**}) \in \bar{R}]$. Ekkor $\bar{G}$ tetszőleges (x_o,y_o) pontjához található olyan $x_o - a \leq x \leq x_o + a$ zárt intervallum, amelyben az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenletnek csak egyetlen olyan megoldása van, amelyre $y(x_o) = y_o$. (Picard-Lindelöf-féle egzisztencia-tétel.)

Bizonyítás:
Mivel $f(x,y)$ $\bar{G}$-ben korlátos, legyen M olyan szám, amelyre

$$|f(x,y)| \leq M. \qquad (1.7.9)$$

A $\bar{G}$ zárt tartományon belül válasszunk egy R téglalapot, amelynek oldalai az $(x_o - a,\ x_o + a)$, ill. $(y_o - b,\ y_o + b)$ intervallumok, ahol $\frac{b}{a} = M$.



1.10 ábra

Legyen most

$$y_o(x) = y_o, \qquad x \in (x_o - a, \ x_o + a). \tag{1.7.10}$$

$$y_1(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\xi, y_o) d\xi \tag{1.7.11}$$

Ekkor (1.7.9) alapján:

$$|y_1(x) - y_o| = \left| \int_{x_o}^{x} f(\xi, y_o) d\xi \right| \leq \int_{x_o}^{x} |f(\xi, y_o)| d\xi \leq$$

$$\leq M|x - x_o| \leq b; \quad \text{ha} \quad (|x - x_o| \leq a) \tag{1.7.12}$$

Az (1.7.5), (1.7.6), (1.7.7) összefüggések felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$|y_2(x) - y_o| = \left| \int_{x_o}^{x} f[\xi, y_1(\xi)] d\xi \right| \leq \int_{x_o}^{x} |f(\xi, y_1(\xi))| d\xi <$$

$$< M|x - x_o| \leq b$$

$$|y_n(x) - y_o| = \left| \int_{x_o}^{x} f[\xi, y_{n-1}(\xi)] d\xi \right| \leq \int_{x_o}^{x} |f(\xi, y_{n-1}(\xi))| d\xi \leq$$

$$\leq M|x - x_o| \leq b. \tag{1.7.13}$$

Az (1.7.12) - (1.7.13) összefüggések azt mutatják, hogy az $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ függvények mindegyikének görbéje az $\bar{R}$ téglalapban fut, azaz $[x, y_n(x)) \in \bar{R}$, ha $|x - x_o| < a$. Erre az észrevételre a Lipschitz-feltétel alkalmazhatósága szempontjából lesz szükségünk.

Vizsgáljuk most meg az $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, függvénysorozat egymásutáni tagjai közötti távolságot, amelyet az $(x_o - a, \ x_o + a)$ intervallumon két függvény közötti maximális eltérés értékével mérhetünk.

Az (1.7.4) összefüggés alapján

$$|y_1(x) - y_o| = \left| \int_{x_o}^{x} f(\xi, y_o) d\xi \right| \leq M|x - x_o| \tag{1.7.14}$$

ahol $|x - x_o| < a$.

Az (1.7.5) és (1.7.6) formulák alapján

$$\left| y_2(x) - y_1(x) \right| = \left| \int_{x_o}^{x} [f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_o)]\, d\xi \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_o}^{x} \left| f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_o) \right| d\xi.$$

Figyelembe véve az (1.7.8) Lipschitz-feltételt

$$\left| y_2(x) - y_1(x) \right| \leq K \int_{x_o}^{x} \left| y_1(\xi) - y_o \right| d\xi \qquad (1.7.15)$$

minden $x \in [x_o - a, x_o + a)$ pontban.

Innen:

$$\max_{x_o - a < x < x_o + a} \left| y_2(x) - y_1(x) \right| \leq K \cdot \max_{x_o - a < x < x_o + a} \left| y_1(x) - \right.$$

$$\left. - y_o \right| \left| x - x_o \right|.$$

Ha most $|x - x_o|$ oly kicsi, hogy $K\,|x - x_o| < 1$, akkor

$$\max_x \left| y_2(x) - y_1(x) \right| \leq \max_x \left| y_1(x) - y_o \right|, \quad (|x - x_o| < a)$$

Az (1.7.14) eredményét az (1.7.15) összefüggésbe helyettesítve:

$$\left| y_2(x) - y_1(x) \right| \leq K\, M \int_{x_o}^{x} \left| \xi - x_o \right| d\xi = M\, K \frac{|x - x_o|^2}{2} \qquad (1.7.16)$$

Tételezzük fel, hogy teljesül a

$$\max_{x_o - a < x < x_o + a} \left| y_n(x) - y_{n-1}(x) \right| \leq M\, K^{n-1} \frac{|x - x_o|^n}{n!} \qquad (1.7.17)$$

egyenlőtlenség, amely mint láttuk $n = 1$ és 2-re igaz.

Ekkor

$$\left| y_{n+1}(x) - y_n(x) \right| = \left| \int_{x_o}^{x} f(\xi, y_n(\xi)) - f(\xi, y_{n-1})(\xi))\, d\xi \right| \leq$$

$$\leq K \int_{x_o}^{x} \left| y_n(\xi) - y_{n-1}(\xi) \right| d\xi \qquad (1.7.18)$$

ezért

$$\max_{x_o - a < x < x_o + a} \left| y_{n+1}(x) - y_n(x) \right| \leq \frac{MK^n}{n!} \int_{x_o}^{x} \left| \xi - x_o \right|^n d\xi =$$

$$= M K^n \frac{|x - x_o|^{n+1}}{(n + 1)!} \qquad (1.7.19)$$

Indukcióval tehát azt kapjuk, hogy az (1.7.19) egyenlőtlenség tetszőleges n-re igaz.

Az (1.7.18) formulából az is következik, hogy

$$\max_{x_o-a<x<x_o+a} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq K \cdot \max_{x_o-a<x<x_o+a} |y_n(x) -$$

$$- y_{n-1}(x)| \cdot |x - x_o| \qquad (1.7.20)$$

tehát, ha $K|x - x_o| = h < 1$, akkor

$$\max_x |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq y_n(x) \leq h \cdot \max_x |y_n(x) - y_{n-1}(x)|$$

vagyis az y_o, $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ függvénysorozat egymásra következő tagjai egyre közelebb vannak egymáshoz a fenti távolság szerint. Ennek alapján várható, hogy ez a sorozat konvergál valamely $\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y(x)$ határfüggvényhez, vagyis a szukcesszív approximációra konvergens függvénysorozatot nyerünk. Valóban ez a helyzet, amit az (1.7.19) összefüggés alapján be is bizonyítunk.

Tekintsük az $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ sorozat tagjaiból képzett

$$y_o + [y_1(x) - y_o] + [y_2(x) - y_1(x)] + [y_3(x) - y_2(x)] +$$

$$+ \ldots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \ldots \qquad (1.7.21)$$

függvénysort. Ennek a sornak az n-edik részletösszege:

$$s_n(x) = y_n(x) \,. \qquad (1.7.22)$$

Ha ki tudjuk mutatni, hogy az (1.7.21) sor egyenletesen konvergens, akkor létezik a részletösszegei sorozatának határértéke a $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x) = y(x)$.

Az (1.7.19) formula alapján az (1.7.21) sor majorálható az

$$y_o + M|x - x_o| + M K \frac{|x - x_o|^2}{2!} + M K^2 \frac{|x - x_o|^3}{3!} + \ldots +$$

$$+ M K^n \frac{|x - x_o|^{n+1}}{(n + 1)!} + \ldots \qquad (1.7.23)$$

sorral. Bevezetve a $K|x - x_o| = h$ jelölést, az (1.7.23) sor az

$$y_o + \frac{M}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!} = y_o + \frac{M}{K}(e^h - 1) \qquad (1.7.24)$$

alakban írható. A sor minden h-ra egyenletesen konvergens, hiszen e^h soráról van szó. Létezik tehát az

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(y_o + \int_{x_o}^{x} f[\xi, y_{n-1}(\xi)]d\xi\right) \qquad (1.7.25)$$

határfüggvény.

Mivel az (1.7.24) egyenletesen konvergens, és a sor tagjai folytonos függvények, az $y(x)$ határfüggvény is folytonos.

Minthogy

$$\left|\int_{x_o}^{x} f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, y_{n-1}(\xi))d\xi\right| \leq K\int_{x_o}^{x}\left| y(\xi) - y_{n-1}(\xi)\right| d\xi \to 0 \quad \text{ha} \quad n\to\infty, \qquad (1.7.26)$$

ezért az

$$y_n(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))d\xi$$

egyenlőség akkor is igaz, ha mindkét oldalán elvégezzük az $n\to\infty$ határátmenetet, azaz

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi \qquad (1.7.27)$$

ami megegyezik az (1.7.3) összefüggéssel, vagyis $y(x)$ kielégíti az (1.7.1) egyenletet is. Ezzel az (1.7.1) egyenlet megoldásának egzisztenciáját kimutattuk.

Azt, hogy az (1.7.27) egyenletnek csak egyetlen folytonos (és egyben korlátos) megoldása van az $[x_o - a, x_o + a]$ intervallumban - azaz a megoldás unicitását - indirekt módon igazoljuk. Tegyük fel, hogy volna két olyan megoldás, amely az (1.7.27) egyenletet kielégíti, $y(x)$ és $z(x)$.

Ekkor

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi \quad \text{és}$$

$$z(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\xi, z(\xi))d\xi .$$

Mivel $(x,y(x))\in\bar{R}$ és $(x,z(x))\in\bar{R}$ ha $x\in(x_o - a, x_o + a)$, a Lipschitz-feltétel alapján:

$$|y(x) - z(x)| \leq K \int_{x_o}^{x} |y(\xi) - z(\xi)| d\xi$$

azaz

$$\max_{x_o-a<x<x_o+a} |y(x) - z(x)| \leq K \cdot \max_{x_o-a<\xi<x_o+a} |y(\xi) -$$

$$- z(\xi)| \cdot |x_o - x_o| \leq K h \max_{x_o-a<\xi<x_o+a} |y(\xi) - z(\xi)|$$

ahol $K h < 1$. Ez azonban csak úgy lehet, ha

$$\max_{x_o-a<x<x_o+a} |y(x) - z(x)| = 0$$ vagyis $y(x)$ azonos $z(x)$-szel.

Megjegyezzük, hogy mivel az iteráció vég nélkül folytatható az $y(x)$ határfüggvény felírható:

$$y(x) = y_n(x) + [y_{n+1}(x) - y_n(x)] + [y_{n+2}(x) - y_{n+1}(x)] + \ldots$$

alakban.

Felhasználva az (1.7.19) egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{M}{K}\left[\frac{|x - x_o|^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{|x - x_o|^{n+2}}{(n+2)!} + \right] \ldots =$$

$$= \frac{M}{K}|x - x_o|^n \left[\frac{|x - x_o|}{(n+1)!} + \frac{|x - x_o|^2}{(n+2)!} + \ldots \right. \qquad (1.7.28)$$

ami lehetővé teszi annak megállapítását, hogy az n-edik közelítő megoldás legfeljebb mekkora hibával közelíti a még ismeretlen $y(x)$ pontos megoldást.

Megjegyezzük még, hogy a tételben szereplő (1.7.8) Lipschitz-feltétel mindig teljesül, ha az $f(x,y)$ függvénynek az $\bar{R}$ téglalap minden pontjában létezik a

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ parciális deriváltja és ez $\bar{R}$-ben korlátos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} < K.$$

Ugyanis a Lagrange-féle középérték-tételt alkalmazva:

$$f(x,y^{**}) - f(x,y^{*}) = (y^{**} - y^{*}) \frac{\partial f(x,y^{*} + \vartheta(y^{**} - y^{*}))}{\partial y}$$

(ahol $0<\vartheta<1$), amiből (1.7.8) következik.

Az $f(x,y)$ függvény y szerinti parciális deriváltjának létezése és korlátossága erősebb kikötés, mint az (1.7.8) feltétel, amely a tétel bizonyításában elegendő.

1. Példa:

A szukcesszívapproximáció módszerének alkalmazásával határozzuk meg az

$$y' = xy^2 + 1 \tag{1.7.29}$$

egyenlet közelítő megoldását az $x_o = 0$, $y_o = y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. (Ez az egyenlet az ismertetett elemi módszerekkel nem oldható meg.)

Az (1.7.3) egyenlet most a következő alakot ölti:

$$y(x) = \int_0^x (\xi \cdot y^2(\xi) + 1)d\xi . \tag{1.7.30}$$

Tegyünk az integrandusban $y_o = 0$-t, ekkor

$$y_1(x) = \int_0^x dx = x$$

Az $y_1(x) = x$ függvényt helyettesítve az (1.7.30) egyenletbe:

$$y_2(x) = \int_0^x (\xi \cdot \xi^2 + 1)d\xi = \int_0^x (\xi^3 + 1)d\xi = \frac{x^4}{4} + x$$

Az $y_2(x)$ függvényt az (1.7.30) formula integrandusába helyettesítve:

$$y_3(x) = \int_0^x [\xi (\frac{\xi^4}{4} + \xi)^2 + 1] d\xi = \frac{x^{10}}{160} + \frac{x^7}{14} + \frac{x^4}{4} + x$$

$$\vdots$$

A keresett $y(x)$ megoldás közelítését tehát hatványsor alakjában kapjuk.

2. Példa

Keressük szukcesszív approximációval az

$$y' = \frac{1}{2}xy$$

differenciálegyenlet közelítő megoldását az $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett!
(Olyan példát választottunk, amelynek pontos megoldása előállítható, abból a célból, hogy a közelítés pontosságát szemléltethessük.)

Az egyenlet megoldása:

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int x\,dx + \ln c, \quad \text{azaz}$$

$$y(x) = c\cdot e^{\frac{x^2}{4}}, \text{ ahol az } y(0) = 1 \text{ kezdeti feltételből } c = 1.$$

A szukcesszív approximációt alkalmazva:

$$y_0 = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \xi\cdot 1\,d\xi = 1 + \frac{x^2}{4}$$

$$y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \xi\left(1 + \frac{\xi^2}{4}\right)d\xi = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2$$

$$y_3(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \xi\left[1 + \frac{\xi^2}{4} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\xi^2}{4}\right)^2\right]d\xi =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^3$$

$$y_4(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{4}\right)^4$$

A negyedik közelítő megoldás numerikus értéke az $x = 1$ helyen $y_4(1) = 1{,}2841$.

Az $y(x) = e^{\frac{x^2}{4}}$ függvény értéke az $x = 1$ helyen: $y(1) = 1{,}2840$.

Látható, hogy már az iteráció negyedik lépése három tizedesre pontos megoldást szolgáltatott, tehát az eljárás gyorsan konvergál.

1.7/b) A véges differenciák módszere elsőrendű közönséges differenciálegyenletek közelítő megoldása. Euler-féle poligon

A továbbiakban az $y' = f(x,y)$; $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték feladat közelítő megoldására néhány numerikus módszert ismertetünk, amelyek számítógépre jól programozhatók.

Az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet az integrálgörbék egyparaméteres seregének egy általános tulajdonságát fejezik ki: az (x,y) ponton áthaladó integrálgörbe ezen pontbeli érintőjének iránytangense $f(x,y)$. Ha az $f(x,y)$ függvény az (x_0,y_0) pont bizonyos környezetében eleget tesz az 1. tétel feltételeinek, azaz a megoldás egzisztenciája és unicitása elméletileg biztosított, akkor a keresett integrálgörbe grafikusan is megszerkeszthető.

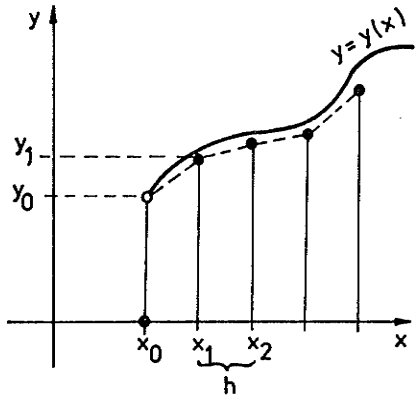
Az $y' = f(x,y)$ az xy sík adott T tartományának minden pontjához egy irányt rendel (iránymező), amely a kérdéses ponton áthaladó integrálgörbe érintőjének irányával egyezik meg, s amelyet egy kis vonalelemmel jelölhetünk ki. A megoldásgörbe keresése céljából az (x_0,y_0) pontot tartalmazó T tartományban megrajzoljuk az $y' = f(x,y) = c$ egyenletű görbéket, az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet "izoklináit". Az (x_0,y_0) ponton áthaladó integrálgörbe közelítő meghatározása céljából az (x_0,y_0) pontban kijelöljük az $f(x_0,y_0)$ iránytangensű vonalelemet és ezt meghosszabbítjuk mindaddig, míg metszi az (x_0,y_0)-hoz legközelebbi izoklinát. Legyen a metszéspont (x_1,y_1). Itt megrajzoljuk az $f(x_1,y_1)$ iránytangensű vonalelemet és ezt meghosszabbítjuk addig, amíg metszi a következő legközelebbi izoklinát. Legyen ez a metszéspont (x_2,y_2) stb. Ily módon egy egyenes szakaszokból álló poligont az ún. Euler-féle törött vonalat kapjuk, amely természetesen annál jobban közelíti az ismeretlen $y(x)$ integrálgörbét, minél sűrűbben rajzoltuk fel az izoklinákat.

Előfordulhat, hogy az izoklinák megrajzolása igen körülményes. Ezért a gyakorlatban rendszerint úgy járunk el, hogy az x_0 pontból indulva választunk egy kicsiny h távolságot és az $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ... osztópontokon merőleges egyeneseket rajzolva az $x_0 \leq x \leq x_0 + h = x_1$ szakasz felett az $y(x)$ integrálgörbét az

$$y = y_0 + f(x_0,y_0)(x - x_0) = y_0 + f(x_0,y_0)h \qquad (1.7.31)$$

---

1) Picard-Lindelöf-féle egzisztencia és unicitás.



1.11 ábra

érintőegyenessel helyettesítjük, amely az $x_1 = c$ egyenest valamely y_1 pontban metszi:

$$y_1 = y_o + f(x_o,y_o)h$$

Ezután az $x_1 \leq x \leq x_1 + h = x_2$ intervallumon az

$$y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)h$$

közelítést alkalmazzuk, amelyet folytatva a k+1-edik lépésben

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k,y_k)h \quad \text{közelítést nyerjük,} \qquad (1.7.32)$$

ahol

$$x_k = x_o + kh.$$

Ily módon az iránytangenseket csak az (x_k,y_k) $(k = 0,1,2,\ldots)$ pontokban kell kiszámítani. Azt várjuk, hogy minél kisebb a h távolság, azaz minél sűrűbb a felosztás, annál jobban közelíti a poligon a keresett y(x) integrálgörbét, hiszen az (1.7.31) formulából nyerhető

$$f(x_o,y_o) = y'(x_o) = \frac{y - y_o}{x - x_o} = \frac{y - y_o}{h}$$

összefüggés csak közelítés, mivel

$$y'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{y - y_o}{h}$$

<u>Példa:</u>
Határozzuk meg az

$$y' = xy^2 + 1, \quad x_o = 0, \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladat közelítő megoldását Euler-féle poligonnal.

Az egyenlet grafikus megoldását a [0,1] intervallumban végezzük. Osszuk fel a [0,1] intervallumot az $x_o = 0$; $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 0{,}75$ és $x_4 = 1$ pontokkal négy részre, azaz legyen $h = 0{,}25$ (1.11 ábra).

Ekkor, mivel $y_o = 0$,

$$y_1 = y_o + f(x_o,y_o)(hx) = 1\cdot 0{,}25 = 0{,}25$$

$$f(x_1y_1) = f(0{,}25,\ 0{,}25) = 0{,}25\cdot 0{,}25^2 + 1 = 1{,}016.$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)h = 0{,}25 + 1{,}016\cdot 0{,}25 = 0{,}504$$

$$f(x_2,y_2) = f(0{,}5;\ 0{,}504) = 0{,}5\cdot 0{,}504^2 + 1 = 1{,}127$$

$$y_3 = y_2 + f(x_2,y_2)h = 0{,}504 + 1{,}127\cdot 0{,}25 = 0{,}786$$

$$f(x_3,y_3) = f(0{,}75;\ 0{,}786) = 0{,}75\cdot 0{,}786^2 + 1 = 1{,}463$$

$$y_4 = y_3 + f(x_3y_3)h = 0{,}786 + 1{,}463\cdot 0{,}25 = 1{,}152$$

Az 1.11 ábra mutatja a számított közelítő integrálgörbét, az Euler-féle poligont, amelynek értéke az $x = 1$ helyen: $y_4(1) = 1{,}152$.

Az $y(x)$ "valódi" integrálgörbe értékének ismerete nélkül is el tudjuk dönteni, hogy a kapott poligon az integrálgörbe alatt halad, mivel az $y(x)$ integrálgörbe konvex (alulról domború). Ugyanis az $y' = f(x,y) = xy^2 + 1$ függvényt az implicit függvény deriválási szabálya alapján x szerint differenciálva:

$$y'' = y^2 + 2xy\cdot y' = y^2 + 2xy(xy^2 + 1) > 0$$

ha $x > 0$ és $y > 0$, vagyis az $y(x)$ integrálgörbe konvex, ilyenkor a poligon szerkesztési menetéből következik, hogy az $y(x)$ görbe alatt halad. (Konkáv $y(x)$ integrálgörbe esetében a poligon az integrálgörbe felett halad, tehát a ténylegesnél nagyobb értékeket szolgáltat.)
Az eljárás konvergenciájának bizonyítására és az elkövetett hiba becslésére vonatkozólag a [5] irodalomra utalunk.

1.7/c) Runge és Kutta módszere

Az Euler-poligonnál lényegesen jobb közelítést kapunk a keresett integrálgörbére (ugyanannyi számolással) az ún. Runge-Kutta-módszer alkalmazásával, amelynek legfontosabb változata a következő.

A $h = x_1 - x_o$ lépésköz megválasztása után $y(x_1) = y(x_o + h)$ közelítésére az

$$y(x_1) \approx y_1 = y_o + \frac{h}{6}(K_1^{(o)} + 2K_2^{(o)} + 2K_3^{(o)} + K_4^{(o)}) \tag{1.7.33}$$

formulát alkalmazzuk, ahol

$$K_1^{(o)} = f(x_o, y_o); \quad K_2^{(o)} = f(x_o + \frac{h}{2}, \; y_o + \frac{K_1^{(o)} h}{2}) \tag{1.7.34}$$

$$K_3 = f(x_o + \frac{h}{2}, \; y_o + \frac{K_2^{(o)} h}{2}), \quad K_4 = f(x_o + h, \; y_o + K_3^{(o)} h).$$

Az y_1 érték kiszámítása után az $y(x)$ integrálgörbe $x_2 = x_o + 2h$ pontbeli y_2 közelítését számítjuk. Általában, ha az $y(x_i) \approx y_i$ közelítő értéket már ismerjük, akkor

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}) =$$

$$= y_i + \frac{h}{6} \Delta y_i \tag{1.7.35}$$

ahol:

$$K_1^{(i)} = f(x_i, y_i); \quad K_2^{(i)} = f(x_i + \frac{h}{2}, \; y_i + \frac{K_1^{(i)} h}{2})$$

$$K_3^{(i)} = f(x_i + \frac{h}{2}, \; y_i + \frac{K_2^{(i)} h}{2}); \quad K_4^{(i)} = f(x_i + h, \; y_i + K_3^{(i)} h)$$

$$(i = 1, 2, \ldots)$$

Ez a közelítés annyira jó, hogy pl. az (1.7.35) formula jobb oldalán álló kifejezés megegyezik az $y(x_i + h)$ függvény h hatványai szerint haladó Taylor-sora h^4-ig bezárólag vett részletösszegével.

Megemlítjük, hogy a Runge-Kutta-módszer numerikus integrálási eljárás, amely abban az esetben, ha az $f(x,y)$ függvény csak x-től függ, a Simpson-formula sorozatos alkalmazásával egyezik meg.

Az (1.7.35) formula mutatja, hogy e módszernél az $y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ különbségeket a $K_1^{(i)}$, $K_2^{(i)}$, $K_3^{(i)}$ és $K_4^{(i)}$ mennyiségek súlyozott számtani középértéke segítségével közelítjük, azaz a h lépésközt egy átlagos iránytangenssel szorozzuk.

A módszer számítógépre kiválóan alkalmas.

Példa

Alkalmazzuk a Runge-Kutta-módszert az

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladat megoldására, ha $h = 0,1$.

Számítsuk ki y_1 -et!

$$K_1^{(o)} = (0 + 1) = 1$$

$$K_2^{(o)} = 0,05 + (1 + 0,05) = 1,1$$

$$K_3^{(o)} = 0,05 + (1 + 0,055) = 1,105$$

$$K_4^{(o)} \quad 0,1 + (1 + 0,1105) = 1,2105$$

$$y_1 = 1 + \frac{0,1}{6}[1 + 2\cdot 1,1 + 2\cdot 1,105 + 1,2105] = 1,1103$$

A további számítási értékeket az olvasó analóg módon meghatározhatja.

1.7/d) Integrálás sorbafejtéssel

A differenciálegyenletek integrálásánál a hatványsorokat éppen úgy alkalmazzák, mint a függvények integrálásánál. Feltesszük, hogy a differenciálegyenlet $y(x)$ megoldása analitikus függvény, tehát hatványsorba fejthető az $x = x_o$ pontnak egy környezetében:

$$y = a_o + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_1)^2 + \ldots +$$

$$+ a_n(x - x_o)^n + \ldots$$

Ezt a sort és deriváltját az

$$y' = f(x,y)$$

differenciálegyenletbe helyettesítve olyan azonosságot kapunk, amelyből az együtthatók összehasonlításával megkapjuk a sor együtthatóit, tehát a megoldás Taylor-sorát. Ha a sorból elég sok tagot veszünk, általában a megoldás függvény elég jó közelítését nyerjük.

A mondottakat egy példán szemléltetjük, amelynek közelítő megoldását már szukcesszív-approximációval is előállítottuk.

Tekintsük az

$$y' = xy^2 + 1$$

egyenletet. Legyen a kezdeti feltétel: $x_o = 0$ helyen $y(0) = 0$. Tegyük fel, hogy az y megoldás a 0 pont körül Taylor-sorba fejthető:

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

A kezdeti feltételből adódik, hogy $a_o = 0$.

A sort deriválva és behelyettesítve az egyenletbe a következő összefüggés adódik:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots = x(a_1x +$$

$$+ a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots)^2 + 1 = x[a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 +$$

$$+(a_2^2 + 2a_1a_3)x^4 + (2a_1a_4 + 2a_2a_3)x^5 + \ldots] + 1$$

Az x azonos hatványainak együtthatóit egyenlővé téve, kapjuk:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = a_6 = 0,$$

$$a_7 = \frac{1}{14}, \ldots$$

Tehát a megoldást kifejező hatványsor így kezdődik:

$$y = x + \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{14} + \ldots$$

ami megegyezik a szukcesszív approximációval nyert eredménynyel.

1.8 Szinguláris pontok

Az $y' = f(x,y)$, $y(x_o) = y_o$ kezdetiérték feladatnak mint láttuk, csak akkor van egyértelmű megoldása, ha a differenciálegyenlet jobb oldalán álló $f(x,y)$ függvény az (x_o,y_o) pont bizonyos környezetében bizonyos feltételeknek tesz eleget, amelyeket az 1.7.8 tételben ismertettünk. E feltételek nem minden esetben teljesülnek. Ilyenkor előfordulhat, hogy egy (x_o,y_o) ponton az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet egyetlen integrálgörbéje sem halad át, vagy pedig egynél több integrálgörbe megy át rajta. Az ilyen (x_o,y_o) pontokat az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet szinguláris (kivételes) pontjainak nevezzük.

Szinguláris pontok rendszerint olyan differenciálegyenleteknél fordulnak elő, amelyekben

$$f(x,y) = \frac{g(x,y)}{h(x,y)} \tag{1.8.1}$$

alakú, azaz két függvény hányadosa. Ha $g(x,y)$ és $h(x,y)$ az (x_0,y_0) pont környezetében folytonosak, de az (x_0,y_0) pontban zérussá válnak és hányadosuknak nincs véges határértéke az $x \to x_0$, $y \to y_0$ esetben, akkor $f(x,y)$ az (x_0,y_0) pontban a nem korlátos, tehát nem tesz eleget az 1. tétel feltételeinek.

Az alábbiakban néhány egyszerű példán szemléltetjük a szinguláris pontok legfontosabb típusait.

a) Tekintsük az

$$y' = \frac{y}{x} \qquad (y = y(x),\ -\infty < x < \infty) \tag{1.8.2}$$

differenciálegyenletet, amely szeparálható egyenlet, amelynek általános megoldása:

$$y = cx \qquad (c \neq 0 \text{ állandó})$$

Az $(x = 0,\ y = 0)$ kezdőponton valamennyi integrálgörbe áthalad. Az $x > 0$ félsík valamint az $x < 0$ félsík minden pontján egyetlen integrálgörbe halad át, az y tengelynek az origótól különböző pontjain egyetlen integrálgörbe sem halad át (1.12 ábra).

Mivel az origón az összes integrálgörbe áthalad a $(0,0)$ pontot az (1.8.2) differenciálegyenlet csomópontjának nevezzük. Magát az y tengelyt, amelynek egyetlen olyan pontja sincs, amelyen egy integrálgörbe halad át, az egyenlet szinguláris egyenesének nevezzük.

b) Vizsgáljuk most az

$$y' = -\frac{x}{y} \qquad [y = y(x),\ -\infty < x < \infty] \tag{1.8.3}$$

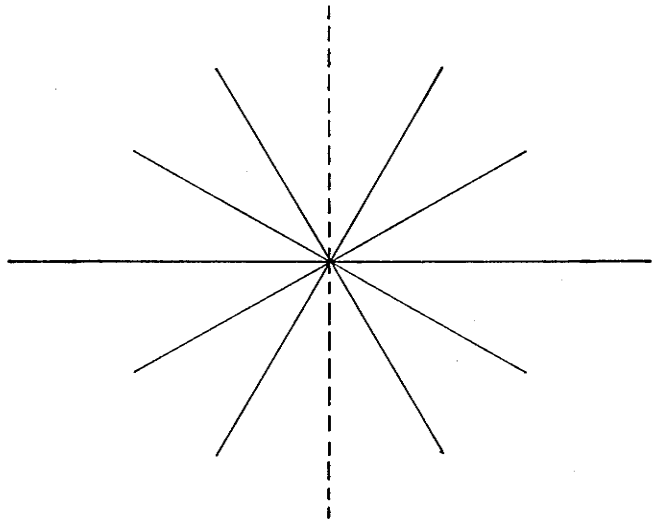
egyenletet. Az egyenlet általános megoldása

$$\int y\,dy = -\int x\,dx + c, \quad \text{azaz az}$$

$$x^2 + y^2 = c \quad , \quad (c > 0 \text{ állandó})$$

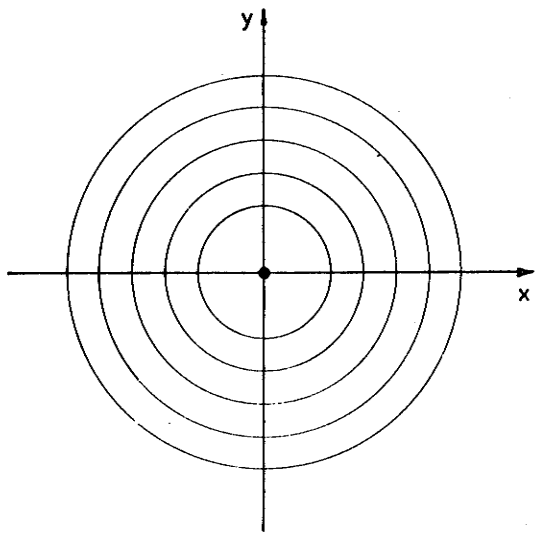
---

[1] Picard-Lindelöf-féle egzisztencia és unicitás tétel.



1.12 ábra

origó középpontú körsereg. Ahhoz, hogy a megoldásgörbe kör legyen $c > 0$ kell legyen, az origón tehát egyetlen integrálgörbe sem halad át. Az origó az (1.8.3) differenciálegyenlet egyetlen szinguláris pontja, amelyet centrumnak nevezünk.



1.13 ábra

c) Tekintsük most az

$$y' = \frac{x}{y} \qquad (y = y(x), \quad -\infty < x < \infty) \qquad (1.8.4)$$

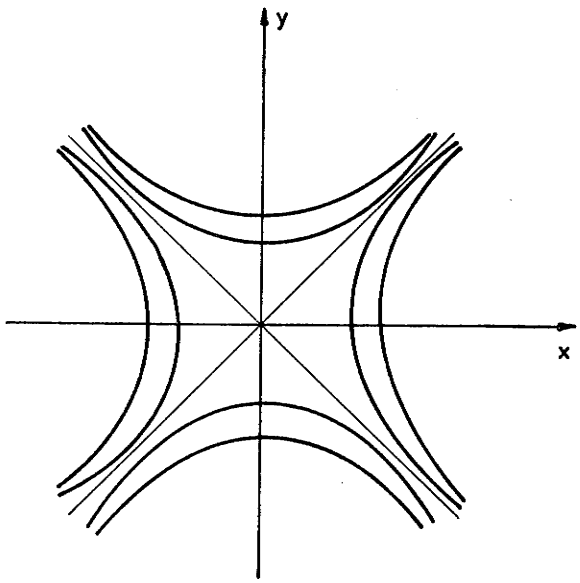
egyenletet, amely az előző példától csak előjelben különbözik, mégis más jellegű szingularitással találkozunk.

Az (1.8.4) egyenlet általános megoldása:

$$\int y \, dy = \int x \, dx + c \, , \quad \text{azaz}$$

$$y^2 - x^2 = c \qquad (c \text{ tetszőleges állandó}).$$

Ha $c = 0$, akkor $y = \pm x$, egyenespár, $c \neq 0$ esetén pedig ezen egyenespár mint aszimptoták által meghatározott két-két szemközti szögtérben futó konjugált hiperbolasereg a megoldásgörbék halmaza (1.14 ábra).



1.14 ábra

Az origót kivéve a sík minden pontján egyetlen integrálgörbe megy át, az origón pedig két integrálgörbe (az $y = \pm x$ egyenespár) halad át. Az origó most az (1.8.4) differenciálegyenlet nyeregpontja.

d) Vizsgáljuk most az

$$y' = \frac{y - x}{y + x} \qquad (y = y(x) \, , \quad -\infty < x < \infty) \qquad (1.8.5)$$

differenciálegyenletet, amely - mint már láttuk - homogén fokszámú egyenletté alakítható, ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$.

Az (1.8.5) egyenlet általános megoldása:

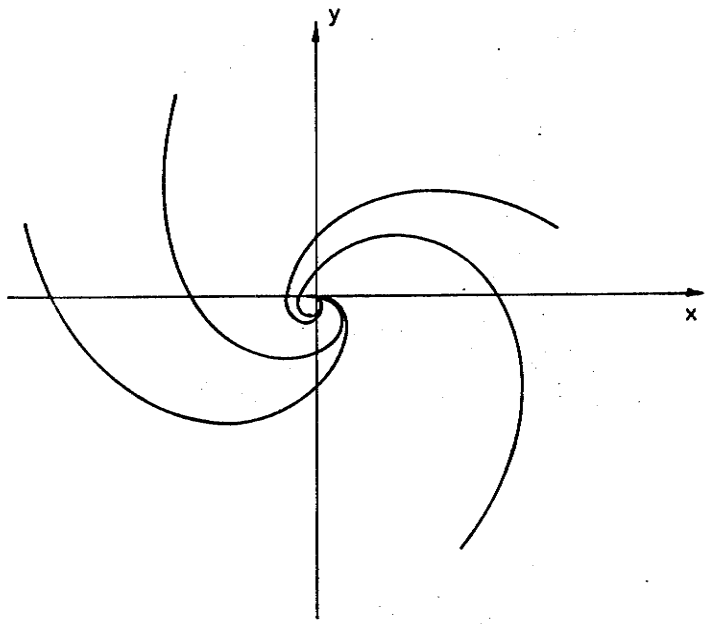
$$\ln(x^2 + y^2)^{1/2} = - \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + c \quad \text{(c tetszőleges állandó).}$$

Polárkoordinátákat bevezetve: $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$, a megoldás:

$$\ln \rho = - \varphi + c \tag{1.8.6}$$

$$\rho = c^* e^{-\varphi}$$

Tehát az integrálgörbék logaritmikus spirálisok. Az origó ennél az egyenletnél speciális helyzetű, mivel egyetlen integrálgörbe sem halad át rajta, de bármely integrálgörbe futó pontja tetszőlegesen megközelíti, ha $c \to 0$, vagy $\varphi \to \infty$ Az origó az (1.8.5) differenciálegyenlet fókusza (1.15 ábra).



1.15 ábra

1.9 Néhány egyszerű műszaki feladat az elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazására

Példák

1. Az ℓ_o hosszúságú q keresztmetszetű acélhuzalt egy P értékig fokozatosan növekvő erő nyújt. Határozzuk meg a nyújtási munkát! A huzalnak a P erő hatására bekövetkezett $\Delta\ell$ megnyúlását a

$$\Delta\ell = k\frac{P}{q}\ell_o \qquad (1.9.1)$$

képlet határozza meg, ahol k a nyúlási együttható, ℓ_o a huzal eredeti hossza. Elemi folyamatot vizsgálva azt kapjuk, hogy

$$d\ell = \frac{k\ell_o}{q}dP. \qquad (1.9.2)$$

Felhasználva, hogy az elemi munka:

$$dL = Pd\ell,$$

vagyis, az (1.9.2) egyenletből adódik a folyamat differenciálegyenlete

$$dL = \frac{k\ell_o}{q}P\,dP. \qquad (1.9.3)$$

Ha az (1.9.3) egyenletet integráljuk, megkapjuk az általános megoldást:

$$L = \frac{k\ell_o}{2q}P^2 + C.$$

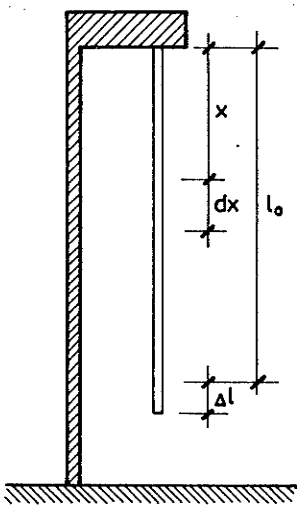
Az integrálási állandó meghatározásához használjuk fel a kezdeti feltételt: ha $P = 0$, akkor $L = 0$.

$$0 = \frac{k\ell_o}{2q}\cdot 0 + C \quad \text{azaz} \quad C = 0.$$

A keresett nyújtási munka:

$$L = \frac{k\ell_o}{2q}P^2.$$

2. Egyik végén felfüggesztett ℓ_o(m) hosszú acélhuzalt saját súlya terheli (1.16 ábra).



1.16 ábra

Határozzuk meg a huzal megnyúlását! Az acél fajsúlya γ kN/m^3. A P húzóerő nagysága a keresztmetszet helyétől függően változik. Ez a húzóerő a huzal lejjebb levő részének a súlyával egyenlő. Ezért a huzal különböző elemei különböző-képpen nyúlnak meg. A rögzítés helyétől x távolságra levő pontban a dx elemre a

$$\frac{P}{G} = \frac{\ell_o - x}{\ell_o} \qquad (1.9.4)$$

arányból meghatározandó P húzóerő hat, ahol G az egész huzal súlya.

Az (1.9.4) egyenletből

$$P = \frac{G}{\ell_o}(\ell_o - x)$$

a huzalnak a P (kp) húzóerő hatására $\Delta\ell$ (m) megnyúlása:

$$\Delta\ell = k\frac{P}{q}\ell ,$$

ahol k a nyújtási együttható, q pedig a keresztmetszet m^2-ben.

A dx elem megnyúlása:

$$d\ell = k\frac{P}{q}dx$$

vagyis

$$d\ell = \frac{kG}{\ell_o q}(\ell_o - x)dx \qquad (1.9.5)$$

Másrészt

$$G = \frac{\gamma \ell_o q}{1000} \text{ (kp)}.$$

Ha ezt az utóbbi kifejezést az (1.9.5) egyenletbe helyettesítjük, megkapjuk a folyamat differenciálegyenletét:

$$d\ell = \frac{k\gamma}{1000}(\ell_o - x)dx.$$

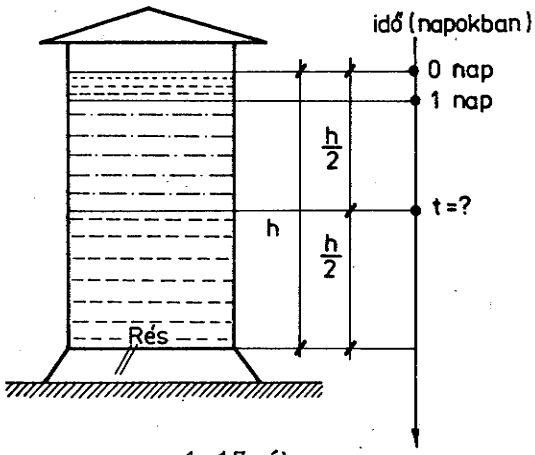
Integrálással adódik a teljes megnyúlás:

$$\ell = \frac{k\gamma}{1000}\int_o^{\ell_o} (\ell_o - x)dx ,$$

tehát

$$\ell = \frac{k\gamma}{2000}\ell_o^2.$$

3. Egy folyadékkal teli henger alakú tartály alján rés keletkezett (1.17 ábra).



1.17 ábra

A folyadék kifolyásának sebességét vegyük arányosnak a folyadékoszlop tartálybeli magasságával. Határozzuk meg, mennyi idő alatt folyik ki a tartályból a folyadék fele, ha tudjuk, az első napon 10% volt a veszteség.

Legyen R a tartály sugara, h a magassága, x a tartályban levő folyadék magassága t nap elteltével.

Ekkor a t időpontban a tartályban levő folyadék térfogata

$$R^2\pi x,$$

a térfogat változásának sebessége pedig

$$R^2\pi \frac{dx}{dt} .$$

A feladat feltételei szerint ez a mennyiség az x magassággal arányos, s így a feladat differenciálegyenlete a következő:

$$\pi R^2 \frac{dx}{dt} = kx,$$

ahol k a rés méretétől függő arányossági tényező.

A változók szétválasztásával a

$$\frac{\pi R^2}{x} dx = kdt$$

egyenlőséghez jutunk, majd integrálás után megkapjuk az általános megoldást:

$$\pi R^2 \ell n x = kt + C \qquad (1.9.6)$$

A $t = 0$ időpontban a tartály tele van (kezdeti feltétel), azaz $x = h$. Ebből következik, hogy

$$\pi R^2 \ell n h = C,$$

és az (1.9.6) egyenlet a

$$\pi R^2 \ell n\, x = kt + \pi R^2 \ell n\, h$$

vagyis a

$$\pi R^2 \ell n \frac{x}{h} = kt$$

alakot vesz fel.

A kiegészítő feltétel szerint, ha $t = 1$, akkor $x = \frac{9}{10} h$, ennek megfelelően az arányossági tényező

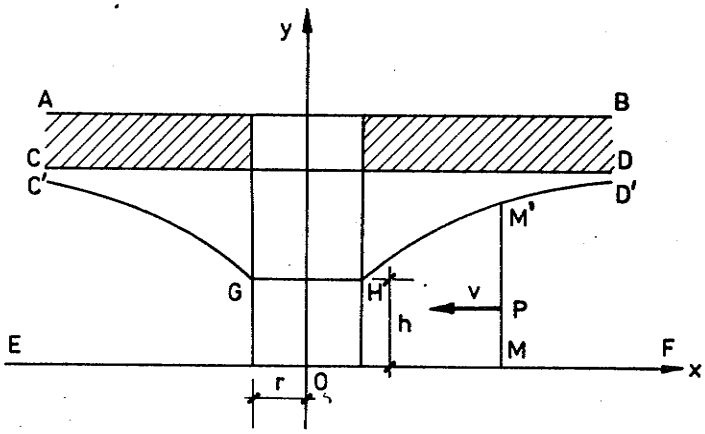
$$k = \pi R^2 \ell n \frac{9}{10} .$$

Bennünket az $x = \frac{h}{2}$ értékhez tartozó idő érdekel:

$$t = \frac{\pi R^2 \ln \frac{x}{h}}{k} = \frac{\pi R^2 \ln \frac{x}{h}}{\pi R^2 \ln \frac{9}{10}} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{9}{10}} \approx 6{,}57 \quad \text{(nap)}.$$

Tehát ahhoz, hogy a feladatban szereplő résen a tartályban levő folyadék fele kifolyjék, 6 napra és 14 órára van szükség.

4. Határozzuk meg annak a görbének az egyenletét, amelyet a talajvíz szintje alkot egy olyan hengeres (kerek) kút közelében, amely a vízátnemeresztő talajszintig terjed (1.18 ábra).



1.18 ábra

Legyen AB a föld felszíne. CD a talajvíz felszíne a kút készülte előtt. EF a vizet át nem eresztő réteg, amely alulról határolja a talajvíz áramlását. A kútfúrás után a talajvíz szintjének alakulását a C' GHD' görbe szemlélteti.

A differenciálegyenlet felállításához a következő tapasztalati tényt kell ismernünk: a víz áramlási sebessége valamely P pontban arányos a P pont felett levő vízszinti M' pontban levő érintő iránytangensével. Legyen a kút tengely y tengely, az x tengely pedig a vízátnemeresztő réteg szintje.

Ha az M' pont koordinátái x és y, akkor a P pontbeli áramlási sebesség

$$v = ky',$$

ahol k a talaj vízáteresztő képességétől függő tényező. Jelöljük az x alapkörsugarú és y magasságú körhenger palástján keresztül az időegység alatt átfolyó vízmennyiséget Q-val. Ez a mennyiség a hengerpalást $2\pi x \cdot y$ felületének és a sebességnek

$$Q = 2\pi x.y.ky'$$

szorzatával egyenlő. Ez a talajvíz szintjét meghatározó differenciálegyenlet, mert bármekkora x sugarú hengerpaláston át mindig Q mennyiségű víz folyik át.

Megoldása a változók szétválasztásával történik. $2\pi kx$ értékkel való osztás után ugyanis

$$\frac{Q}{2\pi k} \cdot \frac{dx}{x} = y\,dy\,.$$

Integrálva

$$\frac{y^2}{2} = \frac{Q}{2\pi k}\,\ell n\,x + \frac{C}{2}\,,$$

kettővel szorozva

$$y^2 = \frac{Q}{\pi k}\,\ell n\,x + C. \qquad (1.9.7)$$

A tetszőleges C állandó értéke a kútban levő víz magasságából határozható meg. Ha a kút sugara r, és a benne levő víz magassága h, akkor a függvény az $x = r$ helyen $y = h$ értéket vesz fel, tehát

$$h^2 = \frac{Q}{\pi k}\,\ell n\,r + C,$$

s ebből

$$C = h^2 - \frac{Q}{\pi k}\,\ell n\,r.$$

Az (1.9.7) megoldásfüggvénybe helyettesítve

$$y^2 = \frac{Q}{\pi k}\,\ell n\,x - \frac{Q}{\pi k}\,\ell n\,r + h^2 = \frac{Q}{\pi k}\,\ell n\,\frac{x}{r} + h^2.$$

Tehát a talajvíz szintjét leíró függvény:

$$y^2 = \frac{Q}{\pi k}\,\ell n\,\frac{x}{r} + h^2.$$

II. FEJEZET

Magasabbrendű differenciálegyenletek

2.1 Egzisztencia- és unicitás-tétel magasabbrendű egyenletekre

Az első fejezetben bevezetett jelölésekhez hasonlóan a továbbiakban is a független változót x-szel, az ismeretlen függvényt y-nal, annak deriváltjait y', y'',...,$y^{(n)}$-nel jelöljük, amelyek mind az x változó függvényei.

Definíció:
n-edrendű differenciálegyenleten

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0 \qquad (2.1.1)$$

alakú függvényegyenletet értünk, ahol F mindegyik argumentumának folytonos függvénye és mindenesetre függ az n-edik deriválttól, $y^{(n)}$-től. (A többi argumentum közül egy vagy több hiányozhat a (2.1.1) egyenletből).

Olyan x_o, $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = y'_o,\dots,y^{(n)}(x_o) = y_o^{(n)}$ értékek környezetében, amelyek eleget tesznek az

$$F(x_o,y_o,y'_o,\dots,y_o^{(n)}) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)_{x=x_o,y=y_o,\dots,y^{(n)}=y_o^{n}} \neq 0$$

feltételeknek, a (2.1.1) egyenlet megoldható $y^{(n)}$-re nézve, azaz

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}), \qquad (2.1.1')$$

alakban adható meg.

A továbbiakban az $y^{(n)}$-re megoldott explicit alakú egyenletekkel foglalkozunk. Feltesszük, hogy a jobb oldalon álló f függvény mindegyik argumentumának folytonos függvénye. Az alapvető kérdés n-edrendű differenciálegyenletek esetében - hasonlóan az elsőrendű egyenletekhez - hogy mikor oldható meg a (2.1.1') alakú egyenlet és mi biztosítja, hogy adott (x_o,y_o) ponton át egyetlen integrálgörbe haladjon át, amely eleget tesz az $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = y'_o,\dots,y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}$ kezdeti feltételeknek. (Cauchy-probléma).

A megoldás egzisztenciájának és unicitásának feltétele, hogy a (2.1.1') jobb oldalán álló f függvény eleget tegyen bizonyos kikötéseknek, azaz bizonyos "jó" tulajdonságokkal rendelkezzék. Ezt mondja ki az alábbi exisztencia és unicitási tétel.

1. Tétel

(Az n-edrendű differenciálegyenletek Cauchy-féle egzisztencia- és unicitástétele.)

Az

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) \qquad (2.1.1')$$

explicit alakban adott n-edrendű differenciálegyenletnek az

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y'_o,\ldots,y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}$$

kezdeti feltételeket kielégítő megoldása létezik és egyértelmű, ha

a) $f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ folytonos függvénye argumentumainak ez valamely D zárt tartományában továbbá, ha

b) az $f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ függvény mindegyik argumentuma szerinti parciális deriváltja korlátos a D tartományban, azaz

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < K,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| < K_1,\ldots,\left|\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right| < K_{n-1}$$

Bizonyítás:

A (2.1.1') egyenletben szereplő argumentumok mind az x változó függvényei, ezért bevezetjük a következő jelölést:

$$y' = y_1,\quad y^n = y_2,\ldots,y^{(n-1)} = y_{n-1}$$

Ekkor

$$\frac{dy}{dx} = y_1,\quad \frac{dy_1}{dx} = y_2,\ldots,\quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_{n-1} \qquad (2.1.2)$$

Ezzel a jelöléssel a (2.1.1') egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x,y,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}) \qquad (2.1.3)$$

A (2.1.2) és (2.1.3) összefüggésben szereplő egyenletek együttesen n számú elsőrendű differenciálegyenletből álló egyenletrendszert képeznek.

$$\frac{dy}{dx} = y_1$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \qquad (2.1.3')$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x,y,y_1,\ldots,y_{n-1})$$

Ezen egyenletek bal oldalain az ismeretlen függvények deriváltjai állnak, a jobb oldalak pedig a független változótól és az ismeretlen függvényektől függnek (és nem függnek a deriváltaktól, legalább is formailag).

Az ilyen rendszert normális alakú differenciálegyenlet rendszernek nevezzük. A (2.1.3) rendszernek megvan az a sajátossága, hogy csak az utolsó egyenlet jobb oldalán áll az $x,y,y_1,\ldots,y_{n-1}$ változóknak a legáltalánosabb alakú függvénye.

Számozzuk át az $y,y_1,\ldots,y_{n-1}$ változókat és jelöljük $y_1,y_2,\ldots,y_n$-nel, továbbá a (2.1.3) rendszer helyett tekintsük az alábbi általánosabb normális alakú elsőrendű rendszert:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \qquad (2.1.4)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

Erre a rendszerre végezzük el az exisztenciatétel bizonyítását, majd visszatérünk a (2.1.3') rendszerre, ami ekvivalens a (2.1.1') n-edrendű egyenlettel.

Az exisztenciatétel bizonyítása lényegében most is a szukcesszív approximáció módszerével történik.

Legyen megadva a (2.1.4) egyenletrendszerhez a kezdeti értékeknek x_o, $y_1^{(o)},y_2^{(o)},\ldots,y_n^{(o)}$ együttese. A (2.1.4) egyenletek jobb oldalain álló f_i függvényekre $(i = 1,2,\ldots,n)$ a következő feltételeket kötjük ki:

1. Az $f_i (i = 1,2,\ldots,n)$ függvények a

$$D: x_o - a \leq x \leq x_o + a, \quad y_i^{(o)} - b \leq y_i \leq y_i^{(o)} + b$$

$$(i = 1,2,\ldots,n)$$

zárt tartományban [(n + 1) dimenziós téglában] összes argumentumaiknak folytonos függvényei. Ez egyben az f_i függvények D-beli korlátosságát is jelenti, mert zárt tartományon folytonos függvény ott korlátos is. Tehát teljesül az

$$|f_i| \leq M \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$ alkalmas elég nagy M-re D minden pontjában.

2. Ha a D tartományban az f_i függvények az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ argumentumokra vonatkozólag kielégítik a Lipschitz-feltételt: azaz, ha egy adott x érték mellett az $y_1^*, y_2^*, \ldots y_n^*$ és $y_1^{**}, y_2^{**}, \ldots, y_n^{**}$ értékrendszerek a D tartományhoz tartoznak, akkor

$$\left| f_i(x, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*) - f_i(x, y_1^{**}, y_2^{**}, \ldots, y_n^{**}) \right| \leq \qquad (2.1.5)$$

$$\leq K \sum_{k=1}^{n} \left| y_k^* - y_k^{**} \right| \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

ahol K egy pozitív állandó.

Megjegyezzük, hogy az f_i függvények a D tartományban az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ változók szerint folytonos parciális deriváltakkal rendelkeznek, akkor teljesítik a Lipschitz-feltételt, ugyanis a Lagrange-féle középértéktétel szerint:

$$\left| f_i(x, y_1^*, \ldots, y_n^*) - f_i(x, y_1^{**}, \ldots y_n^{**}) \right| = \qquad (2.1.6)$$

$$= \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right)_{\bar{y}_1} (y_1^* - y_1^{**}) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_n}\right)_{\bar{y}_n} (y_n^* - y_n^{**})$$

ahol $\bar{y}_k = y_k^* + \vartheta(y_k^* - y_k^{**})$, $0 \leq \vartheta \leq 1$, $(k = 1,2,\ldots,n)$.

Folytonosságuk következtében a parciális deriváltak korlátosak.

Mindezen $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i,k = 1,2,\ldots,n)$ deriváltak abszolút értékeinek a D tartományban felvett maximumát választva K-nak, a (2.1.5) egyenlőtlenségek teljesülnek.

Tehát a Lipschitz-feltétel teljesül, ha a D tartományban léteznek és folytonosak a

$\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i,k = 1,2,\ldots,n)$ parciális deriváltak.

Kimutatjuk, hogy az 1. és 2. feltételek teljesülése esetén a (2.1.4) lineáris differenciálegyenlet-rendszernek egy és csak egy olyan

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\dots,y_n = y_n(x)$$

megoldása létezik, amelyben a függvények mindegyike értelmezve van, az $x_o - h \leq x \leq x_o + h$ intervallumban, ahol $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ és az $x = x_o$ helyen a megoldásrendszer eleget tesz az előírt

$$y_1(x_o) = y_1^{(o)},\ y_2(x_o) = y_2^{(o)},\dots,y_n(x_o) = y_n^{(o)} \quad (2.1.6)$$

kezdeti feltételeknek.

(Rámutatunk, hogy ha ez az állítás igaz a (2.1.4) egyenletrendszerre, akkor igaz ennek speciális esetére a (2.1.3) egyenletrendszerre is, ami viszont ekvivalens a (2.1.2) n-edrendű differenciálegyenlettel.)

Állításunk bizonyításához a szukcesszív approximáció módszerét használjuk.

A (2.1.4) differenciálegyenlet-rendszer valamennyi differenciálegyenletét egyidejűleg átalakítjuk integrálegyenletté az elsőrendű egyenlet exisztencia tételének bizonyításával analóg módon.

Az $y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)$ ismeretlen függvények nulladik közelítésének az $y_1^{(o)}, y_2^{(o)},\dots,y_n^{(o)}$ állandókat (a kezdeti értéket vesszük).

A keresett függvények elsőrendű közelítésének a

$$\begin{aligned} y_1^{(1)}(x) &= y_1^{(o)} + \int_{x_o}^{x} f_1(x,y_2^{(o)},\dots,y_n^{(o)})dx \\ &\vdots \\ y_n^{(1)}(x) &= y_n^{(o)} + \int_{x_o}^{x} f_n(x,y_1^{(o)},y_2^{(o)},\dots,y_n^{(o)})dx \end{aligned} \quad (2.1.7_1)$$

Nyilvánvaló, hogy az így konstruált függvények folytonosak. Kimutatjuk, hogy az elsőrendű közelítések nem lépnek ki a D tartományból, ha $x - x_o \leq h$.

A h szám definícióját figyelembe véve:

$$\left| y_i^{(1)}(x) - y_i^{(o)}(x)\right| = \left|\int_{x_o}^{x} f_i(x,y_1^{(o)},y_2^{(o)},\dots,y_n^{(o)})dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{x_o}^{x} \left| f_i(x,y_1^{(o)},y_2^{(o)},\dots,y_n^{(o)})\right| dx \leq M|x - x_o| \leq M\,h \leq b$$

$$(i = 1,2,\dots,n)$$

A másodrendű közelítéseket úgy kapjuk, hogy az integrandusba az elsőrendű közelítéseket helyettesítjük:

$$y_1^{(2)}(x) = y_1^{(o)} + \int_{x_o}^{x} f_1(x,y_1^{(1)},y_2^{(1)},\dots,y_n^{(1)})dx$$
$$\vdots \qquad\qquad (2.1.7_2)$$
$$y_n^{(2)}(x) = y_n^{(o)} + \int_{x_o}^{x} f_n(x,y_1^{(1)},y_2^{(1)},\dots,y_n^{(1)})dx$$

Az m-edik közelítéseket az (m-1)-edik közelítések felhasználásával kapjuk:

$$y_1^{(m)}(x) = y_1^{(o)} + \int_{x_o}^{x} f_1(x,y_1^{(m-1)},y_2^{(m-1)},\dots,y_n^{(m-1)})dx$$
$$\vdots \qquad\qquad (2.1.7_m)$$
$$y_n^{(m)}(x) = y_n^{(o)} + \int_{x_o}^{x} f_n(x,y_1^{(m-1)},y_2^{(m-1)},\dots,y_n^{(m-1)})dx$$

Feltéve, hogy az (m-1)-edik közelítések az x változó folytonos függvényei voltak, az m-edik közelítések - mint folytonos függvények határozatlan integráljai - ugyancsak folytonosak lesznek.

Könnyű kimutatni, hogy ha az (m-1)-edik közelítések nem lépnek ki a D tartományból $|x - x_o| \leq h$ esetén, akkor ez az m-edik közelítések esetén sem következik be. Ha ugyanis az (m-1)-edik közelítések a fenti intervallumon belül a D tartományban futnak, akkor az 1. feltételezés alapján

$$|f_i(x,y_1^{(m-1)},\dots,y_n^{(m-1)})| \leq M \quad \text{ha} \quad |x - x_o| \leq h$$

$$(i = 1,2,\dots,n)$$

és a $(2.1.7_m)$ formulák alapján:

$$|y_i^{(m)} - y_i^{(o)}| = \left|\int_{x_o}^{x} f_i(x,y_1^{m-1},\dots,y_n^{(m-1)})dx\right| \leq \qquad (2.1.8)$$

$$\leq \int_{x_o}^{x} |f_i(x,y_1^{(m-1)},\dots,y_n^{(m-1)})|\,dx \leq M|x - x_o| \leq M\,h \leq b$$

Minthogy $m = 1$ esetén ez a tulajdonság igaz, - amint azt bizonyítottuk -, indukcióval következik, hogy (2.1.8) minden m-re igaz.
Ennek alapján a $(2.1.7_m)$ approximációk a D tartományban futnak, ha $x_o - h \leq x \leq x_o + h$.

Kimutatjuk, hogy a szukcesszív approximációk konvergens sorozatot képeznek, vagyis hogy a $\lim_{m \to \infty} y_i^{(m)}(x)$ határértékek léteznek ($i = 1,2,\ldots,n$).

Az elsőrendű egyenletek exisztenciájának bizonyításánál követett eljárással analóg módon tekintsük az

$$y_i^{(o)} + [y_i^{(1)}(x) - y_i^{(o)}] + [y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)] + \ldots \tag{2.1.9}$$

$$\ldots + [y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)] + \ldots \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

sorokat. Ezen sorok m + 1-edik részletösszege éppen $y_i^{(m)}(x)$ ($i = 1,2,\ldots,n$). Ha e sorok konvergenciáját kimutatjuk, akkor abból az $y_i^{(m)}(x)$ sorozatok konvergenciája következik.

A (2.1.9) sorok egyes tagjainak abszolút értékeire a Lipschitz-feltétel alapján a következő felső korlátokat kapjuk:

$$\left|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(o)}\right| = \left|\int_{x_o}^{x} f_i(x,y_1^{(o)},\ldots,y_n^{(o)})dx\right| \leq \tag{2.1.10}$$

$$\leq \int_{x_o}^{x} \left|f_i(x,y_1^{(o)},\ldots,y_n^{(o)})\right|dx \leq M|x - x_o|$$

Továbbá:

$$\left|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)\right| = \left|\int_{x_o}^{x} [f_i(x,y_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}) -\right.$$

$$\left. - f_i(x,y_1^{(o)},\ldots,y_n^{(o)})]dx\right| \leq \int_{x_o}^{x} \left|f_i(x,y_1^{(1)},\ldots,y_n^{(1)}) -\right.$$

$$\left. - f_i(x,y_1^{(o)},\ldots,y_n^{(o)})\right|dx \leq \int_{x_o}^{x} K(\left|y_1^{(1)} - y_1^{(o)}\right| + \ldots + \tag{2.1.11}$$

$$+ \left|y_n^{(1)} - y_n^{(o)}\right|)dx \leq \int_{x_o}^{x} M\,n\,K|x - x_o|dx =$$

$$= M\,n\,K\,\frac{|x - x_o|^2}{2} \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Tegyük fel, hogy (m-1) esetén teljesül a

$$\left|(y_i^{(m-1)}(x) - y_i^{(m-2)}(x)\right| \leq M(n\,K)^{m-2}\,\frac{|x - x_o|^{m-1}}{(m-1)!} \tag{2.1.12}$$

$(i = 1,2,\ldots,n)$

egyenlőtlenség, ekkor indukcióval:

$$\left|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)\right| = \left|\int_{x_o}^{x} \left[f_i(x,y_1^{(m-1)},\ldots,y_n^{(m-1)}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f_i(x,y_1^{(m-2)},\ldots,y_n^{(m-2)})\right]dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{x_o}^{x} \left|f_i(x,y_1^{(m-1)},\ldots,y_n^{(m-1)}) - f_i(x,y_1^{(m-2)},\ldots,\right.$$

$$\left.\ldots,y_n^{(m-2)})\right|dx \leq K \int_{x_o}^{x} \sum_{\ell=1}^{n} \left|y_\ell^{(m-1)} - y_\ell^{(m-2)}\right|dx \leq \tag{2.1.13}$$

$$\leq M(n\,K)^{m-1} \int_{x_o}^{x} \frac{|x - x_o|^{m-1}}{(m-1)!}\,dx = M(n\,K)^{m-1} \cdot \frac{|x - x_o|^m}{m!}$$

Ezzel kimutattuk, hogy a (2.1.13) becslés minden m természetes számra teljesül.
Mivel $|x - x_o| \leq h$, következik, hogy

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} M(n\,K)^{m-1} \frac{h^m}{m!} = \frac{M}{nK}\, e^{nKh} \tag{2.1.14}$$

(A jobb oldalon álló exponenciális sor az egész számegyenesen konvergens.)

A (2.1.9) sorok tehát egyenletesen konvergensek minden olyan x értékre, amelyre az $x_o - h \leq x \leq x_o + h$ egyenlőtlenség teljesül. Mivel e sorok tagjai folytonos függvények, összegfüggvényeik is folytonosak. Jelöljük az összegfüggvényeket $Y_i(x)$-szel $(i = 1,2,\ldots,n)$, ahol

$$Y_i(x) = y_i^{(o)} + \sum_{\ell=1} \left(y_i^{(\ell)}(x) - y_i^{(\ell-1)}(x)\right) = \lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x) \tag{2.1.15}$$

Kimutatjuk, hogy az $Y_1(x)$, $Y_2(x),\ldots,Y_n(x)$ függvények szolgáltatják a (2.1.4) differenciálegyenlet-rendszer keresett megoldásait.

Minthogy $(2.1.7_m)$ alapján

$$y_i^{(m)}(x) = y_i^{(o)} + \int_{x_o}^{x} f_i(x,y_1^{(m-1)},\dots,y_n^{(m-1)})dx, \quad \text{amiből}$$

$$y_i^{(m)}(x_o) = y_i^{(o)}, \quad \text{következik, hogy} \tag{2.1.16}$$

$$Y_i(x_o) = \lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x_o) = y_i^{(o)}, \quad \text{vagyis}$$

az $Y_i(x)$ határfüggvények kielégítik a kezdeti feltételeket.

Most bebizonyítjuk, hogy az $Y_i(x)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ függvények kielégítik a (2.1.4) egyenletrendszert. A $(2.1.7_m)$ összefüggés alapján:

$$y_i^{(m)}(x) = y_i^{(o)} + \int_{x_o}^{x} f_i(x,y_1^{(m-1)}(x),\dots,y_n^{(m-1)}(x))dx - \tag{2.1.17}$$

$$- f_i(x,Y_1(x),\dots,Y_n(x))\, dx + \int_{x_o}^{x} f_i(x,Y_1(x),\dots,Y_n(x))dx$$

Becsüljük meg a Lipschitz-tételének alapján az első integrál abszolút értékét:

$$\Big| \int_{x_o}^{x} [f_i(x,y_1^{(m-1)}(x),\dots,y_n^{(m-1)}(x)) - f_i(x,Y_1(x),\dots,$$

$$,Y_n(x)]\, dx\Big| \le \int_{x_o}^{x} \Big| f_i(x,y_1^{(m-1)}(x),\dots,y_n^{(m-1)}(x)) - \tag{2.1.18}$$

$$- f_i(x,Y_1(x),\dots,Y_n(x))\Big| dx \le K \int_{x_o}^{x} [\,|y_1^{(m-1)} - Y_1| + \dots +$$

$$+ |y_n^{(m-1)} - Y_n|]dx\ .$$

Az $y_i^{(m-1)}(x)$ függvények az $(x_o-h,\ x_o+h)$ intervallumban egyenletesen konvergálnak az $Y_i(x)$ függvényekhez $(i = 1,2,\dots,n)$, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan N küszöbszám, hogy

$$\Big| y_i^{(m-1)}(x) - Y_i(x)\Big| < \frac{\varepsilon}{nKh}\ , \quad \text{hacsak } m - 1 \ge N.$$

$$(i = 1,2,\dots,n)$$

Tehát a (2.1.18) formula alapján az $(x_o - h,\ x_o + h)$ intervallumban

$$\left| \int_{x_o}^{x} [f_i(x,y_1^{(m-1)},\dots,y_n^{(m-1)}) - f_i(x,Y_1,\dots,Y_n]dx \right| \leq \tag{2.1.19}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{nKh}\, nKh = \varepsilon.$$

A bal oldalon álló integrál zérushoz tart, ha $m \to \infty$, tehát a (2.1.17) formulában elvégezve a $\lim\limits_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x) = Y_i(x)$ határátmenetet:

$$Y_i(x) = y_i^{(o)} + \int_{x_o}^{x} f_i(x,Y_1(x),\dots,Y_n(x)dx$$

$$(i = 1,2,\dots,n)$$

Itt a jobb oldalon álló integrál deriváltja létezik, mivel egy folytonos függvény integrálja a felső határ szerint deriválható, következőleg a bal oldal deriváltja is létezik, így

$$\frac{dY_i(x)}{dx} = f_i(x,Y_1(x),\dots,Y_n(x)) \qquad (i = 1,2,\dots,n) \tag{2.1.21}$$

vagyis az $Y_i(x)$ függvények kielégítik a (2.1.4) differenciálegyenlet-rendszert. Kimutatjuk, hogy az $Y_1(x),\dots,Y_n(x)$ megoldás az egyetlen olyan megoldása a (2.1.4) egyenletrendszernek, amely eleget tesz a kezdeti feltételeknek. A bizonyítást indirekt módon végezzük.

Tegyük fel, hogy az $Y_1(x),\dots,Y_n(x)$ megoldáson kívül egy másik $Z_1(x), Z_2(x),\dots,Z_n(x)$ megoldás is létezik, amelyre $Z_i(x_o) = Y_i(x_o) = y_i^{(o)}$ $(i = 1,2,\dots,n)$, továbbá nem mindegyik Z_i azonos Y_i-vel.

Eszerint a

$$\phi(x) = |Y_1(x) - Z_1(x)| + |Y_2(x) - Z_2(x)| + \dots +$$

$$+ |Y_n(x) - Z_n(x)| \tag{2.1.22}$$

függvény az $(x_o - h,\ x_o + h)$ intervallumban nem azonosan egyenlő zérussal. Az általánosság megszorítása nélkül felte-

hetjük, hogy $\phi(x) \neq 0$ olyan x értékre vonatkozólag, amelyek tetszőlegesen kevéssé különböznek x_o-tól, de pl. nagyobbak mint x_o. (Ha minden $x_o \leq x \leq x_1$ értékre $\phi(x) = 0$ lenne és a $\phi(x) \neq 0$ egyenlőtlenség először olyan x értékre következik be, amely nagyobb x_1-nél, akkor a következő meggondolásokban x_o -t x_1 -gyel helyettesítenénk.)

Tekintsük az (x_o, x_o+h_1) intervallumot, ahol $h_1 \leq h$ tetszőleges pozitív szám. Feltevésünk szerint $\phi(x)$ az $(x_o, x_o + h_1)$ intervallumban olyan x értékek esetén is felvesz zérustól különböző, tehát pozitív értékeket, amelyek tetszőleges kevéssé különböznek x_o-tól, vagyis az (x_o, x_o+h_1) intervallum bizonyos pontjaiban, bármilyen kicsiny szám is h_1.

A folytonos függvények ismert tulajdonsága folytán a (2.1.22)-ben szereplő $\phi(x)$ függvény az $[x_o, x_o + h_1]$ zárt intervallumon felveszi az erre az intervallumra vonatkozó $\vartheta > 0$ maximumát, valamely $x = \xi$ pontban, ahol $x_o \leq \xi \leq x_o + h_1$. Mivel feltevésünk szerint az $Y_i(x)$ és $Z_i(x)$ függvények eleget tesznek a (2.1.4) lineáris differenciálegyenlet-rendszernek, ezért

$$\frac{dY_i}{dx} = f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n), \qquad \frac{dZ_i}{dx} = f_i(x, Z_1, \ldots, Z_n)$$

Innen

$$Y_i(x) - Z_i(x) = \int_{x_o}^{x} [f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n) - f_i(x, Z_1, \ldots, Z_n)]\, dx$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

A Lipschitz-feltétel értelmében

$$|Y_i(x) - Z_i(x)| \leq \int_{x_o}^{x} K\{|Y_1(x) - Z_1(x)| + \ldots +$$

$$+ |Y_n(x) - Z_n(x)|\}\, dx \leq K\vartheta|x - x_o| \leq K\vartheta h_1$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol most $x_o \leq x \leq x_o + h_1$.

Összeadva a nyert egyenlőtlenségeket:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} |Y_i(x) - Z_i(x)| \leq nK\vartheta h_1.$$

Mivel említettük $\phi(x)$ maximuma valamely $x_o \leq \xi \leq x_o + h_1$ pontban $\vartheta > 0$.
Tehát:

$$\vartheta = \phi(\xi) = \sum_{i=1}^{n} |Y_i(\xi) - Z_i(\xi)| \leq nK\vartheta h_1$$

ahonnan

$$nKh_1 \geq 1 \tag{2.1.23}$$

következik, ami ellentmondás, mivel h_1 tetszőleges kicsi lehet, azaz $h_1 < \frac{1}{nK}$ választás mellett a (2.1.23) egyenlőtlenség nyilván nem teljesül.
Ebből az $Y_1(x),\ldots,Y_n(x)$ megoldás unicitása következik.
A (2.1.4) differenciálegyenlet-rendszer megoldásának egzisztenciája és unicitása a kikötött feltételek mellett nyilván érvényes a speciális

$$\frac{dy}{dx} = y_1(x), \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2(x),\ldots, \quad \frac{dy_{n-2}(x)}{dx} = y_{n-1}(x),$$

$$\frac{dy_{n-1}(x)}{dx} = f(x,y,\ldots,y_{n-1})$$

alakú (2.1.3') egyenletrendszerre is, ami viszont ekvivalens a

$$y^{(n)}_{(x)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(m-1)}) \tag{2.1.1'}$$

n-edrendű lineáris differenciálegyenlettel.
Ily módon az 1. tételt bizonyítottuk.
Az 1. tétel geometriailag azt jelenti, hogy a

$$y^{(n)} = f(x,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}) \tag{2.1.1'}$$

n-edrendű differenciálegyenlet esetében egy és csakis egy integrálgörbe van, amely átmegy az (n + 1) dimenziós tér $P(x_o,y_1^{(o)},\ldots,y_{n-1}^{(o)})$ pontján.
A (2.1.2') n-edrendű egyenlet megoldása n számú kvadratúrát igényel, aminek következtében a megoldás

$$y(x) = \varphi(x,c_1,c_2,\ldots,c_n) \tag{2.1.23}$$

alakú, azaz megoldás n paraméteres görbesereg.
Felmerül a kérdés, hogy a $c_1,c_2,\ldots,c_n$ állandók megválaszthatók-e úgy, hogy az $x = x_o$ előírt helyen $y(x_o) = y_o$,

$y'(x_o) = y'_o, \ldots, y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}$ legyen, s ha igen, hogyan kell a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ értékeket kiszámítani?

Teljesülnie kell tehát a

$$\begin{aligned} \varphi(x_o, c_1, c_2, \ldots, c_n) &= y_o \\ \varphi'(x_o, c_1, c_2, \ldots, c_n) &= y'_o \\ &\vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x_o, c_1, c_2, \ldots, c_n) &= y_o^{(n-1)} \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

egyenleteknek. Ez az egyenletrendszer a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ismeretlenekre vonatkozólag n számú egyenletet tartalmaz. Amennyiben a $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}$ függvények a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ismeretlenek szerint deriválhatók, és a deriváltakból képezett Jacobi-féle függvénydetermináns:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial c_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi}{\partial c_n} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial \varphi'}{\partial c_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi'}{\partial c_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

akkor a (2.1.24) egyenletekből $c_1, c_2, \ldots, c_n$ kiszámítható. A kiszámítás módjára speciális esetekben (lineáris egyenleteknél) fogunk útmutatást adni.

2.2 Speciális esetek. Hiányos egyenletek

Az alábbiakban olyan egyszerűbb típusú magasabb rendű egyenleteket vizsgálunk, amelyek az elsőrendű differenciálegyenletekhez hasonlóan kvadratúrával oldhatók meg.

1. Legyen adva az

$$y^{(n)} = f(x) \quad \text{egyenlet.} \tag{2.2.1}$$

Integrálással:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_o}^{x} f(x)dx + c_1$$

ahol x_o az x-nek valamilyen értéke, míg c_1 tetszőleges állandó.

Ismételten integrálva:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_o}^{x} dx \left[\int_{x_o}^{x} f(x)dx + c_1\right] =$$

$$= \int_{x_o}^{x} \left[\int_{x_o}^{x} f(x)dx\right]dx + c_1(x - x_o) + c_2 \qquad (2.2.2)$$

$$\vdots$$

$$y = \underbrace{\int_{x_o}^{x} dx \int_{x_o}^{x} dx \ldots \int_{x_o}^{x} f(x)dx}_{n\text{-szer}} + \frac{c_1}{(n-1)!}(x - x_o)^{n-1} +$$

$$+ \ldots + c_{n-1}(x - x_o) + c_n$$

Itt az általános megoldás n-szeres integrállal van kifejezve. Könnyen látható, hogy $y^{(n-1)}(x_o) = c_1, y^{(n-2)}(x_o) = c_2, \ldots, y(x_o) = c_n$.

Ha tehát az $x = x_o$, $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = y'_o, \ldots, y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}$ kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldást kívánjuk, akkor a (2.2.2) általános megoldásban a $C_n = y_o$, $C_{n-1} = y'_o, \ldots, C_1 = y_o^{(n-1)}$ értékeket kell választanunk.

Megjegyezzük, hogy a (2.2.1) egyenlet az

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2.1.1')$$

n-edrendű egyenlet speciális esete, amikor az f függvény argumentumai közül $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ hiányzik. Előfordulhat, hogy az f függvény argumentumai közül ezen argumentumok közül csak néhány hiányzik:

Mindezeket az egyenleteket hiányos n-edrendű egyenleteknek nevezzük. A műszaki alkalmazásokra való tekintettel

részletesen a hiányos másodrendű differenciálegyenletek megoldását ismertetjük.

2. Az

$$y'' = f(x) \tag{2.2.3}$$

másodrendű differenciálegyenlet a mozgás törvényét határozza meg abban az esetben, amikor a hatóerő megadható, mint csak az időtől függő függvény. A dinamikában gyakran fordul elő ilyen differenciálegyenlet.

Példa

Mozogjon egy s tömegpont az Os tengely mentén olyan p periodikus erő hatására, amely a mozgással ellentétes irányú és a t időtől a következő módon függ: $p = -A\omega^2 \sin\omega t$. Legyenek a kezdeti feltételek a $t = 0$ időpontban $s(0) = 0$, $s'(0) = A\omega$. Vizsgáljuk meg az s (egységnyi tömegű) pont helyzete hogyan függ a t időtől, vagyis határozzuk meg ennek a mozgásnak az egyenletét!

Ha a pont m tömege egységnyi, akkor az erő a gyorsulással egyenlő, azaz

$$s''(t) = -A\omega^2 \sin t \tag{2.2.4}$$

$$s'(t) = -\int_0^t A\omega^2 \sin t \, dt + c_1, \quad \text{ahol}$$

$$s'(0) = A\omega \text{ folytán } c_1 = A\omega,$$

azaz $s'(t) = A\omega\cos\omega t + A\omega$

$$s(t) = A\omega\int_0^t \cos\omega t \, dt + A\omega t + c_2, \quad \text{ahol}$$

$$s(0) = \text{miatt} \quad c_2 = 0$$

tehát

$$s(t) = A \sin\omega t \tag{2.2.5}$$

harmonikus rezgő mozgás, amelynek frekvenciája megegyezik a mozgatóerő frekvenciájával.

A (2.2.4) és (2.2.5) egyenletek összehasonlításából a mozgás differenciálegyenlete:

$$s''(t) = -\omega^2 s(t)$$

3. Tekintsük a következő alakú differenciálegyenletet:

$$y'' = f(x,y') \tag{2.2.6}$$

Ez az egyenlet nem tartalmazza a keresett y függvényt. Ha ebben az egyenletben $y' = p$, $y'' = p'$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor a

$$p' = f(x,p) \tag{2.2.7}$$

alakú elsőrendű egyenletet kapjuk, innen p -t, mint x függvényét meghatározva, az eredeti egyenlet megoldását $y' = p$ integrálásával kapjuk.
Hasonlóképpen járunk el az

$$y^{(n)} = f(x,y^{(n-1)}) \tag{2.2.8}$$

alakú n-edrendű hiányos egyenlet esetében. Itt $y^{(n-1)} = p$ helyettesítéssel $y^{(n)} = p'$. Tehát ismét a

$$p' = f(x,p)$$

alakú egyenletre jutunk, majd integrálások sorozatával a (2.2.1) alakú egyenlet megoldásának mintáján y kiszámítható.

<u>Példa</u>
Határozzuk meg az

$$y'' = y' + e^x \tag{2.2.9}$$

differenciálegyenlet általános megoldását!
Az egyenletben y nem szerepel, tehát a (2.2.6) formulában megadott típusú. Alkalmazva az $y' = p$ helyettesítést:

$$p' = p + e^x$$

azaz

$$p' - p = e^x \tag{2.2.10}$$

Ez elsőrendű lineáris egyenlet, amelynek először a homogén részét oldjuk meg,

$$\frac{dp}{dx} = p$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int dx$$

$$\ln p = x + \ln c$$

$$p = c\, e^x$$

Az állandó variálásával:

$$p = c(x)e^x$$

$$p' = c'(x)e^x + c(x)e^x$$

Ezeket az összefüggéseket a (2.2.10) egyenletbe helyettesítve:

$$c'(x)e^x + c(x)e^x - c(x)e^x = e^x$$

Innen

$$c'(x)e^x = e^x \quad \text{azaz}$$

$$c'(x) = 1$$

$$c(x) = x + c_1$$

Tehát

$$y' = p(x) = (x + c_1)e^x$$

azaz

$$y = \int p(x)dx = \int x\, e^x dx + c_1\int e^x\, dx + c_2 = e^x(x - 1) +$$

$$+ c_1e^x + c_2$$

a (2.2.9) egyenlet általános megoldása.

4. Vizsgáljuk az

$$y'' = f(y,y') \tag{2.2.11}$$

egyenlet megoldási módját! Ebben az egyenletben az x változó explicite nem szerepel. (Természetesen y, y' és y'' az x változó függvényei.)

Vezessük be most is az $y' = p$ helyettesítést, de most p legyen az y változó függvénye (és rajta keresztül az x változó összetett függvénye) azaz legyen

$$\begin{cases} y' = p\left[y(x)\right] \\ y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dy'}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot p \,. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

A (2.2.12) kifejezéseket a (2.2.11) egyenletbe helyettesítve:

$$p\,\frac{dp}{dy} = f(y,p) \tag{2.2.13}$$

p-re nézve elsőrendű differenciálegyenlet, amelyet p-re megoldva, majd integrálva kapjuk a keresett y függvényt.

Példa:
Keressük meg az

$$y''(y - 1) = 2y'^2 \qquad (2.2.14)$$

differenciálegyenlet megoldását, amely (2.2.11) típusú.

Legyen $y'(p(y)$ azaz $y'' = \frac{dp}{dy} p$, ekkor

$$\frac{dp}{dy} p(y - 1) = 2p^2.$$

Innen:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y - 1}$$

Integrálással:

$$\ln p = 2\ln|y - 1| + \ln c_1 = \ln c_1(y - 1)^2$$

azaz $p = c_1(y - 1)^2 = y'$

Tehát:

$$\frac{y'}{(y - 1)^2} = c_1$$

$$\int \frac{1}{(y - 1)^2} dy = c_1\int dx + c_2$$

$$-\frac{1}{y - 1} = c_1x + c_2$$

Ebből:

$$y = 1 - \frac{1}{c_1x + c_2}$$ az általános megoldás.

5. Vizsgáljuk az

$$y'' = f(y) \qquad (2.2.15)$$

differenciálegyenlet megoldását! (Hiányzik x és y').
Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $2y'$-vel:

$$2y'\cdot y'' = 2f(y)y'.$$

Ennek az egyenletnek a bal oldala az y'^2 függvény deriváltja, tehát:

$$y'^2 = 2\int f(y)y'dx + c_1 = 2\int f(y)\frac{dy}{dx} dx + c_1 = 2\int f(y)dy + c_1$$

Innen:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int f(y)dy + c_1}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + c_1}} = \int dx = x + c_2$$

<u>Példa</u>
Számítsuk ki az

$$y'' = y \qquad (2.2.16)$$

differenciálegyenlet általános megoldását!
Ez az egyenlet (2.2.15) típusú. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 2y'-vel:

$$2y'y'' = 2yy'$$

$$\frac{d[y'^2]}{dx} = 2yy'$$

$$y'^2 = \int 2y \frac{dy}{dx} dx + c_1 = \int 2y\, dy + c_1 = y^2 + c_1$$

$$y' = \sqrt{y^2 + c_1}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + c_1}} = \int dx + c_2$$

Innen:

$$\text{ar sh} \frac{y}{\sqrt{c_1}} = x + c_2 \quad \text{ha} \quad c_1 > 0$$

$$\text{ar ch} \frac{y}{\sqrt{|c_1|}} = x + c_2 \quad \text{ha} \quad c_1 < 0$$

$$\ln y = x + c_2 \quad \text{ha} \quad c_1 = 0$$

Tehát a keresett megoldás:

$$y = \sqrt{c_1}\, \text{sh}(x + c_2) \quad \text{ha} \quad c_1 > 0$$

$$y = \sqrt{|c_1|}\, \text{ch}(x + c_2) \quad \text{ha} \quad c_1 < 0$$

$$y = Ke^x \quad \text{ha} \quad c_1 = 0.$$

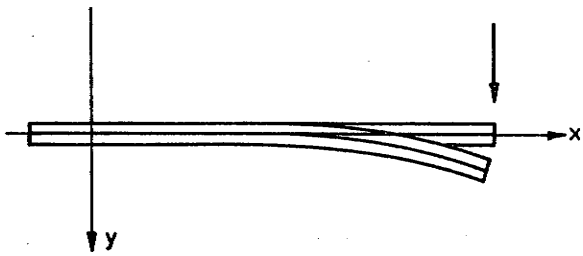
2.3 Hiányos másodrendű differenciálegyenletekre vezető műszaki feladatok

Ebben a pontban néhány - elsősorban építőmérnökök számára jelentős - feladat megoldásával foglalkozunk. Meg kell jegyeznünk, hogy a tárgyalásra kerülő feladatokon kívül számos műszaki, fizikai probléma vezet hiányos másodrendű differenciálegyenletre. Ezekkel azonban ennek a jegyzetnek a keretében nem foglalkozhatunk.

1. Rúd lehajlásának meghatározása

a) Határozzuk meg az egyik végén befogott, a másik végén koncentrált M nyomatékkal terhelt, állandó keresztmetszetű rúd (konzol) alakját, ill. a rúd alakját leíró függvényt. E fontos probléma tárgyalásánál feltételezzük, hogy a kis elmozdulások elmélete érvényes, a rúd súlytalan, továbbá létezik, egy ún. "semleges szál", amelynek hossza a hajlításkor nem változik, és az erre merőleges síkok hajlítás után is síkok lesznek. A semleges szálat x tengelynek választva az $y(x)$ lehajlási függvényre a következőképpen írhatunk fel differenciálegyenletet. A mechanika törvényei alapján az $y(x)$ görbe görbülete egyenesen arányos a keresztmetszetre ható nyomatékkal ($M(x)$) és fordítva arányos a keresztmetszetnek a súlypontján átmenő, s a hajlítási síkjára merőleges tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékával (J), vagyis

$$G(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{M(x)}{E\,J}$$



2.1 ábra

(E anyagi állandó és R a görbületi sugár.) A görbület ismert kifejezését helyettesítve:

$$\frac{y''(x)}{\left[1 + (y'(x))^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x)}{E\,J} \qquad (2.3.1)$$

Ez a keresett függvényre vonatkozó hiányos másodrendű differenciálegyenlet.

A befogás helyén, - ha $x = 0$ - elmozdulás nem lehetséges, így kezdeti feltételeink:

$$y(0) = 0 \tag{2.3.2}$$

$$y'(0) = 0. \tag{2.3.3}$$

Az $M(x)$ függvény a keresztmetszetre ható erővel arányos, jelen esetben állandó. Jelöljük M betűvel. Az

$$\frac{y''}{[1 + y'^2]^{3/2}} = \frac{M}{EJ} \tag{2.3.4}$$

differenciálegyenletet az

$$y' = p(x)$$

helyettesítéssel oldjuk meg. Ekkor ugyanis a differenciálegyenlet

$$\frac{p'}{(1 + p^2)^{3/2}} = \frac{M}{EJ} \tag{2.3.5}$$

alakú lesz. A bal oldali függvény integrálját a $p = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel számíthatjuk ki

$$\int \frac{dp}{(1 + p^2)^{3/2}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{(1 + \operatorname{sh}^2 t)^{3/2}}\, dt = \int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

A (2.3.5) differenciálegyenlet integrálása révén tehát a

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{M}{EJ}\, x + C_1$$

összefüggést nyerjük. A (2.3.3) kezdeti feltételből

$$p(0) = y'(0) = 0, \qquad \text{így} \quad C_1 = 0.$$

Innen az következik, hogy a lehajlási függvény az

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{M}{EJ}\, x$$

differenciálegyenletnek tesz eleget. Emeljük mindkét oldalt négyzetre:

$$\frac{y'^2}{1 + y'^2} = \frac{M^2}{E^2J^2} x^2.$$

Ebből a bal oldal nevezőjével való szorzás után

$$y'^2 = \frac{M^2}{E^2J^2} x^2 + \frac{M^2}{E^2J^2} x^2 y'^2,$$

majd kiemelés után

$$y'^2\left(1 - \frac{M^2}{E^2J^2} x^2\right) = \frac{M^2}{E^2J^2} x^2$$

adódik. Az y' tehát

$$y' = \frac{\frac{M}{EJ} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{M}{EJ} x\right)^2}}$$

módon fejezhető ki. Mindkét oldalt x szerint integrálva

$$y = \int \frac{\frac{M}{EJ} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{M}{EJ} x\right)^2}} dx = -\frac{EJ}{M} \int \frac{-\frac{M^2}{E^2J^2} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{M}{EJ} x\right)^2}} dx =$$

$$= -\frac{EJ}{M} \sqrt{1 - \left(\frac{M}{EJ} x\right)^2} + C_2$$

A (2.3.2) kezdeti feltétel szerint

$$y(0) = -\frac{EJ}{M} + C_2 = 0,$$

így

$$C_2 = \frac{EJ}{M}.$$

A megoldásfüggvény

$$y = -\frac{EJ}{M} \sqrt{1 - \left(\frac{M}{EJ} x\right)^2} + \frac{EJ}{M}$$

azaz

$$y - \frac{EJ}{M} = -\frac{EJ}{M} \sqrt{1 - \left(\frac{M}{EJ} x\right)^2}$$

Négyzetre emelve:

$$y^2 - \frac{2EJ}{M} y + \frac{E^2J^2}{M^2} = \frac{E^2J^2}{M^2} - x^2 ,$$

majd ebből

$$x^2 + y^2 - \frac{2EJ}{M} y = 0 \qquad (2.3.6)$$

kör egyenlete adódik. Ez az eredmény várható is, hiszen az állandó görbületi görbe a kör.
A műszaki gyakorlatban szigorú előírások vannak a megengedhető lehajlás mértékére. Általában csak igen kis lehajlások engedélyezettek.
A semleges szál ilyenkor keveset hajlik el az abszcisszatengelytől. Ezért az érintő y' iránytangense minden pontban szintén nagyon kicsi, s így az egységhez viszonyítva elhanyagolható. Ezzel a közelítéssel a (2.3.4) egyenlet

$$y'' = \frac{M}{EJ}$$

alakú lesz. Kétszeres integrálás után, a kezdeti feltételek is figyelembe vevő megoldás az

$$y = \frac{M}{2EJ} x^2 \qquad (2.3.$$

parabola.

Ha egy 6 m hosszú acél gerendát 420 mkp állandó nyomtékkal terhelünk, s a gerenda anyagi állandói J = 300 [illegible] E = 21 000 000 kN/cm^2, a gerenda végének a lehajlása a (2.3.6) megoldás függvényből számítva

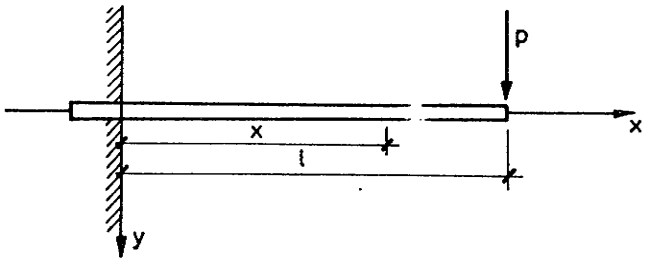
$$y = 12{,}01 \text{ cm.}$$

A közelítő megoldás a (2.3.7) összefüggésből

$$y = 12{,}00 \text{ cm.}$$

Az eltérés a kétféle módszerrel számolt megoldás között, ebben a konkrét példában 0,1 mm, azaz 1%.
Ennél a feladatnál tehát mindenképpen jogos a közelítő megoldás használata.

b) Az ℓ hosszúságú, állandó keresztmetszetű, egyik végén befogott rudat terheljük a végpontjában P koncentrált erővel.
Számítsuk ki a lehajlás függvényét!
A befogás helyétől x távolságra a P erő okozta nyomatékot $P(\ell - x)$-et helyettesítve a (2.3.1) egyenletbe, kapjuk a lehajlás differenciálegyenletét.



2.2 ábra

$$\frac{y''}{[1 + (y'(x))^2]^{3/2}} = \frac{P(\ell - x)}{EJ}$$

Ezt a hiányos másodrendű differenciálegyenletet elemi úton nem lehet integrálni.
Ha azonban y' elhanyagolhatóan kicsi, az

$$y'' = \frac{P(\ell - x)}{EJ}$$

differenciálegyenlet

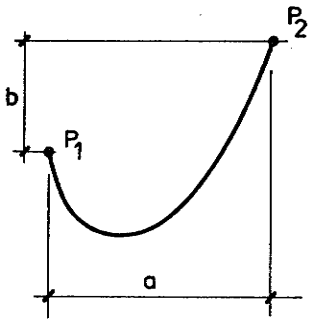
$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldása kétszer egymás után integrálva meghatározható:

$$y = \frac{P}{2EJ}(\ell x^2 - \frac{x^3}{3}).$$

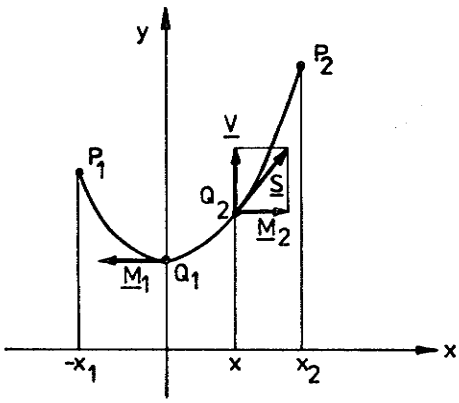
2. A kötélgörbe differenciálegyenlete

Legyen adott valamely ℓ hosszúságú tökéletesen hajlékony és nyújthatatlan egységnyi folyométersúlyú kötél. Rögzítsük a kötél végeit az egymástól az ℓ hosszúságnál kisebb távolságban levő P_1 és P_2 pontban.



2.3 ábra

A kötél a nehézségi erő hatására meghatározott alakot vesz fel. Meghatározandó a kötél alakja. A kísérletek tanúsága szerint a kötél a (2.3) ábrán látható alakot ölti.
A feltételekből és az ábrából következik, hogy az - egyelőre ismeretlen - függvény folytonos, a görbének van vízszintes érintője. Válasszunk most olyan koordináta-rendszert, amelynek x tengelye párhuzamos a vízszintes érintőjével, y tengelye pedig az érintési ponton megy át (2.4 ábra).



2.4 ábra

Metsszük el gondolatban a görbét két pontban. Az egyik a görbének az y tengellyel alkotott Q_1 metszéspontja legyen, míg a másik valamely x abszcisszájú Q_2 pont. Vizsgáljuk a kötél $Q_1 \frown Q_2$ ívének egyensúlyi feltételeit! Ha a kötél többi részét eltávolítjuk, akkor azokat valamely M és S erőkkel pótolhatjuk. A statikai egyensúly feltétele szerint a vízszintes, illetve függőleges erőösszetevők összege zérus. Ebből következik, hogy $|M_1| = |M_2| = M$.

A V függőleges erő a kötéldarab súlyával tart egyensúlyt, amely jelen esetben a kötéldarab hosszával egyenlő, ezért

$$V = \int_0^x \sqrt{1 + [y'(\xi)]^2 d\xi} .$$

Itt y(x) a kötélgörbe alakját leíró ismeretlen függvény. A (2.4) ábrából látható, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha = y'(x) = \frac{V}{M} = \frac{\int_0^x \sqrt{1 + [y'(\xi)]^2 d}}{M}$$

Differenciáljuk az egyenlőség mindkét oldalát x szerint! Ekkor az

$$y'' = \frac{1}{M}\sqrt{1 + y'^2}$$

differenciálegyenletre jutunk. Ezt a hiányos másodrendű differenciálegyenletet az $y' = p$ helyettesítéssel

$$p' = \frac{1}{M}\sqrt{1 + p^2}$$

elsőrendű differenciálegyenletre vezetjük vissza. Szétválasztás után az

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{M}\int dx + C_1$$

integrálokat meghatározva, az

$$\text{ar sh } p = \frac{x}{M} + C_1 .$$

összefüggést kapjuk. Innen

$$y' = p = \text{sh}\left(\frac{x}{M} + C_1\right)$$

A koordináta-rendszer helyzete miatt $y'(0) = 0$, tehát

$$0 = \text{sh } C_1$$

ahonnan $C_1 = 0$. A keresett függvény ezután az

$$y' = \text{sh } \frac{x}{M}$$

egyenlet integrálása révén

$$y = M \text{ ch } \frac{x}{M} + C_2$$

formában nyerhető. Meg kell adnunk még az M és C_2 állandók értékét. E célból vegyük fel az x tengelyt úgy, hogy az $x = 0$ helyen az $y(x)$ függvény értéke M legyen. Ekkor

$$M = M \text{ ch } \frac{0}{M} + C_2 = M + C_2 .$$

A C_2 értéke emiatt zérus lesz.

M értékét a kötél nyújthatatlanságát kifejező

$$\ell = \int_{-x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(\xi)]^2}\, d\xi$$

egyenlőség segítségével lehet meghatározni.

$$\ell = \int_{-x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{M}}\, d\xi = \int_{-x_1}^{x_2} \operatorname{ch} \frac{\xi}{M}\, d\xi = M\left[\operatorname{sh} \frac{\xi}{M}\right]_{-x_1}^{x_2} =$$

$$= M\left[\operatorname{sh} \frac{x_2}{M} - \operatorname{sh} \frac{x_1}{M}\right].$$

Ez transzcendens egyenlet, melyet konkrét esetben numerikusan oldhatunk meg.

2.4 A lineáris differenciálegyenletek általános elmélete

Definíció:

Az $y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ n-edrendű differenciálegyenletet lineárisnak nevezzük, ha az y, y' y'',...,$y^{(n)}$ függvények mindegyike első hatványon szerepel benne.
(y a keresett függvény, x a független változó.)
Eszerint a lineáris n-edrendű differenciálegyenlet a következő alakú:

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = F(x) \qquad (2.4.1)$$

ahol az $a_o, a_1, \ldots, a_n$ együtthatók az x változó adott folytonos függvényei. Speciális esetben ezek a függvények állandók vagy zérusok is lehetnek, kivéve a_o-t, amely nem lehet azonosan zérus, mert akkor az egyenlet nem lenne n-edrendű.

Feltesszük, hogy $a_o(x) \neq 0$ legalább is valamely

$$a \leq x \leq b \qquad (2.4.2)$$

intervallumban. Ekkor ebben az intervallumban a (2.4.1) egyenlet a_o-lal végig osztva a

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \qquad (2.4.3)$$

alakú egyenletet kapunk, ahol $p_i = \frac{a_i}{a_o}$, $f(x) = \frac{F(x)}{a_o}$
$(i = 1,2,\ldots,n)$.
Feltesszük, hogy $p_1,\ldots,p_n$ valamint $f(x)$ az x változó folytonos függvényei.

Ha $f(x) \equiv 0$, akkor a (2.4.3) n-edrendű lineáris differenciálegyenletet homogén lienáris egyenletnek nevezzük.
Ha $f(x) \not\equiv 0$, akkor a (2.4.3) egyenlet inhomogén.

2.4/a) Lineáris homogén egyenletek

Tekintsük az

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (2.4.3')$$

lineáris homogén egyenletet! Az y függvényre alkalmazott operációk (differenciálás, a $p_i(x)$ függvényekkel való szorzás és összeadás) egy bizonyos összességének eredményét $L[y]$-nal jelöljük és lineáris differenciáloperátornak nevezzük. Operátoron egy adott függvényen végrehajtandó utasítások együttesét értjük.

Definíció:
Az $L[y]$ operátort lineáris operátornak nevezzük, ha a következő két tulajdonsággal rendelkezik tetszőleges y_1, y_2 és y függvények esetében:

1) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ (2.4.4)

2. $L[cy] = c\,L[y]$, ahol c tetszőleges állandó. (2.4.5)

Legyenek y_1 és y_2 tetszőleges olyan függvények, amelyek n-szer deriválhatók.
Ekkor a (2.4.3') formulában szereplő L operátort alkalmazva:

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots +$$

$$+ p_{n-1}(y_1 + y_2)' + p_n(y_1 + y_2) =$$

$$= (y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y_1' + p_n y_1) +$$

$$+ (y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y_2' + p_n y_2) =$$

$$= L[y_1] + L[y_2]$$

Tehát függvények összegére alkalmazott lineáris operátor eredménye az összeadandókra alkalmazott operátorok összegével egyenlő. (Indukcióval könnyen igazolható, hogy ez a tulajdonság tetszőleges véges számú összeadandó esetében igaz.)

Továbbá:

$$L[cy] = (cy)^{(n)} + p_1(c,y)^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(cy)' +$$

$$+ p_n(cy) = c[y^{(n)} + p_n y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}y' + p_n y] =$$

$$= c\, L[y]$$

A (2.4.4) és (2.4.5) formulákkal kifejezett két tulajdonság egybe foglalható a következő formulával:

$$L[c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n] = c_1L[y_1] + c_2\, L[y_2] + \dots +$$

$$+ c_nL[y_n] \qquad (2.4.6)$$

<u>1. Tétel:</u>
Ha az $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvények partikuláris megoldásai a (2.4.3') homogén lineáris differenciálegyenletnek, akkor

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n \qquad (2.4.7)$$

is megoldása az egyenletnek.

<u>Bizonyítás:</u>
Ha $y_1, y_2, \dots, y_n$ partikuláris megoldások, akkor

$L[y_1] = L[y_2] = \dots = L[y_n] = 0$ és (2.4.6) alapján

$$L[y] = L[c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n] = c_1\, L[y_1] + c_2L[y_2] + \dots$$

$$\dots + c_nL[y_n] = 0.$$

A (2.4.3') egyenlet (2.4.7) alakú

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$$

megoldása n tetszőleges állandót tartalmaz. A lineáris egyenletek elméletében alapvető kérdés, hogy mikor tekinthető ez általános megoldásnak, vagyis milyen feltételt kell teljesíteniök a (2.4.7) összefüggésben szereplő $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvényeknek ahhoz, hogy az y lineáris kombinációjuk a $c_1, c_2, \dots, c_n$ állandók alkalmas megválasztásával az $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = y'_o, \dots, y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}$ előírt kezdeti feltételeknek is eleget tegyen. A válasz megfogalmazásához a függvények lineáris függetlenségének fogalmát kell bevezetnünk.

Definíció:

Adott (a,b) intervallumon értelmezett $y_1(x)$, $y_2(x),\dots,y_n(x)$ függvényeket ebben az intervallumban lineárisan függetleneknek nevezzük, ha az intervallum minden egyes x helyén egyidejűleg a

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) \equiv 0$$

összefüggés csakis akkor állhat fenn, ha a c_i $(i = 1,2,\dots,n)$ együtthatók állandók) mindegyike zérus:

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Más megfogalmazásban: Az $y_i(x)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ függvények lineárisan függetlenek az (a,b) intervallumban, ha (annak tetszőleges x helyén)

$$\sum_{i=1}^{n} c_iy_i(x) \equiv 0 \qquad (2.4.8)$$

fennállásából $c_i = 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$ következik.

Ha viszont az $y_1(x)$, $y_2(x),\dots,y_n(x)$ függvényekre vonatkozólag a (2.4.8) összefüggés az (a,b) intervallum pontjaiban úgy is fennállhat, hogy nem mindegyik c_i együttható zérus, akkor ezek a függvények az (a,b) intervallumon lineárisan összefüggők.

1. Megjegyzés: A definícióban szereplő (a,b) intervallum a $(-\infty,\infty)$ intervallum is lehet.

2. Megjegyzés: Ha az $y_1(x)$, $y_2(x),\dots,y_n(x)$ függvények lineárisan függetlenek, akkor egyik $y_i(x)$ függvény sem fejezhető ki a többi $(n-1)$ függvény lineáris kombinációjaként. Ha viszont a fenti függvények lineárisan összefüggők, akkor legalább egy $y_i(x)$ függvény kifejezhető a többi függvény lineáris kombinációjaként.
Éppen ezt fejezi ki a lineárisan összefüggő kifejezés.

Példák:

1. Az $1,x,x^2,\dots,x^n$ függvények lineárisan függetlenek a $(-\infty,\infty)$ intervallumban, mert

$$c_1\cdot 1 + c_2x + \dots + c_{n+1}x^n \equiv 0$$

csak akkor lehet, ha $c_i \equiv 0$ $(i = 1,2,\dots,n+1)$. Ugyanis egy n-edfokú egyenletnek pontosan n gyöke van, a fenti lineáris kombináció tehát nem lehet mindenütt zérus.

2. Lineárisan összefüggő függvényekre példa az

$y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \sin^2 x$, $y_3(x) = \cos^2 x$ függvényrendszer, ugyanis

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \sin^2 x + c_3 \cos^2 x \equiv 0$$

akkor is, ha $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ és $c_3 = 1$, mivel

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 \equiv 0 \quad \text{a } (-\infty,\infty) \text{ intervallumon.}$$

Megjegyezzük, hogy ha az $y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)$ függvények között valamelyik $y_i(x) \equiv 0$, akkor ezek a függvények nem lehetnek lineárisan függetlenek.

Ha ugyanis pl. $y_1(x) \equiv 0$, akkor

$$c_1 \cdot 0 + 0 \cdot y_2(x) + \dots + 0 \cdot y_n(x) \equiv 0$$

ahol $c_1 \neq 0$ tetszőleges állandó.

<u>Definíció:</u>

Legyenek az $y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)$ függvények az x változónak legalább (n-1)-szer differenciálható függvényei, akkor a

$$W(y_1,y_2,\dots,y_n)=W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (2.4.9)$$

determinánst ezen függvények Wronski-féle determinánsának nevezzük.

Könnyen bebizonyítható az alábbi tétel.

<u>2. Tétel:</u>

Ha az $y_1,y_2,\dots,y_n$ függvények lineárisan függőek és legalább (n-1)-szer differenciálhatók, akkor Wronski-determinánsuk azonosan zérus.

Bizonyítás:
Legyen

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0, \quad \text{ahol nem mindegyik} \tag{2.4.10}$$

$$c_i = 0.$$

Egymás után (n-1)-szer deriválva a (2.4.10) egyenlet:

$$c_1y_1' + c_2y_2' + \dots + c_ny_n' = 0$$

$$\vdots$$

$$c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)} + \dots + c_ny_n^{(n-1)} = 0.$$

Mátrixos alakban felírva az egyenletrendszert a

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Rövidebb írásmóddal

$$\underline{W(x)} \cdot \underline{c} = 0 \tag{2.4.11}$$

(Ahol a $W(x)$ mátrix a Wronski-féle mátrix.)

Minthogy az $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvények lineárisan összefüggő volta miatt nem mindegyik c_i egyenlő zérussal, a (2.4.11) homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálistól eltérő megoldása csak akkor lehet, ha az egyenletrendszer determinánsa zérus, következik, hogy

$$\left| \underline{\underline{W}}(x) \right| \equiv 0$$

A tétel megfordítása általában nem igaz. Abból, hogy az $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ függvények Wronski-determinánsa azonosan zérus, nem feltétlenül következik, hogy a függvények lineárisan összefüggők.

Mutatunk egy egyszerű ellenpéldát.

Legyen $y_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$

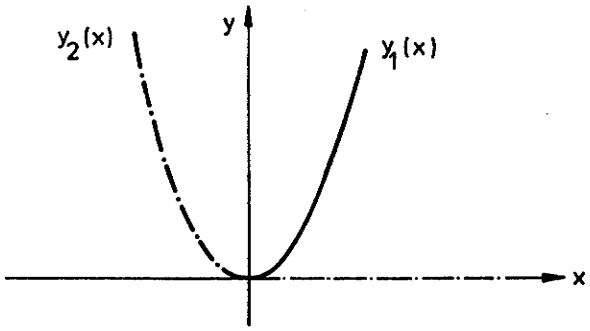
$$y_2(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{ha} \quad x \geq 0 \\ x^2, & \text{ha} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ ha } x \geq 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0, \text{ ha } x \leq 0 \end{cases}$$

tehát $W(x) = 0$ minden x értékre, viszont

$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$ csak akkor áll fenn, ha

$c_1 = c_2 = 0$, vagyis $y_1(x)$ és $y_2(x)$ lineárisan függetlenek.



2.5 ábra

<u>3. Tétel</u>

Ha az $a \leq x \leq b$ intervallumban folytonos $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,y_n(x)$ függvények a (2.4.3') lineáris n-edrendű differenciálegyenlet partikuláris megoldásai és lineárisan függetlenek, akkor Wronski-determinánsuk az $[a,b]$ intervallum egyetlen pontjában sem zérus.

<u>Bizonyítás:</u>

Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van olyan $x_o \in [a,b]$ pont, ahol $|W(x_o)| = 0$.

Ekkor

$$c_1y_1(x_o) + c_2y_2(x_o) + \ldots + c_ny_n(x_o) = 0$$

$$c_1 y_1'(x_o) + c_2 y_2'(x_o) + \ldots + c_n y_n'(x_o) = 0$$

$$\vdots \qquad (2.4.12)$$

$$c_1 y_1^{(n-1)}(x_o) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_o) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_o) = 0$$

azaz

$$[\underline{W}(x_o)] \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \underline{0} \qquad (2.4.13)$$

Feltevésünk szerint $|W(x_o)| = 0$, tehát a (2.4.12) homogén lineáris egyenletrendszernek van olyan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ megoldása, ahol nem mindegyik c_i egyenlő zérussal. Képezzük az

$$\tilde{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \qquad (2.4.14)$$

függvényt. Ekkor $\tilde{y}$ megoldása az $L(y) = 0$ egyenletnek, mivel $L(y_i) = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$.

A (2.4.12) egyenletek következtében az $x = x_o$ helyen

$$\tilde{y}(x_o) = 0, \quad \tilde{y}(x_o) = 0, \ \ldots, \ \tilde{y}^{(n-1)}(x_o) = 0. \qquad (2.4.15)$$

Az egzisztencia és unicitástétel következtében a (2.4.15) homogén kezdeti feltételek mellett a (2.4.3') egyenletnek egyetlen megoldása van.

Az $y(x) \equiv 0$ triviális megoldás nyilvánvalóan megoldása a (2.4.3') egyenletnek, tehát az $\tilde{y}(x)$ megoldás nem lehet más, mint a triviális megoldás:

$$\tilde{y}(x) \equiv 0.$$

A (2.4.14) összefüggés következtében

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0$$

ahol nem mindegyik $c_i = 0$. Ekkor azonban az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvények lineárisan összefüggők, ellentétben a feltevésünkkel. Mivel ellentmondásra jutottunk, tételünket bizonyítottuk.

Következmény:

Ha az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvények lineárisan függetlenek az (a,b) intervallumon, akkor Wronski-determinánsuk nem tűnik el az (a,b) intervallum egyetlen (α,β) részintervallumán sem, tehát az (α,β) intervallumon is lineárisan függetlenek.

Mint láttuk a 2. tétel azt mondja ki, hogy ha az $L[y] = 0$ n-edrendű egyenlet $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ partikuláris megoldásai közös folytonossági intervallumban lineárisan összefüggők, akkor Wronski-determinánsuk ebben az intervallumban azonosan zérus, ha viszont a fenti függvények lineárisan függetlenek, akkor a 3. tétel szerint a Wronski-determináns ebben az intervallumban sehol sem zérus. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy az

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

n-edrendű homogén lineáris egyenlet $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ partikuláris megoldásainak Wronski-determinánsa ezen függvények közös $a \leq x \leq b$ folytonossági intervallumában vagy mindenütt zérus (ekkor a függvények lineárisan összefüggők), vagy sehol sem zérus (ekkor a függvények lineárisan függetlenek).

Definíció:

A (2.4.3') lineáris homogén n-edrendű differenciálegyenlet n számú lineárisan független $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ megoldását alaprendszernek nevezzük.

4. Tétel:

Minden lineáris differenciálegyenletnek van alaprendszere.

Bizonyítás:

Tekintsük az a_{ik} $(i = 1,2,\ldots,n)$ számoknak olyan rendszerét, hogy a belőlük alkotott determináns zérustól különbözzék:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2.4.16)$$

A (2.4.3') egyenlet $y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)$ partikuláris megoldásait határozzuk meg az alábbi kezdeti feltételekkel az $x = x_o$ helyen:

$$y_i(x_o) = a_{1i},\ y_i'(x_o) = a_{2i},\dots,y_i^{(n-1)}(x_o) = a_{ni}$$
$$(i = 1,2,\dots,n) \tag{2.4.17}$$

Ekkor

$$\begin{vmatrix} y_1(x_o) & y_2(x_o) & \dots & y_n(x_o) \\ y_1'(x_o) & y_2'(x_o) & \dots & y_n'(x_o) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_o) & y_2^{(n-1)}(x_o) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_o) \end{vmatrix} = \tag{2.4.18}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

A tett kezdeti feltételek mellett az $y_1,y_2,\dots,y_n$ függvények $|\underline{\underline{W}}(x_o)|$ Wronski-determinánsa az $x = x_o$ helyen zérustól különböző, amiből a 3. tétel alapján ezen függvények közös $a \leq x \leq b$ folytonossági intervallumában $|\underline{\underline{W}}(x)|$ mindenütt zérustól különböző, vagyis az $y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)$ függvények ebben az intervallumban lineárisan függetlenek, tehát alaprendszert képeznek. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

<u>Megjegyzés:</u>
A (2.4.17) formulában szereplő kezdeti feltételeket természetesen tetszőlegesen választhatjuk, de ha azt akarjuk, hogy a nyert partikuláris megoldások alaprendszert alkossanak, azaz lineárisan függetlenek legyenek, akkor úgy kell őket választanunk, hogy a belőlük alkotott (2.4.16) determináns zérustól különböző legyen. Ha a (2.4.17) kezdeti feltételeket speciálisan úgy választjuk ki, hogy az $x = x_o$ helyen

$$\begin{cases} y_1(x_o) = 1, & y_1'(x_o) = 0, \ldots, y_1^{(n-1)}(x_o) = 0 \\ y_2(x_o) = 0, & y_2'(x_o) = 1, \ldots, y_2^{(n-1)}(x_o) = 0 \\ \vdots & \\ y_n(x_o) = 0, & y_n'(x_o) = 0, \ldots, y_n^{(n-1)}(x_o) = 1 \end{cases} \tag{2.4.19}$$

legyen ekkor a Wronski-mátrix egységmátrix,

$$\underline{\underline{W}}(x_o) = \underline{\underline{E}}$$

tehát determinánsa 1. A (2.4.19) kezdeti feltételekkel meghatározott alaprendszert normált alaprendszernek nevezzük. A 4. tétel értelmében minden lineáris egyenletrendszernek létezik normált alaprendszere.

<u>5. Tétel:</u>
Ha $y_1, y_2, \ldots, y_n$ az $L[y] = 0$ egyenletnek egy alaprendszerét alkotja, akkor az egyenlet <u>általános</u> megoldása:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \tag{2.4.20}$$

<u>Bizonyítás</u>
Egy n számú tetszőleges állandót tartalmazó megoldást akkor nevezünk általános megoldásnak, ha a c_i állandók számértékének alkalmas megválasztásával a (2.4.20) formulából bármelyik partikuláris megoldás megkapható. Az egzisztencia- és unicitástétel értelmében bármelyik partikuláris megoldást egyértelműen meghatározzák a kezdeti feltételek által.
Tegyük fel, hogy ezek a kezdeti feltételek az $x = x_o$ helyen

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y_o', \ldots, y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)} \tag{2.4.21}$$

ahol $y_o, y_o', \ldots, y_o^{(n-1)}$ tetszőleges számok és $a \leq x_o \leq b$ (azaz x_o az y_i függvények közös folytonossági intervallumába esik). Megmutatjuk, hogy a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ állandók megválaszthatók úgy, hogy a (2.4.20) formulával kifejezett megoldás eleget tegyen a (2.4.21) kezdeti feltételeknek.
A $c_1, c_2, \ldots, c_n$ állandókat úgy kellene megválasztani, hogy teljesüljenek az alábbi összefüggések:

$$
\begin{aligned}
&c_1y_1(x_o) + c_2y_2(x_o) + \dots + c_ny_n(x_o) = y_o \\
&c_1y_1'(x_o) + c_2y_2'(x_o) + \dots + c_ny_n'(x_o) = y_o' \\
&\vdots \\
&c_1y_1^{(n-1)}(x_o) + c_2y_2^{(n-1)}(x_o) + \dots + c_ny_n^{(n-1)}(x_o) = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = y_o^{(n-1)}
\end{aligned}
\tag{2.4.22}
$$

A (2.4.22) egyenletrendszer determinánsa a Wronski-determináns az $x = x_o$ helyen, amely az $y_1, y_2, \dots, y_n$ változók lineáris függetlensége miatt zérustól különböző. Ennek következtében az egyenletrendszernek létezik egy és csakis egy $c_1, c_2, \dots, c_n$ megoldása, amely az adott kezdeti feltételeket kielégíti. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Az 5. tétel lényegében azt mondja ki, hogy ha a (2.4.3') egyenletnek egy $y_1, y_2, \dots y_n$ alaprendszerét ismerjük, akkor az egyenlet minden megoldása az alaprendszert képező függvények lineáris kombinációja.
Ebből könnyen adódik a következő tétel:

<u>6. Tétel:</u>
Ha adva van az $L[y] = 0$ egyenlet $(n+1)$ számú $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ partikuláris megoldása, akkor ezek feltétlenül lineárisan összefüggők.

<u>Bizonyítás:</u>
Tekintsük az első n számú $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvényeket. Ha ezek lineárisan összefüggők, akkor az állítás máris következik, hiszen

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n + 0 \cdot y_{n+1} \equiv 0$$

úgy is teljesülhet, ha nem mindegyik c_i zérus.

Ha viszont az $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvények lineárisan függetlenek, azaz alaprendszert alkotnak, akkor az 5. tétel szerint y_{n+1} kifejezhető ezek lineáris kombinációjaként, de akkor az $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ függvények nem lehetnek lineárisan függetlenek.

Legyen az

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \tag{2.4.23}$$

n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek egy alaprendszere az $y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)$ függvény együttes, amelyek közös folytonossági intervalluma az $a \leq x \leq b$ intervallum.

Felmerül a kérdés, hogy létezik-e egy másik

$$y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + q_2(x)y^{(n-2)} + \dots + q_n(x)y = 0 \tag{2.4.24}$$

n-edrendű homogén lineáris egyenlet, amelynek ugyanez az alaprendszere?

Nem létezik másik ilyen egyenlet. Egy alaprendszer teljes mértékben meghatároz egy olyan n-edrendű lineáris homogén egyenletet, amelyben a legmagasabb rendű derivált együtthatója 1. Erre vonatkozik a következő tétel:

<u>7. Tétel:</u>

Ha két n-edrendű homogén lineáris egyenletnek

$$\begin{aligned} y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_ny &= 0 \\ y^{(n)} + q_1y^{(n-1)} + \dots + q_ny &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.25}$$

egyenletnek van közös alaprendszere $y_1,y_2,\dots,y_n$, akkor a két egyenlet megegyezik, azaz

$$p_i(x) \equiv q_i(x) \qquad (i = 1,2,\dots,n)$$

<u>Bizonyítás:</u>

Tegyük fel, hogy a fenti két egyenletnek van közös alaprendszere: $y_1,y_2,\dots,y_n$.

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból:

$$(p_1 - q_1)y^{(n-1)} + (p_2 - q_2)y^{(n-2)} + \dots + (p_n - q_n)y = 0. \tag{2.4.26}$$

Ha $p_1 - q_1$ nem azonosan zérus, akkor folytonosságuk következtében az $a \leq x \leq b$ intervallumnak van olyan $\alpha \leq x \leq \beta$ részintervalluma, ahol $p_1 \neq q_1$. Ha a (2.4.26) egyenletet $p_1 - q_1$-gyel végig osztjuk, akkor az (α,β) intervallumon egy

$$y^{(n-1)} + r_2y^{(n-2)} + \dots + r_ny = 0 \tag{2.4.27}$$

alakú egyenletet kapunk, amely (n-1)-edrendű, a legmagasabb rendű derivált együtthatója 1, továbbá az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ alaprendszer függvényei lineárisan függetlenek az (α, β) intervallumon. A 6. tétel alapján azonban egy (n-1)-edrendű egyenlet n számú partikuláris megoldása lineárisan összefügg. Ellentmondásra jutottunk, ami a tételt igazolja.

A következő tétel elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt fontos.

<u>8. Tétel:</u> (Liouville-tétele)

Legyen a $(2.4.3')\ y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0$ n-edrendű homogén lineáris egyenlet egy alaprendszere, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, amely függvények mind folytonosak az $a \leq x \leq b$ intervallumon.
Ekkor a

$$|\underline{\underline{W}}(x)| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = |\underline{\underline{W}}[y_1, y_2, \ldots, y_n]|$$

Wronski-féle determináns a következő alakban állítható elő:

$$|\underline{\underline{W}}(x)| = |\underline{\underline{W}}(x_o)| \cdot e^{-\int_{x_o}^{x} p_1(\xi)d\xi} \qquad (2.4.28)$$

ahol $|\underline{\underline{W}}(x_o)|$ a Wronski-determináns értéke az $x = x_o$ helyen, $p_1(x)$ pedig az $y^{(n-1)}(x)$, azaz az (n-1)-edik derivált együtthatója.

<u>Bizonyítás:</u>

Tegyük egyenlővé zérussal a következő (n+1)-edrendű Wronski-determinánst:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2 & \ldots & y_n' & y' \\ \vdots & & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

(ahol y a keresett függvény)

Fejtsük ki ezt a determinánst az utolsó oszlop szerint:

$$y^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$- y^{(n-1)} \begin{matrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & & y_n^{(n)} \end{matrix} + \dots +$$

$$+ (-1)^n y \cdot \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.4.29)$$

A (2.4.29) formulát összehasonlítva a (2.4.3') egyenlettel látható, hogy

$$p_1 = - \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \dots\dots & & & \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{\left|\underline{\underline{W}}(x)\right|}$$

A (2.4.30) formula számlálójában a $\left|\underline{\underline{W}}(x)\right|$ Wronski-determináns deriváltja áll. Ennek belátására tekintsünk egy olyan n-edrendű determinánst, amelynek elemei az x változó differenciálható függvényei.

Az n-edrendű determináns definíciója alapján:

$$\left|D(x)\right| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(n!)} \pm f_{1i_1} f_{2i_2} \cdots f_{ni_n} \qquad (2.4.30)$$

(ahol az egyes kifejtési tagok előjele pozitív, vagy negatív, aszerint, hogy az $i_1, i_2, \ldots, i_n$ oszlopindexek permutációjában az inverziók száma páros vagy páratlan).

A $|D(x)|'$ derivált-determinánst úgy kapjuk, hogy minden kifejezési tagra alkalmazzuk a függvények szorzatára vonatkozó Leibniz-féle deriválási szabályt:

$$\left|D(x)\right|' = \sum_{(n!)} \pm (f'_{1i_1} f_{2i_2} \cdots f_{ni_n} + f_{1i_1} f'_{2i_2} \cdots f_{ni_n} +$$

$$+ \ldots + f_{1i_1} f_{2i_2} \cdots f'_{ni_n}) = \sum_{(n!)} \pm f'_{1i_1} f_{2i_2} \cdots f_{ni_n} +$$

$$+ \sum_{(n!)} \pm f_{1i_1} f'_{2i_2} \cdots f_{ni_n} + \ldots + \sum_{(n!)} \pm f_{1i_1} f_{2i_2} \cdots$$

$$\cdots f'_{ni_n}$$

Ez n darab determináns összege, ahol az összeadandókban az eredeti determináns egy-egy sorának deriváltjai állnak:

$$\left|D(x)\right|' = \begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} & \cdots & f'_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \ldots + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f'_{n1} & f'_{n2} & \cdots & f'_{nn} \end{vmatrix}$$

Ha ezt a deriválási szabályt a Wronski-determinánsra alkalmazzuk, akkor az utolsó összeadandót kivéve mindegyik determináns zérus, mivel két sora megegyezik. A zérustól különböző determináns éppen p_1 kifejezésének számlálója. Tehát:

$$p_1 = -\frac{|\underline{\underline{W}}(x)|'}{|\underline{\underline{W}}(x)|} \tag{2.4.31}$$

Innen integrálással:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{|\underline{\underline{W}}(\xi)|'}{|\underline{\underline{W}}(\xi)|}\, d\xi = -\int_{x_0}^{x} p_1 d\xi$$

$$\ln|\underline{\underline{W}}(x)| - \ln|\underline{\underline{W}}(x_0)| = -\int_{x_0}^{x} p_1 d\xi$$

$$|\underline{\underline{W}}(x)| = |\underline{\underline{W}}(x_0)|\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(\xi) d\xi} \tag{2.4.32}$$

A (2.4.32) összefüggést Liouville-formulának nevezzük. Használjuk fel a Liouville-formulát az

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \tag{2.4.33}$$

másodrendű homogén lineáris egyenlet általános megoldásának meghatározására, ha ismerjük az egyenletnek egy y_1 partikuláris megoldását!

Képezzük a $|\underline{\underline{W}}(x)| = |\underline{\underline{W}}[y_1, y]|$ Wronski-determinánst, ekkor (2.4.32) alapján

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C\, e^{-\int p_1 dx}$$

(Akármilyen $x = x_0$ kezdeti feltételt írnánk elő $|\underline{\underline{W}}(x_0)| = C$. Itt nem írunk elő kezdeti feltételt, mivel általános megoldást keresünk, ezért a jobb oldalon határozatlan integrált számítunk.)

$$y_1 y' - y y_1' = C\, e^{-\int p_1 dx}$$

Mindkét oldalt y_1^2-tel osztva:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2}\, C\, e^{-\int p_1 dx}$$

Innen integrálással:

$$y = y_1\left[\int \frac{C\, e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2}\, dx + C_1\right] \qquad (2.4.34)$$

Az így nyert megoldás két tetszőleges állandót tartalmaz, tehát általános megoldás. Ennek alapján: ha egy másodrendű homogén lineáris egyenletnek egy partikuláris megoldását ismerjük, akkor az általános megoldás kvadraturákkal állítható elő.

<u>Példa:</u>
Állítsuk elő az

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad (2.4.35)$$

másodrendű egyenlet általános megoldását! Egy partikuláris megoldás az $y_1 = x$ függvény, amiről könnyen meggyőződhetünk, mivel, $y_1' = 1$, $y_1'' = 0$, tehát

$$-2x + 2x = 0.$$

Hozzuk a (2.4.35) egyenletet (2.4.33) alakra (feltesszük, hogy $x \neq 1$)

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}\, y' + \frac{2}{1 - x^2}\, y = 0$$

Ekkor $p_1 = \dfrac{-2x}{1 - x^2}$.

$$\left|\underline{\underline{W}}(x)\right| = \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = C\, e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx} = C\, e^{-\ln(1-x^2)} =$$

$$= C\, \frac{1}{1 - x^2}$$

A (2.4.34) összefüggés felhasználásával:

$$y = x\left[\int \frac{C\, e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}\, dx + C_1\right] = x\left[C\int \frac{dx}{x^2(1 - x^2)} + C_1\right] =$$

$$= x\left[C\int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + x}\right)dx + C_1\right] =$$

$$= x\left[C\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}\right) + C_1\right] =$$

$$= C_1x + C(\frac{1}{2}\, x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1)$$

Ez a két tetszőleges állandót tartalmazó megoldás az adott (2.4.35) egyenlet általános megoldása.

2.4.b) A lineáris homogén egyenlet rendszámának csökkentése egy partikuláris megoldás ismeretében

Szemléletesség kedvéért tekintsük az

$$y'' + p_1y' + p_2y = 0 \qquad (2.4.36)$$

lineáris homogén másodrendű egyenletet, amelyről feltesszük, hogy ismerjük egy y_1 partikuláris megoldását!
Ekkor egy másik, az y_1-től lineárisan független y partikuláris megoldást szorzatalakban keresünk:

$$y = y_1u \qquad \text{ahol } u \neq c \text{ ismeretlen függvény.}$$

Az u függvényt úgy kell meghatároznunk, hogy y a (2.4.36) egyenlet megoldása legyen. Ez azt jelenti, hogy az

$$y' = y_1'u + y_1u'$$

$$y'' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''$$

kifejezéseket a (2.4.36) egyenletbe helyettesítve zérust kell kapnunk, azaz

$$y_1''u + 2y_1'u' + y_1u'' + p_1(y_1'u + y_1u') + p_2y_1u = 0$$

vagyis

$$(y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1)u + [y_1u'' + (2y_1' + p_1y_1)u'] = 0$$

Mivel y_1 a (2.4.36) egyenlet megoldása, ezért az első zárójelben levő kifejezés zérus, következőleg

$$y_1u'' + (2y_1' + p_1y_1)u' = 0 \qquad (2.4.37)$$

Itt most egy egyszerű fogást alkalmazunk: legyen $u' = z$, ekkor a (2.4.37) egyenlet a következő elsőrendű egyenletbe megy át:

$$y_1z' + (2y_1' + p_1y_1)z = 0 \qquad (2.4.38)$$

azaz

$$\frac{z'}{z} = 2\frac{y_1'}{y_1} + p_1$$

Innen integrálással

$$\ln z = \int (2\frac{y_1'}{y_1} + p_1)dx + \ln c$$

$$z = c\, e^{\int (2\frac{y_1'}{y_1}+p_1)dx} = u'.$$

Újabb integrálással u meghatározható.

Tehát másodrendű lineáris egyenletnek egy alaprendszere egy partikuláris megoldás ismeretében, egy elsőrendű egyenlet megoldásával meghatározható, amiből az általános megoldás felírható. Arra vonatkozólag, hogy függvény együtthatós másodrendű homogén lineáris egyenlet egy partikuláris megoldását hogyan lehet megtalálni, nincs általános szabály. A másodrendű egyenletekhez hasonlóan fennáll, hogy ha valamely n-edrendű homogén lineáris egyenlet egy partikuláris megoldását ismerjük, akkor az n-edrendű egyenlet megoldása visszavezethető egy (n-1)-edrendű egyenlet integrálására.
Továbbá, ha az n-edrendű homogén lineáris egyenletnek k számú lineárisan független $y_1, y_2, \ldots, y_k$ megoldása ismert, akkor (n-k)adrendű homogén lineáris egyenlet megoldásával nyerjük az n-edrendű egyenlet általános megoldását. Tehát minden egyes partikuláris megoldás ismerete lehetővé teszi, hogy az egyenlet rendszámát 1-gyel csökkentsük, feltéve, hogy az ismert partikuláris megoldások lineárisan függetlenek.

A rendszám csökkentése teljes mértékben analóg a másodrendű lineáris egyenletek esetében alkalmazott eljárással:

Legyen adva az

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0 \qquad (2.4.3')$$

egyenlet és tegyük fel, hogy y_1 ennek egy partikuláris megoldása.

Vezessünk be egy ismeretlen y függvényt az

$$y = y_1 z \qquad (2.4.39)$$

relációval. Ez az egyenlet z-re nézve megoldható minden olyan intervallumon, ahol $y_1 \neq 0$. A továbbiakban ilyen intervallumon dolgozunk.

$$y' = y_1 z' + y_1' z$$

$$y'' = y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = y_1 z^{(n)} + \binom{n}{1} y_1' z^{(n-1)} + \binom{n}{2} y''_1 z^{(n-2)} + \ldots + y_1^{(n)} z$$

Ezeket a kifejezéseket a (2.4.3') egyenletbe helyettesítve:

$$y_1 z^{(n)} + [\binom{n}{1} y_1' + p_1 y_1] z^{(n-1)} + \dots + [y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} +$$

$$+ \dots p_n y_1] z = 0$$

Mivel y_1 a (2.4.3') egyenlet megoldása, z együtthatója zérus és $z' = u$ helyettesítéssel (n-1)-edrendű egyenletet nyerünk. Ha ebből u -t meg tudjuk határozni, akkor integrálással z és egy y adódik.

2.5 Inhomogén lineáris egyenletek

Tekintsük az

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x) \qquad (2.5.1)$$

alakú inhomogén lineáris differenciálegyenletet, ahol $f(x) \not\equiv 0$. Azt a homogén lineáris egyenletet, amelynek bal oldala megegyezik a (2.5.1) inhomogén egyenlet bal oldalával, azaz

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0 \qquad (2.5.2)$$

a (2.5.1) egyenletnek megfelelő homogén egyenletnek nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a (2.5.1) és (2.5.2) egyenleteknek nincs közös megoldása, hiszen a két egyenletet kivonva egymásból $0 \equiv f(x)$ lenne.

1. Tétel:
Ha ismerjük a (2.5.1) inhomogén egyenlet valamely Y partikuláris megoldását, akkor az inhomogén egyenlet általános megoldása ezen partikuláris megoldásnak és a (2.5.2) homogén általános megoldásának összege.

Bizonyítás:
Mivel Y megoldása a (2.5.1) egyenletnek, ezért

$$L[Y] = f(x) \qquad (2.5.3)$$

Vezessük be az

$$y = Y + z \qquad (2.5.4)$$

relációval a z ismeretlen függvényt! Ekkor mivel L lineáris oparátor:

$$L[y] = L[Y + z] = L[Y] + L[z] = f(x) \qquad (2.5.5)$$

Figyelembe véve a (2.5.3) összefüggést

$$L[z] = 0$$

vagyis z megoldása a (2.5.2) homogén egyenletnek.
Tegyük fel, hogy a (2.5.2) homogén egyenlet egy alaprendszere:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Mivel a homogén egyenlet minden megoldása az alaprendszer függvényeinek lineáris kombinációja, ezért

$$z = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \tag{2.5.6}$$

A (2.5.6) összefüggést a (2.5.4)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + Y \tag{2.5.7}$$

Ez az egyenlet n tetszőleges állandót tartalmaz.

Kimutatjuk, hogy a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ állandókat meg lehet úgy választani, hogy tetszőleges $x = x_o$ helyen a tetszőlegesen előírt

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y'_o, \ldots, y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}$$

kezdeti feltételeket kielégítő megoldást kapjuk (ahol x_o az alaprendszer függvényeinek közös $a \leq x \leq b$ folytonossági intervallumába kell, hogy essék).

A (2.5.7) egyenlet egymásutáni deriválásával:

$$\begin{aligned}
y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + Y \\
y' &= c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + \ldots + c_n y'_n + Y' \\
y'' &= c_1 y''_1 + c_2 y''_2 + \ldots + c_n y''_n + Y'' \\
&\vdots \\
y^{(n-1)} &= c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n y_n^{(n-1)} + Y^{(n-1)}
\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Ha most a (2.5.8) egyenletrendszerben az $x = x_o$ értéket helyettesítjük, akkor

$$\begin{aligned}
c_1 y_1(x_o) + c_2 y_2(x_o) + \ldots + c_n y_n(x_o) &= y_o - Y(x_o) \\
c_1 y'_1(x_o) + c_2 y'_2(x_o) + \ldots + c_n y'_n(x_o) &= y'_o - Y'(x_o) \\
&\vdots \\
c_1 y_1^{(n-1)}(x_o) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_o) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_o) &= y_o^{(n-1)} - Y
\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

A (2.5.9) inhomogén lineáris egyenletrendszer determinánsa a $|\underline{\underline{W}}[y_1, y_2, \ldots, y_n]| = |\underline{\underline{W}}(x)|$ Wronski-determináns $x = x_0$ helyen vett értéke, amely az alaprendszer függvényeinek lineáris függetlensége következtében zérustól különböző, így a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ állandók értéke meghatározható.

Példa: Keressük az

$$y'' + y = 3x$$

inhomogén másodrendű lineáris egyenlet általános megoldását. Könnyű belátni, hogy $Y = 3x$ partikuláris megoldása ennek az egyenletnek ($Y'' = 0$).

Az $y'' + y = 0$ homogén egyenlet egy alaprendszere: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$.

Tehát a mondottak értelmében az általános megoldás:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 3x$$

Írjuk elő most az $x = 0$ helyen az $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ kezdeti feltételeket és oldjuk meg a fenti egyenletre az ún. Cauchy-féle problémát!

Nyilván:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 3x$$

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + 3$$

Behelyettesítve a kezdeti feltételeket:

$$y(0) = 1 = c_1$$

$$y'(0) = -1 = c_2 + 3$$

tehát: $c_1 = 1$, $c_2 = -4$.

A kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás:

$$y = \cos x - 4 \sin x + 3x$$

2.5.a) Az állandók variálásának módszere

Az 1. tétel alapján egy inhomogén egyenlet általános megoldásához elegendő az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását megismerni, amennyiben a megfelelő homogén egyenlet általános megoldása ismert. A vizsgált példákban az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása apriori meg volt adva. A Lagrange-féle "állandók vairálásának" módszerével a homogén egyenlet általános megoldásának ismeretében az inhomogén egyenlet általános megoldása kvadraturák segítségével kiszámítható.

Ezt mondja ki az alábbi tétel.

2. Tétel: (Lagrange):
Az

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x)$$

n-edrendű inhomogén lineáris egyenlet általános megoldása kvadraturákkal előállítható, ha a megfelelő homogén egyenlet

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

általános megoldásában a $c_1, c_2, \dots, c_n$ együtthatókat az x változó függvényeinek tekintjük, amelyek $c_1', c_2', \dots, c_n'$ deriváltjai kielégítik a következő lineáris algebrai egyenletrendszert:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n = 0$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' = 0$$

$$\vdots$$

$$c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$$

Bizonyítás:
Legyen adva az

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \tag{2.5.10}$$

inhomogén lineáris egyenlet, ahol $f(x)$ nem azonosan egyenlő zérussal és tegyük fel, hogy a megfelelő

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{2.5.11}$$

homogén egyenletnek egy $y_1, y_2, \dots, y_n$ alaprendszere ismert.

Ekkor a (2.5.11) homogén egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \tag{2.5.12}$$

Keressük a (2.5.10) inhomogén egyenlet általános megoldását ugyanilyen alakban, de úgy, hogy a $c_1, c_2, \dots, c_n$ együtthatók az x független változó függvényei: $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ azaz legyen

$$y = c_1(x)\, y_1 + c_2(x) y_2 + \dots + c_n(x) y_n. \tag{2.5.12'}$$

Ezen n számú ismeretlen függvény meghatározására n egyenletre van szükségünk. Első egyenletünk abból adódik, hogy a feltevés szerint a (2.5.12) egyenlet változó együtthatókkal kielégíti a (2.5.10) egyenletet.

A többi (n-1) egyenletet önkényesen adjuk meg úgy, hogy az y deriváltjaira kapott kifejezések minél egyszerűbbek legyenek.

Differenciáljuk a (2.5.12) kifejezést x szerint (a $c_i = c_i(x)$ változónak tekintett együtthatókkal):

$$y' = c_1'y_1 + c_2'y_2 + \dots c_n'y_n + c_1y_1' + c_2y_2' + \dots + c_ny_n'$$

A még hiányzó (n-1) egyenlet közül legyen az első egyenlet az, amelyet úgy kapunk, hogy a c_i' deriváltakat tartalmazó összeget zérussal tesszük egyenlővé:

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 + \dots + c_n'y_n = 0 \qquad (2.5.12_1)$$

Ebben az esetben:

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' + \dots + c_ny_n'$$

Ismét deriválva:

$$y'' = c_1'y_1' + c_2'y_2' + \dots + c_n'y_n' + c_1y_1'' + c_2y_2'' + \dots + c_ny_n''$$

Ismét önkényesen rendelkezünk úgy, hogy

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' + \dots + c_n'y_n' = 0 \quad \text{legyen.} \qquad (2.5.12_2)$$

Ekkor

$$y'' = c_1y_1'' + c_2y_2'' + \dots + c_ny_n''$$

Folytatva ezt az eljárást (c_i' deriváltakat tartalmazó összeget mindig zérussal téve egyenlővé) az $y^{(n-1)}$ deriváltra az

$$y^{(n-1)} = c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)} + \dots + c_ny_n^{(n-1)}$$

kifejezést kapjuk, ahol a

$$c_1'y_1^{(n-2)} + c_2'y_2^{(n-2)} + \dots + c_n'y_n^{(n-2)} = 0 \qquad (2.5.12_{n-1})$$

rendelkezést tettük.
Ismét differenciálva:

$$y^{(n)} = c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)} + c_1y_1^{(n)} +$$

$$+ c_2y_2^{(n)} + \dots + c_ny_n^{(n)} \qquad (2.5.12_n)$$

Helyettesítsük be a (2.5.12), $(2.5.12_1),\dots,(2.5.12_n)$ kifejezéseket a (2.5.10) inhomogén egyenletbe:

$$c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)} + c_1y_1^{(n)} +$$

$$+ c_2y_2^{(n)} + \dots + c_ny_n^{(n)} + p_1(c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)} + \dots +$$

$$+ c_ny_n^{(n-1)}) +$$

$$+ p_2(c_1y_1^{(n-2)} + c_2y_2^{(n-2)} + \dots + c_ny_n^{(n-2)}) +$$

$$\vdots$$

$$+ p_n(c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n) = f(x)$$

Rövidebb írásmóddal:

$$c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i(y_1^{(n)} +$$

$$+ p_1y_i^{(n-1)} + \dots + p_ny_i) = f(x) \qquad (2.5.13)$$

Itt $c_i(y_i^{(n)} + p_1y_i^{(n-1)} + \dots + p_ny_i) = 0$, mivel az y_i-k megoldásai a homogén egyenletnek $(i = 1,2,\dots,n)$, hiszen az alaprendszer függvényei.

Figyelembe véve a $(2.5.12_1)$ - $(2.5.12_{n-1})$ és (2.5.13) egyenleteket a keresett $c_i(x)$ függvények $c_i'(x)$ deriváltjaira az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} &c_1'y_1 + c_2'y_2 + \dots + c_n'y_n = 0 \\ &c_1'y_1' + c_2'y_2' + \dots + c_n'y_n' = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{aligned} \qquad (2.5.14)$$

A (2.5.14) inhomogén lineáris egyenletrendszer determinánsa a $|\underline{\underline{W}}(x)|$ Wronski-determináns, amely az alaprendszer függvényeinek lineáris függetlensége folytán zérustól különböző, így $c_1',c_2',\dots,c_n'$ függvények meghatározhatók: Jelöljük ezeket

$$c_1'(x) = \varphi_1(x), \quad c_2'(x) = \varphi_2(x), \ldots, c_n'(x) = \varphi_n(x)\text{-szel.} \tag{2.5.15}$$

Integrálással:

$$c_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + D_1; \quad c_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + D_2, \ldots;$$

$$c_n(x) = \int \varphi_n(x)dx + D_n \tag{2.5.16}$$

Ezeket az értékeket a (2.5.12') egyenletbe helyettesítve:

$$y = D_1y_1 + D_2y_2 + \ldots + D_ny_n + \sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x)dx \tag{2.5.17}$$

amely a (2.5.10) inhomogén egyenlet általános megoldása.

Itt $\sum_{i=1}^{n} D_iy_i$ a homogén egyenlet általános megoldása, $\sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x)dx$ pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

Megjegyezzük, hogy az

$$y'' + p_1y' + p_2y = f(x)$$

másodrendű inhomogén egyenletrendszer esetében, ha y_1 és y_2 alaprendszere a megfelelő

$$y'' + p_1y' + p_2y = 0$$

homogén egyenletnek, a (2.5.14) egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' &= f \end{aligned}$$

Innen

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}, \qquad c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

Továbbá:

$$c_1 = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{|\underline{\underline{W}}(x)|} dx + D_1, \qquad (2.5.20)$$

$$c_2 = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{|\underline{\underline{W}}(x)|} dx + D_2.$$

<u>Példa:</u>
Tekintsük az

$y'' - \frac{1}{x} y' = x$ inhomogén másodrendű egyenletet.

A megfelelő homogén egyenlet

$y'' - \frac{1}{x} y' = 0$, azaz

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$$

Integrálva:

$$\ln y' = \ln x + \ln A$$

$$y' = Ax$$

$$y = A\frac{x^2}{2} + B = \frac{A}{2}x^2 + B\cdot 1 = c_1\cdot 1 + c_2\cdot x^2$$

A homogén egyenlet egy alaprendszere: $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$.
Keressük az inhomogén egyenlet megoldását:

$y = c_1(x) + c_2(x)x^2$ alakban.

A (2.5.19) formulák alapján

$$c_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ x & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix}} dx + D_1 = \int \frac{-x^3}{2x} dx + D_1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + D_1 = -\frac{x^3}{6} + D_1$$

$$c_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix}}{2x} dx + D_2 = \frac{1}{2}\int dx + D_2 = \frac{x}{2} + D_2$$

Tehát a keresett inhomogén másodrendű egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1(x)y + c_2(x)\cdot x^2 = -\frac{x^3}{6} + D_1 + \frac{x^3}{2} + D_2x^2 =$$

$$= D_1 + D_2x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

2.6 Állandó együtthatójú homogén lineáris egyenletek

Az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek a függvény együtthatós egyenletek speciális esetét képezik, így az eddig ismertetett tételek és megoldási módszerek természetesen érvényesek állandó együtthatójú egyenletek esetében is. Az a tény, hogy a keresett függvények és deriváltjainak együtthatói állandók, lényegesen egyszerűsíti az egyenletek megoldását.

Látni fogjuk, hogy az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek elemi függvények segítségével pusztán algebrai műveletekkel megoldhatók, még integrálásra sem lesz szükség. Ebben a pontban az állandó együtthatójú homogén egyenletek megoldásával foglalkozunk. A megoldási módszereket szemléletesség kedvéért másodrendű állandó együtthatójú egyenletek esetére mutatjuk be. Ahol szükséges és lehetséges lesz, rámutatunk az állítások és módszerek érvényességére n-edrendű állandó együtthatójú lineáris egyenletek esetére.

Legyen adva a következő másodrendű homogén lineáris egyenlet:

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \qquad (2.6.1)$$

ahol a_1 és a_2 valós állandók.

Próbáljuk meg kielégíteni ezt az egyenletet az $y = e^{\lambda x}$ alakú exponenciális függvénnyel. (λ = const.)
Ekkor

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Az y' és y'' így kapott értékeit a (2.6.1) egyenletbe helyettesítve az

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$$

egyenletet kapjuk. Mivel $e^{\lambda x}$ értéke bármely x értékre zérustól különböző, egyszerűsíthetünk vele így a

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (2.6.2)$$

másodfokú algebrai egyenletet kapjuk.

Látható, hogy $e^{\lambda x}$ kielégíti a (2.6.1) egyenletet, ha λ kielégíti a (2.6.2) összefüggést. A (2.6.2) egyenletet a (2.6.1) differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezzük.

A karakterisztikus egyenletet formailag könnyen előállíthatjuk a (2.6.1) egyenletből, ha a keresett függvény deriváltjait $(y = y^{(o)}, y', y'')$ λ-nak megfelelő hatványával helyettesítjük $(1, \lambda, \lambda^2)$.

Tehát másodrendű állandó együtthatójú homogén lineáris egyenletek partikuláris megoldásainak megkeresése másodfokú algebrai egyenlet megoldására vezethető vissza.

A (2.6.2) vegyes másodfokú egyenlet megoldása:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \qquad (2.6.3)$$

A karakterisztikus egyenlet λ_1 és λ_2 gyökeire vonatkozólag három lehetséges esetet különböztetünk meg:

1. λ_1 és λ_2 különböző valós számok $(a_1^2 - 4a_2 > 0)$
2. λ_1 és λ_2 konjugált komplex számok: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$
   $\lambda_2 = \alpha - i\beta$
   (ez a helyzet, ha $a_1^2 - 4a_2 < 0$).
3. $\lambda_1 = \lambda_2$, azaz λ_1 a (2.6.2) egyenlet kétszeres gyöke $(a_1^2 - 4a_2 = 0)$.

Ezektől az esetektől függően különböző általános megoldásokat kapunk a (2.6.1) homogén lineáris állandó együtthatójú differenciálegyenletekre.

1. A karakterisztikus egyenlet gyökei valósak és különbözőek. Ebben az esetben két lineárisan független partikulási megoldást kapunk, ugyanis ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor a (2.6.1) egyenletet kielégítik az

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad \text{és} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \qquad (2.6.4)$$

függvények. Ezek lineárisan függetlenek, mivel

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \neq c.$$

(Két függvény, y_1 és y_2 lineáris függetlensége ugyanis azt jelenti, hogy $y_2 \neq c\, y_1$, mert ha $y_2 = c\, y_1$ lenne, akkor $1.y_2 - cy_1 = 0$ fennáll úgy, hogy nem mindkét függvény együtthatója zérus).
Ez esetben a (2.6.1) egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (2.6.5)$$

<u>Példa</u>:

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Ennek gyökei:

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1,$$

tehát az általános megoldás:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

2. A karakterisztikus egyenlet gyökei konjugált komplex számok:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \text{tehát}$$

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x},$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{e^{(\alpha-i\beta)x}} = e^{2i\beta x} \neq c.$$

Ebben az esetben a (2.6.1) egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Mivel a (2.6.1) egyenletet a valós számok tartományában adtuk meg, arra törekszünk, hogy a megoldás ne tartalmazzon komplex számokat. Ez könnyen el is érhető.

Az Euler-formula alkalmazásával

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$

$$= e^{\alpha x}\cos\beta x + i\, e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Vezessük be a $z_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $z_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ jelölést.

<u>1. Lemma:</u>

Ha az $u = z_1 + iz_2$ komplex függvény kielégíti a (2.6.1) homogén egyenletet, akkor z_1 és z_2 külön-külön is megoldása az egyenletnek.

<u>Bizonyítás:</u>

$$u' = z_1' + i\, z_2'$$

$$u'' = z_1'' + i\, z_2''$$

A nyert kifejezéseket behelyettesítve a (2.6.1) egyenletbe

$$u'' + a_1u' + a_2u = z_1'' + iz_2'' + a_1(z_1' + iz_2') +$$

$$+ a_2(z_1 + iz_2) = 0$$

Innen:

$$(z_1'' + a_1z_1' + a_2z_1) + i(z_2'' + a_1z_2' + a_2z_2) = 0$$

Egy komplex szám csak akkor lehet zérussal egyenlő, ha mind a valós része, mind a képzetes része zérus, azaz

$$z_1'' + a_1z_1' + a_2z_1 = 0 \quad \text{és} \quad z_2'' + a_1z_2' + a_2z_2 = 0.$$

Következőleg $z_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ és $z_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ megoldásai a (2.6.1) egyenletnek, mégpedig lineárisan független megoldások, mivel

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x} = \operatorname{tg}\beta x \neq 0.$$

Ennek következtében, ha a karakterisztikus egyenlet gyökei konjugált komplex számok, akkor a (2.6.1) egyenlet általános megoldása:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \qquad (2.6.6)$$

mivel két lineárisan független partikuláris megoldás tetszőleges lineáris kombinációja a másodrendű lineáris homogén egyenlet általános megoldását szolgáltatja.

A második gyök: $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ugyanezeket a partikuláris megoldásokat szolgáltatja előjeltől eltekintve.

<u>Példa:</u>
Határozzuk meg az

$$y'' + 6y' + 34y = 0$$

egyenlet általános megoldását!

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 34 = 0$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 136}}{2} = \begin{cases} -3 + 5i \\ -3 - 5i \end{cases}$$

Az általános megoldás a (2.6.6) összefüggés alapján:

$$y = e^{-3x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$$

3. A karakterisztikus egyenlet gyökei valósak és egyenlők.
Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, akkor a (2.6.1) egyenletnek közvetlenül csak egy partikuláris megoldását nyerjük:

$$y_1 = e^{\lambda x}$$

Egy az y_1-től lineárisan független y_2 megoldást szorzat alakban keresünk:

$$y_2 = y_1 u$$

Ekkor

$$y_2' = y_1' u + y_1 u'$$

$$y_2'' = y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u''$$

Behelyettesítve a kapott kifejezéseket a (2.6.1) egyenletbe:

$$y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u'' + a_1 y_1' u + a_1 y_1 u' + a_2 y_1 u = 0.$$

Innen:

$$u(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + u'(2y_1' + a_1y_1) + y_1u'' = 0$$

Az u együtthatója zérus, mivel y_1 feltételezésünk szerint megoldása a (2.6.1) egyenletnek. Továbbá:

$$2y_1' + a_1y_1 = 2\lambda e^{\lambda x} + a_1e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(2\lambda + a_1) = 0$$

mivel a (2.6.3) formulában $\lambda_{1,2} = \lambda$ (most $a_1^2 - 4a_2 = 0$), tehát $2\lambda = -a_1$.

Ezek alapján:

$$y_1u'' = 0$$

azaz

$$u'' = 0.$$

Elegendő, ha ezt az egyenletet kielégítő tetszőleges függvényt vesszük, mivel partikuláris megoldást keresünk.

Integrálással

$$u' = c$$

$$u = cx\ ,$$ ahol most $c = 1$ választható.

Tehát:

$$y_2 = y_1u = x\,e^{\lambda x}.$$

Kétszeres gyök esetén tehát a (2.6.1) egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = e^{\lambda x}(c_1 + c_2x) \qquad (2.6.7)$$

<u>Példa:</u>

Keressük meg a

$$16y'' - 24y' + 9y = 0$$

egyenlet általános megoldását!

A karakterisztikus egyenlet:

$$16\lambda^2 - 24\lambda + 9 = 0.$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 16\cdot 9\cdot 4}}{32} = \frac{3}{4} = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.$$

Az általános megoldás:

$$y = e^{\frac{3}{4}x}\cdot(c_1 + c_2x).$$

Az eddigiekből látható, hogy az állandó együtthatójú másodrendű homogén lineáris egyenlet megoldható minden kvadratura nélkül, csupán másodfokú algebrai egyenletre támaszkodva.

Hasonló a helyzet n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenletek esetében. Az adott

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} +\ldots+ a_{n-1}y' + a_ny = 0 \qquad (2.6.8)$$

$(a_1,a_2,\ldots,a_n$ valós állandók)

állandó együtthatójú n-edrendű homogén egyenlet megoldását is

$$y = e^{\lambda x}$$

alakban keressük.
Ekkor

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2e^{\lambda x},\ldots,y^{(n)} = \lambda^ne^{\lambda x}$$

Behelyettesítve ezeket az értékeket a (2.6.8) egyenletbe:

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} +\ldots+ a_n) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet tehát:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} +\ldots+ a_n = 0 \qquad (2.6.9)$$

(Mivel $e^{\lambda x} \neq 0$, egyszerűsíthetünk vele.)

Most is igaz, hogy $e^{\lambda x}$ kielégíti a (2.6.8) egyenletet, ha λ gyöke a (2.6.9) karakterisztikus egyenletnek.

A karakterisztikus egyenlet most n-edfokú algebrai egyenlet, amelynek az algebra alaptétele értelmében n gyöke van, de lehetnek többszörös gyökök is.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a (2.6.9) karakterisztikus egyenlet valamennyi gyöke különböző!

Legyenek ezek a gyökök:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n. \qquad (2.6.10)$$

E gyökök mindegyikének megfelel a (2.6.8) egyenletnek egy partikuláris megoldása:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x} \qquad (2.6.11)$$

Kimutatjuk, hogy ezek a partikuláris megoldások alaprendszert képeznek (lineárisan függetlenek).

Képezzük a (2.6.11) függvények Wronski-determinánsát:

$$\underline{W}[y_1,y_2,\dots,y_n]=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \dots\dots\dots & & \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{x\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{x\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} \cdot |D|$$

ahol a $|D|$ determináns ún. Vandermonde-determináns, amelynek értéke:

$$|D| = c(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\dots(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_3)\dots$$
$$\dots(\lambda_2 - \lambda_n)\dots(\lambda_{n-1} - \lambda_n). \qquad (2.6.13)$$

Ennek belátását legegyszerűbben úgy végezhetjük, hogy a $|D|$ determinánst az első oszlop elemei szerint kifejtjük, miáltal egy (n-1)-edfokú polinomot nyerünk:

$$|D| = A_o + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_1^2 + \dots + A_{n-1}\lambda_1^{n-1} = P_{n-1}(\lambda_1) \qquad (2.6.13')$$

ahol az $A_o, A_1, \dots, A_{n-1}$ együtthatók a megfelelő algebrai aldeterminánsok értékei. A $P_{n-1}(\lambda_1)$ polinom gyökei a $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ számok, hiszen ha $\lambda_1 = \lambda_k$ $(k = 2,3,\dots,n)$, akkor a $|D|$ determináns első és k-adik oszlopa megegyezik, így $|D| = 0$, azaz $P_{n-1}(\lambda_1) = 0$.

A (2.6.13) formula a $P_{n-1}(\lambda_1)$ polinom gyöktényezős alakja, amely zérustól különböző, ha a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számok különböznek egymástól.

Eszerint a (2.6.11) függvények alaprendszert képeznek, így a (2.6.8) homogén egyenlet általános megoldása különböző (egyszeres) valós gyökök esetében:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Tekintsük most a többszörös gyökök esetét. Erre vonatkozólag megelégszünk az eredmények felsorolásával, a részletes vizsgálatot illetőleg az irodalomra utalunk. (Lásd pl.[4])

1. Minden egyes k-szoros valós λ gyöknek az általános megoldásban a következő alakú összeadandó felel meg:

$$e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x + \ldots + c_k x^{k-1})$$

2. Minden egyes egyszeres konjugált komplex $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ gyökpárnak a következő összeadandó felel meg az általános megoldásban:

$$e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$

3. Minden egyes m-szeres konjugált komplex $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ gyökpárnak az általános megoldásban az alábbi alakú összeadandó felel meg:

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \ldots C_m x^{m-1})\cos\beta x + (D_1 + D_2 x + \ldots + D_m x^{m-1})\cdot\sin\beta x]$$

ahol a C_i és D_j számok állandók.

Végeredményben a tetszőleges állandók száma az egyenlet rendszámával egyenlő és az említett összeadandók összege az egyenlet általános megoldását adja.

Magasabb rendű állandó együtthatójú lineáris homogén egyenletek megoldásában a nehézséget a magasabb fokú algebrai egyenletek gyökeinek meghatározása okozza. Bizonyos esetekben egyszerű fogások alkalmazhatók.

<u>Példák:</u>

1. Határozzuk meg az

$$y''' + y = 0$$

harmadrendű lineáris homogén egyenlet általános megoldását. A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 + 1 = 0 \quad \text{azaz} \quad \lambda^3 = -1.$$

Ennek gyökeit $\sqrt[3]{-1}$ három értéke adja. Egyik gyök: $\lambda_1 = -1$.
Ha a karakterisztikus egyenletet a $\lambda + 1$ gyöktényezővel elosztjuk:

$$\frac{\lambda^3 + 1}{\lambda + 1} = \lambda^2 - \lambda + 1$$

Ennek gyökei:

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tehát a karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

A mondottak értelmében az egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

2. Keressük az

$$y^{(V)} + y^{(IV)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$$

ötödrendű homogén lineáris egyenlet megoldását.
A karakterisztikus egyenlet most:

$$\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

Könnyű belátni, hogy $\lambda = -1$ gyöke ennek az egyenletnek.
Ha a karakterisztikus egyenletet a $(\lambda + 1)$ gyöktényezővel elosztjuk eredményül

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \quad \text{adódik.}$$

Ebből $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = \pm i$.

Innen $(\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2$.

Tehát a karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = i, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = -i$$

A fentiek szerint az egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)\cos x + (c_4 + c_5 x)\sin x.$$

2.7 Állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenletek

Az állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet

$$D[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \qquad (2.7.1)$$

speciális esetét képezi a függvényegyütthatójú inhomogén egyenletnek, ily módon a megoldását elvileg ismerjük: Meg kell határozni a megfelelő homogén egyenlet egy alaprendszerét, venni annak tetszőleges lineáris kombinációját, vagyis képezni a homogén egyenlet általános megoldását - majd az állandók variálásával meghatározzuk az inhomogén egyenletnek egy partikuláris megoldását és ezt hozzáadjuk a homogén egyenlet általános megoldásához. Ez a módszer azonban meglehetősen hosszadalmas. A homogén egyenlet egy alaprendszerének meghatározására az inhomogén egyenlet esetében is szükség van, a megoldást ezzel kell kezdeni. Mivel az együtthatók állandók, az alaprendszer meghatározása kvadraturák nélkül, algebrai egyenletek megoldásával elvégezhető.
Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását akkor tudjuk egyszerű módszerekkel kiszámítani, ha a (2.7.1) egyenlet jobb oldalán álló $f(x)$ függvény bizonyos speciális alakú. A műszaki alkalmazásokban rendszerint ez a helyzet.
Milyen speciális alakú $f(x)$ függvények teszik lehetővé az egyszerű megoldást? Először is igen gyakori, hogy a (2.7.1) egyenlet jobb oldalán álló $f(x)$ függvény több függvény összege. Ebben az esetben érvényes a következő tétel.

<u>Tétel:</u>
Ha a (2.7.1) lineáris inhomogén differenciálegyenlet

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x) \qquad (2.7.2)$$

és Y_1 megoldása az $L[y] = f_1(x)$ egyenletnek, azaz

$L[Y_1] = f_1(x)$

Y_2 megoldása az $L[y] = f_2(x)$ egyenletnek, azaz

$L[Y_2] = f_2(x)$

Y_m megoldása az $L[y] = f_m(x)$ egyenletnek, azaz

$L[Y_m] = f_m(x)$

akkor a (2.7.2) egyenletnek megoldása az

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m \qquad \text{összeg.}$$

A tétel tehát azt mondja ki, hogy ha a jobb oldal m számú függvény összege, akkor m számú egyszerűbb jobb oldalú egyenletet oldhatunk meg és ezek megoldásainak összege az eredeti egyenletnek partikuláris megoldása.

Bizonyítás:
Mivel $L[y]$ lineáris operátor, ezért

$$L[Y] = L[Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m] = L[Y_1] + L[Y_2] + \ldots + L[Y_m] =$$

$$= f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)$$

További jelentős egyszerűsítési lehetőséget ad a megoldás szempontjából, ha a (2.7.1) egyenlet jobb oldalán álló f(x) függvény polinom, exponenciális függvény, cos kx, sin ℓx, ch kx, sh ℓx vagy ezek szorzata.

A megoldási módszereket másodrendű lineáris inhomogén egyenletekre vonatkozólag mutatjuk be áttekinthetőség kedvéért. Az eljárás elvileg teljesen analóg n-edrendű inhomogén egyenletek esetében, csak több számolást igényel.
A példák között néhány magasabb rendű egyenlet megoldását is bemutatjuk.

1. Legyen adva az

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = P(x)e^{\alpha x} \tag{2.7.3}$$

másodrendű lineáris inhomogén egyenlet, ahol P(x) egy m-edfokú polinom és α állandó.

Megmutatjuk, hogy ha α nem gyöke a homogén egyenlet

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

karakterisztikus egyenletének, akkor a (2.7.3) egyenlet partikuláris megoldása:

$y = Q(x)e^{\alpha x}$, ahol Q(x) ugyancsak m-edfokú polinom.

A megoldást tehát ugyanolyan alakban keressük, mint a (2.7.3) egyenlet jobb oldalán álló függvény, azonban a Q(x) m-edfokú polinomot általános alakban írjuk fel:

$$Q(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_o$$

alakban, ahol az együtthatók egyenlőre ismeretlenek.

Helyettesítsük be az $y = Q(x)e^{\alpha x}$ függvényt a (2.7.3) egyenletbe:

$$Q''(x)e^{\alpha x} + 2\alpha Q'(x)e^{\alpha x} + \alpha^2 Q(x)e^{\alpha x} + a_1[Q'(x)e^{\alpha x} +$$

$$+\alpha Q(x)e^{\alpha x}] + a_2 Q(x)e^{\alpha x} = e^{\alpha x}[Q''(x) + (2\alpha + a_1)Q'(x) +$$

$$+\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)Q(x)] = P(x)e^{\alpha x}$$

Mivel $e^{\alpha x} \neq 0$, kapjuk:

$$Q''(x) + (2\alpha + a_1)Q'(x) + (\alpha^2 + a_1 + a_2)Q(x) = P(x). \tag{2.7.4}$$

Innen következik, hogy $Q(x)e^{\alpha x}$ a (2.7.3) egyenlet megoldása lesz, ha a benne szereplő együtthatókat sikerül úgy meghatározni, hogy a (2.7.4) egyenlet azonossággá váljék. Mivel a bal oldalon is m-edfokú polinom áll, ha α nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek (azaz $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2) \neq$ $\neq 0$) nem kell mást tennünk, mint a (2.7.4) egyenlet mindkét oldalán x azonos hatványainak az együtthatóit egyenlővé kell tennünk egymással.

Ha α egyszeres gyöke[1] a karakterisztikus egyenletnek azaz $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$, akkor a (2.7.4) egyenlet bal oldalán már csak (m-1)-edfokú polinom áll.

Ha viszont α kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, akkor $(2\alpha + a_1) = 0$ is teljesül és a bal oldalon már csak (m-2)-edfokú polinom áll, tehát azonosságról egyik esetben sem lehet szó.
(Ugyanis ha α kétszeres gyök, a

$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$ egyenlet megoldása

$$= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} = -\frac{a_1}{2} = \alpha$$

lévén $2\alpha = -a_1$).

Ha α egyszeres vagy kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, akkor a (2.7.3) egyenlet megoldását

$$y = x^k Q(x)e^{\alpha x} \tag{2.7.5}$$

alakban kell keresnünk, ahol k az α gyök multiplicitásának felel meg. (Ha α nem gyök, akkor k = 0).

---

[1] Ha α gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor a mechanikából kölcsönzött szóhasználattal "rezonanciáról" beszélünk.

Az eljárás ugyanez n-edrendű egyenlet esetében is a jobb oldal a (2.7.3) egyenlet jobb oldalával megegyező.

A (2.7.5) alakú megoldással a (2.7.4) egyenlet azonossággá tehető.

Példa:

$$y'' - 2y' + y = 1 + x + (6x^2 - 4)e^x$$

A jobb oldalt válasszuk ketté, azaz képezzük a következő két egyenletet:

$$y'' - 2y' + y = 1 + x$$

$$y'' - 2y' + y = (6x^2 - 4)e^x.$$

A $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyöke:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1 \quad \text{(kétszeres gyök).}$$

Az első egyenletben $\alpha = 0$, $m = 1$ és α nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, tehát egy partikuláris megoldást

$y = ax + b$ alakban keresünk.

Ekkor $y' = a$

$y'' = 0.$

Ezeket a kifejezéseket behelyettesítve az egyenletbe:

$$-2a + ax + b = x + 1$$

Innen: $a = 1$, $b = 3$.
Tehát az első egyenlet megoldása: $Y_1 = x + 3$.

A második egyenletben $\alpha = 1$, $m = 2$ és α kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, tehát a megoldást a következő alakban keressük:

$$y = x^2(ax^2 + bx + c)e^x = (ax^4 + bx^3 + cx^2)e^x$$

$$y' = [ax^4 + (4a + b)x^3 + (3b + c)x^2 + 2cx]e^x$$

$$y'' = [ax^4 + (8a + b)x^3 + (12a + 6b + c)x^2 +$$

$$+(6b + 4c)x + 2c]e^x$$

Ezeket a második egyenletbe helyettesítve az alábbi egyenletre jutunk:

$$12ax^2 + 6bx + 2c = 6x^2 - 4$$

Itt az x azonos hatványainak együtthatóit egyenlővé téve

$$12a = 6, \quad 6b = 0, \quad 2c = -4$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 0, \quad c = -2$$

Tehát a második egyenlet partikuláris megoldása:

$$Y_2 = (\frac{x^4}{2} - 2x^2)e^x$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = x + 3 + (\frac{x^4}{2} - 2x^2)e^x + (c_1 + c_2x)e^x$$

2. Legyen $f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ (vagy $P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$), ahol $P(x)$ egy polinom α és β állandók. Keressük tehát a

$$y'' + a_1y' + a_2y = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$$

egyenlet általános megoldását.

Az Euler összefüggés alapján:

$$P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{1}{2}P(x)e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) =$$

$$= \frac{1}{2}P(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2}P(x)e^{(\alpha-i\beta)x} \qquad (2.7.6)$$

Ezzel az átalakítással a (2.7.4) egyenlet (2.7.3) alakú egyenletre vezettük vissza.

A megoldást, miként a (2.7.3) egyenlet esetében, keresheti jük

$$Q_1(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + Q_2(x)e^{(\alpha-i\beta)x} \qquad (2.7.7)$$

alakban, ahol $Q_1(x)$ és $Q_2(x)$ ugyanolyan fokszámú polinomok, mint $P(x)$, ha $\alpha \pm i\beta$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek. Ha $\alpha \pm i\beta$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor a $Q_1(x)$ és $Q_2(x)$ polinomokat x-szel kell szorozni. Ugyanez az eljárás n-edrendű egyenlet esetében ($n > 2$). Ekkor az $\alpha \pm i\beta$ k-szoros gyök is lehet, akkor a $Q_1(x)$ és $Q_2(x)$ polinomokat x^k-val kell szorozni, a gyök multiplicitásának megfelelően.

Példa:
Integrálandó az

$$y'' - y = x \cos x \, e^{x} \quad \text{egyenlet.} \tag{2.7.8}$$

Itt $\alpha = 1$, $\beta = 1$; $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 1 = 0. \quad \lambda = \pm 1, \quad \text{tehát} \quad 1 \pm i$$

nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek. A (2.7.6) összefüggésnek megfelelően (2.7.8) az alábbi alakra hozható:

$$y'' - y = \frac{1}{2}x \, e^{(1+i)x} + \frac{1}{2}x \, e^{(1-i)x}$$

Keressük először az

$$y'' - y = \frac{1}{2}x \, e^{(1+i)x}$$

egyenlet partikuláris megoldását

$$Y_1 = (ax + b)e^{(1+i)x} \quad \text{alakban} \quad (\text{itt} \quad Q_1(x) = ax + b)$$

$$Y_1' = ae^{(1+i)x} + (ax + b)(1 + i)e^{(1+i)x} =$$

$$= a(1 + i)x + b(1 + i) + a \, e^{(1+i)x}$$

$$Y_1'' = a(1 + i)e^{(1+i)x} + [a(1 + i)^2 x + b(1 + i)^2 +$$

$$+ a(1 + i)] \, e^{(1+i)x} = [2iax + 2bi + 2a(1 + i)] \, e^{(1+i)x}$$

Behelyettesítve az egyenletbe:

$$(2i - 1)ax + [(2i - 1)b + 2a(i + 1)] = \frac{1}{2}x$$

Innen: $a = \dfrac{-1 - 2i}{10}$, $\quad b = \dfrac{7 - i}{25}$

Ezek szerint

$$Y_1 = \left(\frac{-1 - 2i}{10} x + \frac{7 - i}{25}\right)e^{(1+i)x} =$$

$$= \left(\frac{-1 - 2i}{10} x + \frac{7 - i}{25}\right)e^{x}(\cos x + i \sin x)$$

Az $y'' - y = \frac{1}{2}x \, e^{(1-i)x}$

második egyenlet megoldását Y_2 -t úgy kapjuk, hogy az előző levezetésben 1+i helyett mindenütt az 1-i konjugáltját írjuk, miáltal Y_2 az Y_1 megoldás konjugáltja lesz:

$$Y_2 = \left(\frac{-1 + 2i}{10} x + \frac{7 + i}{25}\right)e^{(1-i)x} =$$

$$= \left(\frac{-1 + 2i}{10} x + \frac{7 + i}{25}\right)e^{x}(\cos x - i \sin x)$$

A (2.7.8) egyenlet megoldása:

$Y = Y_1 + Y_2 = Y_1 + \bar{Y}_1$ az Y_1 megoldás valós részének kétszeresét adja:

$$Y = e^{x}\left[\left(-\frac{1}{5}x + \frac{14}{25}\right)\cos x + \left(\frac{2}{5}x + \frac{2}{25}\right)\sin x\right]$$

Ha ezt a kifejezést a homogén egyenlet $c_1e^{x} + c_2e^{-x}$ általános megoldásához hozzáadjuk, megkapjuk a (2.7.8) egyenlet általános megoldását.

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a (2.7.8) egyenlet partikuláris megoldását mindjárt az eredeti egyenlet jobb oldalának megfelelő trigonometrikus, lineáris és exponenciális függvények szorzatának általánosabb alakjában keressük.

$$Y = e^{x}\left[(ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x\right]$$

alakban keressük. (Oldjuk meg így is az egyenletet!)

Általában, ha az inhomogén egyenlet (2.7.4) alakú, akkor egy partikuláris megoldását

$$Y = e^{\alpha x}\left[R_1(x)\cos\beta x + R_2(x)\sin\beta x\right] \qquad (2.7.9)$$

alakban kereshetjük, ahol $R_1(x)$ és $R_2(x)$ a $P(x)$-szel azonos fokszámú polinomok, amennyiben $\alpha \pm i\beta$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek. Ha $\alpha \pm i\beta$ gyök, akkor a (2.7.9) egyenlet jobb oldalát x-szel kell szorozni.

Általánosítva tehát ha az egyenlet

$$y'' + a_1y' + a_2y = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$$

alakú, akkor a megoldást

$$Y = x^{k}\, e^{\alpha x}\left[R_1(x)\cos\beta x + R_2(x)\sin\beta x\right]$$

alakban keressük, ahol $R_1(x)$ és $R_2(x)$ fokszáma megegyezik $P_1(x)$ és $P_2(x)$ közül a nagyobbiknak a fokszámával, k pedig az $\alpha \pm i\beta$ gyök multiplicitásának felel meg.

Példa:

$$y'' + y = 2x \sin x$$

Itt $\alpha = 0$, $\beta = 1$. A $\lambda^2 + 1 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $\pm i$.
A partikuláris megoldást tehát a következő alakban keressük:

$$Y = x[(ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x].$$

Ekkor

$$Y'' = [-ax^2 + (4c - b)x + (2a + 2d)]\cos x +$$

$$+[-cx^2 - (4a + d)x + (2c - 2b)]\sin x.$$

Behelyettesítve az egyenletbe, kapjuk, hogy:

$$[2cx + (a + d)]\cos x + [-2ax + (c - b)]\sin x = 2x \sin x$$

Az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazva

$$2c = 0, \quad a + d = 0, \quad -2a = 2, \quad c - b = 0$$

Innen:

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 1, \quad \text{tehát az}$$

$$Y = x(\sin x - x \cos x)$$

partikuláris megoldást nyerjük.
Az általános megoldás:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x(\sin x - x \cos x) =$$

$$= (c_1 - x^2)\cos x + (c_2 + x)\sin x.$$

2.8 Állandó együtthatójú lineáris egyenletekre visszavezethető egyenletek

1. Az Euler-féle egyenlet.
Az Euler-egyenlet a következő alakú:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \tag{2.8.1}$$

Foglalkozzunk először az

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = f(x) \qquad (2.8.1')$$

másodrendű inhomogén Euler-egyenlet megoldásával.

Vezessük be a független változóra az $x = e^t$ azaz $t = \ln x$ helyettesítést!

Ekkor:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} = \dot{y}\,\frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{1}{x} - \frac{dy}{dt}\,\frac{1}{x^2}\right)\frac{dt}{dx} = \ddot{y}\,\frac{1}{x^2} - \dot{y}\,\frac{1}{x^2}\,.$$

A kapott kifejezéseket behelyettesítve a (2.8.1') egyenletbe, kapjuk:

$$\ddot{y} - \dot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = f(e^t)$$

$$\ddot{y} + (a_1 - 1)\dot{y} + a_2y = f(e^t) \qquad (2.8.2)$$

A (2.8.2) egyenlet állandó együtthatójú inhomogén differenciálegyenlet, amelynek megoldása a korábban tárgyalt módszerekkel történik.

<u>Példa:</u>

$$x^2y'' - 2y = 2x \ln x$$

Az $x = e^t$, $t = \ln x$ helyettesítéssel az

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 2te^t$$

egyenlethez jutunk.

A homogén egyenlet általános megoldása a

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

alapján:

$$Y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását az egyenlő együtthatók módszerével keressük. Mivel $P(t) = 2t$ elsőfokú polinom és $e^{\alpha t} = e^t$, azaz $\alpha = 1$, amely nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért a keresett megoldás:

$y = (at + b)e^t$ alakú, ahol a és b ismeretlenek.

$$y' = [at + (a + b)]e^t$$

$$y'' = [at + (2a + b)]e^t$$

Behelyettesítve az egyenletbe:

$$[at + (2a + b)]e^t - [at + (a + b)]e^t - 2(at + b)e^t =$$

$$= 2te^t$$

Innen:

$$a = -1, \quad b = -\frac{1}{2}.$$

Tehát egy partikuláris megoldása az inhomogén egyenletnek:

$$y = -[t + \frac{1}{2}]e^t$$

Az átalakított állandó együtthatójú egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - (t + \frac{1}{2})e^t$$

Visszatérve az x változóra az Euler-egyenlet általános megoldását kapjuk:

$$y = c_1\frac{1}{x} + c_2x^2 - (\ln x + \frac{1}{2})x$$

Ugyancsak az $x = e^t$, azaz $t = \ln x$ helyettesítés az n-edrendű homogén

$$x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = 0 \quad (2.8.1')$$

Euler-egyenletet n-edrendű állandó együtthatójú lineáris homogén egyenletbe viszi át. Ugyanis ekkor

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} = e^t \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2})e^{-t} =$$

$$= e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})$$

Vegyük észre, hogy az x szerinti első és második deriváltak tartalmazzák az e^{-t}, ill. e^{-2t} együtthatókat.

Tegyük fel, hogy a k-adik derivált a következő alakú:

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt}\left(\frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \ldots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt}\right)$$

Akkor a (k+1)-edik derivált:

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = e^{-t} \frac{d}{dt}\left(\frac{d^k(y)}{dx^k}\right) =$$

$$= e^{-(k+1)t}\left[\frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} + (\alpha_1 - k)\frac{d^k y}{dt^k} + \ldots + - k\alpha_{k-1} \frac{dy}{dt}\right]$$

vagyis fellép az $e^{-(k+1)t}$ alakú tényező, a zárójelben pedig az első (k+1) deriváltnak egy állandó együtthatós homogén lineáris kifejezése áll. Formailag Y mindegyik deriváltja ugyanolyan alakú. A k-adik derivált rendjének megfelelően az e^{-t} k-adik hatványával kell szorozni egy homogén lineáris egyenletet ($k = 1,2,\ldots n$).

Ha most ezeket a deriváltakat a (2.8.1') egyenletbe helyettesítjük, akkor minthogy $y^{(k)}$ együtthatója $a_{k-1}x^k$, ahol most $x^k = e^{kt}$, a t-t tartalmazó kifejezések eltűnnek és egy n-edrendű állandó együtthatójú homogén egyenletre jutunk, amelyet a korábban vizsgált módszerekkel t-re megoldunk, majd visszatérünk az x változóra. Az inhomogén (1.8.1) Euler-egyenlet megoldása is az eddig vizsgált módszerekkel történik, természetesen a jobb oldalon $f(x) = f(e^t)$ helyettesítéssel.

2. A Bessel-egyenlet

Másodrendű Bessel-féle differenciálegyenletnek a következő alakú egyenletet nevezzük:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (n \text{ állandó}).$$

Ez az egyenlet $n = \frac{1}{2}$ esetben állandó együtthatójú egyenletre vezethető vissza a következő helyettesítéssel:

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}} = zx^{-\frac{1}{2}}$$

Ekkor

$$y' = z'x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}zx^{-\frac{3}{2}}$$

$$y'' = z''x^{-\frac{1}{2}} - z'x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}\cdot z$$

Behelyettesítve az egyenletbe:

$$x^2[z''x^{-\frac{1}{2}} - z'x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}zx^{-\frac{5}{2}}] + x[z'x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}zx^{-\frac{3}{2}}] +$$

$$+ (x^2 - \frac{1}{4})zx^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Innen:

$$z''x^{\frac{3}{2}} + z\cdot x^{\frac{3}{2}} = 0,$$

azaz: $z'' + z = 0$.

Ez utóbbi egyenlet egy alaprendszere: $z_1 = \cos x$, $z_2 = \sin x$. Tehát a Bessel-egyenlet megoldási alaprendszere: $n = \frac{1}{2}$ esetén:

$$y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}, \qquad y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

2.9 Lineáris másodrendű egyenletek oszcilláló megoldásokkal

A továbbiakban bizonyos másodrendű lineáris egyenletek integrálgörbéinek zérushelyeit vizsgáljuk. Az ilyen jellegű vizsgálatok nemcsak elméleti, hanem gyakorlati jelentőségűek is, mert az alkalmazások során igen hasznos információt szolgáltatnak.

Tekintsük a következő egyszerű állandó együtthatójú homogén egyenleteket:

$$y'' - a^2y = 0 \tag{2.9.1}$$

$$y'' + a^2y = 0 \tag{2.9.2}$$

Ha a fenti egyenletek partikuláris megoldásait összehasonlítjuk, azt látjuk, hogy mélyreható különbség van ezen függvények viselkedése között.

A (2.9.1) egyenlet partikuláris megoldásai a

$$\lambda^2 - a^2 = 0, \quad \lambda = \pm a$$

karakterisztikus egyenlet gyökei alapján: $y_1 = e^{ax}$, $y_2 = e^{-ax}$, az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$$

bármilyen állandók választása mellett a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban legfeljebb egy helyen lehet zérussal egyenlő.

Ugyanis, ha

$$c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} = 0$$

akkor

$$c_1 e^{2ax} + c_2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{-c_2}{c_1} \right|$$

ami egy meghatározott érték.

A (2.9.2) egyenlet megoldása

$$\lambda^2 = -a^2$$

$$\lambda = \pm ia, \quad y_1 = \cos ax, \quad y_2 = \sin ax$$

$$Y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax.$$

Az egyenlet minden megoldásának végtelen sok zérushelye van, amelyek $\frac{\pi}{a}$ távolságra vannak egymástól. Minden olyan intervallum, amelynek hossza nagyobb mint $\frac{\pi}{a}$, a (2.9.2) egyenlet megoldásának legalább egy zérushelyét tartalmazza, egy olyan intervallum, amelynek hossza nagyobb, mint $\frac{2\pi}{a}$, (2.9.2)-nek legalább két zérushelyét tartalmazza.

<u>Definíció:</u>

Ha egy differenciálegyenlet valamely megoldásának egy intervallumban legfeljebb egy zérushelye van, akkor azt mondjuk, hogy ez a megoldás ebben az intervallumban nem oszcilláló, az ellenkező esetben pedig azt, hogy a megoldás oszcilláló.

Eszerint, ha $a \leq 0$, akkor az $y'' + ay = 0$ egyenletnek olyan megoldásai vannak, amelyek bármely intervallumban nem oszcillálók, $a > 0$ esetén pedig elég hosszú intervallumban oszcillálók.

Ezt az eredményünket általánosíthatjuk változó együtthatójú másodrendű egyenletekre.

Tekintve, hogy bármely másodrendű lineáris egyenlet alkalmas transzformációval

$$y'' + Q(x)y = 0 \qquad (2.9.3)$$

alakra hozható, ezért elegendő vizsgálatunkat erre az alakra korlátozni.

Ha ugyanis az egyenlet

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (2.9.3')$$

alakban adott, akkor

$y = u(x)z$ helyettesítéssel

$$y' = uz' + u'z; \quad y'' = uz'' + 2u'z' + u''z$$

amelyeket a (2.9.3')-be helyettesítve:

$$uz'' + (2u' + Pu)z' + (u'' + Pu' + au)z = 0 \qquad (2.9.3'')$$

adódik.

Itt z' együtthatóját zérussá téve:

$$2u' + Pu = 0, \quad \text{innen} \quad u = e^{-\frac{1}{2}\int P dx}; \quad u' = -\frac{1}{2}Pe^{-\frac{1}{2}\int P dx};$$

$$u'' = \left(\frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P'\right)e^{-\frac{1}{2}\int P dx}.$$

Ezeket a (2.9.3'') egyenletbe helyettesítve:

$$z'' + \left(-\frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P' + Q\right)z = 0$$

adódik, amely ugyanolyan alakú, mint a (2.9.3) egyenlet.

<u>Tétel:</u>

Ha az (a,b) intervallumban $Q(x) \leq 0$ mindenütt teljesül, akkor abban az intervallumban

$$y'' + Q(x)y = 0 \qquad (2.9.3)$$

egyenlet összes megoldásai nem oszcillálók.

Bizonyítás:

Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a (2.9.3) egyenlet valamely $y_1(x)$ megoldásának az (a,b) intervallumban legalább két zérushelye van x_o és x_1, ahol $x_o < x_1$ és az (x_o, x_1) intervallumban $y_1(x)$-nek nincs több zérus helye[1].

Sturm-tétele:

Ha x_o és x_1 egy másodrendű differenciálegyenlet $y_1(x)$ megoldásának két szomszédos zérus helye, akkor ugyanezen egyenlet minden egyéb - az $y_1(x)$-től lineárisan független - $y_2(x)$ megoldásának x_o és x_1 között pontosan egy zérushelye van.

Bizonyítás:

Képezzük a

$$|\underline{W}|(x) = y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x) \qquad (2.9.4)$$

Wronski-féle determinánst. Tegyük fel, hogy az (x_o, x_1) intervallumban az $y_2(x)$ megoldásnak nincsenek zérushelyei. Az y_1 és y_2 megoldások lineáris függetlensége miatt

---

[1]Lemma: Ha az $y_1(x) \not\equiv 0$ folytonos és differenciálható függvény az x_o pont zérushelye, akkor x_o-nak van olyan $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ környezete, amelyben a függvénynek nincs több zérushelye. Ellenkező esetben ugyanis x_o torlódási pontja lenne más $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ zérushelyeknek, amikor is

$$\frac{y_1(x_n) - y_1(x_o)}{x_n - x_o} = 0 \text{ lenne, hiszen}$$

$y_1(x_n) = 0$, $y_1(x_o) = 0$. Mivel $y_1(x)$ differenciálható, következik, hogy

$$\lim_{x_n \to x_o} \frac{y_1(x_n) - y_1(x_o)}{x_n - x_1} = y'(x_o) = 0.$$

Az $y_1(x_o) = 0$, $y_1'(x_o) = 0$ kezdeti feltételnek az $(x_o, y_o = 0)$ ponton át az unicitás-tétel értelmében egyetlen integrálgörbe halad át. Már pedig az $y \equiv 0$ függvény az egyenlet és a kezdeti feltételeket kielégíti úgy $y_1(x_o) \equiv 0$, ami ellentmondás.

$y_2(x)$ az $x = x_o$ és $x = x_1$ helyeken sem lehet zérus. Ha ugyanis pl. $y_2(x_o) = 0$ lenne, akkor (mivel $y_1(x_o) = 0$) $|\underline{\underline{W}}(x_o)| = 0$ lenne, ami ellent mond a Wronski-determináns ismert tulajdonságának (lásd: 2.4 pont). Mivel $|\underline{\underline{W}}(x)| \neq 0$, ezért jeltartó.

Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $|\underline{\underline{W}}(x)| > 0$. Osszuk el a (2.9.4) egyenlet mindkét oldalát $y_2^2(x)$-tel:

$$\frac{y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x)}{[y_2(x)]^2} = \frac{|\underline{\underline{W}}(x)|}{y_2^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right] = \frac{|\underline{\underline{W}}(x)|}{y_2^2(x)}$$

Integrálva:

$$\left.\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right|_{x_o}^{x_1} = \int_{x_o}^{x_1} \frac{|\underline{\underline{W}}(x)|}{y_2^2(x)}\,dx > 0$$

Mivel $y_1(x_o) = y_1(x_1) = 0$, a bal oldalon zérus áll, a jobb oldalon pedig egy pozitív mennyiség, ami ellentmondás. Következőleg az $y_2(x)$ függvénynek az (x_o,x_1) intervallumban legalább egy zérushelye kell legyen. Ha $y_2(x)$-nek az (x_o,x_1) intervallumban két zérushelye lenne $x_o < \bar{x}_o < \bar{x}_1 < x_1$, akkor y_1 és y_2 szerepét felcserélve, azt kapnánk, hogy $y_1(x)$-nek az (x_o,x_1) intervallumban legalább egy zérushelye van, ami megint ellentmondás, mert feltettük, hogy x_o és x_1 az $y_1(x)$ függvénynek két szomszédos zérushelye. Ezzel Sturm-tételét bebizonyítottuk.

A tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy két lineárisan független megoldás zérushelyei kölcsönösen szétválasztják egymást.

Illusztrációként tekintsük a $\sin x$ és $\cos x$ függvényeket, amelyek az $y'' + y = 0$ egyenlet lineárisan független megoldásai. Ezek zérushelyei valóban szétválasztják egymást.

<u>Következmény:</u>

Ha az (a,b) intervallumban egy lineáris egyenlet valamely megoldásának kettőnél több zérushelye van, akkor az összes megoldások oszcillálók.

Sturm-tétele azt állapítja meg, hogy egy és ugyanazon egyenlet összes megoldásai az oszcilláció szempontjából megegyező jellegűek.

A következő tétel két különböző egyenlet megoldásainak összehasonlítását teszi lehetővé az oszcilláció szempontjából. Feltesszük, hogy a vizsgált egyenleteket a (2.9.3) alakra hoztuk.

<u>Az összehasonlítási tétel:</u>
Ha adva vannak a

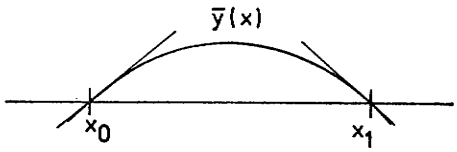
$$y'' + Q_1(x)y = 0 \quad \text{és} \qquad (2.9.5)$$

$$y'' + Q_2(x)y = 0$$

egyenletek és az (a,b) intervallumban $Q_2(x) \geq Q_1(x)$, akkor az első egyenlet minden $\bar{y}(x)$ megoldásának bármely két zérushelye között a második egyenlet minden $\bar{z}(x)$ megoldásának legalább egy zérushelye fekszik.

<u>Bizonyítás:</u>
Jelentse x_o és x_1 az $\bar{y}(x)$ függvény két szomszédos zérushelyét és tegyük fel, hogy a $\bar{z}(x)$ függvénynek az (x_o,x_1) intervallumban nincs egyetlen zérushelye sem.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az (x_o,x_1) intervallumban $\bar{y}(x)>0$, $\bar{z}(x)>0$. Ekkor az $\bar{y}(x)$ függvény az x_o helytől jobbra növekedni, az x_1 helytől balra csökkenni fog.



2.6 ábra

Ez azt jelenti, hogy $\bar{y}'(x_o)>0$, $\bar{y}'(x_1)<0$.

Helyettesítsük be az $\bar{y}(x)$ és $\bar{z}(x)$ függvényeket a megfelelő (2.9.5) egyenletekbe:

$$\bar{y}'' + Q_1\bar{y} = 0$$

$$\bar{z}'' + Q_2\bar{z} = 0$$

Szorozzuk meg az első egyenletet $\bar{z}$-sal, a második egyenletet y-sal és vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$\bar{y}''(x)\bar{z}(x) - \bar{z}''(x)\bar{y}(x) = [Q_2(x) - Q_1(x)]\,\bar{y}(x)\bar{z}(x)$$

A bal oldalon álló kifejezés nem más, mint

$$\frac{d}{dx}[\bar{y}'(x)\bar{z}(x) - \bar{z}'(x)\bar{y}(x)].$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\bar{y}'(x)\bar{z}(x) - \bar{z}'(x)\bar{y}(x)\Big|_{x_o}^{x_1} = \int_{x_o}^{x_1} (Q_2 - Q_1)\bar{y}\bar{z}\,dx$$

Feltevésünk szerint $Q_2 \geq Q_1$, tehát a jobb oldalon nem negatív mennyiség áll (határozottan pozitív, ha $Q_2 > Q_1$ legalább egy $a < x < b$ helyen teljesül).

A bal oldalon viszont negatív mennyiség áll, mivel $y(x_o) = y(x_1) = 0$.

$$\bar{y}'(x_1)\bar{z}(x_1) < 0 \qquad \text{és} \qquad -\bar{y}'(x_o)z(x_o) < 0.$$

Mivel ellentmondásra jutottunk, a tételt bizonyítottuk. Azt mondjuk, hogy a (2.9.5) egyenletek közül $Q_2(x) \geq Q_1(x)$ esetén a második egyenlet megoldásai erősebben oszcillálnak, mint az első egyenlet megoldásai.

Ha megtartjuk a tétel feltételeit és még kiegészítőleg feltesszük, hogy az (x_o, x_1) intervallumban bizonyos x helyeken $Q_2(x) > Q_1(x)$ és hogy $\bar{z}(x_o) = 0$, akkor $\bar{z}(x)$ következő zérushelye x_1-től balra esik. Ugyanis ha feltesszük ennek az ellenkezőjét, akkor ebből az következik, hogy a (2.9.6) egyenlet bal oldala negatív, míg a jobb oldala pozitív.

Ezek alapján a következő tételt kapjuk:

<u>Tétel</u>

Ha x_o közös zérushelye a (2.9.5) egyenletek valamely $\bar{y}(x)$ és $\bar{z}(x)$ megoldásainak és ha az $\bar{y}(x)$ megoldás szomszédos x_o és x_1 gyökhelyei között vannak olyan x pontok, ahol $Q_2(x) > Q_1(x)$, továbbá az egész (x_o, x_1) intervallumban $Q_2(x) - Q_1(x) \geq 0$, akkor a $\bar{z}(x)$ megoldásnak az x_o-tól jobbra eső következő gyökhelye x_1-től balra esik.

<u>Bizonyítás:</u>

Az összehasonlítási tételt legtöbbször úgy alkalmazzák, hogy a (2.9.5) egyenletek közül egyik egyenletnek az állandó együtthatós

$$y'' + a^2 y = 0 \qquad (2.9.5')$$

egyenletet választják. Tegyük fel, hogy adva van egy

$$y'' + Q(x)y = 0 \qquad (2.9.5'')$$

egyenlet, amelyben a $Q(x)$ függvény az $[a,b]$ zárt intervallumban pozitív.

Legyen M, ill. m a $Q(x)$ függvénynek az $[a,b]$ intervallumban felvett maximális, ill. minimális értéke. Tegyük fel, hogy $M > m$, vagyis $Q(x)$ nem állandó.

Ha a (2.9.5) egyenletek közül elsőnek az $y'' + my = 0$ egyenletet másodiknak pedig a (2.9.5") egyenletet vesszük, akkor mivel $Q(x) \geq m$, a tétel alapján azt az eredményt kapjuk, hogy a (2.9.5") egyenlet megoldásának két szomszédos zérushelye közötti távolság kisebb, mint $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

Ha pedig a (2.9.5") egyenletet vesszük a (2.9.5) egyenletek közül az elsőnek, az $y'' + My = 0$ egyenletet pedig másodiknak, akkor $Q(x) \leq M$ lévén a fenti tétel alapján azt kapjuk, hogy a (2.9.5") egyenlet bármely megoldásának két szomszédos zérushelye közötti távolság nagyobb mint $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

Tehát a (2.9.5") egyenlet megoldásfüggvényének bármely két szomszédos x_0 és x_1 zérushelye közötti távolságra teljesül a

$$\frac{\pi}{\sqrt{m}} \leq |x_1 - x_0| \leq \frac{\pi}{\sqrt{M}} \qquad (2.9.6)$$

egyenlőtlenség.

<u>Példa:</u>

Tekintsük az $x > 0$ intervallumon az

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Bessel-féle egyenletet! Az első deriváltat tartalmazó tag eltüntetése végett alkalmazzuk az $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$ helyettesítést, ekkor a

$$z'' + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)z = 0$$

egyenletet kapjuk. Ha ezt az egyenletet a $w'' + w = 0$ egyenlettel hasonlítjuk össze, akkor az előző tétel alapján azt találjuk, hogy a Bessel-féle egyenlet bármely megoldásának szomszédos zérushelyei közötti távolságok $n > \frac{1}{2}$ esetén nagyobbak π-nél, $0 \leq n < \frac{1}{2}$ esetén pedig kisebbek π-nél.

(Mivel a $w'' + w = 0$ egyenlet megoldásai: $w_1 = \cos x$, $w_2 = \sin x$ ezek gyökhelyei π távolságra vannak.)

Megjegyezve, hogy az utóbbi egyenletben z együtthatója elég nagy x-re tetszőleges közel van 1-hez, azt találjuk, hogy a Bessel-egyenlet megoldásainak zérushelyei elég nagy x-re jó közelítéssel π távolságra vannak.

2.10 Állandó együtthatójú másodrendű lineáris differenciálegyenletek műszaki alkalmazásai

A) Rezgéstani alkalmazások

Szilárd testek fizikájából ismert, hogy egy rendszer rezgő mozgását a következő differenciálegyenletekkel írhatjuk le aszerint, hogy a rendszernek van-e csillapítása, illetve hat-e rá gerjesztő erő.

A rezgések differenciálegyenleteit a következőképpen osztályozhatjuk:

	szabad rezgés	gerjesztett rezgés
csillapítatlan	$m\ddot{y} + \omega^2 y = 0$	$m\ddot{y} + \omega^2 y = f(t)$
csillapított	$m\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = 0$	$m\ddot{y} + 2\delta y + \omega^2 \dot{y} = f(t)$

Az egyes betűk jelentése:
y - a kitérés
t - az idő
m - elemi rész tömege
δ - a csillapítási tényező
ω - elemi rész merevsége
$f(t)$ - a gerjesztő erő

Az alábbiakban a tömeget egységnyinek tekintjük.

A.1. Csillapítatlan szabad rezgés

Az

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{2.10.1}$$

differenciálegyenlet egy egységnyi tömegpont mozgását írja le, ha erre az elmozdulással arányos, de azzal ellentétes irányú $\omega^2 y$ nagyságú belső erő hat.

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(t) = C_1 \cdot \sin\omega t + C_2 \cos\omega t \ .$$

Ha az állandókat

$$C_1 = A\cos\varphi, \quad C_2 = A\sin\varphi$$

alakban írjuk, az

$$y(t) = A(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi),$$

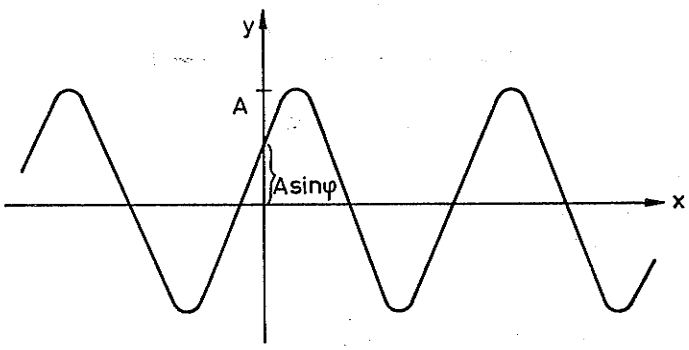
azaz

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (2.10.2)$$

megoldásfüggvényt nyerjük. Ez állandó amplitúdójú harmonikus rezgés. A maximális kitérés "A". A t = 0 időpillanatban

$$y(0) = A\sin\varphi,$$

ezért φ az ún. kezdőfázis.



2.7 ábra

Gyakorlatban mechanikai rezgéseknél a csillapítatlan rezgő mozgás - ha nincs gerjesztés - megvalósíthatatlan.

A.2 Csillapított szabad rezgés

Csillapított rezgő mozgás jön létre, ha a belső erőn kívül, a kitéréssel ellentétes irányú, és a mozgó tömegpont sebességével arányos súrlódási erő is hat. A mozgást leíró differenciálegyenlet:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = 0 \qquad (2.10.3)$$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0.$$

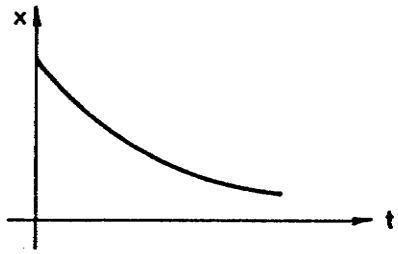
Gyökei:

$$\lambda = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}.$$

a) Ha a karakterisztikus egyenlet gyökei valósak, azaz ha

$$\delta \geq \omega$$

akkor az ún. erős csillapítás esete áll fen.



2.8 ábra

Ekkor, mivel

$$\sqrt{\delta^2 - \omega^2} \leq \delta$$

$$\lambda_{1,2} < 0,$$

így a (2.10.3) egyenlet általános megoldása

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

ha $\delta \neq \omega$ illetve

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\lambda t}$$

ha $\delta = \omega$.

A függvény értéke t növekedésével mindkét esetben csökken. A C_1 és C_2 állandók a kezdeti kitérés és a kezdeti sebesség ismeretében meghatározhatók. A mozgás aperiodikus (nem periodikus), valamint ha $t \to \infty$, akkor $y(t) \to 0$. C_1 és C_2 különböző értékei esetén az $y(t)$ a 2.8 ill. 2.9 ábrán látható típusok egyike.

b) Gyenge csillapítású a rezgő mozgás, ha a súrlódás olyan kicsi, hogy

$$\delta^2 < \omega^2.$$

2.9 ábra

Ekkor a karakterisztikus egyenlet gyökei konjugált komplexek. Az

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

jelöléssel

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega_0 i,$$

vagyis

$$y(t) = C_1 e^{-\delta t} \cos\omega_0 t + C_2 e^{-\delta t} \sin\omega_0 t.$$

Célszerű itt is az állandók helyébe a

$$C_1 = A \sin\varphi, \quad C_2 = A \cos\varphi$$

kifejezéseket írni. Ekkor ugyanis

$$y(t) = Ae^{-\delta t}(\cos\omega_0 t \sin\varphi + \sin\omega_0 t \cos\varphi) =$$

$$= Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi). \qquad (2.10.4)$$

t = 0 esetén

$$y(0) = A \sin\varphi$$

Ebből látható, hogy A jelenti a kezdő időpillanatban a rezgés amplitúdóját, φ pedig a kezdőfázist. A rezgés egy periódusának időtartama

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

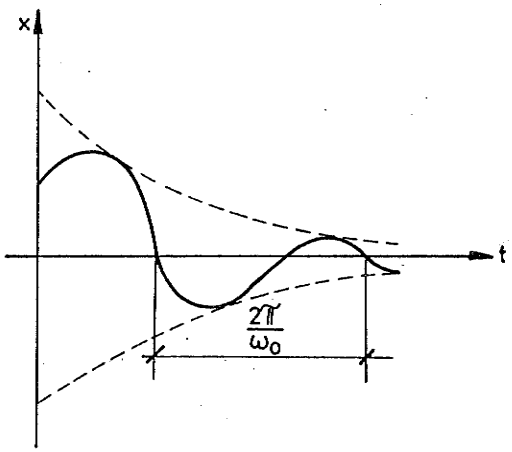
mert

$$\sin(\omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} + \varphi) = \sin(2\pi + \varphi) = \sin\varphi.$$

A $t = \frac{2\pi}{\omega_o}$ időpillanatban a kitérés

$$y(\frac{2\pi}{\omega_o}) = Ae^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_o}} \sin\varphi = y(0).e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_o}}.$$

Egy teljes rezgés ideje alatt az amplitúdó $e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_o}}$ -szorosára csökkent. A rendszert tehát csökkenő amplitúdójú rezgéseket végez.



2.10 ábra

Mivel

$$y(t + \frac{2\pi}{\omega_o}) = Ae^{-\delta(t+\frac{2\pi}{\omega_o})} \sin[\omega_o(t + \frac{2\pi}{\omega_o}) + \varphi] =$$

$$= Ae^{-\delta t}e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_o}} \sin(\omega_o t + 2\pi + \varphi) =$$

$$= Ae^{-\delta t}e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_o}} \sin(\omega_o t + \varphi) = e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_o}} y(t),$$

azaz $T = \frac{2\pi}{\omega_o}$ idő múlva a rezgés csökkent amplitúdóval megismétlődik, ezért a

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}$$

időtartamot rezgésidőnek nevezzük. Abban az esetben, ha $\delta = 0$, a $T = \frac{2\pi}{\omega}$ rezgésidejű csillapítatlan rezgések adódnak (lásd A.1 eset!).

A.3 Gerjesztett csillapított rezgő mozgás

Hasson a csillapított rendszerre

$$f(t) = P \sin\omega_1 t$$

periodikus gerjesztő erő. (ω_1 valós szám, tehát a karakterisztikus egyenlet gyökeitől feltétlenül különbözik).

Keressük az

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = P \sin\omega_1 t \qquad (2.10.5)$$

inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_1(t) = D \cos\omega_1 t + E \sin\omega_1 t$$

alakban. Ekkor

$$\dot{y}_1(t) = -\omega_1 D \sin\omega_1 t + \omega_1 E \cos\omega_1 t$$

$$\ddot{y}_1(t) = -\omega_1^2 D \cos\omega_1 t - \omega_1^2 E \sin\omega_1 t.$$

Behelyettesítve:

$$-\omega_1^2 D \cos\omega_1 t - \omega_1^2 E \sin\omega_1 t + 2\delta\omega_1 E \cos\omega_1 t -$$

$$- 2\delta\omega_1 D \sin\omega_1 t + \omega^2 D \cos\omega_1 t + \omega^2 E \sin\omega t \equiv P \sin\omega_1 t.$$

Innen

$$(\omega^2 - \omega_1^2) D + \delta\omega_1 E = 0$$

$$(\omega^2 - \omega_1^2) E - 2\delta\omega_1 D = P$$

és

$$D = \frac{-2\delta\omega_1 P}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2};$$

$$E = \frac{(\omega^2 - \omega_1^2) P}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}$$

A megoldás ez esetben is

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

alakra hozható, ahol

$$A_1 = \frac{P}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2} \qquad (2.10.6)$$

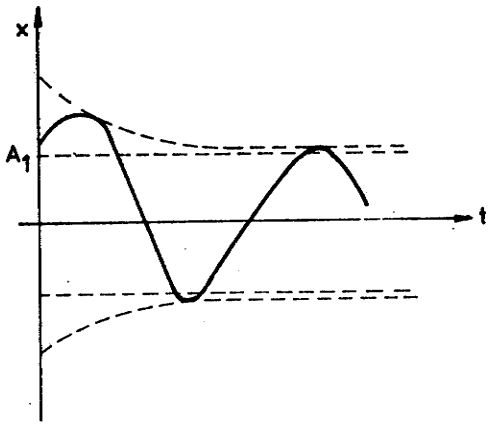
és

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{-2\delta\omega_1}{\omega^2 - \omega_1^2}$$

Ez is csillapítatlan rezgés, frekvenciája azonos a gerjesztő rezgés frekvenciájával. Az általános megoldás:

$$y(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_o t + \varphi) + A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1). \qquad (2.10.7)$$

Látható, hogy a homogén egyenlet megoldásából adódó szabadlengések, minthogy amplitúdójuk exponenciálisan csillapodó, bizonyos idő után elenyésznek. Elég hosszú t idő elteltével csak a második tag, tehát a gerjesztett rezgés marad meg (lásd 2.11 ábra).



2.11 ábra

A.4 Csillapítatlan gerjesztett rezgés

Kapcsoljuk ki - legalább elvben - a csillapítást! Ez esetben $\delta = 0$. A differenciálegyenlet

$$\ddot{y} + \omega^2 y = P \sin\omega_1 t \qquad (2.10.8)$$

Ha $\omega \neq \omega_1$, akkor a (2.10.6) összefüggések alapján

$$A_1 = \frac{P}{\omega^2 - \omega_1^2} \qquad \varphi_1 = 0$$

s így

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{P}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t.$$

Ha rögzített P és ω értéke mellett $\omega_1 \to \omega$, akkor a rezgések amplitúdója minden határon túl nő. (Itt már lehetséges, hogy ω_1 gyöke a karakterisztikus egyenletnek!)

Ezt a jelenséget nevezzük rezonanciának. Ebben az esetben az eddigi megoldás nyilván értelmét veszti. Mivel $\omega = \omega_1$ az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y(t) = Dt \sin\omega t + Et \cos\omega t$$

alakban keressük.

$$\dot{y}(t) = D \sin\omega t + E \cos\omega t + D\omega t \cos\omega t -$$

$$- E\omega t \sin\omega t$$

$$\ddot{y}(t) = D\omega \cos\omega t - E\omega \sin\omega t + D\omega \cos\omega t - E\omega \sin\omega t -$$

$$- D\omega^2 t \sin\omega t - E\omega^2 t \cos\omega t.$$

A (2.10.8) differenciálegyenletbe helyettesítve

$$2D\omega \cos\omega t - 2E\omega \sin\omega t - D\omega^2 t \cdot \sin\omega t - E\omega^2 t \cos\omega t +$$

$$+ D\omega^2 t \sin\omega t + E\omega^2 t \cos\omega t \equiv P \sin\omega t.$$

Így

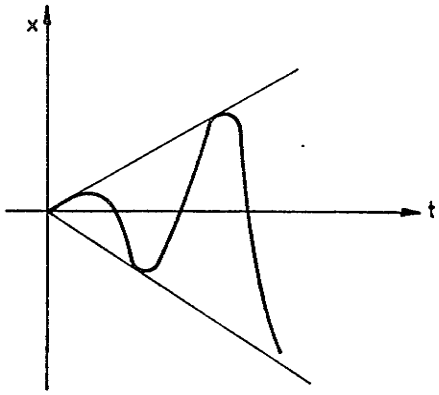
$$2D\omega = 0; \qquad -2E\omega = P$$

$$D = 0 \qquad E = -\frac{P}{2\omega}$$

Ezek szerint

$$y_1(t) = -\frac{P}{2\omega} t \cos\omega t.$$

Az amplitúdó tehát $-\frac{P}{2\omega} t$, t növekedésével minden határon túl nő.



2.12 ábra

Csillapított mozgás esetén az $\frac{\omega}{\omega_1} = 1$ hely közelében (tehát ha $(\omega - \omega_1)$ igen kicsiny, azaz a gerjesztő frekvencia a rendszer saját frekvenciájától kevéssel tér el), az amplitúdó hirtelen megnő. A növekedés annál kisebb, minél erősebb a csillapítás. A viszonyokat egy kis átalakítás segítségével vizsgáljuk.

$$A_1 = \frac{P}{\sqrt{(\omega-\omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} = \frac{P}{\omega^2\sqrt{(1 - \frac{\omega_1}{\omega})^2 + 4\frac{\delta^2}{\omega^2}(\frac{\omega_1}{\omega})^2}} =$$

$$= \frac{P}{\omega^2}\frac{1}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \alpha^2 q^2}},$$

ahol

$$q = \frac{\omega_1}{\omega} \quad \text{és} \quad \alpha = 2\frac{\delta}{\omega}.$$

Mivel P és ω konstansak, a viszonyokat a

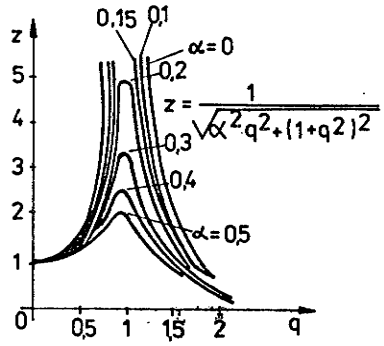
$$z(q) = \frac{1}{\sqrt{(1 - q^2) + \alpha^2 q^2}}$$

függvény hűen szemlélteti. Ez a függvény látható különböző értékek esetén a 2.13 ábrán.

A vizsgálat azt mutatja, hogy q növekedésével, vagyis az zavaró frekvencia növekedésével z és vele együtt a keletkező kényszerrezgés amplitúdójának a nagysága is gyorsan növekszik bizonyos maximumig, majd azután gyorsan csökken és tart a zérushoz

$q \to \infty \quad (\omega_1 \to \infty)$

esetén.



2.13 ábra

Ez a maximum igen nagy lehet a δ csillapítási együttható kicsiny értékeinél. Ha a zavaró frekvencia közel van a rendszer saját frekvenciájához (és méginkább, ha megegyezik vele) és ha az ellenállási együttható aránylag kicsi, akkor a rendszer (bizonyos időszakon keresztül) igen nagy amplitúdójú rezgést fog végezni. A rezgés amplitúdójának kicsiny külső behatása következtében való hirtelen növekedésének ezt a jelenségét rezonanciának nevezik.

A 2.13 ábra görbéit rezonanciagörbének mondjuk.

A rezonancia lényeges szerepet játszik a technikában és a fizikában. Minden egyes rugalmas testnek (például bármilyen építménynek) megvan a saját meghatározott rezgési frekvenciája, mely csak a test tulajdonságaitól függ. Képzeljük el, hogy a test külső erő hatása alatt kilendül egyensúlyi helyzetéből. Ha ez az erő sinusszerű (vagy általában periodikus) és frekvenciája közel van a test saját frekvenciájához, akkor kicsiny zavaró erő is hatalmas rombolást végezhet.

Különböző építmények gyors forgású gépek, hidak, hajók stb. tervezésénél külön számolnak a rezonancia lehetőségével.

B) Vastag falú csőre belülről nyomás hat

Számítsuk ki a cső alakváltozását.
A cső alakváltozását leíró differenciálegyenlet

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = 0,$$

ahol: x a térfogatelemnek a középponttól való távolsága, y(x) pedig a megnyúlás a középponttól x távolságra.
A differenciálegyenlet Euler-féle. A karakterisztikus egyenlet:

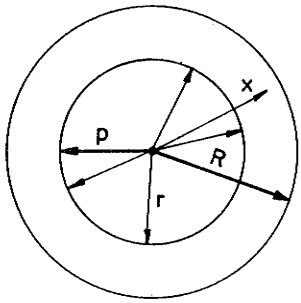
$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

Az általános megoldás

$$y = Ax + \frac{B}{x}$$



2.14 ábra

Kezdeti feltételek: $x = r$ esetén, a cső belső falán a nyomás p, a külső falán $x = R$ esetén zérus. A sugár irányban ható feszültség legyen σ_r. A feszültség tehát $x = r$-nél, $\sigma_r = -p$, $x = R$-nél $\sigma_r = 0$. Ez a rugalmassági modulus (E) és a Poisson-szám (m) segítségével (E és m az anyagra jellemző állandók) a

$$\sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1}\left(m\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\right)$$

módon fejezhető ki. Ha y értékét behelyettesítjük és rendezzük, akkor

$$\sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1}\left[m\left(A - \frac{B}{x^2}\right) + A + \frac{B}{x^2}\right],$$

beszorozva

$$\sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1}\left[(m + 1) - (m - 1)\frac{B}{x^2}\right].$$

Újból szorozva és egyszerűsítve:

$$\sigma_r = \frac{mE}{m - 1}A - \frac{mE}{m + 1} \cdot \frac{B}{x^2}$$

Az előbb mondottak értelmében, ha $x = r$, akkor

$$\sigma_r = -p,$$

tehát

$$-p = \frac{mE}{m-1} A - \frac{mE}{m+1} \cdot \frac{B}{r^2}$$

és $x = R$-nél $\sigma_r = 0$.

$$0 = \frac{mE}{m-1} A - \frac{mE}{m+1} \cdot \frac{B}{R^2} .$$

Fejezzük ki a második egyenletből A értékét, s helyettesítsük az elsőbe:

$$A = \frac{m-1}{m+1} \frac{B}{R^2}$$

majd

$$-p = \frac{mE}{m-1} \frac{m-1}{m+1} \frac{B}{R^2} - \frac{mE}{m+1} \frac{B}{r^2}$$

Ebből a B kifejezése:

$$B = -\frac{p}{mE}(m+1) \frac{1}{\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}} = -\frac{p(m+1)}{mE} \cdot \frac{1}{\frac{r^2 - R^2}{r^2R^2}} =$$

$$= \frac{p(m+1).r^2.R^2}{mE(R^2 - r^2)}$$

$$A = \frac{p(m-1)r^2}{mE(R^2 - r^2)}$$

A műszaki feltételeket kielégítő megoldás tehát:

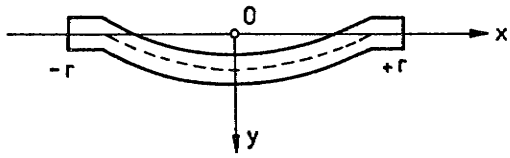
$$y = \frac{pr^2}{mE(R^2 - r^2)} \left[(m-1)x + (m+1)\frac{R^2}{x}\right]$$

C) <u>Szélén befogott körlemez lehajlása egyenletesen megoszló teher alatt</u>

A probléma körszimmetrikus, tehát vizsgálható a lehajlásfüggvény a lemez egy átmérője mentén. Jelentse x a lemez középpontjától mért távolságot és $y(x)$ a lehajlást.

A lehajlás differenciálegyenlete az

$$y^{(4)} + \frac{2}{x}y''' - \frac{1}{x^2} y'' + \frac{1}{x^3} y' = 2N$$



2.15 ábra

differenciálegyenlet, ahol N a teherintenzitás, állandó. Megoldandó tehát az

$$x^4 y^{(4)} + 2x^3 y''' - x^2 y'' + xy' = 2Nx^4$$

Euler-féle differenciálegyenlet. A homogén, egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) + 2\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) -$$

$$- \lambda(\lambda - 1) + \lambda = 0.$$

Beszorozva és összevonva

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0.$$

λ^2 kiemelésével

$$\lambda^2(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \lambda^2(\lambda - 2)^2 = 0.$$

A gyökök

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = 2.$$

Az Euler-féle differenciálegyenlet két független partikuláris megoldása kettős gyök esetén:

$$x^{\lambda} \quad \text{és} \quad x^{\lambda} \cdot \ln x,$$

tehát jelen esetben a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^2 + C_4 x^2 \ln x .$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$Y_1 = A\, x^4$$

alakban keressük, mert így mindkét oldalon állandót nyerünk.

$$Y_1' = 4Ax^3, \qquad Y_1'' = 12Ax^2,$$

$$Y_1''' = 24Ax, \qquad Y_1^{(4)} = 24A.$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe

$$24A + 48A - 12A + 4A = 2N$$

$$64A = 2N,$$

$$A = \frac{N}{32}$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása ezek szerint:

$$y = C_1 + C_2 \cdot \ln x + C_3 x^2 + C_4 x^2 \ln x + \frac{N}{32} x^4.$$

A konstansok értékét az alábbi feltételekből lehet meghatározni: a lemez kihajlása az $x = 0$ középpontban véges, nem szerepelhet a megoldásban olyan függvény, mely $x = 0$ helyen végtelenné válik, azaz $C_2 = C_4 = 0$.

A lemez kihajlása a szélén, $x = r$-nél 0, és az érintősík is vízszintes: $y'(r) = 0$.

Az y függvény

$$y' = 2C_3 x + \frac{N}{8} x^3$$

derviáltjában és az y kifejezésében a feltételeket behelyettesítve

$$0 = C_1 + C_3 r^2 + \frac{N}{32} r^4$$

$$0 = 2C_3 r + \frac{N}{8} r^3.$$

A második egyenletből:

$$C_3 = -\frac{N}{16} r^2.$$

Ezt az elsőbe téve:

$$C_1 = \frac{N}{32} r^4.$$

A határfeltételeket kielégítő partikuláris megoldás:

$$y(x) = \frac{N}{32} r^4 - \frac{N}{16} r^2 x^2 + \frac{N}{32} x^4,$$

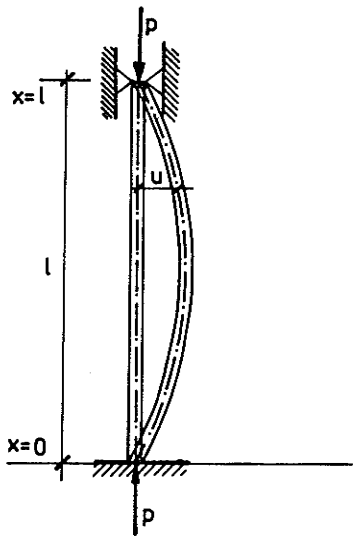
azaz

$$y(x) = \frac{N}{32}(r^2 - x^2)^2.$$

D) Sajátérték feladat

Adott egy határozatlan paramétert tartalmazó másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet és bizonyos kezdeti vagy peremfeltételek.
Feladat:

Meghatározandók a paraméternek azon értékei, - ha ilyenek egyáltalán vannak - amelyek mellett az adott differenciálegyenletnek léteznek az adott feltételeket kielégítő megoldásai. Ha léteznek ilyen értékek, akkor ezeket a differenciálegyenletnek az adott feltételekhez tartozó sajátértékeinek nevezzük. A hozzájuk tartozó függvények pedig a sajátfüggvények. A differenciálegyenletek megoldásának műszaki feladatokra való alkalmazásánál jelentős szerepet tölt be a sajátérték feladat. Sajátérték feladatra vezetnek - pl. rezgési feladatok vagy a stabilitási problémák is. Tekintsük a tengely irányában nyomott karcsú oszlopot.



2.16 ábra

Kérdés:

Van-e olyan P terhelés, amelynél a nyugalmi állapottól eltérő egyensúlyi helyzet is létrejöhet?
Rugalmasságtanban, ha a kis elmozdulások elméletét érvényesnek tekintjük a hajlító nyomaték és az oszlop görbülete között a következő összefüggés írható fel:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ} \tag{2.10.10}$$

ahol: R a görbületi sugár, J a keresztmetszet y tengelyre vonatkozó inercianyomatéka, E a rugalmassági modulus, M pedig a keresztmetszetre ható nyomaték. Ha egy oszlop tengelyében levő tetszőleges pont vízszintes irányú elmozdulása u(x), kis kitérés esetén a görbület

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2u}{dx^2} .$$

Így (2.10.10) felhasználásával az

$$EJ\frac{d^2u}{dx^2} = -M(x) \tag{2.10.11}$$

differenciálegyenletet nyerjük.

Az oszlopra P tengelyirányú teher hat, amelyet akkor tekintünk pozitívnak, ha nyomást hoz létre.

A P erő következtében az x koordinátájú keresztmetszetben fellépő M(x) hajlítónyomaték

$$M(x) = P\cdot u(x).$$

A (2.10.11) egyenletbe helyettesítve kapjuk az oszlop kihajlását leíró differenciálegyenletet:

$$EJ\frac{d^2u}{dx^2} + P\cdot u(x) = 0. \tag{2.10.12}$$

Tegyük fel, hogy az oszlop az $x = 0$ pontban csuklósan rögzített, s az $x = \ell$ pontban olyan a megtámasztása, hogy az megakadályozza az oldalirányú elmozdulást, de lehetővé teszi a szabad elfordulást és az oszlop tengelyirányú mozgását. Ez azt jelenti, hogy az $x = 0$, és $x = \ell$ helyen kitérés nem jöhet létre, vagyis peremfeltételeink

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(\ell) &= 0 \end{aligned} \tag{2.10.13}$$

Ha az oszlop állandó keresztmetszetű és homogén anyagból készült, E és J állandó, a (2.10.12) differenciálegyenlet másodrendű, állandó együtthatójú, homogén lineáris. Az $u(x)\equiv 0$ függvény kielégíti az egyenletet és a peremfeltételeket is. Van-e olyan P erő, amellyel az oszlopt terhelve triviálistól különböző megoldást kapunk?

Legyen

$$\beta^2 = \frac{P}{EJ}, \tag{2.10.14}$$

akkor (2.10.12)-ből

$$u'' + \beta^2 u = 0.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$u(x) = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x.$$

A peremfeltételekből

$$u(0) = C_1 = 0$$

$$u(\ell) = C_2 \sin\beta\ell = 0.$$

$C_2 = 0$ esetén a triviális megoldást kapnánk, ezért

$$\sin\beta\ell = 0.$$

Innen

$$\beta\ell = k\pi; \qquad k = 1,2,\ldots$$

Tehát a peremfeltételeket kielégítő, triviálistól különböző megoldás, akkor létezik, ha

$$\beta_k = \frac{k\pi}{\ell}; \quad k = 1,2,\ldots$$

Ezek a k értéktől függő β_k számok a sajátértékek, s a hozzájuk tartozó megoldásfüggvények a sajátfüggvények:

$$u_k(x) = \sin\frac{k\pi}{\ell}x . \tag{2.10.15}$$

A (2.10.14) összefüggésből

$$\beta_k = \sqrt{\frac{P_k}{EJ}} = \frac{k\pi}{\ell}$$

s P_k kiszámítható:

$$P_k = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2} EJ .$$

Ha $k = 1$ az Euler-féle kritikus teher értékét kapjuk:

$$P_{krit} = \frac{\pi^2}{\ell^2} EJ.$$

Ennek ismerete rendkívül fontos, hiszen ilyen terhelésnél az oszlop elveszti stabilitását, kihajlott állapotában is egyensúlyban lehet.

Nincs minden peremérték-feladatnak triviálistól különböző megoldása. Nézzük a következő egyszerű ellenpéldát: Állítsuk elő az

$$y'' - \alpha^2 y = 0$$

differenciálegyenletnek az

$$y(0) = y(\ell) = 0$$

peremfeltételeket kielégítő megoldását!

Mivel a karakterisztikus egyenlet gyökei $\pm\alpha$, az általános megoldás

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}.$$

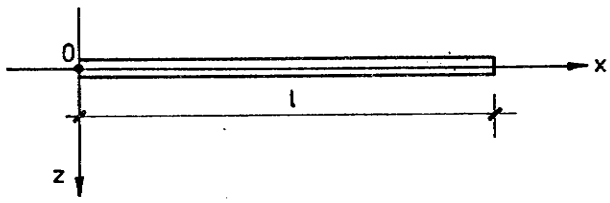
Ennek a függvénynek azonban legfeljebb egy zérushelye van, tehát a peremfeltételeket csak az $y(x) \equiv 0$ függvény elégíti ki.

Megjegyezzük, hogy valamely sajátérték-feladatnak csak akkor lehet triviálistól különböző megoldása, ha a sajátfüggvények oszcillálnak. A sajátértékek általában transzcendens egyenlet megoldásai. Legtöbb esetben csak numerikus módszerek segítségével határozhatók meg.

E) Negyedrendű állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek műszaki alkalmazásai

(Egyenes tengelyű rúd rugalmas vonalának differenciálegyenlete)

Mechanikából ismeretes, hogy rúdon olyan szerkezeti elemet értünk, amelynek hossza keresztmetszeti méreteihez képest nagy és amely hajlítással és csavarással szemben ellenállást fejt ki. Egyenes a rúd, ha keresztmetszeteinek súlypontjai egy egyenesbe esnek, s ez az egyenes a rúd tengelye.



2.17 ábra

Tegyük fel, hogy a derékszögű koordináta-rendszer x tengelye egybeesik a rúd tengelyével, és a keresztmetszet az [y x] síkkal párhuzamos. Ezen túlmenően: az y és z tengely egyben legyenek a rúd keresztmetszetének főtengelyei.

Legyen a keresztmetszet szimmetrikus az [x z] síkra, és a külső erők hatásvonalai is ebbe a síkba essenek.
A hajlítás által előidézett alakváltozás vizsgálata, - mint már a D) pontban láttuk - arra az eredményre vezet, hogy a rúdtengely görbülete

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}$$

Jelölje $u = u(x)$, a rúd tengelyének a z tengellyel párhuzamos elmozdulását, akkor kis lehajlások esetében a rugalmas szál differenciálegyenlete

$$EJ \frac{d^2u}{dx^2} = - M(x). \qquad (2.10.16)$$

(lásd a 2.10.11 összefüggés levezetését!)

A tengelyirányban nyomott oszlop kihajlását a (2.10.11), ill. (2.10.16) differenciálegyenlet megoldásaként határozzuk meg. Ez az egyenlet azonban nem alkalmas minden esetben a különböző módon rögzített és különbözőképpen terhelt rudak viselkedésének leírására.

A (2.10.16) egyenlet átalakítható úgy, hogy ne a hajlítónyomatékot, hanem közvetlenül a rudat terhelő erők adatait tartalmazza. A nyomaték első deriváltja a nyíróerővel arányos.

$$\frac{dM}{dx} = - T. \qquad (2.10.17)$$

A nyíróerő deriváltja - illetve a nyomaték második deriváltja - a rudat terhelő folytonosan megoszló erőrendszer intenzitása $q(x)$.

$$\frac{d^2M}{dx^2} = - \frac{dT}{dx} = - q(x) \qquad (2.10.18)$$

Deriváljuk kétszer a (2.10.16) egyenletet:

$$\frac{d}{dx}(EJ \frac{d^2u}{dx^2}) = - \frac{dM}{dx} = T \qquad (2.10.19)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(EJ \frac{d^2u}{dx^2}) = q(x). \qquad (2.10.20)$$

Tegyük fel, hogy E és J állandó (a rúd homogén anyagból készült és állandó keresztmetszetű), ekkor a (2.10.20)

$$EJ \frac{d^4u}{dx^4} = q(x) \qquad (2.10.21)$$

alakban írható.

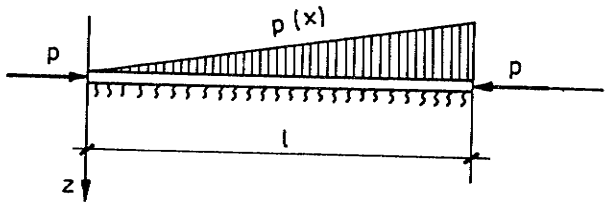
Ha a rudat igen sok rugó merev alaphoz kapcsolja, ezek hatása - hosszegységenként - ku nagyságú megoszló visszatérítő erővel helyettesíthető, amely a lehajlással ellenkező irányban hat. A k arányossági tényezőt ágyazási együtthatónak nevezik. Ha ezt közelítésképpen állandónak tekintjük és a rúdra p(x) megoszló külső teher hat, a teljes teher

$$q(x) = p(x) - ku(x)$$

és a (2.10.21) egyenlet

$$EJ \frac{d^4u}{dx^4} = p(x) - ku(x) \qquad (2.10.22)$$

alakú lesz.



2.18 ábra

Ahhoz, hogy az ilyen rúd tengelyirányú P erő hatására bekövetkező kihajlását vizsgáljuk, a P erőt olyan, a rúd tengelyére merőleges $q_1(x)$ teherrel helyettesítjük, melynek hatására a rúd ugyanúgy deformálódik, mint a P erő hatására. Tengelyirányú P erő nyomatéka P·u. A (2.10.18) egyenlet szerint egy M(x) nyomatékeloszlásnak megfelelő teher pedig

$$q_1(x) = - \frac{d^2M}{dx^2}$$

Ezért az a rúdtengelyre merőleges teher, amely az M(x) = P.u nyomatékot hozna létre,

$$q_1(x) = - P \frac{d^2u}{dx^2}$$

lesz.

Az összes terhelést figyelembe vevő differenciálegyenlet

$$EJ \cdot \frac{d^4u}{dx^4} = - P \frac{d^2u}{dx^2} - ku + p(x).$$

Rendezve és az EJ értékkel végigosztva a

$$\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{P}{EJ}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{k}{EJ}u = \frac{p(x)}{EJ} \qquad (2.10.23)$$

inhomogén negyedrendű állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletet kapjuk. A rugalmas szál alakját, viselkedését a (2.10.23) differenciálegyenlet megoldásfüggvénye adja. A differenciálegyenlethez természetesen peremfeltételek járulnak, melyek a rúd megtámasztásától függenek.

Befogás helyén nincs elmozdulás és szögelfordulás, így

$$u = 0 \qquad u' = 0.$$

Csuklós alátámasztás esetén az elmozdulás és a nyomaték zérus

$$u = 0, \qquad u'' = 0.$$

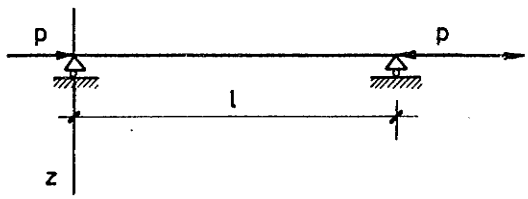
Szabad végén nyomaték és nyíróerő nem lép fel:

$$u'' = 0, \qquad u''' = 0.$$

<u>Példa:</u>

1. Tekintsünk egy P tengelyirányú erővel terhelt mindkét végén csuklósan alátámasztott ℓ hosszúságú rudat. Határozzuk meg a rugalmas vonal alakját

a) ha megoszló terhelés nincs $p(x) = 0$,
b) $p(x) = q.x$ megoszló terhelés esetén ($q \equiv$ állandó)



2.19 ábra

A megoldandó differenciálegyenlet

$$\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{P}{EJ}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{p(x)}{EJ} \qquad (2.10.24)$$

Mivel mindkét végén csuklósan alátámasztott a rúd, peremfeltételeink:

$$u(0) = 0, \qquad u''(0) = 0 \qquad (2.10.25)$$

$$u(\ell) = 0, \qquad u''(\ell) = 0. \tag{2.10.26}$$

a) Ha nincs külső terhelés, csak tengelyirányú erő hat $p(x) \equiv 0$. Megoldandó tehát az

$$u^{(IV)} + \frac{P}{EJ} u'' = 0$$

állandó együtthatójú differenciálegyenlet a (2.10.25) és (2.10.26) peremfeltételekkel.

Megoldandó feladatunk tulajdonképpen megegyezik a sajátérték-feladatként tárgyalt oszlopkihajlás feladattal. Látjuk majd, hogy a negyedrendű differenciálegyenlet megoldásával ugyanarra az eredményre jutunk!

Legyen

$$\beta^2 = \frac{P}{EJ} \tag{2.10.27}$$

s így

$$u^{(IV)} + \beta^2 u'' = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^4 + \beta^2\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + \beta^2) = 0.$$

Gyökei

$$\lambda_{1,2} = 0, \qquad \lambda_{3,4} = \pm \beta i.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$u(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\beta x + C_4 \sin\beta x. \tag{2.10.28}$$

Deriválunk kétszer:

$$u'(x) = C_2 - C_3 \beta \sin\beta x + C_4 \beta \cos\beta x .$$

$$u''(x) = - C_3\beta^2 \cos\beta x - C_4\beta^2 \sin\beta x.$$

A (2.10.25) feltételből

$$u(0) = C_1 + C_3 = 0$$

$$u''(0) = - C_3 \beta^2 = 0$$

Tehát $C_1 = 0$ és $C_3 = 0$.

Ezzel a megoldás

$$u(x) = C_2 x + C_4 \sin\beta x$$

alakú lett. A (2.10.26) peremfeltétel miatt

$$u(\ell) \equiv C_2 \ell + C_4 \sin\beta\ell = 0$$
$$u''(\ell) \equiv - C_4 \beta^2 \sin\beta\ell = 0. \qquad (2.10.29)$$

Homogén lineáris egyenletrendszert kaptunk. A $C_2 = C_4 = 0$ triviális megoldásból adódó

$$u(x) \equiv 0$$

függvény megoldása a feladatnak.

Triviálistól különböző megoldás létezésének feltétele, hogy a rendszer determinánsa legyen zérus:

$$D \equiv - \beta^2 \ell \sin\beta\ell = 0.$$

Ez akkor teljesül, ha

$$\beta\ell = k\pi, \quad k = 1,2,...$$

Sajátérték-feladatot oldunk meg tehát: csak akkor van triviálistól különböző megoldás, ha olyan P_k tengelyirányú erővel terhelünk, melyre (2.10.27) figyelembevételével

$$\frac{P_k}{EJ} \ell^2 = k^2\pi^2, \quad k = 1,2,...$$

A (2.10.29) egyenletből

$$C_2 = - \frac{C_4}{\ell} \sin\beta\ell = 0, \quad \text{ha } \beta\ell = k\pi.$$

Így a feladat sajátfüggvényei, $- C_4 = 1$ értékkel -

$$u_k = \sin\beta_k x = \sin\frac{k\pi}{\ell} x$$

vö. a (2.10.25) megoldásfüggvénnyel!

b) A P tengelyirányú erőn kívül terhelje a rudat $p(x) = q \cdot x$ megoszló teher. A rugalmas vonal differenciálegyenlete

$$u^{(IV)} + \frac{P}{EJ} u'' = \frac{qx}{EJ}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet lesz. A (2.10.27) jelölés bevezetésével a homogén egyenlet általános megoldását a (2.10.28) összefüggés adja. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását, - mivel kétszeres rezonancia van -

$$u_o = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2$$

alakban kereshetjük. Differenciálva:

$$u_o' = 3Ax^2 + 2Bx$$

$$u_o'' = 6Ax + 2B$$

$$u_o''' = 6A$$

$$u_o = 0$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe

$$\beta^2 6Ax + \beta^2 \cdot 2B \equiv \frac{qx}{EJ}$$

Együttható összehasonlítással

$$A = \frac{q}{EJ \cdot 6\beta^2}, \qquad B \equiv 0.$$

(2.10.27) figyelembevételével

$$A = \frac{q}{EJ \cdot 6 \frac{P}{EJ}} = \frac{q}{6P}, \quad \text{s} \quad \text{így} \quad u_o(x) = \frac{q}{6P} x^3$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$u(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\beta x + C_4 \sin\beta x + \frac{q}{6P} x^3.$$

Kétszer differenciálunk:

$$u'(x) = C_2 - C_3\beta \sin\beta x + C_4\beta \cos\beta x + \frac{q}{2P} x^2$$

$$u''(x) = - C_3\beta^2 \cos\beta x - C_4\beta^2 \sin\beta x + \frac{q}{P}x.$$

A (2.10.25) feltételből

$$u(0) \equiv C_1 + C_3 = 0$$

$$u''(0) \equiv - C_3 = 0$$

így $C_1 = C_3 = 0$;

azaz

$$u(x) = C_2 x + C_4 \sin\beta x + \frac{q}{6P} x^3.$$

Vegyük figyelembe a (2.10.26) peremfeltételt is:

$$u(\ell) \equiv C_2 + C_4 \sin\beta\ell + \frac{q}{6P}\ell^3 = 0$$

$$u''(\ell) \equiv -C_4\beta^2 \sin\beta\ell + \frac{q}{P}\ell = 0. \qquad (2.10.30)$$

Inhomogén lineáris egyenletrendszert kaptunk a C_2 és C_4 állandók meghatározására, melynek - ha a rendszer determinánsa zérustól különböző - egyértelmű megoldása van.

$$D = -\ell\beta^2 \sin\beta\ell \neq 0, \qquad \beta\ell \neq k\pi.$$

Így

$$C_4 = +\frac{q}{P}\,\frac{\ell}{\beta^2 \sin\beta\ell}$$

$$C_2 = -\frac{q}{P}\left(\frac{\ell^2}{6} + \frac{1}{\beta^2}\right)$$

Ezzel

$$u(x) = \frac{q}{P}\left[\frac{x^3}{6} - \left(\frac{\ell^2}{6} + \frac{1}{\beta^2}\right)x + \frac{\ell \sin\beta x}{\beta^2 \sin\beta\ell}\right].$$

(2.10.27) felhasználásával végeredményünk:

$$u(x) = \frac{q}{P}\left[\frac{x^3}{6} - \left(\frac{\ell^2}{6} + \frac{EJ}{P}\right)x + \frac{EJ\ell}{P}\,\frac{\sin\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,x}{\sin\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,\ell}\right]$$

Megjegyzés:
Ha

$$\beta\ell = k\pi \qquad \text{és} \qquad \sin\beta\ell = 0,$$

a (2.10.30) egyenletrendszernek nincs megoldása, hiszen a második egyenletben C_4 együtthatója zérus!

<u>Példa:</u>

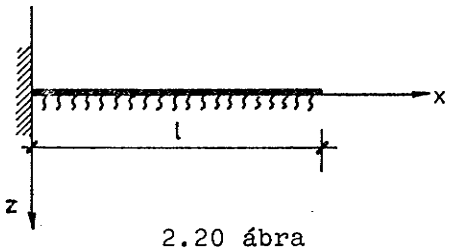
2. ℓ hosszúságú, rugalmasan ágyazott konzolra

$$p(x) = qx^3$$

(q állandó) megoszló teher hat. Határozzuk meg a rugalmas szál egyenletét!

A differenciálegyenlet a (2.10.23) összefüggés alapján, mivel

$$P = 0, \qquad \text{és} \qquad p(x) = qx^3$$



2.20 ábra

$$\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{k}{EJ}\,u = \frac{qx^3}{EJ} \qquad (2.10.31)$$

Peremfeltételeink: a befogás helyén az $x = 0$ helyen

$$u(0) = u'(0) = 0. \qquad (2.10.32)$$

A szabad végén viszont a nyomaték és a nyíróerő zérus:

$$u''(\ell) = u'''(\ell) = 0. \qquad (2.10.33)$$

A homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete a

$$\frac{k}{EJ} = 4\beta^4 \qquad (2.10.34)$$

jelöléssel

$$\lambda^4 + 4\beta^4 = 0.$$

Megoldása

$$\lambda_1 = \beta(1 + i) \qquad \lambda_3 = \beta(1 - i)$$

$$\lambda_2 = \beta(-1 + i) \qquad \lambda_4 = \beta(-1 - i)$$

A homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása, így

$$u(x) = C_1 \operatorname{ch}\beta x \cos\beta x + C_2 \operatorname{ch}\beta x \sin\beta x +$$

$$+ C_3 \operatorname{sh}\beta x \cos\beta x + C_4 \operatorname{sh}\beta x \cos\beta x$$

alakban írható.

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását harmadfokú polinom alakban kereshetjük

$$u_o = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$u_o' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$u_o'' = 6Ax + 2B$$

$$u_o''' = 6A$$

$$u_o^{(IV)} = 0.$$

Behelyettesítve:

$$\frac{k}{EJ}(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \equiv \frac{qx^3}{EJ}$$

Együttható összehasonlítással

$$\frac{k}{EJ} A = \frac{q}{EJ}, \qquad B = C = D = 0.$$

Innen

$$A = \frac{q}{k}, \quad \text{azaz} \quad u_o = \frac{q}{k} x^3$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$u(x) = C_1 \operatorname{ch}\beta x \cos\beta x + C_2 \operatorname{ch}\beta x \sin\beta x +$$

$$+ C_3 \operatorname{sh}\beta x \cos\beta x + C_4 \operatorname{sh}\beta x \sin\beta x + \frac{q}{k} x^3.$$

A (2.10.32) peremfeltételből következik, hogy:

$$u(0) = C_1 = 0.$$

Ezt felhasználva deriválunk:

$$u'(x) = \beta[C_2(\operatorname{sh}\beta x \sin\beta x + \operatorname{ch}\beta x \cos\beta x) +$$

$$+ C_3(\operatorname{ch}\beta x \cos\beta x - \operatorname{sh}\beta x \sin\beta x) + C_4(\operatorname{ch}\beta x \sin\beta x +$$

$$+ \operatorname{sh}\beta x \cos\beta x)] + \frac{3q}{k} x^2.$$

De $u'(0) = 0$, tehát

$$(C_3 + C_2) = 0, \quad \text{s így} \quad C_2 = - C_3.$$

Ezzel

$$u(x) = C_3(\operatorname{sh}\beta x \cos\beta x - \operatorname{ch}\beta x \sin\beta x) +$$

$$+ C_4 \operatorname{sh}\beta x \sin\beta x + \frac{q}{k} x^3 \qquad (2.10.35)$$

$$u'(x) = \beta[- 2C_3 \operatorname{sh}\beta x \sin\beta x + C_4(\operatorname{ch}\beta x \sin\beta x +$$

$$+ \operatorname{sh}\beta x \cos\beta x)] + \frac{3q}{k} x^2$$

$$u''(x) = \beta^2[-2C_3(\mathrm{ch}\,\beta x \sin\beta x + \mathrm{sh}\,\beta x \cos\beta x) +$$

$$+ C_4 2\mathrm{ch}\,\beta x \cos\beta x] + \frac{6q}{k} x$$

$$u'''(x) = 2\beta^3[-C_3 2\mathrm{ch}\,\beta x \cos\beta x + C_4(-\mathrm{ch}\,\beta x \sin\beta x +$$

$$+ \mathrm{sh}\,\beta x \cos\beta x)] + \frac{6q}{k}$$

A (2.10.33) feltétel értelmében

$$u''(\ell) \equiv \beta^2[-2C_3(\mathrm{ch}\,\beta\ell \sin\beta\ell + \mathrm{sh}\,\beta\ell \cdot \cos\beta\ell) +$$

$$+ C_4 2\mathrm{ch}\,\beta\ell \cdot \cos\beta\ell] + \frac{6q}{k}\ell = 0$$

$$u'''(\ell) \equiv \beta^3[-4C_3\mathrm{ch}\,\beta\ell \cdot \cos\beta\ell + 2C_4(-\mathrm{ch}\,\beta\ell \cdot \sin\beta\ell +$$

$$+ \mathrm{sh}\,\beta\ell \cdot \cos\beta\ell)] + \frac{6q}{k} = 0$$

Inhomogén lineáris egyenletrendszert nyertünk:

$$-C_3(\mathrm{ch}\,\beta\ell \sin\beta\ell + \mathrm{sh}\,\beta\ell \cos\beta\ell) + C_4\mathrm{ch}\,\beta\ell \cos\beta\ell =$$

$$= -\frac{6q}{2k\beta^2}\ell$$

$$-2C_3\mathrm{ch}\,\beta\ell \cos\beta\ell + C_4(-\mathrm{ch}\,\beta\ell \sin\beta\ell + \mathrm{sh}\,\beta\ell \cos\beta\ell) =$$

$$= -\frac{6q}{2k\beta^3}$$

A rendszer determinánsa nem lehet zérus, ugyanis

$$D = -\mathrm{sh}^2\beta\ell \cos^2\beta\ell + \mathrm{ch}^2\beta\ell \sin^2\beta\ell + 2\mathrm{ch}^2\beta\ell \cos^2\beta\ell =$$

$$= \cos^2\beta\ell(\mathrm{ch}^2\beta\ell - \mathrm{sh}^2\beta\ell) + \mathrm{ch}^2\beta\ell(\cos^2\beta\ell +$$

$$+ \sin^2\beta\ell) = \cos^2\beta\ell + \mathrm{ch}^2\beta\ell \neq 0,$$

így van egyértelmű megoldás.

$$C_3 = \frac{6q}{2k\beta^3}\,\frac{\beta\ell\mathrm{ch}\beta\ell \cdot \sin\beta\ell - \beta\ell\mathrm{sh}\beta\ell \cdot \cos\beta\ell + \mathrm{ch}\,\beta\ell \cos\beta\ell}{\cos^2\beta\ell + \mathrm{ch}^2\beta\ell}$$

$$C_4 = \frac{6q}{2k\beta^2}\,\frac{\mathrm{ch}\,\beta\ell \sin\beta\ell + \mathrm{sh}\,\beta\ell \cos\beta\ell - 2\ell\,\mathrm{ch}\,\beta\ell \cos\beta\ell}{\cos^2\beta\ell + \mathrm{ch}^2\beta\ell}$$

2.11 Közelítő megoldások másodrendű diferenciálegyenletekre

A magasabb rendű differenciálegyenletek közelítő integrálására számos speciális módszer létezik. Ezek legtöbbjét speciális egyenletek numerikus megoldására dolgozták ki, ezért korlátozott alkalmazási körűek.

A továbbiakban a másodrendű egyenletekre alkalmazható, általános jellegű numerikus módszerekkel foglalkozunk.

Legyen adva az explicit alakú

$$y'' = f(x,y,y') \qquad (2.11.1)$$

másodrendű differenciálegyenlet. Írjuk elő az $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = y'_o$ kezdeti feltételeket és keressünk olyan partikuláris megoldást a (2.11.1) egyenletnek, amely ezeket a kezdeti feltételeket kielégíti.

a) Grafikus módszer

Geometriai szempontból a feladat a $P_o(x_o,y_o)$ ponton keresztülhaladó és ebben a pontban y'_o iránytangensű integrálgörbe egyenletének meghatározására.

Határozzuk meg grafikusan azt az integrálgörbét, amely az (x_o,y_o) ponton keresztülhalad. Kihasználjuk a másodrendű differenciálegyenleteknek azt a tulajdonságát, hogy integrálgörbéjüknek nem csak az irányát, hanem a görbületét is jellemzik, hiszen a görbület és y' ill. y'' közötti összefüggés mint ismeretes adott x helyen:

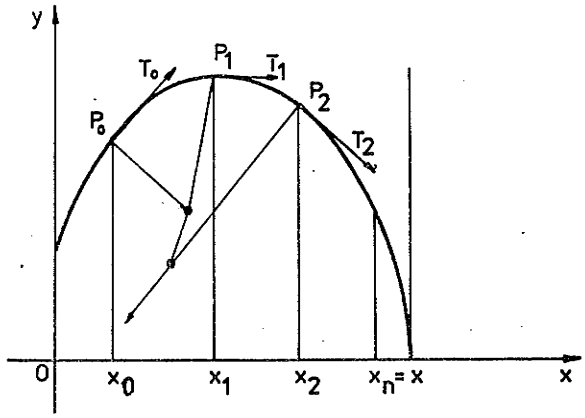
$$R(x) = \left| \frac{(\sqrt{1 + y'(x)^2})^3}{y''(x)} \right|$$

Osszuk fel az $[x_o,x]$ intervallumot az $x_o < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_{n-1} < x_n = x$ osztópontokkal n részre. Húzzunk az osztópontokon keresztül az Y tengellyel párhuzamos egyeneseket és hajtsuk végre egymás után a következő műveleteket:

A kezdeti feltételek alapján számítsuk ki az $f(x,y,y')$ függvény értékét a $P_o(x_o,y_o)$ pontban. Az $f(x_o,y_o,y'_o)$ a (2.11.1) egyenlet alapján y'' értékét adja az (x_o,y_o) pontban: $y''(x_o) = y''_o$. Ismerve ezt az értékét, számítsuk ki az integrálgörbe R_o görbületét a P_o pontban:

$$R_o = \left| \frac{(\sqrt{1 + y_o'^2})^3}{y''_o} \right|$$

A P_o pontból (2.21 ábra) húzzuk meg az y'_o iránytangensű T_o érintődarabot és erre merőleges egyenest indítva



2.21 ábra

a P_o pontból (y''_o előjelének megfelelő oldalon) rajzoljuk meg az R_o hosszúságú $\overline{P_oP'_o}$ egyenesszakaszt.

A P'_o pontból mint középpontból megrajzoljuk a P_o ponton átmenő R_o sugarú görbületi kört, amely az x_1 ponton áthaladó függőleges egyenest valamely $P_1(x_1,y_1)$ pontban metszi. Ezután számítsuk ki a (2.11.1) egyenlet jobb oldalán álló $f(x,y,y')$ függvény értékét a $P_1(x_1,y_1)$ pontban.

(Az y'_1 érintő iránytangens értéke ebben a pontban ismeretes, mivel a T_1 érintő merőleges a $\overline{P'_oP_1}$ sugárra). Az $f(x_1,y_1,y'_1)$ függvényérték adja $y''(x_1)$ értékét a (2.11.1) egyenlet értelmében: $y''(x_1) = y''_1$. Az y'_1 és y''_1 értékek ismeretében kiszámítjuk az integrálgörbe görbületi sugarát a $P_1(x_1,y_1)$ pontban:

$$R_1 = \left| \frac{(\sqrt{1 + y_1'^2})^3}{y''_1} \right|$$

Ezután a $\overline{P'_oP_1}$ sugár irányában mérjük fel az R_1 görbületi sugárnak megfelelő $\overline{P_1P'_1}$ távolságot. Írjunk le a P'_1 pontból mint középpontból R_1 sugárral körívet a P_1 ponton keresztül addig, amíg ez metszi az x_2 ponton átmenő függőleges egyenest egy P_2 pontban stb.

Ily módon folytatva az eljárást megkapjuk az integrálgörbének az $x_1,x_2,\ldots,x_n$ osztópontokhoz tartozó pontjait.

A következőkből álló $P_o, P_1, \ldots, P_n$ pontokon áthaladó görbe a közelítő integrálgörbét adja.

Világos, hogy minél nagyobb az n értéke, azaz minél sűrűbb az $[x_o, x]$ intervallum felosztása, annál jobb a közelítés. Míg tehát elsőrendű egyenletek esetében a grafikus módszer az ún. Euler-féle poligon érintődarabokból rajzolta ki a közelítő integrálgörbét, másodrendű egyenletek esetében a közelítő görbe körívekből rajzolódik ki.

Megjegyzés:

Az ismertetett geometriai szerkesztési módszer sok esetben eredményesen kombinálható az ún. interpolációval. A grafikus módszer az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban az

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ számokat szolgáltatta

a vizsgált egyenlet megoldási görbéjére.

Az $y(x)$ megoldás tehát áthalad az (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots, (x_n, y_n)$ pontokon, ezen felül folytonos (sőt legalább kétszer differenciálható) függvény.

Az alábbi Lagrange-féle interpolációs eljárással előállíthatjuk azt az $(n-1)$-edfokú polinomot, amely ugyancsak áthalad a fenti pontokon. A Lagrange-féle interpoláció lényege a következő: Meghatározandó olyan lehető legalacsonyabb fokszámú $L(x)$ polinom, amelyre

$$L(x_i) = y_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{2.11.2}$$

Képezzük az

$$\ell_k(x) = \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

$$(k = 1,2,\ldots,n) \tag{2.11.3}$$

polinomokat, amelyet fundamentális polinomnak nevezünk.

Könnyű belátni, hogy

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq k \\ 1, & \text{ha } i = k. \end{cases}$$

Ily módon az

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \ell_k(x) \tag{2.11.4}$$

függvény eleget tesz a (2.11.2) feltételeknek.

Minthogy mindegyik fundamentális polinom (n-1)-edfokú, következőleg $L(x)$ is (n-1)-edfokú. Más (n-1)-edfokú $M(x)$ polinom nincs is, amely eleget tenne a (2.11.2) feltételeknek, hiszen ha lenne akkor $L(x) - M(x)$ is legfeljebb (n-1)-edfokú, amelynek értéke az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban zérus, már pedig egy (n-1)-edfokú polinomnak nem lehet n gyöke.

Tehát n előírt pontra egy és csakis egy (n-1)-edfokú polinom illeszkedhet.

Az $\ell_k(x)$ fundamentális polinomokat tömörebb alakban is megadhatjuk.

Képezzük az

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

kifejezést [amely egy n-edfokú polinom és $\omega(x_k) = 0$ $(k = 1,2,\ldots,n)$]. Ekkor $\ell_k(x)$ számlálója:

$$(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n) = \frac{\omega(x)}{x - x_k}$$

Továbbá:

$$(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n) =$$

$$= \lim_{x \to x_k} \frac{\omega(x)}{x - x_k} = \lim_{x \to x_k} \frac{\omega(x) - \omega(x_k)}{x - x_k} = \omega'(x_k)$$

Innen:

$$\ell_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)} \qquad (2.11.5)$$

Ha $P(x)$ egy legfeljebb (n-1)-edfokú polinom, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pedig a független változó különböző értékei, akkor:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k)\ell_k(x) \qquad (2.11.6)$$

Speciálisan legyen $P(x) = 1$, ekkor

$$\sum_{k=1}^{n} \ell_k(x) = 1.$$

Ha $f(x)$ az (a,b) intervallumon értelmezett tetszőleges függvény és az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ osztópontok az $[a,b]$ intervallumon belül, akkor

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ell_k(x) \qquad (2.11.7)$$

Természetesen, ha $x \neq x_k$, akkor lehetséges, hogy $L(x)$ és $f(x)$ különböznek egymástól.

Az $L(x)$ polinomot az $f(x)$ függvény Lagrange-féle interpolációs polinomjának nevezzük.

A (2.11.6) összefüggésből következik, hogy ha $f(x) = P(x)$ egy n-nél alacsonyabb fokú polinom, akkor $L(x) = P(x)$, vagyis ez esetben a Lagrange-féle interpolációs polinom minden x-re megegyezik $P(x)$-szel, tehát azonos vele.

Integrálás sorok segítségével

A hatványsorok alkalmazásának elve a magasabb rendű egyenletek integrálásánál ugyanaz, mint az elsőrendű egyenletek integrálásánál.

Feltéve, hogy az egyenlet megoldása hatványsorral előállítható, felírjuk a sort határozatlan együtthatókkal, - feltételezzük, hogy a sor tagonként differenciálható -, elvégezzük a megfelelő deriválásokat, majd a deriváltakat az egyenletbe helyettesítve az egyenlő együtthatók módszerével meghatározzuk az együtthatókat. Ezután megvizsgáljuk, hogy a kapott sor valóban konvergens-e, s ha igen, akkor megkaptuk a szóban forgó egyenlet közelítő megoldását hatványsor alakjában.

Illusztratív példaként tekintsük a következő egyszerű másodrendű egyenletet:

$$y'' - xy = 0.$$

Legyenek a kezdeti feltételek: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
A megoldást a következő alakban kell keresnünk:
($a_o = y(0) = 0$, $a_1 = y'(0) = 1$)

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Innen:

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$$

Tehát:

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots =$$

$$= x^2 + a_2x^3 + \ldots + a_{n-3}x^{n-2} + \ldots = xy$$

Ha az x megfelelő hatványainak együtthatóit egyenlővé tesszük:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \ldots, \quad n(n-1)a_n = a_{n-3}$$

Innen az együtthatókra a következő értékek adódnak:

$$a_4 = \frac{1}{3\cdot 4}, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = 0, \quad a_7 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7},$$

$$a_8 = 0, \quad a_9 = 0, \quad a_{10} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}$$

Általában:

$$a_{3m-1} = a_{3m} = 0, \quad a_{3m+1} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3m(3m+1)}$$

A keresett közelítő megoldás:

$$y = x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots + \frac{x^{3m+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3m(3m+1)} + \ldots$$

A d'Alembert-féle kritérium alapján meggyőződhetünk róla, hogy a sor egyenletesen konvergens az egész számegyenesen. Megjegyezzük, hogy az egyenlet rendszámától nem függ az, hogy a megoldást hatványsorral elő lehessen állítani.

2.12 Lineáris paraméterek-feladatok közelítő megoldási módszerei

Az eddigiekben valamely

$$L[x] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (2.12.1)$$

lineáris másodrendű egyenlet partikuláris megoldását az

$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$ kezdeti feltételek előírása

alapján kerestük. Ezt a feladatot az ún. Cauchy-féle feladatot részletesen vizsgáltuk. A műszaki gyakorlatban és számos természettudományi probléma vizsgálatában a keresett $y(x)$ függvényre más természetű feltételek teljesülését írják elő. Ezek közül legegyszerűbben, amikor adott $[a,b]$ intervallum két végpontjában, az intervallum "peremére" írjuk elő a függvény viselkedését.
Ilyen előírások pl. az alábbiak:

1. $y(a) = A, \quad y(b) = B.$
2. $y(a) = A, \quad y'(b) = B_1.$

3. $y'(a) = A_1, \quad y'(b) = B_1.$

Ezek a feltételek speciális esetei a

$$\begin{aligned} \Gamma_a(y) &= \alpha y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad (0 \le \alpha, \alpha_1 \le 1, \\ &\qquad \alpha_1 + \alpha = 1) \\ \Gamma_b(y) &= \beta y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \quad (0 \le \beta, \beta_1 \le 1, \\ &\qquad \beta + \beta_1 = 1). \end{aligned} \tag{2.12.2}$$

feltételrendszernek. Ezeket a feltételeket lineáris inhomogén peremfeltételeknek nevezzük. Ha $A = B = 0$, akkor lineáris homogén peremfeltételekről van szó.

Az alábbiakban a peremérték-feladatok közelítő megoldására mutatunk be néhány módszert.

a) A differenciaegyenlet módszere

Ezt a módszert szokás a véges differenciák módszerének is nevezni. A módszer alapgondolata abban áll, hogy az

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{2.12.2}$$

$$\Gamma_a(y) = A \qquad \Gamma_b(y) = B \tag{2.12.3}$$

feladatban fellépő differenciálhányadosokat az $[a,b]$ intervallum egy felosztásából kiindulva, az osztópontokban kiszámított első-, illetve másodrendű differenciahányadosokkal közelítjük.

Az $[a,b]$ intervallum osztópontjai legyenek:

$$a = x_o, \quad x_1 = x_o + h, \quad x_2 = x_o + 2h, \ \ldots,$$

$$x_n = x_o + nh = b,$$

ahol

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Az osztópontokhoz tartozó függvényértékekre az

$$y_o, y_1, y_2, \ldots, y_n \quad \text{jelölést használjuk.} \tag{2.12.4}$$

A (2.12.4) sorozat első-, második-,..., n-edik differenciáin a következő kifejezéseket értjük:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \qquad (2.12.5)$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$$

Könnyű belátni, hogy

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) =$$

$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = \binom{2}{0} y_{i+2} - \binom{2}{1} y_{i+1} + \binom{2}{2} y_i$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1} -$$

$$- (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)$$

azaz

$$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i = \binom{3}{0} y_{i+3} - \binom{3}{1} y_{i+2} +$$

$$+ \binom{3}{2} y_{i+1} - \binom{3}{3} y_i$$

Általában:

$$\Delta^n y_i = \binom{n}{0} y_{i+n} - \binom{n}{1} y_{i+n-1} + \ldots + \binom{n}{n} y_i$$

(Ez utóbbi formula teljes indukcióval igazolható a binomiális együtthatók ismert tulajdonságának felhasználásával.)

Az x_i pontban $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ az y_i' és y_i'' differenciálhányadosok közelítésére az első és második differenciák felhasználásával az alábbi differenciahányadosokat használjuk:

$$y_i' \approx \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} ; \qquad (2.12.6)$$

$$y_i'' \approx \frac{\Delta^2 y_i}{h^2} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}$$

Megjegyezzük, hogy a (2.12.6) differenciahányadosok helyett bizonyos esetekben célszerű a

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \qquad (2.12.7)$$

$$y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

ún. szimmetrikus differenciahányadosok használata.

Az x_i pontban a (2.12.2) differenciálegyenlet helyett tehát a következő differenciaegyenletet vesszük.

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i$$

$$(i = 1,2,\ldots,n-1) \qquad (2.12.2')$$

ahol $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$

A (2.12.3) peremfeltételek pedig az

$$\alpha y_o + \alpha_1 \frac{y_1 - y_o}{h} = A \qquad (2.12.3')$$

$$\beta y_o + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B$$

egyenletet szolgáltatják.

A keresett $y_o, y_1, \ldots, y_n$ (n+1) számú ismeretlenre n+1 egyenletünk van.

A probléma tehát a (2.12.2') és (2.12.3') egyenletrendszer megoldására redukálódott. Ha az osztópontok száma nagy, akkor természetesen az egyenletrendszer megoldása jelentős számítási munkát igényel, de erre kész számítógépes programok állnak rendelkezésre.

Példák:

1. Legyen adott az

$$L(y) \equiv y'' + (1 + x^2)y = -1$$

$$\Gamma_a(y) = y(-1) = 0 \qquad \Gamma_b(y) = y(1) = 0$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

peremfeladat.

Osszuk fel a [-1,1] intervallumot 4 részre. Az osztópontok:

$$x_o = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = 1; \quad h = \frac{1}{2}$$

A peremfeltételekből

$$y(x_o) = y_o = 0, \qquad y(x_4) = y_4 = 0$$

Az egyenlet és a peremfeltételek szimmetriájából meghatározandó tehát y_1 és y_2 értéke.

A (2.12.7) szimmetrikus differenciahányadosokat használva, az x_1 pontban az egyenlet

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_o}{(\frac{1}{2})^2} + (1 + \frac{1}{4})y_1 = -1$$

Az x_2 pontban pedig:

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{\frac{1}{4}} + y_2 = -1$$

írható (mivel $x_2 = 0$).

Rendezés után $y_3 = y_1$ figyelembevételével a

$$-6\frac{3}{4}y_1 + 4y_2 = -1$$

$$8y_1 - 7y_2 = -1$$

egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása:

$$y_1 = 0{,}721; \qquad y_2 = 0{,}967$$

Összefoglalva:

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y_i	0	0,721	0,967	0,721	0

2. Legyen adva az

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

egyenlet az $[a,b] = [1,2]$ intervallumra vonatkozó

$$\Gamma_a(y) = y(1) = 1, \qquad \Gamma_b(y) = y(2) = 2$$

peremfeltételek mellett.

Ezt a példát azért választottuk, mert pontos megoldását ismerjük, így össze tudjuk hasonlítani a véges differenciák módszerével adódó megoldással.

Osszuk fel az $[a,b] = [1,2]$ intervallumot négy részre az

$$x_o = 1, \quad x_1 = 1{,}25, \quad x_2 = 1{,}5, \quad x_3 = 1{,}75, \quad x_4 = 2$$

osztópontokkal. Ekkor $h = 0{,}25$.

Meghatározandók az y_1, y_2 és y_3 függvényértékek.

Az adott egyenlet alapján a differenciaegyenletek:

$$16 \cdot 1{,}5625(1 - 2y_1 + y_2) + 2{,}5(y_2 - 1) + 2y_1 = 0$$

$$16 \cdot 2{,}25(y_1 - 2y_2 + y_3) + 2{,}6(y_3 - y_1) + 2y_2 = 0$$

$$16 \cdot 3{,}0625(y_2 - 2y_3 + 2) + 2{,}7(2 - y_2) + 2y_3 = 0$$

A szorzások elvégzése és rendezés után az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} -48y_1 + 35y_2 \qquad\qquad &= -15 \\ 24y_1 - 70y_2 + 48y_3 &= 0 \\ 35y_2 - 96y_3 \qquad\qquad &= -126 \end{aligned}$$

A második egyenletet 2-vel megszorozva és a három egyenletet összeadva a

$$-70y_2 = -141$$

$$y_2 = \frac{141}{70} = 2{,}0\overline{146857}$$

ennek ismeretében:

$$y_1 = \frac{171}{96} = 1{,}78125; \qquad y_3 = \frac{393}{192} = 2{,}046927$$

Ezzel szemben a differenciálegyenletnek a peremfeltételeket kielégítő

$$y = \frac{7}{x} - \frac{6}{x^2}$$

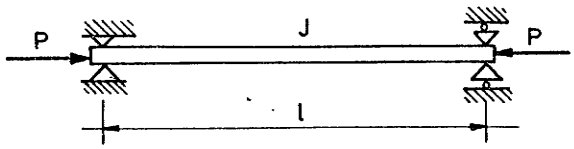
pontos megoldásából:

$y_1 = 1{,}76; \quad y_2 = 2 \quad$ és $\quad y_3 = 2{,}04082$

adódik.

Sajátérték-feladat megoldása

Példaképpen tekintsük a mindkét végén csuklósan támasztott nyomott rudat, melynek hajlító merevsége teljes hosszában állandó (2.22 ábra).



2.22 ábra

Állandó merevségű rúd vizsgálata azzal az előnnyel jár, hogy a számítás eredményét az elméletileg pontos megoldással is össze tudjuk hasonlítani.

Ismeretes, hogy a nyomott rúd semleges tengelye kielégíti az

$$y'' = -\frac{P}{EJ}\, y$$

differenciálegyenletet, a csuklós megtámasztás pedig azt jelenti, hogy

$$y(0) = y(\ell) = 0.$$

A $(0,\ell)$ intervallumot osszuk négy részre, azaz a lépéstávolság legyen $h = \ell/4$, akkor összesen három közbenső pontra vonatkozólag kell felírni a differenciaegyenletet.

Bevezetve még a

$$\mu = \frac{P}{EJ}, \quad \text{illetve a} \quad \lambda = \mu h^2 = \frac{P}{EJ}\,\frac{\ell^2}{16}$$

jelöléseket a következő lineáris homogén egyenletrendszerre jutunk

$$\begin{aligned} -2Y_1 + Y_2 \qquad &= -\lambda Y_1 \\ Y_1 - 2Y_2 + Y_3 &= -\lambda Y_2 \\ Y_2 - 2Y_3 \qquad &= -\lambda Y_3 \end{aligned}$$

illetve

$$(\lambda - 2)Y_1 + Y_2 = 0$$

$$Y_1 + (\lambda - 2)Y_2 + Y_3 = 0$$

$$Y_2 + (\lambda - 2)Y_3 = 0$$

Ennek a lineáris homogén egyenletrendszernek akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az együtthatókból alkotott determináns értéke zérus, azaz, ha

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

Ez pedig a következő λ értékekre teljesül

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$$

λ kifejezésből

$$P = \frac{16\lambda}{\ell^2} EJ ,$$

amely nyilvánvalóan a legkisebb λ értéknél, azaz λ_1-nél lesz a legkisebb. Ezt nevezzük kritikus nyomóerőnek, melynek értékére jelen esetben

$$P_{krit} = \frac{9,37}{\ell^2} EJ$$

adódott. A pontos megoldás

$$\frac{\pi^2}{\ell^2} EJ = \frac{9,86}{\ell^2} EJ$$

tehát a közelítés hibája az 5%-ot sem éri el.

A pontosság a beosztások számának növekedésével fokozható. Ez természetesen a determináns méretének, illetve a karakterisztikus polinom fokszámának a növekedését vonja maga után, ami általános esetben a számítási munka hatványozott mértékű növekedésével jár. Ily módon azonban lehetőség nyílik nem állandó merevségű rudak törő erőjének és más sajátérték-feladatok, pl. rudak kritikus rezgéseinek a megfelelő pontosságú meghatározására. A feladat tulajdonképpen mátrix sajátértékeinek a kiszámítása, ami elektronikus számítógép alkalmazása esetén már kész programok alapján végezhető.

Megjegyzés:

Állandó merevségű rúd esetén n belső osztópont mellett a feladat megoldása az n-edrendű

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

kontinuáns mátrix sajátértékeinek a meghatározását jelenti, amelyek tetszőleges n esetére zárt alakban felírhatók

$$\lambda_k = -4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} = -2\left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1}\right)$$

Ha pl.:

$n = 5$, akkor $\lambda_1 = 0{,}267949$,

a kritikus erő közelítő értéke pedig

$$\frac{36 \cdot 0{,}267949}{\ell^2} EJ = \frac{9{,}646}{\ell^2} EJ$$

adódik, amelynek a pontos értéktől való eltérése már a 2,5%-ot sem éri el (kb. 2,3%).

b) A kollokáció módszere

E módszer alkalmazásakor a differenciálegyenletnek a peremfeltételeket is kielégítő megoldását az

$$\tilde{y}(x) = u_o(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \qquad (2.12.8)$$

lineáris kombinációval kívánjuk közelíteni.

A (2.12.8) összefüggésben az $u_o(x)$, $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ függvényeket önkényesen választjuk (a gyakorlatban rendszerint polinomokat használunk), ezek tehát ismert függvények, a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ számok egyenlőre ismeretlen együtthatók.

Az $y(x)$ függvénytől megköveteljük, hogy kielégítse az (2.12.1) $L(y) = y'' + p_1(x)y' + q(x)y = f(x)$ egyenletet és adott $[a,b]$ intervallum végpontjaiban a

$\Gamma_a(y) = A$, $\Gamma_b(y) = B$ peremfeltételeket.

Ez bekövetkezik, ha

$$\Gamma_a(u_o) = A, \qquad \Gamma_b(u_o) = B$$

$$\Gamma_a(u_i) = 0, \qquad \Gamma_b(u_i) = 0$$

azaz, ha az $u_o(x)$ függvény kielégíti az inhomogén peremfeltételeket, az $u_i(x)$ függvények $(i = 1,2,\ldots,n)$ pedig a homogén peremfeltételeket.

Helyettesítsük be a (2.12.8) összefüggésben szereplő $\tilde{y}$ függvényt a (2.12.1) differenciálegyenletbe. Mivel $\tilde{y}$ nem megoldás, ezért $L(\tilde{y}) \neq f(x)$.

Jelöljük $R(x;c_1,c_2,\ldots,c_n)$-nel az $L(\tilde{y}) - f(x)$ különbséget:

$$R(x;c_1,c_2,\ldots,c_n) = L(\tilde{y}) - f(x) =$$

$$= L(u_o) + \sum_{i=1}^{n} c_i L(u_i) - f(x)$$

A kollokáció módszere abban áll, hogy az $[a,b]$ intervallum előírt $x_1,x_2,\ldots,x_n$ pontjaiban, a <u>kollokáció pontjaiban</u> az

$$\begin{aligned} R(x_1;c_1,c_2,\ldots,c_n) &= 0 \\ R(x_2;c_1,c_2,\ldots,c_n) &= 0 \\ &\vdots \\ R(x_n;c_1,c_2,\ldots,c_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (2.12.10)$$

relációk teljesülését kívánjuk meg. Az R hiba értéke tehát az $x_1,x_2,\ldots,x_n$ pontokban zérussá kell váljon. A $c_1,c_2,\ldots,$ $\ldots,c_n$ ismeretlenekre n egyenletünk van, így ezek értéke meghatározható.

Ezeket helyettesítjük vissza a (2.12.8) kifejezésbe és az így nyert $y(x)$ függvény a peremfeladat közelítő megoldása.

<u>Példa:</u>
Oldjuk meg az

$$L(y) \equiv y'' + (1 + x^2)y = -1 \qquad (2.12.11)$$

$$y(-1) = y(1) = 0$$

peremérték-feladatot a kollokáció módszerével!

Legyenek $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{1}{2}$ a kollokációs pontok. A premfeltételek homogének, így $u_o = 0$. Kéttagú lineáris kombinációra szorítkozva válasszuk meg az $u_1(x)$ és $u_2(x)$ függvényeket az alábbi módon:

$$u_1(x) = 1 - x^2; \qquad u_2(x) = x^2(1 - x^2)$$

Mindkét függvény kielégíti a homogén peremfeltételeket:

$$u_1(-1) = u_1(1) = 0, \qquad u_2(-1) = u_2(1) = 0$$

A (2.12.8) összefüggés alapján:

$$\tilde{y} = u_o + \sum_{i=1}^{2} c_i u_i(x) = c_1(1 - x^2) + c_2 x^2(1 - x^2)$$

Számítsuk ki az $R(x;c_1,c_2)$ kifejezésértékét!
Mivel: $u_1'' = -2$, $u_2'' = 2 - 12x^2$

$$L_1(u_1) = u_1'' + (1 + x^2)u_1 = -2 + (1 + x^2)(1 - x^2) =$$

$$= -1 - x^4$$

$$L_2(u_2) = u_2'' + (1 + x^2)u_2 = 2 - 12x^2 + (1 + x^2)x^2(1 - x^2) =$$

$$= 2 - 11x^2 - x^6$$

A (2.12.9) formula alapján:

$$R(x;c_1,c_2) = 1 - c_1(1 + x^4) + c_2(2 - 11x^2 - x^6)$$

adódik.

A kollokációs pontokban

$$R(0;c_1,c_2) = 1 - c_1 + 2c_2 = 0$$

$$R(\tfrac{1}{2};c_1,c_2) = 1 - \frac{17}{16} c_1 - \frac{49}{64} c_2 = 0$$

kell, hogy teljesüljön. Ezen egyenletrendszer gyökei:

$$c_1 = 0{,}957; \qquad c_2 = -0{,}022$$

A (2.12.11) egyenlet közelítő megoldása tehát:

$$y(x) = 0{,}957(1 - x^2) - 0{,}022x^2(1 - x^2).$$

c) A legkisebb négyzetek módszere

Ennél a módszernél az előző kollokációs módszerhez hasonlóan megválasztjuk az $u_i(x)$ függvényeket, kiszámítjuk az

$$R(x;c_1,c_2,\dots,c_n) = L(y) - f(x) =$$

$$= L(u_o) + \sum_{i=1}^{n} c_i L(u_i) - f(x)$$

különbséget, csak a $c_1,c_2,\dots,c_n$ ismeretlenek kiszámítását végezzük más módon.

Képezzük a

$$H = \int_a^b R^2(x;c_1,c_2,\dots,c_n)dx \qquad (2.12.12)$$

hibanégyzet integrált, amelyet a $c_1,c_2,\dots,c_n$ változók függvényének tekintünk, s amelyeket úgy határozunk meg, hogy értéküket H értékét minimálissá tegyék. A H függvénynek minimuma nyilván csak olyan helyen lehet, ahol

$$\frac{\partial H}{\partial c_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\dots,n)$$

Ezek teljesülését követeljük meg, ami által a c_i számokra n egyenletet kapunk, amelyből értékeik meghatározhatók. Feltesszük, hogy a differenciálást az integráljel alatt elvégezhetjük, azaz

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial c_i} = \int_a^b R\,\frac{\partial R}{\partial c_i}\,dx = 0 \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (2.12.13)$$

a megoldandó egyenletrendszer.

A keletkező egyenletrendszerből $c_1,c_2,\dots,c_n$ értékét meghatározhatjuk.

Példa:

Oldjuk meg az előző pont feladatát a legkisebb négyzetek módszerével!

Útmutatás: Mivel $R(x;c_1,c_2) = 1 - c_1(1 + x^4) + c_2(2 - 11x^2 - x^4)$ a megoldandó egyenletrendszer:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial c_1} = \int_{-1}^{1} R\,\frac{\partial R}{\partial c_1}\,dx = \int_{-1}^{1}[-(1 + x^4) - c_1(1 + x^4)^2 +$$

$$+ c_2(2 - 11x^2 - x^6)(1 + x^4)]dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial c_2} = \int_{-1}^{1} R\frac{\partial R}{\partial c_2}dx = \int_{-1}^{1}[(2 - 11x^2 - x^6) -$$

$$- c_1(1 + x^4)(2 - 11x^2 - x^6) + c_2(2 - 11x^2 - x^6)^2]dx =$$

$$= 0 \quad .$$

d) Galjorkin-módszere:

A Galjorkin-módszernél a kiindulás ugyanaz, mint a kollokáció módszerénél. A közelítő megoldást önkényesen választott függvények lineáris kombinációja alakjában keressük. Az ismeretlen c_i együtthatók meghatározására azonban más elvet követünk.

Megkívánjuk, hogy teljesüljenek az

$$\int_a^b u_1(x)R(x;c_1,c_2,\ldots,c_n)dx = 0$$

$$\int_a^b u_2(x)R(x;c_1,c_2,\ldots,c_n)dx = 0$$

$$\vdots$$

$$\int_a^b u_n(x)R(x;c_1,c_2,\ldots,c_n)dx = 0$$

relációk, amelyekből a c_i-k meghatározhatók.

Példa:

Oldjuk meg az

$$L(y) \equiv y'' + xy' + y = 2x; \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = 0$$

peremérték-feladatot!

Válasszuk meg az u_o, u_1, u_2 függvényeket az alábbi módon:

$$u_o(x) = 1 - x, \qquad u_1(x) = x(1 - x), \qquad u_2(x) = x^2(1 - x)$$

Azonnal látni, hogy $u_o(x)$ kielégíti az inhomogén peremfeltételt, $u_o(0) = 1$, $u_o(1) = 0$. Az $u_1(x)$ és $u_2(x)$ függvények pedig a homogén peremfeltételt elégítik ki.

Kiindulva az

$$\tilde{y} = (1 - x) + c_1x(1 - x) + c_2x^2(1 - x)$$

lineáris kombinációból

$$R(x;c_1,c_2) = 1 - 4x + c_1(-2 + 2x - 3x^2) + c_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^3).$$

A feltételi egyenletek:

$$\int_0^1 (x - x^2)R(x;c_1,c_2)dx = 0$$

$$\int_0^1 (x^2 - x^3)R(x;c_1,c_2)dx = 0.$$

A számítások végrehajtását az olvasóra bízzuk.

III. FEJEZET

Parciális differenciálegyenletek

3.1 A parciális differenciálegyenletek osztályozása

Definíció:

Azokat az egyenleteket, amelyekben valamely többváltozós függvény, annak legfeljebb n-edrendű parciális deriváltjai, továbbá a független változókból alkotott kifejezések szerepelnek, n-edrendű parciális differenciálegyenleteknek nevezzük. Ha az ismeretlen függvény és parciális deriváltjai csak első hatványon fordulnak elő, akkor a parciális differenciálegyenlet lineáris.

Az n-edrendű parciális differenciálegyenlet megoldása olyan n változós függvény, melyet az egyenletbe behelyettesítve, azt a változóiban azonossággá teszi.

A természetben lejátszódó különféle folyamatokat általában olyan törvények írják le, amelyekben többváltozós függvények szerepelnek. A változó mennyiségek lehetnek az idő, valamely térbeli koordináta-rendszer koordinátái, hőmérséklet stb. Ebből már következik, hogy a parciális differenciálegyenleteket széles körben alkalmazzák. A következőkben a parciális differenciálegyenletek közül csak azokkal foglalkozunk, amelyek az építőmérnök gyakorlatában legtöbbször fordulnak elő. Ezek másod- és negyedrendű lineáris parciális differenciálegyenletek.

A másodrendű lineáris inhomogén parciális differenciálegyenlet általános alakja két változós esetben

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \alpha(x,y)u_x +$$

$$+ \beta(x,y)u_y + \gamma(x,y)u + \delta(x,y) = 0 \qquad (3.1.1)$$

ahol: $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ adott függvények, amelyek értelmezési tartományainak van közös része

$$u = u(x,y) \qquad \text{és} \qquad u_{xy} = u_{yx}$$

Ha $\delta(x,y) \equiv 0$, akkor a differenciálegyenlet homogén.
A lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletek lehetnek hiperbolikusak, elliptikusak, parabolikusak egy bizonyos (x,y) tartományban, annak megfelelően, hogy (csak a $b(x,y) = 0$ esetre szorítkozva) fennáll:

$$a(x,y),\ c(x,y) \neq 0 \quad \text{és} \quad a(x,y),\ c(x,y)$$

előjele különböző (hiperbolikus d.e.)

$$a(x,y),\quad c(x,y) \neq 0 \quad \text{és} \quad a(x,y),\quad c(x,y)$$

egyező előjelű (elliptikus d.e.)

$$a(x,y) = 0 \quad \text{és} \quad c(x,y) = 0$$

közül az egyik fennáll (parabolikus d.e.).

Néhány nevezetes másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet (ha $u = u(x,y,t)$, t az idő, x és y helykoordináta):

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}; \qquad u = u(x,t)$$

c állandó, hiperbolikus típusú, mivel

$$a(x,y) = 1; \quad c(x,y) = -c^2.$$

A rezgő húr mozgását írja le, ezért nevezik a rezgő húr differenciálegyenletének.

Két kezdeti- és két peremfeltétel megadása esetén a megoldásfüggvény egyértelműen írja le a húr térbeli és időbeli rezgésállapotát.

$$u_t = c^2 u_{xx}; \qquad u = u(x,t),$$

c állandó, az ún. hővezetési vagy diffúziós differenciálegyenlet egydimenziós esetben parabolikus típusú, mert u_{tt} együtthatója zérus. Ez az egyenlet írja le pl. a talaj-összenyomódásának időbeli lefolyását is. Megoldásához két peremfeltétel és egy kezdeti feltétel szükséges.

Laplace-féle differenciálegyenletnek, vagy más néven potenciálegyenletnek nevezzük az

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u = u(x,y) \tag{3.1.2}$$

differenciálegyenletet. Mivel

$$a(x,y) = c(x,y) = 1,$$

elliptikus típusú.

Ha az $u = u(x,y,z)$ háromváltozós függvény, az

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \tag{3.1.3}$$

a térbeli Laplace-egyenlet.

Ez az egyenlet az örvény- és forrásmentes vektorterek potenciálját határozza meg. Jelentős szerepe van többek között az áramlástanban is.

A (3.1.2) és (3.1.3) egyenleteket a Laplace-féle operátor segítségével

$$\Delta u = 0, (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

alakban írhatjuk. A

$$\Delta u = f(x,y)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet Poisson-féle differenciálegyenletnek nevezzük. A Poisson-egyenlet írja le a membrán lehajlását tranzverzális terhelés hatására.

A Laplace- és Poisson-egyenlethez peremfeltétel járul: egyetlen zárt görbe mentén írjuk elő

1. a függvényértéket (Dirichlet feladat), vagy
2. a függvény normális irányú deriváltját (Neumann feladat) vagy
3. a függvényérték és a normális irányú derivált lineáris kombinációját (harmadik peremérték feladat).

A rezgő húr differenciálegyenletének síkbeli megfelelője a rezgő membrán egyenlete:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}); \quad u = u(x,y,t); \quad c \text{ állandó.}$$

A kétdimenziós - síkbeli - hővezetési feladat:

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}); \quad u = u(x,y,t), \quad c \text{ állandó.}$$

A

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x,y) \qquad (3.1.4)$$

vagy egyszerűbb jelöléssel

$$\Delta\Delta u = f(x,y)$$

differenciálegyenletet biharmonikus differenciálegyenletnek nevezzük.

A (3.1.4) egyenlethez tartozó homogén egyenlet

$$\Delta\Delta u = 0$$

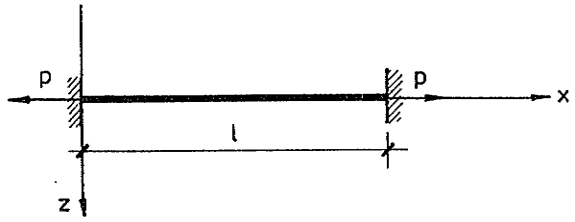
a rugalmas anyagú tárcsa feszültségfüggvényének differenciálegyenlete. A (3.1.4) egyenlet lemez lehajlását írja le tranzverzális terhelés esetén, míg az

$$u_{tt} = c^2 \cdot \Delta\Delta u; \qquad u = u(t,x,y)$$

c állandó, egyenlet a lemez rezgésének differenciálegyenlete.

3.2 A rezgő húr differenciálegyenlete

Tekintsünk valamely ℓ hosszúságú erővel megfeszített, két végpontjában rögzített tökéletesen hajlékony (rugalmas) húrt.



3.1 ábra

A koordináta-rendszer abszcissza tengelyét válasszuk úgy, hogy a húr két végpontján menjen át. A húr tehát nyugalmi helyzetben az x tengely egy szakaszával esik egybe. Ha ebből a helyzetből egyik az x tengelyre merőleges irányban kimozdítjuk, majd magára hagyjuk, akkor rezgő mozgás keletkezik, amelynél a húr egyes pontjai az [x,y] síkban, az x tengelyre merőlegesen a kimozdítás síkjában mozgást végeznek. Ezt a mozgást akkor ismerjük tökéletesen, ha bármilyen t időpillanatban meg tudjuk mondani: milyen nagy a húr x abszcisszájú pontjának a nyugalmi helyzettől mért u kitérése. Az u kitérés értéke tehát két változónak, az x helynek és a t időnek u(x,t)-vel jelölt függvénye. Az u(x,t) függvényre a következőkben differenciálegyenletet fogunk felírni. p(x) hosszegységre eső, fajlagos külső terhelés hatására a húr egyensúlyi helyzetének differenciálegyenlete, ha csak kis lehajlást engedünk meg:

$$P \cdot \frac{d^2u}{dx^2} = - p(x) \qquad (3.2.1)$$

(P az eredő húzóerő).

Tekintsük a húr kis rezgéseit. Ez a mozgás kinetikai egyenlettel írható le. Az ún. d'Alambert-elv alapján azonban a kinetikai egyenletet statikai egyenletre vezethetjük vissza. A d'Alambert-elv kimondja, hogy minden mozgásállapot bármely időpillanatban egyensúlyi állapotnak tekinthető, ha megfelelő tehetetlenségi vagy inerciaerőket vezetünk be. Newton második törvénye szerint a tömegre ható erő egyenlő a tömeg és a gyorsulás szorzatával. Ehelyett azt is mondhatjuk, hogy a hatóerő egyensúlyban van az inerciaerővel, melyet a tömeg és a negatív gyorsulás szorzataként definiálunk:

$$p(x) = -\varrho \frac{d^2u}{dx^2} \qquad (3.2.2)$$

ahol: ϱ - a húr hosszegységre eső tömege.

Helyettesítsük a (3.2.1) egyenletbe az inerciaerő (3.2.2) kifejezését, s vegyük figyelembe, hogy az u függvény a helynek és az időnek is függvénye, a deriváltak tehát parciális differenciálhányadosok:

$$p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Vezessük be a $\frac{\varrho}{p} = c^2$ jelölést, ekkor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (3.2.3)$$

A fentiekből látható, hogy a c^2 állandó a feszítéstől és a fajlagos tömegtől függ.

A húr két vége rögzített, így peremfeltételeink:

$$u(0,t) = 0; \qquad u(\ell,t) = 0 \qquad (3.2.4)$$

homogén peremfeltételek.
(Ha a húr végein gerjesztést alkalmaznak inhomogén peremfeltétel adódik):

$$u(0,t) = \mu(t); \qquad u(\ell,t) = \nu(t).$$

A húr kezdeti alakját és kezdeti sebességét a kezdeti feltételek adják:

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (3.2.5)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\substack{x=x\\t=0}} = \psi(x). \qquad (3.2.6)$$

A (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) feltételek a megoldást egyértelműen meghatározzák:

Megjegyzés:

Homogén lineáris egyenletnek homogén kezdeti és peremfeltételekkel csak triviális megoldása van.
(A 3.2.3) differenciálegyenlet megoldását Fourier-módszerével keressük.

Megkíséreljük az u(x,t) függvényt

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

szorzat alakjában meghatározni. Az X függvény csak x-től, a T pedig csak t-től függ. Ez a feltevés természetesen nem mindig eredményes, de jelen esetben célravezető.

Jelöljük vesszővel mindegyik függvénynek a saját változója szerinti deriváltját, akkor nyilvánvaló, hogy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\cdot T(t) \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)\cdot T''(t).$$

Helyettesítsük a differenciálegyenletbe. A kapott

$$c^2\cdot X(x)\cdot T''(t) = X''(x)\cdot T(t)$$

egyenletet pedig alakítsuk át

$$c^2\,\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

módon.

A bal oldal csak a t, a jobb oldal csak az x változó függvénye. A t és x viszont független változók. Ha tehát két kifejezést a t és x értékétől fülgetlenül egyenlő, akkor a kifejezések ténylegesen nem függhetnek a t-től, ill. az x-től, szóval állandók. Úgy is beláthatjuk ezt, hogy ha pl. a jobb oldalon x helyébe állandót írunk, akkor a bal oldali t függvény - minden t-re - a jobb oldali állandóval lesz egyenlő. Számítástechnikai okok miatt célszerű ezt az állandót $-\omega^2$-tel jelölni. Az $u(x,t)$ függvény e speciális alakjának feltételezése folytán a (3.2.3) differenciálegyenlet megoldása helyett a

$$c^2T'' + \omega^2T = 0 \tag{3.2.8}$$

$$X'' + \omega^2X = 0 \tag{3.2.9}$$

közönséges differenciálegyenletekkel kell foglalkoznunk. Ezek azonban könnyen kezelhető, állandó együtthatójú másodrendű differenciálegyenletek.

A (3.2.4) peremfeltételeknél vegyük figyelembe (3.2.7) szorzat alakú megoldását, akkor

$$u(x,0) = X(0)\cdot T(t) = 0$$

$$u(\ell,0) = X(\ell)\cdot T(t) = 0$$

A két feltételt minden időpillanatban csak úgy lehet kielégíteni, ha

$$X(0) = 0; \quad X(\ell) = 0 \tag{3.2.10}$$

Keressük most a (3.2.9) differenciálegyenletnek a (3.2.10) peremfeltételeket kielégítő, triviálistól különböző megoldását. Ez sajátérték-feladat. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$X(x) = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x.$$

Mivel

$$X(0) = C_1 = 0,$$

$$X(\ell) = C_2 \sin\omega\ell = 0.$$

a (3.2.10) feltételekből.

A peremfeltételeket kielégítő, triviálistól különböző megoldást csak akkor kaphatunk, ha

$$\sin\omega\ell = 0, \quad \text{azaz ha } \omega\ell = k\pi; \quad k = 1,2,\ldots.$$

Tehát az

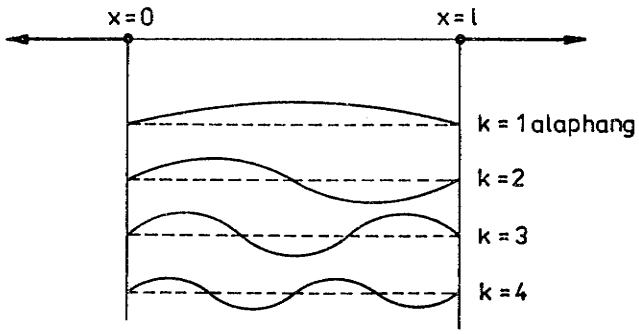
$$\omega_k = \frac{k\pi}{\ell}; \quad k = 1,2,\ldots \tag{3.2.11}$$

sajátértékeket kapjuk. Ennek megfelelően a sajátfüggvények

$$X_k = \sin\frac{k\pi}{\ell}x; \quad k = 1,2,\ldots \tag{3.2.12}$$

alakúak.

A (3.2.12) összefüggésből látható, hogy a húr végtelen sok szinusz alakú rezgést végezhet, ezek a húr sajátrezgései. Minden rezgésalak egy meghatározott sajátértéknek - a sajátfrekvenciának - felel meg. A $k = 1$ értékhez tartozó rezgés, a húr alaphangja, a többiek az ún. felhangok (felharmonikusok).



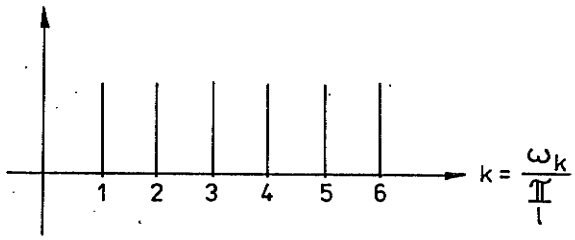
3.2 ábra

A 3.2 ábra a kifeszített húr alaprezgését és első három felharmonikusát szemlélteti. Ha a (3.2.11) összefüggés alapján ábrázoljuk a lehetséges sajátértékeket, az ún. frekvenciaspektrumot kapjuk (3.3 ábra).

Következő lépésként oldjuk meg a (3.2.8) differenciálegyenletet!

Figyelembe vesszük ω_k (3.2.11)-ben megkapott értékét. Így

$$T'' + \left(\frac{k\pi}{c\ell}\right)^2 T = 0$$



3.3 ábra

Az általános megoldás:

$$T_k = A_k \cos \frac{k\pi}{c\ell} t + B_k \sin \frac{k\pi}{c\ell} t; \qquad k = 1,2,\ldots$$

Végtelen sok megoldást kapunk.

A (3.2.3) parciális differenciálegyenletnek az

$$U_k(x,t) = X_k(x)\cdot T_k(t)$$

alakú függvények mind olyan megoldásai, amelyek a homogén peremfeltételeket kielégítik.

A kezdeti feltételeket azonban egy-egy függvény nem elégíti ki.

Feladatunk:

A kezdeti feltételeket is kielégítő megoldás meghatározása! A rezgő húr differenciálegyenlete homogén lineáris differenciálegyenlet. Ismeretes az is, hogy homogén lineáris differenciálegyenletek partikuláris megoldásainak lineáris kombinációja is megoldás. A végtelen sok partikuláris megoldás összege az

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\cdot T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi}{c\ell} t + \right.$$

$$\left. + B_k \sin \frac{k\pi}{c\ell} t\right)\cdot \sin \frac{k\pi}{\ell} x. \qquad (3.2.13)$$

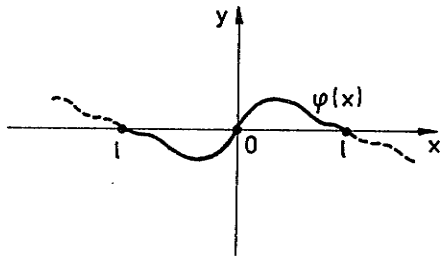
végtelen függvénysor. Ha ez a sor konvergens (a konvergencia külön matematikai bizonyítást kíván, ezzel azonban itt nem foglalkozunk), kielégíti a (3.2.3) egyenletet és a (3.2.4) peremfeltételeket.

Határozzuk meg a (3.2.13) sorban az A_k és B_k együtthatókat úgy, hogy a (3.2.5) és (3.2.6) kezdeti feltételeket is kielégítse!

Helyettesítsük (3.2.13)-ba a $t = 0$ értéket, s (3.2.5) figyelembevételével

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x = \varphi(x).$$

De ezek után az A_k számok meghatározása könnyű, hiszen azonnal látjuk, hogy itt az adott $\varphi(x)$ függvény Fourier-együtthatóit kell kiszámítani. Mivel a trigonometrikus sor csak sinusos tagokat tartalmaz, azért a húr kezdeti alakját megadó függvényt a $(0, \ell)$ intervallumon kívül páratlan függvényként kell periodikusan folytatni: 2ℓ periódussal. Ezt viszont nyugodtan megtehetjük, hiszen a $\varphi(x)$ függvény viselkedése a $(0,\ell)$ intervallumon kívül gyakorlatilag közömbös.



3.4 ábra

Az A_k együtthatók a kiterjesztett $\varphi(x)$ függvény Fourier-együtthatói.

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \cdot d\xi .$$

Ugyanezzel a módszerrel határozhatjuk meg a B_k számokat is. A (3.2.6) kezdeti feltétel ugyanis azt állítja, hogy

$$\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{\substack{x=x\\t=0}} = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k \pi k}{c\ell} \sin \frac{k\pi}{\ell} x.$$

Terjesszük ki a $\psi(x)$ függvényt 2ℓ szerint periodikusan és páratlan függvényként az egész számegyenesre! Fejtsük Fourier-sorba ezután $\psi(x)$-et!
A Fourier-együtthatók:

$$\frac{B_k \pi k}{c\ell} = \frac{2}{\ell} \int_0^{l} \psi(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \, d\xi .$$

Innen

$$B_k = \frac{2c}{\pi k} \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \, d\xi.$$

Feladatunk megoldása tehát:

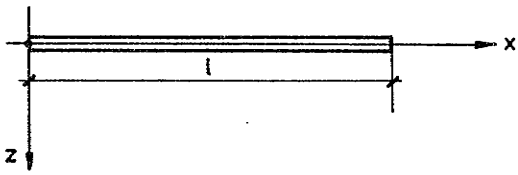
$$u(x,t) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1} \left\{ \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \cdot \cos \frac{k\pi}{c\ell} t \, d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{c\ell}{\pi k} \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \cdot \sin \frac{k\pi}{c\ell} t \, d\xi \right\} . \sin \frac{k\pi}{\ell} x.$$

3.3 Rudak rezgése

Rudak rezgésegyenletének felírásakor ugyanazt a módszert alkalmazzuk, mint a rezgő húr esetében. Tekintsünk egy ℓ hosszúságú állandó keresztmetszetű rudat, melynek tengelye essék egybe az X tengellyel. A rúd lehajlás differenciálegyenlete (lásd 2.10.20 ábra)

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ \frac{d^2u}{dx^2}\right) = p(x). \qquad (3.31)$$



3.5 ábra

A rúd szabad rezgésének az egyenletét úgy kapjuk meg, hogy d'Alambert-elv alapján a

$$-\rho \frac{d^2u}{dt^2}$$

inerciaerőt tehernek tekintjük.

(3.3.1) felhasználásával, s figyelembe véve, hogy az $u = u(x,t)$ kapjuk

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Feltéve, hogy E, J, ϱ állandók:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\varrho}{EJ}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Határozzuk meg a rúd sajátfrekvenciáját!

Keressük szorzat alakban a (3.3.2) differenciálegyenlet megoldását:

$$u(x,t) = Z(x)\cdot T(t)$$

A feltételezett megoldásfüggvényt a rezgő rúd (3.3.2) egyenletébe helyettesítve:

$$Z^{(IV)}\cdot T + \frac{\varrho}{EJ} Z\cdot T'' = 0.$$

Rendezzük az egyenletet és osszuk végig a $Z\cdot T$ függvénnyel:

$$\frac{EJ}{\varrho}\frac{Z^{(IV)}}{Z} = -\frac{T''}{T}. \qquad (3.3.3)$$

A bal oldal csak x, a jobb oldal a t változó függvénye. A két kifejezés a változóktól függetlenül egyenlő, tehát állandó. Legyen ez ω^2.
Így (3.3.3) két egyenletre bomlik:

$$Z^{(IV)} - \frac{\varrho\omega^2}{EJ} Z = 0, \qquad T'' + \omega^2 T = 0 \qquad (3.3.4)$$

A sajátrezgéseket a (3.3.4) egyenletből határozhatjuk meg.

Vezessük be a

$$\beta^4 = \frac{\varrho\omega^2}{EJ} \qquad (3.3.5)$$

jelölést!

$$Z^{(IV)} - \beta^4 Z = 0.$$

Ez negyedrendű állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet. Általános megoldása:

$$Z(x) = A\,\mathrm{ch}\,\beta x + B\,\mathrm{sh}\,\beta x + C\cos\beta x + D\sin\beta x$$

Vizsgáljuk a megoldást különböző peremfeltételek mellett:

a) Tegyük fel, hogy a rúd két végpontján csuklósan van alátámasztva. Ekkor peremfeltételeink:

$$''(0) = 0; \qquad Z(\ell) = 0$$

$$Z''(0) = 0; \qquad Z''(\ell) = 0.$$

Az $x = 0$ helyére felírt egyenletekből:

$$A + C = 0$$

$$A - C = 0$$

tehát

$$A = C = 0.$$

Így

$$Z(x) = B \operatorname{sh} \beta x + D \sin \beta x.$$

$x = \ell$ esetén:

$$B \operatorname{sh} \beta \ell + D \sin \beta \ell = 0 \qquad (3.3.7)$$

$$B \operatorname{sh} \beta \ell - D \sin \beta \ell = 0$$

Homogén lineáris egyenletrendszert nyertünk B és D meghatározására. Triviálistól különböző megoldás akkor van, ha a rendszer determinánsa zérus, azaz, ha

$$- 2 \operatorname{sh} \beta \ell \cdot \sin \beta \ell = 0$$

$\beta \ell \neq 0$, tehát a determináns értéke csak akkor lehet zérus, ha

$$\sin \beta \ell = 0.$$

Innen

$$\beta \ell = k \pi, \qquad k = 1,2,\ldots$$

azaz

$$\beta = \frac{k \pi}{\ell}$$

(3.3.7) összefüggésből következik, hogy ez esetben $B = 0$, D határozatlan.

$$Z(x) = D_k \sin \frac{k \pi}{\ell} x .$$

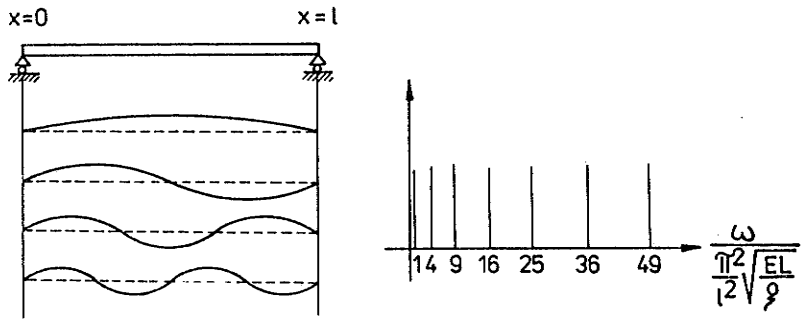
Ezek a rúd sajátrezgései. A sajátfrekvenciákat a (3.3.5) összefüggés segítségével határozhatjuk meg:

$$\omega = \sqrt{\frac{EJ}{\varrho}}\, \beta^2$$

ahonnan

$$\omega_k = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\varrho}} \, . \qquad (3.3.8)$$

A 3.6 ábrából látható, hogy a csuklós rúd rezgésképe megegyezik a rezgő húréval, mégis, ha összehasonlítjuk a (3.2.11) és (3.3.8) kifejezéseket, lényeges különbséget találunk a sajátfrekvenciák eloszlásában. A rúd sajátfrekvenciái úgy növekszenek, mint a természetes számok négyzetei, míg a húr frekvenciái a természetes számokkal arányosak.



3.6 ábra

b) Vizsgáljuk az ℓ hosszúságú $x = 0$ pontban befogadott konzolt! Peremfeltételeink (1.2.10.E pont) a befogás helyén, az $x = 0$ esetén

$$Z(o) = 0, \qquad Z'(o) = 0, \qquad (3.3.9)$$

a szabad végén $x = \ell$-nél

$$Z''(\ell) = 0, \qquad Z'''(\ell) = 0. \qquad (3.3.10)$$

A (3.3.9) feltételeket helyettesítsük a (3.3.6) megoldásfüggvénybe:

$$Z(o) = A + C = 0$$

$$Z'(o) \equiv \beta(B + D) = 0.$$

Innen

$$C = - A \qquad \text{és} \qquad D = - B,$$

ezért

$$Z(x) = A(\mathrm{ch}\,\beta x - \cos\beta x) + B(\mathrm{sh}\,\beta x - \sin\beta x).$$

A (3.3.10) feltételekből:

$$Z''(\ell) \equiv A\beta^2(\mathrm{ch}\,\beta\ell + \cos\beta\ell) + B\beta^2(\mathrm{sh}\,\beta\ell + \sin\beta\ell) = 0$$

$$Z'''(\ell) \equiv A\beta^3(\mathrm{sh}\,\beta\ell - \sin\beta\ell) + B\beta^3(\mathrm{ch}\,\beta\ell + \cos\beta\ell) = 0.$$

Az egyenletrendszernek triviálistól különböző megoldása van, ha a determinánsa zérus:

$$\beta^5[(\mathrm{ch}\,\beta\ell + \cos\beta\ell)^2 - (\mathrm{sh}^2\beta\ell - \sin^2\beta\ell)] = 0.$$

Ebből $\beta \neq 0$, s így

$$\mathrm{ch}^2\beta\ell + 2\mathrm{ch}\,\beta\ell\cos\beta\ell + \cos^2\beta\ell - \mathrm{sh}^2\beta\ell + \sin^2\beta\ell = 0,$$

összevonva:

$$(\mathrm{ch}^2\beta\ell - \mathrm{sh}^2\beta\ell) + \sin^2\beta\ell + \cos^2\beta\ell) + 2\,\mathrm{ch}\beta\ell\cos\beta\ell = 0.$$

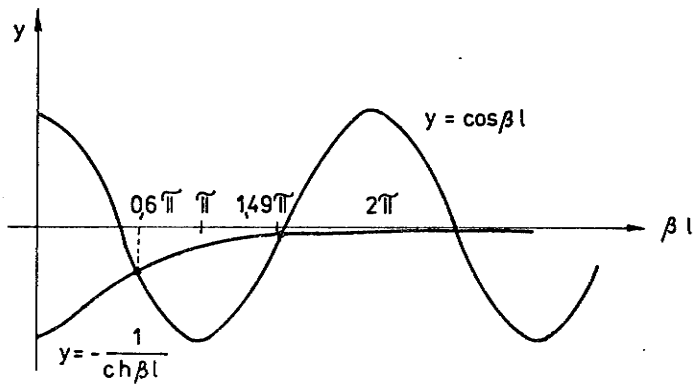
Tehát

$$2(1 + \mathrm{ch}\,\beta\ell\cdot\cos\beta\ell) = 0.$$

A megoldhatóság feltétele:

$$\cos\beta\ell = -\frac{1}{\mathrm{ch}\,\beta\ell} \qquad (3.3.12)$$

A kapott transzcendens egyenletnek végtelen sok megoldása van. A gyököket pl. grafikusan határozhatjuk meg.



3.7 ábra

Az egyenlet első néhány gyöke

$$\beta_k\ell = 0{,}60\pi; \quad 1{,}49\pi; \quad 2{,}5\pi.$$

Mivel $\frac{1}{\mathrm{ch}\,\beta\ell}$ értéke $\beta\ell$ növekedésével zérushoz tart, a további gyököket kielégítő pontossággal a

$$\cos\beta\ell = 0$$

egyenletből határozhatjuk meg. Innen

$$\beta\ell = (k - \tfrac{1}{2})\pi .$$

A sajátfrekvenciákat a (3.3.5) összefüggésből számíthatjuk ki

$$\omega_k = \beta_k^2\sqrt{\frac{EJ}{\varrho}}$$

Nagyobb sajátfrekvenciák jó közelítéssel az

$$\omega_k = \frac{(k - \frac{1}{2})^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{\varrho}}$$

képletből kaphatók.

Innen a sajátfrekvenciák meghatározhatók, ha β_k értékét a (3.3.5) összefüggésbe behelyettesítjük.

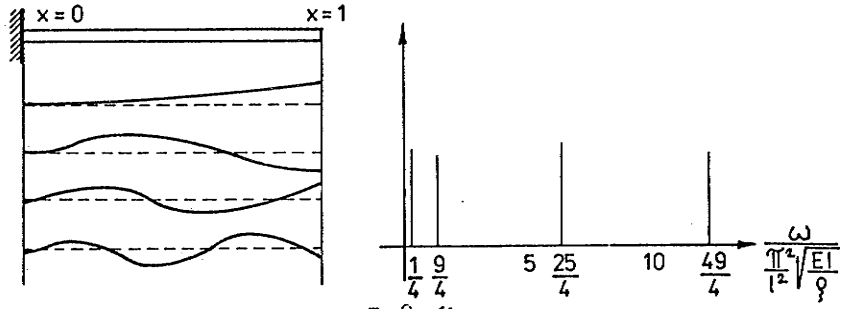
A (3.3.11) egyenletrendszernek megoldása az

$$A = \frac{c_k}{\mathrm{ch}\beta_k\ell + \cos\beta_k\ell} ; \qquad B = \frac{-c_k}{\mathrm{sh}\beta_k\ell + \sin\beta_k\ell}$$

értékpár, ahol β_k a (3.3.12) egyenlet gyöke. Ezzel a sajátfüggvények

$$Z_k(x) = c_k\left[\frac{\mathrm{ch}\beta_k x - \cos\beta_k x}{\mathrm{ch}\beta_k\ell + \cos\beta_k\ell} - \frac{\mathrm{sh}\beta_k x - \sin\beta_k x}{\mathrm{sh}\beta_k\ell + \sin\beta_k\ell}\right]$$

A konzol szabad rezgéseit és frekvenciaspektrumát a 3.8 ábra szemlélteti.



3.8 ábra

3.4 A hővezetés differenciálegyenlete

Valamely ℓ hosszúságú rúd két végpontját tartsuk állandóan nulla fokon. A rúdban levő hőmérséklet-eloszlást $t = 0$ időpillanatban az

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

függvény adja meg. Keressük azt a függvényt, amely tetszőleges t időpillanatban leírja a rúdban levő hőmérséklet eloszlását.

Az ismeretlen, kétváltozós $u = u(x,t)$ hőmérsékletfüggvénynek - a fizika törvényei szerint - ki kell elégíteni a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3.4.1)$$

parciális differenciálegyenletet az

$$u(0,t) = 0 \qquad u(\ell,t) = 0 \qquad (3.4.2)$$

kerületi és

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (3.4.3)$$

kezdeti feltételek mellett. Mivel a differenciálegyenletben a t szerinti első derivált szerepel csupán, azért egy kezdeti feltételt szabunk.

A differenciálegyenlet megoldását Fourier-módszerével keressük.

$$u = X(x)\cdot T(t) \qquad (3.4.4)$$

Ekkor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)\cdot T'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(u) \cdot T(t)$$

lesz. Ha ezeket a differenciálegyenletbe beírjuk, majd a változókat szétválasztjuk, akkor először az

$$X(x)T'(t) = c^2 X''(x) \cdot T(t)$$

majd

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2$$

egyenletet kapjuk. Ez pedig a két közönséges differenciálegyenletből álló

$$T'(t) + \alpha^2 T(t) = 0 \qquad (3.4.5)$$

$$X''(x) + \frac{\alpha^2}{c^2} X(x) = 0 \qquad (3.4.6)$$

rendszerre bomlik.

A (3.4.4) alakú megoldást feltételezve a (3.4.2) peremfeltételekből

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0$$

$$u(\ell,t) = X(\ell) \cdot T(t) = 0,$$

ahonnan

$$X(0) = X(\ell) = 0 \qquad (3.4.7)$$

adódik.

Meghatározandó a (3.4.6) másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet (3.4.7) peremfeltételeket kielégítő triviálistól különböző megoldása. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$X(x) = C_1 \cos \frac{\alpha}{c} x + C_2 \sin \frac{\alpha}{c} x.$$

Sajátérték-feladatot kell megoldanunk, úgy

$$X(0) = C_1 = 0$$

és

$$X(\ell) = C_2 \sin \frac{\alpha}{c} \ell = 0,$$

azaz a feladat csak akkor oldható meg, ha

$$\frac{\alpha}{c}\,\ell = k\pi; \qquad k = 1,2,\ldots$$

Innen a sajátértékek

$$\alpha_k = \frac{ck\pi}{\ell} \tag{3.4.8}$$

és a sajátfüggvények

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{\ell}x. \tag{3.4.9}$$

A (3.4.5) elsőrendű differenciálegyenlet megoldását a változók szétválasztásával határozhatjuk meg.
(3.4.8) figyelembevételével

$$T'(t) + \frac{c^2k^2\pi^2}{\ell^2}\,T(t) = 0$$

azaz

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{c^2k^2\pi^2}{\ell^2}\,.$$

Integrálva

$$\ln T = -\left(\frac{ck\pi}{\ell}\right)^2 t + \ln A,$$

így

$$T_k = A_k e^{-\left(\frac{ck\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

A (3.4.1) differenciálegyenletnek a (3.4.2) peremfeltételeket kielégítő partikuláris megoldásai:

$$u_k(x,t) = D_k e^{-\left(\frac{ck\pi}{\ell}\right)^2 t}\,.\,\sin\frac{k\pi}{\ell}x; \qquad k = 1,2,\ldots$$

Ezen megoldásokból képzett végtelen sor - amennyiben konvergens - a differenciálegyenlet linearitása miatt szintén megoldás, s a peremfeltételeket is kielégíti. Az

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\frac{\alpha k}{c}x\; e^{-\alpha_k^2 t}$$

függvényben szereplő D_k számokat végül az

$$u(x,o) = \varphi(x)$$

kezdeti feltételből határozhatjuk meg. Ez a feltétel ugyanis a

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin \frac{\alpha k}{c} x = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \varphi(x)$$

egyenlőségre vezet. Ha tehát a $\varphi(x)$ függvényt Fourier-sorba fejtjük, akkor a D_k értékek összehasonlítással leolvashatók. A rúd tengelye mentén a kezdeti hőmérséklet-eloszlás függvényét páratlannak és 2ℓ szerint periodikusnak tételezzük fel úgy, mint azt a rezgő húr esetében tettük azt a kitérés függvényével.

$$D_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} d\xi$$

A keresett megoldás

$$u(x,t) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \left[e^{-\left(\frac{ck\pi}{\ell}\right)^2 t} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \sin \frac{k\pi}{\ell} x \, d\xi \right].$$

3.5 Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása rácsmódszerrel

A véges differenciák módszere lineáris differenciálegyenletek esetén a parciális differenciálegyenleteknél is lineáris egyenletrendszerre vezet, ezért itt is széles körben alkalmazzák. A továbbiakban itt csak a másodrendű parciális differenciálegyenletek megoldására alkalmazzuk és ott is csak abban az esetben, ha a tartomány határai a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesek. A későbbiekben még egy olyan megkötést is teszünk, hogy lépéstávolság a két koordinátatengely irányában egyenlő, mert ez további egyszerűsítéseket tesz lehetővé,az alapfogalmak ismertetése kapcsán azonban ilyen megszorítást még nem teszünk.

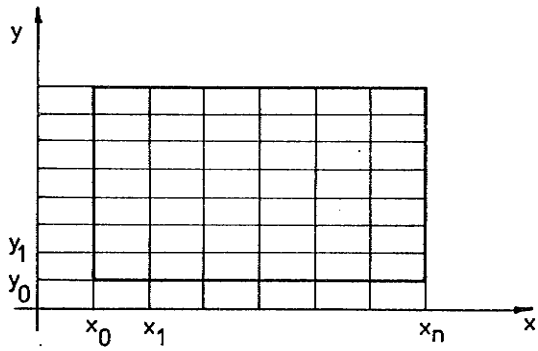
Legyen a vizsgálandó tartomány téglalap. A lépéstávolság az x irányban h, az y irányban pedig k (3.9 ábra). A tartomány határán a keresett függvény az előírt értékeket veszi fel.

Az osztópontok (rácspontok) koordinátái

$$x_i = x_o + ih; \quad y_j = y_o + jk.$$

A keresett kétváltozós függvényt

$$u = u(x,y)$$



3.9 ábra

módon jelölve, az egyes parciális deriváltak a következő differenciálhányadosokkal helyettesíthetők

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4hk}$$

A

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplace, vagy a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

Poisson-egyenlet differenciaoperátora $k = h$ esetére a következő

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1})$$

Ezeket az operátorokat általában egy sémával szokták megadni, melyben csupán az együtthatók vannak feltüntetve, az indexeket a séma a képletnél is jobban szemlélteti. Például esetünkben

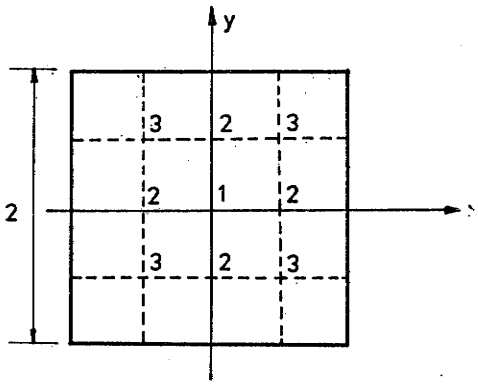
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{h^2}$$

Példa:

Számítsuk ki az

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy$$

differenciálegyenlet rácsponti értékeit, ha a peremen $u = 0$, a tartományt és a rácspontok elrendezését pedig a 3.10 ábra mutatja.



3.10 ábra

Szimmetria miatt csak három rácspontbeli függvényértéket kell kiszámítani.

A feladatban $h = 0,5$ és így a differenciálegyenletnek megfelelő egyenletrendszer

$$-4u_1 + u_2 + u_2 + u_2 + u_2 = 0$$

$$u_1 - 4u_2 + u_3 + u_3 = 0$$

$$u_2 + u_2 - 4u_3 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5^2$$

Rendezés után

$$- u_1 + u_2 = 0$$

$$u_1 - 4u_2 + 2u_3 = 0$$

$$2u_2 + 4u_3 = 0{,}0625$$

melynek megoldása

$$u_1 = u_2 = - 0{,}015625; \quad u_3 = - 0{,}0234375$$

IV. Rész

DIFFERENCIÁLGEOMETRIA. VEKTORANALÍZIS

I. FEJEZET

Differenciálgeometria

1. Térgörbe előállítása, érintővektor

A térben mozgó pont egy görbét ír le. Ha a mozgás idejének minden t időpillanatában meghúzzuk az O origóból a P ponthoz az $\overrightarrow{OP}$ vektort, akkor olyan helyvektort kapunk, amely a t idővel együtt változik. Ezt a következőképpen jelöljük:

$$\underline{r} = \underline{r}(t), \quad t \in [a,b] = I$$

ahol: $[a,b]$ véges vagy végtelen intervallum a számegyenesen. Az $\underline{r}(t)$ függvényt vektor-skalár függvénynek nevezzük. Ha az $\underline{r}(t)$ vektort valamely koordináta-rendszer alapvektorai szerint bontjuk fel, akkor az

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

egyenlőséget kapjuk.

Egy görbén lényegében egy $\underline{r}(t)$, $t \in I$ vektor-skalár függvény helyvektorainak végpontjából álló ponthalmazt fogunk érteni.

1. Definíció:

Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénynek a $t = t_o$ helyen $\underline{a}$ a határértéke,

$$\lim_{t \to t_o} \underline{r}(t) = \underline{a},$$

ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta(\varepsilon)$ szám, hogy

$$|\underline{r}(t) - \underline{a}| < \varepsilon \quad \text{hacsak} \quad |t - t_o| < \delta(\varepsilon).$$

2. Definíció:

Az $\underline{r}(t)$ vektor-függvény folytonos a $t = t_o$ helyen, ha ezen a helyen van határértéke és az megegyezik a helyettesítési értékkel, vagyis

$$\lim_{t \to t_o} \underline{r}(t) = \underline{r}(t_o).$$

Megjegyzés.

Könnyen belátható, hogy a

$$\lim_{t \to t_o} \underline{r}(t) = \underline{a}$$

határérték pontosan akkor létezik, ha az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvények határértékei is léteznek, a t_o helyen továbbá az $\underline{r}(t)$ függvény pontosan akkor folytonos egy $t = t_o$ helyen, ha a koordináta függvényei folytonosak ezen a helyen.

A skalár függvények határértékképzésének tárgyalásánál megismert néhány tételt lényegében változatlan formában mondhatunk ki.

1.1 Tétel

Ha $\underline{r}(t)$ és $\underline{q}(t)$ két vektor-skalár függvény és $f(t)$, $g(t)$ két skalárfüggvény, továbbá ezeknek a függvényeknek a $t = t_o$ helyen van határértéke, akkor

$$\lim_{t \to t_o} [f(t)\underline{r}(t) + g(t)\underline{q}(t)] = \lim_{t \to t_o} f(t) \lim_{t \to t_o} \underline{r}(t) +$$

$$+ \lim_{t \to t_o} g(t) \lim_{t \to t_o} \underline{q}(t)$$

vagyis összeg határértéke tagonként, szorzat határértéke tényezőként képezhető.

A tételt nem bizonyítjuk.

Tekintsük most az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ görbe

$$t_o \quad \text{és} \quad t_o + \Delta t, \quad \Delta t > 0$$

paraméter értékeihez tartozó helyvektorokat. A két vektor által meghatározott

$$\underline{r}(t_o + t) - \underline{r}(t_o)$$

húrvektort osszuk el a Δt paraméterváltozással, ekkor a húrvektorral párhuzamos vektort kapunk.

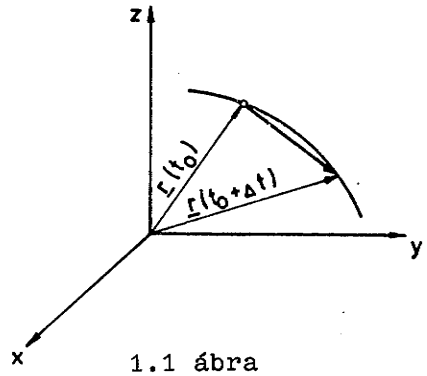
1.3 Definíció

Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvényt differenciálhatónak nevezzük a t_o helyen, ha létezik a

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t_o + t) - \underline{r}(t_o)}{\Delta t}$$

határérték. Magát a határértéket az $\underline{r}(t)$ t_o-beli differenciálhányadosának, vagy deriváltvektorának nevezzük és az

$\dot{\underline{r}}(t)$ vagy a $\left.\frac{d\underline{r}}{dt}\right|_{t=t_o}$ szimbólummal jelöljük.



1.1 ábra

1.2 Tétel:
Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény t_o pontbeli deriváltja akkor létezik, ha a függvény koordinátái a t_o pontban differenciálhatók. A deriváltvektor koordinátái a vektor koordinátáinak deriváltjaival egyenlők.

Bizonyítás:

$$\underline{r}(t_o) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t_o + \Delta t) - \underline{r}(t_o)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{x(t_o + \Delta t) - x(t_o)}{\Delta t} \underline{i} + \frac{y(t_o + \Delta t) - y(t_o)}{\Delta t} \underline{j} + \right.$$

$$\left. + \frac{z(t_o + \Delta t) - z(t_o)}{\Delta t} \underline{k}\right]$$

Az 1.1 tétel felhasználásával

$$\dot{\underline{r}}(t_o) = \dot{x}(t_o)\underline{i} + \dot{y}(t_o)\underline{j} + \dot{z}(t_o)\underline{k}$$

adódik.

A differenciálási szabályok a skalár-függvényeknél megismert szabályokhoz hasonlóak.

1.3 Tétel:
Ha az $\underline{r}(t)$ és $\underline{q}(t)$ vektor-skalár függvények, valamint az $f(t)$ és $g(t)$ skalár függvények differenciálhatók, akkor

$$\frac{d}{dt}[\underline{r}(t) + \underline{q}(t)] = \frac{d\underline{r}(t)}{dt} + \frac{d\underline{q}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\underline{r}(t)] = f(t)\frac{d\underline{r}}{dt} + \frac{df}{dt}\underline{r}(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\underline{r}(t)\underline{q}(t)] = \frac{d\underline{r}}{dt}\underline{q}(t) + \underline{r}(t)\frac{d\underline{q}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[\underline{r}(t)x\underline{q}(t)] = \frac{d\underline{r}}{dt}x\underline{q}(t) + \underline{r}(t)\ x\ \frac{d\underline{q}}{dt}$$

A tételt nem bizonyítjuk.

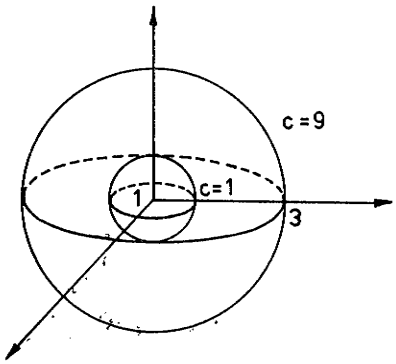
A deriváltvektor felhasználásával felírhatjuk az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ görbe t_o pontbeli érintő egyenesének az egyenletét:

$$\underline{R} = \underline{r}(t_o) + \lambda\dot{\underline{r}}(t_o) \qquad (-\infty<\lambda<+\infty)$$

ahol: $\underline{R}$ az érintőegyenes futópontjának helyvektora.
Ha $\dot{\underline{r}}(t_o)$ egyik koordinátája sem zérus, akkor az érintő egyenlete az

$$\frac{X - x(t_o)}{x(t_o)} = \frac{Y - y(t_o)}{y(t_o)} = \frac{Z - z(t_o)}{z(t_o)}$$

alakban írható.



1.2 ábra

Példa:

1.1 Hengeres csavarvonal

Az a alapkörsugarú, z tengelyű egyenes körhengerre írt csavarvonalat megadó $\underline{r}(t)$ függvény koordinátás előállítása

$$\underline{r}(t) = a \cos t\, \underline{i} + a \sin t\, \underline{j} + b\, t\, \underline{k}$$

ahol: b = állandó.

A t_o paraméterértékhez tartozó érintő egyenletrendszere:

$$X = a \cos t_o - \lambda a \sin t_o,$$

$$Y = a \sin t_o + \lambda a \cos t_o, \qquad (-\infty < \lambda < +\infty)$$

$$Z = b\, t_o + \lambda b.$$

Számítsuk ki az érintőnek az $[x,y]$ síkkal alkotott hajlásszögét. Ennek a szögnek a szinuszát úgy kapjuk meg, hogy kiszámítjuk a pótszögének a koszinuszát, azaz az érintő z tengellyel bezárt szögének a koszinuszát.

$$\cos \gamma = \frac{\underline{r}(t)\underline{k}}{\underline{r}(t)} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

nem függ t-től, csavarvonal érintője tehát az $[x,y]$ síkkal állandó szöget zár be.

1. Kiegészítő megjegyzések:

Ha az $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ térgörbe $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ koordinátafüggvényeitől csak a folytonosságot követeljük meg, akkor az $\underline{r}(t)$ térgörbe még rendkívül bonyolult lehet. A differenciálgeometriában csak ún. egyszerű görbét tekintünk, amelynek szemléletes képe egy meghajlított drótdarab, s amelynek tulajdonságai matematikailag a következő módon fogalmazhatók meg:

1.4 Definíció

Az $\underline{r}(t)$ folytonos görbét egyszerű görbeívnek nevezzük, ha az $\underline{r}(t)$ vektor-skalárfüggvény kölcsönösen egyértelműen feleltet meg egymásnak az $[a,b]$ intervallum és a görbe pontjait.

Az $\underline{r}(t)$ függvény kölcsönös egyértelműségének az a feltétele, hogy az $[a,b]$ intervallum bármely két $t_1 \neq t_2$ pontjára $r(t_1) \neq r(t_2)$ legyen, azaz $[x(t_1) - x(t_2)]^2 + [y(t_1) - y(t_2)]^2 + [z(t_1) - z(t_2)]^2 \neq 0$ teljesüljön, vagyis az $\underline{r}(t)$ térgörbe nem metszheti önmagát.

Az egyszerű görbére illeszkedő pontok mindegyikének pontosan egy paraméterérték felel meg és ez a hozzárendelés folytonos is: ha $P_1, P_2, \ldots, P_n \ldots$ az $\underline{r}(t)$ görbe pontjainak olyan sorozata, amelynek határértéke P, akkor P is a görbe pontja, s ha a P pontnak megfelelő paraméterérték t, akkor $t_n \to t$, ha t_n a P_n pontnak megfelelő paraméterérték.

Az egyszerű görbeívet leíró $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény tehát inverzzével együtt folytonos.

1.5 Definíció:
Az inverzzükkel együtt folytonos leképezéseket topologikus leképezéseknek nevezzük.
E definíció alapján az egyszerű görbeív zárt intervallum topologikus képe. A differenciálgeometriai tárgyalások során megköveteljük továbbá, hogy az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény az $[a \leq t \leq b]$ intervallum minden pontjában differenciálható legyen, $\dot{\underline{r}}(t)$ folytonos legyen és sehol sem legyen zérus.

2. Térgörbe ívhossza

2.1 Definíció
Tekintsük a térgörbedarabba beírt törött vonalak finomodó sorozatát, ahol a finomodás azt jelenti, hogy a törött vonal leghosszabb szakasza zérushoz tart. Ha ezen beírt finomodó törött vonalak hosszának bármilyen törött vonal sorozat esetén van határértéke és mindig ugyanaz az s szám, akkor azt mondjuk, hogy a görbedarabnak van ívhossza (rektifikálható) és ezt az s értéket a görbeív hosszának nevezzük.

2.1 Tétel
Ha az $\underline{r}(t)$ a $[t_o, T_o]$ zárt intervallumban folytonos, akkor az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ függvénnyel megadott, a $[t_o, T_o]$ paraméter-intervallumhoz tartozó görbedarabnak van ívhossza és értéke

$$s = \int_{t_o}^{T_o} \left| \dot{\underline{r}}(t)\, dt \right| = \int_{t_o}^{T_o} \sqrt{\dot{x}^2 + y^2 + z^2}\, dt.$$

Bizonyítás:
Írjuk be az

$$\underline{r} = \underline{r}(t), \qquad t_o \leq t \leq T_o$$

egyenletű térgörbébe a

$$t_o < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T_o$$

osztópontok által meghatározott törött vonalat.
A kapott poligon hossza nyilván a

$$P_n = |\underline{r}(t_1) - \underline{r}(t_o)| + |\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)| + \ldots +$$

...

$$+\left|\underline{r}(t_n) - \underline{r}(t_{n-1})\right|$$

kifejezéssel egyenlő. Ha tekintetbe vesszük, hogy

$$\frac{\underline{r}(t_i) - \underline{r}(t_{i-1})}{\Delta t_i} = \underline{r}(t_i) + \underline{m}_i; \qquad (\Delta t_i = t_i - t_{i-1})$$

ahol a differenciálhányados értelmezése miatt

$$\left|\frac{\underline{r}(t_i) - \underline{r}(t_{i-1})}{\Delta t_i} - \dot{\underline{r}}(t_i)\right| = |\underline{m}_i| < \varepsilon\,, \quad \text{ha } |\Delta t_i| < \delta(\varepsilon)$$

akkor az következik, hogy

$$P_n = \sum_{i=1}^{n}\left|\underline{r}(t_i) - \underline{r}(t_{i-1})\right| = \sum_{i=1}^{n}\left(|\dot{\underline{r}}(t_i)|\,|\Delta t_i| + |\underline{m}_i\,\Delta t_i|\right)$$

Vizsgáljuk most a p_n összegnek a fenti felosztáshoz tartozó integrálközelítő-összegtől való eltérését! Legyen

$$\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$$

$$P_n - \sum_{i=1}^{n}|\dot{\underline{r}}(\tau_i)|\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\left|(\dot{\underline{r}}(t_i)|\,|\Delta t_i| + |\underline{m}_i\,\Delta t_i| - \right.\right.$$

$$\left.\left. - |\dot{\underline{r}}(\tau_i)\,\Delta t_i|\right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n}\left|\,|\dot{\underline{r}}(t_i)|\,\Delta t_i - |\dot{\underline{r}}(\tau_i)|\,\Delta t_i + |\underline{m}_i\,\Delta t_i|\right|$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(|\dot{\underline{r}}(t_i)| - |\dot{\underline{r}}(\tau_i)|\right)\Delta t_i + \sum_{i=1}^{n}|\underline{m}_i|\,\Delta t_i$$

Felhasználjuk az $|a+b| \leqq |a + b|$ háromszög-egyenlőtlenséget. Finomítsuk most a $[t_o, T_o]$ intervallum felosztását úgy, hogy $\max \Delta t_i \to 0$ teljesüljön és használjuk fel, hogy az $\dot{\underline{r}}(t)$ az egész zárt intervallumban folytonos. Ekkor a vizsgált összeg első tagjában

$$\tau_i \to t_i \quad \text{miatt} \quad \dot{\underline{r}}(\tau_i) \to \dot{\underline{r}}(t_i).$$

Másrészt kimutatható, hogy $\dot{\underline{r}}(t)$ folytonossága miatt a különbségi hányados egyenletesen (azaz a t_i helytől függetlenül) konvergál az $\dot{\underline{r}}(t_i)$ differenciálhányadoshoz, vagyis az $|\underline{m}_i|$ értékre adott becslésnél a $\delta(\varepsilon)$ nem [illegible]

a t_i helytől. Ha a felosztási sorozat elkészítésénél már mindegyik Δt_i kisebb mint $\delta(\varepsilon)$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} |\underline{m}_i| \Delta t_i < \varepsilon(T_o - t_o)$$

következik. A görbedarabba beírt törött vonal hosszának a tételben adott integrál közelítő összegétől való eltérése tehát zérushoz tart, ha a

$$\max \Delta t_i \to 0,$$

s ezzel a tételünket bizonyítottuk.

Ha az ívhosszmérés végpontját a tetszőleges $\underline{r}(t)$ pontban választjuk, akkor

$$s(t_o,t) = \int_{t_o}^{t} |\dot{\underline{r}}(\tau)|\, d\tau = \int_{t_o}^{t} \sqrt{x^2(\tau) + y^2(\tau) + z^2(\tau)}\, d\tau.$$

(Az integrációs változót τ-val jelöljük, t most a felső határt jelöli.)
Mivel az integrandusz pozitív, ezért az $s(t_o,t)$ szigorúan monoton növekvő függvény.

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{r}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$$

miatt az $s(t_o,t)$ differenciálható, ezért szükségképpen folytonos.

Mindezek miatt az $s = s(t_o,t)$ függvénynek létezik a $t = t(s)$ inverze. Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvényen tehát végrehajtható a $t = t(s)$ paramétertranszformáció:

$$\underline{r} = \underline{r}[t(s)],$$

azaz a térgörbét előállító függvény mindig felírható az ívhossz függvényeként (ívhossz-paraméterezéssel). Ezt a paramétert "természetes paraméternek" nevezzük.

2.2 Tétel:

Az ívhosszra, mint paraméterre vonatkoztatott görbe érintővektora egységvektor.

Bizonyítás:

$$\frac{d\underline{r}}{ds} = \frac{d\underline{r}(t(s))}{ds} = \frac{dx(t(s))}{ds}\,\underline{i} + \frac{dy(t(s))}{ds}\,\underline{j} + \frac{dz(t(s))}{ds}\,\underline{k} =$$

$$= \dot{x}\frac{dt}{ds}\underline{i} + \dot{y}\frac{dt}{ds}\underline{j} + \dot{z}\frac{dt}{ds}\underline{k} = (\dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j} + \dot{z}\underline{k})\cdot\frac{dt}{ds} =$$

$$= \frac{d\underline{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{d\underline{r}}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|} = \underline{r}'$$

Itt felhasználtuk a közvetett skalár-függvény differenciálására vonatkozó láncszabályt és az inverz függvény deriválási szabályát.

A továbbiakban az ívhosszparaméter szerinti deriváltat megkülönböztetésül r'-vel jelöljük.

Megjegyzés

A 2.2 tétel bizonyításából kiolvasható, hogy a vektor-skalár függvények differenciálására is igaz a láncszabály, azaz

$$\frac{d\underline{r}[t(s)]}{ds} = \frac{d\underline{r}[t(s))}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$$

Példa

2.1 Vezessük be a hengeres csavarvonalon az ívhosszat paraméternek! Az 1.1 példában láttuk, hogy

$$\underline{r}(t) = a\cos t\,\underline{i} + a\sin t\,\underline{j} + b\,t\,\underline{k}$$

és $|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Legyen $t_o = 0$.

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\,dt = t\sqrt{a^2 + b^2}$$

Innen $t = t(s) = \dfrac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Ezt a görbe egyenletébe helyettesítve az

$$\underline{r}(s) = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\underline{i} + a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\underline{j} + b\,\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\underline{k}$$

előállítást kapjuk. Az s paraméter szerinti deriválással meggyőződhetünk arról, hogy $|\underline{r}'| = 1$ valóban teljesül.

3. Simulósik, kisérő háromél

Tekintsünk a görbén három nem kollineáris (nem egy egyenesre illeszkedő) egymástól különböző P_1, P_2, P_3 pontot. Ezek minden helyzetben egy síkot határoznak meg. Ha a P_1, P_2, P_3 pontok mindegyike a görbe P_o pontjához tart, akkor az általuk meghatározott síkok határhelyzetét a térgörbe P_o pontbeli simuló síkjának nevezzük, feltéve, hogy ez a határhelyzet mindig létezik.

3.1 Tétel

Legyen a görbe egyenlete kétszer folytonosan differenciálható, vonatkoztassuk az ívhosszra, mint paraméterre és tegyük fel, hogy $r' \neq r''$ a P_o pontban. Ekkor a P_o pontban van simulósík és normálvektora

$$\underline{r}'(s_o) \times \underline{r}''(s_o).$$

Bizonyítás:

Tekintsük a görbe három nem kollineáris P_1, P_2, P_3 pontját és tartson mindegyik a P_o ponthoz. A három pont által kifeszített síkok határhelyzetének meghatározásához szükségünk van egy pontra és a normálisra. Mivel a síksorozat P_1 pontjaiból álló pontsorozat tart P_o-hoz, így csak azt kell megmutatni, hogy a síksorozat megfelelő $\underline{n}$ normálvektorainak sorozata is konvergál az

$$\underline{r}'(s_o) \times \underline{r}''(s_o) \quad \text{vektorhoz.}$$

Legyen a P_1, P_2, P_3 pontokra illeszkedő sík Hesse-féle egyenlete

$$\underline{R}\,\underline{n} - p = 0$$

Tekintsük most az

$$\underline{r}(s)\underline{n} - p \equiv f(s)$$

függvényt egy rögzített P_1, P_2, P_3 hármasra, tehát az n és a p állandó. Ez a függvény az s_1, s_2, s_3 pontokban zérussá válik és az $[s_1, s_2]$ illetve az $[s_2, s_3]$ zárt intervallumokban folytonosan differenciálható. Így alkalmazható rá Rolle-tétele, mely alapján van olyan

$$s^* \in (s_1, s_2) \quad \text{és} \quad s^{**} \in (s_2, s_3)$$

hogy $\underline{r}'(s^*) \cdot \underline{n} = 0$ és $\underline{r}'(s^{**}) \cdot \underline{n} = 0$

Az (s^*, s^{**}) intervallumon az $\underline{r}'(s) \cdot \underline{n}$ függvényre ismét alkalmazható Rolle-tétele, tehát van olyan

$$\hat{s} \in (s^*, s^{**}), \quad \text{hogy} \quad \underline{r}''(\hat{s}) \cdot \underline{n} = 0$$

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\underline{n} \perp r'(\hat{s}), \qquad \underline{n} \perp r''(\hat{s}).$$

Ha most

$$P_1, P_2, P_3 \longrightarrow P_o, \quad \text{azaz} \quad s_1, s_2, s_3 \longrightarrow s_o,$$

akkor s^* és $\hat{s}$ is az s_o paraméterértékhez tart, tehát $\underline{n}$ tart egy az $\underline{r}'(s_o)$ és $\underline{r}''(s_o)$ vektorokra merőleges vektorhoz, azaz egy egyértelműen meghatározott határértékhez. Így a simulósík egyenlete

$$\left| (\underline{R} - \underline{r}(s_o) \ , \quad \underline{r}'(s_o), \quad r''(s_o) \right| = 0$$

A következő pont 4.2 tételéhez fűzött megjegyzés szerint az $\underline{r}' \times \underline{r}''$ vektor párhuzamos az $\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}$ vektorral, így a simulósík egyenlete tetszőleges t paraméter esetén

$$\left| \underline{R} - \underline{r}(t_o), \ \dot{\underline{r}}(t_o), \ \ddot{\underline{r}}(t_o) \right| = 0,$$

vagy koordinátásan kiírva:

$$\begin{vmatrix} X - x(t_o) & Y - y(t_o) & Z - z(t_o) \\ \dot{x}(t_o) & \dot{y}(t_o) & \dot{z}(t_o) \\ \ddot{x}(t_o) & \ddot{y}(t_o) & \ddot{z}(t_o) \end{vmatrix} = 0.$$

A geometriai vizsgálatokat sokszor jelentősen egyszerűsíti a megfelelően választott koordináta-rendszer. Most a görbe minden pontjához egy ortogonális háromélt (triédert) fogunk rendelni, melynek vektorait a koordináta-rendszer egységvektorainak választva a görbe vizsgálata különösen egyszerű. Ezek a vektorok és ezek síkjai a továbbiakban fontos szerepet játszanak.

Legyen a görbe a továbbiakban kétszer folytonosan differenciálható. Tekintsük a görbét az ívhossz-paraméterre vonatkoztatva és kívánjuk meg, hogy az $\underline{r}''(s)$ sehol se legyen

zérusvektor. Az említett ortogonális háromél első vektora legyen az $\underline{r}'(s)$ érintővektor, amely egységnyi hosszú és $\underline{t}(s)$ -sel szokták jelölni.

A második vektor legyen az érintőre merőleges, a simulósíkra illeszkedő egységvektor. Mivel az $\underline{r}''$ benne van a simulósíkban és az

$$[\underline{r}'(s)]^2 = 1$$

differenciálásból kapott

$$2\underline{r}' \, \underline{r}'' = 0.$$

egyenlőség szerint merőleges az érintőre, így a trióder második vektora legyen az $\underline{r}''$ irányú egységvektor. Ezt főnormálisnak nevezzük és $\underline{f}$-fel jelöljük. Tehát

$$\underline{f}(s) = \frac{\underline{r}''(s)}{|\underline{r}''(s)|} .$$

A harmadik egységvektor legyen az érintőre és a főnormálisra merőleges

$$\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \times \underline{f}(s),$$

amelyet binormálisnak nevezünk.

$\underline{t}, \underline{f}, \underline{b}$ a görbe minden pontjában egy helyi koordinátarendszert alkotnak, ezért nevezzük az általunk alkotott háromélt kísérő triédernek.

A $\underline{t}$ és $\underline{f}$ síkja a simulósík, az $\underline{f}$ és $\underline{b}$ síkját normálsíknak, a $\underline{t}$ és $\underline{b}$ síkját rektifikáló síknak nevezzük. Ha a görbe valamely pontjában $\underline{r}'' = \underline{0}$ ott a kísérő-trióder nem képezhető.

Ha egy intervallum minden pontjában $\underline{r}'' = 0$, akkor ezen az intervallumon a görbe egyenes.
Ez jól látható az

$$\underline{r}_1''(s) = 0, \quad \underline{r}_2''(s) = 0, \quad \underline{r}_3''(s) = 0$$

egyenletrendszer integrálásából:

$$r_1(s) = a_1 s + b_1, \quad r_2(s) = a_2 s + b_2, \quad r_3(s) = a_3 s + b_3,$$

s itt $r_i(s)$ $(i = 1,2,3)$ az $\underline{r} = \underline{r}(s)$ koordinátáit jelenti.

4. Görbület

Legyen az $\underline{r}(s)$ görbe s_o paraméterű P_o pontjában az érintő $\underline{t}_o$ az s paraméterű P pontban pedig $\underline{t}$. A $\underline{t}$ és $\underline{t}_o$ szöget jelölje $\Delta\alpha$, az $|s - s_o|$ paraméter megváltozás pedig legyen Δs.

4.1 Definíció

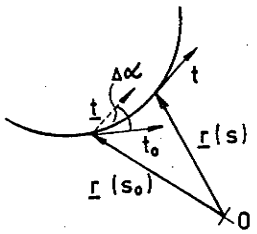
A

$$\lim_{s \to s_o} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

határértéket a görbe s_o helyhez tartozó görbületének nevezzük:

$$\lim_{s \to s_o} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = G(s_o)$$

feltéve, hogy ez a határérték létezik.



4.1 ábra

A $G(s_o)$ tulajdonképpen az érintővektor s_o-beli szögsebessége, a $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ pedig az átlagos szögsebesség, amit átlaggörbületnek is szoktak nevezni.

4.1 Tétel

$G(s) = |\underline{r}''(s)|$.

Bizonyítás:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta s} : \frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta\alpha}$$

Ha $\Delta s \to 0$, akkor $\Delta\alpha \to 0$ és így

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta\alpha} = 1 \quad \text{miatt} \quad \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta s}$$

Mivel $\underline{t}_o$ és $\underline{t}$ egységvektorok, ezért

$$\sin\Delta\alpha = |\underline{t}_o \times \underline{t}|$$

Ha a $\underline{t} = \underline{t}_o + \Delta\underline{t}$ jelölést használjuk, akkor

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} |\underline{t}_o \times (\underline{t}_o + \Delta\underline{t})| =$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} |\underline{t}_o \times \Delta\underline{t}| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \underline{t}_o \times \frac{\Delta\underline{t}}{\Delta s} \right| = \left| \underline{t}_o \times \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\underline{t}}{\Delta s} \right| =$$

$$= |\underline{t}_o \times \underline{t}_o'|.$$

Mivel $\underline{t}_o = \underline{r}'(s_o)$ és $\underline{t}_o' = \underline{r}''(s_o)$

merőlegesek és $|\underline{t}_o| = 1$ így $|\underline{t}_o \times \underline{t}_o'| = |\underline{t}_o'| = |\underline{r}''(s_o)|$.

Most már tetszőleges s paraméterre

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \underline{r}''(s)$$

<u>Megjegyzés:</u>
A $G = |\underline{r}''|$ összefüggésből egy fontos képlet következik. Tudjuk, hogy

$$\underline{f} = \frac{\underline{r}''}{|\underline{r}''|}$$

definíció szerint. Ebből

$$\underline{r}'' = G\,\underline{f}, \quad \text{vagyis} \quad \underline{t}' = G\underline{f}$$

Ez már a későbbiekben következő Frenet-képletek egyike.

4.2 <u>Tétel:</u>
A görbület értéke tetszőleges t paraméterben kifejezve

$$G(t) = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}$$

Bizonyítás:
Tudjuk, hogy

$$\dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{r}[s(t)]}{dt} = \frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \underline{r}' \frac{ds}{dt}$$

Mégegyszer deriváljuk t szerint a láncszabály figyelembevételével:

$$\ddot{\underline{r}} = \underline{r}''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \underline{r}\,\frac{d^2s}{dt^2} = G\underline{f}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \underline{t}\,\frac{d^2s}{dt^2}$$

Felhasználjuk, hogy az ívhossz képletéből $\frac{ds}{dt} = |\dot{\underline{r}}|$ következik és kiszámítjuk az $\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}$ szorzatot.

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \underline{t}\left(\frac{ds}{dt}\right) \times \left[G\underline{f}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \underline{t}\,\frac{d^2s}{dt^2}\right] = (\underline{t} \times \underline{f})\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 G =$$

$$= G|\dot{\underline{r}}|^3 \cdot \underline{b}$$

Képezzük mindkét oldal abszolút értékét, használjuk fel, hogy $|\underline{b}| = 1$ és fejezzük ki a G görbületet:

$$G = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}.$$

Megjegyzés:
A bizonyítás során felírt

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = G|\dot{r}|^3\,\underline{b}$$

egyenlőségből és abból a tényből, hogy a görbület mindig pozitív, azt kapjuk, hogy a binormális vektor tetszőleges t paraméter esetén az $\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}$ vektor irányába mutató egységvektor. Megjegyezzük még, hogy ha a görbe síkgörbe, azaz

$$z(t) \equiv 0, \quad \text{akkor} \quad G = \left|\frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}\right|.$$

Ha a görbét az

$$r(x) = x\,\underline{i} + y(x)\underline{j}$$

alakban állítjuk elő, akkor a sík görbéknél tanult görbület abszolút értékét kapjuk:

$$G = \left|\frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}\right|.$$

Ez a képlet azonban a görbületnek csak az abszolút értékét adja. Síkgörbéknél ugyanis szokás a görbe görbületének pozitív, illetve negatív előjelét tulajdonítani aszerint, hogy $\underline{t}$ és $\underline{n} = \underline{f}$ úgy következik-e egymás után mint a pozitív x és y tengely, vagy sem, ahol a $\underline{t}$ irányát a görbe irányítása adja meg, az $\underline{n}$ pedig a simulókör középpontja felé mutat.

5. Sebesség és gyorsulás

5.1 Definíció:

Ha egy térbeli pont mozgását az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel adjuk meg, akkor

$\underline{v} = \dot{\underline{r}}(t)$ - a sebességvektor,

$\underline{a} = \ddot{r}(t)$ - a gyorsulásvektor,

$v = \frac{ds}{dt}$ - a pályamenti sebesség és

$a = \frac{d^2s}{dt^2}$ - a pályamenti gyorsulás.

5.1 Tétel

$\underline{v} = v\,\underline{t}$ azaz $|\underline{v}| = v$

és

$\underline{a} = at + v^2G\underline{f}$

Bizonyítás:

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \underline{t} \cdot \frac{ds}{st} = v\underline{t},$$

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{v}} = \dot{v}\,\underline{t} + v\,\dot{\underline{t}} = a\,\underline{t} + v\,\frac{d\underline{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = a\underline{t} + v^2G\underline{f}.$$

A sebességvektor érintő irányú és a tétel szerint a hossza megegyezik a pályamenti sebességgel. A gyorsulásvektort pedig felbontottuk egy érintőirányú és egy főnormális irányú összetevőre:

$$\underline{a} = a_t\underline{t} + a_n\underline{f}.$$

Az érintőirányú összetevő hossza a pályamenti gyorsulás, amelyet tangenciális gyorsulásnak is neveznek, a főnormális irányában eső komponens hossza pedig $a_n = v^2G$. Ha G helyett a görbületi sugár reciprokát írjuk be,

$(G = \frac{1}{R}$, akkor $a_n = \frac{v^2}{R}$ adódik.

6. Torzió, Frenet-képletek

A görbe simuló síkjának normálisa a binormális vektor. Egy síkgörbe binormálisai egymással párhuzamos vektorok, az-az irányuk változatlan. A binormálisok irányváltozása a síkgörbétől való eltérést, az irányváltozás sebessége pedig az eltérés bizonyos értelmű mértékét, a torziót jellemzi. Ezt akarjuk most közelebbről megvizsgálni.

A $\underline{b}(s_o)$ és $\underline{b}(s)$ binormálisok szögét jelölje $\Delta\beta$, az $|s - s_o|$ paraméterváltozás pedig legyen Δs, továbbá $r(s)$ legyen háromszor differenciálható.

6.1 Definíció

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s}$$

határérték (amennyiben létezik) a görbe s_o helyhez tartozó torziójának az abszolút értéke:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s} = |T(s_o)| .$$

A torzió aszerint pozitív, illetve negatív, hogy az s_o közelében a növekedő s paraméter szerinti $\underline{b}(s)$ vektorok változása a $\underline{t}(s_o)$ irányával szembenézve pozitív vagy negatív irányú forgásnak látszik. A $|T(s_o)|$ tulajdonképpen a binomiális vektor szögsebessége. Mivel azonban $\Delta\beta$ egyúttal a megfelelő simulósíkok hajlásszöge is, így azt is mondhatjuk, hogy $|T(s_o)|$ a simulósíkok irányváltozásának sebessége.

6.1 Tétel

$$\underline{b}' = - T\underline{f} .$$

Ez két állítást foglal magában:

I. $\underline{b}' \parallel \underline{f}$; II. $|\underline{b}'| = |T|$.

Bizonyítás

I. Megmutatjuk, hogy

$$\underline{b}' \perp \underline{t} \quad \text{és} \quad b' \perp \underline{b},$$

$\underline{b}\,\underline{t} = 0$ differenciálásából $\underline{b}'\underline{t} + \underline{b}\underline{t}' = 0$ adódik. Helyettesítsük a $\underline{t}'$ helyébe a $G\underline{f}$ vektort, ekkor a $\underline{b}'\underline{t} + \underline{b}G\underline{f} = 0$ egyenletet kapjuk, amiből $\underline{b}\,\underline{f} = 0$ miatt $\underline{b}'\underline{t} = 0$ következik. Ha deriváljuk a $\underline{b}^2 = 1$ mindkét oldalát, akkor a $2\underline{b}\underline{b}' = 0$ összefüggést kapjuk, amely szerint $\underline{b}' \perp \underline{b}$.

Mivel $\underline{b}' \perp \underline{b}$ és $\underline{b}' \perp \underline{t}$ is fennáll, ezért $\underline{b}' \parallel \underline{f}$.

$$\text{II.}\ \frac{\Delta\beta}{\Delta s} = \frac{\sin\Delta\beta}{\Delta s} : \frac{\sin\Delta\beta}{\Delta\beta}$$

Ha $\Delta s \to 0$, akkor $\Delta\beta \to 0$ és akkor $\lim\limits_{\Delta\beta \to 0} \frac{\sin\Delta\beta}{\Delta\beta} = 1$.

Tehát $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\sin\Delta\beta}{\Delta s}$; $\sin\Delta\beta = |\underline{b}(s_o) \times \underline{b}|$,

mert: $|\underline{b}| = |\underline{b}(s_o)| = 1$.

Legyen $\underline{b} = \underline{b}(s_o) + \Delta\underline{b}$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\underline{b}(s_o) \times (\underline{b}(s_o) + \Delta\underline{b})|}{\Delta s} =$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \left| \underline{b}(s_o) \times \frac{\Delta\underline{b}}{\Delta s} \right| = \underline{b}(s_o) \times \underline{b}'(s_o)\ , \quad \text{azaz} \quad T(s_o) =$$

$$= |\underline{b}(s_o) \times \underline{b}'(s_o)|.$$

De $\underline{b}' \perp \underline{b}$ és mivel $\underline{b}$ egységvektor, ezért

$$|T(s_o)| = |\underline{b}'(s_o)|.$$

Most már tetszőleges s paraméterértékre

$$|T(s)| = |\underline{b}'|.$$

Mivel a $\underline{b}$ vektorra a $\underline{t}(s_o)$ vektorral szembeeső irányból a $-\underline{f}$ következik pozitív forgásirányban, ezért

$$\underline{b}' = -T\,\underline{f}\ .$$

A most bebizonyított tétel az egyik Frenet-képlet.

6.2 Tétel. A torzió értéke az ívhossz-paraméterezésében

$$T = \frac{\underline{r}' \ \underline{r}'' \ \underline{r}'''}{|\underline{r}''|^2}$$

A torzió értéke tetszőleges t paraméterben kifejezve

$$T = \frac{\dot{\underline{r}} \ \ddot{\underline{r}} \ \dddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|^2}$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy

$$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{f} = \underline{r}' \times \frac{\underline{r}''}{|\underline{r}''|} = R(\underline{r}' \times \underline{r}''), \qquad (|\underline{r}''| = \frac{1}{R}).$$

Ebből

$$\underline{b}' = R'(\underline{r}' \times \underline{r}'') + R(\underline{r}'' \times \underline{r}'') + R(\underline{r}' \times \underline{r}''') =$$

$$= R'(\underline{r}' \times \underline{r}'') + R(\underline{r}' \times \underline{r}''').$$

A 6.1 tétel szerint $\underline{b}' = -T\underline{f}$. Mindkét oldalt skalárisan szorozva az $\underline{f}$ vektorral

$$T = -b'\underline{f} = -\underline{b}' \frac{\underline{r}''}{|\underline{r}''|} = -\Big[R'(\underline{r}' \times \underline{r}'') +$$

$$+ R(\underline{r}' \times \underline{r}''')\Big] \frac{1}{|\underline{r}''|} \underline{r}'' = \frac{-(\underline{r}' \times \underline{r}''')\underline{r}'}{|\underline{r}''|^2} = \frac{\underline{r}'\underline{r}''\underline{r}'''}{|\underline{r}''|^2}$$

Most kiszámítjuk a t paraméter szerinti deriváltakat:

$$\dot{\underline{r}} = \underline{r}' \frac{ds}{dt} ; \qquad \ddot{\underline{r}} = \underline{r}''(\frac{ds}{dt})^2 + \underline{r}' \frac{d^2s}{dt^2} ;$$

$$\dddot{\underline{r}} = \underline{r}'''(\frac{ds}{dt})^3 + 3\,\underline{r}'' \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} + \underline{r}' \frac{d^2s}{dt^2} ;$$

$$\dot{\underline{r}} \ \ddot{\underline{r}} \ \dddot{\underline{r}} = (\underline{r}' \ \underline{r}'' \ \underline{r}''')(\frac{ds}{dt})^6.$$

Innen $\frac{ds}{dt} = |\dot{\underline{r}}|$ figyelembevételével

$$r' \ r'' \ r''' = \frac{\dot{\underline{r}} \ \ddot{\underline{r}} \ \dddot{\underline{r}}}{\dot{\underline{r}}^6} .$$

Ha most felhasználjuk, hogy

$$G = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}\ , \text{ akkor a } \quad T = \frac{\dot{\underline{r}}\ \ddot{\underline{r}}\ \dddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|^6}\ \frac{|\dot{\underline{r}}|^6}{(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}})^2} =$$

$$= \frac{\dot{\underline{r}}\ \ddot{\underline{r}}\ \dddot{\underline{r}}}{(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}})^2}$$

képletet nyerjük.

A Frenet-képletek a kísérő trióder vektorainak az ívhossz paraméter szerinti deriváltjait fejezik ki a kísérő trióder vektorainak segítségével.

6.3 Tétel

$$\begin{aligned} \underline{t}' &= G\underline{f} \\ \underline{f}' &= -G\underline{t} + T\underline{b} \\ \underline{b}' &= -T\underline{f} \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 0 & G & 0 \\ -G & 0 & T \\ 0 & -T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{t} \\ \underline{f} \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{t}' \\ \underline{f}' \\ \underline{b}' \end{bmatrix}$$

Bizonyítás:

Az első Frenet-képletet a 4.1 tételhez fűzött megjegyzésben bizonyítottuk. A harmadik Frenet-képletet a 6.1 tételben mondtuk ki.

Ezeknek felhasználásával bizonyíthatjuk a másodikat.

$$\underline{f}' = (\underline{b} \times \underline{t})' = \underline{b}' \times \underline{t} + \underline{b} \times \underline{t}' = -T\underline{f} \times \underline{t} + \underline{b} \times G\underline{f} =$$

$$= -G\underline{f} \times \underline{b} + T\underline{t} \times \underline{f} = -G\underline{t} + T\underline{b}\ .$$

Példa:

6.1 Kiszámítjuk az 1.1 példában ismertetett hengeres csavarvonal görbületét és torzióját.

$$\underline{r}(t) = a \cos t\ \underline{i} + a \sin t\ \underline{j} + b\ t\ \underline{k}$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = -a \sin t\ \underline{i} + a \cos t\ \underline{j} + b\ \underline{k}$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = -a \cos t\ \underline{i} - a \sin t\ \underline{j}$$

$$\dddot{\underline{r}}(t) = a \sin t\ \underline{i} - a \cos t\ \underline{j}$$

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = (ab \sin t,\ -ab \cos t,\ a^2)$$

$$G = \frac{\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|^3} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^4}}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}\ ;$$

$$\dot{\underline{r}}\ \ddot{\underline{r}}\ \dddot{\underline{r}} = (\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}})\dddot{\underline{r}} = a^2b,$$

$$T = \frac{\dot{\underline{r}}\ \ddot{\underline{r}}\ \dddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|} = \frac{a^2 b}{a^2 b^2 + a^4} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Megjegyzés:

Egy görbe pontosan akkor síkgörbe, ha a torziója zérus. Kiemeljük, hogy a csavarvonal görbülete is torziója állandó. A torzió előjelét a b előjele határozza meg:

$b > 0$ esetén jobb csavarról
$b > 0$ esetén bal csavarról beszélünk.

6.2 Vizsgáljuk meg az

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (-t + 1)\underline{k}$$

térgörbét a $t_o = 2$ pont környezetében, vagyis számítsuk ki érintővektorát, írjuk fel az érintő egyenes egyenletrendszerét, a simuló-, normál- és rektifikáló sík egyenletét, számítsuk ki a görbület, torzió értékét stb.!

A számításoknál szükség lesz az első három deriváltra és a $t = 2$ pontbeli differenciálhányadosokra.

$x(t) = 3t^2 - 2t$	$x(2) = 8$	$\dot{x}(t) = 6t - 2$	$\dot{x}(2) = 10$
$y(t) = t$	$y(2) = 8$	$\dot{y}(t) = 3t$	$\dot{y}(2) = 12$
$z(t) = -t + 1$	$z(2) = -1$	$\dot{z}(t) = -1$	$\dot{z}(2) = -1$
$\ddot{x}(t) = 6$	$\ddot{x}(2) = 6$	$\dddot{x}(t) = 0$	$\dddot{x}(2) = 0$
$\ddot{y}(t) = 6t$	$\ddot{y}(2) = 12$	$\dddot{y}(t) = 6$	$\dddot{y}(2) = 6$
$\ddot{z}(t) = 0$	$\ddot{z}(2) = 0$	$\dddot{z}(t) = 0$	$\dddot{z}(2) = 0.$

Érintő vektor: $r(2) = 10\,\underline{i} + 12\,\underline{j} - \underline{k}$.

Érintő egyenes: $\frac{x - 8}{10} = \frac{y - 8}{12} = -(z + 1).$

Simulósík: Egy pontjának helyzetvektora: $\underline{r}(2)$

Normálvektora: $\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)$

$$\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 12 & -1 \\ 6 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 12\underline{i} - 6\underline{j} + 48\underline{k}.$$

A normálvektor skalárral szorozható vagy osztható, mert iránya ezáltal nem változik:

$$\frac{1}{6}[\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)] = 2\underline{i} - \underline{j} + 8\underline{k} .$$

A simulósík egyenlete:

$$2(x - 8) - (y - 8) + 8(z + 1) = 0.$$

Rendezve:

$$2x - y + 8z - 16 + 8 + 8 = 0, \quad \text{vagyis} \quad 2x - y + 8z = 0.$$

Normálsík: Egy pontjának helyzetvektora: $\underline{r}(2)$.

Normálvektora: $\dot{\underline{r}}(2)$.

Egyenlete: $10(x - 8) + 12(y - 8) - (z + 1) = 0,$

$$10x + 12y - z - 80 - 96 - 1 = 0,$$

$$10x + 12y - z - 177 = 0.$$

Rektifikáló sík: Egy pontjának helyzetvektora: $\underline{r}(2)$.

Normálvektor: $(\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)) \times \dot{\underline{r}}(2)$.

Így mindjárt az

$$\frac{1}{6}[\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)]$$

vektorral számolhatunk, hiszen itt is csak az irány lényeges.

$$\frac{1}{6}[\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)] \times \dot{\underline{r}}(2) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -1 & 8 \\ 10 & 12 & -1 \end{vmatrix} = -95\underline{i} + 82\underline{j} + 34\underline{k}$$

A rektifikáló sík egyenlete:

$$-95(x - 8) + 82(y - 8) + 34(z + 1) = 0,$$

$$-95x + 82y + 34z + 760 - 656 + 34 = 0,$$

$$95x - 82y - 34z - 138 = 0.$$

Görbület:

$$G(2) = \frac{1}{R(2)} = \frac{|\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)|}{|\dot{\underline{r}}(2)|^3}$$

Vigyázzunk, mert itt az $\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)$ vektor hossza szerepel, a 6 szorzót csak kiemelni szabad.

$$|\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)| = 6\sqrt{4 + 1 + 64} = 6\sqrt{69} = 49{,}84$$

$$|\dot{\underline{r}}(2)| = \sqrt{100 + 144 + 1} = \sqrt{245} = 15{,}65$$

$$|\dot{\underline{r}}(2)|^3 = 15{,}65^3 = 3833,$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{49{,}84}{3833} = 0{,}013.$$

Torzió:

$$T(2) = \frac{|\dot{\underline{r}}(2)\ \ddot{\underline{r}}(2)\ \dddot{\underline{r}}(2)|}{|\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)|^2}.$$

$$\dot{\underline{r}}(2)\ \ddot{\underline{r}}(2)\ \dddot{\underline{r}}(2) = \begin{vmatrix} 10 & 12 & -1 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -36,$$

$$|\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)|^2 = 49{,}84^2 = 2484,$$

$$T = -\frac{36}{2484} = -0{,}0145.$$

A pontban a térgörbe tehát balcsavarodású.

Sebesség: $\frac{ds(t)}{dt} = |\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{(6t - 2)^2 + 9t^4 + 1} =$

$$= \sqrt{9t^4 + 36t^2 - 24t + 5},$$

$$\left[\frac{ds}{dt}\right]_{t=2} = |\dot{\underline{r}}(2)| = 15{,}65.$$

Gyorsulás: $a = \frac{v^2}{R}\,\underline{f} + a_t\,\underline{t}$

$$a_t = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{36t^3 + 72t - 24}{2\sqrt{9t^4 + 36t^2 - 24t + 5}} =$$

$$= \frac{6(3t^3 + 6t - 2)}{\sqrt{9t^4 + 36t^2 - 24t + 5}}$$

$$a_t(2) = \left[\frac{d^2(s)}{dt^2}\right]_{t=2} = \frac{6(24 + 12 - 2)}{15,65} = 13,04.$$

$$\frac{1}{R(2)} = 0,013; \quad v^2(2) = |\dot{r}(2)|^2 = 15,65^2 = 245.$$

$$a_n(2) = 0,013 \cdot 245 = 3,185;$$

$$\underline{a} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = 3,185\underline{f} + 13,04\underline{t}$$

6.3 Megmutatjuk, hogyan lehet két felület metszésvonalaként adott görbe jellemző mennyiségeit kiszámítani. Legyen az adott görbe az

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

$$-2x + y^2 + z = 0$$

felületek metszésvonala. Kiszámítjuk néhány jellemző mennyiségét a $P(1,1,1)$ pontban.
Először is paraméterezzük a görbét! Legyen a paraméter például az x változó. Ekkor az

$$\underline{r}(x) = x\underline{i} + y(x)\underline{j} + z(x)\underline{k}$$

vektor x szerinti deriválásával kapjuk, hogy

$$\dot{\underline{r}}(x) = \underline{i} + \frac{dy}{dx}\underline{j} + \frac{dz}{dx}\underline{k};$$

$$\ddot{\underline{r}}(x) = \frac{d^2y}{dx^2}\underline{j} + \frac{d^2z}{dx^2}\underline{k}.$$

Ezt a deriválást a görbe egyenletének implicit alakjában végezzük el, tehát mindkét egyenletet deriváljuk x szerint:

$$2x - 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0,$$

$$-2 + 2y\dot{y} + \dot{z} = 0.$$

Az $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ helyettesítés után

$$\dot{y} = 1; \quad \dot{z} = 0.$$

Másodszor differenciálva és a

$$2 - 2\dot{y}^2 - 2y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0,$$

$$2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + \ddot{z} = 0,$$

egyenletrendszerbe az $y = z = 1$, valamint $\dot{y} = 1$ és $\dot{z} = 0$ értékeket beírva az

$$\ddot{y} = \ddot{z} = -\frac{2}{3}$$

értékeket nyerjük. Végül a harmadik deriválással kapott

$$-6\dot{y}\ddot{y} - 2\ddot{y}\ddot{y} + 6\dot{z}\ddot{z} + 2\dot{z}\dddot{z} = 0,$$

$$6\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{y}\dddot{y} + \dddot{z} = 0$$

egyenletrendszerből az előzőleg már meghatározott mennyiségek helyettesítése után

$$\dddot{y} = 2; \quad \dddot{z} = 0 \quad \text{adódik.}$$

A deriváltak ismeretében elkezdhetjük a számításokat.
Az érintő egyenes egyenletrendszere:

$$x = 1 + \lambda,$$

$$y = 1 + \lambda,$$

$$z = 1.$$

A simulósík normálisa az

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = -\frac{2}{3}\,\underline{i} + \frac{2}{3}\,\underline{j} - \frac{2}{3}\,\underline{k}$$

A simulósík egyenlete

$$-\left[(x - 1) + (y - 1) + (z - 1)\right] = \frac{2}{3} = 0, \quad \text{azaz}$$

$$x - y + z - 1 = 0.$$

A görbület

$$G = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3} = \frac{\sqrt{\frac{12}{9}}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

A torzió

$$T = \frac{|\dot{\underline{r}}\ \ddot{\underline{r}}\ \dddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|^2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{12}{9}} = 1.$$

A normálsík, rektifikáló sík egyenlete is felírható a deriváltak ismeretében.

7. A térgörbe menetének vizsgálata a kísérő háromél segítségével

Vegyük fel a koordináta-rendszert úgy, hogy az origó az s_o paraméterértéknek megfelelő pontban legyen, míg a koordináta-rendszer tengelyei a $\underline{t}(s_o)$, $\underline{f}(s_o)$ és $\underline{b}(s_o)$ vektorok irányában essenek. Az

$$\underline{r} = \underline{r}(s) = x(s)\underline{i} + y(s)\underline{j} + z(s)\underline{k}$$

görbe előállítását a Taylor-tétel segítségével, az s_o helyen a harmadrendű taggal bezárólag sorbafejtsük.
Ennek alakja

$$\underline{r} = \underline{r}(s_o) + \underline{r}'(s_o)(s - s_o) + \frac{\underline{r}''(s_o)}{2!}(s - s_o)^2 +$$

$$+ \frac{\underline{r}'''(s_o)}{3!}(s - s_o)^3 + \underline{m},$$

ahol

$$\lim_{s \to s_o} \frac{\underline{m}}{(s - s_o)^3} = 0,$$

és

$$\underline{r}(s_o) = \underline{0}.$$

A Frenet-képletek felhasználásával

$$\underline{r}'(s_o) = \underline{t}(s_o),$$

$$\underline{r}''(s_o) = G(s_o)\cdot\underline{f}(s_o)$$

$$|\underline{r}''|'(s_o) = \frac{d}{ds}(G(s))_{s=s_o}\cdot\underline{f}(s_o) + G(s)\left[-G(s_o)\underline{t}(s_o) + \right.$$

$$\left. + T(s_o)\underline{b}(s_o)\right].$$

Ha ezt a sorfejtésbe helyettesítjük, akkor

$$\underline{r} = (s - s_o)\underline{t}_o + \frac{G(s_o)}{2!}(s - s_o)^2\underline{f}_o + \frac{d}{ds}(G(s))_o\frac{(s-s_o)^3}{3!}\underline{f}_o -$$

$$- \frac{G^2(s_o)}{3!}(s - s_o)^3\underline{t}_o + \frac{G(s_o)T(s_o)}{3!}(s - s_o)^3\underline{b}_o + \underline{m}$$

következik és ebből, az összevonásokat elvégezve, az

$$\underline{r} = \left[(s - s_o) - G_o^2\frac{(s - s_o)^3}{3!}\right]\underline{t}_o + \left[\frac{(s - s_o)^2}{2!} +\right.$$

$$\left. + \frac{d}{ds}(G(s))_o\frac{(s - s_o)^3}{3!}\right]\underline{f}_o + \left[G_oT_o\frac{(s - s_o)^3}{3!}\right]\underline{b}_o + \underline{m}$$

felbontást nyerjük. A görbe egyenletének koordinátás alakja:

$$x = s - s_o) \qquad - G_o^2\frac{(s - s_o)^3}{3!} + m_x,$$

$$y = G_o\frac{(s - s_o)^2}{2!} + G_o'\frac{(s - s_o)^3}{3!} + m_y,$$

$$z = G_o\cdot T_o\cdot\frac{(s - s_o)^3}{3!} + m_z.$$

Az m vektor (és ezért koordinátái is) $(s - s_o)$-ban negyedrendű mennyiség. A görbe s_o pont körüli menetének kvalitatív vizsgálatát úgy végezzük el, hogy megalkotjuk a görbének a három koordinátasíkon levő vetületét. Ne felejtsük el, hogy a koordináta-rendszer választása folytán az $[x,y]$-sik a görbe simulósíkjával, az $[y,z]$ sík a normálsíkkal és az $[x,z]$ sik a rektifikáló síkkal azonos. Mivel a görbe menetét az s_o pontnak csupán elég kis környezetében kívánjuk leírni, azért a sorfejtésekből csupán az első tagokat fogjuk figyelembe venni. Azt mondhatjuk, hogy a görbe egyenlete közelítőleg

$$x \approx s - s_o,$$

$$y \approx \frac{G_o}{2}(s - s_o)^2,$$

$$z \approx \frac{G_oT_o}{6}(s - s_o)^3$$

alakú. A simulósíkon levő vetület egyenlete tehát közelítőleg

$$y = \frac{G_o}{2} x^2 .$$

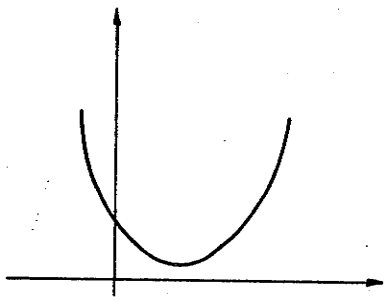
A görbének a normálsíkon levő vetületét

$$s - s_o = \left(\frac{2}{G_o}\right)^{\frac{1}{2}} . y^{\frac{1}{2}}$$

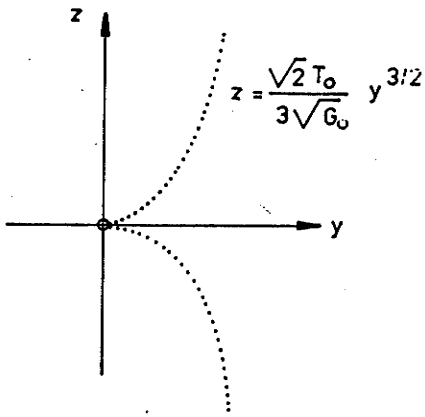
miatt közelítőleg a

$$z = \frac{G_o T_o}{6} . \left(\frac{2}{G_o}\right)^{\frac{3}{2}} . y^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2} . T_o}{3\ G_o} . y^{\frac{3}{2}}$$

görbe adja. Ennek vázlatos képe a 7.1 ábrán látható.



7.1 ábra

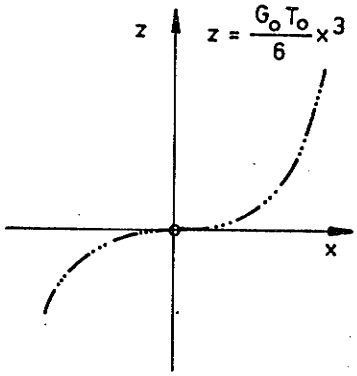


7.2 ábra

Végül a rektifikáló síkon levő vetületet közelítőleg a

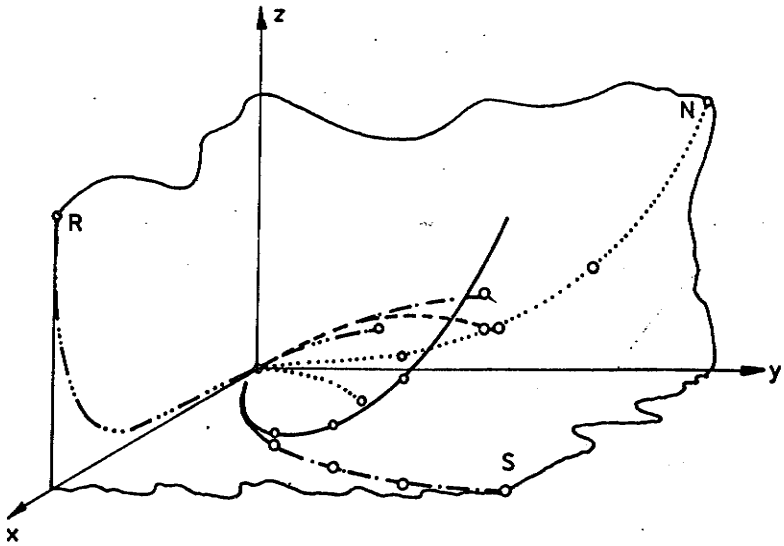
$$z = \frac{G_o T_o}{6} x^3$$

egyenlettel adhatjuk meg. Ez a vetület tehát közelítőleg harmadfokú parabola, képét a 7.3 ábrán rajzoltuk meg.



7.3 ábra

Végül a vetületek alapján elkészítettük a görbe menetének térbeli képét az s_o elegendő kis környezetében. Ezt a ábrán láthatjuk.



7.4 ábra

8. Kinematikai alkalmazás. Kidolgozott feladat

Ha egy térbeli pont mozgását az $\underline{r}(t)$ vektorfüggvénnyel adjuk meg, akkor $\dot{\underline{r}}(t)$ a sebességet adó vektor. A sebességvektor idő szerinti deriválásával viszont az $\ddot{\underline{r}}(t)$ gyorsulásvektorhoz jutunk. Mivel

$$\dot{\underline{r}} = \underline{r}' \cdot \frac{ds}{dt} = \underline{t} \cdot v$$

(v a pályamenti sebességet jelenti), azért

$$\ddot{\underline{r}} = \underline{r}'' \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \underline{r}' \frac{d^2s}{dt^2} = \underline{r}'' \cdot v^2 + \underline{r}' a_t$$

ahol a_t az ún. tangenciális (pályamenti) gyorsulást jelöli. Az $\underline{r}''$ vektort a Frenet-képletek alapján helyettesíthetjük, továbbá írjunk G helyett $\frac{1}{R}$-et. Így a gyorsulás az

$$\ddot{\underline{r}} = \frac{v^2}{R} \cdot \underline{f} + a_t \cdot \underline{t} = a_n \cdot \underline{f} + a_t \cdot \underline{t}$$

alakot veszi fel. Azt látjuk ebből, hogy a mozgó pontnak a tangenciális gyorsuláson kívül még a főnormális irányába eső

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

nagyságú gyorsulása is van. A tényleges gyorsulás e két merőleges irányú gyorsulásból vektorális összegezéssel adódik. A kinematikai alkalmazás után, a jobb megértés érdekében, egy kiválasztott térgörbe (és mozgás) összes fontos mennyiségét kiszámítjuk.
Az

$$\ddot{\underline{r}} = \underline{t}\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \underline{r}''\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2 = \underline{t}\,\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \underline{f}\,G(s)\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2$$

egyenlőség más szavakkal azt jelenti, hogy az $\ddot{\underline{r}}$ gyorsulás vektor érintő irányú komponense $\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2$ főnormális irányú komponense pedig $G(s)\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2$.

Vizsgáljuk meg ezért az

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (-t + 1)\underline{k}$$

térgörbét a $t_o = 2$ pont környezetében, vagyis számítsuk ki érintővektorát, írjuk fel az érintő egyenes egyenletrend-

szerét, a simuló-, normál- és rektifikáló sík egyenletét, számítsuk ki a görbület, torzió értékét stb.!

A számításoknál szükség lesz az első három deriváltra és a $t_o = 2$ pontbeli differenciálhányadosokra.

$$x(t) = 3t^2 - 2t \quad x(2) = 8 \quad \dot{x}(t) = 6t - 2 \quad \dot{x}(2) = 10$$

$$y(t) = t^3 \quad y(2) = 8 \quad \dot{y}(t) = 3t^2 \quad \dot{y}(2) = 12$$

$$z(t) = -t + 1 \quad z(2) = -1 \quad \dot{z}(t) = -1 \quad \dot{z}(2) = -1$$

$$\ddot{x}(t) = t \quad \ddot{x}(2) = 6 \quad \dddot{x}(t) = 0 \quad \dddot{x}(2) = 0$$

$$\ddot{y}(t) = 6t \quad \ddot{y}(2) = 12 \quad \dddot{y}(t) = 6 \quad \dddot{y}(2) = 6$$

$$\ddot{z}(t) = 0 \quad \ddot{z}(2) = 0 \quad \dddot{z}(t) = 0 \quad \dddot{z}(2) = 0.$$

Érintő vektor: $\dot{\underline{r}}(2) = 10i + 12j - k.$

Érintő egyenes: $\dfrac{x - 8}{10} = \dfrac{y - 8}{12} = -(z + 1).$

Simulósík: Egy pontjának helyzetvektora: $\underline{r}(2)$

Normálvektora: $\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)$,

$$\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10 & 12 & -1 \\ 6 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 12\underline{i} - 6\underline{j} + 48\underline{k}$$

A normálvektor skalárral szorozható vagy osztható, mert iránya ezáltal nem változik:

$$\frac{1}{6}[\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)] = 2\underline{i} - \underline{j} + 8\underline{k}.$$

A simulósík egyenlete:

$$2(x - 8) - (y - 8) + 8(z + 1) = 0.$$

Rendezve:

$$2x - y + 8z - 16 + 8 + 8 = 0,$$

vagyis:

$$2x - y + 8z = 0.$$

Normálsík: Egy pontjának helyzetvektora: $\underline{r}(2)$.

Normálvektora: $\dot{\underline{r}}(2)$.

Egyenlete: $10(x - 8) + 12(y - 8) - (z + 1) = 0$

$$10x + 12y - z - 80 - 96 - 1 = 0$$

$$10x + 12y - z - 177 = 0.$$

Rektifikáló sík: Egy pontjának helyzetvektora: $\underline{r}(2)$.
Normálvektor: $\{\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)\} \times \dot{\underline{r}}(2) \| \underline{f}$

Itt mindjárt az $\frac{1}{6}[\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)]$ vektorral számolhatunk, hiszen itt is csak az irány lényeges.

$$\frac{1}{6}[\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)] \times \dot{\underline{r}}(2) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -1 & 8 \\ 10 & 12 & -1 \end{vmatrix} = -95\underline{i} + 82\underline{j} + 34\underline{k}.$$

A rektifikáló sík egyenlete:

$$- 95(x - 8) + 82(y - 8) + 34(z + 1) = 0,$$

$$- 95x + 82y + 34z + 760 - 656 + 34 = 0,$$

$$95x - 82y - 34z - 138 = 0.$$

Görbület:

$$G(2) = \frac{1}{R(2)} = \frac{|\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)|}{|\dot{\underline{r}}(2)|^3}.$$

Vigyázzunk, mert itt az $\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)$ vektor hossza szerepel, a 6 szorzót csak kiemelni szabad.

$$|\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)| = 6\sqrt{4 + 1 + 64} = 6\sqrt{69} = 49{,}84$$

$$|\dot{\underline{r}}(2)| = \sqrt{100 + 144 + 1} = \sqrt{245} = 15{,}65,$$

$$|\dot{\underline{r}}(2)| = 15{,}65^3 = 3833,$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{49{,}84}{3833} = 0{,}013.$$

Torzió:

$$T(2) = \frac{|\dot{\underline{r}}(2)\ \ddot{\underline{r}}(2)\ \dddot{\underline{r}}(2)}{|\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)|}$$

$$\dot{\underline{r}}(2)\ \ddot{\underline{r}}(2)\ \dddot{\underline{r}}(2) = \begin{vmatrix} 10 & 12 & -1 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -36,$$

$$\left|\dot{\underline{r}}(2) \times \ddot{\underline{r}}(2)\right|^2 = 49{,}84^2 = 2484,$$

$$T = -\frac{36}{2484} = -0{,}0145.$$

A pontban a térgörbe tehát balcsavarodású.
Sebesség:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \left|\dot{\underline{r}}(t)\right| = \sqrt{(6t-2)^2 + 9t^4 + 1} =$$

$$= \sqrt{9t^4 + 36t^2 - 24t + 5},$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=2} = \left|\dot{\underline{r}}(2)\right| = 15{,}65.$$

Gyorsulás:

$$\underline{a} = \frac{v^2}{R}\underline{f} + a_t\,\underline{t}$$

$$a_t = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{36t^3 + 72t - 24}{2\sqrt{9t^4 + 36t^2 - 24t + 5}} =$$

$$= \frac{6(3t^3 + 6t - 2)}{\sqrt{9t^4 + 36t^2 - 24t + 5}}$$

$$a_t(2) = \left[\frac{d^2(s)}{dt^2}\right]_{t=2} = \frac{6(24 + 12 - 2)}{15{,}65} = 13{,}04$$

$$\frac{1}{R(2)} = 0{,}013; \qquad v^2(2) = \left|\dot{\underline{r}}(2)\right|^2 = 15{,}65^2 = 245.$$

$$a_n(2) = 0{,}013 \cdot 245 = 3{,}185; \qquad \underline{a} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = 3{,}185\underline{f} + 13{,}04\underline{t}.$$

9. A felület értelmezése

Kétváltozós függvényeknél a $z = f(x,y)$ képlet x,y,z koordináta-rendszerbeli grafikonját felületnek nevezzük. A grafikus ábrázolás lényege az, hogy a függvény $[x,y]$ síkbeli T értelmezési tartományának minden - (x,y) számpárral meghatározott - P pontjához egy z értéket rendelünk hozzá. Ezt a z mennyiséget - előjelének figyelembevételével - a P pontban az x,y síkra merőleges irányban felmérjük. Az így kapott F ponthalmaz ennek alapján az $[x,y]$ sík T tartományának képeként fogható fel. Kép alatt itt bizonyos előírást értünk, amely egy halmaz pontjaihoz egy másik ponthalmaz pontjait rendeli hozzá. A kép és a T tartomány között fennálló leképezés olyan értelemben kölcsönös és egyértelmű, hogy a T minden pontjának egy F-beli pont felel meg és fordítva. A most mondottak képezik a felület értelmezésének kiindulópontját.

Eszerint felületen mindig egy síkbeli tartomány kölcsönösen egyértelmű térbeli képét értjük.

Ez a definíció azonban még olyan tág, hogy a felület szemléletes felfogásának sem felelne meg. Ennek részletes indoklása azonban túlmegy a jelen tárgyalás keretein. A most megállapított értelmezést a későbbiek során minden esetre szűkíteni fogjuk.

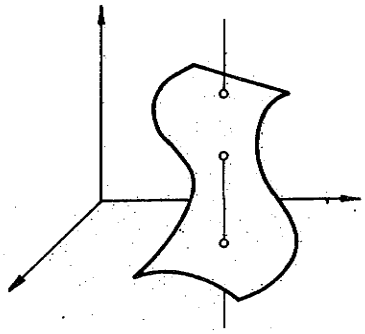
Ha ugyanis az értelmezést analitikusan akarjuk megfogalmazni, akkor azt látjuk, hogy a $z = f(x,y)$ előállítás nem megfelelő, mert nyilván megadhatók olyan felületek is, amelyeknek a z tengellyel párhuzamos egyenessel több közös pontjuk van.

A síkgörbék esetén éppen azért választottuk a paraméteres, vagy ami ugyanaz, a vektorális előállítást, hogy az ilyen természetű nehézségeket kiküszöböljük. A felületeknél a következő előállítást fogjuk megvalósítani.

Legyen T az (u,v) koordinátákkal leírt sík valamely tartománya. Rendeljünk a T minden (u,v) pontjához egy $\underline{r}(u,v)$ vektort hozzá. Ezt a vektort az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ derékszögű koordináta-rendszerben helyzetvektorként mérjük fel. Változó (u,v) értékrendszer esetén az $\underline{r}(u,v)$ végpontja felületet ír le.
Amint látjuk az

$$\underline{r} = \underline{r}(u,v) \tag{9.1}$$

függvény két skalártól függő vektorfüggvény, amelynek értelmezési tartománya T. Az $\underline{r}(u,v)$ függvényre azonban további feltételek teljesülését is megkívánjuk.



9.1 ábra

9.1 Definíció:

Elemi felületnek nevezzük a sík tetszőleges, egyszeresen összefüggő, korlátos, zárt tartományának (pl. egy zárt körlemeznek vagy téglalapnak) topológikus képét, azaz kölcsönösen egyértelmű és inverzzével együtt folytonos leképezését. Felületen olyan ponthalmazt értünk, amely összerakható elemi felületekből.

A továbbiakban az $\underline{r}(u,v)$ kétparaméteres vektor-skalárfüggvénytől megköveteljük, hogy mindkét változója szerint legalább egyszer folytonosan differenciálható legyen, továbbá, hogy az

$$\underline{r}_u = \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} \qquad \text{és} \qquad \underline{r}_v = \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v}$$

derivált-vektorok a paraméter-tartománynak legfeljebb véges sok pontjában lehetnek párhuzamosak (a többi pontban tehát zérusvektorok sem lehetnek, mert ezeket is párhuzamosaknak tekintjük).

A felületnek azon pontjait, amelyekben ezek a feltételek teljesülnek, reguláris pontoknak nevezzük.

Elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt előfordulhat, hogy adott u,v paraméterektől másik ξ, η paraméterekre térjünk át $u = u(\xi,\eta)$, $v = v(\xi,\eta)$ transzformáció segítségével. Ilyen transzformációt akkor tekintünk megengedettnek, ha a transzformációban szereplő függvények parciális deriváltjai léteznek és a transzformáció függvény-determinánsára a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0$$

reláció teljesül.

Ez esetben az új paraméterek esetében is teljesülnek a fenti differenciálhatósági feltételek, azaz az

$$\underline{r}_\xi = \frac{\partial \underline{r}(\xi,\eta)}{\partial \xi} \quad \text{és} \quad \underline{r}_\eta = \frac{\partial \underline{r}(\xi,\eta)}{\partial \eta}$$

derivált vektorok is a (ξ,η) paraméter-tartománynak legfeljebb véges sok pontjában párhuzamosak.

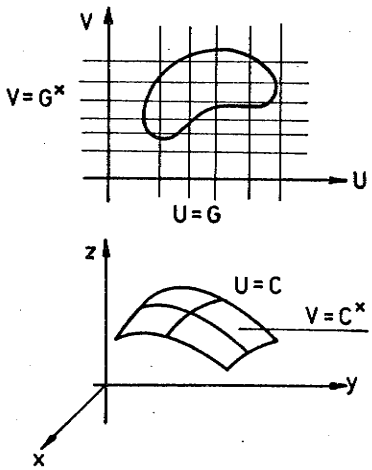
A (9.1) előállításban szereplő u és v változókat Gauss-féle paramétereknek nevezzük. Ennek megfelelően az (u,v) koordinátákkal ellátott síkot paramétersíknak mondjuk. A paramétersík u = const. vonalainak a felületen görbevonal felel meg, hiszen az

$$\underline{r} = \underline{r}(c,v)$$

egyenlet, változó v mellett, térgörbét állít elő. Megfelelően, a $v = c^*$ egyenesnek a felületen az

$$\underline{r} = \underline{r}(u,c^*)$$

vonal felel meg.



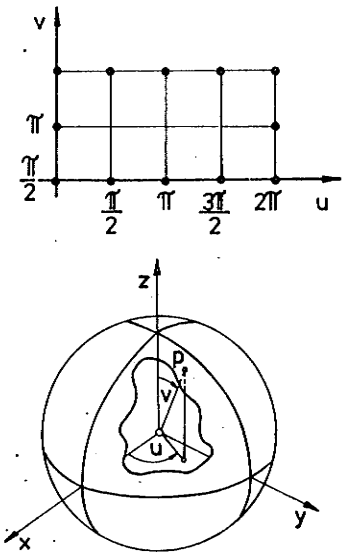
9.2 ábra

Azt látjuk, hogy a paramétersík koordinátavonalai hálózatának a felületen két görbesereg felel meg.

A $z = f(x,y)$ ún. Euler-Monge-féle megoldás esetén választhatjuk az $u = x$ és $v = y$ paramétereket és felület vektor egyenletét,

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + f(x,y)\underline{k}$$

alakban írhatjuk fel.



9.3 ábra

Példa:

9.1 A gömb paraméteres előállítása az

$$\underline{r} = a \cos u \sin v\underline{i} + a \sin u \sin v\underline{j} + a \cos v\underline{k}$$

egyenlettel lehetséges, ahol

$$0 \leqq u \leqq 2\pi \quad \text{és} \quad 0 \leqq v \leqq \pi .$$

Az $u = \text{const.}$ paramétervonalak a hosszúsági köröket, a $v = \text{const.}$ vonalak pedig a szélességi köröket adják. E paramétervonalak olyanok, hogy a két sarki pont kivételével minden ponton egy és csak egy $u = c$, illetve $v = c^*$ vonal halad át.

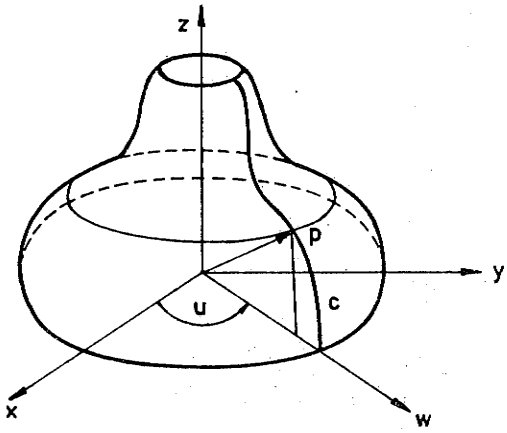
9.2 Forgásfelület kétparaméteres előállítását mutatjuk meg. Adjunk meg az x,y síkban egy w tengelyt. A w,z síkban fekvő c meridiángörbe paraméteres előállítása legyen: $w = \psi(v)$, $z = \varphi(v)$.

Legyen u a w,z és az x,z síkok összege. Ekkor a c görbe megforgatásával keletkezett forgásfelület egy pontjának koordinátái a következők:

$$x = \psi(v) \cos u$$
$$y = \psi(v) \sin u$$
$$z = \varphi(v)$$

A forgásfelület vektoregyenlete pedig

$$\underline{r}(u,v) = \psi(v)\cos u\underline{i} + \psi(v)\sin u\underline{j} + \varphi(v)\underline{k}$$



9.4 ábra

Ha a w,z síkbeli görbe előállításában a $\psi(v)$ a v paraméternek szigorúan monoton függvénye, akkor létezik a

$$v = \psi^{-1}(w) \quad \text{függvény.}$$

Emiatt a

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \psi(v)$$

összefüggésből

$$v = \psi^{-1}(x^2 + y^2)$$

következik és ezt a z kifejezésbe helyettesítve a

$$z = \varphi(v) = \varphi(\psi^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2})) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

alakú explicit egyenlet adódik.

A forgásfelület paramétervonalai a forgástengelyre merőleges síkok által kimetszett körök, illetve a forgatott meridián görbe egyes példányai lesznek.

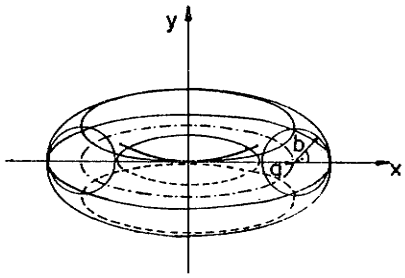
9.3 Ha a $w = a + b\cos v \quad a > b > 0$

$$z = b\sin v$$

egyenletű kört forgatjuk meg a z tengely körül, akkor a tórusz felületet kapjuk, amelynek vektoregyenlete

$$\underline{r}(u,v) = (a + b\cos v)\cos u\underline{i} + (a + b\cos v)\sin u\underline{j} +$$

$+ b \sin v\underline{k}$



9.5 ábra

ahol $0 \leqq v \leqq 2\pi$, $0 \leqq u \leqq 2\pi$.

10. A felületi normális és az érintősík

Az

$$\underline{r} = \underline{r}(u,v) \tag{10.1}$$

vektoregyenlettel megadott felületen a $v = v_o$ görbe tetszőleges pontjában az érintővektor

$$\frac{\partial \underline{r}(u,v_o)}{\partial u} = \underline{r}_u(u,v_o) ,$$

az $u = u_o$ paramétervonal valamely pontjában pedig

$$\frac{\partial \underline{r}(u_o v)}{\partial v} = \underline{r}_v(u_o,v).$$

Az (u_o,v_o) - ponton áthaladó paramétervonalak e pontbeli érintővektorai az

$\underline{r}_u(u_o,v_o)$ és $\underline{r}_v(u_o,v_o)$ vektorok.

Az a tény, hogy a (8.1) egyenlet valóban felületet ad, abban jut kifejezésre, hogy az

$\underline{r}_u(u,v)$ és $\underline{r}_v(u,v)$

vektorok minden pontban lineárisan függetlenek. Ezt az

$$\underline{r}_u(u_o,v_o) \times \underline{r}_v(u_o,v_o) \neq \underline{0} \tag{10.2}$$

feltétel fejezi ki.

10.1 Definíció:

Az $\underline{r}_u(u_o,v_o) \times \underline{r}_v(u_o,v_o)$ vektort az $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$ felület (u_o,v_o) pontbeli felületi normálisának nevezzük.

Számítsuk ki a felületi normális hosszát! Felhasználva az

$$(\underline{r}_u \times \underline{r}_v)(\underline{r}_u \times \underline{r}_v) = \underline{r}_u^2\, \underline{r}_v^2 - (\underline{r}_u\, \underline{r}_v)^2$$

azonosságot,

$$|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| = \sqrt{\underline{r}_u^2\, \underline{r}_v^2 - (\underline{r}_u\, \underline{r}_v)^2}.$$

Ha bevezetjük az

$$E = \underline{r}_u^2; \quad F = \underline{r}_u\, \underline{r}_v\ ; \quad G = \underline{r}_v^2$$

jelöléseket, akkor

$$|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

írható. Az E, G, F mennyiségeket a felület Gauss-féle elsőrendű alapmennyiségeinek nevezzük. E jelölések segítségével a (8.2) feltételt

$$\sqrt{EG - F^2} \neq 0$$

alakban is írhatjuk.

A felület érintősíkjának egyenletét az

$$\underline{r}(u_o,v_o)$$

pontban a

$$|\underline{R} - \underline{r}(u_o,v_o),\ \underline{r}_v(u_o,v_o),\ \underline{r}_u(u_o,v_o)| = 0$$

determináns adja.

Ez abból következik, hogy az

$$\underline{R} - \underline{r}(u_o,v_o)$$

(ahol R a sík tetszőleges pontjába mutató vektor), az

$$\underline{r}_u(u_o,v_o) \quad \text{és} \quad \underline{r}_v(u_o,v_o)$$

vektorok egy síkban fekszenek. Ha a determinánst

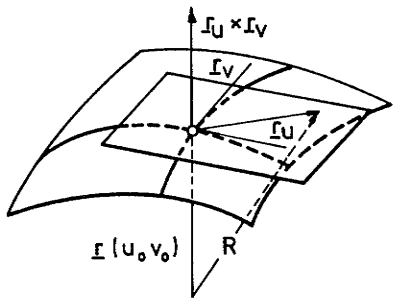
$$[\underline{R} - \underline{r}(u_o,v_o)]\ [\underline{r}_u(u_o,v_o) \times \underline{r}_v(u_o,v_o)]$$

módon átírjuk és a síkra merőleges $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ vektort normáljuk, akkor az érintősík egyenletének

$$(\underline{R} - \underline{r}(u_o,v_o))\cdot\underline{n}(u_o,v_o) = 0$$

Hesse-féle normál alakját kapjuk. Ebben

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$



10.1 ábra

10.1 Tétel
A felület érintősíkjának Hesse-féle normálegyenletét az

$$[\underline{R} - \underline{r}(u_o,v_o)]\cdot\underline{n}(u_o,v_o) = 0$$ képlet adja.

Megjegyzés:
Ha a felületet a $z = f(x,y)$ alakban adjuk meg, akkor az érintősík normálisát a következőképpen számíthatjuk ki. A felület kétparaméteres vektoregyenlete

$$\underline{r}(x,y) = x\underline{i} + y\underline{j} + f(x,y)\underline{k}$$

innen

$$\underline{r}_x = \underline{i} + f'_x\underline{k} \; ; \qquad \underline{r}_y = \underline{j} + f'_y\underline{k}$$

tehát

$$\underline{r}_x \times \underline{r}_y = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x \, , \, - f'_y, \, 1)$$

A felület érintősíkja egy (x_o,y_o) pontban a következő:

$$- f'_x(x_o,y_o)(X - x_o) - f'_y(x_o,y_o)(Y - y_o) - Z - f'(x_o,y_o) = 0$$

A felületi normális hossza pedig

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}.$$

11. Felületi görbék, paramétervonalak

Ha az u,v paraméterek a (harmadik) t paraméter függvényei:

$u = u(t)$, $v = v(t)$, akkor az

$\underline{r}(t) = \underline{r}[u(t), v(t)]$

egyenlet a felületre illeszkedő görbét adja meg. Speciális esetként, ha $u = t$, $v = c$ (állandó), akkor a felület u paramétervonalát kapjuk. Ha $u = c$ (állandó), $v = t$, akkor a felület v paramétervonalát nyerjük. Mivel az $r(u,v)$ leképezés az (u,v) paramétersík bármely pontjának alkalmas környezetében topológikus, azért a felület minden pontján egyetlen u paramétervonal és egyetlen v paramétervolan halad át, más szóval a paramétervonalak az (u,v) paramétersík bármely pontjának alkalmas környezetében egyrétűen fedik le a felületet. Ha az (u,v) paraméterekről valamely megengedett $u = u(\xi,\eta)$, $v = v(\xi,\eta)$ transzformációval új (ξ,η) paraméterekre térünk át, akkor a paramétervonalak természetesen megváltoznak az alkalmazott függvényeknek megfelelően.

12. Felületi görbék, ívhossza

Az $\underline{r}(u,v)$ felületen az $u = u(t)$, $v = v(t)$ egyenletek által meghatározott $\underline{r}(t) = [r\ u(t), v(t)]$ felületi görbének a t_o pontból számított ívhossza a 2.1 tétel szerint:

$$s(t_1) = \int_{t_o}^{t_1} |\dot{\underline{r}}(t)|\,dt = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{\dot{\underline{r}}(t)^2}\,dt.$$

Az integrál kiszámításához meg kell határoznunk $|\dot{r}(t)|$ értékét. Az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$\dot{\underline{r}} = \underline{r}_u \cdot \dot{u} + \underline{r}_v \cdot \dot{v},$$

$$|\dot{\underline{r}}| = \sqrt{(\underline{r}_u \cdot \dot{u} + \underline{r}_v \cdot \dot{v})(\underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v})} =$$

$$= \sqrt{\underline{r}_u \underline{r}_v \dot{u}^2 + 2\underline{r}_u \underline{r}_v \dot{u}\dot{v} + \underline{r}_v \underline{r}_v \dot{v}^2}.$$

A már bevezetett

$$E = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_v, \quad F = \underline{r}_u \, \underline{r}_v, \quad G = \underline{r}_u \, \underline{r}_v$$

Gauss-féle elsőrendű alapmennyiségekkel:

$$|\dot{\underline{r}}| = \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}.$$

Tehát az ívhossz:

$$s(t_1) = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt. \qquad (12.1)$$

A $t_o < \tau < t$ szakasz ívhossza pedig

$$s(t) = \int_{t_o}^{t} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} d\tau. \qquad (12.1')$$

Ebből:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 \qquad (12.2)$$

A jobb oldalon álló kvadratikus alakot a felület első alapformájának nevezik.

Könnyű belátni, hogy ez a kvadratikus alak pozitív definit, ugyanis:

$$EG - F^2 = (r_u r_u)(r_v r_v) - (r_u r_v)^2 = \underline{r}_u^2 \, \underline{r}_v^2 - \underline{r}_u^2 \underline{r}_v^2 \cos^2\alpha =$$

$$= \underline{r}_u^2 \, \underline{r}_v^2 (1 - \cos^2\alpha) = \underline{r}_u^2 \, \underline{r}_v^2 \sin^2\alpha = |\underline{r}_u \times \underline{r}_v|^2 > 0$$

továbbá $\underline{r}_u \underline{r}_v > 0$.

13. Szögmérés

Az $\underline{r}(u,v)$ kétparaméteres vektor-skalár függvény által leírt felületen elhelyezkedő $\underline{r}_1(t) = \underline{r}[u_1(t), v_1(t)]$ és $\underline{r}_2(t) = \underline{r}[u_2(t), v_2(t)]$ felületi görbékről tegyük fel, hogy a t_o pontban metszik egymást, azaz a t_o pontban mindkét görbe a felület $r(u_o,v_o)$ pontján halad át.

$$\underline{r}_1(t_o) = \underline{r}_2(t_o) = \underline{r}(u_o,v_o)$$

Határozzuk meg az $\underline{r}(u_o,v_o)$ pontban e két görbe hajlásszögét, azaz az e pontbeli érintők közötti szöget.

Az érintővektorok:

$$\dot{\underline{r}}_1(t_o) = \underline{r}_u(u_o v_o)\dot{u}_1(t_o) + \underline{r}_v(u_o v_o)\dot{v}_1(t_o)$$

$$\dot{\underline{r}}_2(t_o) = \underline{r}_u(u_o v_o)\dot{u}_2(t_o) + \underline{r}_v(u_o v_o)\dot{v}_2(t_o)$$

Az érintővektorok skaláris szorzata:

$$\dot{\underline{r}}_1\dot{\underline{r}}_2 = (\underline{r}_u\underline{r}_u, \dot{u}_1\dot{u}_2 + \underline{r}_u\underline{r}_v(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + \underline{r}_v\underline{r}_v\ \dot{v}_1\dot{v}_2 =$$

$$= E\ \dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\ \dot{v}_1\dot{v}_2,$$

ahol a skalárszorzatot az (u_o,v_o), ill. t_o helyen képeztük.

A két érintővektor α hajlásszögének koszinusza:

$$\cos\alpha = \frac{\dot{\underline{r}}_1\ \dot{\underline{r}}_2}{|\dot{\underline{r}}_1||\dot{\underline{r}}_2|} =$$

$$= \frac{E\ \dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\ \dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{(E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1^2)(E\dot{u}_2^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2^2}}\ .$$

Az α hajlásszög szinusza:

$$\sin\alpha = \frac{|\dot{\underline{r}}_1 \times \dot{\underline{r}}_2|}{|\dot{\underline{r}}_1|\ |\dot{\underline{r}}_2|} = \frac{|(\underline{r}_u\dot{u}_1 + \underline{r}_v\dot{v}_1)\times(\underline{r}_u\dot{u}_2 + \underline{r}_v\dot{v}_2)}{|\dot{\underline{r}}_1|\ \ |\dot{\underline{r}}_2|}$$

Mivel a vektorális szorzás disztributív, továbbá $\underline{r}_u \times \underline{r}_u = \underline{r}_v \times \underline{r}_v = 0$, továbbá: $(\underline{r}_u \times \underline{r}_v) = -(\underline{r}_v \times \underline{r}_u)$, adódik:

$$\sin\alpha = \frac{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|\,(\dot{u}_1\dot{v}_2 - \dot{v}_1\dot{u}_2}{|\dot{\underline{r}}_1|\,|\dot{\underline{r}}_2|} =$$

$$= \frac{\sqrt{EG - F^2}(\dot{u}_1\dot{v}_2 - \dot{v}_1\dot{u}_2)}{\sqrt{(E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1^2)(E\dot{u}_2^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2^2)}}$$

Ha speciálisan $u_1 = t$, $v_1 = 0$, $u_2 = 0$, $v_2 = t$ (a paramétervonalak), akkor

$$\cos\alpha = \frac{F}{EG} = 0\ ,$$ akkor és csak akkor, ha $F = 0$.

14. A másodrendű alapmennyiségek

Legyen a felületet előállító $\underline{r}(u,v)$ függvény kétszer folytonosan differenciálható. Az $\underline{r}_o = \underline{r}(u_o,v_o)$ pontban a felület érintősíkjának egyenlete:

$$(\underline{p} - \underline{r}_o)\underline{n}_o = 0$$

ahol $\underline{n}_o$ a felület normális egységvektora az $\underline{r}(u_o,v_o)$ pontban. Fejtsük az $\underline{r}(u,v)$ függvényt Taylor-sorba a másodrendű tagokig bezárólag:

$$r(u_o + h, v_o + k) = \underline{r}(u_o,v_o) + \underline{r}_u(u_o,v_o)h + \underline{r}_v(u_o,v_o)k +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\underline{r}_{uu}(u_o,v_o)h^2 + 2\underline{r}_{u,v}(u_o,v_o)hk + \underline{r}_{vv}(u_o,v_o)k^2\right] +$$

$$+ a(h,k) = r^*(h,k) + a(h,k),$$

ahol $\dfrac{a(h,k)}{h^2 + k^2} \to 0$, ha $h,k \to 0$.

Elhagyva az $a(h,k)$ maradéktagot, a Taylor-kifejtés $r^*(h,k)$ fő része olyan másodrendű felületet határoz meg, amely átmegy az $\underline{r}_o = \underline{r}(u_o,v_o)$ ponton és e pontban másodrendben közelíti az $\underline{r}(u,v)$ felületet.

Az $\underline{r}^*(h,k)$ másodrendű felületnek az $\underline{r}(u,v)$ felület $\underline{r}_o$ pontbeli érintősíkjától való előjeles távolsága:

$$d = (\underline{r}^* - \underline{r}_o)\underline{n}_o = \frac{1}{2}(\underline{r}_{uu}(u_o,v_o)\underline{n}_o h^2 + 2\underline{r}_{uv}(u_o,v_o)\underline{n}_o hk +$$

$$+ \underline{r}_{vv}(u_o,v_o)\underline{n}_o k^2)$$

Az ebben a kifejezésben szereplő

$$L = \underline{r}_{uu}\,\underline{n}_o, \quad M = \underline{r}_{uv}\,\underline{n}_o, \quad N = \underline{r}_{vv}\,\underline{n}_o$$

mennyiségeket az $\underline{r}_o$ pontbeli második alapmennyiségeknek nevezzük, amelyek bevezetése ugyancsak Gauss nevéhez fűződik. Az $\underline{r}^*(h,k)$ másodrendű felületnek az $\underline{r}_o$ pontbeli érintősíkjától való távolsága tehát olyan kvadratikus alakkal fejezhető ki, amelynek együtthatói az $\underline{r}_o$ pontban számított L, M, N mennyiségek.

Az $\underline{r}_o = \underline{r}(u_o,v_o)$ origójú $r_u(u_o,v_o)$, $r_v(u_o,v_o)$ és n_o alapvektorú ferdeszögű koordináta-rendszerben a felület egyenlete:

$$\zeta = \frac{1}{2}(L\,\xi^2 + 2M\,\xi\,\eta + N\eta^2) \quad \text{(oszkuláló paraboloid).}$$

15. Meusnier-tétel

Tekintsük az $\underline{r}(u,v)$ függvénnyel leírt felületet, amely $\underline{r}(u,v)$ kétparaméteres vektor-skalár függvényről feltesszük, hogy kétszer folytonosan differenciálható. Megmutatjuk, hogy az $\underline{r}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$ felületi görbe $\underline{r}(t_o)$ pontbeli görbületét már a görbe

$$\dot{\underline{r}} = \underline{r}_u\dot{u} + \underline{r}_v\dot{v}$$

érintőjét meghatározó u és v értékekből, valamint a görbe $\underline{f}$ főnormálisa, a felület $\underline{n}_o$ egységnyi normálvektora közötti szögből kiszámíthatjuk.

Vezessük be a görbén paraméterként az ívhosszt az $s = s(t)$, ill. ennek inverze a $t = t(s)$ függvények segítségével:

$$\underline{t} = \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = (\underline{r}_u\dot{u} + \underline{r}_v\dot{v})\frac{dt}{ds}, \tag{15.1}$$

$$\underline{t}' = \underline{r}_{uu}\,\dot{u}^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + 2\underline{r}_{uv}\,\dot{u}\dot{v}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \underline{r}_{vv}\dot{v}^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \alpha\underline{r}_u + \beta\underline{r}_v \tag{15.2}$$

ahol α és β a többi tényező s szerinti deriválásából adódó függvényeket jelölik.

A Frenet-formulák származtatása során láttuk, hogy

$$\underline{t}' = G\underline{f}.$$

Ennek az egyenletnek mindkét oldalát $\underline{n}_o$-lal, a felület normálvektorával szorozva:

$$\underline{t}'\cdot\underline{n}_o = G\underline{f}\cdot\underline{n}_o = (Lu^2 + 2Muv + Nv^2)(\frac{dt}{ds})^2$$

mivel $\underline{n}_o \perp \underline{r}_u$ és $\underline{n}_o \perp \underline{r}_v$.

Ebből a formulából, valamint a

$$(\frac{dt}{ds})^2 = \frac{1}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} \tag{15.3}$$

összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$G\underline{f}\cdot\underline{n}_o = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\,. \tag{15.4}$$

Ennek alapján láthatjuk, hogy $G\underline{f}\,\underline{n}_o$ értéke egy adott pontban csak az érintő irányától függ, mivel az $\dot{\underline{r}} = \underline{r}_u\dot{u} + \underline{r}_v\dot{v}$ érintő irányát $\dot{u}$ és $\dot{v}$ meghatározza. Mivel az $\underline{n}_o$ felületi normális egységvektor ebben a pontban csak a felülettől függ, azért a görbe adott $\underline{r}(t_o)$ pontbeli görbülete csak t_o-tól és $\underline{f}$-től függ. Ha az $\underline{r}(t_o)$ ponton át megegyező érintőjű felületi görbéket tekintünk, akkor ezek görbülete már csak $\underline{f}$-től függ.
Minthogy a görbe adott $\underline{r}(t_o)$ pontjában a simulósík által a felületből kimetszett görbének érintője is, normálisa is azonos a görbe érintőjével, ill. normálisával, ezért a simulósík által kimetszett felületi görbe $\underline{r}(t_o)$ pontbeli görbülete azonos magának az $\underline{r}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$ görbének az $\underline{r}(t_o)$ pontbeli görbületével.

Ez azt jelenti, hogy a felület adott pontján áthaladó, adott érintőjű és főnormálisú görbék közül elegendő, ha egyetlen görbét, - a görbék közös simulósíkja által kimetszett görbét - vizsgálunk, mivel a többi görbének is ugyanaz a görbülete.

A felületi görbe görbületére levezetett (12.1) formulából további összefüggéseket is kiolvashatunk. Az $\underline{f}\cdot\underline{n}_o$ skalárszorzat értéke éppen a két vektor közötti szög koszinusza, mivel a tényezők egységvektorok. Tehát azonos érintőjű felületi görbéket kimetsző síkok közül ahhoz tartozik az

adott pontban minimális görbületű görbe, amely a $\underline{t}$ vektoron kívül $\underline{n}_o$ -t is tartalmazza; ez a sík az érintősíkra merőleges sík. Ezt a síkot normálsíknak, a síkmetszetet normálmetszetnek, a normálmetszet görbületét normálgörbületnek nevezzük. A többi metszetet ferdemetszetnek hívjuk.
Az adott érintőjű síkmetszetek közül a normálmetszet a legkisebb görbületű az adott pontban. A normálgörbületnek előjelet is adunk: az előjel pozitív, ha a görbe f főnormális egységvektora a felület $\underline{n}_o$ normális egységvektorával megegyező irányú, negatív, ha azzal ellentétes irányú.
Ezt az $\underline{f}\cdot\underline{n}_o$ skalárszorzat mutatja, amely az első esetben +1, a másodikban -1. Így az előjellel ellátott normálgörbület:

$$G_n = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} \qquad (15.5)$$

Ha ívhossz paramétert alkalmazunk, akkor az $Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 1$ összefüggés következtében

$$G_n = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2. \qquad (15.6)$$

Az előjeles normálgörbület többet mond a felület görbületi viszonyairól, mint az előjel nélküli.

A ferde metszetek görbülete és a normálgörbület közötti összefüggés:

$$G = \frac{G_n}{\underline{f}\cdot\underline{n}_o} = \frac{G_n}{\cos\alpha} \qquad (15.7)$$

ahol α az $\underline{f}$ és $\underline{n}_o$ vektorok hajlásszöge.

Ha ϱ_n a normálmetszet görbületi sugara, ϱ pedig a ferdemetszeté, akkor feltéve, hogy G_n nem zérus, az előbbi összefüggés a

$$\varrho = \varrho_n|\cos\alpha| = \varrho_n \cos\beta \qquad (15.8)$$

ahol β a felületi normális egyenese és főnormális vektor egyenese közötti hegyesszög.
Ezzel bebizonyítottuk Meusnier-tételét, amely a következő módon fogalmazható meg:

15.1 Tétel:
A felületet előállító $\underline{r}(u,v)$ függvény legyen kétszer folytonosan differenciálható és legyen ez igaz a felület P_o pontján áthaladó $\underline{r}(t)$ paraméterezésű felületi görbére is. E felületi görbe P_o pontbeli G görbülete, ill. ϱ görbületi sugara, valamint a felületi görbe érintőirányához tar-

tozó normálmetszet G_n görbülete, ill. ϱ_n görbületi sugara közötti összefüggés

$$G = \frac{G_n}{\cos\alpha}, \qquad \text{ill.} \qquad \varrho = \varrho_n \cos\beta$$

alakban írható, ahol α a felület P_o pontjában az $\underline{n}_o$ felületi normális egységvektor és az $\underline{f}$ főnormális vektor közötti szög, β pedig a P_o pontbeli felületi normális egyenes és felületi görbe főnormális egyenese által bezárt hegyesszög.

16. Főnormálgörbületek, a Gauss-féle görbület és az összeg-görbület

A Meusnier-tétel alapján a normálmetszet görbületét ismerve kiszámíthatjuk az összes olyan felületi görbe görbületét, amelynek érintője az adott pontban a normálmetszet síkjában fekszik; ehhez csak a görbe főnormálisának a felületi normálissal bezárt szögét kell ismerni. Adott P felületi ponton áthaladó felületi görbék érintőinek irányától függően különböző G_n normálgörbületeket kapunk. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a normálgörbület az érintőiránnyal!

A (12.2) összefüggés mutatja, hogy G_n az $\dot{u}$ és $\dot{v}$ racionális függvénye. Mint láttuk (9. pont) a (12.2) összefüggés nevezője pozitív definit kvadratikus alak, tehát G_n az $\dot{u} = \dot{v} = 0$ pont kivételével az $\dot{u}$ és $\dot{v}$ változók folytonos függvénye. Határozzuk meg G_n szélső értékeit! Mivel G_n $\dot{u}$ és $\dot{v}$ változók homogén függvénye, vagyis értéke csak $\dot{u}$ és $\dot{v}$ arányától függ, következik, hogy G_n az egységkörön felveszi minden értékét, s mivel e körvonalon folytonos is, ezért létezik mind a maximuma, mind a minimuma. Jelölje G_1, ill. G_2 a maximumot, ill. minimumot. Ekkor a

$$G_n - G_i = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} - G_i =$$

$$= \frac{(L - G_iE)\dot{u}^2 + 2(M - G_iF)\dot{u}\dot{v} + (N - G_iG)\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} \qquad (16.1)$$

$(i = 1,2)$

függvényekre igaz, hogy $G_n - G_1 \leqq 0$, ill. $G_n - G_2 \geqq 0$.

Minthogy van olyan $(\dot{u}_i,\dot{v}_i) \neq (0,0)$ irány, amelyre $G_n - G_i = 0$ (a maximum, ill. minimum irányához tartozó $(\dot{u}_i,\dot{v}_i)$ értékpárra), ezért a $G_n - G_i$ függvény szemidefinit. Mivel a nevező pozitív definit, ez csak akkor lehetséges, ha a

$$(L - G_iE)\dot{u}^2 + (M - G_iF)\dot{u}\dot{v} + (N - G_iG)\dot{v}^2$$

kvadratikus alak maga is szemidefinit.
Ez akkor és csak akkor teljesül, ha a kvadratikus alak diszkriminánsa zérus, vagyis ha

$$\begin{vmatrix} L - G_iE & M - G_iF \\ M - G_iF & N - G_iG \end{vmatrix} = 0 \qquad (16.2)$$

A (16.2) összefüggés G_i-re nézve egy másodfokú egyenlet, amelynek gyökei a szélső értékeket szolgáltatják.
Ha $G_1 = G_2$, akkor a P_o ponthoz hozzárendeljük a G_1-nek és a G_2-nek megfelelő irányokat. Ezek az ún. főgörbületi irányok (röviden főirányok). A főirányokat a következő meggondolás alapján határozzuk meg. Ha $(u_i,v_i) \neq (0,0)$ jelöli ki a G_i-hez tartozó főirányt $(i = 1,2)$, akkor az (u_i,v_i) helyen az

$$(L - G_iE)\dot{u}^2 + 2(M - G_iF)\dot{u}\dot{v} + (N - G_iG)\dot{v}^2$$

szemidefinit kvadratikus alaknak szélső értéke van, tehát ott az $\dot{u}$, ill. $\dot{v}$ szerinti parciális deriváltak zérusok. A deriválás után kapott

$$\begin{aligned} (L - G_iE)\dot{u}_i + (M - G_iF)\dot{v}_i &= 0 \\ (M - G_iF)\dot{u}_i + (N - G_iG)\dot{v}_i &= 0 \end{aligned} \qquad (16.3)$$

homogén egyenletrendszerből $(\dot{u}_i,\dot{v}_i)$ meghatározható.

Mivel az egyenletrendszer determinánsa zérus, létezik nemtriviális megoldás.

A (16.2) determinánst kifejezve:

$$\begin{vmatrix} L - G_iE & M - G_iF \\ M - G_iF & N - G_iG \end{vmatrix} = (EG - F^2)G_i^2 + (2MF - LG - NE)G_i + LN - M^2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti jól ismert összefüggések alapján a két gyök szorzatára, ill. összegére a következő kifejezések adódnak:

$$G_1 \cdot G_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = G_k \tag{16.4}$$

$$G_1 + G_2 = \frac{EN + GL - 2FM}{EG + F^2} = G_h \tag{16.5}$$

Az ezekben szereplő mennyiségek: G_k a Gauss-féle görbület, vagy szorzatgörbület, G_h pedig az összeggörbület.

Ha $G_1 = G_2$, akkor a maximum és a minimum egyenlő, tehát az adott pontban minden normálgörbület egyenlő, így minden irány főirány is. Az ilyen pontokat a felület gömbi pontjainak nevezzük, mert a gömb minden pontja ilyen tulajdonságú.

A gömbi pontokban

$$G_n = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} = c$$

állandó, vagyis

$$L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2 = c(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2).$$

Innen

$$(L - cE)\dot{u}^2 + 2(M - cF)\dot{u}\dot{v} + (N - cG)\dot{v}^2 = 0$$

minden $(\dot{u},\dot{v})$ párra ($\dot{u},\dot{v}$ egyidejűleg zérus). Ez csak úgy lehetséges, ha

$$L = cE, \quad M = cF, \quad N = cG.$$

A gömbi pontokban tehát az első és második alapmennyiségek arányosak. Ez fordítva is igaz, mert ha az első és második alapmennyiségek arányosak, akkor a két alapforma hányadosa állandó.

Az olyan gömbi pontokat, ahol $c = 0$, azaz $G_n = G_1 = G_2 = 0$, a felület síkpontjainak vagy planáris pontjainak nevezzük, ugyanis a sík pontjai mind ilyenek. E pontokat az jellemzi, hogy ott $L = M = N = 0$.

Megmutatjuk, hogy ha $G_1 \neq G_2$, akkor a két főirány merőleges egymásra. (A $G_1 = G_2$ esetben minden irány főirány, tehát tetszőlegesen kijelölhető két egymásra merőleges főirány).

Ehhez azt kell bizonyítanunk, hogy ha

$\underline{r}_u\dot{u}_1 + \underline{r}_v\dot{v}_1$ és $\underline{r}_u\dot{u} + \underline{r}_v\dot{v}$ a két főirányhoz tartozó érintővektorok, akkor ezek merőlegesen egymásra, azaz

$$(\underline{r}_u\dot{u}_1 + \underline{r}_v\dot{v}_1)(\underline{r}_u\dot{u}_2 + \underline{r}_v\dot{v}_2) =$$

$$= E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2 = 0. \qquad (16.6)$$

Ennek belátásához a (16.3) egyenletrendszert $i = 1,2,$-re felírva:

$$(L - G_1E)\dot{u}_1 + (M - G_1F)\dot{v}_1 = 0, \quad (L - G_2E)\dot{u}_2 +$$

$$+ (M - G_2F)\dot{v}_2 = 0$$

$$(M - G_1F)\dot{u}_1 + (N - G_1G)\dot{v}_1 = 0,$$

$$(M - G_2F)\dot{u}_2 + (N - G_2G)\dot{v}_2 = 0$$

kiolvasható a következő átalakítás jogossága: (16.6) jobb oldalát G_1-gyel szorozva:

$$G_1[E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2] =$$

$$= G_1[(E\dot{u}_1 + F\dot{v}_1)\dot{u}_2 + (F\dot{u}_1 + G\dot{v}_1)\dot{v}_2] =$$

$$= (L\dot{u}_1 + M\dot{v}_1)\dot{u}_2 + (M\dot{u}_1 + N\dot{v}_1)\dot{v}_2 =$$

$$= (L\dot{u}_2 + M\dot{v}_2)\dot{u}_1 + (M\dot{u}_2 + N\dot{v}_2)\dot{v}_1 =$$

$$= G_2[(E\dot{u}_2 + F\dot{v}_2)\dot{u}_1 + (F\dot{u}_2 + G\dot{v}_2)v_1] =$$

$$= G_2[E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2].$$

Ez utóbbi egyenlőség első és utolsó sorát összehasonlítva, mivel $G_1 \neq G_2$, az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha

$$E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2 = 0 \qquad (16.7)$$

amit bizonyítani akartunk.

17. Euler-tétele

A felület egy adott pontján átmenő felületi görbék görbületének meghatározásához további nagy segítséget jelent Euler-tétele. E tétel szerint egyszerű összefüggés áll fenn a főnormál-görbületek és valamely más érintőirányhoz tartozó normálgörbület között. Az összefüggés megadásához új paramétervonalakat vezetünk, amelyek áthaladnak az adott ponton és érintőik éppen a főgörbületi irányokba mutatnak. Mivel a főgörbületi irányok merőlegesek egymásra, a bevezetendő új paramétervonalak érintői a ponthoz tartozó érintősíkon egy derékszögű koordináta-rendszert határoznak meg. Ebben a koordináta-rendszerben tetszőleges egységvektor koordinátái éppen az iránycoszinuszaival lesznek egyenlők.
Az $r(u,v)$ alakban megadott felület P pontjában legyenek a főnormálgörbületek G_1, ill. G_2 és a főgörbületi irányokba mutató vektorok legyenek:

$$\underline{t}_1 = \underline{r}_u \cdot \dot{u}_1 + \underline{r}_v \cdot \dot{v}_1 \quad \text{ill.}$$

$$\underline{t}_2 = \underline{r}_u \cdot \dot{u}_2 + \underline{r}_v \cdot \dot{v}_2$$

Keressünk most olyan $u = u(\xi,\eta)$, $v = v(\xi,\eta)$ megengedett paramétertranszformációt, hogy az

$$\underline{r}[u(\xi,\eta),\ v(\xi,\eta)] = \underline{r}^*(\xi,\eta)$$

paraméteres előállításban a ξ, ill. η paramétervonalak

$$\underline{r}^*_\xi = \underline{r}_u\, u_\xi + \underline{r}_v\, v_\xi \quad \text{ill.}$$

$$\underline{r}^*_\eta = \underline{r}_u\, u_\eta + \underline{r}_v\, v_\eta \tag{17.1}$$

érintővektorai egyirányúak legyenek a t_1, ill. t_2 vektorokkal. Ez a következmény nyilván akkor teljesül, ha

$$u_\xi = \lambda \dot{u}_1, \quad v_\xi = \lambda \dot{v}_1; \quad u_\eta = \mu \dot{u}_2, \quad v_\eta = \mu \dot{v}_2 \tag{17.2}$$

ahol λ és μ tetszőleges állandók.
Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az

$$u(\xi,\eta) = \lambda \dot{u}_1 \xi + \mu \dot{u}_2 \eta; \tag{17.3}$$

$$v(\xi,\eta) = \lambda \dot{v}_1 \xi + \mu \dot{v}_2 \eta$$

paramétertranszformáció esetében a (16.2) összefüggések teljesülnek.

Ha a (16.3) transzformációban a λ, ill. μ állandók értékét olyan λ^*, ill. μ^* számoknak választjuk, hogy

$$\lambda^* = \frac{1}{E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1^2}; \qquad (17.4)$$

$$\mu^* = \frac{1}{E\dot{u}_2^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2^2}$$

legyen, akkor a (16.1) összefüggésben szereplő $\underline{r}^*_\xi$, ill. r^*_η vektorok egységvektorok lesznek. (Lásd a (14.1) és (14.3) formulákat!)
(Az E, F és G mennyiségeket a P pontban számítjuk.)
Az

$$r^*(\xi,\eta) = \underline{r}[\lambda^*\dot{u}_1\xi + \mu^*\dot{u}_2\eta\,;\ \lambda^*\dot{v}_1\xi + \mu^*\dot{v}_2\eta] \qquad (17.5)$$

transzformáció tehát teljesíti a kívánt feltételeket, ugyanis a P pontban E, F és G új értéke: E = 1, F = 0, G = 1 lesz, mivel $E = |\underline{r}^*_\xi| = G = |r^*_\eta| = 1$ és $F = \underline{r}^*_\xi \cdot \underline{r}^*_\eta = 0$. Minthogy a görbület csak a görbe geometriai tulajdonságaitól függ, azaz megengedett paraméter-transzformáció-val nem változik (a görbét is csak átparamétereztük), ezért a görbület az $\underline{r}^*(\xi,\eta)$ függvényből ugyanúgy kiszámítható, mint az $\underline{r}(u,v)$ függvényből. A normálgörbületek előjele sem változik, mert a megadott paraméter-transzformáció irányítás-tartó.

Megmutatjuk, hogy az új (16.4) paraméteres előállításban a második alapmennyiségek értéke: $L = G_1$, $M = 0$, $N = G_2$. Ehhez először kiszámítjuk az $\underline{r}^*_{\xi\eta}$ második vegyes parciális derivált értékét.

$$\underline{r}^*_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}(\underline{r}_u\cdot u_\xi + \underline{r}_v\cdot v_\xi) = \frac{\partial}{\partial\eta}(\underline{r}_u\lambda^*\dot{u}_1 + \underline{r}_v\lambda\dot{v}_1) =$$

$$= \lambda^*\left(\frac{\partial r_u}{\partial\eta}\dot{u}_1 + \frac{\partial r_v}{\partial\eta}\dot{v}_1\right) = \qquad (17.6)$$

$$= \lambda^*[(r_{uu}u^*\dot{u}_2 + \underline{r}_{uv}u^*v_2)u_1 + (\underline{r}_{vu}u^*\dot{u}_2 + r_{vv}u^*\dot{v}_2)\dot{v}_1] =$$

$$= \lambda^*u^*[\underline{r}_{uu}\dot{u}_1\dot{u}_2 + \underline{r}_{uv}(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + \underline{r}_{vv}\dot{v}_1\dot{v}_2]$$

A paraméter-transzformáció során az $\underline{n}_o$ felületi normális egységvektor nem változott meg. Szorozzuk meg a (16.6) összefüggés mindkét oldalát skalárisan az $\underline{n}_o$ felületi normális egységvektorral, ekkor a következő összefüggést kapjuk

$$M^* = \underline{r}^*_{\xi\eta} \cdot \underline{n}_o = \lambda^* u^* [\underline{r}_{uu} \underline{n}_o \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \underline{r}_{uv} \underline{n}_o (\dot{u}_1 \dot{v}_2 + \dot{u}_2 \dot{v}_1) +$$
$$+ \underline{r}_{vv} \underline{n}_o \dot{v}_1 \dot{v}_2] = [L\dot{u}_1 \dot{u}_2 + M(\dot{u}_1 \dot{v}_2 + \dot{u}_2 \dot{v}_1) + N\dot{v}_1 \dot{v}_2] \quad (17.7)$$

A főgörbületi irányok merőlegességének bizonyításakor láttuk, hogy

$$L\dot{u}_1 \dot{u}_2 + M(\dot{u}_1 \dot{v}_2 + \dot{u}_2 \dot{v}_1) + N\dot{v}_1 \dot{v}_2 = 0$$

vagyis $M^* = 0$. (Lásd: 15.7 formula!)

Az E^*, F^*, G^* és M^* alapmennyiségekre kapott értékek ismeretében a P ponton átmenő $r^*[\xi(t), \eta(t)]$ normálmetszet görbületét a

$$G_n = \frac{L^* \dot{\xi}^2 + N^* \dot{\eta}^2}{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} \quad (17.8)$$

formulával írhatjuk fel. A P pontban átmenő ξ-paramétervonal P pontbeli érintővektorának koordinátái: $\dot{\xi} = 1$, $\dot{\eta} = 0$, tehát ilyen irányú normálmetszet görbülete, ami esetünkben egyik főgörbület: $G_1 = L^*$.

A P ponton átmenő η-paramétervonal érintővektorának koordinátái: $\dot{\xi} = 0$, $\dot{\eta} = 1$, tehát $G_2 = N^*$.

Ezek felhasználásával az $\underline{r}_\xi \dot{\xi} + r_\eta \dot{\eta}$ általános irányban vett normálmetszet görbülete:

$$G_n = G_1 \frac{\dot{\xi}^2}{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} + G_2 \frac{\dot{\eta}^2}{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} . \quad (17.9)$$

A paraméter-transzformáció célszerű megválasztása következtében az $\underline{r}^*_\xi$ és $\underline{r}^*_\eta$ egységvektorok a főgörbületi irányokba mutatnak, tehát merőlegesek, aminek következtében

$$\frac{\dot{\xi}^2}{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = \cos^2 \vartheta, \quad \frac{\dot{\eta}^2}{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = \sin^2 \vartheta$$

ahol ϑ az $\underline{r}_\xi \dot{\xi} + \underline{r}_\eta \dot{\eta}$ érintővektor és az $\underline{r}_\xi$ főgörbületi irányú érintővektor közötti szög. Ezzel a következő eredményt kaptuk:

<u>Tétel:</u>
(Euler-tétele). Tetszőleges felületi pontban bármely normálmetszet G_n görbülete kifejezhető a G_1 és G_2 főnormális görbületekkel

$$G_n = G_1 \cos^2\vartheta + G_2 \sin^2\vartheta$$

alakban, ahol ϑ a görbeérintő és a G_1-nek megfelelő főgörbületi irány közötti szög.

Meusnier-tételére és Euler-tételére támaszkodva a felület adott P pontján áthaladó tetszőleges felületi görbe görbületét kiszámíthatjuk, ha tudjuk a görbe simulósíkjának és a görbe érintőjén áthaladó normálsíknak a hajlásszögét, továbbá a görbeérintő és az egyik főgörbületi irány közötti szöget.

18. Felületdarab felszínének kiszámítása

18.1 Tétel:
Valamely felület T tartományának a felszínét az

$$F = \iint_{(T)} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

képlettel számíthatjuk ki.

Bizonyítás:
Először értelmeznünk kell az $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$ alakban előállított felület valamely darabjának a felszínét. Legyen a szóban forgó felületdarab a paramétersík T tartományának a képe. Fedjük le ezt a tartományt az

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_m$$

$$v_1 < v_2 < \ldots < v_n$$

téglalap ráccsal. A téglalap oldalai

$$u_{i+1} - u_i = \Delta u_i \qquad \text{és} \qquad v_{k+1} - v_k = \Delta v_k.$$

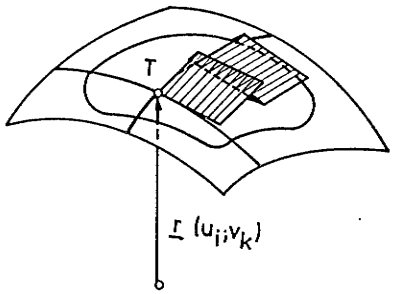
A tartományt beborító paralelogrammák közül mindazokat figyelembe vesszük, amelyeknek a tartománnyal még van közös pontjuk.

Minden négyszög bal alsó csúcsához megkeressük a megfelelő felületi pontot és ott meghatározzuk az

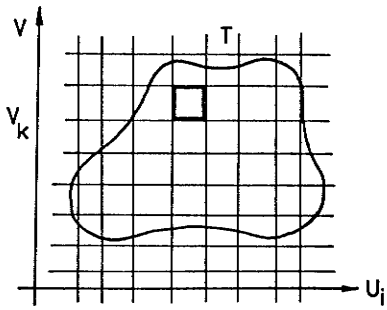
$$\underline{r}_u(u_i,v_k)\Delta u_i \qquad \text{és} \qquad \underline{r}_v(u_i,v_k)\Delta v_k$$

vektorokat. E két vektor olyan paralelogrammát határoz meg, amely a felületet az

$$\underline{r}(u_i,v_k)$$



18.1 ábra



18.2 ábra

pontban érinti. Így a felület T darabja felett (a paramétersíkban is a felületen ugyanazt a jelölést használjuk), annak felbontása helyett egy paralelogramma-rendszert értelmezünk. Ezek mint egy pikkelyrendszer borítják be a felületet. Kézenfekvő az a gondolat, hogy ilyen pikkelyrendszerek pikkelyterület-összegeinek határértékeként értelmezzük a felület felszínét, ha a rácsrendszer minden határon túl finomodik, azaz

$$\max \Delta u_i \to 0, \qquad \max \Delta v_k \to 0.$$

A pikkelyrendszert alkotó paralelogrammák területeinek összege:

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}} \left| \underline{r}_u(u_i,v_k) \times \underline{r}_v(u_i,v_k) \right| \Delta u_i \, \Delta v_k .$$

Finomítsuk most a felosztást. Ekkor a kettős összeg határértéke kettős integrál lesz, tehát

$$F = \iint_{(T)} |\underline{r}_u \times \underline{r}_v| du\, dv = \iint_{(T)} \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

Megjegyzés:
A $z = f(x,y)$ függvénnyel adott felület felszíne az

$$F = \iint_{(T)} \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + 1}\, dxdy$$

képlettel számolható.

Példa:
18.1 Kiszámíthatjuk a gömbfelület felszínét:

$$\underline{r}(u,v) = a \cos u \sin v\underline{i} + a \sin u \sin v\underline{j} + a \cos v\underline{k}$$

ahol: $0 \leq u \leq 2\pi$; $0 \leq v \leq \pi$.

$$\underline{r}_u = -a \sin u \sin v\underline{i} + a \cos u \sin v\underline{j},$$

$$\underline{r}_v = a \cos u \cos v\underline{i} + a \sin u \cos \underline{j} - a \sin v\underline{k},$$

$$E = r_u^2 = a^2 \sin^2 v,$$

$$F = r_u r_v = 0,$$

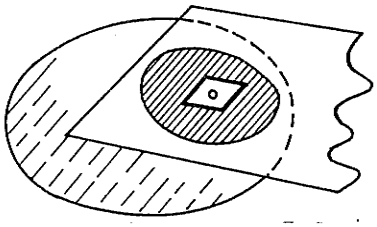
$$G = r_v^2 = a^2$$

$$F = \int_{v=0}^{\pi} \int_{u=0}^{2\pi} a^2\sqrt{\sin^2 v}\, dudv = 2\pi a^2 \int_{v=0}^{\pi} \sin v\, dv = 4\pi a^2.$$

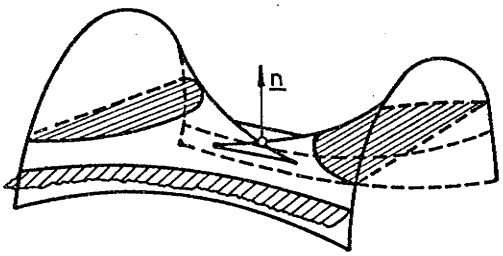
19. A felületi pontok osztályozása

A felületi pontok osztályozásánál arról van szó, hogy a felület menetét valamely pontja környezetében vizsgáljuk meg. Látni fogjuk, hogy a felületnek egy pont környezetében való viselkedése három ismert felület viselkedésére vezethető vissza. Ez a három felület az ellipszoid, a hiperbolikus paraboloid és a hengerfelület. Tekintsük az ellipszoid tetszőleges pontját és abban a felület érintősíkját. Ha a felületet az érintősíkkal párhuzamos síkkal metszük, akkor ellipszis metszetet kapunk (19.1 ábra).

Azt mondjuk, hogy az ellipszoid pontjai elliptikus pontok. A hiperbolikus paraboloid (nyeregfelület) esetén az érintősíkkal párhuzamos sík hiperbolát metsz ki (19.2 ábra).

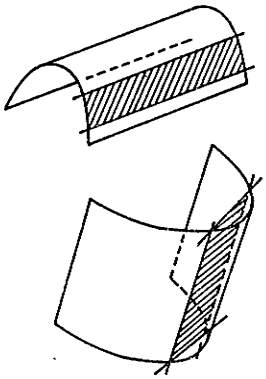


19.1 ábra



19.2 ábra

A hiperbolikus paraboloid pontjait hiperbolikus pontoknak nevezzük. Ha a felület hengerfelület, akkor minden pontja ún. parabolikus pont. Ilyenkor az érintősíkkal párhuzamos sík párhuzamos egyenespárt metsz ki a felületből (19.3 ábra).



19.3 ábra

19.1 <u>Definíció:</u>
Ha a felületet a P_o pontbeli érintősíkkal párhuzamos, tőle $\pm \varepsilon$ távolságban haladó síkkal elmetsszük, a metszetet másodrendű görbével közelítjük, azt vetítjük az érintősíkra majd a vetületet a P_o pontból

$\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}$ -
szorosára nagyítjuk, akkor $\varepsilon \to 0$ határátmenet után a Dupin-féle indikatrixhoz jutunk.

19.1 Tétel:
A felület $\underline{r}(u_o, v_o)$ pontjához tartozó Dupin-féle indikatrix egyenlete

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = \pm 1,$$

ahol:

$$L = \underline{r}_{uu}\underline{n}_o,$$

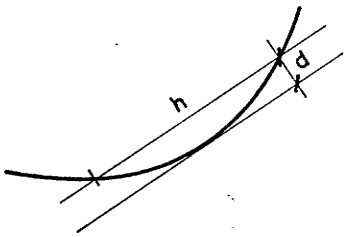
$$M = \underline{r}_{uv}\underline{n}_o,$$

$$N = \underline{r}_{vv}\underline{n}_o,$$

az ún. Gauss-féle másodrendű főmennyiségek, $\underline{n}_o$ az $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ irányba mutató egységvektor és ezek az értékek az $\underline{r}(u_o, v_o)$ pontban számítandók.

Bizonyítás:
Először bizonyos nagyságrendi kérdések tisztázása céljából tekintsünk egy olyan $y = f(x)$ görbét, amely a koordináta-rendszer kezdőpontjában az x tengelyt érinti. Ha a függvényt MacLaurin-sorba fejtjük a másodfokú tagig, akkor az

$$f(\varepsilon) \approx \frac{1}{2} f''(0)\varepsilon^2$$



19.4 ábra

közelítés érvényes $[f(0) = f'(0) = 0]$. Fel fogjuk használni, hogy amennyiben a görbét az érintővel párhuzamos egyenessel metsszük, akkor a metszetnek az érintőtől mért d távolságára és $h(d)$ hosszára a

$$\lim_{d \to 0} \frac{h}{\sqrt{d}} \quad \text{határérték létezik.}$$

Tekintsük most az $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$ felületet. A felület $\underline{r}_o = \underline{r}(v_o,u_o)$ pontjához tartozó felületi normális egységvektora legyen

$$\underline{n}_o = \left.\frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|}\right|_{u_o,v_o}$$

Ebben a pontban az érintősík egyenlete

$$\underline{n}_o(\underline{R} - \underline{r}_o) = 0.$$

Az érintősíkkal párhuzamos, tőle ε távolságban haladó sík átmegy az $\underline{r}_o + \varepsilon \underline{n}_o$ ponton, tehát egyenlete

$$[\underline{R} - (\underline{r}_o + \varepsilon \underline{n}_o)]\,\underline{n}_o = 0, \qquad \text{vagyis} \qquad (\underline{R} - \underline{r}_o)\underline{n}_o = \varepsilon,$$

ahol: ε lehet pozitív és negatív szám is attól függően, hogy a metsző sík az érintősíknak melyik oldalán van. Ha $\underline{R}$ helyébe az $\underline{r}(u,v)$ vektort helyettesítjük, akkor a sík és a felület metszetének az érintősíkra vetett vetületét kapjuk. A helyettesítés előtt fejtsük Taylor-sorba az $\underline{r}(u,v)$ függvényt.

$$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u_o,v_o) + \underline{r}_u(u_o,v_o)(u - u_o) + \underline{r}_v(u_o,v_o)(v - v_o) + \frac{1}{2}\left[\underline{r}_{uu}(u_o,v_o)(u - u_o)^2 + 2\underline{r}_{uv}(u_o,v_o)(u - u_o)(v - v_o) + \underline{r}_{vv}(u_o,v_o)(v - v_o)^2\right] + \underline{m},$$

ahol az $\underline{m}$ maradéktag harmadrendű kicsiny, azaz

$$\lim_{\substack{u \to u_o \\ v \to v_o}} \frac{\underline{m}}{\left(\sqrt{(u - u_o)^2 + (v - v_o)^2}\right)^3} = c.$$

Ha a sorfejtést a metsző sík egyenletébe helyettesítjük és figyelembe vesszük, hogy $\underline{r}_u\underline{n}_o = \underline{r}_v\underline{n}_o = 0$, a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{2}\left[L(u - u_o)^2 + 2M(u - u_o)(v - v_o) + N(v - v_o)^2\right] + M^* = \varepsilon,$$

ahol: $L = \underline{r}_{uu}\underline{n}_o, \qquad M = \underline{r}_{uv}\underline{n}_o$

és

$N = \underline{r}_{vv}\underline{n}_o, \qquad M^* = \underline{m}\,\underline{n}_o.$

Ha a metszetgörbét másodfokú görbével akarjuk közelíteni, akkor a harmadrendű kicsiny M^* maradéktagot elhanyagoljuk. Ezután osszuk végig az egyenletet ε abszolút értékével, így az

$$L\left(\frac{u-u_o}{\sqrt{2|\varepsilon|}}\right)^2 + 2M\frac{u-u_o}{\sqrt{2|\varepsilon|}}\cdot\frac{v-v_o}{\sqrt{2|\varepsilon|}} + N\left(\frac{v-v_o}{\sqrt{2|\varepsilon|}}\right)^2 = \pm 1$$

egyenletet kapjuk. Ha $\varepsilon \to 0$, akkor a bizonyítás elején tett megjegyzés szerint az

$$\frac{u-u_o}{\sqrt{2|\varepsilon|}} \quad \text{és} \quad \frac{v-v_o}{\sqrt{2|\varepsilon|}}$$

kifejezések határértéke létezik. Vezessünk most be egy új érintősíkbeli koordináta-rendszert. Legyen

$$\frac{u-u_o}{\sqrt{2|\varepsilon|}} = \xi \qquad \frac{v-v_o}{\sqrt{2|\varepsilon|}} = \eta$$

azaz a koordináta-rendszer kezdőpontjának az $\underline{r}(u_o,v_o)$ pontot választottuk és végrehajtottunk egy $\underline{r}_o$ középpontú

$$\frac{1}{\sqrt{2|\varepsilon|}}\text{-szeres}$$

nagyítást. Így ha $\varepsilon \to 0$, a metszet felnagyított vetülete az

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = \pm 1$$

egyenletű alakzathoz tart, amely éppen az $\underline{r}_o$ pontbeli Dupin-féle indikatrix.

19.2 <u>Definíció:</u>
A felület egy pontját elliptikusnak, hiperbolikusnak vagy parabolikusnak nevezzük aszerint, hogy a ponthoz tartozó Dupin-féle indikatrix ellipszis, hiperbola vagy párhuzamos egyenespár.

19.2 <u>Tétel</u>
A felületi pont

elliptikus, ha $LN - M^2 > 0$

hiperbolikus, ha $LN - M^2 < 0$ és

parabolikus, ha $LN - M^2 = 0$.

Bizonyítás:
Írjuk a Duplin-féle indikatrix

$$L\xi + 2M\xi\eta + N\eta^2 = \pm 1$$

egyenletét az

$$L(\xi + \frac{M}{L}\eta)^2 + \frac{LN - M^2}{L}\eta^2 = \pm 1$$

formában, ha $L \neq 0$ és az

$$N\left[(\eta + \frac{M}{N}\eta)^2 - \frac{M^2}{N^2}\xi^2\right] = \pm 1$$

alakban, ha $L = 0$. Ezekből az egyenletekből a tétel állításai kiolvashatók.

Megjegyzés:
Ha a felületet a $z = f(x,y)$ függvénnyel adjuk meg, akkor az

$$\underline{r}(x,y) = x\underline{i} + y\underline{j} + f(x,y)\underline{k}$$

vektorfüggvényre való áttérés után

$$\underline{r}_{xx} = f''_{xx}\,\underline{k}; \quad \underline{r}_{xy} = f''_{xy}\,\underline{k}; \quad r_{yy} = \underline{f}''_{yy}\,\underline{k}$$

adódik.
A 10.1 tételhez fűzött megjegyzésben pedig kiszámítottuk, hogy

$$\underline{n}_o = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}(-f_x'\underline{i} - f_y'\underline{j} + \underline{k}) ,$$

tehát

$$L = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}} f''_{xx} ;$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}} f''_{xy} ;$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}} f''_{yy} ;$$

A felületi pont jellegét tehát az

$$f''_{xx}\, f''_{yy} - f''^2_{xy}$$

kifejezés előjele dönti el. Ha

$$f''_{xx} f''_{yy} - f'^{2}_{xy} > 0$$

akkor a szóban forgó pont elliptikus.

A kétváltozós függvények szélső értékének vizsgálatánál ez volt a lokális szélső érték létezésének elégséges feltétele. Nyilvánvaló, hogy hiperbolikus és parabolikus pontban nem lehet a felületet leíró függvénynek lokális szélső értéke.

II. FEJEZET

Vektoranalízis

1. A skalár-vektorfüggvény, határérték, folytonosság

Az $f(\underline{r})$ skalár-vektor függvény a tér pontjainak $\underline{r}$ helyvektoraihoz, azaz a tér pontjaihoz rendel meghatározott számértékeket, (pl. hőmérséklet, potenciált stb.), ezért skalártérnek is mondjuk. Ha $\underline{r}(x,y)$ síkbeli, ill. $\underline{r}(x,y,z)$ térbeli vektor, akkor $f(\underline{r}) = f(x,y)$, ill. $f(\underline{r}) = f(x,y,z)$ két-, ill. háromváltozós függvénynek tekinthető. $f(\underline{r})$ értelmezési tartománya az $\underline{r}$ helyvektorok végpontjai által meghatározott síkbeli vagy térbeli tartomány.

A skalár-vektor függvény szemléltetéséhez a függő változó egy-egy meghatározott értékéhez tartozó független változó vektorok végpontjai által kijelölt geometriai alakzatokat ábrázoljuk. Kétdimenziós független változó esetén az $f(\underline{r}) = c$ által meghatározott alakzatot szintvonalnak vagy ekvipotenciális vonalnak, háromdimenziós független változó esetén pedig szintfelületnek vagy ekvipotenciális felületnek nevezzük.

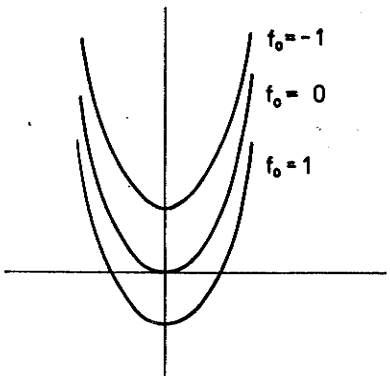
Példa:
1.1 Az

$$f(\underline{r}) = x^2 - y$$

skalármező szintvonalainak egyenlete

$$x^2 - y = c.$$

Különböző c értékek esetén parabolákat kapunk. Az $f(\underline{r})$ függvényt tehát parabolasereggel szemléltetjük.

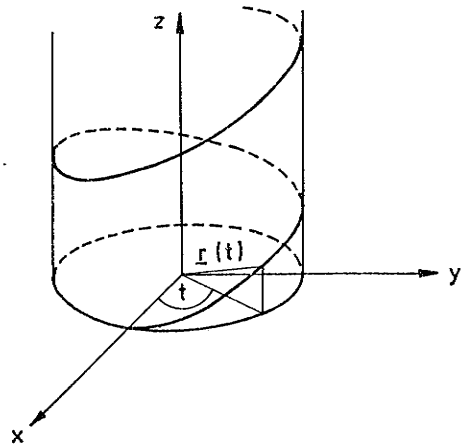


1.1 ábra

1.2 Az

$$f(\underline{r}) = \underline{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

skalármező szintfelületei a $c = x^2 + y^2 + z^2$ $(c > 0)$ egyenletű gömbök.



1.2 ábra

1.1 Definíció:

$$\lim_{\underline{r} \to \underline{r}_o} f(\underline{r}) = f_o$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi számhoz megadható olyan $\delta(\varepsilon)$, hogy ha

$$|\underline{r} - \underline{r}_o| < \delta(\varepsilon) \quad \text{és} \quad \underline{r} \neq \underline{r}_o$$

akkor

$$|f(\underline{r}) - f_o| \; \varepsilon \, .$$

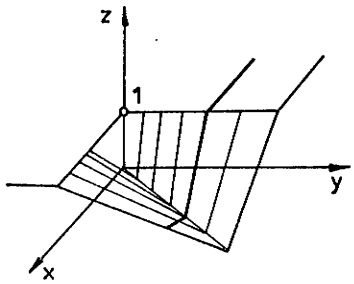
1.2 Definíció

Az $f(\underline{r})$ függvény az $\underline{r}_o$ helyen folytonos, ha van határértéke és az megegyezik a helyettesítési értékkel. Ha $f(\underline{r})$ az $\underline{r}_o$ helyen folytonos, akkor f folytonos függvénye $\underline{r}$ bármelyik koordinátájának. Ugyanis bárhogyan tart az $\underline{r}$ $\underline{r}_o$-hoz, tehát pl. úgy, hogy végpontjai valamely koordinátatengellyel párhuzamos egyenesen mozognak,

$$f(\underline{r}) \to f(r_o).$$

Mivel ebben az esetben az $\underline{r}$ vektornak csak az egyik koordinátája változik, az f folytonos függvénye ennek a koordinátának. Ha viszont f folytonos függvénye $\underline{r}$ valamennyi koordinátájának, akkor f nem feltétlenül folytonos függvénye az $\underline{r}$ vektornak. Erre példa az 1.3 ábrán ábrázolt felülettel megadott $f(\underline{r}) = f(x,y)$ függvény, amely mindenütt folytonos függvénye az x,y koordinátának (hiszen ha csak az x vagy y változik, akkor f az x, illetve az y tengelyre merőleges síkmetszeten változik, ezek pedig folytonos görbék), de az 0(0,0) pontban az $f(\underline{r})$ nem folytonos, amint az 1.3 ábrán látható.

$$f(0,0) = 1!$$



1.3 ábra

2. Gradiens, iránymenti derivált

2.1 Definíció

Az $f(\underline{r})$ az $\underline{r}_0$ helyen differenciálható és deriváltja $\underline{g}$, ha Δf előállítható a következő alakban:

$$\Delta f = \underline{g}\,\Delta\underline{r} + \underline{\varepsilon}(\Delta\underline{r})\,\Delta\underline{r}\ ,$$

ahol: $\underline{\varepsilon}(\Delta\underline{r}) \to \underline{0}$, midőn $\Delta\underline{r} \to \underline{0}$. ($\underline{g}\,\Delta\underline{r}$ és $\underline{\varepsilon}(\Delta\underline{r})\,\Delta\underline{r}$ skaláris szorzatok!).

A deriváltat a skalár függvények mintájára úgy definiáltuk, hogy Δf közelítőleg az $\Delta\underline{r}$ lineáris függvénye. Kiemeljük, hogy az $f(\underline{r})$ skalár-vektor függvény deriváltja vektor. A derivált jelölései:

$$\underline{g} = \frac{df}{d\underline{r}} = \underline{f}' = \text{grad } f.$$

A deriváltat gradiensnek is mondjuk. Az $\underline{f}'$ jelölést csak akkor használjuk, ha nem érthető félre.
Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy a derivált egyértelműen van meghatározva.

2.2 Definíció

Vegyünk fel az $\underline{r}_o$ helyvektorú ponton keresztül egy olyan egyenest, amelynek az egyenlete

$$\underline{r} = \underline{r}_o + \underline{e}t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

($\underline{e}$ egységvektor). Ha a skalármezőt az egyenes pontjaiban tekintjük, akkor az

$$f(\underline{r}(t)) = f^*(t)$$

a t paraméter függvénye.

Az $f^*(t)$ függvény $t = 0$ helyen vett deriváltját az $f(\underline{r})$ függvény $\underline{r}_o$ helyen vett $\underline{e}$ irányú iránymenti deriváltjának nevezzük.

Az iránymenti derivált a skalártérnek egy egyenes mentén történő változását méri.

2.1 Tétel

Ha $f(\underline{r})$ az $\underline{r}_o$ helyen differenciálható, akkor létezik az $\underline{e}$ irányú iránymenti deriváltja és

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}} = \underline{g}\,\underline{e}$$

ahol $\underline{g}$ az $\underline{r}_o$ pontbeli gradiens vektor.

Bizonyítás

Az $f(\underline{r})$ függvény differenciálhatóságából a 2.1 definíció alapján

$$\Delta f = \underline{g}\,\Delta\underline{r} + \underline{\varepsilon}\,\Delta\,\underline{r}$$

írható, ahol $\underline{\varepsilon} \to 0$, ha $\Delta\underline{r} \to 0$.

Ha $\underline{r}$ az $\underline{e}$ irányvektorú egyenes mentén változik, akkor

$$\Delta\underline{r} = \underline{e}\,\Delta t.$$

Ezt helyettesítve:

$$\Delta f = (\underline{g}\,\underline{e})\,\Delta t + (\underline{\varepsilon}\,\underline{e})\,\Delta t\ ,$$

ahol: $\underline{\varepsilon}\,\underline{e} \to 0$, ha $\Delta t \to 0$ (hiszen $\Delta t \to 0$ esetén $\Delta\underline{r} \to 0$, akkor pedig $\underline{\varepsilon} \to 0$, tehát $\underline{\varepsilon}\,\underline{e} \to 0$). Ez pedig éppen azt fejezi ki, hogy

$$\frac{df}{dt} = \underline{g}\,\underline{e}.$$

A 2.1 tétel következménye, hogy az iránymenti derivált a gradiens $\underline{e}$ irányú vetületének az előjeles hossza, tehát akkor maximális, ha $\underline{e}$ egyirányú a $\underline{g}$ gradienssel. A gradiens tehát a skalártér leggyorsabb növekedésének irányába mutat.

2.2 Tétel

Ha az $f(\underline{r})$ függvény differenciálható, akkor a $\underline{g}$ = grad f koordinátái

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \text{ahol:} \quad \underline{r} = \underline{r}(x,y,z).$$

Bizonyítás:

Legyen $\underline{g}$ koordinátái g_1, g_2, g_3.

A parciális derivált definíciója szerint az f függvény megváltozását az egyik koordinátatengely irányában kell tekinteni, pl. e_1 irányába. A 2.1 tétel szerint pedig

$$g_1 = \underline{g}\,\underline{e}_1 = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$g_2 = \underline{g}\,\underline{e}_2 = \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$g_3 = \underline{g}\,\underline{e}_3 = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

A 2.2 tétel szerint az $\underline{r}_0$ helyen vett differenciálhatóságból következik a parciális deriváltak létezése az $\underline{r}_0$ helyen. Megjegyezzük, hogy általában a parciális deriváltak létezéséből nem következik a gradiens létezése. Bevezetjük a

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$$

szimbolikus "nabla" vektort (Hamilton-féle operátor). Ennek segítségével

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{k} = \underline{\nabla} f$$

írható. Ez a jelölés a későbbiekben majd hasznos lesz.

2.3 Tétel

Az $f(\underline{r})$ függvény gradiense merőleges az illető ponton áthaladó szintfelületre.

Bizonyítás:

Tekintsük az $f(\underline{r})$ skalár-vektor függvénynek az $f(x,y,z) = c$ szintfelületét! Legyen

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

a felület valamely görbéje. Ekkor fennáll az

$$f(x(t),\ y(t),\ z(t)) = c$$

azonosság. Ha ezt most t szerint differenciáljuk, akkor az

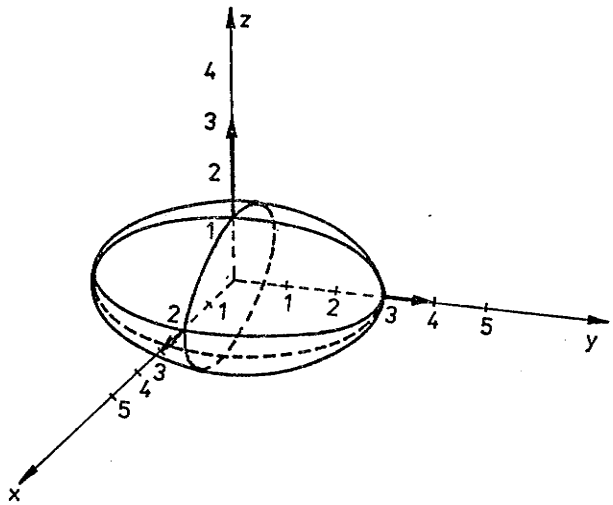
$$f'_x\dot{x} + f'_y\dot{y} + f'_z\dot{z} = \text{grad}\ f.\dot{\underline{r}} = 0$$

azonosságot kapjuk, amely szerint a szintfelület tetszőleges pontjában a gradiens vektor merőleges a ponton áthaladó, tetszőlegesen választott felületi görbe érintőjére, tehát a szintfelületre. Ez a tény összhangban van a 2.1 tétel következményével, mely szerint az f legnagyobb növekedése a gradiens irányába esik.

<u>Példa:</u>
2.1 Legyen

$$f(r) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2$$

$$\text{grad}\ f = \frac{x}{2}\,\underline{i} + \frac{2y}{9}\,\underline{j} + 2z\underline{k}$$



2.1 ábra

Tekintsük az adott skalármező néhány szintfelületét! Ezek egyenlete

$$c = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2$$

$$\text{grad}\ f(2,0,0) = \underline{i}$$

$$\text{grad } f(0,3,0) = \frac{2}{3}\underline{j}$$

$$\text{grad } f(0,0,1) = 2\underline{k}$$

A z tengely irányában a leggyorsabb a skalártér változása, mint a 2.1 ábrán is látható, a (0,0,1) pontban 1 egységnyi úton változik a tér 3 egységnyit, a (0,3,0) pontban pedig 3 egységnyi úton változik ugyanennyit. A c = 1 szintfelületen a (0,0,1) pontban a leghosszabb a gradiens vektor.

3. Vektor-vektorfüggvények

Az alábbiakban olyan függvények tulajdonságait vizsgáljuk, amelyeknek függő változója is, független változója is vektor. Ha a tér minden pontjához valamilyen előírás szerint egy meghatározott vektort rendelünk hozzá, (pl. erőt, sebességet stb.), akkor vektoreloszlást, vagy más szóval vektormezőt értelmeztünk.

Tekintsük a vektormezőt valamely derékszögű koordinátarendszerben. Ha a tér tetszőleges pontjának helyvektora $\underline{r}$ és ehhez a $\underline{v}$ vektort rendeljük, akkor a

$$\underline{v} = v(\underline{r})$$

vektor-vektor függvényt adtuk meg. Ezt a hozzárendelést felírjuk koordinátás alakban is. Legyen

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

ekkor

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = v_1(\underline{r})\underline{i} + v_2(\underline{r})\underline{j} + v_3(\underline{r})\underline{k} =$$

$$= v_1(x,y,z)\underline{i} + v_2(x,y,z)\underline{j} + v_3(x,y,z)\underline{k}.$$

A vektormező szemléltetésére célszerű bevezetni az ún. irányított "erővonal" (vagy más elnevezéssel "áramvonal" fogalmát). Azokat az irányított görbéket nevezzük a $\underline{v} = v(\underline{r})$ vektormező erővonalainak, amelyeknek érintői bármely $\underline{r}$ helyvektorú pontban egyirányúak az illető ponthoz tartozó $\underline{v}$ függvényértékkel. Megállapodás szerint a függő változó abszolút értékét (a "tér" "erősségét") az erővonalak "sűrűségével" jellemezzük: az erővonalakra merőleges egységnyi felületen áthaladó erővonalak számával, más szóval a fluxussal.

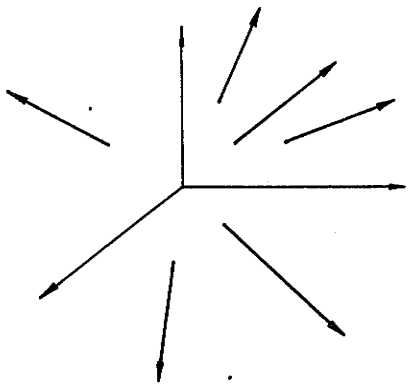
Példa:

3.1 A $\underline{v} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$ függvény koordinátás alakja

$$\underline{v} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\,\underline{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\,\underline{j} +$$

$$+ \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\,\underline{k}\,.$$

A tér erővonalai az origó kezdőpontú félegyenesek.



3.1 ábra

A határérték, folytonosság és differenciálhányados fogalmát értelmezhetjük a vektor-vektor függvények esetében is.

3.1 Definíció:
A $\underline{v}(\underline{r})$ függvénynek az $\underline{r}$ helyen van határértéke és ez $\underline{v}_o$, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta(\varepsilon)$, hogy

$$|\underline{v}(\underline{r}) - \underline{v}_o| < \varepsilon$$

teljesül minden olyan $\underline{r}$ helyre, amelyre

$$0 < |\underline{r} - \underline{r}_o| < \varepsilon\,.$$

3.2 Definíció:
A $\underline{v}(\underline{r})$ függvény az $\underline{r}_o$ pontban folytonos, ha

$$\lim_{\underline{r} \to \underline{r}_o} \underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r}_o).$$

Megjegyzés:
Könnyen belátható, hogy a $\underline{v}(\underline{r}_o)$ vektor-vektor függvénynek az $\underline{r}_o$ pontban pontosan akkor van határértéke, ha a

$$v_i = v_i(\underline{r}) \qquad (i = 1,2,3)$$

skalár-vektor függvénynek mindegyikének van az $\underline{r}_o$ helyen határértéke. A $\underline{v}(\underline{r})$ függvény határértékének koordinátái a v_i koordinátafüggvények határértéke. Ugyanígy a folytonosságra is: a $\underline{v}(\underline{r})$ függvény egy $\underline{r}_o$ helyen pontosan akkor folytonos, ha a $v_i(\underline{r})$ koordinátafüggvények folytonosak ezen a helyen.

A vektor-vektor függvény differenciálhányadosát is a skalár-vektor függvényeknél tanult módon fogjuk definiálni: a $\Delta\underline{v}$ függvény megváltozását lényegében a $\Delta\underline{r}$ homogén lineáris függvényével akarjuk pótolni. Ehhez felelevenítünk néhány fontosabb ismeretet a lineáris algebra tárgyköréből. Homogén lineáris vektor-vektor függvénynek nevezzük az olyan $\underline{v}(\underline{r})$ függvényt, amelyre

$$\underline{v}(\underline{r}_1 + \underline{r}_2) = \underline{v}(\underline{r}_1) + \underline{v}(\underline{r}_2)$$

és

$$\underline{v}(c\underline{r}) = c\underline{v}(\underline{r})$$

(c tetszőleges valós szám) teljesül.

A homogén lineáris vektor-vektor függvényeket

$$\underline{v} = \underline{A}(\underline{r}) \quad \text{vagy} \quad \underline{v} = \underline{A}\,\underline{r}$$

alakban írjuk. Az $\underline{A}$ hozzárendelést mennyiségnek tekintjük és tenzornak mondjuk. Ahhoz, hogy egy tenzort ismerjünk és vele számolhassunk, az

$$\underline{a}_1 = \underline{A}\,\underline{i}, \quad \underline{a}_2 = \underline{A}\,\underline{j} \quad \text{és} \quad \underline{a}_3 = \underline{A}\,\underline{k}$$

vektorokat kell ismernünk. E három vektornak összesen kilenc koordinátája van, így a tenzort kilenc számmal jellemezhetjük. Az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ vektorok koordinátáit egy mátrix oszlopaiba írjuk be, ezt a mátrixot a tenzor mátrixának nevezzük.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A tenzor mátrixát és a tenzort egyaránt $\underline{A}$-val jelöljük. $\underline{A}$ és $\underline{B}$ tenzorok pontosan akkor egyenlők, ha $\underline{A}\,\underline{r} = \underline{B}\,\underline{r}$ minden vektorra teljesül, ekkor $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixa is megegyezik. A $\underline{0}$ tenzorra $\underline{0}\,\underline{r} = \underline{0}$ teljesül tetszőleges $\underline{r}$ esetén, és a mátrixának minden eleme zérus. A továbbiakban a vektorokat oszlopmátrixként fogjuk kezelni. Ahhoz, hogy a derivált definícióját megadjuk, még egy kérdést kell tisztázni, mégpedig azt, hogy egy vektortól függő tenzor mikor tart a zérustenzorhoz.

3.3 Definíció:
Az $\underline{r}$ vektortól függő $\underline{A}$ tenzor az $\underline{r}_0$ helyen akkor tart a $\underline{0}$ tenzorhoz, ha bármely rögzített a vektorra

$$\underline{A}\,\underline{a} \to 0, \qquad \text{ha} \qquad |\underline{r} - \underline{r}_0| \to 0.$$

Megjegyezzük, hogy könnyen belátható az a tény, hogy az A tenzor pontosan akkor tart a $\underline{0}$ tenzorhoz, ha mátrixának minden eleme zérushoz tart.

3.4 Definíció:
A $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény deriváltja az a $\underline{D}$ tenzor, amelyik a

$$\Delta\underline{v} = \underline{D}\Delta\underline{r} + \underline{\mathcal{E}}(\Delta r)\Delta\underline{r} \qquad (\underline{\mathcal{E}}(\Delta\underline{r}) \quad \text{itt tenzor})$$

összefüggést kielégíti, ahol

$$\underline{\mathcal{E}}(\Delta\underline{r}) \to \underline{0}, \quad \text{ha} \quad \Delta\underline{r} \to \underline{0}.$$

A $\underline{D}$ deriválttenzorra szokás a $\frac{d\underline{v}}{d\underline{r}}$ jelölést is használni.
Megjegyezzük, hogy ha az így definiált deriválttenzor létezik, akkor az egyértelműen van meghatározva.

3.1 Tétel
A $\underline{v}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény deriválttenzorának mátrixa

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

ahol $\underline{v} = \underline{v}(v_1, v_2, v_3)$ és $\underline{r} = \underline{r}(x,y,z)$.

Bizonyítás:

Írjuk fel a differenciálhatóság feltételét (3.4 definíció) koordinátás alakban! A $\underline{v}$ vektor koordinátái a $v_i(\underline{r})$ skalár-vektor függvények ($i = 1,2,3$). Ha a koordinátafüggvények differenciálhatóak, azaz $i = 1,2,3$ esetén létezik grad v_i, akkor

$$\Delta\underline{v} = (\text{grad } v_1\Delta\underline{r})\underline{i} + (\text{grad } v_2\Delta\underline{r})\underline{j} + (\text{grad } v_3\Delta\underline{r})\underline{k} +$$

$$+ (\underline{\varepsilon}_1\Delta\underline{r})\underline{i} + (\underline{\varepsilon}_2\Delta\underline{r})\underline{j} + (\underline{\varepsilon}_3\Delta\underline{r})\underline{k}$$

írható, ahol

$$\lim_{\Delta\underline{r}\to 0} \underline{\varepsilon}_1 = \lim_{\Delta\underline{r}\to 0} \underline{\varepsilon}_2 = \lim_{\Delta\underline{r}\to 0} \underline{\varepsilon}_3 = \underline{0}.$$

Használjuk fel most azt, hogy a koordinátafüggvények gradienseit ki tudjuk számítani (lásd a 2.2 tételt) és a mátrixokat a sor-oszlop szorzási szabálya szerint szorozzuk össze. Eszerint a grad v_i vektor a $\underline{\underline{D}}$ mátrix i-edik sorvektora, tehát a $\underline{\underline{D}}$ i-edik sorában áll:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x}\ \frac{\partial v_i}{\partial y}\ \frac{\partial v_i}{\partial z}\ .$$

4. Vektormező görbementi és felületi integrálja

A görbementi integrált egy mechanikai példa kapcsán könnyen értelmezhetjük. Ismeretes ugyanis, hogy ha valamely tömegpont a reá ható $\underline{P}$ erő hatására elmozdul, akkor a végzett munka

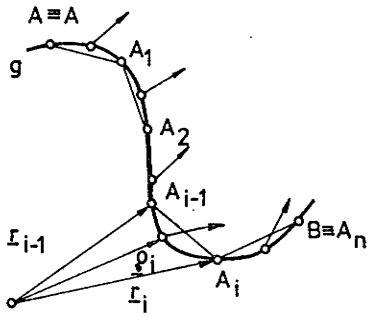
$$L = \underline{P}\cdot\underline{s} = |\underline{P}||\underline{s}|\cos\alpha .$$

Ez a képlet azonban csak akkor érvényes, ha az elmozdulás egyenes szakaszon történik. Abban az általánosabb esetben, amikor az erő hatására a pont görbevonalú pályát ír le, az integrálszámítás eszközeihez kell nyúlnunk.
Tekintsünk ezért olyan erőteret, ahol a tér minden pontjában más és más erővektor hat, és mozogjon valamely egységnyi tömegű pontszerű test az erőtér valamilyen görbéje mentén.

Kérdés: mekkora munkát végez az erőtér, míg a tömegpontot a kijelölt C térgörbe mentén annak A pontjából B pontjába mozgatja? Azért, hogy a munka kiszámítására szolgáló előző képletet alkalmazhassuk, osszuk fel a térgörbe A-tól B-ig terjedő ívét tetszőlegesen felvett osztópontokkal elég

kis ívekre. Az osztópontokhoz tartozó helyzetvektorok a befutás sorrendjében legyenek

$$\underline{r}_o, \underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_i, \ldots, \underline{r}_n.$$



4.1 ábra

Az $\widehat{AB}$ ív menti munkát úgy fogjuk közelítőleg kiszámítani, hogy a törtvonalon végzett munkát határozzuk meg. A törtvonalon végzett munka pedig az egyenes szakaszokon adódó munkák összege lesz. Az

$$\underline{r}_{i-1} \quad \text{és} \quad \underline{r}_i$$

vektorok által meghatározott

$$\overline{A_{i-1}\,A_i}$$

szakasz esetében az elmozdulásvektor az

$$\underline{r}_i - \underline{r}_{i-1} = \Delta \underline{r}_i$$

vektor lesz, míg erővektor gyanánt válasszunk ki tetszőlegesen egyet az erőtérnek az

$$\widehat{A_{i-1}\,A_i}$$

ív pontjához tartozó vektorai közül. Az ív mentén történő elmozdulás helyett a húr mentit véve figyelembe, továbbá változó erővektor helyett egy bizonyos kiválasztott állandó vektorral dolgozva egyrészt a keresett munka közelítését kapjuk, másrészt alkalmazhatjuk a munka eddigi képletét.

Az

$$\overline{A_{i-1}\,A_i}$$

szakaszon végzett munka ezért

$$\Delta L = \underline{P}(\underline{\varrho}_i)\cdot\Delta\underline{r}_i$$

lesz. $\underline{\varrho}_i$ az $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ív valamely tetszőleges pontjához mutató helyzetvektort jelöli. A teljes munka közelítőleg

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{P}(\underline{\varrho}_i)\,\Delta r_i .$$

A beosztás finomításával nyert értékek egyre pontosabban fogják a keresett munkát adni, ezért határátmenetet végezve a görbementi munkára az

$$L = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\Delta r_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(\underline{\varrho}_i)\,\Delta\underline{r}_i = \int_g \underline{P}(\underline{r})d\underline{r}$$

képletet nyerjük.

A mechanikai példából kiindulva, valamely vektormezőben a görbementi integrált általánosan a következőképpen határozzuk meg.

4.1 Definíció:

A $\underline{v}(\underline{r})$ vektormezőnek a C görbére vonatkozó görbementi integrálján az

$$\int_C \underline{v}(\underline{r})d\underline{r}$$

kifejezést értjük.

Hogyan kell ilyen integrálokat kiszámítani? - Ha a C pályagörbét az

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

paraméteres alakban adjuk meg, akkor

$$\dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}(t)\underline{i} + \dot{y}(t)\underline{j} + \dot{z}(t)\underline{k}$$

lesz. Ebből pedig

$$d\underline{r} = \dot{\underline{r}}\,dt.$$

A görbe mentén történő integrálásnál a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormezőnek csak azokra a vektoraira van szükségünk, amelyek a görbe pontjaiban vannak értelmezve, vagyis a

$$\underline{v}(\underline{r}(t))$$

vektorokra. A 4.1 definícióban szereplő integrált ezért

$$\int \underline{v}(\underline{r}(t))\cdot\dot{\underline{r}}(t)dt$$

alakban írhatjuk. Ezzel az integrál kiszámítását közönséges egyváltozós integrál kiszámítására vezettük vissza. Arra kell csak vigyáznunk, hogy az integráljel mögött a $\underline{v}$ és $\dot{\underline{r}}$ vektorok skaláris szorzata áll! Ha tehát a $\underline{v}(\underline{r})$ vektort

$$\underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$$

alakban vesszük fel, akkor az integrál részletes leírása a következő:

$$\int_{t_o}^{t_1} \Big\{ v_1[x(t),\ y(t),\ z(t)]\cdot\dot{x}(t) +$$

$$+ v_2[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,\dot{y}(t) + v_3[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,\dot{z}(t)\Big\}dt$$

A görbementi integrál előjelet vált, ha a görbét a pont ellenkező irányban futja végig. Ebben az esetben ugyanis az előbbi határozott integrál határai felcserélődnek és így annak előjele megváltozik:

$$\int_A^B \underline{v}\ d\underline{r} = -\int_B^A \underline{v}\ d\underline{r}$$

Ha a g_1 görbe A-tól B-ig, a g_2 pedig B-től C-ig halad, akkor

$$\int_{(g_1)} \underline{v}\ d\underline{r} + \int_{(g_2)} \underline{v}\ d\underline{r} = \int_{(g_1+g_2)} \underline{v}\ d\underline{r}\ .$$

Ha g_1 és g_2 görbék mindkét végpontja közös, akkor az

$$\int_{A(g_1)}^{B} \underline{v}\ d\underline{r} + \int_{B(g_2)}^{A} \underline{v}\ d\underline{r}$$

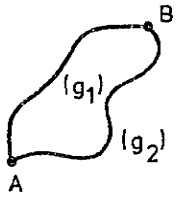
integrált zárt görbe menti integrálnak nevezzük és az

$$\oint_{(g)} \underline{v}\ d\underline{r} \quad \text{vagy} \quad \oint_{1\,(g)} \underline{v}\ d\underline{r}$$

szimbólumok valamelyikével jelöljük. A nyíl iránya a zárt görbe befutási irányára utal. Ha a görbe síkgörbe

$$z(t) \equiv 0$$

és a vektormezőnek nincs z irányú komponense ($v_3 \equiv 0$, síkbeli vektormező), akkor a síkbeli vonalintegrál képletét nyerjük.



4.2 ábra

$$\int_{(g)} \left\{ v_1 [x(t), y(t)] \dot{x}(t) + v_2 [x(t), y(t)] y(t) \right\} dt.$$

A felületi integrál értelmezéséhez hasznos lesz a következő mechanikai példa.

Tekintsünk egy áramlásteret, ahol minden egyes áramló részecske sebességét ismerjük. Ezt úgy érhetjük el, hogy megadjuk az $\underline{r}$ helyzetvektorú pontban tartózkodó részecske $\underline{v}(\underline{r})$ sebességét. Vessük fel ezután a következő problémát: mekkora egy adott felületdarabon az időegység alatt átáramló folyadék mennyisége?

A megadott felületet osszuk fel elég kis felületdarabokra. Ezeket első közelítésben síkbeli tartományoknak tekintjük. Ragadjunk ki egyet és vizsgáljuk a rajta átáramló folyadék mennyiségét. Mint a munkánál tettük, itt is válasszuk ki az elemi felület egy tetszőleges pontját és az ahhoz rendelt sebességvektorral dolgozzunk. Ha a beosztás elég finom, nem lesz az elkövetett hiba túl nagy. Megállapíthatjuk, hogy a felületdarabon az időegység alatt átáramló folyadék egy ferde hengert tölt meg, amelynek magassága

$$|\underline{v}| \cos \alpha$$

alapterülete pedig a kiszemelt felületelem. Az α szög a $\underline{v}$ és $\underline{n}_o$ vektorok által bezárt szöget jelenti ($\underline{n}_o$ a felület egységnyi normálisa). Ennek az elemi hengernek a térfogata így

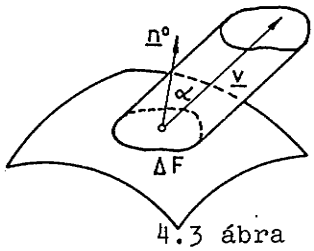
$$\Delta Q = |\underline{v}| \cos \alpha . \Delta F$$

lesz.

Írjuk ezt

$$\Delta Q = \underline{v}\, \underline{n}_o \Delta F$$

alakban, ami nyilván helyes, mert



4.3 ábra

$$\underline{v}\cdot\underline{n}_o = |\underline{v}||\underline{n}_o| \cos\alpha = |\underline{v}| \cos\alpha .$$

Ha a felületet n számú elemi felületdarabra osztottuk fel, akkor az egész felületen átáramló folyadék mennyiségét az egyes felületdarabokon kiszámolt értékek összegével közelíthetjük.

$$Q \approx \sum_i \underline{v}(\underline{\varrho}_i)\cdot\underline{n}_{io}\cdot \Delta F_i$$

Itt $\underline{\varrho}_i$ az i-edik elemi felületdarabnak valamely tetszőleges pontjához mutat, $\underline{n}_{io}$ a felületdarab egységnyi normálisa a $\underline{\varrho}_i$ pontban, ΔF_i a felületdarab felszíne. A ΔF_i tulajdonképpen valós szám és ezzel szabad az $\underline{n}_{io}$ vektort megszorozni. A

$$\underline{F}_i = \Delta F_i \underline{n}_{io}$$

vektort, amelynek iránya és irányítása a felületi normális megfelelő adatával egyezik meg, de hossza a felületdarab mérőszámával egyenlő; irányított felületelemnek nevezzük. Ennek irányítása a feladat természetétől, vagy saját elhatározásunktól függ, ezért minden feladatnál meg kell mondanunk, hogy "felfelé vagy lefelé" irányított felületre akarjuk-e az integrál értékét kiszámítani.
Mert, hogy integrálra jutunk, az világos, hiszen a Q pontos értékének meghatározásához a felület beosztását minden határon túl sűrítenünk kell. Az időegység alatt átáramló folyadék mennyiségét tehát az F felületre képezett

$$Q = \iint_F \underline{v}(\underline{r})\underline{n}\, dF = \iint_F \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{F}$$

integrállal számíthatjuk ki. Általában a következőt mondjuk.

4.2 <u>Definíció:</u>
A $\underline{v}(\underline{r})$ vektoreloszlás esetén az F felület mentén képezett felületi integrált

$$\iint_F \underline{v}\, \underline{n}_o\, dF = \iint_F \underline{v}\, d\underline{F}$$

módon értelmezzük.

Rátérünk a felületi integrál kiszámításának megmutatására. A felületet az

$$\underline{r}(u,v) = x(u,v)\underline{i} + y(u,v)\underline{j} + z(u,v)\underline{k}$$

paraméteres egyenlettel adjuk meg. Az F felületdarab feleljen meg a paramétersík valamely T tartományának. Ekkor - amint azt a felszínszámításból ismerjük - egy F elemi felületdarab felszíne

$$\Delta \underline{F} = (\underline{r}_u \times \underline{r}_v)\Delta u\, \Delta v.$$

A felület egységnyi normálvektora pedig az

$$\underline{n}_o = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|}$$

vektor. A $\Delta \underline{F}$ irányított felületelem ezért

$$\Delta \underline{F} = |\underline{r}_u \times \underline{r}_v|\Delta u\, \Delta v$$

lesz. A $\underline{v}(\underline{r})$ vektoreloszlás vektorai közül csupán azokra van szükségünk, amelyek az F felület mentén helyezkednek el, ezek pedig a

$$\underline{v}(r(u,v))$$

vektorok.

A szükséges kifejezések behelyettesítése után a felületi integrálra a

$$\iint_T \underline{v}(\underline{r}(u,v))\cdot(\underline{r}_u \times \underline{r}_v)du\, dv$$

kettős integrált kapjuk. Mivel az integráljel mögött vegyes szorzat áll, ezért szoktuk még az

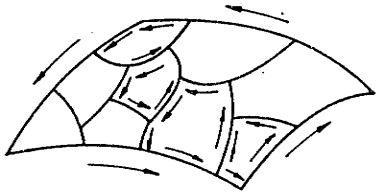
$$\iint_T \underline{v}\, \underline{r}_u\, \underline{r}_v\, dudv$$

alakot is használni.

Szóljunk néhány szót a felületi integrál tulajdonságairól. Az egyik, könnyen belátható tény az, hogy a felületi integrál előjelet vált, ha a normálvektor irányítását megváltoztatjuk.

Kissé gondosabb vizsgálatot igényel a másik tulajdonság. Eszerint, ha F_1 és F_2 felületek egy görbe mentén csatlakoznak, akkor

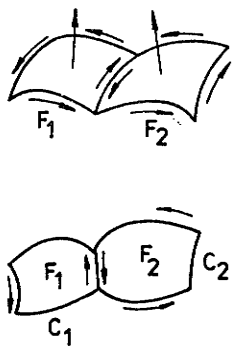
$$\iint_{F_1} \underline{v}\, d\underline{F} + \iint_{F_2} \underline{v}\, d\underline{F} = \iint_{F_1+F_2} \underline{v}\, d\underline{F} .$$



4.4 ábra

Ez alkalommal azonban ügyelnünk kell arra, hogy a két felület egyformán legyen irányítva, mert a felírt összeadási formula csak akkor érvényes.

Hogyan történhet az irányítás? Tekintsük az F_1 felületet határoló C_1 térgörbét és adjunk neki valamilyen irányítást. Ezáltal már a felület bármely felosztását irányítottuk. Ha ugyanis egy felületelemnek van a C_1-gyel közös darabja, akkor erről már öröklődik az irányítás a felületelemre is. Megállapodunk továbbá abban, hogy ha két felületelemnek közös határgörbéje van, akkor az a görbe a két felületelemnél ellentétes irányítást kapjon. Ha a C_1 görbét valamilyen módon irányítottuk, akkor az F_2 felületet határoló C_2 görbét úgy kell tehát irányítanunk, hogy a C_1-gyel közös íve a C_2 irányításakor a C_1-nél levő irányítással ellentétes irányítást kapjon (4.5 ábra).



4.5 ábra

Ha két felületdarab határgörbéje közös, tehát együtt zárt felületet alkotnak, akkor az előző képlet úgy lesz érvényes, ha mindkét felületnél pl. a zárt felületből kifelé mutató normálist választjuk. Zárt felületre történő integrálásnál szokták az

$$\oint \underline{v}\, d\underline{F}$$

jelölést alkalmazni.

5. Vektormező divergenciája

A vektormező divergenciáját egy fizikai probléma kapcsán definiáljuk. Tekintsünk egy inhomogén áramlási teret és ebben egy ΔV térfogatú tartományt, amelyet egy F zárt felület határol. Az adott sebességtérnek a zárt felületre vonatkozó felületi integrálja megadja a ΔV tartományból kiáramló folyadék mennyiségét, amennyiben a felületi normális kifelé mutat. Ha ez a felületi integrál pozitív, akkor a kiáramló folyadék mennyisége nagyobb mint a beáramlóé, akkor azt mondjuk, hogy a ΔV térfogatú tartományban forrás van. Ha viszont befelé több folyadék áramlik, mint kifelé, akkor nyelőről beszélünk. Persze az is előfordulhat, hogy a be- és kiáramló folyadékmennyiség egyenlő. A tér egy tetszőleges pontjában a forrás mértékét (erősségét) úgy jellemezhetjük, hogy az illető pontot ΔV térfogatot határoló zárt felülettel vesszük körül és a tartományból kilépő folyadékmennyiség térfogategységre eső részének, az ún. átlagforrásnak a határértékét vesszük, ha $\Delta V \to 0$.

5.1 <u>Definíció:</u>

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \underline{v}\, d\,\underline{F}}{\Delta V}$$

határértéket, ha létezik, a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező (x_o, y_o, z_o) pontbeli divergenciájának nevezzük (div $\underline{v}$), ahol ΔV az (x_o, y_o, z_o) pontot tartalmazó elemi térfogat és az integrálást a ΔV térfogatot határoló zárt felületen kell elvégezni kifelé mutató felületi normális mellett.

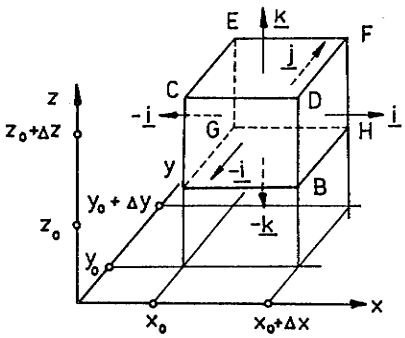
5.1 <u>Tétel</u>

$$\left[\operatorname{div} \underline{v}\right]_{P_o} = \left[\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right]_{P_o}$$

ahol: $\underline{v} = \underline{v}(v_1, v_2, v_3)$, $\underline{r} = \underline{r}(x,y,z)$ és a parciális deriváltakat a szóban forgó pontban kell tekinteni.

Bizonyítás:

Legyen a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező egy inhomogén áramlási tér sebességmezeje. A térben vegyünk fel a koordinátasíkokkal párhuzamos oldallapú, Δx, Δy, Δz oldalélű hasábot. Erre a speciálisan választott tartományra számítjuk ki a felületi integrált.



5.1 ábra

A hasáb teljes felületén előjelesen átáramló folyadékot az egyes lapokon átáramló folyadékmennyiségek algebrai összegezésével kapjuk. A teljes felületre képezett felületi integrált ugyanis az oldallapokon vett integrálok összeadásával nyerjük. E célból állapodjunk meg abban, hogy az integrálást kifelé irányított felületre fogjuk elvégezni. A hasáb egyik csúcspontjának koordinátái legyenek általánosan az x_o, y_o, z_o mennyiségek, a többi csúcspontot az egyes koordináták Δx, Δy, Δz -vel történő megnövekedésével kapjuk. A számítás során az 5.1 ábra jelöléseit fogjuk alkalmazni. Az integrálásokat úgy fogjuk elvégezni, hogy egy lapra történt integrálás után mindig a vele párhuzamos lapra megyünk át. Kezdjük az $[y,z]$ koordinátasíkkal párhuzamos ACEG lappal. Az ACEG sík minden pontjának első koordinátája x_o. A második, illetve harmadik koordinátát úgy kaphatjuk meg, hogy az y_o-hoz valamilyen u, a z_o-hoz valamely v számot hozzáadunk. Az u azonban nem lehet nagyobb Δy-nál, a v pedig Δz-nél. A lapot meghatározó paraméteres egyenletrendszer ezért

$$x = x_o$$

$$y = y_o + u \qquad 0 \leqq u \leqq \Delta y$$

$$z = z_o + v \qquad 0 \leqq v \leqq \Delta z$$

lesz. A lap normálisa (megállapodhatunk abban, hogy a hasábot kifelé irányítjuk) a $-\underline{i}$ vektor. A lapon átáramló folyadék mennyisége az előző pont szerint

$$Q_{ACEG} = \iint_{ACEG} \underline{v}\,\underline{n}_o \, dF = \int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta z} \underline{v}(-\underline{i})dF =$$

$$= -\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta z} (v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k})\underline{i}\, dF =$$

$$= \int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta z} (v_1(x_o, y_o + u, z_o + v))dF.$$

Az integrandusban feltüntettük azt, hogy a vektormezőt a szóban forgó felület pontjaiban kell tekintenünk. Továbbá, ezen a felületen a dF helyébe $du\,dv$ írható és ezért

$$Q_{ACEG} = -\int_{u=0}^{\Delta y}\int_{v=0}^{\Delta z} (v_1(x_o, y_o + u, z_o + v))du\,dv.$$

Tekintsük most az ACEG lappal párhuzamos BDFH lapot. Ennek paraméteres előállítása:

$$x = x_o + \Delta x$$

$$y = y_o + u \qquad 0 \leqq u \leqq \Delta y$$

$$z = z_o + v \qquad 0 \leqq v \leqq \Delta z$$

A lap normálisa az $\underline{i}$ vektor. A felületi integrál tehát a

$$Q_{BDFH} = \iint_{BDFH} \underline{v}\,\underline{n}_o \, dF = \int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta z} \underline{v}\,\underline{i}\, dF =$$

$$= \int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta z} (v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k})\cdot\underline{i}\, dF =$$

$$= \int_{u=0}^{\Delta y}\int_{v=0}^{\Delta z} (v_1(x_o + x, y_o + u, z_o + v))\, dF =$$

$$= \int_{u=0}^{\Delta y}\int_{v=0}^{\Delta z} v_1(x_o + x, y_o + u, z_o + v)du\,dv$$

kifejezéssel egyenlő. Adjuk össze az y,z koordinátasíkkal párhuzamos két lapra kapott integrálokat:

$$Q_{y,z} = Q_{ACEG} + Q_{BDFH} =$$

$$= \int_{u=0}^{\Delta y} \int_{v=0}^{\Delta z} \Big[v_1(x_o + \Delta x, y_o + u, z_o + v) -$$

$$- v_1(x_o, y_o + u, z_o + v) \Big] du\, dv.$$

Alkalmazzuk a skalár-vektor függvények differenciálhányadosára vonatkozó

$$\Delta f = \text{grad}\, f \Delta \underline{r} + \underline{\varepsilon} \Delta \underline{r}$$

azaz

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - f(x,y,z) = f'_x(x,y,z)\Delta x +$$

$$+ f'_y(x,y,z)\Delta y + f'_z(x,y,z)\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$$

összefüggést (lásd a 2.1 definíciót és a 2.2 tételt) az integráljel mögött álló v_1 függvényre. Ha behelyettesítjük a

$$v_1(x_o + x, y_o + u, z_o + v) - v_1(x_o, y_o + u, z_o + v) \approx$$

$$\approx \frac{\partial v_1}{\partial x} \Delta x$$

közelítést, ahol a parciális deriváltat az (x_o, y_o, z_o) pontban kell venni és ahol a jobb áttekinthetőség érdekében a másodrendben kicsiny

$$\varepsilon_1 \Delta x,\ \varepsilon_2 \Delta y,\ \varepsilon_3 \Delta z$$

tagokat elhagyjuk, akkor a

$$Q_{y,z} \approx \int_{u=0}^{\Delta y} \int_{v=0}^{\Delta z} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)_0 \Delta x\, du\, dv$$

integrált kell végül is kiszámítani. A parciális deriváltnál szereplő nulla indexet annak kihangsúlyozására írtuk oda, hogy a derivált értékét az (x_o, y_o, z_o) helyen kell kiszámítani. De akkor az nyilván valamilyen állandó számérték s az

u és v szerinti integrálásnál x is állandónak számít. Ezért az integrálás elvégzése után a

$$Q_{[y,z]} \approx \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)_0 \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

eredményt kapjuk.

Teljesen hasonló számítással kaphatjuk a

$$Q_{[x,z]} \approx \left(\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)_0 \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \quad \text{és}$$

$$Q_{[x,y]} \approx \left(\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)_0 \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

mennyiségeket is. A hasáb teljes felületére képezett Q integrál értéke így

$$Q = \oint \underline{v} \, \underline{n}_0 \, dF = \oint \underline{v} \, d\underline{F} = Q_{[y,z]} + Q_{[x,z]} + Q_{[x,y]} \approx$$
$$\approx \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)_0 \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \, .$$

Mivel a hasáb térfogata

$$V = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z,$$

azért

$$\oint \underline{v} \, d\underline{F} \approx \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)_0 \Delta V,$$

és ebből

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)_0 \approx \frac{\oint \underline{v} \, d\underline{F}}{\Delta V}$$

Az elkövetett hiba a Δx, Δy és Δz egyidejű csökkenésével tehát $\Delta V \to 0$ esetben zérushoz tart. Az elemi térfogatból kiáramló folyadék mennyiségét tehát a

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)_0 = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \underline{v} \, d\underline{F}}{\Delta V}$$

határérték adja, ahol a felületi integrált a ΔV térfogatot határoló zárt felületen kell kiszámolni.

Ha negatív az eredmény, akkor a folyadék a kifelé mutató felületi normálissal ellentétes irányban áramlik.
A divergencia most látott jelentése nem függ attól, hogy milyen alakú zárt felületből indulunk ki. Természetesen a le-

vezetés a hasáb esetén a legegyszerűbb. A divergencia - amint az a definícióból kitűnik - a térfogategységre eső anyagszaporulatra vagy anyaghiányra jellemző, a forrás erősségével függ össze. Ha pl. a divergencia értéke valamely 1 cm^3 térfogatú térrész minden pontjában 0,5, akkor a térfogaton belüli forrás másodpercenként 0,5 cm^3 anyagot termel. Ha tehát 1 sec alatt 10 cm^3 anyag ömlött be, akkor 10 + 0,5 = 10,5 cm^3 anyag fog másodpercenként kiáramlani. Levezetésünkben a kiömlő folyadék pozitív előjelű, a beömlő folyadék negatív előjelű volt. Folyadékról beszéltünk, de minden anyagáramlásra érvényes a megállapítás. A divergenciának az elektromosságtanban, mágnességtanban is igen fontos fizikai jelentése van.

A $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező divergenciáját felírhatjuk a 2. pontban bevezetett

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$$

nabla-vektor segítségével:

$$\operatorname{div}\underline{v} = \underline{\nabla}\,\underline{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)(v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}) =$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

A 3.1 tétel szerint a divergencia éppen a derivált tenzor főátlójában álló elemeinek összege (ún. "spur"-ja). Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy a div $\underline{v}$ értéke invariáns a koordináta-rendszer megválasztásával szemben.

6. Vektormező rotációja

A vektormező rotációjának értelmezéséhez szintén áramlástani problémát hívunk segítségül. Tekintsünk egy olyan áramlási sebességmezőt, amelyben örvénylés van. Ha gondolatban belehelyezünk ebbe a térbe egy zárt görbét, akkor az örvénylő tér a zárt görbén elhelyezkedő tömegpontot végigmozgatja a görbén. A vektortér ezáltal munkát végez. Ennek a munkának a nagysága függ a zárt görbe elhelyezkedésétől. Ha a görbe olyan helyzetű, hogy a vektortér elemei érintik, akkor a tér nagyobb munkát végez, azaz jobban forgatja a tömegpontot mint ha a görbe, vagyis az út merőleges lenne az erővonalakra. Ha azt akarjuk jellemezni, hogy egy vektortér egy pontban mennyire forgat egy tömegpontot, akkor helyezzünk a térbe egy olyan ΔF elemi felületet, amely tartalmazza ezt a pon-

tot. Számítsuk ki a tér munkáját a felületet határoló zárt görbe mentén és osszuk el a felület felszínével. Az így kapott felületegységre eső munka a pontbeli átlagos forgatás mértéke. Ennek a mennyiségnek a határértéke ha $\Delta F \to 0$, jellemzi a pontbeli örvénylés erősségét. Mivel ez a mennyiség függ a F felületállástól is, ezért egy vektort, az ún. rotáció-vektort vezetünk be és az átlagos forgatás mértékét a vektor felületre merőleges összetevőjének értelmezzük.

6.1 Definíció:

A

$$\lim_{\Delta F \to 0} \frac{\oint \underline{v}\, d\underline{r}}{\Delta F}$$

határértéket a v(r) vektormező (x_o, y_o, z_o) pontbeli rotációja (rot v) $\underline{n}$ irányú összetevőjének nevezzük, ahol F az (x_o, y_o, z_o) pontot tartalmazó elemi felület, $\underline{n}$ ennek a felületnek a normálisa is az integrálást a ΔF felületet határoló zárt görbére kell elvégezni. A felületi normálist úgy kell irányítani, hogy a felületet határoló kontúrgörbére visszanézve, annak irányítását pozitívnak lássuk.

6.1 Tétel:

$$\text{rot } \underline{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\underline{k} ,$$

ahol

$$\underline{v} = \underline{v}(v_1, v_2, v_3) \quad \text{és} \quad \underline{r} = \underline{r}(x, y, z)$$

Bizonyítás:

Vegyünk fel az örvénylő folyadék sebességterében egy ΔF nagyságú felületdarabot, amelyet a (g) zárt görbe határol. Határozzuk meg a $\underline{v}$ vektortér (g) zárt görbementi

$$\oint_{(g)} \underline{v}\, d\underline{r}$$

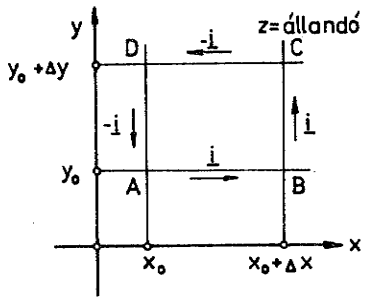
integrálját! Amint a divergencia szemléltetésénél tettük, most is speciális felületet fogunk választani a levezetés egyszerűsége érdekében. Legyen a (g) zárt "görbe" a $z = z_o$ = állandó síkban fekvő, Δx, Δy oldalhosszúsága, az x illetve y tengellyel párhuzamos oldalú téglalap kerülete (6.1 ábra).

Irányítsuk a téglalapot a matematikai pozitív körüljárás szerint. Integráljuk először az A B szakaszon. Ennek egyenlete:

$$x = x_o + t \qquad (0 \leqq t \leqq \Delta x)$$

$$y = y_o$$

$$z = z_o$$



6.1 ábra

A $d\underline{r}$ helyébe $\dot{\underline{r}}\,dt$ írandó. Differenciálnunk kell ezért a most felírt egyenletrendszert:

$$\dot{x} = 1$$

$$\dot{y} = 0$$

$$\dot{z} = 0$$

vagyis $\dot{\underline{r}} = i$. Ha a $\underline{v}$ vektor felbontását a szokott

$$v = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$$

módon választjuk, akkor

$$\int_{\overline{AB}} \underline{v}\, d\underline{r} = \int_0^{\Delta x} \underline{v}\,\underline{i}\, dt = \int_0^{\Delta x} v_1(x_o + t, y_o, z_o)dt \approx$$

$$\approx \int_0^{\Delta x} v_1(x_o, y_o, z_o)dt = v_1(x_o, y_o, z_o)\,\Delta x.$$

Az integrandusban feltüntettük, hogy a v_1 skalár-vektor függvényt az AB szakasz pontjaiban kell tekinteni. A CB szakaszon vett integrálnál $\dot{\underline{r}} = -\underline{i}$ lesz, ezért

$$\int_{\overline{CD}} \underline{v}\, d\underline{r} = -\int_0^{\Delta x} \underline{v}\cdot\underline{i}\, dt = -\int_0^{\Delta x} v_1(x_o + t, y_o + y, z_o)dt \approx$$

$$- \int_0^{\Delta x} v_1(x_o, y_o + y, z_o)dt = - v_1(x_o, y_o + y, z_o)\,\Delta x.$$

A $\overline{BC}$ szakaszon $\dot{\underline{r}} = \underline{j}$, a $\overline{DA}$ szakaszon pedig $\dot{\underline{r}} = - \underline{j}$. Az előző számításokhoz hasonlóan kaphatjuk, hogy

$$\int_{DC} \underline{v}\, d\underline{r} \approx v_2(x_o + \Delta x, y_o, z_o)\,\Delta y$$

és

$$\int_{DA} \underline{v}\, d\underline{r} \approx - v_2(x_o, y_o, z_o)\,\Delta y$$

A teljes görbementi integrál értékét az

$$\oint_{(g)} \underline{v}\, d\underline{r} = \left(\int_{AB} \underline{v}\, d\underline{r} + \int_{CD} \underline{v}\, d\underline{r}\right) + \left(\int_{BC} \underline{v}\, d\underline{r} + \int_{DA} \underline{v}\, d\underline{r}\right)$$

csoportosításban számíthatjuk ki. Így

$$\int_{(g)} \underline{v}\, d\underline{r} \approx - [v_1(x_o, y_o + y, z_o) - v_1(x_o, y_o, z_o)]\Delta x +$$

$$+ [v_2(x_o + x, y_o, z_o) - v_2(x_o, y_o, z_o)]\Delta y.$$

A szögletes zárójelben levő különbségekre alkalmazzuk a skalár-vektor függvény differenciálhányadosára vonatkozó összefüggést (lásd a 2.1 definíciót és a 2.2 tételt), amely szerint

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x,y,z) =$$

$$= f'_x(x,y,z)\Delta x + f'_y(x,y,z)\Delta y + f'_z(x,y,z)\Delta z +$$

$$+ \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z.$$

Ha a másodrendben kicsiny

$$\varepsilon_1 \Delta x, \quad \varepsilon_2 \Delta y, \quad \varepsilon_3 \Delta z$$

mennyiségeket elhanyagoljuk, akkor

$$\int_{(g)} \underline{v} d\underline{r} \approx - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)_{(x_o, y_o, z_o)} \Delta x \Delta y +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)_{(x_o, y_o, z_o)} \Delta x \Delta y = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)_{(x_o, y_o, z_o)} \Delta x \Delta y =$$

$$= \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)_{(x_o,y_o,z_o)} \Delta F.$$

Osszuk el a görbementi integrál, az ún. cirkuláció értékét a felület mérőszámával, majd zsugorítsuk a téglalapot a $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ határátmenettel az (x_o,y_o,z_o) pontra. Ekkor az előző közelítés egyenlőségbe megy át:

$$\lim_{\Delta F \to 0} \frac{\oint v\, dr}{\Delta F} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} .$$

Ha a (g) zárt görbe az $y = y_o$ síkban fekvő, Δx, Δz oldalú téglalap kerülete, akkor hasonló meggondolással

$$\lim_{\Delta F \to 0} \frac{\oint \underline{v}\, d\underline{r}}{\Delta F} = \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_2}{\partial x}$$

az $x = x_o$ síkban fekvő $\Delta y, \Delta z$ oldalú téglalap kerületére pedig

$$\lim_{\Delta F \to 0} \frac{\oint \underline{v}\, d\underline{r}}{\Delta F} = \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}$$

adódik, ahol a parciális deriváltakat az (x_o,y_o,z_o) pontban kell számítani. A

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

mennyiségek a rot $\underline{v}$ vektornak a koordinátasíkokra merőleges összetevői, vagyis az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ irányú komponensei. Így tehát a rot $\underline{v}$ vektor egyértelműen van meghatározva. A rotáció nem függ attól, hogy milyen alakú zárt görbéből indulunk ki, természetesen a levezetés téglalap esetén a legegyszerűbb.
A rotációnak az elektromosságtanban is igen fontos fizikai jelentése van. A

$$\text{rot } v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

vektor komponensei előállíthatók a $\underline{v}(\underline{r})$ függvény deriváltenzorának mátrixában (lásd a 3.1 tételt) álló elemekből az alábbi séma szerint:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

A rot $\underline{v}$ komponenseit formálisan is kiszámíthatjuk a 2. pontban bevezetett

$$\underline{v} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$$

nabla-vektorral alkotott vektorális szorzatként:

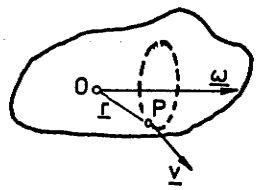
$$\text{rot } \underline{v} = \underline{v} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\underline{k}$$

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy a rot $\underline{v}$ vektor invariáns a koordináta-rendszer megválasztásával szemben. Ezért nevezik a rot $\underline{v}$ vektort a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező deriválttenzora vektorinvariánsának.

Amint ez a definícióból kitűnik, a rotáció az áramló folyadék örvénylését jellemzi. Tekintsünk egy elemi folyadékmennyiséget merev testnek és forogjon az valamely rögzített pontján áthaladó fix forgástengely körül $\underline{\omega}$ szögsebességgel.

A merev test egy pontjának sebességét a $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$ vektorális szorzat adja. Ha $\underline{r}$ befutja a merev testet, akkor úgy egy $\underline{v}(\underline{r})$ sebességmezőt kapunk. Képezzük ennek a $\underline{v}(\underline{r})$ függvénynek a rotációját:



6.2 ábra

$$\text{rot } \underline{v} = \underline{\nabla} \times \underline{v} = \underline{\nabla} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) =$$

$$= \begin{matrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{zz} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{matrix}$$

A kijelölt deriválásoknál az ω_1, ω_2, ω_3, állandó, ezért

$$\text{rot } \underline{v} = 2(\omega_1 \underline{i} + \omega_2 \underline{j} + \omega_3 \underline{k}) = 2\,\underline{\omega}$$

adódik. A rotáció a szögsebességvektor kétszeresét adja, emiatt is kapta a rotáció (forgás) elnevezést. A divergencia és rotáció bevezetése és fizikai jelentésének megvilágosítása után a vektormezőknek az alábbi osztályozását adhatjuk meg:

	rot $\underline{v} = \underline{0}$	rot $\underline{v} \neq \underline{0}$
div $\underline{v} = 0$	forrás és örvénymentes mező	forrásmentes örvénymező
div $\underline{v} \neq 0$	örvénymentes forrásmező	forrás- és örvénymező

A továbbiakban néhány divergenciára és rotációra vonatkozó, a fizikában sokszor alkalmazott szabályt írunk fel.

a) div grad u = Δu, ahol

$$\Delta = \underline{v}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

az ún. Laplace-féle operátor.

b) rot grad u = 0

c) div rot $\underline{v}$ = 0

d) rot rot $\underline{v}$ = grad div $\underline{v} - \Delta \underline{v}$

<u>Bizonyítás:</u>

Ez a négy állítás koordináták segítségével könnyen igazolható, mi csak azt mutatjuk meg, hogy a $\underline{\nabla}$ szimbolika ezekhez is elvezet.

a) $$\text{div grad } u = \underline{\nabla}\,(\underline{\nabla}\, u) = \underline{\nabla}^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

b) rot grad u = $\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} u) = \underline{0}$.

hiszen $\underline{\nabla}$ és $\underline{\nabla} u$ párhuzamos "vektorok"

c) div rot $\underline{v} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \times \underline{v}) = 0$

ugyanis, a vegyesszorzat két tényezője megegyezik.

d) rot rot $\underline{v} = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{v}) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla} v) - \underline{\nabla}^2 v$ = grad div $\underline{v} - \Delta \underline{v}$

Itt a kifejezési tételt alkalmaztuk.
A b) állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy minden gradiens-mező örvénymentes, a c) állítás szerint pedig valamely vektormezőhöz tartozó rotációmező forrásmentes.

7. Görbementi- és felületi integrálok átalakítására vonatkozó tételek

7.1 Tétel (Gauss-Osztrogradszkij-tétel)

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{v} \, dV = \iint_F \underline{v} \, d\underline{F}$$

ahol F a V térfogatot határoló zárt felület és az integrálás kifelé irányított normálissal végzendő.

Bizonyítás:
A könnyebb megértés kedvéért maradjunk az áramlástani szóhasználatnál. Tűzzük ki feladatként egy zárt F felülettel határolt V térfogatban bekövetkező anyagszaporulat meghatározását! Osszuk fel ezért a térfogatot

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$$

elemi cellákra, amelyeknek zárt határfelületeit jelöljük

$$\Delta F_1, \Delta F_2, \ldots, \Delta F_n$$

jelekkel. Minden cella esetén elmondhatjuk, hogy a benne keletkezett anyagszaporulatra

$$[\operatorname{div} \underline{v}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) + \varepsilon_k] V_k = \oiint_{\Delta F_k} \underline{v} \, d\underline{F}$$

érvényes, ahol (ξ_k, η_k, ζ_k) a k-adik cella tetszőleges belső pontja. (Ez az 5.1 definíció közvetlen következménye.)
Adjuk össze k = 1-től k = n-ig a cellákra felírt egyenlőtlenségeket:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{div} \underline{v}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) + \varepsilon_k\right] V_k = \sum_{k=1}^{n} \iint_{\Delta F_k} \underline{v}\, d\underline{F}.$$

Növeljük a beosztások számát úgy, hogy a cellák átmérője egyenletesen nullához tartson. A bal oldali kifejezés akkor $\varepsilon_k \to 0$ miatt az

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{v}\, dV$$

hármas integrálhoz tart.

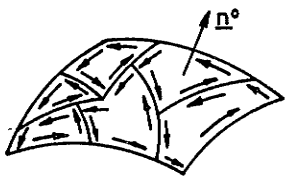
A jobb oldalon levő összegek minden beosztás mellett az F határfelületre vett integrált adja, mivel a cellák egymással érintkező belső lapjain mindig kétszer kell integrálnunk ellenkező irányítású normális mellett.

Az így adódó ellenkező előjelű, abszolút értékben egyenlő mennyiségek az összegezésnél kiesnek és csak azokon a határlapokon kapunk megmaradó eredményt, amelyek az F felületre esnek, ezek összege viszont az F felületre vonatkozó integrál. És az lesz akkor is, ha a beosztást tetszőleges sűrűre vesszük.

7.2 <u>Tétel</u> (Stokes-tétele)

$$\iint_F \operatorname{rot} \underline{v}\, d\underline{F} = \int_{(g)} \underline{v}\, d\underline{r}$$

ahol g az F felületdarabot határoló zárt görbe és a felület normálisát úgy kell irányítani, hogy vele szembenézve a g görbe pozitív körüljárású legyen.



7.1 ábra

<u>Bizonyítás:</u>

Határozzuk meg a cirkuláció, vagyis a $\oint \underline{v}\, d\underline{r}$ integrál értékét valamely $\underline{v}$ sebességtérbe ágyazott $\overline{F}$ felületdarabot határoló zárt g görbe mentén. A rotáció definíciójából (6.1 definíció) következik, hogy ha az F felületet

$$\Delta F_1, \Delta F_2, \ldots, \Delta F_n$$

elemi darabokra osztjuk, akkor

$$\left\{\left[\text{rot } \underline{v}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\right]_n + \varepsilon_k\right\}\Delta F_k = \oint_{(g_k)} \underline{v}\, d\underline{r}$$

lesz érvényes minden kis felületdarabra és az azt határoló g_k zárt görbére, ahol (ξ_k, η_k, ζ_k) pont a k-adik felületdarab tetszőleges belső pontja. Összegezzünk k-ra:

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\text{rot } \underline{v}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\right]_n + \varepsilon_k\right\}\Delta F_k = \sum_{k=1}^{n} \oint_{(g_k)} \underline{v}\, d\underline{r}$$

A bal oldali kifejezés az elemi felületdarabok átmérőjének csökkentésével az

$$\iint_F (\text{rot } \underline{v})_n\, dF = \iint_F \text{rot } \underline{v}\, d\underline{F}$$

kettős integrálhoz tart. A jobb oldali viszont minden beosztás esetén az F felület határgörbéjén vett integrállal egyenlő, mivel az egyes elemi felületdarabok közös határvonalán vett integrálok az összegezésnél kiesnek.

8. Néhány következmény

A Gauss-Osztrogradszkij és a Stokes-tétel felhasználásával a vektormezőket jellemző, további tételekhez juthatunk.

8.1 Tétel

Ha a vektormező divergenciája zérus, akkor a vektormező valamely felületi integrálja csupán a felület határgörbéjétől függ.

Bizonyítás:

A Gauss-Osztrogradszkij-tétel szerint

$$\iiint_V \text{div } \underline{v}\, dV = \iint_F \underline{v}\, d\underline{F}.$$

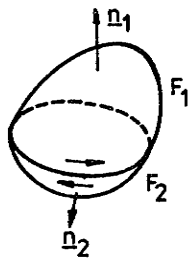
Ha

$$\text{div } \underline{v} = 0, \quad \text{azaz, ha a } \underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$$

vektormező forrásmentes, akkor a bal oldali integrál zérus, tehát

$$\oint_F \underline{v}\, d\underline{F} = 0$$

A vektormező zárt felületre vett integrálja tehát zérus. Ez egyébként természetes is, mert ha egy térrészben nincs forrás (vagy nyelő), akkor a térrészt burkoló zárt felületen ugyanakkora a beáramlás, mint kiáramlás. Azt kapjuk így, hogy forrásmentes vektortérben bármely zárt felületre vonatkozó integrál zérus. A zárt felületre vonatkozó integrál zérus voltából viszont az következik, hogy egy forrásmentes vektortérbe ágyazott zárt görbe által határolt felületre a vektormező felületi integrálja független a felülettől, csupán a határgörbétől függ. Két közös határgörbével rendelkező F_1 és F_2 felület ugyanis zárt felületet alkot és mindkét esetben kifelé vagy mindkét esetben befelé mutató felületi normális esetén a zárt felületre vett integrál értéke zérus.



8.1 ábra

Azt írhatjuk azért, hogy

$$\iint_{F_1} \underline{v}\, d\underline{F} + \iint_{F_2} \underline{v}\, d\underline{F} = \iint_{F_1+F_2} \underline{v}\, d\underline{F} = 0,$$

ahonnan

$$\iint_{F_1} \underline{v}\, d\underline{F} = -\iint_{F_2} \underline{v}\, d\underline{F}.$$

Ha az F_2 felületnél az irányított felületelem értelmét ellenkezőre változtatjuk, akkor a g peremgörbén a körüljárási irány meg fog egyezni és az előző egyenlőségből

$$\iint_{F_1} \underline{v}\, d\underline{F} = \iint_{F_2} \underline{v}\, d\underline{F}$$

következik. A két különböző felületre vett integrál tehát egyenlő.

8.2 Tétel

Örvénymentes vektormezőben a görbementi integrál értéke az úttól független, csak a végpontoktól függ.

Bizonyítás:

Felhasználjuk a 6.2.c) tételben kimondott

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{v} = 0$$

azonosságot. Alkalmazzuk a 8.1 tételt a rot $\underline{v}$ vektormezőre, amely szerint közös határgörbéjű és megfelelően irányított normálisú F_1, F_2 felületre a felületi integrál értéke ugyanaz.

$$\iint_{F_1} \operatorname{rot} \underline{v} \, d\underline{F} = \iint_{F_2} \operatorname{rot} \underline{v} \, d\underline{F} .$$

Az itt szereplő integrálokat Stokes-tétele szerint, az

$$\iint_{F} \operatorname{rot} \underline{v} \, d\underline{F} = \oint_{(g)} \underline{v} \, d\underline{r}$$

képlet alapján a g peremgörbén való integrációval számíthatjuk ki. Tegyük fel, hogy rot $\underline{v} = 0$, azaz a v vektormező örvénymentes. Ekkor az előző egyenlőségből

$$\int_{(g)} \underline{v} \, d\underline{r} = 0$$

következik. Ennek viszont az az eredménye, hogy valamely térgörbe A és B pontjai közti görbementi integrál értéke csak a végpontoktól függ, az úttól független. Lássuk ennek bizonyítását!

Válasszunk két görbét, amely A -t B-vel összeköti! A két görbét együttesen tekintve zárt görbe keletkezik, amelyre

$$\int_{A(g_1)}^{B} \underline{v} \, d\underline{r} + \int_{B(g_2)}^{A} \underline{v} \, d\underline{r} = \oint \underline{v} \, d\underline{r} = 0.$$

Ebből

$$\int_{A(g_1)}^{B} \underline{v} \, d\underline{r} = - \int_{B(g_2)}^{A} \underline{v} \, d\underline{r}.$$

Integráljunk g_2-ön fordított irányban A-tól B-ig, akkor a jobb oldali integrál előjelet vált és

$$\int_{A(g_1)}^{B} \underline{v} \, d\underline{r} = \int_{B(g_2)}^{A} \underline{v} \, d\underline{r} \qquad \text{adódik.}$$

8.3 Tétel

Legyen $\phi(x,y,z)$ skalár-vektor függvény. Azt állítjuk, hogy a grad ϕ görbementi integrálja csak a ϕ függvénynek a végpontokban felvett értékétől függ, vagyis az úttól független.

Bizonyítás:

Használjuk fel a 6.2 tétel b) állítását, amely szerint

$$\text{rot grad } \phi = 0,$$

azaz a skalármező gradiensmezeje örvénymentes. Az állításunk így a 8.2 tétel közvetlen következménye. Ennek a tételnek a fizikai jelentése a következő: az ún. konzervatív erőterekben, ahol az erőtérnek létezik potenciálfüggvénye, azaz olyan skalárvektor függvény, amelynek negatív gradiense az erő, az erőtér által végzett munka az úttól független. Ilyen tér például a gravitációs erőtér. Nem magától értetődő, de bizonyítható, hogy minden olyan erőtérnek van potenciálja, amely által végzett munka az úttól független, csak a kezdő- és végpontoktól függ. Igaz tehát a 8.2 tétel megfordítása, hogy ha a vektortér által végzett munka független az úttól, akkor a tér örvénymentes.

Megjegyezzük, hogy örvénymentes és forrásmentes térben a potenciálfüggvény kielégíti a Laplace-egyenletet: $\Delta \phi = 0$. A tér örvénymentessége bizonyítja, hogy létezik a ϕ potenciálfüggvény, a 6.2 tétel a) állítása szerint pedig

$$\text{div grad } \phi = \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

mely a tér forrásmentessége miatt zérus.

Konzervatív erőtér potenciálfüggvényét meghatározhatjuk vonalintegrál segítségével, azaz kiszámítjuk a tér által végzett munkát egy rögzített ponttól a tér egy tetszőleges pontjáig:

$$\phi(x,y,z) = \int_{P_o}^{(x,y,z)} \underline{v}\, d\underline{r}$$

A potenciálfüggvény meghatározható teljes differenciál integrálásával is.

Mivel

$$-\text{grad } \phi = \underline{v}(\underline{r})$$

ezért

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = - v_1(x,y,z) \;;$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = - v_2(x,y,z) \;;$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = - v_3(x,y,z)$$

egyenletrendszer ϕ megoldását kell megkeresni, ahol

$$\underline{v}(v_1,v_2,v_3)$$

az adott konzervatív (örvénymentes) erőtér.

Irodalom

1 B. A. Fuksz-B. V. Sabat: Komplex változós függvények és néhány alkalmazások. Tankönyvkiadó, 1958.

2 K. Knopp: A függvénytan elemei.

3 S. C. Petrovszkij: Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről. Akadémiai Kiadó, 1951.

4 Szőkefalvi Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok Tankönyvkiadó, 1954.

5 Szőkefalvi Nagy Gyula-Gehér László-Nagy Péter: Differenciálgeometria, Műszaki Könyvkiadó, 1979.