BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

KIEGÉSZÍTŐ MATEMATIKAI PÉLDATÁR

Összeállította:
KERTÉSZ VIKTOR
SZABÓ GYÖRGY
ZIBOLEN ENDRE

Szerkesztette:
KERTÉSZ VIKTOR

Műegyetemi Kiadó, 1994.

Összeállította:

Kertész Viktor egyetemi docens (I - VIII., valamint IX.1 - IX.5.)
Szabó György egyetemi tanársegéd (X.)
Zibolen Endre egyetemi tanársegéd (IX. 6.)

Jegyzet azonosító: **41057**

A Budapesti Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Kar megrendelése alapján kiadja a **Műegyetemi Kiadó.**

Felelős vezető: Veress János
Terjedelem: 18,75 A/5 ív
Készült az **Új Élet Mg. Termelő és Szolgáltató Szöv., Magyaralmás**
Nyomdaipari Önelszámoló részlegében
Felelős vezető: Frigy Ottóné
Munkaszám: 93/311

Ez a példatár a Dr. Farkas Miklós egyetemi tanár szerkesztésében megjelent Matematika c. 8 kötetes jegyzet, valamint Dr. Kertész Viktor egyetemi docens Funkcionálanalízis c. jegyzet anyagára épül és szervesen illeszkedik Dr. Farkas Miklós ugyancsak 8 kötetes Matematika Példatár c. jegzetéhez. A Matematika Példatár első kiadásai óta eltelt hosszú idő, és az újabb, Funkcionálanalízis jegyzet tett szükségessé jelen kiegészítés kiadását.

Valamennyi feladat megoldása a könyv végén megtalálható. A feladat sorszáma előtti * jelzés arra utal, hogy a megoldáshoz megoldási útmutatást is közlünk. A bekeretezett sorszámú feladatokat pedig részletesen kidolgoztuk.

Végezetül néhány javaslat, megjegyzés e példatár használóinak.

A példatár feltételezi a nappali gépészmérnök képzés matematika előadásainak és gyakorlatainak a látogatását, mivel néhány olyan ismeretet is feltételez, amelyről ott szó esik, a nyolckötetes jegyzetben azonban nem szerepel. Egy-két feladat, vagy annak megoldási módszere megsérti a szigorú tematikus rendet (lásd pl. a I.4/2 feladatot, ahol a sorozatoknál szerepel a később tanulandó deriválás). E feladatok nem az évközi gyakorlásra, hanem a vizsgákra, illetve a szigorlatra való felkészülésre készültek. Ez azonban nem okozhat problémát, mert e kötet használatát amúgy is a gyakorlatvezetők útmutatásával együtt képzeljük el.

A használó figyelmét arra is fel kell hívnunk, hogy jelöléseink egy-egy feladaton belül ugyan egyértelműek és következetesek, azonban az egész kötetet tekintve ez a következetesség nincs mindenhol meg (például a vektorokat aláhúzás nélkül, egy ill. két aláhúzással is jelöljük). Véleményünk szerint helyes, ha a hallgatók, akik néhány év múlva nemzetközi szakirodalmat olvasó, gyakorló mérnökök lesznek, már most megszokják, hogy a jelölésrendszerben semmiféle merev kötöttség nincsen.

A kidolgozott feladatoknál a szövegben esetleg nem szembetűnő végeredményt ahol csak lehetséges volt, bekereteztük, hogy ezzel segítsük a kötet használatát. Ezt kívántuk segíteni továbbá a lapok tetején a szakaszok sorszámának a feltüntetésével is.

A szerkesztő

TARTALOM

	Feladatok	Megoldások
I. A matematika alapjai	7	100
I.1. Halmazok és függvények	7	100
I.2. Matematikai logika	8	102
I.3. Valós számok	9	103
I.4. Sorozatok	10	104
II. Egyváltozós valós függvények	13	108
II.1. Egyváltozós valós függvények elemi tulajdonságai	13	108
II.2. Határérték, folytonosság	14	112
II.3. Deriválás és alkalmazásai	15	114
II.4. Integrálszámítás	19	135
III. Algebra	21	145
III.1. Komplex algebra	21	145
III.2. Mátrixok	21	146
III.3. Másodrendű felületek	23	152
IV. Végtelen sorok	25	155
IV.1. Hatványsorok	25	155
IV.2. Függvénysorozatok	26	159
IV.3. Fourier-sorok	27	161
V. Többváltozós valós függvények	30	167
V.1. Felületek szemléltetése, határérték, folytonosság	30	167
V.2. Többdimenziós tartományok	31	168
V.3. Többváltozós függvények deriválása	31	169
V.4. Szélsőérték számítás	33	173
V.5. Implicit megadású függvényrendszerek. Inverz függvényrendszerek	34	177
V.6. Többes integrálok	37	193
VI. Vektoranalízis	38	196
VI.1. Tenzorok	38	196
VI.2. Potenciálelmélet	39	198
VI.3. Integrál átalakító tételek	39	200
VII. Komplex függvények	41	202
VII.1. Komplex numerikus sorok	41	202
VII.2. Elemi függvények	41	203
VII.3. Valós változós komplex értékű függvények deriváltjai	42	203
VII.4. Komplex függvények integrálása	42	204

	Feladatok	Megoldások
VIII. Differenciálegyenletek	44	207
VIII.1. Szukcesszív approximáció	44	207
VIII.2. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek	44	210
VIII.3. Stabilitás	46	218
VIII.4. Parciális differenciálegyenletek	47	223
IX. Funkcionálanalízis	49	228
IX.1. Lineáris terek	49	228
IX.2. Normált terek	51	244
IX.3. Operátorok normált terekben	52	246
IX.4. Hilbert-terek	55	257
IX.5. Fourier-sorok	57	259
IX.6. Laplace-transzformáció	59	267
1. Laplace-transzformáció (elemi) tulajdonságai	59	267
2. A Laplace-transzformáció alkalmazásai	72	278
2.1 Állandó együtthatós differenciálegyenletek	72	278
2.2 Speciális egyenletek	74	281
2.3 Állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek	74	284
2.4 Integrálegyenletek és integrálegyenlet-rendszerek	75	285
X. Gyakorlati számítási eljárások	77	287
X.1. Egyismeretlenes egyenletek megoldása.	77	287
X.2. Empirikus képletek előállítása	82	292
X.3. Determinánsok és mátrixok	92	296
X.4. Véges differenciák és alkalmazásaik	97	299

I. A MATEMATIKA ALAPJAI

I. 1. HALMAZOK ÉS FÜGGVÉNYEK

[1.] Rendezzük sorba az $(a_1+\ldots+a_n)(b_2+\ldots+b_n)$ szorzat tagjait!

[2.] Számláljuk meg a pozitív egész számokból képezett rendezett párok halmazát!

[3.] Számláljuk meg a racionális számokat!

*4. Tekintsük azt a H_1 halmazt, amelynek elemei az $x \mapsto c \sin n x$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ alakú függvények. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

a) $f \in H_1$, ahol $f(x) = 3 \sin^2 x$

b) $g \in H_1$, ahol $g(x) = 3 \sin x \cos x$

c) $h \in H_1$, ahol $h(x) = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$

d) $k \in H_1$, ahol $k(x) = 1 - \cos 2x$

e) $l \in H_1$, ahol $l(x) = 2\cos^2 x - 2 \sin^2 x$

5. Legyen H_2 az a halmaz, amelynek elemei az $x \mapsto c \cos n x$; H_1 az előző feladatban szereplő halmaz; $x \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$; $c \in \mathbb{R}$ alakú függvények. Legyen továbbá $H = H_1 \cup H_2$. Akkor az előző példában szereplő f, g, h, k és l függvények közül melyek elemei H-nak?

6. Legyen K az a halmaz, amelynek elemei az

$$f(x) = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x), \quad f_i \in H, \leq 1 \leq i \leq n$$

alakú f függvények; H az előző feladatban szereplő halmaz. Akkor a 4. példában szereplő f, g, h, k és l függvények közül melyek elemei K-nak?

[7.] Legyen H az $\mathbb{R}$-n értelmezett egyváltozós valós függvények halmaza. Tekinstük azt az $F: H \mapsto \mathbb{R}$ funkcionált, amely bármely $f \in H$-hoz az $f(0)$ valós számot rendeli, vagyis $f \mapsto f(0)$.
Mi e funkcionál értékkészlete? Létezik-e inverze?
Adjuk meg F egy leszűkítését és egy kiterjesztését!

8. Legyen G_τ az az operátor ($\tau \in \mathbb{R}$ valamely rögzített szám), amelyre $G_\tau: H \mapsto H$ (ahol H a 7. feladat szerinti halmaz) és G_τ H minden f eleméhez azt az $\tilde{f} \in H$ függvényt rendeli, amelyre $\tilde{f}(x) = f(x-\tau)$. (Más szóval G_τ f-t τ-val "jobbra eltolja".)
Mutassuk meg, hogy
a) G_τ-nak létezik inverze (adjuk is meg az inverz operátort!);
b) $G_{\tau_1} \circ G_{\tau_2} = G_{\tau_1+\tau_2}$
c) $(F \circ G_\tau)(f) = f(-\tau)$, ahol F a 7. feladat szerinti funkcionál.

9. Legyen G_g az az operátor ($g \in H$ valamely rögzített függvény; H a 7. feladat szerinti), amelyre $G_g: H \mapsto H$ és G_g H minden f eleméhez az $\tilde{f} = f \circ g \in H$ függvényt rendeli $f \mapsto f \circ g$.
Mutassuk meg, hogy
a) G_g-nek általában nem létezik inverze
b) $G_g \circ G_h = G_{h \circ g}$
c) Ha e: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ az identitás függvény ($x \mapsto x$), akkor $G_e = E$ az identitás operátor: $f \mapsto f$.

10. Legyen Φ az $x \mapsto ax+b$; $a,b \in \mathbb{R}$; alakú függvények halmaza. Mutassuk meg, hogy $\varphi \in \Phi$ esetén G_φ (ld. a 9. feladatot) Φ-t önmagára képezi le. G_φ Φ-re való leszűkítésének milyen esetben létezik inverze?

I.2 MATEMATIKAI LOGIKA

1. Tagadjuk az alábbi formalizált ítéleteket olyan módon, hogy a negáció $\neg$ jele csak közvetlenül a betűkkel jelölt elemi ítéletek előtt fordulhat elő! Mondjunk olyan konkrét ítéleteket, amelyeket éppen az alanti sémák valamelyike szerint lehet formalizálni! Állapítsuk meg, hogy az adott ítélet vagy a tagadása igaz-e?
a) $A \wedge \neg B$
b) $\neg A \rightarrow B$
c) $\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$
d) $\forall x \exists y (A(x,y) \rightarrow B(x,y))$
e) $\exists x (A(x) \vee B(x))$
f) $\forall x \exists y \forall z (A(x,y,z) \rightarrow B(x,y,z))$

2. Az alábbi formalizált ítéletek közül melyek bizonyíthatók példával? Az adott példa milyen állításnak tegyen eleget? Mondjunk olyan konkrét ítéleteket, amelyeket éppen az alanti sémák valamelyike szerint lehet formalizálni!

   a) $\exists x\ A(x)$

   b) $\exists x\ \forall y\ A(x,y)$

   c) $\neg\exists x\ \forall y\ A(x,y)$

   d) $\forall x\ A(x)$

   e) $\forall x\ \exists y\ A(x,y)$

   f) $\neg\forall x\ \exists y\ A(x,y)$

$\boxed{3.}$ Legyen A C-nek szükséges feltétele, B pedig elégséges feltétele. Akkor A V B milyen feltétele C-nek?

4. Legyen B C-nek elégséges feltétele és A pedig B-nek elégséges feltétele. Akkor A milyen feltétele C-nek?

5. Legyen C-nek B, B-nek pedig A az elégséges feltétele. Akkor A milyen feltétele C-nek?

6. Legyen A C-nek szükséges feltétele, A V B pedig C-nek elégséges feltétele. Szemléltessük A-t, B-t és C-t Venn diagrammal! Milyen feltétele B C-nek?

7. Mondjunk konkrét példákat a 3. - 6. feladatokra!

I. 3. VALÓS SZÁMOK

*1. Igazoljuk az alábbi becsléseket:

   a) $1 \le \sqrt{1+x} \le 1+\frac{x}{2}; \quad x \ge 0$

   b) $1 \le \sqrt{1+x^2} \le 1+x; \quad x \ge 0$

   c) $|a| \le \sqrt{a^2+b^2} \le |a| + \frac{1}{2}\frac{b^2}{|a|}$

$\boxed{2.}$ Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 2n\varepsilon,$$

ha $\frac{1}{2n} > \varepsilon > 0; \quad n \ge 1.$

Vessük össze ezt az egyenlőtlenséget a Bernoulli egyenlőtlenséggel!

3. A 2. feladat felhasználásával adjunk alsó és felső becslést az alábbi kifejezésekre:

a) $1{,}0023^{10}$

b) $2{,}0011^{10}$

c) $(a + b)^3$; $a > 10b$

$\boxed{4.}$ Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(p - q)^2 \geq \frac{c}{c + 1} p^2 - cq^2,$$

ahol $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $c > -1$.

*5. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$av^2 + b(u - v)^2 \geq \frac{ab}{a + b} u^2,$$

ahol $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$; $a > 0$; $b > 0$.

*6. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$ax^2+2bxy+cy^2 \leq (a+|b|)\, x^2+(c+|b|)y^2,$$

ahol $a,b,c \in \mathbb{R}$.

*7. A 6. feladat felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$-5x^2 + xy - 3y^2 \leq 0.$$

Mi az egyenlőség feltétele?

I. 4. SOROZATOK

1. Határozzuk meg $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\overline{\lim}\, a_n$ és $\underline{\lim}\, a_n$ értékeket, továbbá a sorozat legnagyobb és legkisebb elemét, végül a sorozat elemeiből képzett halmaz supremumát és infimumát, ha

a) $a_n = 1 + (-1)^n$

b) $a_n = \sqrt[n]{n!}$; $n > 0$

c) $\cos n \frac{\pi}{4}$

d) $\frac{n + (-1)^n}{n + 2}$

e) $\sqrt[n]{n}$; $n > 0$

f) $\dfrac{n^2 + 1}{n^2 + 2}$

g) $\log \dfrac{1}{n}$; $n > 0$

h) $a_n = (-1)^n$

i) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n + 1}\right)$

j) $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n + 1}$

k) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n + 1}$

l) $a_n = \cos n\pi + \dfrac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n + 1}$

m) a_n a racionális számok egy megszámlálásában az n-edik racionális szám (l. az I.1./3. feladatot!).

*2. Legyen $a_o = 1$ és

$$a_{n+1} = 2 + \frac{3}{a_n},$$

továbbá $b_o = 1$ és

$$b_{n+1} = 1 + \frac{6}{b_n}$$

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ és $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$ határértékeket! Melyik sorozat konvergál gyorsabban?

$\boxed{3.}$ Mutassuk meg, hogy az $a_n = (n^2+1)/(n^2+k)$ sorozat gyorsabban konvergál a $b_n = (n+1)/(n+2)$ sorozatnál, ahol $k > 0$ tetszőlegesen nagy szám.

$\boxed{4.}$ Legyen a_n és b_n olyan két sorozat, hogy

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0,$$

és a_n gyorsabban kovergál, mint b_n és $b_n \neq 0$.
Mit mondhatunk ekkor az $\frac{a_n}{b_n}$ sorozatról?

5. Tekintsük az alábbi a) és b) rekurzív megadású sorozatokat:

a) $x_o = 4$ b) $x_o = 4$

$x_{n+1} = \frac{21}{10 - x_n}$ $x_{n+1} = \frac{81}{30 - x_n}$

Hova konvergálnak ezek a sorozatok? Melyik konvergál gyorsabban?

$\boxed{6.}$ Mihez konvergál az alábbi rekurzív megadású sorozat:

$$x_{n+1} = p + \frac{A - p^2}{x_n + p},$$

ahol $A > p^2$; $p > 0$ és az x_o kezdő elemről feltesszük, hogy $x_o > -p$?
Hogyan függ a konvergencia sebessége p-től?

II. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

II. 1. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK ELEMI TULAJDONSÁGAI

1. Vázoljuk az

$$x \mapsto \sin 10x + \sin 9x \,, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény grafikonját! Harmonikus rezgést ír-e le ez a függvény?

$\boxed{2.}$ Vázoljuk az

$$x \mapsto \sin 10x + \sin 3\pi x$$

függvény grafikonját! Mi a lebegés jelensége?

3. Vázoljuk az

$$x \mapsto \sin 10x + \sin x$$

függvény grafikonját!

$\boxed{4.}$ Linearizáljuk a $\sin^3 2x$ kifejezést

a) a szögösszegező képletek felhasználásával,

b) komplex algebrai eszközökkel (az Euler összefüggés felhasználásával).

*5. Fejezzük ki tg x segítségével az alábbi függvényeket:

a) sin 2x
b) cos 2x
c) ctg 2x
d) tg 2x
e) sin 4x

*6. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x = 0 \\ x(2+\sin \frac{1}{x}) & , \text{ ha } x \neq 0 \end{cases}$$

függvény az $x = 0$ helyen lokálisan növekedő, de bármilyen kicsiny is $\delta > 0$, a $[-\delta, \delta]$ intervallumban nem monoton növekedő! Vázoljuk a függvény grafikonját! Melyek a függvény monoton szakaszai?

7. Mutassunk példát olyan $\mathbb{R}$-n értelmezett függvényre, amely egyetlen pontban lokálisan növekedő. Ezen kívül e függvény egyetlen pontban sem lokálisan növekedő, sem lokálisan csökkenő. Következik-e ebből, hogy a függvény nem monoton?

8. Mutassunk példát olyan $\mathbb{R}$-n értelmezett függvényre, amely teljesíti a 7. feladat feltételeit, azonkívül sehol sem monoton!

9. Konstruáljunk olyan $\mathbb{R}$-n értelmezett függvényt, amelynek az $x = 0$ helyen abszolút maximuma (ill. minimuma van), és a függvény itt nem monoton növekedőből monoton csökkenőbe (ill. monoton csökkenőből monoton növekedőbe) megy át!

10. Igaz-e az az állítás, hogy ha $f(x)$ periodikus, akkor $|f(x)|$ is az? Határozzuk meg a következő függvények lekisebb periódusát:

a) $\sin x$ és $|\sin x|$

b) $\operatorname{tg} x$ és $|\operatorname{tg} x|$

11. Periodikus-e a $\sin|x|$ ill. a $\cos|x|$ függvény?

12. Periodikus-e a $\sin \frac{1}{x}$ ill. az $\frac{1}{\sin x}$ függvény?

II. 2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

1. Bizonyítsuk be, hogy ha f homogén lineáris, akkor $f(x) = c\,x$ valamely $c \in \mathbb{R}$-re.

*2. Legyen $y = mx + b$, ahol $b \neq 0$ és legyen $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, ahol $y_0 = mx_0 + b$. Bizonyítsuk be, hogy y nem homogén lineáris függvénye x-nek, azonban v homogén lineáris függvénye u-nak!

*3. Az alábbi függvények közül melyek folytonosak és melyek egyenletesen folytonosak?
Adott $0 < \varepsilon$-hoz határozzuk meg a folytonosság definíciójában szereplő δ-t. Ha a függvény egyenletesen folytonos, akkor δ legyen x-től független.

a) $x \mapsto 2x$; $x \in \mathbb{R}$

b) $x \mapsto x^2$; $x \in \mathbb{R}$

c) $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \geq 0$

d) $x \mapsto x^2$; $x \in [0;1]$

e) $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \in [0;1]$

f) $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x > 0$

g) $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \geq \delta_0 > 0$

$\boxed{4.}$ Mutássuk meg ellenpéldákkal, hogy a

a) Bolzano (speciális eset)
b) Weierstrass I.,II.

tételek valamennyi feltétele lényeges!

II. 3. DERIVÁLÁS ÉS ALKALMAZÁSAI

*1. Határozzuk meg az alábbi függvények derivált függvényeit, majd ábrázoljuk az eredeti függvények grafikonjait!

a) $x \mapsto \operatorname{arc\,tg}(1 + x^2) + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1 + x^2}$; $x \in \mathbb{R}$

b) $x \mapsto \operatorname{arc\,tg}(1 + x) + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1 + x}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

c) $x \mapsto \operatorname{arc\,ctg} g(x) + \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{g(x)}$; $x \in \mathbb{R}$,

ahol $g(x) > 0$ és g deriválható minden $x \in \mathbb{R}$-re.

d) $x \mapsto \operatorname{arc\,ctg} g(x) + \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{g(x)}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

ahol $g(x) > 0$, ha $x > 0$, $g(0) = 0$; $g(x) < 0$, ha $x < 0$; g folytonos és deriválható minden $x \in \mathbb{R}$-re.

*2. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az

$$x \mapsto x \,\|\ln x \,|- 0{,}1|\,| \quad , x > 0$$

függvényen!

*3. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az f függvényen:

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2| & , \text{ ha } x \leq 3 \\ \|x - 4| - 1| & , \text{ ha } 3 < x < 10 \\ x\, e^x & , \text{ ha } x \geq 10 \end{cases}$$

*4. Rendezzük át az $(x - 2)^3 - (x - 2)$ polinomot

a) $x + 1$
b) $x - 1$
c) x

hatványai szerint!

5. Legyen $n > 0$ rögzített természetes szám. Az $(x + 1)^n$ polinomot írjuk fel x hatványai szerint, olymódon, hogy meghatározzuk e polinom $x_o = 0$-hoz tartozó n-edfokú Taylor-polinomját. Mutassuk meg, hogy a binomiális tétel ilymódon is bizonyítható!

6. Ellenőrizzük, hogy az $x^7 - x^4 - 112$ polinomnak az $x_o = 2$ gyöke. Emeljük ki az ehhez tartozó gyöktényezőt olymódon, hogy az eredeti polinomot $(x - 2)$ hatványai szerint átrendezzük!

7. Oldjuk meg a következő differenciál egyenlőtlenségeket $(x > 0)$:

a) $y' < y$
b) $y' > 2y$
c) $y' < y+1$
d) $y' > xy$

8. Az x és y változók polár koordinátás átírásával oldjuk meg a következő differenciálegyenlet rendszert:

$$\dot{x} = -x + x^2y + y^3$$

$$\dot{y} = -y - xy^2 - x^3$$

(Útmutatás:

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$$

$$y(t) = r(t)\sin\varphi(t) \quad).$$

9. Az alábbi függvények szélsőérték helyeinek és inflexiós pontjainak környezetét írjuk le a függvény adott helyhez tartozó, megfelelő fokszámú Taylor polinomja segítségével. (Megfelelő fokszámon azt a páros (szélsőérték esetén), ill. páratlan (inflexiós pont esetén) fokszámot értjük, amelyhez tartozó Taylor-polinom legmagasabb fokszámú tagjának együtthatója nem zérus).

a) $x \mapsto x \ln x^2, \quad x > 0$

b) $x \mapsto x\, e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $x \mapsto \dfrac{1 - x}{x^2}; \quad x > 0$

*10. Határozzuk meg az alábbi függvények derivált függvényeit és magasabb rendű derivált függvényeit:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

b)
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

c) $f(x) = |x|^3$

d) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$

e) $f(x) = \sin \arcsin x$

f) $f(x) = |x|^4$

g)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

*11. Határozzuk meg a következő függvények bal, és jobb oldali deriváltjait az x_o helyen:

a) $x \mapsto (1 - x^2)^{3/2}$; $x_o = 1$

b) $x \mapsto \arcsin x$; $x_o = 1$

c) $x \mapsto |x|$; $x_o = 0$

d) $x \mapsto x^2 \operatorname{sg} x$; $x_o = 0$

e) $x \mapsto \operatorname{sg} x$; $x_o = 0$

f) $x \mapsto [x]$; $x_o = 0$

g) $x \mapsto x + \sqrt{1 - 2x + x^2}$; $x_o = 1$

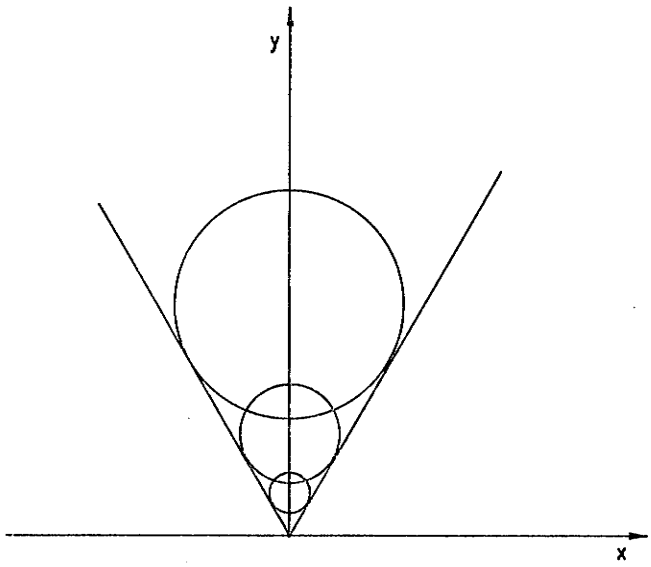
h)
$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } x > 0 \\ 2x^2, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases} ; \quad x_o = 0$$

$\boxed{12.}$ Mutassuk meg ellenpéldákkal, hogy a Rolle-tétel valamennyi feltétele lényeges!

$\boxed{13.}$ Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényen:

$$x - \ln|1 + x| - \frac{x^2}{c} ; \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

14. Tekintsük az $x \mapsto |x|$ függvényt. Ez az $x = 0$ helyen nem deriválható, így a görbület sem értelmezhető. Ha a görbületet úgy értelmeznénk, mint azon maximális sugarú kör sugarának a reciproka, amelyet a függvény grafikonjának "két ága közé ejtve" legalább elsőrendben érinti a grafikont az $x = 0$ helyen (ld. az ábrát!), akkor a görbület ∞ nagy lenne.



1. ábra

Létezik-e olyan pozitív, páros $f(x)$ függvény, amely szigorúan monoton csökkenőből szigorúan monoton növekedőbe megy át az $x = 0$ helyen, $f(0) = 0$, $f'(0)$ létezik (természetesen $f'(o) = 0$) és az $x = 0$ helyen ∞ görbületű olyan értelemben, hogy $\lim_{x \mapsto 0} g(x) = \infty$, ahol $g(x)$ a görbület x függvényében?

[15.] Mikor ad jó közelítést a Bernoulli-egyenlőtlenség?

[16.] Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az x^x függvényen!

II. 4. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

$\boxed{1.}$ Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat:

a) $$\int_{-10}^{10} \left| |x+1| - 2 \right| dx$$

b) $$\int_{-3}^{4} \left| |x^2 - 1| - 2 \right| dx$$

c) $$\int_{-2}^{\sqrt{3}-1} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{1 + \frac{1}{(1+x)^2}}\, dx$$

d) $$\int_{-1}^{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}\, dx$$

e) $$\int_{0}^{35} |\sin x|\, dx$$

$\boxed{2.}$ Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat próbafüggvények segítségével:

a) $\int e^{-x} \sin 2x\, dx$

b) $\int (e^{2x} \sin x + e^{x} \cos x)\, dx$

c) $\int (x\, e^{x} \sin x + e^{x} \cos x)\, dx$

d) $\int x^3 e^{-x} \sin x\, dx$

e) $\int x e^{x} (\cos x + \cos 2x)\, dx$

$\boxed{3.}$ Tekintsük az $\left\{ e^{-x},\ e^{-x} \cos kx,\ e^{-x} \sin kx \right\}$; $k=1,2,\ldots$ függvényhalmazt. Mutassuk meg, hogy ezek az e^{2x} súlyfüggvénnyel a $[0;2\pi]$ intervallumon ortogonális függvényrendszert alkotnak!

$\boxed{4.}$ A p_o, p_1, p_2,... nulladfokú, elsőfokú, másodfokú stb. normál polinomok ortogonális függvényrendszert alkotnak a $[0;1]$ intervallumon. Határozzuk meg e függvényrendszer első néhány elemét, ha $p_o \equiv 1$!

5. A felsorolt halmazalgebrai relációk közül melyek igazak és melyek hamisak ($I = [a,b]$):

a) $\Sigma_I \subset C_I^o$

b) $C_I^o \subset \Sigma_I$

c) $C_I^o \cap \Sigma_I = \emptyset$

d) $C_I^k \subset \Sigma_I$

e) $\Sigma_I \subset C_I^\infty$

f) $C_I^\infty \subset \Sigma_I$

III. ALGEBRA

III. 1. KOMPLEX ALGEBRA

*1. Határozzuk meg az alábbi komplex sor összegét:

a) $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^k$

b) $\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^k$

2. Határozzuk meg az alábbi kifejezés kanonikus alakját:

$$(x^3 \cdot i\, x)e^{(1+i)x};\ x \in \mathbb{R}$$

3. Az

$$x\, e^x \cos x + e^x \sin x$$

kifejezést írjuk át $\mathrm{Re}\, p(x) e^{\alpha x}$ alakra, ahol $p(x)$ megfelelő fokszámú komplex együtthatós polinom, $\alpha \in \mathbb{C}$.

[4.] A 3. feladat szerinti átírással és komplex próbafüggvény keresésével, végül kanonikus alakra való visszaírással számítsuk ki a következő határozatlan integrált

$$\int (x\, e^x \cos x + e^x \sin x)\, dx$$

[5.] Linearizáljuk a $\sin^4 x$ kifejezést! (l. II.1./4. feladatot!)

III. 2. MÁTRIXOK

*1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) A mátrix 15x15-ös méretű, diagonális mátrix, amelynek főátlójában felülről lefelé haladva sorrendben a következő elemek vannak:

1;1;1;-1;2;-1;2;1;0;5;2;-2;1;3;3;1.

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda & -8 & -12 & -14 & -15 & -7 & -3 \end{bmatrix}$

f) Tételezzük fel, hogy ismerjük az A,B és C mátrixokat, valamint az A^{-1} és C^{-1} mátrixokat.
Mi az $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ mátrix inverze? (0 a zérus mátrix)

g) $\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ T & I_2 \end{bmatrix}$, ahol I_1 nxn-es, I_2 mxm-es egység mátrix, 0 nxm-es zérus mátrix és T mxn-es mátrix.

*2. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait!

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) Az A 3x3-as mátrix sajátértékei λ_1, λ_2, és λ_3 sajátvektorai pedig s_1, s_2 és s_3. A B ugyancsak 3x3-as mátrixé pedig μ_1, μ_2 és μ_3, ill. r_1, r_2 és r_3. Akkor mit modhatunk az $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ mátrixról?

c) ld. 1.a) feladat mátrixát

d) ld. 1.b) feladat mátrixát

e) ld. 1.d) feladat mátrixát

f) ld. 1.e) feladat mátrixát, ahol $\lambda = 0$

g) ld. 1.g) feladat

h) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

*3. Határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} -1 & p \\ -p & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad p^2 \neq \frac{1}{4}$$

mátrix sajátértékeit, sajátvektorait a p paraméter függvényében!

III. 3. MÁSODRENDŰ FELÜLETEK

1. Határozzuk meg az alábbi egyenletű felületek egyenletének kanonikus alakját és ábrázoljuk a felületeket az eredeti koordináta-rendszerben:

a) $y^2 + x - 2z = 1$

b) $\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)+\frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{3}-1)x+(\sqrt{3}-1)y+2z)=0.$

c) $2z^2 + 2z + x - 3y = 6$

*2. Melyek az alábbi felületnek az origóhoz legközelebbi pontjai:

a) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy = 6$

b) $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xy = 6$

c) $4xy + z = 1$

IV. VÉGTELEN SOROK

IV. 1. HATVÁNYSOROK

$\boxed{1.}$ Határozzuk meg $\frac{1}{1 + \ln(1 + x)}$ Maclaurin sorának első 5 tagját!

$\boxed{2.}$ Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!}$ sor kielégíti az $xy' + (x+1)y = 1$ differenciálegyenletet!

*3. Határozzuk meg az $y' + xy = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ differenciálegyenlet megoldásainak Maclaurin sorát!

4. Határozzuk meg az $y' + y = x^4 - 1$ differenciálegyenlet megoldásainak Maclaruin sorát!

5. Határozzuk meg az

$$y' - y + \frac{(x-1)^5}{5!} = 0 \quad \text{differenciálegyenletnek}$$

azt a megoldását hatványsor alakjában, amelyre $y(1) = 0$.

*6. Határozzuk meg az $y' + ay = f(x)$ differenciálegyenletnek azt a megoldását, amelyre $y(0) = y_0$, ahol

a) $a = 1$; $f(x) = e^{x^2}$; $y_0 = 0$

b) $a = -1$; $f(x) = e^{-x^2}$; $y_0 = 0$

c) $a = 2$; $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$; $y_0 = 0$

d) $a = 1$; $f(x) = e^{(x-1)^2}$; $y_0 = 1$

IV. 2. FÜGGVÉNYSOROZATOK

$\boxed{1.}$ Legyen

$$f_n(x) = \frac{-n}{\left(x + \frac{n-1}{\pi}\right)^2} \cos \frac{n}{x + \frac{n-1}{\pi}},$$

ahol $x \geq 1/\pi$ és $n = 1,2,3,\ldots$.
Határozzuk meg az $I : [1/\pi,\infty) \mapsto R$ függvényt, ahol

$$I(x) = \lim_{n\mapsto\infty} \int_{1/\pi}^{x} f_n(t)\,dt.$$

Keressük meg azt az N küszöbindexet, amelyre $N < n$ esetén $\int_{1/\pi}^{x} f_n(t)\,dt$ eltérése $I(x)$-től, bármely x-re adott $0 < \varepsilon$ -nál kisebb lesz! Mit tapasztalunk, mi a jelenség oka? (Ld. IV.Kötet, Végtelen sorok 4.2. Definícióját)

$\boxed{2.}$ Határozzuk meg a $\lim_{n\mapsto\infty} f_n(x)$ határfüggvényt, a $\lim_{n\mapsto\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ határértéket, valamint az $\int_a^b \lim_{n\mapsto\infty} f_n(x)\,dx$ integrált!
Mit tapasztalunk, mi a jelenség oka? (Ld. IV.Kötet, Végtelen sorok 5.3 Tételét)

a) $a = 0;\ b = 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & , \text{ ha } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & , \text{ ha } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

b) $a = 0\ b = 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } 0 \leq x \leq 1-1/n \\ 2n^2x-2n^2+2n & , \text{ ha } 1-1/n \leq x \leq 1 - \frac{1}{2n} \\ -2n^2x+2n^2 & , \text{ ha } 1 - \frac{1}{2n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$\boxed{3.}$ Legyen $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1/n}{x - \frac{n-1}{n\pi}}$, ahol $x \geq 1/\pi$ és $n=1,2,\ldots$. Határozzuk meg az $f(x) = \lim_{n\mapsto\infty} f_n(x)$ függvényt, ennek $f'(x)$ deriváltját, valamint a $\lim_{n\mapsto\infty} f_n'(x)$

határfüggvényt! Mit tapasztalunk, mi a jelenség oka? (Ld. IV.Kötet, Végtelen sorok 5.1 Tétele)

$\boxed{4.}$ Legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sin x \frac{n\pi}{2}, & \text{ha } |x| \leq 1/n \\ \frac{1}{n} \operatorname{sg} x, & \text{ha} \leq \frac{1}{n} \; |x| \leq |x_o| \end{cases},$$

ahol $x_o \in \mathbb{R}$, adott szám, $n=1,2,\ldots$.

Igaz-e a

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

reláció?

IV. 3. FOURIER-SOROK

*1. Határozzuk meg az alábbi függvények komplex Fourier-sorát:

a) $|\sin x|$

b) $|\cos x|$

c) $\cos x \sin^2 x$

d) $\operatorname{sg} \sin x$

e) $\int_0^x \operatorname{sg}(\operatorname{sg} u \sin u)\,du$

2. Határozzuk meg a következő két függvény Fourier-sorát:

a) $|\sin \pi x|$;

b) $$f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & \text{ha } -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & \text{ha } 1/2 \leq x \leq 1+1/2 \end{cases}$$

$f(x+2) = f(x)$

*3. Végezzük el a következő integrálást (az integrandust tekintsük véges Fourier-sornak):

$$\int_0^x \sin^2 u \cos^2 2u \, du$$

*4. Mutassuk meg, hogy a megadott (véges vagy végtelen, valós vagy komplex) Fourier-sorok kielégítik a megadott differenciálegyenleteket:

a) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(1-k^2)} \sin kx \; ; \quad y'' + y = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

b)

$$a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{a_k}{(1+k^2)} \cos kx + \frac{b_k}{(1+k^2)} \sin kx \right)$$

$$-y'' + y = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

c) $$-\frac{1}{3} e^{i2x}$$

$$y'' + y = e^{i2x}$$

d) $$\frac{1}{1-k^2} e^{ikx} \; ; \quad k^2 \neq 1$$

$$y'' + y = e^{ikx}$$

e) $$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq \pm 1}}^{\infty}{}^{*} \frac{c_k}{1-k^2} e^{ikx}$$

$$y'' + y = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq \pm 1}}^{\infty}{}^{*} c_k e^{ikx}$$

f) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}^{*} \frac{c_k}{2-k^2+ik} e^{ikx}$$

$$y'' + y' + 2y = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}^{*} c_k e^{ikx}$$

*5. Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet periodikus megoldását /használjuk fel az előző feladatokban alkalmazott eredményeket és módszereket!):

a) $y'' + 3y' + 4y = \sin x \cos^3 x$

b) $y'' + 2y' + y = |\sin x|$

c) $y' + 2y = \cos x \sin^2 x$

d) $y' - 3y = \sin^2 x \cos^2 2x$

e) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sg} \sin x$

f) $y'' + 3y' + 4y = \sin^3 x$

g) $y'' - 3y' - 3y = \cos^3 x$

V. TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

V. 1. FELÜLETEK SZEMLÉLTETÉSE, HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

*1. A koordináta-síkokkal párhuzamos metszetgörbék vizsgálata alapján szemléltessük az alábbi egyenletű felületek térbeli képét. Ennek alapján mutassuk meg, hogy az $(x,y) \mapsto z$ függvény hol nem folytonos. Mit modhatunk ezeken a helyeken a határértékekről?

a)
$$z = \frac{2\,xy}{x^2 + y^2}$$

b)
$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

c)
$$z = \frac{1}{x + y}$$

d)
$$z = \frac{xy}{x + y}$$

e)
$$z = \frac{x^2\,y^2}{x^2 + y^2}$$

2. Jellemezzük az $f(x)$; $x \in \mathbb{R}^n$ függvény (hiper)-szintfelületeit!

a) $n = 3;\ f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

b) $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$

c) $f(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

d) $f(x) = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|$

e) $f(x) = d^T x$, ahol $d \in \mathbb{R}^n$ adott vektor

f) $f(x) = x^T V x$, ahol V nxn-es pozitív definit mátrix.

3. Mik lesznek az alábbi felületek szintvonalai:

a) sík
b) körhenger
c) körkúp
d) ellipszoid

V. 2. TÖBBDIMENZIÓS TARTOMÁNYOK

*1. Milyen tartományon értelmezhetők az alábbi függvények? Jellemezzük ezeket a tartományokat a tanult szempontok szerint (korlátosság, összefüggés stb.)!

a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto \ln (x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$

b) $x \longmapsto \sqrt{1 - \|x\|}$; $x \in \mathbb{R}^n$

c) $x \longmapsto \ln(1 - \|x\|)$; $x \in \mathbb{R}^n$

d) $x \longmapsto \dfrac{1}{1 - |x_1 + \ldots + x_n|}$; $x \in \mathbb{R}^n$

*2. Jellemezzük korlátosság, összefüggés, zártság szempontjából az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott tartományokat:

a) $1 \leq |x_k| < 2$; $k=1,\ldots,n$

b) $x_k \geq 0$; $k=1,2,3,4$

c) $x_4 \leq x_1 + x_2 + x_3$

V. 3. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLÁSA

1. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű felület tetszőleges pontjában az érintősík egyenletét!

*2. Határozzuk meg az alanti függvények első és másodfokú Taylor-polinomjait a megadott helyeken:

a) $(x,y,z) \mapsto \sin(xy + z)$; $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$(x_o, y_o, z_o) = (0,0,0)$

b) $x \mapsto \dfrac{1}{1 - \|x\|^2}$; $\|x\| < 1$

$x_o = 0$

c) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto 2x_1x_2 + x_3 + 3x_3x_4 - x_2x_4$

$x_{10} = 0$

$x_{20} = 1$

$x_{30} = -1$

$x_{40} = 2$

3. Határozzuk meg a megadott függvények n-edrendű Taylor-polinomjait a megadott helyeken:

a) $(x,y) \mapsto \sin(xy)$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $(x_o, y_o) = (0,0)$

b) $(x,y,z) \mapsto (x + y + z)^3$; $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; $(x_o, y_o, z_o) = (0,0,0)$

c) $(x,y) \mapsto x^2y + xy$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $(x_o, y_o) = (1;-1)$

4. Legyenek adottak a g négyváltozós, x,y és z egyváltozós függvények. g parciális, valamint x, y és z közönséges deriváltjainak ismeretében határozzuk meg a $g(t, x(t), y(t), z(t))$ összetett függvény deriváltját!

$\boxed{5.}$ Vázoljuk a $\varphi : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^{1/x} \frac{\sin xy}{y}\, dy$$

függvény grafikonját!

*6. Számítsuk ki az alábbi deriváltat az x = 1 helyen:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\sin x}^{2} \frac{e^{xy}}{y}\, dy$$

V. 4. SZÉLSŐÉRTÉK-SZÁMÍTÁS

1. Határozzuk meg az

$$(x,y) \longmapsto \big||x|+|y|-1\big|$$

függvény lokális szélsőérték helyeit!

2. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőérték helyeit:

a) $(x,y,z) \longmapsto \big||x|+|y|+|z|-1\big|$

b) $(x,y) \longmapsto |1 - x^2 - y^2|$

c) $(x,y) \longmapsto (1 - x^2 - y^2)^2$

d) $(x,y,z) \longmapsto |x + y + z|$

$\boxed{3.}$ Adjunk módszert az alábbi függvény lokális szélsőérték helyeinek a meghatározására

a) $(x,y,z) \longmapsto ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz$

b) $x \longmapsto x^TAx + b^Tx + c$, ahol $x \in \mathbb{R}^n$; $c,b \in \mathbb{R}^n$;
A nxn-es mátrix

*4. Határozzuk meg az alábbi függvény lokális szélsőértékét:

a) $(x,y,z) \longmapsto 7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz+x-2y+1$

b) $(x,y,z) \longmapsto x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz+x+z+8$

c) $(x,y,z) \longmapsto 2y^2+z^2-3x^2-4xy-8xz+12yz+x+y-13z+3$

*5. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

a) $(r,\varphi) \longmapsto r^2(2\sin^2 2\varphi -1)$

b) $(r,\varphi) \longmapsto r^2(2\sin^2 2\varphi +1)$

V. 5. IMPLICIT MEGADÁSÚ FÜGGVÉNYRENDSZEREK. INVERZ FÜGGVÉNYRENDSZEREK

$\boxed{1.}$ Tekintsük a

$$\cos x\, y - \frac{y}{x} = 0$$

egyenletet! Meghatározható-e y, mint x függvénye az $x_o=1$ pont egy elég kis környezetében? Ha igen, akkor adjunk lineáris közelítést az y(x) függvényre az $x_o=1$ pont környezetében! Létezik-e itt y(x) inverze, és ennek mi a lineáris közelítése?

$\boxed{2.}$ Az $(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 - y^2) = 0$ egyenlet esetében vizsgáljuk meg az előző feladatban felvetett problémát, ha $x_o \cong 1{,}7978$; $y_o \cong 0{,}4817$. Mit mondhatunk a (0;0); (-2;0) és (2;0) pontok környezetében?

*3. Tekintsük az $y-\ln y+x-\ln x-a = 0$; $y \geq 1$ egyenletet! Adjunk lineáris közelítést, ahol lehetséges az y(x) függvényre az x_o pont környezetében. E pont környezetében adjunk lineáris közelítést y(x) inverzére, ha lehetséges.

a) $x_o = 1$ $a = 10$

b) $x_o = 1$ $a = 3$

c) $x_o = 12$ $a = 10$

d) $x_o = 2$ $a = 10$

e) $x_o = 3$ $a = 9$

f) $x_o = 0{,}5$ $a = 11$

g) $x_o = 0{,}3$ $a = 3$

h) $x_o = 12{,}19911$ $a = 10$

$\boxed{4.}$ A $(\sqrt[3]{9};\ \sqrt[3]{9};\ -3)$ pont környezetében meghatározható-e z, mint x és y egyértelmű függvénye, ha az x,y és z változók között az alábbi összefüggés érvényes:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0\ ?$$

Ha létezik e függvénykapcsolat, akkor linearizáljuk!

$\boxed{5.}$ Tekintsük az

$$u - u^2v^2 - \frac{xy}{w} = -4$$

$$\frac{1}{u\,v\,w} + \frac{x}{y} = 0$$

egyenletrendszert! Létezik-e a $g(u,v,w)$, $f(u,v,w)$ függvényrendszer, amely $x = g(u,v,w)$ és $y = f(u,v,w)$ esetén kielégíti a fenti egyenletrendszert és amelyre

$$2 = g(1,-1,1),$$

$$2 = f(1,-1,1)?$$

Ha igen, akkor határozzuk meg e függvényrendszer $(1,-1,1)$ pontbeli lineáris közelítését!

*6. Az (x_o,y_o,u_o,v_o) pontban határozzuk meg az $F(u,v,x,y) = 0$; $G(u,v,x,y) = 0$ egyenletek által definiált $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ függvényrendszer lineáris közelítését, valamint ugyanebben a pontban az inverz függvényrendszer lineáris közelítését!

$$F(u,v,x,y) = uv^2 - \frac{x}{u^2v} - e^{xy}v^2 - av^2$$

$$G(u,v,x,y) = uv - xv\sin(x + y) - \frac{x}{y} - by$$

a)	$x_o = 0$	$y_o = 1$	$u_o = 2$	$v_o = -1$	$a = 1$	$b = -2$
b)	$x_o = 1$	$y_o = -1$	$u_o = 2$	$v_o = -1$	$a = 1{,}882$	$b = 1$
c)	$x_o = -3$	$y_o = 1$	$u_o = 1$	$v_o = 2$	$a = 1{,}325$	$b = -0{,}456$
d)	$x_o = 3$	$y_o = -2$	$u_o = -1$	$v_o = 1$	$a = -4{,}002$	$b = 1{,}012$
e)	$x_o = 3$	$y_o = -2$	$u_o = 2$	$v_o = -1$	$a = 2{,}748$	$b = -1{,}012$
f)	$x_o = -2$	$y_o = -2$	$u_o = 1$	$v_o = 3$	$a = -53{,}52$	$b = -3{,}27$
g)	$x_o = -2$	$y_o = 3$	$u_o = -1$	$v_o = 3$	$a = -0{,}928$	$b = 0{,}905$

7. A 6. feladatban határozzuk meg x és y lineáris közelítését, ha

a) $u = 2{,}001$ $\quad v = -1{,}002$

b) $u = 2{,}002$ $\quad v = -0{,}998$

c) $u = 1{,}999$ $\quad v = -0{,}998$

d) $u = 1{,}998$ $\quad v = -1{,}002$

8. Tekintsük az

$$Ax + By = 0 \; ; \; x \in \mathbb{R}^m \; ; \; y \in \mathbb{R}^n;$$

A nxm-es és B nxn-es mátrixok

egyenletet. Mi a feltétele annak, hogy y x függvényében egyértelműen meghatározható legyen? Hogyan alkalmazható erre az implicit függvénytétel? Ha az y(x) függvény létezik, akkor ennek mi a lineáris közelítése?

9. Határozzuk meg a

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z-18 = 0$$

egyenlet által meghatározott felület merőleges vetületeit az (x,y) síkra és a z koordináta tengelyre!

10. Az $x\,e^{-x}$ függvénynek létezik inverze az

a) $x_o = 1$

b) $x_o = 2$

pont elég kis környezetében? Ha igen, akkor adjuk meg az inverz függvény e pontbeli lineáris közelítését!

11. Az

$$x = e^{-u}\, v \cos v$$

$$y = e^{u} \sin v$$

egyenletrendszert nyilvánvalóan kielégítik az $u_o = 0$, $v_o = \pi$, $x_o = -\pi$, $y_o = 0$ értékek. Adjunk jó közelítést (közelítsünk lineárisan!) arra, hogy milyen u_1 és v_1 értékek mellett lesz $x_1 = -\pi + 0{,}01$, $y_1 = -0{,}02$?

12. Tekintsük az $x^2 + 2y^2 - xy = 1$ egyenletet!

a) Határozzuk meg annak a g(x) függvénynek a maximális értelmezési tartományát, amely y = g(x) helyettesítéssel kielégíti az egyenletet, és amelyre $g(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$!

b) Határozzuk meg annak az f(y) függvénynek a maximális értelmezési tartományát, amely x = f(y) helyettesítéssel kielégíti az egyenletet, és amelyre f(0) = -1!

V. 6. TÖBBES INTEGRÁLOK

*1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat

a)

$$\iint_D (1 - |x| - |y|)\, dx\, dy;$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$$

b)

$$\int_V dV \; ; \; V = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x_k| \leq a;\; k=1,\dots,n\right\}$$

c)

$$\int_0^1 \int_0^{x_4} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} x_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

$\boxed{2.}$ Írjuk fel az alábbi integrálok határait:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \; ; \qquad \iint_D f(x,y)\, dy\, dx$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 6y^2 - xy \leq 3\right\}.$$

VI. VEKTORANALÍZIS

VI. 1. TENZOROK

*1. Legyenek $\underline{\underline{a}}$ és $\underline{\underline{b}}$ adott vektorok. Határozzuk meg annak a tenzornak a koordináta mátrixát, amely az $\underline{\underline{r}} \mapsto \underline{\underline{b}} \times (\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{r}})$ leképezést valósítja meg. Melyek a tenzor sajátvektorai és sajátértékei?

*2. Határozzuk meg annak a tenzornak a koordináta mátrixát, amely az alábbi - koordinátáival adott - vektorokat rendre az - ugyancsak koordinátával adott - képvektorokba képezi le:

a) $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix}-2\\0\\-2\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}$

*3. Határozzuk meg annak a tenzornak a koordináta mátrixát, amelynek sajátvektorai és sajátértékei rendre a következők (a sajátvektorokat koordinátáikkal adjuk meg):

a) $\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}; 5; -5; 1$

b) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}; 3; 3; 1$

c) $\begin{bmatrix}1\\i\\0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1\\-i\\0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$; $1+i;\ 1-i;\ 2$

d) $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$; $-1;\ -1;\ 3$

4. Határozzuk meg egy adott tengely körül adott szöggel való elforgatás, majd adott síkra való vetítés tenzorának koordináta mátrixát!

VI. 2. POTENCIÁLELMÉLET

1. Tekintsük a $\underline{v}$ vektormezőt. Legyen adott a térben két pont A és B, amelynek koordinátái rendre x_1, y_1, z_1 és x_2, y_2, z_2, ahol $x_1^2+y_1^2 \neq 0$ és $x_2^2+y_2^2 \neq 0$.

Mekkora lehet az $\int_\gamma \underline{v}\, d\underline{r}$ integrál értéke, ahol γ az A pontból induló és B pontban végződő, a z tengelyt nem metsző reguláris görbe?

a)
$$\underline{v} = \frac{y\,\underline{i} - x\,\underline{j}}{x^2 + y^2}$$

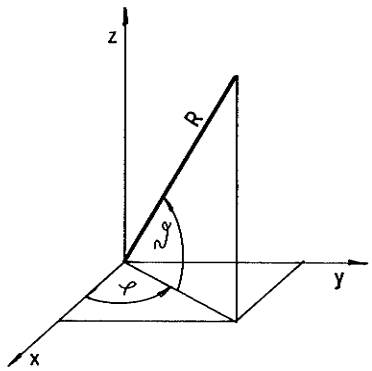
b)
$$\underline{v} = \frac{x\,\underline{i} + y\,\underline{j}}{x^2 + y^2}$$

VI. 3. INTEGRÁL ÁTALAKÍTÓ TÉTELEK

1. Tekintsük a gömbfelület alábbi paraméterezését:

$$r = R,$$
$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$
$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

ahol R a gömb sugara és ϑ valamint φ értelmezését az ábrán láthatjuk.
Szemléltessük a Gauss-Osztrogradszkij-tételt a $\underline{v} = \underline{r}$ vektormező gömbfelületen vett felületi integrálja, ill. divergenciájának megfelelő integrálja kiszámításával!



2. ábra

*2. Számítsuk ki a $\underline{v} = -3\underline{r}$ vektormezőnek a

$$z^2 = 2 - x^2 - y^2 \;;$$

$$z \geq 0$$

egyenletű felületre vett integrálját, a $\underline{k}$ vektorral hegyesszöget bezáró irányítottság mellett!

*3. Számítsuk ki a $\underline{v} = \underline{r}/|\underline{r}|^3$ vektormező integrálját a

$$5x^2+6y^2+10z^2-xy + \frac{1}{2}\,xz+zy+x-20=0$$

felületre. Az $x = y = 0$, $z = \sqrt{2}$ pontban a felület normálvektora a $\underline{k}$ vektorral hegyesszöget zárjon be.

*4. Számítsuk ki a $\underline{v} = \underline{r}/|\underline{r}|^3$ vektormező integrálját a

$$6x^2+5y^2+5z^2-xz-yz+28=0$$

felületre!

*5. Számítsuk ki a $\underline{v}=(x-z)\underline{i}+(y+2xz)\underline{j}+(2z-xy)\underline{k}$ vektor-vektor függvény integrálját az

$$x^2+y^2+z^2-4x-6y+10z+34=0$$

egyenletű zárt felületre kifelé irányuló normális mellett!

VII. KOMPLEX FÜGGVÉNYEK

VII. 1. KOMPLEX NUMERIKUS SOROK

*1. Az alábbi sorok közül melyik konvergens? A konvergens sornak határozzuk meg az összegét:

a) $\sum_{k=3}^{\infty} i \left(\frac{3i}{2}\right)^k$

b) $\sum_{k=2}^{\infty} i \left(\frac{2i}{3}\right)^{k+1}$

c) $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{i+1}{3}\right)^k$

d) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{i-1}{2}\right)^{k+2}$

e) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i-2}{2}\right)^k$

f) $\sum_{k=3}^{\infty} (i + 2) \left(\frac{i+3}{4-i}\right)^{k+1}$

VII. 2. ELEMI FÜGGVÉNYEK

*1. A definíciós képletek felhasználásával linearizáljuk az alábbi függvényeket:

a) $\sin^2 z \cos z$

b) $\cos^2 z \sin z$

c) $\sin^3 \omega z$

d) $\cos^3 \omega z$

e) $\sin^2 2z + \cos^2 3z$

VII.3 VALÓS VÁLTOZÁS KOMPLEX ÉRTÉKŰ FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

1. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjait:

   a) $[(1 + i)t + (1 - i)]\exp((1 + 2i)t)$

   b) $t(it^2 + 2 - i)\exp(it)$

   c) $(2it^3 + t^2 - 1 - i)\exp((1 - i)t)$

2. Legyen $f(t) = u(t) + i\,v(t)$ adott komplex függvény. Nyilvánvalóan teljesül a

$$\mathrm{Re}\,\frac{d\,f(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\,\mathrm{Re}\,f(t) = \frac{d\,u(t)}{dt}$$

reláció. Szemléltessük ezt az 1. feladat függvényeinél!

VII.4 KOMPLEX FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

*1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

a)

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}\ ;\ \gamma:\ z(t) = t + t^3 i\ ;\ 1 \le t \le 3$$

b)

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2}\ ;\ \gamma:\ z(t) = t - t^4 i\ ;\ 1 \le t < \infty$$

c)

$$\int_\gamma (z^2 + 2z)\,dz\ ;\ \gamma:\ z(t) = \sin t + i\cos t;\quad 0 \le t \le 2\pi$$

d)

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}\ ;\ \gamma:\ z(t) = 2\cos t + (1 + 2\sin t)i\ ;\quad 0 \le t \le 4\pi$$

e)

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz\ ;\ \gamma:\ z(t) = \cos t - i\sin t;\ 0 \le t \le 2\pi$$

f)

$\int_\gamma e^z \sin z \, dz$; ahol γ az $1 + i$ pontból az $1 - i$ pontig haladó egyenes szakasz és az utóbbi pontból a $3i$ pontba haladó egyenes szakasz egyesítése.

g)

$\int_\gamma e^{-2z} \cos z \, dz$; ahol γ az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű görbe $x \leq -1$ szakasz és az irányítás megegyezik x csökkenésének irányával.

VIII. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

VIII. 1. SZUKCESSZÍV APPROXIMÁCIÓ

$\boxed{1.}$ Mutassuk be a szukcesszív approximáció alkalmazását az alábbi differenciálegyenleteken

a) $y'' + y = 0$

b) $y^{IV} + y = 0 \quad y(0) = 1;\ y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

c) $y'' + y^2 = 0 \quad y(0) = 2;\ y'(0) = 0$

VIII. 2. ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

*1. Határozzuk meg az alábbi diferenciálegyenletek periodikus megoldásait, az amplitudó viszonyt és a fáziskülönbséget!

a) $y' + 3y = 2\cos(\omega x + \varphi)$, ahol

$$\omega = 1 \quad \varphi = 0$$
$$\omega = 0{,}1 \quad \varphi = -\pi/2$$
$$\omega = 3 \quad \varphi = \pi/3$$

b) $y'' + 4y' - y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{7}\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

d) $y''' - 2y'' + y' - y = \frac{9}{4}\sin(2x + 1)$

e) $y^{VI} - 2y'' + y = 4\cos 5x$

f) $y^{IV} - y''' - y'' + y' + 3y = \sin(6x - 2)$

g) $y^{V} - 3y'' + y = 7\cos(2x + 2)$

*2. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek periodikus, illetve kváziperiodikus megoldásait ($\omega > 0$):

a) $y'' + y' + y = \sin\omega t$, ahol

$= 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 3;\ 10$

b) $y'' + 2y' + 3y = \sin^2 x \cos x + \sin^3 x$

c) $y''' - y = \cos^3 4x$

d) $y^{VI} - y^{V} + y = \cos\omega t - 2\sin\omega t$

$\omega = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 1;\ 3;\ 10$

e) $y^{V} - 2y^{IV} = \cos^2 2x - \cos^3 x - 3$

f) $y^{VI} - 3y^{IV} + y'' + 2y = \cos^2\pi x - \cos^2 x \sin x$

g) $y^{IV} + y^{III} - y'' + 3y = \sin\frac{\pi}{2}x + \cos x - 2$

h) $y' - 10y = \cos^3 x \cos 3x$

i) $y'' + y = \cos^{\pi} x$

*3. Az alábbi differenciálegyenletekről döntsük el, hogy van-e periodikus megoldásuk. Válaszunkat indokoljuk!

a) $y'' + y = \sin\pi x - \cos x$

b) $y^{VI} + y^{V} + y^{IV} + 2y''' + y'' + y' = \sin 7x - \cos x$

c) $y''' + y'' - y = \sin 2x$

d) $y'' + ay = \sin\omega x$

e) $y^{V} - 3y'' + y = \sin 5x$

f) $y^{VI} - 3y^{IV} + y'' - y = \sin\frac{13}{17}x - \mathrm{xos}\,\frac{19}{23}x$

g) $y''' - 2y'' + y = \sin\frac{12}{19}x - \cos\frac{\pi}{e}x$

h) $y'' + y' + y = |\sin x|$

i) $y' + y = 2 + \sin^7 x \cos 3x$

j) $y'' + y = \sin 3x - \sin\pi x$

k) $y^{IV} - y = \sin x - \cos\frac{\pi}{2}x$

l) $y' + y = 3 - \sin\sqrt{2}x$

$\boxed{4.}$ Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

ahol $p > 0$; $q > 0$ és f egy 2π szerint periodikus, Fourier-sorba fejthető függvénynek a $[0,\infty)$ intervallumra való leszűkítése. Mi a megoldás állandósult (periodikus) és tranziens komponense?

$\boxed{5.}$ Mi a feltétele annak, hogy az

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

differenciálegyenletnek létezzen

- periodikus megoldása,
- állandósult periodikus megoldása, illetve
- rezonancia lépjen fel?

($p \geq 0$; $q \geq 0$; f Fourier-sorba fejthető periodikus függvény)

*6. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek egy partikuláris megoldását a komplex próbafüggvény módszerével:

a) $y'' - y' + y = x \sin x - \cos x$

b) $y' + y = x^2 \cos 2x + x \sin x$

VIII. 3. STABILITÁS

*1. Keressük meg az alábbi differenciálegyenletek egyensúlyi helyzeteit, állítsuk elő az egyensúlyi helyzetekhez tartozó első variációs rendszereket, majd ezek alapján - ahol lehet - határozzuk meg az egyensúlyi helyzetek jellegét. Végül rajzoljuk meg a trajektóriák képét!

a) $\dot{x} = x + x^2$

$\dot{y} = xy$

b) $\dot{x} = x + 2xy$

$\dot{y} = y - xy$

c) $\dot{x} = x + y + a$; $a \in \mathbb{R}$

$\dot{y} = xy + b$; $b \in \mathbb{R}$

d) $\dot{x} = yx^2 - x$

$\dot{y} = xyz - y$

$\dot{z} = x^2y + x^2z - z - 2x$

e) $\dot{x} = x - x^2$

f) $\dot{x} = x - x^3$

$\boxed{2.}$ Tekintsük az

$$\dot{x} = y + x - x^3 - xy^2$$

$$\dot{y} = y - x - yx^2 - y^3$$

egyenletet! Hajtsuk végre ezen az 1. feladat szerinti vizsgálatot, majd írjuk át a differenciálegyenletet polár koordinátákba az

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

egyenletek felhasználásával! Mit tudunk megállapítani?

VIII. 4. PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

*1. Oldjuk meg az alábbi lineáris hővezetési problémákat:

a) $u'_t = u''_{xx}$; $0 \leq x \leq \pi$; $u(x,0) = 1 + \frac{x^2}{\pi^2}$;

$u(0,t) = 1$; $u(\pi,t) = 2$

b) $u'_t = u''_{xx}$; $0 \leq x \leq h$; $u(x,0) = \cos^3 \frac{\pi}{h}x$;

$u'(0,t) = u'(h,t) = 0$

$\boxed{2.}$ Az 1. feladatban állapítsuk meg az állandósult megoldásokat! Magyarázzuk meg minél több oldalról az eredményt!

*3. Adjunk közelítő megoldást az alábbi hővezetési problémára:

$u'_t = u''_{xx}$; $0 \leq x \leq 1$; $u'(0,t) = u'(h,t) = 0$;

$u(x,0) = x^3 - 3x + 2$

*4. Határozzuk meg az $u''_{tt} = c^2 \Delta u$ térbeli hullámegyenlet stacionárius megoldását

a) hengerszimmetrikus
b) gömbszimmetrikus

esetekben!

$\boxed{5.}$ Tekintsük az alábbi azonosságokat:

$$\sin(x - vt) + \sin(x + vt) = 2\sin x \cos vt,$$

$$\cos(x - vt) + \cos(x + vt) = 2\cos x \cos vt.$$

Ezek felhasználásával milyen magyarázatot tudunk adni arra a tényre, hogy két merőben eltérő fizikai képet szolgáltató matematikai módszer (a Fourier- és a d'Alambert-féle módszer) egyaránt alkalmas a hullámegyenlet megoldására? (ld. Pt.VIII.kötet 260. feladatát is!)

IX. FUNKCIONÁLANALÍZIS

IX. 1. LINEÁRIS TEREK

1. Állapítsuk meg a Pt.III.351-361. feladataiban szereplő lineáris terek dimenzióját! Ezek valós vagy komplex lineáris terek?

$\boxed{2.}$ Legyen $\mathbb{R}^n$-ben $(n \geq 3)$ egy bázis $\underline{\underline{e}}_1, \ldots, \underline{\underline{e}}_n$. Ebben a bázisban az $\underline{\underline{r}} \in \mathbb{R}^n$ vektor koordináta oszlopvektora legyen $\underline{r}$. Legyen most $\tilde{\underline{\underline{e}}}_1, \ldots, \tilde{\underline{\underline{e}}}_n$ egy $\mathbb{R}^n$-beli másik bázis, akkor ebben a bázisban mennyi $\underline{\underline{r}}$ koordináta oszlopvektora $\tilde{\underline{r}}$? (Ellenőrizzük, hogy jól adtuk-e meg a bázisokat!)

a) $\underline{\underline{e}}_1 = (1;0;\ldots;0)$; $\underline{\underline{e}}_2 = (0;1;0;\ldots;0)$; ...

$\underline{\underline{e}}_n = (0;0;\ldots;0;1)$;

$\tilde{\underline{\underline{e}}}_1 = (1;1;0;\ldots;0)$; $\tilde{\underline{\underline{e}}}_2 = (0,;1;1;0;\ldots;0)$; ...

$\tilde{\underline{\underline{e}}}_{n-1} = (0;0;\ldots;0;1;1)$; $\tilde{\underline{\underline{e}}}_n = (1;0;\ldots;0;1)$.

b) $\underline{\underline{e}}_1 = (0;1;\ldots;1)$; $\underline{\underline{e}}_2 = (1;0;1;\ldots;1)$; ...

$\underline{\underline{e}}_n = (1;1;\ldots;1;0)$;

$\tilde{\underline{\underline{e}}}_1 = (0;0;1;\ldots;1)$; $\tilde{\underline{\underline{e}}}_2 = (1;0;0;1;\ldots;1)$; ...

$\tilde{\underline{\underline{e}}}_{n-1} = (1;1;\ldots;1;0;0)$; $\tilde{\underline{\underline{e}}}_n = (0;1;\ldots;1;0)$.

$\boxed{3.}$ Tekintsük a valós polinomok P lineáris terét! Nyilvánvaló, hogy P-ben az x^n; $n \in N$ polinomok lineárisan független rendszert alkotnak. Hasonlóképpen egyszerű belátni, hogy az $(x - x_o)^n$; $n \in N$ polinomok ugyancsak lineáris független rendszert képeznek, ahol $x_o \in \mathbb{R}$ valamely rögzített szám.

a) Valamely $p \in P$ polinomnak a kétféle rendszerben érvényes koordináta oszlopvektora között milyen mátrix teremt kapcsolatot?

b) Adjuk meg az $(x + 1)^2(x - 2)$ polinom koordináta oszlopvektorait a kétféle koordináta-rendszerben, ha $x_o = 1$.

$\boxed{4.}$ Nézzük meg a "Funkcionálanalízis" c. kötet 6.1 Definícióját! Bizonyítsuk be, hogy

a) L_{1T} valóban lineáris tér

b) L_{1T}-ből a t-szerinti deriválás valóban nem vezet ki

c) L_{1T}-ből a $[T,t]$; $t \geq T$ intervallumon a t-szerinti integrálás valóban nem vezet ki

d) L_2 valóban lineáris tér

e) $\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{(z - a_i)^{n_i+1}} \in L_2$, ahol $a_i \in \mathbb{C}$; $n_i \in N$

5. Tekintsük az 1;cosx;sinx;cos2x;sin2x;cos3x;sin3x;... függvények lineáris kombinációiból felépülő lineáris teret! Állapítsuk meg az alábbi függvényekről, hogy elemei-e ennek a térnek és ha a válasz igen, akkor adjuk meg koordinátáit a fenti lineárisan független rendszerben.

a) $\sin^3 x$

b) $|\sin x|$

c) $2 - |\cos x|^2$

d) $|3 + \sin^3 x|$

e) $\cos^2 x \sin 2x$

f) $\operatorname{tg} x$

g) $\arcsin x$

h) $\arcsin x + \arccos x$

$\boxed{6.}$ Mutassuk meg, hogy a

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x);\ n \in N;\ x \in [-1;1]$$

formulával definiált függvény n-edfokú polinom! Mutassuk meg továbbá, hogy a $T_n(x)$; $n \in N$ polinomok (ezek az alkalmazásokban igen fontos szerepet játszó, ún. elsőfajú Csebisev-polinomok) a polinomok lineáris terében lineárisan független rendszert alkotnak. Határozzuk meg e rendszerben az alábbi polinomok koordinátáit:

a) x^2

b) x^3

c) $x^4 - x$

d) $x^5 - x^2$

IX. 2. NORMÁLT TEREK

$\boxed{1.}$ Legyen $\|.\|$ n elemű vektorokon értelmezett adott vektornorma. Mutassuk meg, hogy a

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\| \; ; \quad A \text{ nxn-es mátrix}$$

definíció mátrix normát definiál!

*2. Mutassuk meg, hogy a polinomok lineáris terében az alábbi definícióval normát adtunk meg.

$$\|p_n\| = \max_{1\le k\le n} |a_k| ,$$

ahol

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_o !$$

3. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{C}^4$-ben a

$$\|z\| = \max_{1\le k\le n} |z_n|$$

összefüggés normát definiál, ahol

$$z \in \mathbb{C}^n \; ; \; z = (z_1, z_2, \dots, z_n) !$$

4. Bizonyítsuk be, hogy a $C^o_{[a,b]}$ lineáris térben az

$$\|f\| = \max_{a\le x\le b} |f(x)|$$

egyenlet normát határoz meg!

5. Mutassuk meg, hogy a $C^o_{[a,b]}$ lineáris tér konvex!

$\boxed{6.}$ Konvex-e a $Q \subset R^2$ halmaz, ahol

$$Q = \left\{ (x,y) \in R^2 : 0 < x; \; 0 < y; \; x/y \text{ racionális} \right\} ?$$

*7. Zárt-e a 6. példában szereplő Q halmaz? (Az euklideszi normát használjuk.)

$\boxed{8.}$ A 2. feladatban definiált normával a polinomok lineáris tere Banach tér-e?

$\boxed{9.}$ Tekintsük $C^{o}_{[0;1]}$ teret a maximum normával. Mutassuk meg, hogy az $f_k(x) = e^{-kx}$; $k \in N$ függvénysorozat konvergens! Határozzunk meg egy olyan n_o küszöbszámot, hogy

a) $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ legyen $n,m > n_o$ esetén;

b) $\|f - f_n\| < \varepsilon$ legyen $n > n_o$ esetén,

ahol f a határérték.

10. Korlátos-e $C^{o}_{[-1;1]}$-ben az $f_k(x) = x\, e^{-kx}$; $k \in N$ sorozat?

IX. 3. OPERÁTOROK NORMÁLT TEREKBEN

*1. Tekintsük a $C^{\infty}_{[a,b]}$ lineáris teret a maximum normával. Határozzuk meg az alábbi operátorok deriváltjait (vagyis a "Funkcionálanalízis" c. jegyzet 3.7. Definíciójában szereplő A homogén lineáris operátort):

a) $f: C^{\infty}_{[a,b]} \mapsto \mathbb{R}$; $g \in C^{\infty}_{[a,b]}$-re

$$f(g) = \int_a^b g(x)\, dx$$

b) $f: C^{\infty}_{[a,b]} \mapsto \mathbb{R}$; $g \in C^{\infty}_{[a,b]}$-re

$$f(g) = \int_a^b g^2(x)\, dx$$

c) $f: C^{\infty}_{[a,b]} \mapsto \mathbb{R}$; $g \in C^{\infty}_{[a,b]}$-re

$$f(g) = \int_a^b g^n(x)\, dx \text{ valamely n-re } (n \in N).$$

d) $f: C^{\infty}_{[a,b]} \mapsto \mathbb{R}$; $g \in C^{\infty}_{[a,b]}$-re

$$f(g) = \int_a^b g(x)\; g(b + a - x)\, dx$$

e) $f: C^{\infty}_{[a,b]} \mapsto C^{\infty}_{[a,b]}$; $g \in C^{\infty}_{[a,b]}$-re

$f(g) = g'$, ahol g' g-nek a deriváltfüggvénye.

f) $f: C^{\infty}_{[a,b]} \quad R$; $g \in C^{\infty}_{[a,b]}$-re

$$f(g) = \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a + \frac{b-a}{n} k) \cdot (b-a)}{n},$$

valamely n-re ($n \in N$).

g) $f: C^{\infty}_{[a,b]} \mapsto C^{\infty}_{[a,b]}$; $g \in C^{\infty}_{[a,b]}$-re

$$f(g)(x) = \int_a^x g(u)\,du.$$

h) $f: C^{\infty}_{[a,b]} \mapsto C^{\infty}_{[a,b]}$; $g \in C^{\infty}_{[a,b]}$-re

$$f(g)(x) = g(x) \int_a^b g(x)\,dx.$$

*2. Az 1. feladat eredményeinek mintájára számítsuk ki

$$\int_0^{0,1} \sqrt{\sin x}\,dx$$

lineárisan közelített értékét!

$\boxed{3.}$ Mutassuk meg, hogy R^n alábbi részhalmazai összefüggőek (az euklideszi normát használjuk):

a) $\{x \in R^n : \|x\| \leq R\}$

b) $\{(x;y) \in R^{n+m};\ x \in R^n;\ y \in R^m : \|x\| = R_1;\ \|y\| = R_2\}$

c) $\{x \in R^n : R_1 < \|x\| < R_2\}$

$\boxed{4.}$ Hogyan határozható meg az A mátrix valamelyik saját-vektorra szukcesszív approximációval?

*5. Tekintsük Q^n-t! Legyen A Q^n-ben homogén lineáris operátor. Mutassuk meg, hogy milyen esetben konvergál a szukcesszív approximáció! Mivel reprezentálható A és mi a fix pontja?

*6. Hova konvergál az iteráció, ha $f(x) = 2x - ax^2$? ($a \in \mathbb{R}$)

7. Legyen $\mathcal{A}$ az nxn-es mátrixokon (n rögzített) értelmezett alábbi operátor:

$$\mathcal{A}(b) = 2B - B\,A\,B,$$

ahol A valamely rögzített, nxn-es reguláris mátrix. Mi a feltétele annak, hogy a szukcesszív approximáció konvergens legyen? Adjuk meg $\mathcal{A}$ -nak valamely fix pontját! (IX.2.1. feladatában szereplő normát alkalmazzuk, ahol a definícióban az euklideszi vektornorma szerepeljen).

$\boxed{8.}$ Tekintsük az 1.g) feladatban szereplő operátort. Legyen $0 < b - a < 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor a szukcesszív approximáció bármely kezdőelemmel konvergens!

*9. Tekintsük az $f:\Omega \to \mathbb{R}^2$; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ függvényt. Az adott $u_o \in \mathbb{R}^2$ kiindulási elemmel hová konvergál az $u_{n+1} = f(u_n)$ szukcesszív approximáció:

a) $u = (x;y)$
$u_o = (0,1;\ 0,1)$
$f_1(u) = x^2 - y^2$
$f_2(u) = x^3 - y^2$

b) $u = (x;y)$
$u_o = (0,1;2)$
$f_1(u) = x^2 - y^2$
$f_2(u) = x^3 - y^2$

c) $u = (x;y)$
$u_o = (2;1)$
$f_1(u) = 1 - x/y$
$f_2(u) = xy + x$

d) $u = (x;y)$
$u_o = 1;2)$
$f_1(u) = 1 - x/y$
$f_2(u) = xy + x$

e) $u = (x;y)$
$u_o = (0,1;0,1)$
$f_1(u) = 1 - x/y$
$f_2(u) = xy + x$

f) $u = (x;y)$
$u_o = (-1;-2)$
$f_1(u) = 1 - x/y$
$f_2(u) = xy + x$

g) $u = (x;y)$
$u_o = (-1,1;-2)$
$f_1(u) = 1 - x/y$
$f_2(u) = xy + x$

*10. Az 1.a), 1.f), és 1.g) feladatban szereplő operátorokról mutassuk meg, hogy homogén lineárisak. Léteznek-e saját-vektoraik?

11. Az 1.a) - 1.g) feladatokban szereplő operátorok közül melyik elfajuló?

12. Határozzuk meg az alábbi homogén, illetve inhomogén egyenlet összes megoldását:

$$\int_a^x g(u)du \equiv 0; \quad a \leq x \leq b$$

$$\int_a^x g(u)du \equiv \ln \frac{x}{a}; \quad 0 < a \leq x \leq b$$

*13. Az 1.e), ill. 1.g) szerinti operátor legyen D, ill. I. Az alábbi operátorok milyen leképezéseket valósítanak meg:

a) $D + I$

b) DI

c) ID

d) I^2

e) D^2

f) I^{-1}

g) D^{-1}

Mutassuk meg, hogy

h) D nem korlátos

i) I korlátos

(Alkalmazzuk a "Funkcionálanalízis" c. jegyzet 3.7 Tételében szereplő normát, ahol a vektornorma a supremum norma legyen!)

IX. 4. HILBERT TEREK

*1. Az alábbi definíciók közül melyik tekinthető $C^0_{[a,b]}$-ben skalár szorzásnak:

a) $(x,y) = x(b)\ y(b) + \int_a^b x(s)\ y(s)\ dx$

b) $(x,y) = x(a)\ y(a) + x(b)\ y(b) + \int_a^b x(s)\ y(s)\ ds$

c) $(x,y) = x(a)\ y(b) + \int_a^b x(s)\ y(s)\ ds$

d) $(x,y) = x(a)\ y(b) + x(b)\ y(a) + \int_a^b x(s)\ y(s)\ ds$

e) $(x,y) = \int_a^b x(s)\ y(b + a - s)\ ds$

*2. Az alábbi definíciók közül melyik tekinthető Q^n-ben skaláris szorzásnak:

a) $(x,y) = x^T V y$, V nxn-es mátrix

b) $(x,y) = x^T V y$, V nxn-es pozitív definit mátrix

*3. Legyen V nxn-es pozitív definit mátrix.

Az $\|x\| = \sqrt{x^T V x}$ definíció szerinti Q^n-beli normának mi az "egységgömbje"?

*4. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$|x^T W^T W y| \leq \sqrt{x^T W^T W x} \cdot \sqrt{y^T W^T W y}\ ,$$

ahol $x,y \in Q^n$, W nxn-es reguláris mátrix.

*5. $C^{\infty}_{[-1,1]}$-ben az $(x,y) = \int_{-1}^{1} x(s)\ y(s) ds$ skaláris szorzást alapul véve ortogonalizáljuk az

$$\{1;\ x;\ x^2;\ \ldots;\ x^k;\ \ldots\}$$ függvényrendszert!

*6. Alkalmazzuk Q^n-ben egy olyan ortogonális bázistranszformációt, hogy az $x^T V x$ kvadratikus alak (V pozitív definit mátrix) ne tartalmazzon vegyes tagokat (főtengelytranszformáció)! (Ez másképpen azt jelenti, hogy az adott bázisban a 3. feladat szerinti norma kiszámítása leegyszerűsödik egy vegyes tagokat nem tartalmazó kvadratikus alakra)

a) $$V = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b)
$$V = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

c)
$$V = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

IX. 5. FOURIER-SOROK

$\boxed{1.}$ Mutassuk meg, hogy a IX.1./6. feladatban szereplő Csebisev polinomok ortogonális függvényrendszert alkotnak, a (-1;1) intervallumon az $1/\sqrt{1 - x^2}$ súlyfüggvényre vonatkozóan!

*2. Normáljuk a Csebisev polinomokat!

$\boxed{3.}$ Tekintsük a "Funkcionálanalízis" c. jegyzet 98. oldalán lévő példa állítását. Mutassuk meg, hogy az

$$\{1;\ \cos x;\ \sin x;\ \cos 2x;\ \sin 2x;\ \ldots\}$$

ortogonális függvényrendszer nem képez teljes rendszert pl. a 4π szerint periodikus, négyzetesen integrálható függvények terében!

$\boxed{4.}$ Fejtsük trigonometrikus Fourier-sorba a $|\sin x|$ függvényt kétféle módon: egyszer, mint 2π szerint, másszor pedig, mint π szerint periodikus függvényt!
Magyarázzuk meg az eredményt!

5. Fejtsük trigonometrikus Fourier-sorba az f 2π szerint periodikus függvényt $2k\pi$; $k \geq 1$ szerint periodikus függvényként!
Magyarázzuk meg az eredményt!

*6. Határozzuk meg az alábbi integrálokat a Parseval formula felhasználával

a) $\int_0^{2\pi} \sin^6 x \, dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^6 2x \, dx$

c) $\int_0^{\pi} \sin^6 2x \, dx$

$\boxed{7.}$ Oldjuk meg a "Funkcionálanalízis" c. kötet 5. fejezetének

a) 1. feladatát,

b) 2. feladatát,

c) 3. feladatát!

*8. Bizonyítsuk be a "Funkcionálanalízis" c. jegyzet 4. fejezetének 5.3. példáját! (k egész szám). Az e függvényrendszer szerint haladó sort $\alpha = 0$ esetben komplex (trigonometrikus) Fourier-sornak nevezzük. Itt tehát k nemcsak pozitív, hanem negatív egész is lehet. Határozzuk meg a következő függvények komplex Fourier sorát:

a) $\sin x$

b) $\sin^3 \omega x$

c) $f(x) = x, \quad \text{ha } |x|<1$

$f(x + 2) = f(x)$

d) $\cos \pi x \sin^2 \pi x$

*9. Határozzuk meg az f függvény trigonometrikus sorának azt az F_n véges szeletét, amelyre $\|f - F_n\| < \varepsilon$!

a) $f(x) = x \quad , \text{ha } |x| < \pi$

$f(x + 2\pi) = f(x)$

$\varepsilon = 0{,}01$

b) $f(x) = x^2, \text{ ha } \quad 0 \leq x < 2\pi$

$f(x + 2\pi) = f(x)$

$\varepsilon = 0{,}01$

*10. Tekintsük azt a homogén lineáris operátort, amely az x 2π-periodikus függvényekhez az

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = x(t)$$

differenciálegyenlet 2π-periodikus y megoldását rendeli. Határozzuk meg ennek az operátornak a D-vel jelölt koordináta mátrixát az

$$\{1;\ \cos x;\ \sin x;\ \cos 2x;\ \sin 2x; \ldots\}$$

függvények által létesített koordináta-rendszerben! Létezik-e D^{-1}? Ha igen, ezt is határozzuk meg!

IX. 6. LAPLACE TRANSZFORMÁCIÓ

1. Laplace transzformáció (elemi) tulajdonságai

1.1 Definíció

Jelöljük C^*-gal azokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényeket, amelyekre $f(t) \equiv 0$, ha $t < 0$, $f(t)$ minden véges intervallumon korlátos, integrálható és véges sok szakadási ponttal rendelkezik, szakadási pontjaiban jobbról folytonos. A $f \in C^*$ függvény $\mathcal{L} f$ Laplace-transzformáltján az

$$\mathcal{L} f = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt =$$

$$= \lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega e^{-zt} f(t)\, dt = F(z) \qquad (1.1.)$$

integrállal definiált függvényt értjük, amennyiben értelmezési tartománya nem üres, vagyis van $z \in \mathbb{C}$, hogy a fenti improprius integrál kovergens.

(Az $f(t)$-t az $F(z)$ inverz Laplace-transzformáltjának hívjuk, továbbá a következő jelöléseket is alkalmazzuk:

$$f(t) \longrightarrow F(z), \quad F(z) \longleftarrow f(t).)$$

Az 1.1. definíció alapján igazoljuk a következő összefüggéseket:

1. $\eta(t) \to \frac{1}{z}$, ahol $\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \geq 0 \\ 0, & \text{ha } t < 0 \end{cases}$ (egységfüggvény)

(Megjegyezzük, hogy $f(t)\eta(t) = \begin{cases} f(t), & \text{ha } t \geq 0 \\ 0, & \text{ha } t < 0. \end{cases}$)

2. $t \to \frac{1}{z^2}$

3. $e^{\alpha t} \to \frac{1}{z-\alpha}$ (1.2.)

1.1 Tétel. (Homogén linearitási tulajdonság.)

Ha α és β tetszőleges komplex számok ill. $f(t) \to F(z)$, $g(t) \to G(z)$, akkor

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \to \alpha F(z) + \beta G(z)$$

Az előző tulajdonság és az (1.2.) képlet felhasználásával lássuk be a következőket:

4. $\sin \beta t = \frac{1}{2i}(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}) \to \frac{\beta}{z^2+\beta^2}$ (1.3.)

5. $\cos \beta t = \frac{1}{2}(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}) \to \frac{z}{z^2+\beta^2}$ (1.4.)

6. $\operatorname{sh} \beta t \to \frac{\beta}{z^2-\beta^2}$

7. $\operatorname{ch} \beta t \to \frac{z}{z^2-\beta^2}$

1.2. Tétel. (Első differenciálási tétel.)

Legyen $f \in C^*$ n-szer folytonosan deriválható, és legyen $\int_0^\infty e^{-z_0 t} \cdot f^{(k)}(t)dt$ abszolút konvergens, $k \leq n$.
Akkor

$$f'(t) \to z \cdot F(z) - f(o),$$

$$f''(t) \to z^2 F(z) - zf(o) - f'(o), \qquad (1.5.)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(t) \to z^n (F(z) - z^{n-1} f(o) - z^{n-2} f'(o) - \ldots - f^{(n-1)}(o).$$

$\boxed{8.}$ Ellenőrizzük a tételt $f(t) = e^t$-re!

$\boxed{9.}$ Az első differenciálási tétel segítségével határozzuk meg az $f(t) = \sin^2 t$ függvény Laplace-transzformációját! Számítsuk ki az alábbi függvények Laplace-transzformáltját! Útmutatás: járjunk el a 9. példa megoldásához hasonlóan!

10. $\cos^2 t$

11. $t\, e^t$

12. $t \sin \beta t$

13. Határozzuk meg az $f''(t)-f'(t)-f(t)$ függvény Laplace-transzformáltját, ha $f(o)=f'(o)=0$, és $f(t) \rightarrow F(z)$!

14. Határozzuk meg az $f^{IV}(t)-5f''(t)-4\, f''(t) + 2f'(t)-f(t)+8$ kifejezés Laplace-transzformáltját az $f(o) = 5$, $f'(o) = 0$, $f''(0) = -1$, $f^{III}(o) = 2$ feltételek mellett!

1.3. Tétel (Második differenciálási tétel.)

Legyen $f \in C^*$ és $F(z)$ analítikus és $f(t) \rightarrow F(z)$! Ekkor

$$(-1)^n\, t^n\, f(t) \rightarrow F^{(n)}(z). \qquad (1.6.)$$

15. Igazoljuk, hogy az $f(t) = t^n$ függvény Laplace-transzformáltja:

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{z^{n+1}} \qquad (1.7.)$$

16. A 4-7. példák eredményei alapján igazoljuk a következőket:

$$t \sin \beta t \rightarrow \frac{2z\beta}{(z^2 + \beta^2)^2} \qquad (1.8.)$$

$$t \cos \beta t \rightarrow \frac{z^2 - \beta^2}{(z^2 + \beta^2)^2} \qquad (1.9.)$$

$$t\, \mathrm{sh}\, \beta t \rightarrow \frac{2z\beta}{(z^2 - \beta^2)^2} \qquad (1.10.)$$

$$t\, \mathrm{ch}\, \beta t \rightarrow \frac{z^2 + \beta^2}{(z^2 - \beta^2)^2} \qquad (1.11.)$$

Állítsuk elő a következő függvények Laplace-transzformáltjait a második differenciálási tétel segítségével:

17. $t(e^t + \mathrm{ch}\, t)$

18. $(t + 1) \sin 2t$

19. $t^2 \cos t$

20. $t \operatorname{sh} t \sin t$

1.4. Tétel. (Integrál transzformáltja).

Ha $\int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt$ abszolút konvergens, $f \in C^*$, és $f(t) \to F(z)$, akkor $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$ Laplace-transzformálja is abszolút konvergens és

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \longrightarrow \frac{F(z)}{z} \qquad (1.12.)$$

$\boxed{21.}$ Határozzuk meg az $\int_0^t e^{\tau}\, d^{\tau}$ függvény Laplace-transzformáltját az 1.4. tétel segítségével!

22. Ellenőrizzük az 1.4. tételt $f(t) = \cos t$-re!
Számítsuk ki a következő függvények Laplace-transzformáltjait az integrál Laplace-transzformáltja tételének segítségével:

23. $\int_0^t \sin\tau\, d\tau$

24. $\int_0^t \tau \cos\beta\tau\, d\tau$

25. $\int_0^t \tau^2\, e^{-\tau} d\tau$

1.5. Tétel. (Eltolási tétel.)

Ha $f \in C^*$ és $f(t) \to F(z)$, akkor tetszőleges $z_0 \in \mathbb{C}$ számra teljesül, hogy

$$e^{z_0 t} \cdot f(t) \to F(z - z_0) \qquad (1.13)$$

26. Az eltolási tétel alapján lássuk be a következőket:

$$e^{\alpha t}\sin\beta t \longrightarrow \frac{\beta}{(z-\alpha)^2+\beta^2} \qquad (1.14.)$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \longrightarrow \frac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2+\beta^2} \qquad (1.15.)$$

$$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t} \longrightarrow \frac{1}{(z-\alpha)^{n+1}} \qquad (1.16.)$$

27. Állítsuk elő a Laplace-transzformáltakat:

a) $e^{\alpha t}t\cos\beta t$

b) $e^{\alpha t}t\sin\beta t$

c) $(\mathrm{ch}\,\alpha t)t\sin\beta t$

Figyelem! A leggyakrabban előforduló függvényeket és Laplace-transzformáltjaikat - ezek a (1.2.)-(1.4.), (1.7.)-(1.11.), (1.14.)-(1.15.) összefüggések - a 2. pont elején táblázatba is foglaltuk, a további számításokban érdemes lesz felhasználni őket.

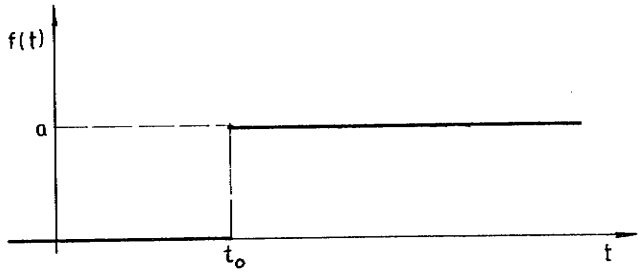
<u>1.6. Tétel.</u> (Késleltetési tétel.)

Ha $f \in C^*$ és $f(t) \longrightarrow F(z)$, akkor tetszőleges $t_o > 0$ számra

$$f(t-t_o) \longrightarrow e^{-t_o z}\cdot F(z) \qquad (1.17.)$$

$\boxed{28}$ Tekintsük az általánosított egységfüggvényt:

$$\eta(t-t_o) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \geq t_o \\ 0, & \text{ha } t < t_o \end{cases}$$



3. ábra

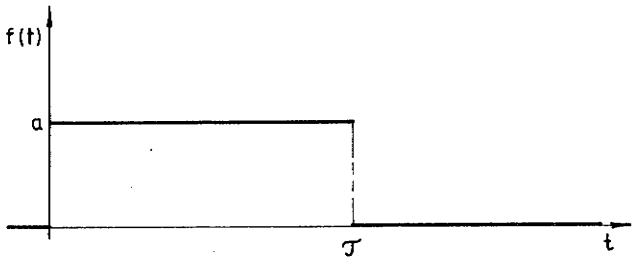
A késleltetési tétel felhasználásával igazoljuk, hogy

$$\eta(t - t_o) \longrightarrow \frac{e^{-t_o z}}{z}$$

A késleltetési tétel segítségével határozzuk meg a következő függvények Laplace-transzformáltjait:

29.

$$f(t) = \begin{cases} 1, \text{ ha } 0 \le t < \tau \\ 0, \text{ ha } t < 0, \text{ vagy } t \ge \tau \end{cases}$$

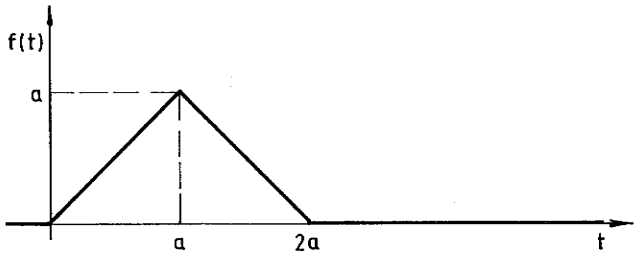


4. ábra

(Útmutatás. Fejezzük ki f(t)-t az $\eta(t-t_o)$ általánosított egységfüggvény segítségével!)

30.

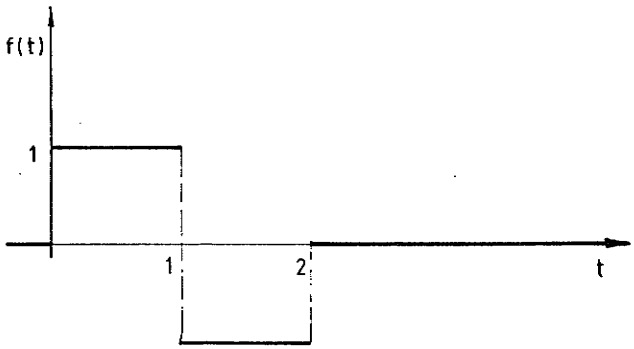
$$f(t) = \begin{cases} t & , \text{ ha } 0 \le t < a, \\ 2a - t & , \text{ ha } a \le t < 2a, \\ 0 & , \text{ ha } t \ge 2a, \text{ vagy } t < 0. \end{cases}$$



5. ábra

Állítsuk elő a kvöetkező, részben csak grafikonjukkal megadott függvények Laplace-transzformáltját:

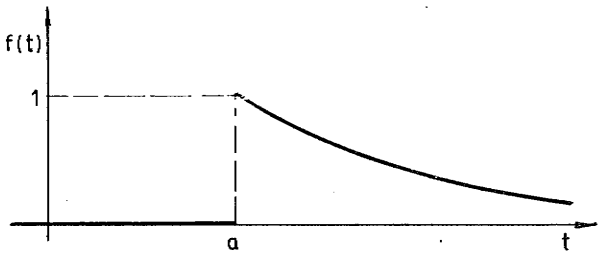
31.



6. ábra

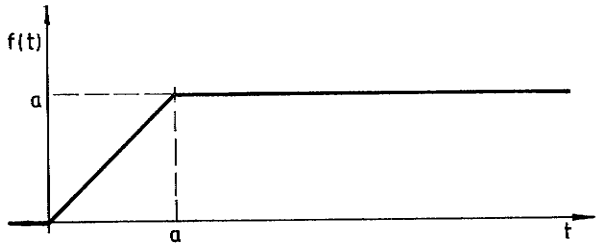
32.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } 0 \le t < a \\ e^{-b(t-a)} & , \text{ ha } t \ge a \end{cases}$$



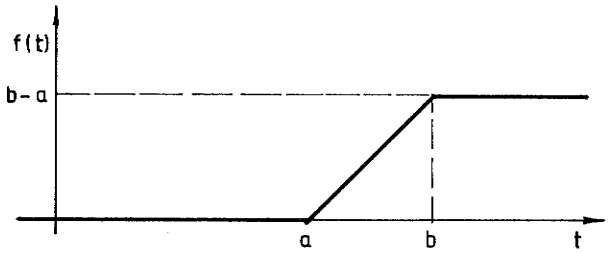
7. ábra

33.



8. ábra

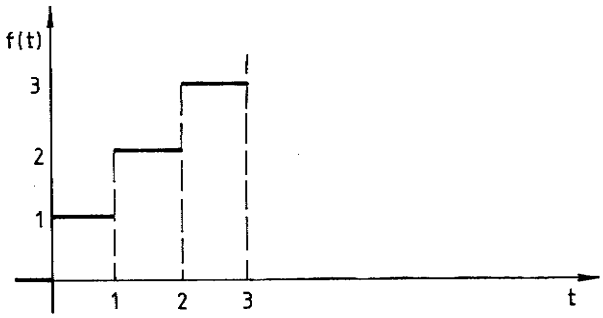
34.



9. ábra

35.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ n+1, & \text{ha } n \le t < n+1 \\ & n=0,1,\ldots \end{cases}$$



10. ábra

<u>1.7. Tétel.</u> (Periodikus függvény Laplace-transzformáltja).

Legyen $f \in C^*$ és $f(t+T) = f(t)$; $T > 0$ adott,

$$f_o(t) = \begin{cases} f(t), & \text{ha } 0 \le t < T \\ 0, & \text{ha } t \ge T, \text{ vagy } t < 0 \end{cases}$$

és ha $f_o(t) \longrightarrow F_o(z)$, akkor

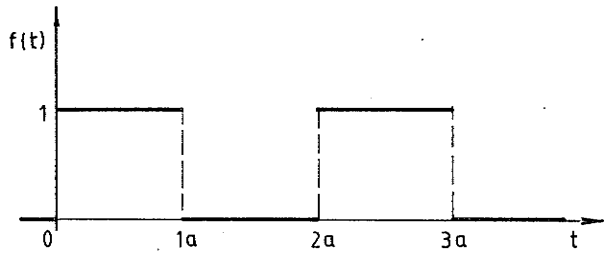
$$f(t) \longrightarrow \frac{F_o(z)}{1 - e^{-zT}} = F(z) \qquad (1.18.)$$

(A definícióból következik, hogy $F_o(z) = \int_0^T e^{-zt} f(t)\,dt$).

A periodikus függvény Laplace-transzformáltja tételének a segítségével határozzuk meg a következő periodikus függvények Laplace-transzformáltjait:

$\boxed{36.}$

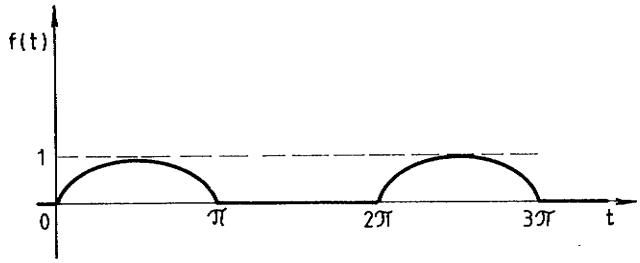
$$f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 2na \le t < (2n+1)a, \\ 0, & \text{ha } (2n+1)a \le t < (2n+2)a, \text{ vagy} \\ & t < 0, \quad n=0,1,2,\ldots \end{cases}$$



11. ábra

*37.

$$f(t) = f(t+2\pi) = \begin{cases} \sin t, & \text{ha } 2n\pi \le t < (2n+1)\pi, \\ 0, & \text{ha } (2n+1)\pi \le t < (2n+2)\pi, \\ & n=0,1,2,\ldots \end{cases}$$



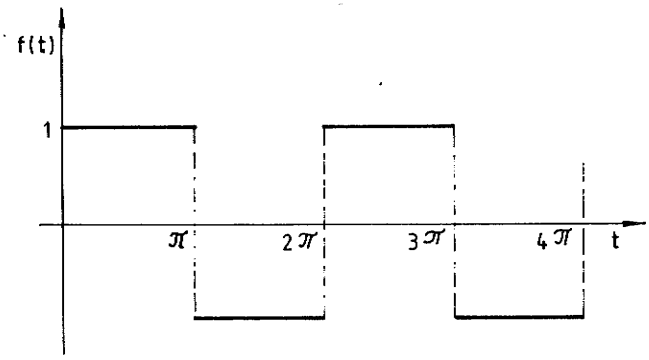
12. ábra

(Határozzuk meg $F_o(z)$-t annak alapján is, hogy $f(t) = \sin t \cdot \eta(t) - \sin(t-\pi) \cdot \eta(t-\pi)$!)

38.

$$f(t) = f(t+2\pi) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 2\pi n \le t < (2n+1)\pi, \\ -1, & \text{ha } (2n+1)\pi \le t < (m+2)\pi, \\ 0, & \text{ha } t < 0 \end{cases}$$

$n=0,1,2,\ldots$



13. ábra

<u>1.8. Tétel.</u> (Konvolúció tétel).

Ha $\int_0^\infty e^{-z_o t} f(t)dt$ és $\int_0^\infty e^{-z_o t} g(t)dt$ létezik és abszolút konvergens, $f,g \in C^*$, akkor minden $\operatorname{Re} z \in \operatorname{Re} z_o$-ra

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d_\tau \rightarrow F(z)\cdot G(z) \qquad (1.19.)$$

(A bal oldalon álló integrált az f és g függvények konvoluciójának nevezik, és f * g-vel jelölik).

39. Határozzuk meg a cost és t függvények konvolúcióját, és annak Laplace-transzformáltját!
A konvolúció tétel segítségével állítsuk elő a következő függvények inverz Laplace-transzformáltját:

40.
$$\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$$

41.
$$\frac{z^3}{(z^2+1)^2}$$

Határozzuk meg a következő konvoluciókat:

*42.
$$e^t * e^t$$

43.
$$t^2 * t^3$$

A konvolúció tulajdonságait felhasználva egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

44. $\cos^2 t * t + t * \sin^2 t$

45. $(1-\sqrt{t}) * \sin t + (1+\sqrt{t}) * \cos t + (1-\sqrt{t}) * \cos t +$
$+ (t+\sqrt{t}) * \sin t$

Számítsuk ki a következő függvények Laplace-transzformáltját:

46.
$$\int_0^t \sin\tau\, e^{t-\tau}\, d\tau$$

47.
$$\int_0^t (\mathrm{ch}\,\tau)(t-\tau)^2 d\tau$$

48. $$\int_0^t \tau^2 e^{2(t-\tau)} d\tau$$

A konvolúció tétel felhasználásával állítsuk elő a 40., 41. példák megoldásához hasonlóan az alábbi függvények inverz Laplace-transzformáltjait:

49. $$\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)}$$

50. $$\frac{1}{(z+1)(z+2)^2}$$

51. $$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^3}$$

51. $$\frac{z}{(z-1)(z^2+4)}$$

53. $$\frac{1}{z^2(z-1)}$$

54.

a) $\dfrac{z}{z^4-1}$ b) $\dfrac{1}{z^4-1}$ c) $\dfrac{1}{z(z^4-1)}$

d) $\dfrac{1}{(z-1)(z^2+1)}$ e) $\dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$

f) $\dfrac{1}{z(z-1)(z^2+1)}$

(Útmutatás. Az a) és d) inverz Laplace-transzformáltjainak a felhasználásával az 1.4. tétel. illetve az 1.2. tétel segítségével határozzuk meg a fennmaradó függvények inverz transzformáltjait!)

*55. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t)\,dt^{n+1} = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-\tau)^n f(\tau)\,d\tau$$

(Cauchy-formula)

Inverz Laplace transzformáltak előállítása

1.9. Tétel. (Kifejtési tétel)

A $p_n(z)$ n-edfokú polinomnak legyen csupa egyszeres gyöke (z_k, $k=1,\dots,n$ és $z_i \neq z_j$, ha $i \neq j$)! Legyen $q_m(z)$ m-edfokú polinom ($m < n$)! Ekkor

$$\frac{q_m(z)}{p_n(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_m(z_k)}{p_n'(z_k)} \frac{1}{z - z_k}$$

Határozzuk meg a következő függvények inverz Laplace-transzformáltjait:

$\boxed{56.}$

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}$$

$\boxed{57.}$

$$F(z) = \frac{1}{z^3 - 8}$$

Számítsuk ki az alábbi függvények inverz Laplace-transzformáltjait az előző példák megoldásainak mintájára:

58.

$$\frac{5z + 3}{(z - 1)(z^2 + 2z + 5)}$$

59.

$$\frac{z + 3}{z(z^2 - 4z + 3)}$$

60.

a) $\dfrac{1}{(z - 2)^2(z + 3)}$ b) $\dfrac{1}{(1 + z^2)(z^2 + \omega^2)}$

2. A Laplace transzformáció alkalmazásai

A legfontosabb elemi függvények Laplace-transzformáltjainak a táblázata

	$f(t)$ $(t \geq 0)$	$F(z)$		$f(t)$ $(t \geq 0)$	$F(z)$
I	1	$\frac{1}{z}$	VIII	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2+\beta^2}$
II	$\frac{t^n}{n!}$ $(n=0,1,\ldots)$	$\frac{1}{z^{n+1}}$	IX	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(z-\alpha)^2+\beta^2}$
III	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{z-\alpha}$	X	$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$ $(n=0,1,\ldots)$	$\frac{1}{(z-\alpha)^{n+1}}$
IV	$\cos\beta t$	$\frac{z}{z^2+\beta^2}$	XI	$t\cos\beta t$	$\frac{z^2-\beta^2}{(z^2+\beta^2)^2}$
V	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{z^2+\beta^2}$	XII	$t\sin\beta t$	$\frac{2z\beta}{(z^2+\beta^2)^2}$
VI	$\mathrm{ch}\,\beta t$	$\frac{z}{z^2-\beta^2}$	XIII	$t\,\mathrm{ch}\,\beta t$	$\frac{z^2+\beta^2}{(z^2-\beta^2)^2}$
VII	$\mathrm{sh}\,\beta t$	$\frac{\beta}{z^2-\beta^2}$	XIV	$t\,\mathrm{sh}\,\beta t$	$\frac{2z\beta}{(z^2-\beta^2)^2}$

2.1 Állandó együtthatós differenciálegyenletek

Határozzuk meg Laplace transzformáció alkalmazásával az alábbi differenciálegyenlet megoldását!

$\boxed{61.}$ $\ddot{x} + \dot{x} - 12x = t^2e^{3t}+e^{-t}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$\boxed{62.}$ $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = t^3e^{-2t}, \quad x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = x_1$ adott

$\boxed{63.}$ $\ddot{x} + x = 2\cos t\ ,\quad x(0) = 0,\quad \dot{x}(0) = -1$

64. $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = e^{-t}\ ,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1$

65. $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^{3t},\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

66. $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = e^{3t},\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

67. $\ddot{x} - x = (2t + 3)e^{t}\quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1$ adott

68. $\ddot{x} + 4x = 2\sin t\ ,\quad x(0) = -1,\ \dot{x}(0) = 0$

69. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = t\,e^{t},\quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1$ adott

*70. Igazoljuk, hogy az alábbi (1) egyenlet $x(t)$ megoldása és a (2) egyenlet $x_1(t)$ megoldása között a következő összefüggés áll fenn:

$$x(t) = \int_0^t \cos\tau \cdot \dot{x}_1(t-\tau)\,d\tau$$

(1) $x^{IV} + 2\ddot{x} + x = \cos t,\ x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dddot{x}(0) = 0$

(2) $x^{IV} + 2\ddot{x} + x = 1\quad ,\ x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dddot{x}(0) = 0$

($x_1(t)$ könnyebben megkapható, így már $x(t)$ is meghatározható lesz.)

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

71.
$$\dot{x} + x = \begin{cases} 1, \text{ ha } 0 \le t < 2 \\ 0, \text{ ha } t > 2 \end{cases},\ x(0) = 0$$

(Használjuk fel a 29. példa megoldását!)

72.
$$\ddot{x} + 4x = f(t);\ f(t) = \begin{cases} 1, \text{ ha } 0 \le t < 1 \\ 0, \text{ ha } 1 \le t < 2 \end{cases}$$
$$f(t) = f(t+2)$$

(Támaszkodjunk a 36. példa eredményére!)

2.2 Speciális egyenletek

Laplace-transzformáció segítségével határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek adott kezdeti értékhez tartozó - illetve értelemszerűen az általános - megoldását:

73. $t\ddot{x} - 2\dot{x} = 0$ (Nem állandó együtthatós)

$\boxed{*74.}$ $t\ddot{x} + (1 - t)\dot{x} + n x = 0,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1$ (Laguerre egyenlet)

$\boxed{75.}$ $\dot{x}(t) = x(t - 1) + 1,\ x(0) = 0,\ x(t) = 0,$ ha $-1 \leq t < 0$

(késleltetett egyenlet)

76. $\ddot{x}(t) - x(t - 1) = t,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(t) = 0,$

ha $-1 \leq t < 0$

*77. Határozzuk meg a következő egyenlet $x(t)$ megoldásának Laplace-transzformáltját $t > 0$-ra:

$\dot{x}(t) = x(t - 1),\quad x(t) = 1,\quad$ ha $\quad -1 \leq t \leq 0.$

2.3 Állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek

Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszereket Laplace-transzformáció segítségével!

$\boxed{78.}$
$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} + \ddot{y} - y &= e^{t} \\ \dot{x} + 2x - \dot{y} + y &= e^{-t} \end{aligned}\right\},\ x(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1$$

79.
$$\left.\begin{aligned} \dot{x} + 3x - 4y &= 9e^{2t} \\ 2x + \dot{y} - 3y &= 3e^{2t} \end{aligned}\right\},\ x(0) = 2,\ y(0) = 0$$

80.
$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y \\ \dot{y} &= 2x + y + 1 \end{aligned}\right\},\ x(0) = 0,\ y(0) = 5$$

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszerek általános megoldását:

81. $$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + 2x + \dot{y} &= 0 \\ 3\dot{x} - \ddot{y} + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=x_0',\ y(0)=y_0,\ \dot{y}(0)=y_0'$$

82. $$\dot{x} + y = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{ha } t \ge 1 \end{cases}$$

$$\dot{y} + x = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le t < 2 \\ 0, & \text{ha } t \ge 2 \end{cases}$$

2.4 Integrálegyenletek és integrálegyenletrendszerek

Oldjuk meg a következő integrálegyenleteket:

$\boxed{83.}$ $$1 - \cos t = \int_0^t f(\tau)\ \mathrm{sh}(t-\tau)\,d\tau$$

$\boxed{84.}$ $$\int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\,d\tau = y(t) - e^t$$

85. $$\int_0^t x(\tau)(t-\tau)^2 d\tau = \mathrm{sh}\ t - \sin t$$

86. $$x(t) = \sin t + \int_0^t x(\tau)e^{t-\tau}\,d\tau$$

Oldjuk meg a következő feladatokat:

*87. $$x_1(t) = t + \int_0^t x_1(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau + \int_0^t x_2(\tau)(t-\tau)d\tau$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t x_1(\tau)\,\mathrm{sh}(t-\tau)\,d\tau - \int_0^t x_2(\tau)e^{(t-\tau)}\,d\tau$$

(integrálegyenletrendszer).

88. $$\ddot{x} + \int_0^t \sin(t-\tau)(\ddot{x} + x)\,d\tau = 2\cos t,\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

(integro-differenciálegyenlet).

X. GYAKORLATI SZÁMÍTÁSI ELJÁRÁSOK

(A fejezet Obádovics J.Gyula: Gyakorlati számítási eljárások (Gondolat, 1972) könyve alapján készült.)

X. 1. EGYISMERETLENES EGYENLETEK MEGOLDÁSA

A gyökök elkülönítése

Az $f(x) = 0$ egyenlet valós és képzetes gyökeinek meghatározására használt módszerek alkalmazásához ismernünk kell a keresendő gyök intervallumát, illetve annak tartományát. Az ilyen egyetlen gyököt tartalmazó intervallum vagy tartomány meghatározását a gyökök elkülönítésének nevezzük. A gyökök elkülönítését grafikusan és analitikusan végezhetjük.

Grafikus módszer: Az $f(x) = 0$ egyenlet valós gyökerinek számáról és elhelyezkedéséről tájékozódhatunk, ha az $y = f(x)$ függvény grafikont vázoljuk. Gyakran az $y = f(x)$ grafikon nehezen ábrázolható, de $f(x)$ felbontható $f(x) = g_1(x) - g_2(x)$ alakban és az $y_1 = g_1(x)$, $y_2 = g_2(x)$ grafikonok egyszerűbben és pontosabban ábrázolhatók. Ilyenkor célszerű a megoldandó egyenletet $g_1(x) = g_2(x)$ alakban írni. Az egyenlet közelítő gyökeit a $g_1(x)$ és $g_2(x)$ görbék metszéspontjainak abszcisszaértékei szolgáltatják.

A komplex gyökök közelítő értékeit is meghatározhatjuk grafikusan, ha az $f(z) = 0$ egyenletben z-t $x+iy$ alakban írjuk és az $f(z)$ függvényt valós és képzetes részre választjuk:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = 0,$$

és az ezzel ekvivalens

$$u(x,y) = 0$$
$$v(x,y) = 0$$

egyenletrendszert vizsgáljuk. A két görbe metszéspontjait a komplex sík $z_o = x_o + iy_o$ pontjainak tekintve, kapjuk az egyenlet közelítő gyökeit.

Analitikus módszer: Az $f(x) = 0$ egyenlet valós gyökeit két általános módszerrel határolhatjuk be. Az egyik módszer azon alapszik, hogy a megadott egyenlethez hozzárendelünk egy lényegesen egyszerűbb egyenletet, amelynek gyökei közelítőleg az adott egyenlet gyökeivel egyenlők. Gyakran könnyen előállíthatunk ilyen egyenletet úgy, hogy az adott egyenletben az abszolútértékben kicsiny tagokat elhanyagoljuk vagy alsó, ill. felső korlátjukkal helyettesítjük.

A gyökök elkülönítésének másik módszere a matematikai analízisből jól ismert tételen alapszik. Ha az $f(x)$ függvény a $[a, b]$ intervallumban folytonos, és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek az (a,b) intervallumban van legalább egy gyöke. Pontosan egy gyöké van, ha $f(x)$ az a,b intervallumban szigorúan monoton.

A valós gyökök közelítő meghatározására alkalmazott legismertebb módszerek: közelítés felezési eljárással, húr-, ill. érintőmódszer, a fokozatos közelítések v. iterációs módszer. Ezek részletezésére itt nem térünk ki (ld. Matematikai jegyzet II.)

Komplex gyökök meghatározása

Az $f(z) = 0$ egyenlet komplex gyökeinek meghatározása, mint már említettük, visszavezethető két valós egyenletből álló egyenletrendszer megoldására, amelyre az érintőmódszert a következőképpen alkalmazzuk:

Legyenek x_n, y_n az egyenletrendszer közelítő gyökei, akkor az

$$x = x_n + h_n, \qquad y = y_n + k_n$$

értékek behelyettesítésével:

$$u(x_n + h_n;\ y_n + k_n) = 0$$

$$x(x_n + h_n;\ y_n + k_n) = 0$$

rendszert kapjuk. Alkalmazzuk erre a Taylor formulát, akkor h_n és k_n lineáris tagjaival bezárólag az

$$u(x_n,y_n) + h_n u'_x(x_n,y_n) + k_n u'_y(x_n,y_n) = 0$$

$$v(x_n,y_n) + h_n v'_x(x_n,y_n) + k_n v'_y(x_n,y_n) = 0$$

egyenletrendszer adódik. Ha a

$$J(x_n,y_n) = \begin{vmatrix} u'_x(x_n,y_n) & u'_y(x_n,y_n) \\ v'_x(x_n,y_n) & v'_y(x_n,y_n) \end{vmatrix}$$

Jacobi-determináns nem zérus, akkor innen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{J(x_n,y_n)} \begin{vmatrix} u(x_n,y_n) & u'_y(x_n,y_n) \\ v(x_n,y_n) & v'_y(x_n,y_n) \end{vmatrix}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{J(x_n,y_n)} \begin{vmatrix} u'_x(x_n,y_n) & u(x_n,y_n) \\ u'_y(x_n,y_n) & v(x_n,y_n) \end{vmatrix}$$

adódik. Az x_o, y_o kezdő gyökközelítéseket pl. grafikusan határozzuk meg.
Az

$$u(x,y) = 0$$
$$v(x,y) = 0$$

kétismeretlenes egyenletrendszer gyökeit fokozatos közelítések módszerével is meghatározhatjuk, ha ismertek az x_o,y_o durva közelítő értékek. Az iterációs sorozatot a fenti egyenletrendszerrel ekvivalens

$$x = g_1(x,y)$$
$$y = g_2(x,y)$$

egyenletrendszerből képezzük a

$$x_1 = g_1(x_o,y_o) \ , \ y_1 = g_2(x_o,y_o)$$
$$x_{n+1} = g_1(x_n,y_n) \ , \ y_{n+1} = g_2(x_n,y_n)$$

képletek szerint. Ezen iteráció sorozat konvergens, ha van olyan D környezete az x,y megoldásnak, mely tartalmazza az összes x_n,y_n iterációs pontpárt, D-ben a g_1 és g_2 függvények differenciálhatók, és fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| \le q_1 < 1$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1$$

Polinomok gyökeinek közelítő meghatározása

Abban a speciális esetben, amikor az $f(x) = 0$ egyenletben $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o = p_n(x)$, az előző eljárások teljes egészében alkalmazhatók, azonban a polinomok speciális tulajdonságai módot adnak a számítások egyszerűsítésére. A polinomokra vonatkozó ismert tételek mellett megadunk néhány jól használható szabályt:

Legyen $p_n(x)$ első negatív együtthatója a_N és a negatív együtthatók közül a legkisebb a_m, akkor a zérushelyek egy felső korlátja:

$$1 - \frac{a_m}{a_n} \quad \text{(McLaurin szabály)}$$

vagy

$$1 + \sqrt[N]{\frac{-a_m}{a_n}} \quad \text{(Lagrange szabály)}$$

A szabályt a $p_n(-x) = 0$ egyenletre alkalmazva felvilágosítást kaphatunk a gyökök alsó korlátjáról.

Legyen $A = \max\left\{|a_o|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\right\}$, akkor az egyenlet összes gyökére fennáll a

$$|x_k| < 1 + \frac{A}{|a_n|} = R \quad (k=1,2,\ldots n)$$

egyenlőtlenség. Más szóval a gyökök a komplex számsík R sugarú körébe esnek. Ebből következik, hogy ha $a_n \neq 0$ és

$$B = \max\left\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\right\},$$

akkor

$$|x_k| > \frac{1}{1 + \frac{B}{|a_n|}} = r$$

Feladatok:

1. Határozzuk meg a $\sin x - \frac{1-x}{1+x} = 0$ egyenlet gyökeinek számát és különítsük el őket!

2. Határozzuk meg az $x^2 + \lg x - 9 = 0$ egyenlet gyökeinek számát, és különítsük el őket!

3. Határozzuk meg az $f(x) = 2\cos x - x^2 = 0$ egyenlet legkisebb pozitív gyökét felezési eljárással, 10^{-4} pontossággal!

4. Határozzuk meg az $f(x) = e^x + x^2 - 2 = 0$ egyenlet legkisebb pozitív gyökét $5 \cdot 10^{-5}$ pontossággal, érintőmódszerrel!

5. Számítsuk ki a fokozatos közelítések módszerével a $f(x) = \sin x + 1 - x = 0$ egyenlet gyökét 10^{-5} pontossággal!

6. Az alábbi egyenletek gyökeinek grafikus elkülönítése után számítsuk ki a legkisebb pozitív gyököt 10^{-5} pontossággal

   a) $2 \ln x - \frac{1}{x} = 0$

   b) $e^{-x} + x^2 - 2 = 0$

   c) $3 \cos^2 1{,}04x - x = 0$

   d) $2 \sin^2 + 2x^2 - 5 = 0$

   e) $\operatorname{ch} x + \frac{x}{2} - 2 = 0$

7. Számítsuk ki az algebrai egyenletek valós és komplex gyökeit 10^{-4} pontossággal:

   a) $x^4 + 3x^3 - 4x - 1 = 0$

   b) $x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 16x - 3 = 0$

   c) $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x - 8 = 0$

   d) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$

   e) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$

8. Számítsuk ki Newton módszerével az

$$u(x,y) = y - 2\sin\frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$v(x,y) = xy^3 - y - 4 = 0$$

egyenletrendszernek a legkisebb pozitív y gyököt tartalmazó gyökpárját!

9. Számítsuk ki a

$$0{,}1 \sin x + \ln(y + 10) - x = 0$$

$$yx + y^2 - 1 = 0$$

egyenletrendszer pozitív gyökpárját a fokozatos közelítések módszerével!

*10. Határozzuk meg közelítően az $x^4 + 39x^3 + 958x^2 - 1080x - 2000 = 0$ egyenlet való gyökeit, analitikus módszerrel!

*11. Számítsuk ki közelítően az $x^4 - 2{,}25x^3 + 2{,}265x^2 - 2{,}25x + 1{,}265 = 0$ egyenlet gyökeit, analitikus módszerrel!

X. 2. EMPIRIKUS KÉPLETEK ELŐÁLLÍTÁSA

Általában empirikus képleteknek nevezzük azokat a mennyiségi összefüggéseket, amelyeket közvetlen megfigyelés, mérés útján nyert tapasztalati eredmények alapján állítottunk fel. A gyakorlati matematikának legtöbbször a természettudományok és a műszaki tudományok területén kell ilyen problémával foglalkozni.

A legtöbb természeti törvényt is egy, a kísérleti adatoknak megfelelő empirikus képletbe való foglalásával adhatták meg. Célunk, hogy lehetőleg egyszerű képlettel kifejezzük az összetartozó $(x_k;y_k)$, $(k=1,2,\ldots,n)$ tapasztalati eredmények kapcsolatát. A probléma megoldása két lépésből áll:

1. Megállapítjuk az empirikus képlet típusát,
2. Meghatározzuk a választott típusú képletben szereplő paramétereket a megfigyelés adatai alapján.

Az empirikus képlet típusának megállapítása során arra törekszünk, hogy annak grafikonja jól illeszkedjék a koordináta-rendszerben ábrázolt pontok közé és a legegyszerűbb függvényosztályba tartozzék. Így az empirikus képlet típusának meghatározása négy lépésre bontható:

a) A tapasztalati úton kapott értékpárokat koordináta-rendszerben ábrázoljuk;
b) A pontok közé jól illeszkedő görbét (egyenest) rajzolunk;
c) A görbét összehasonlítjuk a legfontosabb elemi függvényekkel és kiválasztjuk az empirikus képlet típusát;
d) A kiválasztott empirikus képlet alkalmasságát a linearizáló módszerrel ellenőrizzük.

Linearizáló módszernek nevezzük azt az eljárást, amely révén a síknak valamely

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= f(x,y) \\ \bar{y} &= g(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

leképezésével a függvénykapcsolatban álló (x_k, y_k) pontokat olyan helyzetbe hozzuk, hogy az $(\bar{x}, \bar{y})$ síkon egy egyenesre illeszkednek, vagyis lineárisan függnek össze. (Például az $y = \frac{x}{c + dx}$ függvény grafikon esetén az $\bar{x} = x$, $\bar{y} = \frac{x}{y}$ leképezés a $c + d\bar{x} = \bar{y}$ lineáris kapcsolatot állítja elő.) A gyakorlatban a kiválasztott empirikus képlet alkalmasságának eldöntéséhez az adott (x_k, y_k) értékekkel kiszámítjuk az $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ értékeket és megvizsgáljuk, hogy az $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ értékpárok által meghatározott pontok közelítőleg egy egyenesre esnek-e. Ha igen, akkor az empirikus képlet típusa megfelelő. A paraméterek numerikus értékének meghatározása az empirikus képlet megfelelő típusának kiválasztása után történik, úgy, hogy a közelítés valamely feltétel szerint optimális legyen. Leggyakrabban az

a) kiválasztott pontok módszere,
b) közepek módszere,
c) legkisebb négyzetek módszere használatos.

a) A kiválasztott pontok módszere

A tapasztalati úton kapott n számú (x_k, y_k) $(k=1,2,\ldots,n)$ értékpárhoz az előző pont szerint megalkottuk a megfelelő

$$y = \varphi(x; a_1, a_2, \ldots a_m) \quad (m < n) \qquad (2)$$

empirikus képlet típust, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n$ paraméterek. A koordináta-rendszerben ábrázolt (x_k, y_k) $(k=1,2,\ldots,n)$ pontok közé illesztett görbén kiválasztunk m számú (x_i, y_i) $(i=1,2,\ldots,m)$ pontot és ezeket behelyettesítve az előző képletbe, az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ paraméterekre m egyenletből álló

$$y_i = \varphi(x_i; a_1, \ldots, a_m) \quad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (3)$$

egyenletrendszert kapunk. Ennek megoldása szolgáltatja az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ paraméterek numerikus értékét. Előfordulhat, hogy az egyenletrendszer ellentmondó, ilyenkor a görbe (x_i, y_i) $(i=1,2,\ldots,m)$ pontjainak alkalmasabb választásával megszüntethető az ellentmondás. A görbén kiválasztott pontok ne legyenek se túl közel, se túl távol egymástól. A legnagyobb segítséget néhány példa megoldásával szerzett tapasztalat nyújt. Amennyiben jól választottuk a pontokat, s az egyenletrendszer megoldható, akkor az ismert módszerek egyikével megoldjuk az egyenletrendszert és a paramétereket behelyettesítjük a (2) képletbe. Ellenőrzésül az így meghatározott empirikus képlet felhasználásával kiszámítjuk a $\varphi(x_k; a_1, a_2, \ldots, a_m)$ értékeket és képezzük az y_k tapasztalati értékek és a $\varphi(x_k; a_1, a_2, \ldots, a_m)$ értékek

$$d_k = y_k - \varphi(x_k;\ a_1, a_2, \ldots, a_m) \quad (k=1,2,\ldots n) \tag{4}$$

különbségét, a különbségek abszolútértékének

$$d = \frac{\sum_{k=1}^{n} |d_k|}{n} \tag{5}$$

átlagát és a különbségek

$$d_q = \sum_{k=1}^{n} d_k^2 \tag{6}$$

négyzetösszegét.

b) <u>A közepek módszere</u>
A még ismeretlen paramétereket tartalmazó (2) empirikus képlet típusba helyettesítsük be a tapasztalati úton kapott x_k $(k=1,2,\ldots,n)$ értékeket és képezzük az

$$e_k = y_k - \varphi(x_k; a_1, a_2, \ldots, a_m) \quad (k=1,2,\ldots,m) \tag{7}$$

eltéréseket, ahol y_k tapasztalati úton kapott érték.
Az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ paraméterek numerikus értékét abból a feltételből határozzuk meg, hogy a (7) eltérések algebrai összege zérus legyen, azaz

$$\sum_{k=1}^{n} e_k = 0 \tag{8}$$

feltétel teljesüljön. Mivel így csak egy feltételünk van az m számú paraméter meghatározásához, ezért az adott n számú tapasztalati úton kapott pontokat m csoportba osztjuk és mindegyik csoportban az eltérések összegét zérussal tesszük egyenlővé, s így jutunk a szükséges m számú feltételi egyenlethez. Természetesen a

$$\sum_{k=1}^{n_1} e_k = 0, \quad \sum_{k=n_1+1}^{n_2} e_k = 0, \ldots, \quad \sum_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} e_k = 0 \tag{9}$$

részfeltételekkel együtt a (8) is teljesül.
Ellenőrzésül a kiszámított $a_1, a_2, \ldots a_m$ paramétereknek (2) képletbe való behelyettesítése után, képezzük a (4), (5) és a (6) értékeket.
Megjegyzés: a közepek módszerével leggyakrabban az (1) transzformáció után kapott x és y közötti lineáris kapcsolatot határozzuk meg, melynek általános alakja $y = a\,x + b$. Így a tapasztalati úton kapott (x_k, y_k) értékpárokkal x_k vagy y_k változó növekedésének sorrendjében felírjuk az $y_k = ax_k + b$ $(k=1,2,\ldots,n)$ feltételi egyenleteket és a rendszert kb. megfelezve, két csoportra osztva külön-külön összeadjuk. Az így kapott két egyenletből álló egyenletrendszerből meghatározzuk az a és a b értékét. Az y és x helyére az eredeti változónak megfelelő kifejezések behelyettesítésével kapjuk az x és y közötti kapcsolat empirikus képletét.

c) A legkisebb négyzetek módszere
A paraméterek numerikus meghatározásának legelterjedtebb és legpontosabb módszere. A legkisebb négyzetek módszerével a paraméterek numerikus értékét az eltérések négyzetösszegének minimum feltételéből határozzuk meg.
Képezzük a

$$\sum_{k=1}^{n} e_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[y_k - \varphi(x_k; a_1, a_2, \ldots, a_m)\right]^2 = F(a_1, a_2, \ldots, a_m) \tag{10}$$

függvényt, amely az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ változók nem negatív függvénye, majd a minimum létezésének szükséges

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial a_m} = 0 \tag{11}$$

feltételi egyenletrendszeréből meghatározzuk a paraméterek numerikus értékét, melyeket a (2) képletbe helyettesítve, megkapjuk az empirikus képletet. Ellenőrzésül képezzük a (4), az (5) és a (6) értékeket.
A legkisebb négyzetek módszerének előnye, hogy ha a különbségek négyzetösszege, d_q kicsiny, akkor a különbségek d_k értéke $(k=1,2,\ldots,n)$ is kicsiny, aminek fordítottja a közepek módszerénél nem mindig áll fenn. Hátránya, hogy az előbbi módszerekhez viszonyítva több számítási munkát igényel. Használata akkor célszerű, ha a tapasztalati úton kapott adatok is elég pontosak.

A legkisebb négyzetek módszere igen alkalmas az ún. parabolikus típusú empirikus képletek meghatározására, melyek a megfigyelés eredményeként kapott x_k, y_k értékek közötti kapcsolatot polinomok alakjában fejezik ki. Ilyenkor a linearizáló módszer elhagyásával a

$$\varphi(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_o \quad (m > 0, \text{ egész}) \tag{12}$$

polinom együtthatóit úgy választjuk meg, hogy a

$$\sum_{k=1}^{n} e_k^2$$

mennyiség minimális legyen. A $\varphi(x)$ polinom m fokszámának megválasztására is ismertek módszerek, ezekre itt nem térünk ki, de nyilvánvaló, hogy m minél kisebb pozitív szám, annál egyszerűbb az empirikus képlet, azonban a polinom fokszámának túlságos csökkentése a megfelelő

$$\sum_{k=1}^{n} e_k^2$$

minimumának növekedéséhez vezet. (Megjegyezzük, hogy $m = n - 1$ esetén egyetlen polinom biztosítja, hogy a

$$\sum_{k=1}^{n} e_k^2 = 0$$

egyenlőség teljesül, s ez az m-ed fokú interpolációs polinom.)

Feladatok

1. Az adott

x	0	5	10	15	20	22,5	25	26
y	0	0,0143	0,0276	0,0426	0,0572	0,0648	0,0715	0,0758

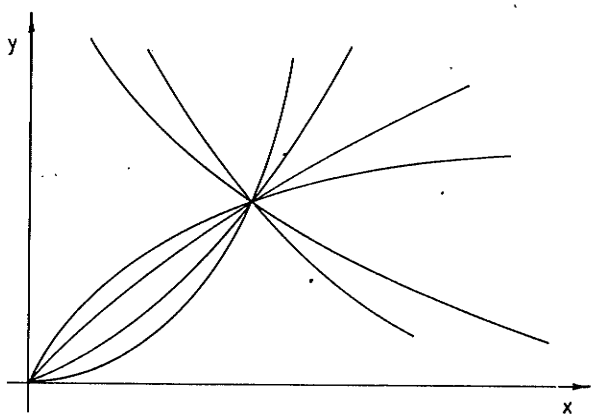
tapasztalati adatrendszerhez határozzuk meg az $y = ax$ típusú empirikus képletet az

a) kiválasztott pontok,
b) a közepek,
c) a legkisebb négyzetek módszerével,

és hasonlítsuk össze a d_k különbségek értékét, valamint a különbségek d átlagát és d_q négyzetösszegét!

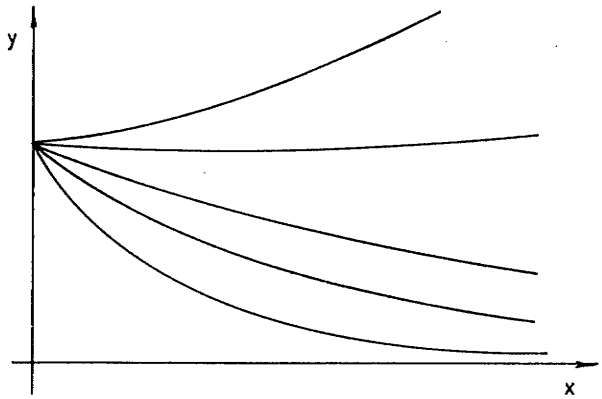
2.-8. A következő egyszerű képlettípusokhoz adjunk meg lineáris kapcsolatot előállító leképezést! (Az egyes típusokat a megfelelő görbékkel szemléltessük.)

2. $y = a\,x^b$



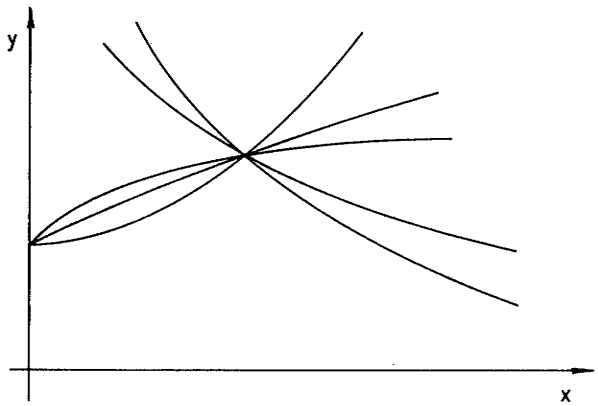
14. ábra

3. $y = a\ e^{bx}$



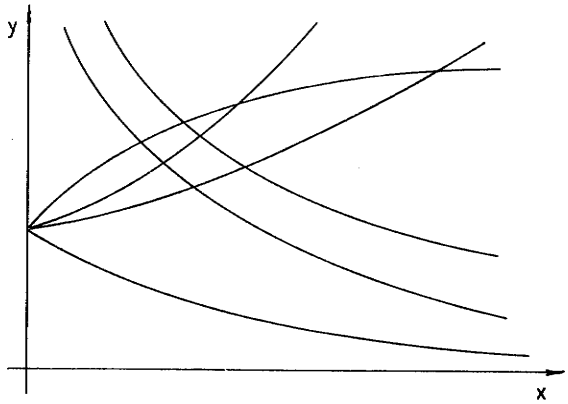
15. ábra

4. $y = a\ x^{n} + c$ (n adott)



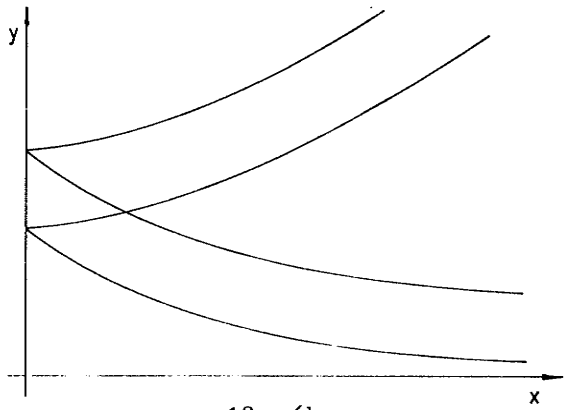
16. ábra

$\boxed{5.}$ $y = a\ x^{b} + c$



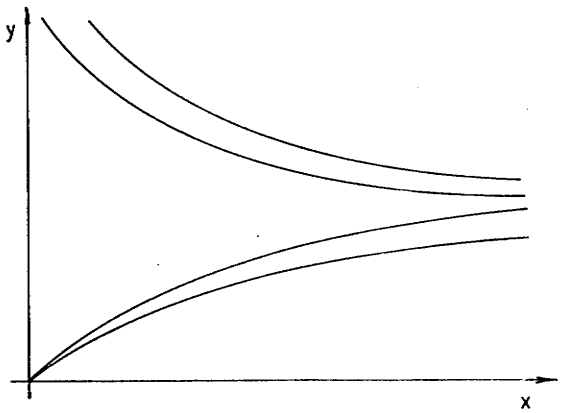
17. ábra

6. $y = a\ e^{bx} + c$



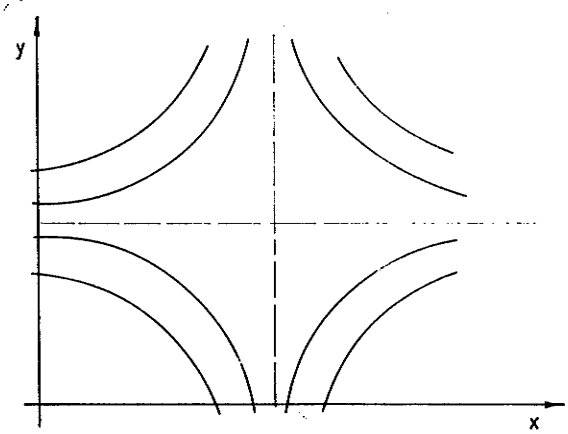
18. ábra

7. $y = \frac{x}{c\ x + d}$



19. ábra

$\boxed{8.}$ $y = \dfrac{a\,x + d}{c\,x + d}$



20. ábra

9.-10. Az adott adatrendszereket fejezzük ki alkalmas empirikus képlet segítségével:

9.

x	8,6	12,0	14,8	16,6	18,8	20,2	21,0	21,
y	0,4	0,09	0,18	0,29	0,51	0,73	0,90	1,10

10.

x	6,5	7,5	9,3	11,6	18,0	21,2	25,0
y	1,29	2,02	2,75	3,18	3,98	4,10	4,30

11.-17. Az adott adatrendszerekhez keressünk alkalmas empirikus képlet típust!

11.

x	26,43	22,40	19,08	16,32	14,04	12,12	10,51	9,147	7,995
y	14,70	17,53	20,80	24,54	28,83	33,71	39,25	45,49	52,52

12.

x	29,1	48,2	72,7	92,0	118	140	165	199
y	0,0493	0,0821	0,123	0,154	0,197	0,234	0,274	0,328

13.

x	0	3,45	10,85	19,30	28,80	40,10	53,75	70,95
y	19,9	18,9	16,9	14,9	12,9	10,9	8,9	6,9

14.

x	5	7	9	11	12
y	290	560	1144	1810	2300

15.

x	44,7	53,8	73,5	85,8	113,2	135,8
y	7,03	5,85	4,30	3,50	2,50	1,90

16.

x	8	10	15	20	30	40	60	80
y	13	14	15,4	16,3	17,2	17,8	18,5	18,8

17.

x	0,65	0,87	0,88	0,9	0,93	1,16	1,8	2,12	3
y	0,129	0,217	0,228	0,234	0,275	0,318	0,4	0,41	0,435

18.-19. Az adott adatrendszereket fejezzük ki az adott fokszámú parabolikus empirikus képlet segítségével, legkisebb négyzetek módszerével!

18.

x	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
y	0,7516	0,7628	0,7728	0,7836	0,7956	0,8065

fokszám = 1

19.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y	1,77	1,747	1,739	1,748	1,772	1,819	1,873	1,941

fokszám = 2

20.-21. Az adott adatrendszereket milyen empirikus képlettípussal fejezhetjük ki?

20.

x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	2,119	2,142	2,150	2,141	2,117	2,070	2,016	1,948

21.

x	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
y	1000	1400	1900	2500	3250	4200	5400	6950	8950	11450	1540

X. 3. DETERMINÁNSOK ÉS MÁTRIXOK

Determinánsok kiszámításakor a gyakorlati-számítások követelményeit kielégítő módszerek közül legjobban használható a Gauss-féle eliminációs eljárás, a Gauss-Chió féle eljárás, ill. a determinánsok szorzástételeire alapozott eljárás.
A Gauss-féle eliminációs eljárás a tananyagokból jól ismert, ezért ezt itt nem ismertetjük.

Gauss-Chió eljárás

Szorozzuk össze az

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ és a } \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & a_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{11} \end{vmatrix}$$

determinánst az A sorainak és B oszlopainak komponálásával:

$$\det AB = \begin{vmatrix} a_{11}^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11}\cdot a_{21} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}\cdot a_{n1} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Az egyes determinánsok főátlójában levő elemek indexeit felhasználva, vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A_{(11,22)}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A_{(11,nn)},$$

illetve általánosan:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A_{(11,22,\dots,nn)}, \text{ akkor}$$

$$\det AB = a_{11}^2 \begin{vmatrix} A_{(11,22)} & \dots & A_{(11,2n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{(11,2n)} & \dots & A_{(11,nn)} \end{vmatrix}$$

alakban írható. Mivel $B = a_{11}^n$, ezért (feltéve, hogy $a_{11} \neq 0$, amit átrendezéssel elérhetünk)

$$\det A = \det A_{(11,22,\dots,nn)} = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} A_{(11,22)} & \dots & A_{(11,2n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{(11,n2)} & \dots & A_{(11,nn)} \end{vmatrix}$$

Az eljárást ismételve az (n-1)-edrendű, (n-2)-edrendű stb. determinánsokra, megkapjuk A értékét.

Szorzástételre alapozott eljárás

Az n-edrendű A mátrix determinánst állítsuk elő egy alsó háromszög mátrix determináns (C) és egy felső háromszög mátrix determináns (B) szorzataként. (Ezt szimmetrikus és pozitív definit mátrix determinánsokra mindig elvégezhetjük.) A felső háromszög mátrix determins főátlójában csupán egységelemek álljanak. A determináns értékét akkor a C mátrix determináns értéke adja, ez pedig a C főátlójában álló elemek szorzatával egyenlő. Ugyanis

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & a_{02} & \cdots & a_{00} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

A determinánsok szorzástétele értelmében C sorainak és B oszlopainak komponálásával a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{c_{11}}$$

$$c_{i1} = a_{i1},$$

$$c_{11} = a_{11}$$

$$a_{22} = c_{21}b_{12} + c_{22};$$

$$c_{22} = a_{22} - c_{21}b_{12}$$

$$a_{23} = c_{21}b_{13} + c_{22}b_{23};$$

$$b_{23} = (a_{23} - c_{21}b_{13})\frac{1}{c_{22}}$$

$$a_{24} = c_{21}b_{14} + c_{22}b_{24};$$

$$a_{32} = c_{31}b_{12} + c_{32};$$

$$a_{33} = c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23} + c_{33};$$

$$b_{24} = (a_{24} - c_{21}b_{14})\frac{1}{c_{22}}$$

$$c_{32} = a_{32} - c_{31}b_{12}$$

$$c_{33} = a_{33} - c_{31}b_{13} - c_{32}b_{23}$$

.....

Vagyis az általános számítási formula:

$$c_{i1} + a_{i1} \; ; \quad b_{1j} = \frac{a_{1j}}{c_{11}} , \qquad j > 1$$

$$c_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} b_{ki} \; ; \qquad 1 < j \leq i$$

$$b_{ij} = \frac{1}{c_{ii}} \; a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} b_{kj} \; ; \; j > i > 1$$

$$(i,j = 1,2,\ldots,n),$$

és a determináns értéke:

$$\det A = c_{11} c_{22} \ldots c_{nn} = \prod_{i=1}^{n} c_{ii} .$$

<u>Inverz mátrix kiszámítása elemi átalakításokkal</u>

Ha egy A mátrixon olyan elemi átalakításokat végzünk, melyek az A-ból az E egységmátrixot állítja elő, akkor ugyanezeket az elemi sor és oszlopműveleteket azonos sorrendben alkalmazva az E egységmátrixra, abból az A^{-1} inverz mátrixot kapjuk.

<u>Feladatok</u>

1. Számítsuk ki a következő determináns értékét a Gauss-féle elimináció módszerével:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Számítsuk ki a determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 0,21 & 0,00 & 3,28 & -2,51 \\ 10,01 & 2,18 & 0,33 & 1,65 \\ 4,21 & 0,68 & 2,35 & 1,06 \\ 1,72 & -2,13 & 3,62 & 0,88 \end{vmatrix}$$

$\boxed{3.}$ A Gauss-Chió-féle eljárás alkalmazásával számítsuk ki az első feladatban szereplő determináns értékét!

$\boxed{4.}$ Szorzástételre alapozott eljárás segítségével számítsuk ki az első feladatban szereplő determináns értékét.

5. Számítsuk ki (esetleg többféleképpen is) alkalmas módszer segítségével a következő determinánsokat:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -6 & -10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

*6. Elemi sor és oszlopműveletekkel határozzuk meg a következő mátrix inverzét! Mutassuk meg, hogy szinguláris esetben formálisan sem állítható elő ezzel a módszerrel az inverz mátrix!

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Számítsuk ki elemi sor és oszlopműveletekkel az

$$A = \begin{bmatrix} 2{,}20 & 4{,}84 & 8{,}91 \\ 6{,}38 & -3{,}19 & 0{,}55 \\ 0{,}55 & 3{,}74 & 1{,}10 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét!

8. Számítsuk ki az alábbi mátrixokhoz

a) a determinánsok értékét
b) az inverz mátrixokat

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}81 & 1{,}19 \\ 2{,}55 & 1{,}23 & 0{,}96 \\ 0{,}78 & 1{,}51 & 2{,}36 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}13 & -0{,}25 & 1{,}15 \\ -0{,}25 & 2{,}41 & 0{,}78 \\ 1{,}15 & 0{,}78 & 1{,}59 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0{,}21 & 0{,}00 & 3{,}28 & -2{,}51 \\ 10{,}01 & 2{,}18 & 0{,}33 & 1{,}65 \\ 4{,}21 & 0{,}68 & 2{,}35 & 1{,}06 \\ 1{,}72 & -2{,}13 & 3{,}62 & 0{,}88 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3{,}06 & -2{,}18 & 1{,}63 & 0{,}85 \\ -0{,}72 & 0{,}68 & 1{,}13 & -2{,}25 \\ 1{,}41 & -3{,}18 & 2{,}11 & 0{,}63 \\ 1{,}21 & 0{,}82 & -3{,}12 & 0{,}61 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2{,}28 & 0{,}56 & 1{,}37 & 0{,}85 \\ 0{,}67 & 1{,}88 & 1{,}28 & -1{,}56 \\ 1{,}93 & 0{,}82 & 2{,}57 & -0{,}62 \\ 2{,}11 & -1{,}07 & 1{,}65 & 3{,}34 \end{bmatrix}$$

X. 4. VÉGES DIFFERENCIÁK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Ebben a pontban a numerikus differenciákra, ill. integrálásra és közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték feladatainak közelítő megoldására adunk feladatokat. A módszerekkel kapcsolatban ld. pl. Dr. Bajcsay Pál: Numerikus Analízis c. jegyzetét.

Feladatok

$\boxed{1.}$ Határozzuk meg az $y = \operatorname{sh} x$

x_k	$y_k = \operatorname{sh} x_k$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,85	0,9561				
		0,1434			
0,95	1,0995		0,0110		
		0,1544		0,0015	
1,05	1,2539		0,0125		0,0002
		0,1669		0,0017	
1,15	1,4208		0,0142		
		0,1811			
1,25	1,6019				

táblázatosan adott értékei alapján az $y' = \operatorname{ch} x$ értékét az $x_0 = 0{,}85$ helyen!

2. Alkalmazzunk egy, a negyedrendű differenciálnál záródó numerikus differenciálási formulát arra, hogy meghatározzuk az $y'' + ay' + by = 0$ differenciálegyenlet együtthatóit, ha azt az alábbi táblázattal megadott $f(x)$ függvény kielégíti:

x:	0,85	0,95	1,05	1,15	1,25
f(x):	0,9561	1,0995	1,2539	1,4208	1,6019

3. Számítsuk ki $f(x) = 1/(1 + x)$ első deriváltjának értékét az $x = 0{,}005$ helyen! Válasszunk ekvidisztáns alappontokat, és legyen h rendre 1; 0,1; 0,01. Induljunk ki az f(x) négy tizedesre kerekített értékeiből! Végezzük a számításokat a másodrendű differenciákkal bezárólag!

4. Számítsuk ki

   a) trapéz képlettel az

$$y = \text{ar sh tg } \frac{x}{2}$$

   függvény $I(x_k) = \int_{x_o}^{x_k} \text{ar sh tg } \frac{x}{2}$ integrálja

   értékét a $[0;2]$ intervallumban $h = 0{,}2$ lépéstávolsággal!

   b) Végezzük el a számítást Simpson-képlet segítségével is, $h = 0{,}4$ lépéstávolsággal!

5. Számítsuk ki az alábbi függvények

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

   integrálértékeit adott intervallumban, adott h lépéstávolsággal. $5 \cdot 10^{-6}$ pontossággal:

   a) $y = \ln \sin \frac{x}{\pi}$; $a = 3{,}00$, $b = 5{,}00$, $h = 0{,}20$;

   b) $y = \ln \cos \frac{x}{e^2}$; $a = 40{,}00$, $b = 43{,}00$, $h = 0{,}30$;

   c) $y = \ln \text{tg } x/\pi$; $a = 1{,}70$, $b = 2{,}70$, $h = 0{,}10$;

   d) $y = \arcsin e^{-\sqrt{2x}}$; $a = 0{,}80$, $b = 1{,}30$, $h = 0{,}05$;

   e) $y = \text{ar th} \sin \frac{x}{2}$; $a = 1{,}00$; $b = 2{,}00$, $h = 0{,}10$;

6. Oldjuk meg az $y' = 2x + 0{,}1y^2$ differenciálegyenletet az $y(0) = 0{,}2$ kezdeti feltétel mellett a $[0;1]$ intervallumban Runge-Kutta módszerével

   a) $h = 0{,}1$ lépéstávolsággal;
   b) $h = 0{,}2$ lépéstávolsággal;

   és vessük össze a két közelítés értékét $x = 1{,}0$ helyen!

7. Oldjuk meg numerikusan az alábbi differenciálegyenleteket adott kezdeti feltétel, adott intervallum és adott lépéstávolság mellett!

a) $y' = 2{,}0x + 1{,}1y^2$, $y(0) = 0{,}2$, $[0;1]$, $h = 0{,}1$;

b) $y' = 1{,}0x^2 + 1{,}0y$, $y(0) = 0{,}1$, $[0;1]$, $h = 0{,}1$;

c) $y' = 1{,}0x^2 + 1{,}0y^2$, $y(0) = 0{,}5$, $[0;1]$, $h = 0{,}1$;

d) $y' = x^2 + xy$, $y(0) = 0{,}2$, $[0;1]$, $h = 0{,}1$;

e) $y' = x + \sin \frac{y}{3}$, $y(1{,}6) = 4{,}6$, $[1{,}6;3{,}11]$ $h = 0{,}15$;

8. Tekintsük a következő kezdetiérték feladatokat:

a) $y' + y = 0$, $y(0) = 1$

b) $y' + 2xy = 2x^3$, $y(0) = 0$

Használjunk ötödfokú Taylor polinomot y-nak az $x = 0{,}1;0{,}2;$ és $0{,}3$ pontokban való kiszámítására.

9. Oldjuk meg a 8.a) és 8.b) feladatot Picard módszerével!

10. Oldjuk meg a 8.a) feladatot Runge-Kutta módszerével. Adjuk meg a közelítő megoldás értékét a $x = 1$ helyen!

MEGOLDÁSOK

I. 1.

1. Természetesen igen sokféle sorbarendezés lehetséges. Fontos az a speciális sorbarendezés, amelyben az azonos indexösszegű tagokat egy-egy csoportba gyűjtjük és a sorrendet egyébként az index növekedés határozza meg:

$a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_1 b_3, a_2 b_2, a_3 b_1, \ldots$

$, a_k b_1, a_{k-1} b_2, \ldots, a_1 b_k, \ldots, a_n b_1, a_{n-1} b_2 \ldots$

$\ldots, a_1 b_n, a_n b_2, a_{n-1} b_3, \ldots, a_2 b_n, \ldots, a_n b_n.$

2. A feladat végtelen sokféleképpen oldható meg. A legegyszerűbb, ha az 1. feladat megoldásának javasolt módszerét alkalmazzuk. Most egy csoporton belül azok a rendezett párok szerepelnek, amelyeknek az elemösszege állandó:

$(1;1), (2;1), (1;2), \ldots, (k;1), (k-1;2), (k-2;3), \ldots$

$\ldots, (1;k), \ldots$

Egy adott $(n;m)$ párhoz a fenti sorozatban elfoglalt helyét meghatározó természetes számot rendeljük egy-egy értelmű módon, és ez a megszámlálás pl.:

$$\begin{array}{c} 1 \longleftrightarrow (1;1) \\ 2 \longleftrightarrow (2;1) \\ \vdots \\ 12 \longleftrightarrow (4;2) \\ \vdots \end{array}$$

3. Először számláljuk meg a pozitív racionális számokat. Ezek egyértelműen írhatók fel p/q alakban, ahol p és q pozitív egészek és relatív prímek. E számokat a 2. feladat elve szerint sorba rendezhetjük:

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \ldots$

Ezután ugyanilyan elv szerint sorba rendezhetjük a negatívumokat:

$-\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, \ldots$

A két végtelen sort és a zérust most összefésülhetjük az alábbi módon:

$$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \ldots$$

Végül a racionális számokhoz (egy-egy értelmű módon) a fenti sorozatban elfoglalt helyük sorszámát rendeljük.

Ezzel megoldottuk a feladatot, ami egyben annak a bizonyítása is, hogy ugyanannyi racionális szám van, ahány természetes szám.
(A feladat természetesen végtelen sokféle egyéb módon is megoldható).

4. A feladat egyszerűen megoldható, ha az adott függvényeket linearizáljuk. Pl.

$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 2x$, amelyből $f \notin H_1$.

Hamisak: a), c), d), e), így: $\boxed{\text{b) igaz.}}$

5. b) és e)

6. Valamennyi

7. Az értékkészlet nyilván $\mathbb{R}$. Inverz nem létezik, mivel a leképezés nem egy-egyértelmű: pl. F sin x-hez és tg x-hez egyaránt a zérust rendeli. Egy lehetséges kibővítés:
$f \longmapsto f(0)$ minden olyan függvényre, amelyre f(o) értelmezett. Egy lehetséges leszűkítés: F-et csak a polinomokon értelmezzük.

8. a) Az egy-egyértelműség következménye, hogy létezik inverz. G_τ^{-1} f-hez azt az $\tilde{f}$ függvényt rendeli, amelyre $\tilde{f}(x) = f(x+\tau)$ ("balra tolás").

b) $((G_{\tau_1} \circ G_{\tau_2})(f))(x) = (G_{\tau_1}(G_{\tau_2}(f)))(x) = (G_{\tau_2}(f))(x-\tau_1) =$

$= f(x-\tau_1-\tau_2) = f(x-(\tau_1+\tau_2)) = (G_{\tau_1+\tau_2}(f))(x)$

c) $((F \circ G_\tau)(f))(x) = (F(G_\tau(f)))(x) = (G_\tau(f))(o) =$

$= f(o-\tau) = f(-\tau)$

9. a) Mutassuk meg, hogy G_g általában nem egy-egy értelmű.
Pl. legyen $g(x) = 2$.
Ekkor

$(G_g(f))(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2)$.

Ezzel G_g az $f_1(x) = x^2$ és $f_2(x) = 2 + x$ függvényhez egyaránt az $\tilde{f}(x) = 4$ függvényt rendeli.

b) $((G_g \circ G_h)(f))(x) = (G_g(G_h(f)))(x) = (G_h(f) \circ g)(x) =$

$= (G_h(f))(g(x)) = (f \circ h)(g(x)) = f(h(g(x))) = f((h \circ g)(x)) =$

$= (G_h \circ g(f))(x)$

c) $(G_e(f))(x) = (f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x)$

10. $(G_\varphi(\nu))(x) = (\nu \circ \varphi)(x) = \nu(\varphi(x)) = \nu(ax + b) = c(ax + b) + d =$

$= acx + cb + d,$

ahol $\nu(x) = cx + d$ és $\varphi(x) = ax + b$.

Ezzel $G_\varphi(\nu) \in \Phi$; $G_\varphi(\nu)(x) = Ax + B$.

Inverz akkor létezik, ha $A = ac$ és $B = cb + d$ ismeretében (tehát $G_\varphi(\nu)$ ismeretében) egyértelműen meghatározható c és d (tehát ν). Ennek egyetlen feltétele: $a \neq 0$. Ezzel: $c = A/a$; $d = B - Ab/a$.

I. 2.

1. a) $\neg A \vee B$

b) $\neg A \wedge \neg B$

c) $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$

d) $\exists x \forall y\ (A(x,y) \wedge \neg B(x,y))$

e) $\forall x\ (\neg A(x) \wedge \neg B(x))$

f) $\exists x \forall y \exists z(A(x,y,z) \vee \neg B(x,y,z))$

Konkrét példa a c) esetre:

$A(x)$ = az x racionális szám;
$B(x)$ = x felírható két egész hányadosaként;
$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ = minden számra igaz, hogy amennyiben racionális, akkor felírható két egész hányadosaként. Egyszerűbb nyelvezettel: Minden racionális szám felírható két egész hányadosaként. Ez az állítás nyilván igaz. Tehát a tagadása hamis: Nem igaz, hogy létezik olyan szám, amely racionális és nem írható fel két egész hányadosaként.

2. Példával bizonyítható: a) b) és f).
Az adott példa rendre a következő állításoknak tegyen eleget: $A(x_o)$, $\forall y\ A(x_o,y)$, $\forall y\ A(x_o,y)$.

Pl. f) egy konkrét realizálása:
Tétel: Nem igaz, hogy minden x valós számhoz található olyan y valós szám, hogy $x = y^2$.
Bizonyítás példával: $x_o = -1$; Bármely y valós számra $-1 \neq y^2$.

3. $C \to A$ és $B \to C$ egyaránt igaz. Akkor $B \to A$ is igaz, amelyből $A \cup B = A$. Tehát $A \cup B$ C-nek $\boxed{\text{szükséges}}$ feltétele.
4. Elégséges.
5. Szükséges.
6. Elégséges. ($A = C$; $B \subset C$)
7. Példa a 3. feladatra:
   B = az adott szám osztható 18-cal
   C = az adott szám osztható 9-cel
   A = az adott szám osztható 3-mal
   Hasonlóan adhatók példák a többi feladatra.

I. 3.

1. Az egyenlőtlenségeket egészen addig kell alakítanunk, amíg nyilvánvaló állításhoz nem érkezünk. (Közben ügyelnünk kell, hogy az alkalmazott átalakítások fordított irányban is végrehajthatók legyenek: vagyis az egyik egyenlőtlenség (v. egyenlőtlenség lánc) a másiknak szükséges és elégséges feltétele legyen! Megengedhető az is, hogy az átalakított reláció az eredetinek csak elégséges feltétele legyen. Nem engedhető meg azonban az, hogy az újabb raláció az előzőnek csak szükséges feltétele legyen!) Lássuk pl. a c) feladatot!

$$|a| \le \sqrt{a^2 + b^2} \le |a| + \frac{1}{2}\frac{b^2}{|a|}$$

$$a^2 \le a^2+b^2 \le a^2+b^2 + \frac{1}{4}\frac{b^4}{a^2},$$

$$0 \le b^2 \le b^2 + \frac{1}{4}\frac{b^4}{a^2}.$$

Az utóbbi nyilvánvalóan igaz.

2. Matematikai indukcióval bizonyíthatunk.
   Ha n=1, akkor

$$1 + \varepsilon < 1 + 2\varepsilon$$

nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy

$$(1 + \varepsilon)^n < 1 + 2n\varepsilon .$$

akkor n+1-re

$$(1 + \varepsilon)^{n+1} = (1 + \varepsilon)^n (1 + \varepsilon) < (1+2n\varepsilon)(1+\varepsilon) = 1+2n\varepsilon+2n\varepsilon^2 +$$

$$+\varepsilon < 1+2n\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 1+2(n+1)\varepsilon \ !$$

A Bernoulli-egyenlőtlenséget is alkalmazva elég kis $0<\varepsilon$-ra viszonylag szűk korlátok közé tudjuk az $(1+\varepsilon)^n$ kifejezést szorítani.

3. a) $1{,}023 < 1{,}0023^{10} < 1{,}046$

   b) $1024\cdot 1{,}0055 < 2{,}0011^{10} = 2^{10}\cdot 1{,}00055^{10} < 1024\cdot 1{,}011$

   c) $a^3 + 3a^2b < (a+b)^3 = a^3(1+\frac{b}{a})^3 < a^3(1+6\frac{b}{a}) = a^3 + 6a^2b$

4. $(p-q)^2 \geq \frac{c}{c+1}p^2 - cq^2$

   $p^2 - 2pq + q^2 \geq \frac{c}{c+1}p^2 - cq^2$

   $\frac{1}{c+1}p^2 + (1+c)q^2 - 2pq = (\frac{p}{\sqrt{1+c}} - \sqrt{1+c}\,q)^2 \geq 0!$

   (l. az 1. feladathoz fűzött megjegyzéseket is!)

5. A 4. feladat egyenlőtlenségében hajtsuk végre az alábbi helyettesítéseket:

$$v = p - q,$$
$$u = p,$$
$$c = b/a.$$

6. A 4. feladatban szereplő megjegyzéseket szem előtt tartva, egyszerű átalakítások után nyilvánvaló igazsághoz jutunk.

7. Az $a = -5$, $b = 1/2$, $x = -3$ behelyettesítéseket végrehajtva az állítás nyilvánvaló.
   Ha

$$-5x^2 + xy - 3y^2 = 0$$

   akkor nyilván

$$-4{,}5x^2 - 2{,}5y^2 = 0$$

   is igaz lesz. Az utóbbinak egyetlen megoldása azonban $x=y=0$. Ekkor a kérdezett egyenlőség valóban fennáll.

I. 4.

1. a) nem létezik, 2, 0, 2, 0, 2, 0

   b) ∞, ∞, ∞, nem létezik, 1, nem létezik, 1

   c) nem létezik, 1, -1, 1, -1, 1, -1

d) 1, 1, 1, nem létezik, 0, 1, 0

e) 1, 1, 1, $\sqrt[3]{3}$, 1, $\sqrt[3]{3}$, 1

f) 1, 1, 1, nem létezik, 0,5 , 1, 0,5

g) $-\infty$, $-\infty$, $-\infty$, 0, nem létezik, 0, nem létezik

h) nem létezik, 1, -1, 1, -1, 1, -1

i) nem létezik, 1, -1, 1,33..., -1,5, 1,33..., -1,5

j) nem létezik, 1, -1, 1,33..., nem létezik, 1,33...,-1

k) 0, 0, 0, 1, -0,5, 1, -0,5

l) nem létezik, 1, -1, 2, -1, 2, -1

m) nem létezik, $-\infty$, ∞, nem létezik, nem lét., nem lét., nem lét.,

2. A fix pontok az

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

illetve

$$x^2 - x - 6 = 0$$

egyenlet $x_{1,2} = 3; -1$ illetve $x_{1,2} = 3; -1,5$ megoldásai. Az adott induló elemekkel mindkét sorozat 3-hoz konvergál. A konvergencia ott gyorsabb, ahol a jobb oldalt reprezentáló függvény a fix pont környezetében "laposabb":

$$\left(2 + \frac{3}{x}\right)'\Big|_{x=3} = -\frac{1}{3}$$

$$\left(1 + \frac{6}{x}\right)'\Big|_{x=3} = -\frac{2}{3}.$$

Mivel $\left|-\frac{1}{3}\right| < \left|-\frac{2}{3}\right|$, így az a_n sorozat gyorsabban konvergál. Az első néhány elem:

$a_o = 1$	$b_o = 1$
$a_1 = 5$	$b_1 = 7$
$a_2 = 2,6$	$b_2 = 1,9$
$a_3 \cong 3$	$b_3 = 4$

3. Mindkét sorozat nyilván 1-hez konvergál. Azt kell belátnunk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n-1)/(b_n-1) = 0$.

Valóban:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+1}{n^2+k} - \frac{n^2+k}{n^2+k}}{\frac{n+1}{n+2} - \frac{n+2}{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+k}(k-1) = 0!$$

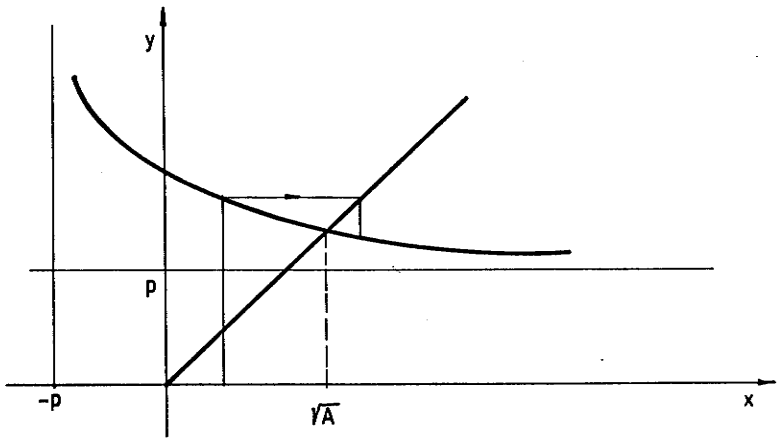
4. Konvergens. Az a_n/b_n sorozat "0/0" típusú, azonban a_n gyorsabb konvergenciája miatt $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 0}$. Pl.: $a_n = 1/n^2$ és $b_n = 1/n$.

5. 3; a b) sorozat gyorsabban konvergál.

6. A sorozat csak a leképezés fix pontjához konvergálhat:

$$x = p + \frac{A - p^2}{x+p},$$

amelyből $x = \pm\sqrt{A}$. Rajzoljuk fel az iteráció ábráját! Ebből nyilvánvaló, hogy ha $x_o > -p$, akkor $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}}$. (1. ábra)



21. ábra

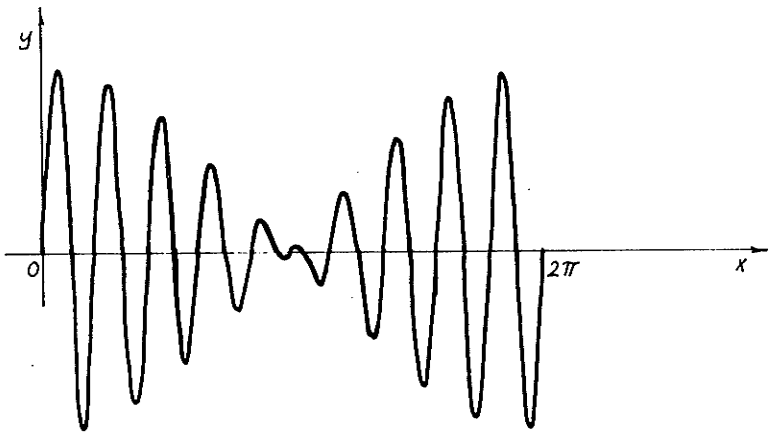
M.I.4.

A konvergencia gyorsaságára az alábbi derivált jellemző:

$$\frac{d}{dx}\left(p + \frac{A - p^2}{x + p}\right)\Bigg|_{x=\sqrt{A}} = -\frac{A - p^2}{(\sqrt{A}+p)^2} = \frac{p - \sqrt{A}}{p + \sqrt{A}}.$$

Ebből láthatjuk, hogy $\boxed{\text{p minél közelebb van A-hoz, annál gyorsabb a konvergencia.}}$

1. Nem ír le harmonikus rezgést.
   A függvény 2π-periodikus.



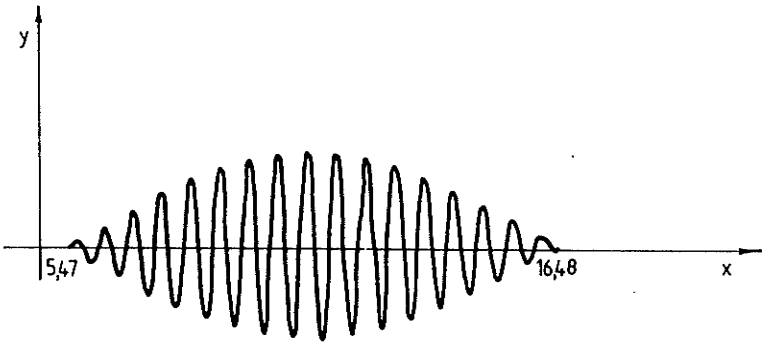
22. ábra

2. A függvény nem periodikus, mert 10 racionális, 3π pedig irracionális szám, így sin 10x-nek és sin 3π x-nek nincs közös periódusa. Az ilyen függvényt kváziperiodikus függvénynek nevezzük. Az ábrázoláshoz az alábbi átalakítás célszerű:

$$\sin 10x + \sin 3\pi x = 2 \sin \frac{10+3\pi}{2} x \cos \frac{10-3\pi}{2} x.$$

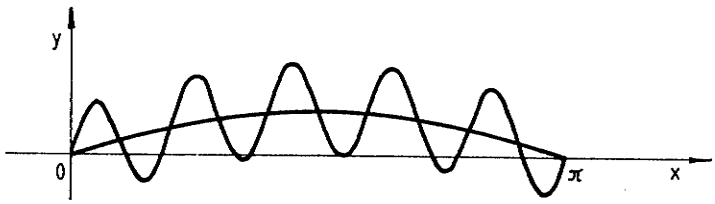
Az ábrán látható, lebegésnek nevezett jelenséget az idézi elő, hogy

$$0 < \frac{10-3\pi}{2} << \frac{10+3\pi}{2} .$$



23. ábra

3.



24. ábra

4. a) $\sin^3 2x = \sin 2x \dfrac{1-\cos 4x}{2} = \dfrac{1}{2}\sin 2x - \dfrac{2}{4}\sin 2x \cos 4x =$

$= \dfrac{1}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{4}(\sin 6x - \sin 2x) = \boxed{\dfrac{3}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{4}\sin 6x}$

b) $\sin^3 2x = \left(\dfrac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}\right)^3 = \dfrac{e^{6ix} - 3e^{2ix} + 3e^{-2ix} - e^{-6ix}}{-8i} =$

$= \dfrac{3}{4}\,\dfrac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} - \dfrac{1}{4}\,\dfrac{e^{6ix} - e^{-6ix}}{2i} = \boxed{\dfrac{3}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{4}\sin 6x}$

5. Az alábbi azonosságokat használjuk, amely egyben az a) és b) feladat megoldása is:

$$\sin 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1 + \mathrm{tg}^2 x},$$

$$\cos 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}.$$

Ezekkel:

c) $\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x}$

d) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

e) $\sin 4x = 4 \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2}$

6. Lokális növekedés bizonyítása:

ha $x > 0$, akkor $f(x) = x(2+\sin \frac{1}{x}) \geq x(2-1) = x > 0$,

ha $x = 0$, akkor $f(x) = 0$,

ha $x < 0$, akkor $f(x) = x(2+\sin \frac{1}{x}) \leq x(2-1) = x < 0$.

A nem monotonitás bizonyítása $[-\delta ; \delta]$-ban:

Legyen $x_1 = \dfrac{1}{(2k-0,5)\pi}$ és $x_2 = \dfrac{1}{(2k+0,5)\pi}$, ahol k

természetes szám.

Ekkor $0 < x_2 < x_1$ és

$$f(x_1) = \frac{1}{(2k-0,5)\pi}; \qquad f(x_2) = \frac{3}{(2k+0,5)\pi} .$$

Annak feltétele, hogy $[x_2, x_1]$-ben $f(x)$ ne legyen monoton növekedő:

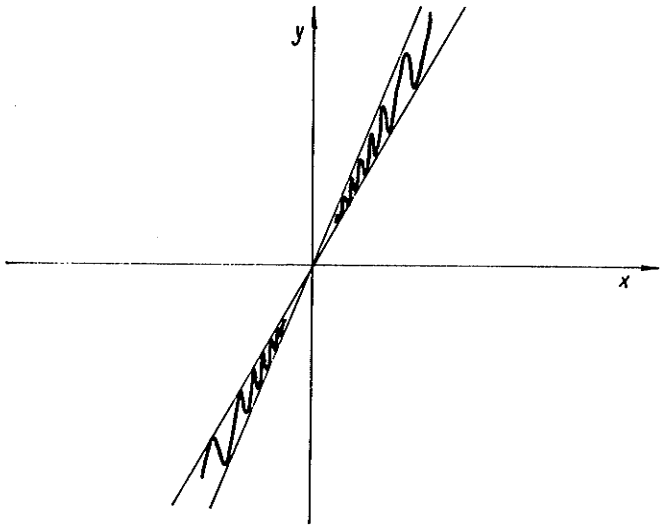
$$f(x_2) = \frac{3}{(2k+0,5)\pi} > \frac{1}{(2k-0,5)\pi} = f(x_1);$$

amelyből: $k > \frac{1}{2}$.

Ha k elég nagy, akkor ez a feltétel teljesül, továbbá bármilyen kicsiny is $0 < \delta$:

$$0 < x_2 < x_1 < \delta$$

és e δ -hoz valóban létezik alkalmas k!
A monoton szakaszok az $x \neq 0$ helyeken értelmezett derivált függvény zérushelyei közötti szakaszok.
A grafikon:



25. ábra

7. A monotonitás hiánya nem szükségszerű, amelyről sgx monoton növekedő függvény példája győz meg minket. Ez a függvény az x=0 hely kivételével (ahol lokálisan növekedő) sehol sem lokálisan növekedő, vagy csökkenő.

8. A keresett példa

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x > 0 \text{ és } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x > 0 \text{ és } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \text{ és } x \text{ racionális} \\ -2, & \text{ha } x < 0 \text{ és } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

Ez a függvény az x=0 hely kivételével ahol lokálisan növekedő sehol sem lokálisan növekedő, vagy csökkenő és sehol sem monoton.

9. A 6. feladatban szereplő függvény abszolút értéke, $|f(x)|$ ilyen. Hiszen

$$|f(x)| \begin{cases} = 0, & \text{ha } x=0 \\ > 0, & \text{ha } x \neq 0. \end{cases}$$

Ezzel az abszolút minimumot igazoltuk. Tekintettel arra, hogy $|f(x)| = f(x)$, ha $x > 0$, így a monotonitás hiányának bizonyítása megegyezik a 6. feladatban közölt bizonyítással. A $-|f(x)|$ függvénynek a kívánt feltételek mellett abszolút maximuma van az $x = 0$ pontban.

10. Igaz: $|f(x)| = |f(x+p)| =$, ahol p a periódus.

    a) $\sin x \; : 2\pi$

    $|\sin x| : \pi$

    b) $\operatorname{tg} x \; : \pi$

    $|\operatorname{tg} x| : \pi$

11. $\sin|x|$ nem periodikus, $\cos|x|$ periodikus

12. $\sin \frac{1}{x}$ nem periodikus, $1/\sin x$ pedig az.

II. 2.

1. Definíciószerűen legyen $c = f(1)$.
   Akkor

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x\, f(1) = c\, x!$$

2. $f(\lambda x) = m\lambda x + b \neq \lambda f(x) = \lambda(mx+b)$, ha $\lambda \neq 0$!

   $v = m\,u$, amelynek homogén linearitása egyszerűen belátható:

$$v(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1\, v(u_1) + \lambda_2\, v(u_2).$$

3. Mind folytonos, egyenletesen folytonos: a), c), d), e), g). Zárt intervallumban folytonos függvény egyenletesen is folytonos, így d) és e) esetén ez teljesül. A többi feladat külön vizsgálatot igényel. Deriválható függvények esetében mindig abban a pontban kell δ -t keresnünk, ahol a függvény a legnagyobb abszolút értékű deriválttal rendelkezik, ha ilyen létezik. Ennek alapján megállapítható, hogy az a), c) és g) esetben is teljesül az egyenletes folytonosság.
   A keresett δ :

   a) $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$

   c) $\delta < \varepsilon^2$

   d) $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$

e) $\delta < \varepsilon^2$

g) $\delta < \delta_o^2 \varepsilon$

A b) és f) esetben f(x) és f'(x) együttesen a ∞ -hez divergál, így az adott ε -hoz szükséges δ is minden határon túl csökken. Nézzük pl. a b) esetet:

$$0 < (x + \delta)^2 - x^2 < \varepsilon ,$$

$$0 < 2x\delta < 2x\delta + \delta^2 < \varepsilon,$$

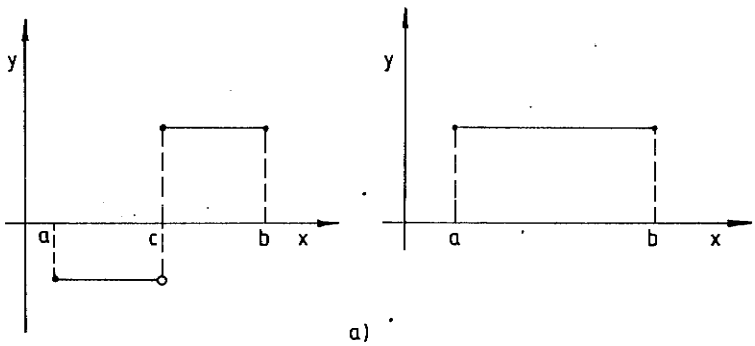
$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2x}; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\varepsilon}{2x} = 0!$$

Tehát a b) és f) esetben az egyenletes folytonosság nem teljesül.
A folytonosság mindegyik esetben fennáll.

b) $\delta < \sqrt{x_o^2 + \varepsilon} - x_o$; f) $\delta < \varepsilon x_o^2 / (1 + \varepsilon x_o)$.

4. A meggyőző ellenpéldák olyan függvények, amelyek grafikonjai az ábrán láthatóak:

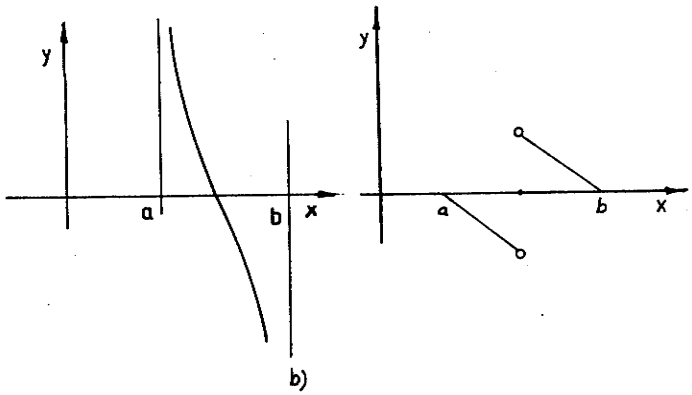
a) a függvény nem folytonos [a,b]-n, ill. sgf(a)=sgf(b), így lehetséges, hogy a függvény nem veszi fel a zérus értéket



a)

26. ábra

b) a függvény nem folytonos [a,b]-n, így lehetséges, hogy nem korlátos, vagy ha korlátos, lehetséges, hogy nem veszi fel infimumát és supremumát



27. ábra

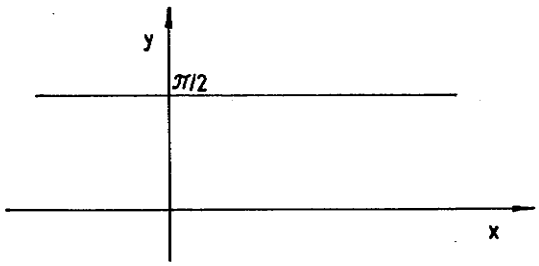
II. 3.

1. a) $f'(x) \equiv 0;\ x \in \mathbb{R}$ amelyből

$$f(x) \equiv \operatorname{arc\,tg}(1+x^2) + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+x^2} \equiv \text{állandó.}$$

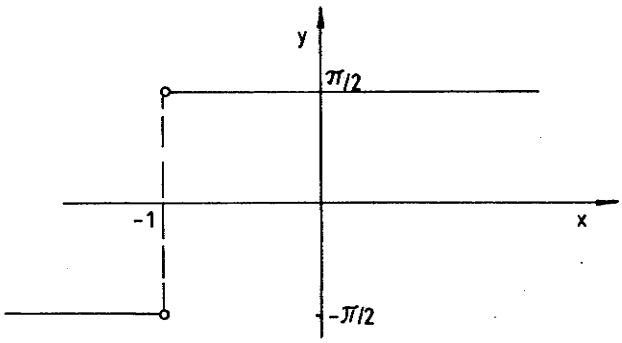
Az állandó pl. az $x=0$ helyen meghatározható, ezzel

$$\operatorname{arc\,tg}(1+x^2) + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+x^2} \equiv \frac{\pi}{2}\ .$$



28. ábra

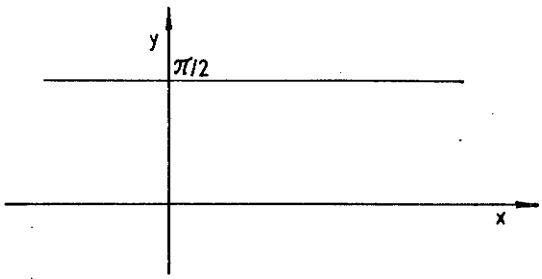
b) $f'(x) \equiv 0$, ha $x \neq -1$



29. ábra

c) $f'(x) \equiv 0; \quad x \in \mathbb{R}$

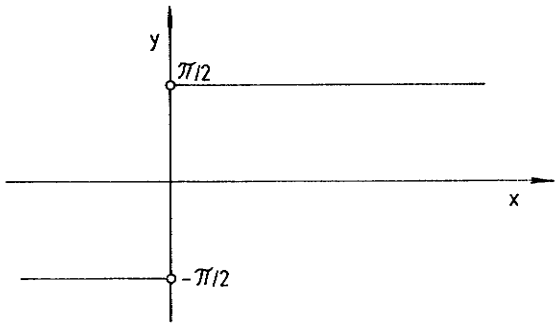
$$\operatorname{arc\,ctg} g(x) + \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{g(x)} = \pi/2$$



30. ábra

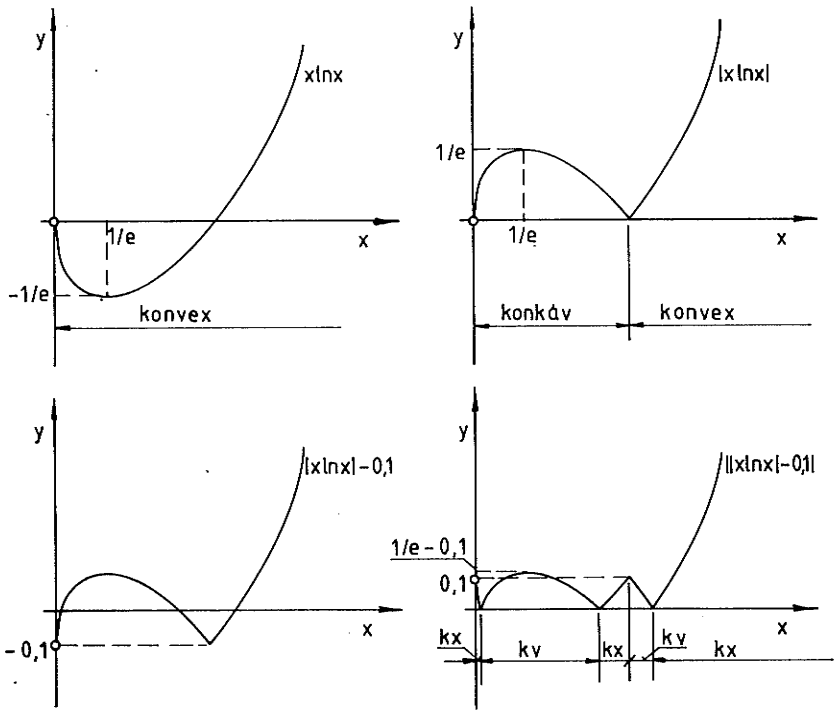
d) $f'(x) \equiv 0; \quad$ ha $\quad x \neq 0.$

$$\operatorname{arc\,ctg} g(x) + \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{g(x)} = \begin{cases} \pi/2 & \text{ha } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



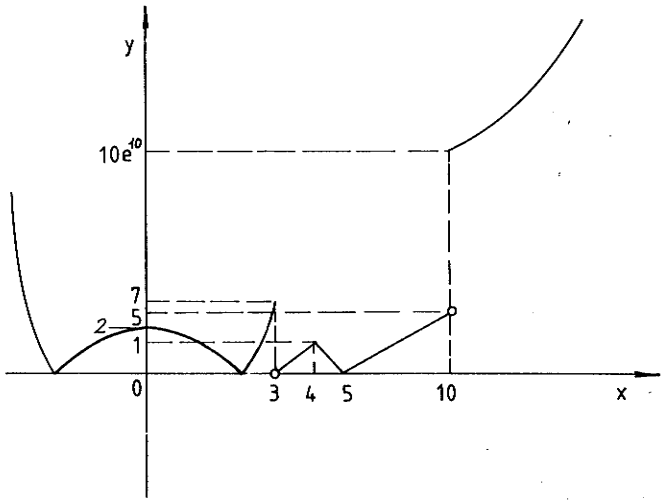
31. ábra

2. Mindenekelőtt az x ℓn x függvényen végzünk függvényvizsgálatot a szokásos eszközökkel (deriválások, határértékszámítás). Ezután az abszolútérték függvény ismeretében a keresett függvény minden tulajdonsága egyszerűen meghatározható. A grafikont célszerűen lépésenként rajzoljuk fel.



32. ábra

3. A módszer lényegében megegyezik a 2. feladat módszerével. A fontos, hogy a deriválásos módszereket ne "ész nélkül" alkalmazzuk, ahol szükséges megfelelő transzformációkat használjunk. A függvény grafikonja:



33. ábra

4. Legegyszerűbben az alábbi azonosság felhasználásával járhatunk el:

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{P_3^{(k)}(x_o)}{k!} (x - x_o)^k,$$

ahol

$$P_3(x) = (x-2)^3 - (x-2),$$

$$P_3'(x) = 3(x-2)^2 - 1,$$

$$P_3''(x) = 6(x-2),$$

$$P_3'''(x) = 6.$$

Ezzel:

a) $P_3(x) = -24 + 26(x+1) - 9(x+1)^2 + (x+1)^3$

b) $P_3(x) = 2(x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

x) $P_3(x) = -6 + 11x - 6x^2 + x^3.$

5.

$$P_n(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(o)}{k!} x^k,$$

ahol

$$P_n^{(k)}(o) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k},$$

így

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k!$$

6. $2^7 - 2^4 - 112 = 128 - 16 - 112 = 0.$

$P_7(x) = x^7 - x^4 - 112$	$P_7(2) = 0$	$0! = 1$
$P_7'(x) = 7x^6 - 4x^3$	$P_7'(2) = 416$	$1! = 1$
$P_7''(x) = 42x^5 - 12x^2$	$P_7''(2) = 1296$	$2! = 2$
$P_7'''(x) = 210x^4 - 24x$	$P_7'''(2) = 3312$	$3! = 6$
$P_7^{IV}(x) = 840x^3 - 24$	$P_7^{IV}(2) = 6696$	$4! = 24$
$P_7^{V}(x) = 2520x^2$	$P_7^{V}(2) = 10080$	$5! = 120$
$P_7^{VI}(x) = 5040x$	$P_7^{VI}(2) = 10080$	$6! = 720$
$P_7^{VII}(x) = 5040$	$P_7^{VII}(2) = 5040$	$7! = 5040$

$$x^7 - x^4 - 112 = (x-2) \sum_{k=1}^{7} \frac{P_7^{(k)}(2)}{k!} (x-2)^{k-1} =$$

$$= (x-2)\left[416+648(x-2)+552(x-2)^2+279(x-2)^3+84(x-2)^4+14(x-2)^5+ (x-2)^6\right]$$

7. a) $y' < y$

$y' - y < 0$

$$(y' - y)e^{-x} = \frac{x}{dx}(y e^{-x}) < 0; \quad (e^{-x} > 0!)$$

$$\int_0^x \frac{d}{dx} y e^{-x} dx < \int_0^x 0 \, dx ; \quad x > 0$$

$$y(x)e^{-x} - y(o) < 0$$

$$\boxed{y(x) > y(o)e^{x}}$$

b) $y' > 2y$

$$y' - 2y > 0$$

$$(y' - 2y)e^{-2x} = \frac{d}{dx}(y\ e^{-2x}) > 0 \qquad (e^{-2x} > 0!)$$

$$\int_0^x \frac{d}{dx}\ y\ e^{-2x}\ dx > 0; \qquad x > 0$$

$$y(x)e^{-2x} - y(o) > 0$$

$$\boxed{y(x) > y(o)e^{2x}}$$

c) $y' < y + 1$

$$y' - y < 1$$

$$(y' - y)e^{-x} = \frac{d}{dx}(y\ e^{-x}) < e^{-x} \qquad (e^{-x} > 0!)$$

$$\int_0^x \frac{d}{dx}(y\ e^{-x})\,dx < \int_0^x e^{-x}\ dx; \qquad x > 0$$

$$y(x)e^{-x} - y(o) < 1 - e^{-x}$$

$$\boxed{y(x) < (y(o) + 1)e^{x} - 1}$$

d) $y' < xy$

$$y' - xy < 0$$

$$(y' - xy)\ e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{d}{dx}(ye^{-\frac{x^2}{2}}) < 0 \qquad (e^{-\frac{x^2}{2}} > 0!)$$

$$\int_0^x \frac{d}{dx}(ye^{-\frac{x^2}{2}})\ dx < 0\ ; \qquad x > 0$$

$$y(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - y(o) < 0$$

$$\boxed{y(x) < y(o)\ e^{\frac{x^2}{2}}\ .}$$

8. $\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$,

$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$.

Ezekből:

$\dot{r} = \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi$,

$r\dot{\varphi} = \dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi$.

A jobb oldalakba helyettesítsük be a feladatban x-re és y-ra megadott kifejezéseket, majd ezután x és y polár koordinátás alakját:

$$\dot{r} = (-x+x^2y+y^3)\cos\varphi + (-y-xy^2-x^3)\sin\varphi =$$

$$= (-r\cos\varphi+r^3\sin\varphi)\cos\varphi + (-r\sin\varphi-r^3\cos\varphi)\sin\varphi =$$

$$= -r$$

$$r\dot{\varphi} = (-r\sin\varphi - r^3\cos\varphi)\cos\varphi-(-r\cos\varphi+ r^3\sin\varphi)\sin\varphi =$$

$$= -r^3$$

E differenciálegyenlet megoldásai:

$$r \equiv 0,$$

vagy ha $r\neq 0$, akkor az

$$\dot{r} = -r$$

egyenletből $r(t) = r(o)e^{-t}$. Ezt a

$$\dot{\varphi} = -r^2$$

egyenletbe helyettesítve:

$$\dot{\varphi} = -r^2(o)e^{-2t}$$

amelyből:

$$\varphi(t) = \varphi(o)+\left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}\right)r(o).$$

Most visszatérhetünk az x és y változókra (és az $r(o) = 0$ esettel az $r \equiv 0$ esetet is tárgyalva):

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= r(o)\ e^{-t} \cos\ (\varphi(o) + \frac{1}{2}\ e^{-2t} - \frac{1}{2}\ , \\ y(t) &= r(o)\ e^{-t} \sin\ (\varphi(o) + \frac{1}{2}\ e^{-2t} - \frac{1}{2}\ , \\ & r(o) \geq 0, \quad \varphi(o) \in \mathbb{R}, \\ x(o) &= r(o) \cos\varphi(o), \\ y(o) &= r(o) \sin\varphi(o). \end{aligned}}$$

9. a) $f(x) = x \ln x^2 = 2x \ln x; \quad x > 0$

$f'(x) = 2 \ln x + 2 = 0 \Longrightarrow \boxed{x_o = 1/e}$

$f''(x_o) = 2e > 0 \Longrightarrow$ lok.min. van!

$f(x_o) = -2/e$

K_{x_o}-ban

$$\boxed{f(x) \approx -2/e + e\ (x - 1/e)^2}$$

$f''(x) = 2/x > 0 \Longrightarrow$ inflexiós pont nincs!

b) $f(x) = x\ e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = 0 \Longrightarrow \boxed{x_o = 1}$

$f''(x_o) = (x - 2)\ e^{-x}\Big|_{x=1} = -1/e < 0 \Longrightarrow$ lok.max. van!

$f(x_o) = 1/e$

K_{x_o}-ban

$$\boxed{f(x) \approx 1/e - (1/2e)(x-1)^2}$$

$f''(x) = (x - 2)\ e^{-x} = 0 \Longrightarrow \boxed{x_1 = 2}$

$f'''(x_1) = (3 - x_1)\ e^{-x} = 1/e^2 > 0 \Longrightarrow$ inflexiós pont van!

$f(x_1) = 2/e^2$

$f'(x_1) = -e^{-2}$

K_{x_1}-ben

$$\boxed{f(x) \approx 2/e^2 - e^{-2}(x-2)/(1/6e^2)(x-2)^3}$$

c) $f(x) = 1/x^2 - 1/x$

$f'(x) = -2/x^3 + 1/x^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{x_o = 2}$

$f''(x_o) = 6/x_o^4 - 2/x_o^3 = 6/16 - 4/16 = 1/8 > 0 \Longrightarrow$ lok, max. van!

$f(x_o) = -1/4$

K_{x_o}-ban

$$\boxed{f(x) \approx -1/4 + 1/16(x-2)^2}$$

$f''(x) = 6/x^4 - 2/x^3 = 0 \Longrightarrow \boxed{x_1 = 3}$

$f'''(x) = -24/x_1^5 + 6/x_1^4 = 2/81 > 0 \Longrightarrow$ inflexiós pont van!

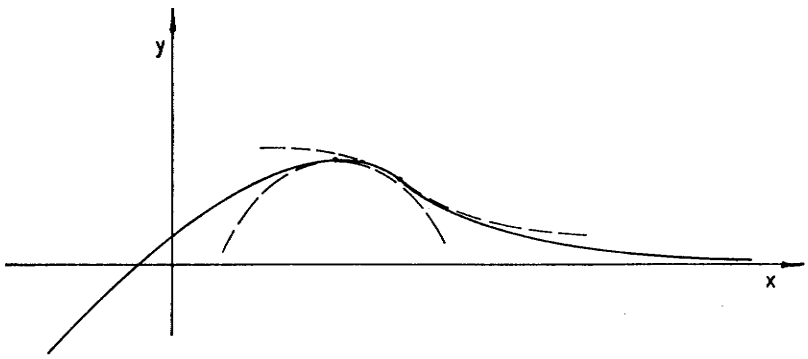
$f(x_1) = -2/9$

$f'(x_1) = 1/27$

K_{x_1}-ben

$$\boxed{f(x) \approx -2/9 + (1/27)(x-3) + (2/81)(x-3)^3}$$

Ábrát példaképpan a b) feladathoz közlünk.



34. ábra

10. a) Ha $x \neq 0$, akkor $f'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x})' =$

$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$

Ha $x=0$, akkor a definíciót kell alapul vennünk:

$$f'(o) = \lim_{x \to o} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - f(o)}{x - 0} = \lim_{x \to o} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Tekintettel arra, hogy a $\lim\limits_{x \to o} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$ határérték nem létezik ($f'(x)$-nek lényeges szakadása van az $x = 0$ helyen), így a magasabbrendű derivált függvények csak az $x \neq 0$ helyeken léteznek:

$$f^{(k)}(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x})^{(k)}; \quad |x| > 0; \quad k = 1,2,\ldots$$

b) $$f'(o) = \lim_{x \to o} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to o} \sin \frac{1}{x} \text{ nem létezik.}$$

Így

$$f^{(k)}(x) = (x \sin \frac{1}{x})^{(k)}; \quad x \neq 0; \quad k = 1,2,\ldots$$

c) $f(x) = |x|^3$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{ha } x \geq 0 \\ -3x^2 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$f''(x) = 6|x|$

$$f'''(x) = \begin{cases} 6 & \text{, ha } x>0 \\ \text{nem létezik} & \text{, ha } x=0 \\ -6 & \text{, ha } x<0 \end{cases}$$

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 \text{ ha } x \neq 0 \\ \\ \text{nem létezik; ha } x = 0 \end{cases} \quad ; \; k=4,5,\ldots$$

d) A függvény a (-1; 1) intervallumon van értelmezve, így derivált függvényekről is csak itt beszélhetünk. Ekkor:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) - \frac{1}{2} \ln (1 - x^2),$$

$f \in C^{\infty}_{(-1;1)}$

$$f'(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^4} \text{ ; stb.}$$

e) $f(x) = \sin \arcsin x \equiv x$; $x \in [-1; 1]$

$f'(x) = 1$; $x \in [-1; 1]$

$f^{(k)}(x) = 0$; $x \in [-1; 1]$ $k=2,3,\ldots$

f) $f(x) = |x|^4 = x^4$; $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3$, stb.

g) $$f'(o) = \lim_{x \to o} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to o} \frac{\sin x - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to o} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \to o} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \text{ ; } x \neq 0$$

$$\lim_{x \to o} f'(x) = \lim_{x \to o} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to o} \frac{\cos x - s \cdot xin\ s - \cos x}{2x} = 0$$

$$f''(x) = \frac{-x^3 \sin x - 2x^2 \cos x + 2x \sin x}{x^4}; \ x \neq 0$$

$$f''(o) = \lim_{x\to o} \frac{f'(x) - f'(o)}{x - 0} = \lim_{x\to o} \frac{\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x\to o} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to o} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to o} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3},$$

stb.

Ezen a módon folytatva meglehetősen komplikált, de más módon egyszerű kimutatni, hogy

$$f \in C^{\infty}_{\mathbb{R}}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{\sin x}{x}^{(k)}; \qquad x \neq 0$$

$$f^{(k)}(o) = \lim_{x\to o} \frac{\sin x}{x}^{(k)} .$$

11. a) Tekintettel arra, hogy $f(x) = (1-x^2)^{3/2}$; $f \in C^1_{\mathbb{R}}$, így

$$D^+ f(x)\Big|_{x=1} = D^- f(x)\Big|_{x=1} = f'(1) =$$

$$= (3/2)\ (1 - x^2)^{1/2}\ (-2x)\Big|_{x=1} = 0.$$

b) Tekintettel arra, hogy a függvény csak a $[-1; 1]$ intervallumon van értelmezve, így jobb oldali derivált nem értelmezhető, a baloldali derivált meg maga a derivált, amennyiben ez létezik:

$$(\arcsin x)' = \frac{x}{1-x^2} .$$

Nem létezik! (Érintő y tengellyel párhuzamos!)

c) $D^-|x|\Big|_{x=0} = -1;$ $\qquad D^+|x|\Big|_{x=0} = 1$

d) $D^- x^2\Big|_{x=0} = D^+ x^2\Big|_{x=0} = (x^2)'\Big|_{x=0} = 0$

e) Egyik sem létezik. Pl.:

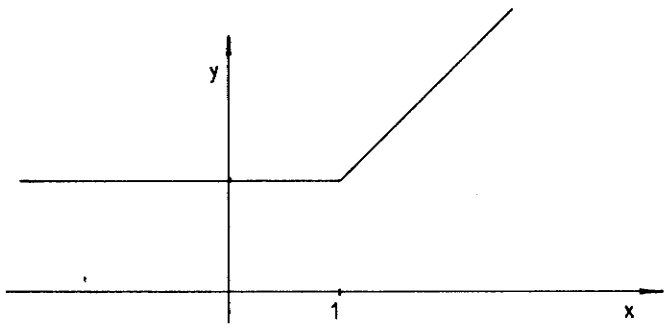
$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\operatorname{sg} x - \operatorname{sg} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = \infty \ !$$

A függvény egyébként egyik oldalról sem folytonos.

f) $D^-[x]\Big|_{x=0}$ nem létezik; $D^+[x]\Big|_{x=0} = 0$

A függvény egyébként balról nem folytonos.

g) $f(x) = x + \sqrt{1-2x+x^2} = x + \sqrt{(1-x)^2} = x + |1-x|$, az $f(x)$ függvény grafikonja az ábrán látható.



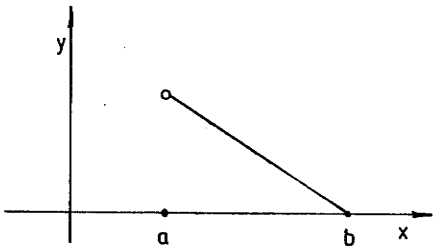
35. ábra

Ennek alapján

$D^-f(x)\Big|_{x=1} = 0;$ $\qquad D^+f(x)\Big|_{x=1} = 2$

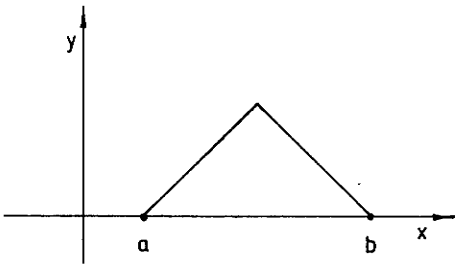
h) $D^-f(x)\Big|_{x=0} = 0$ $\qquad D^+f(x)\Big|_{x=0} = 0$

12. A folytonosság lényeges:



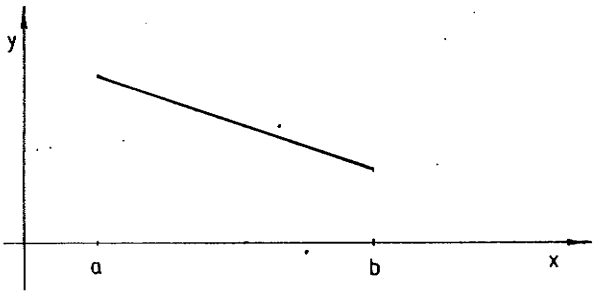
36. ábra

A deriválhatóság lényeges:



37. ábra

Az f(a) = f(b) feltétel lényeges:



38. ábra

13. $x \neq -1$; $y(o) = 0$,

$$y'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{2x}{c} = \frac{x}{1+x} - \frac{2c}{c} = \frac{cx - 2x - 2x^2}{(1+x)\,c},$$

$y'(o) = 0$,

$y'\left(\frac{c}{2} - 1\right) = 0$

$$y''(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{c},$$

$y''\left(\sqrt{\frac{c}{2}} - 1\right) = 0$,

$y''\left(-\sqrt{\frac{c}{2}} - 1\right) = 0$,

$$y''' = \frac{-2}{(1+x)^3}$$

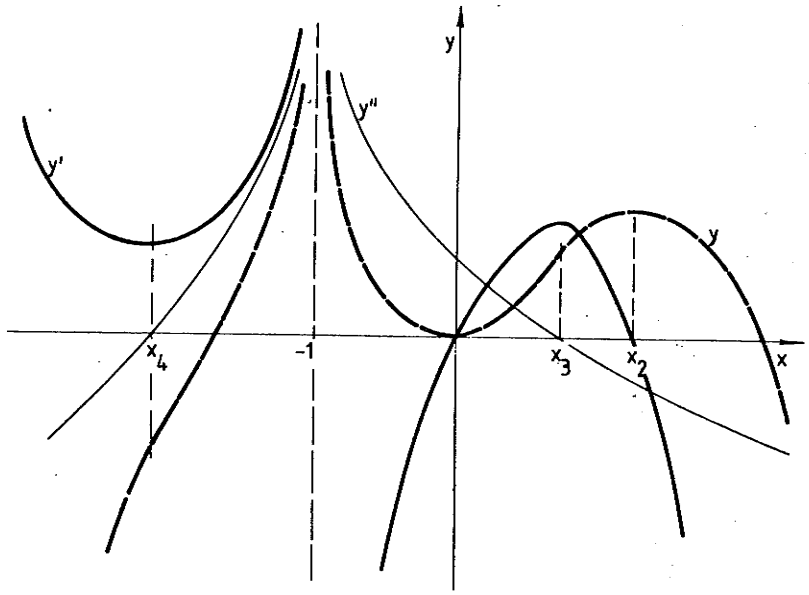
<u>1. eset</u> $\frac{c}{2} > 1$. Ekkor a függvény grafikonja az ábrán látható, ahol

$x_1 = 0$; $x_2 = c/2-1$; $x_3 = \sqrt{c/2}-1$; $x_4 = -\sqrt{c/2}-1$.

Továbbá figyelembe vettük, hogy

$y(-\sqrt{c/2}-1) = -\sqrt{c/2}-1-\ln\sqrt{c/2}-(1+\sqrt{c/2})^2/c < 0$,

$y(c/2 - 1) > 0$.



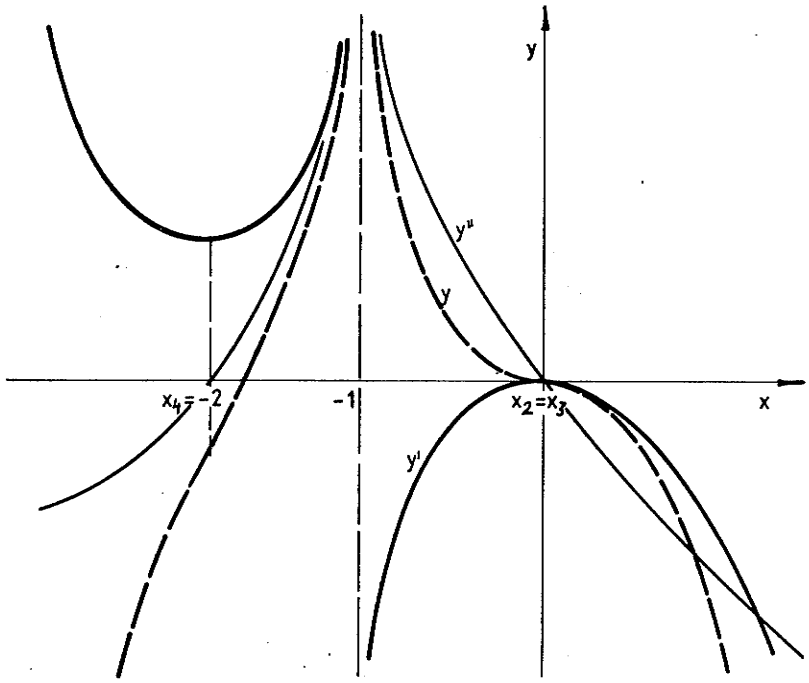
39. ábra

<u>2. eset</u> $\frac{c}{2} = 1$;

$y = x - \ln|1+x| - \frac{x^2}{2}$, $\quad y(-2) = -4$,

$y' = \frac{-x^2}{1+x}$, $y'' = \frac{1}{(1+x)^2} - 2$, $y''(o) = 0$, $y''(-2) = 0$,

$y''' = \frac{-2}{(1+x)^3}$



40. ábra

<u>3. eset</u> $0<\frac{c}{2}<1$

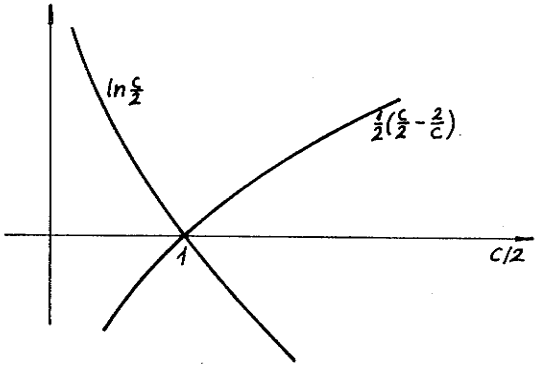
Az 1. eset eredményeit felhasználjuk, továbbá:

$$y(x_2) = \frac{c}{2} - 1 - \ln\frac{c}{2} - \frac{(\frac{c}{2}-1)^2}{c} =$$

$$= \frac{c}{2} - 1 - \frac{c}{4} + 1 - \frac{1}{c} - \ln\frac{c}{2} =$$

$$= \frac{c}{4} - \frac{1}{c} - \ln\frac{c}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2} - \frac{2}{c}\right) - \ln\frac{c}{2}$$

Ha c/2 függvényében ábrázoljuk az $\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2} - \frac{2}{c}\right)$ és $\ln\frac{c}{2}$ függvényeket (ld. az alábbi ábrát!) és figyelembe vesszük, hogy $\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2} - \frac{2}{c}\right)' < -\left(\ln\frac{c}{2}\right)'$; $c\neq 2$ akkor világos, hogy most $y(x_2) < 0$.



41. ábra

Vizsgáljuk végül meg $y(x_4)$ előjelét!

$$y(x_4) = -\sqrt{\frac{c}{2}} - 1 - \ln\sqrt{\frac{c}{2}} - \frac{(1+\sqrt{\frac{c}{2}})^2}{c} = -\sqrt{\frac{c}{2}} - 1 - \frac{1}{c} -$$

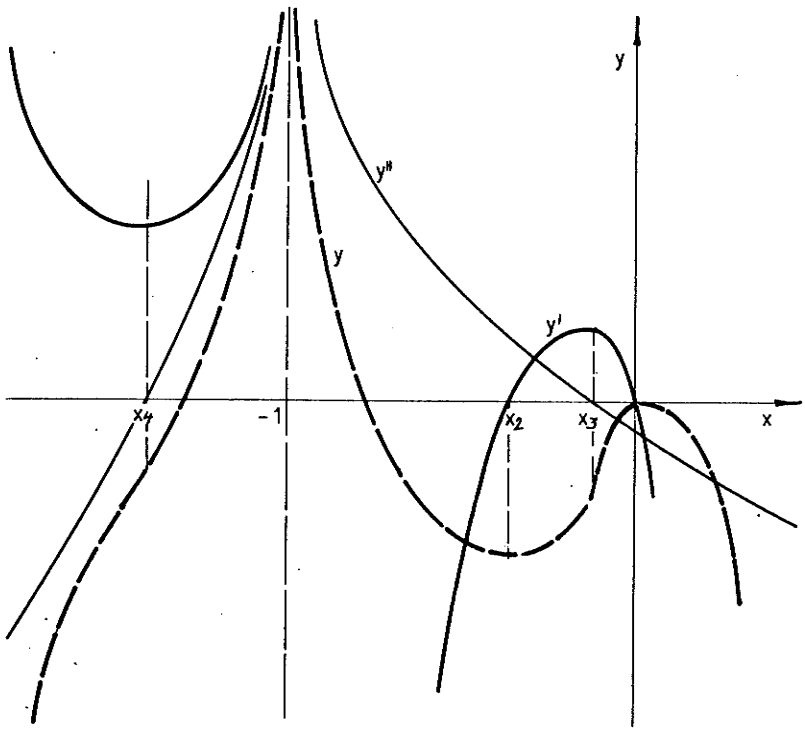
$$-\sqrt{\frac{2}{c}} - \frac{1}{2} - \ln\sqrt{\frac{c}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{c}{2}} - \sqrt{\frac{2}{c}}\right) - \ln\sqrt{\frac{c}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{c}} -$$

$$-\frac{3}{2} - \frac{1}{c}.$$

Előbb láttuk, hogy

$$\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) - \ln\alpha < 0, \quad \text{ha} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Ezzel $y(x_4) < 0$.



42. ábra

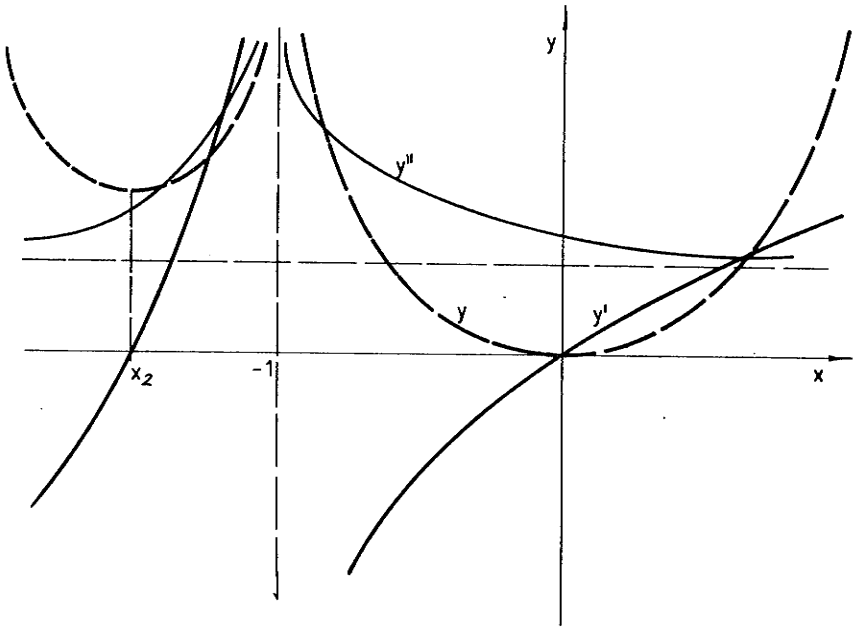
<u>4. eset</u> $\frac{c}{2} < 0$

Ekkor $y''(x) > 0$!

$$y(x_2) = \frac{c}{2} - 1 - \ln\frac{|c|}{2} - \frac{(\frac{c}{2} - 1)^2}{c} = -\frac{|c|}{2} - 1 - \ln\frac{|c|}{2} -$$

$$-\frac{|c|}{4} + 1 + \frac{1}{|c|} = -\frac{3}{4}|c| + \frac{1}{|c|} - \ln\frac{|c|}{2},$$

amelyből ha $c = -2$, akkor $y(x_2) < 0$, ha $c = -2e^{-5}$ akkor $y(x_2) > 0$. A grafikont az $y(x_2) > 0$ esetre ábrázoltuk.



43. ábra

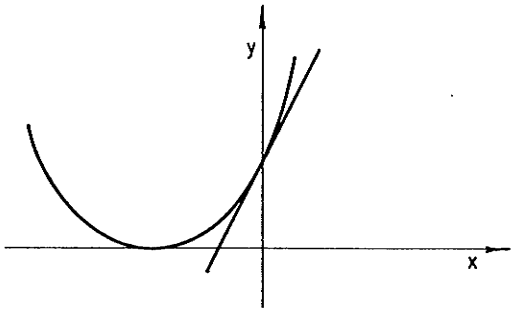
14. Igen, pl.: $x \longmapsto |x|^{3/2}$.

15. Linearizáljuk az $(1+x)^n$ függvényt az $x=0$ helyen!

$$\frac{d}{dx}(1+x)^n\Big|_{x=o} = n\,(1+x)^{n-1}\Big|_{x=o} = n; \qquad n\neq 0.$$

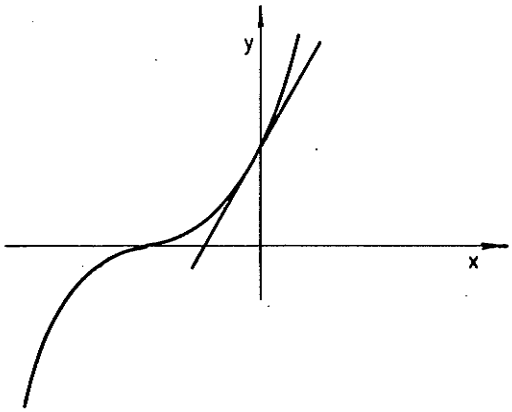
Ezzel: $(1+x)^n \approx 1+nx$ lineáris közelítés, amely annál jobb, $\boxed{\text{minél kisebb } |x|}$. A Bernoulli-egyenlőtlenség: $(1+x)^n > 1+nx$, ahol $x\neq 0$; $x>-1$; $n\geq 2$.

A grafkion páros n esetében:



44. ábra

míg ha páratlan (de $n > 1$):



45. ábra

16. $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$

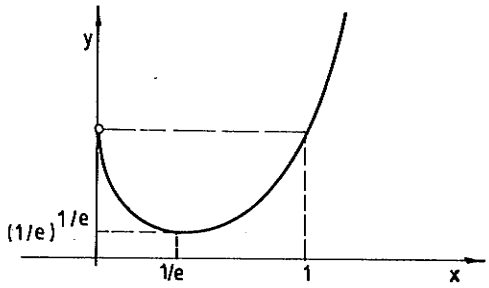
$f'(x) = (\ln x + 1)\, e^{x\ln x} = (\ln x + 1)\, x^x$

$f''(x) = \frac{1}{x}\, x^x + (\ln x + 1)^2\, x^x$

Értelmezési tartomány: $x > 0$.

Ezzel $f''(x) > 0$, a függvény konvex. Zérushelye nincs: $f(x) > 0$. Szélsőértékhely $x = 1/e$ (minimum). Végül

$$\lim_{x \to 0} x^x = 1; \quad \lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to \infty} x^x = \infty .$$

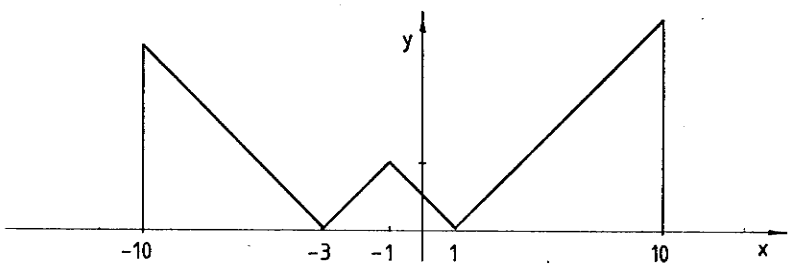


46. ábra

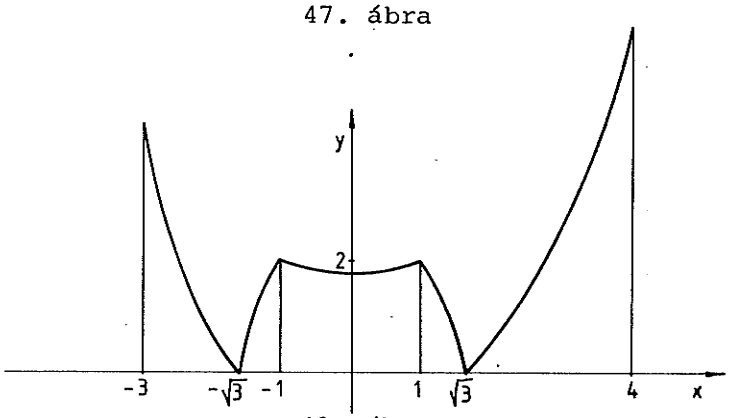
II.4

1. Az a) és b) feladatnál célszerű a grafikont lerajzolni és elemi területszámítást alkalmazni.

a) $\frac{7^2}{2} + 2\,\frac{2^2}{2} + \frac{9^2}{2} = 24{,}5 + 4 + 40{,}5 = \boxed{69}$



47. ábra

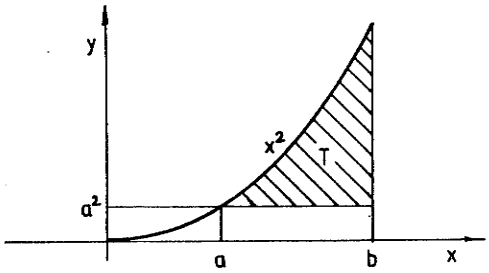


48. ábra

b) Vegyük figyelembe, hogy az alanti ábrán látható T terület:

$$T = \frac{b^3 - a^3}{3} - (b-a)\,a^2 = \frac{b^3}{3} - ba^2 + \frac{2}{3}a^3$$

Ezzel a keresett terület: $\boxed{20{,}52}$



49. ábra

c) Könnyen durva hibát követhetünk el, ha a Newton-Leibniz formulát az idevonatkozó tétel feltételei teljesülésének ellenőrzése nélkül alkalmazzuk. Ugyanis:

$$\left(\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}}{1+\dfrac{1}{(1+x)^2}},$$

Ugyanakkor:

$$\int_{-2}^{\sqrt{3}-1} \frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}}{1+\dfrac{1}{(1+x)^2}}\,dx \neq \operatorname{arcctg}\frac{1}{1+x}\Bigg|_{-2}^{\sqrt{3}-1} = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} -$$

$$- \operatorname{arcctg}(-1) = \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{12}\pi!$$

A hiba onnan ered, hogy az arc ctg $\frac{1}{1+x}$ függvénynek az $x = -1$ helyen szakadása van (ld. az ábrát), ezért a Newton-Leibniz formula a $\left[-2; \sqrt{3}-1\right]$ intervallummon nem alkalmazható. Helyesen:

$$\int_{-2}^{\sqrt{3}-1} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{1+\frac{1}{(1+x)^2}}dx = \int_{-2}^{-1} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{1+\frac{1}{(1+x)^2}}dx + \int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{1+\frac{1}{(1+x)^2}}dx =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg}(-1) + \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x =$$

$$= \pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - 0 = \boxed{\frac{7}{12}\pi}.$$

(Ugyanis: $\lim\limits_{x\to-1-0} \operatorname{arcctg}\frac{1}{1+x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x$;

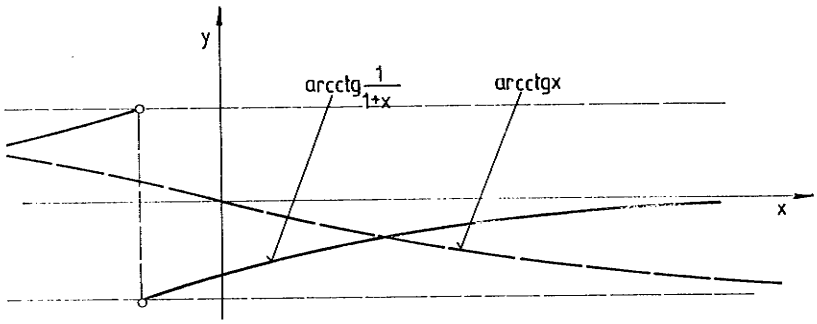
$\lim\limits_{x\to-1+0} \operatorname{arcctg}\frac{1}{1+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arc\,ctg} x$.)

Más módszerrel:

$$\int_{-2}^{\sqrt{3}-1} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{1+\frac{1}{(1+x)^2}}dx = \int_{-2}^{\sqrt{3}-1} \frac{1}{1+(1+x)^2}dx = \operatorname{arcctg}(1+x)\Big|_{-2}^{\sqrt{3}-1} =$$

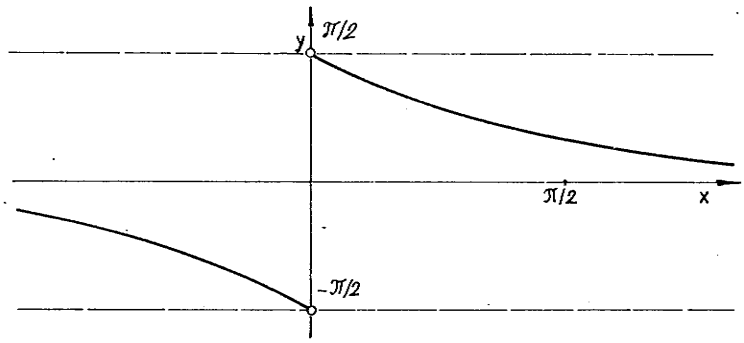
$$= \operatorname{arcctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{12}\pi.$$

Ugyanis az $\operatorname{arctg}(1+x)$ függvény az $\frac{1}{1+(1+x)^2}$ függvénynek az egész számegyenesen primitív függvénye, továbbá az $\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{1+\frac{1}{(1+x)^2}}$ függvény az $x = -1$ helyen lévő megszüntethető szakadásától eltekintve (ami nem befolyásolja az integrál értékét!) azonos az $\frac{1}{1+(1+x)^2}$ függvénnyel.



50. ábra

d) Az arctg $\frac{1}{x}$ függvény grafikonja az ábrán látható.



51. ábra

Vegyük figyelembe az alábbiakat:

$$(\text{arc tg } x + \text{arctg } \frac{1}{x})' \equiv 0; \quad x \neq 0$$

$$\text{arc tg } 1 + \text{arc tg } \frac{1}{1} = \pi/2,$$

$$\text{arc tg}(-1) + \text{arc rg } \frac{1}{-1} = -\pi/2,$$

$$\text{arc tg } \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 - \text{arc tg } x & , \text{ ha } x > 0 \\ -\pi/2 - \text{arc tg } x & ; \text{ ha } x < 0. \end{cases}$$

Ezzel:

$$\int_{-1}^{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\, dx = \int_{-1}^{0} \left(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) dx + \int_{0}^{2} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \pi - \int_{-1}^{2} \operatorname{arc\,tg} x\, dx = \frac{\pi}{2} - \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2)\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(2\operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2} \ln 5\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2\right) \approx \boxed{0,6.}$$

e) $$\int_{0}^{35} |\sin x|\, dx \cong 11 \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx + \int_{0}^{0,4425} \sin x\, dx =$$

$$= 22 + 1 - \cos 0,4425 \approx \boxed{22,096}$$

2. a) $\int e^{-x} \sin 2x\, dx = \boxed{Ae^{-x} \sin 2x + Be^{-x} \cos 2x + c\,,}$

amelyből:

$$(Ae^{-x} \sin 2x + Be^{-x} \cos 2x)' = -Ae^{-x} \sin 2x + 2Ae^{-x} \cos 2x -$$

$$- Be^{-x} \cos 2x - 2Be^{-x} \sin 2x = e^{-x} \sin 2x$$

$$-A - 2B = 1$$

$$2A - B = 0$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{5}}; \qquad \boxed{B = -\frac{2}{5}}$$

Érdemes a problémát általánosan is megoldani:

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx = Ae^{\alpha x} \sin \beta x + Be^{\alpha x} \cos \beta x + c$$

$$(A\alpha - B\beta) e^{x} \sin \beta x + (A\beta + B\alpha) \cos \beta x = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$\left.\begin{aligned} A\alpha - B\beta &= 1 \\ A\beta + B\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} A\alpha^2 - B\alpha\beta &= \alpha \\ A\beta^2 + B\alpha\beta &= 0 \end{aligned}$$

$A = \alpha / (\alpha^2 + \beta^2)$

$B = -\beta / (\alpha^2 + \beta^2)$

$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = Ae^{\alpha x} \sin \beta x + Be^{\alpha x} \cos \beta x + c$

$(A\alpha - B\beta) e^{\alpha x} \sin \beta x + (A\beta + B\alpha) \cos \beta x = e^{\alpha x} \cos \beta x$

$A\alpha - B\beta = 0 \qquad A\alpha^2 - B\alpha\beta = 0$

$A\beta + B\alpha = 1 \qquad A\beta^2 + B\alpha\beta = \beta$

$A = \beta / (\alpha^2 + \beta^2)$

$B = \alpha / (\alpha^2 + \beta^2)$

Ezzel:

$$\int e^{\alpha x} \sin\beta x \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} e^{\alpha x} \cos\beta x + c$$

$$\int e^{\alpha x} \cos\beta x \, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} e^{\alpha x} \sin\beta x + \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} e^{\alpha x} \cos\beta x + c$$

b) Az utóbbi összefüggések alkalmazásával:

$$\int (e^{2x} \sin x + e^x \cos x) dx = \frac{2}{5} e^{2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{2x} \cos x +$$

$$+ \frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + c$$

c) A fentiek alapján a második tag integrálja:

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + c.$$

Az első tag:

$$\int x^x \sin x \, dx = (Ax + B) e^x \sin x + (Cx + D) e^x \cos x + k$$

Mindkét oldalt deriválva:

$$Ae^x \sin x + (Ax + B) e^x \sin x + (Ax + B) e^x \cos x + Ce^x \cos x +$$

$$+ (Cx + D) e^x \cos x - (Cx + D) e^x \sin x = xe^x \sin x$$

Az együtthatók összehasonlításával:

$$\left.\begin{array}{l} A - C = 1 \\ A + C = 0 \\ A + B - D = 0 \\ B + C + D = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} A = 0{,}5 \\ B = 0 \\ C = -0{,}5 \\ D = 0{,}5 \end{array}$$

Tehát

$$\int xe^x \sin x = \boxed{\frac{1}{2} xe^x \sin x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) e^x \cos x + k}$$

d) $\int x^3 e^{-x} \sin x \, dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-x}\sin x +$

$+ (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)e^{-x}\cos x + k.$

Mindkét oldalt deriválva:

$(3Ax^2 + 2Bx + C)e^{-x}\sin x - (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-x}\sin x +$

$+ (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-x}\cos x + (3Ex^2 + 2Fx + G)e^{-x}\cos x -$

$- (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)e^{-x}\cos x - (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)e^{-x}\sin x =$

$= x^3 e^{-x}\sin x$

Az együtthatók összehasonlításából:

$$\left.\begin{array}{l} -A - E = 1 \\ A - E = 0 \\ 3A - B - F = 0 \\ B + 3E - F = 0 \\ 2B - C - G = 0 \\ C + 2F - G = 0 \\ C + D + H = 0 \\ D + G - H = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} E = -0{,}5 \\ A = -0{,}5 \\ F = 0 \\ B = 1{,}5 \\ G = 1{,}5 \\ C = 1{,}5 \\ D = -1{,}5 \\ H = 0 \end{array}$$

Ezzel:

$$\int x^3 e^{-x}\sin x \, dx = \boxed{\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)e^{-x}\sin x + \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x\right)e^{-x}\cos x + k}$$

e) $\int xe^x\cos\alpha x\,dx = (Ax+B)e^x\sin\alpha x + (Cx+D)e^x\cos\alpha x + k$

Minkét oldalt deriválva:

$Ae^x\sin\alpha x + (A+B)e^x\sin\alpha x + \alpha(Ax+B)e^x\cos\alpha x +$

$+ Ce^x\cos\alpha x + (Cx+D)e^x\cos\alpha x - \alpha(Cx+D)e^x\sin\alpha x =$

$= x^{ex}\cos\alpha x$

Az együtthatók összehasonlításával:

$$\left.\begin{array}{l} A - \alpha C = 0 \\ \alpha A + C = 1 \\ A + B - \alpha D = 0 \\ \alpha B + C + D = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} A = \alpha/(1+\alpha^2) \\ C = 1/(1+\alpha^2) \\ B = -2\alpha/(1+\alpha^2)^2 \\ D = (\alpha^2-1)/(1+\alpha^2)^2 \end{array}$$

Ezt felhasználva:

$$\int xe^x(\cos x + \text{xos } 2x)\,dx = \boxed{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)e^x\sin x + \frac{1}{2}xe^x\cos x + \left(\frac{2}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^x\sin 2x + \left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{25}\right)e^x\cos 2x + k}$$

3. $$\int_0^{2\pi} e^{2x}\, e^{-x}\cos nx\, e^{-x}\sin mx\,dx = \int_0^{2\pi}\cos nx\sin mx\,dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{2x}\, e^{-x}\cos nx\, e^{-x}\cos mx\,dx = \int_0^{2\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \begin{cases} 0 \text{ ha } n\neq m \\ \pi \text{ ha } n=m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{2x}\, e^{-x}\sin nx\, e^{-x}\sin mx\,dx = \int_0^{2\pi}\sin nx\sin mx\,dx = \begin{cases} 0 \text{ ha } n\neq m \\ \pi \text{ ha } n=m\neq 0 \end{cases}$$

A jobb oldali integrálok egyszerűen kiszámíthatók a következő azonosságok felhasználásával:

$$2 \cos nx \sin mx = \sin(n+m)x + \sin(m-n)x,$$

$$2 \cos nx \cos mx = \cos(n+m)x + \cos(m-n)x,$$

$$2 \sin nx \sin mx = \cos(m-n)x - \cos(m+n)x.$$

4. $\boxed{p_1 = x + A_1}$

$$\int_0^1 1(x + A_1)\, dx = \frac{x^2}{2} + A_1 x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + A_1 = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = -\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{p_2 = x^2 + A_2 x + B_2}$$

$$\int_0^1 1(x^2 + A_2 x + B_2)\, dx = \frac{x^3}{3} + A_2 \frac{x^2}{2} + B_2 x \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{A_2}{2} + B_2 = 0$$

$$\int_0^1 (x - \tfrac{1}{2})(x^2 + A_2 x + B_2)\, dx =$$

$$= \int_0^1 (x^3 + (A_2 - \tfrac{1}{2})\, x^2 + (B_2 - \frac{A_2}{2})\, x - \frac{B_2}{2})\, dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} + (A_2 - \tfrac{1}{2})\frac{x^3}{3} + (B_2 - \frac{A_2}{2})\frac{x^2}{2} - \frac{B_2}{2} x \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4} + (A_2 - \tfrac{1}{2})\frac{1}{3} + (B_2 - \frac{A_2}{2})\frac{1}{2} - \frac{B_2}{2} = 0$$

A két egyenletből:

$$A_2 + 2B_2 = -2/3$$

$$3 + 4A_2 - 2 + 6B_2 - 3A_2 - 6B_2 = A_2 + 1 = 0$$

Ezekből $\boxed{A_2 = -1; \quad B_2 = 1/6}$

Az eljárás hasonlóképpen folytatható.

5. igaz: b), d) és f)
hamis: a), c) és e)

III. 1.

1. Az alábbi összefüggést alkalmazzuk:

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}; \quad a,q \in \mathbb{C} \; ; \; |q| < 1.$$

a) $a = \left(\frac{i}{3}\right)^3 \; ; \qquad q = \frac{i}{3}$

$$s = \frac{1-3i}{90}$$

b) $a = \left(\frac{i}{3}\right)^n \; ; \qquad q = \frac{i}{3}$

$$s = \frac{i^n(3+i)}{10 \cdot 3^{n-1}}$$

$$i^n = \begin{cases} 1, \text{ ha } n = 4k \\ i, \text{ ha } n = 4k+1 \\ -1, \text{ ha } n = 4k+2 \\ -i, \text{ ha } n = 4k+3 \; , \quad k=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

2. $(x^3 - ix)e^{(1+i)x} = e^x(x^3\cos x + x\sin x) +$
$+ ie^x(x^3\sin x - x\cos x)$

3. $xe^x\cos x + e^x\sin x = \mathrm{Re}(x - i)\, e^{(1+i)x}$

4. $\int (xe^x\cos x + e^x\sin x)\,dx = \mathrm{Re}\int (x - i)\, e^{(1+i)x}\, dx =$
$= \mathrm{Re}(Ax + B)\, e^{(1+i)x} + k$

Mindkét oldalt deriválva x szerint:

$$\mathrm{Re}\left[Ae^{(1+i)x} + (Ax + B)(1 + i)e^{(1+i)x}\right] = \mathrm{Re}(x - i)\, e^{(1+i)x}$$

Az együtthatók összehasonlításával:

$$\left.\begin{array}{l} A(1 + i) = 1 \\ A + B(1+i) = -i \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} A = 1/(1 + i) = (1 - i)/2 \\ B = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{2}x - \frac{1}{2}\right)e^{(1+i)x} =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - i\,\frac{x}{2}\right)e^{x}\,(\cos x + i\sin x) =$$

$$= e^{x}\,\frac{x-1}{2}\cos x + e^{x}\,\frac{x}{2}\sin x.$$

Tehát:

$$\int (x\,e^{x}\cos x + e^{x}\sin x)\,dx = \boxed{e^{x}\,\frac{x-1}{2}\cos x + e^{x}\,\frac{x}{2}\sin x + k.}$$

5. $$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4ix} - \binom{4}{3}e^{2ix} + \binom{4}{2} - \binom{4}{1}e^{-2ix} + e^{-4ix}}{2} =$$

$$= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - 4\,\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 3 = \boxed{3 - 4\cos 2x + \cos 4x.}$$

III. 2.

1. Sok zérust tartalmazó mátrixnál általában nem célszerű a

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\,A}{\det A}$$

képlet alkalmazása. Sokkal egyszerűbb lehet, ha A^{-1} -t oszloponként határozzuk meg a következő összefüggést felhasználásával:

$$A\,a_k = e_k,$$

ahol a_k A^{-1} k-adik oszlopa, e_k pedig az e_{1k}, e_{2k}, ..., e_{nk} elemekből álló vektor:

$$e_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{ha } j \neq k \\ 1 & \text{ha } j = k \end{cases}$$

Az $Aa_k = e_k$ algebrai egyenletrendszer pl. az a) feladatban éppen olyan alakú, mint amilyen alakot a Gauss-féle eliminációs eljárás végén nyerünk.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ -1,5 & 3 & 1,5 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) Az inverz is diagonális. Az elemek az eredeti elemek reciprokai:

$1;\ 1;\ 1;\ -1;\ \frac{1}{2};\ -1;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ 1$

e) Csak akkor létezik inverz, ha $\lambda \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 8/\lambda & 12/\lambda & 14/\lambda & 15/\lambda & 7/\lambda & 3/\lambda & 1/\lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

f) Az inverzet ilyen alakban írjuk fel:

$$\begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix},$$

ahol D, E, F és G rendre a feladatban szereplő A, B, 0, és C mátrixokkal egyező rendűek, D és G természetesen kvadratikus.
Ekkor

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD + BF & AE + BG \\ CF & CG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

ahol I megfelelő rendű egységmátrixok.

$$AD + BF = I,$$
$$AE + BG = 0,$$
$$CF = 0,$$
$$CG = I.$$

Ezekből az egyenletekből (az utolsó egyenlettel kezdve a megoldást):

$$G = C^{-1}; \qquad F = 0;$$
$$E = -A^{-1}BC^{-1};$$
$$D = A^{-1},$$

Tehát:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}}$$

g) Az f)-ben leírt módszerrel:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ T & I_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ -T & I_2 \end{bmatrix}$$

2. Az a) feladatnál már célszerű a b) feladat megoldásának eredményét is alkalmazni. A többi feladat (és egyben akár a) is) megoldható a szokásos eljárással, vagyis:
- először megoldjuk a

$$\det (A - \lambda I) = 0$$

karakterisztikus egyenletet,

- majd az

$$(A - \lambda_k I)\ s_k = 0$$

lineáris egyenletrendszereket.
Bár magasabbrendű mátrixoknál ez általában igen sok számítást igényel, itt - a sok zérus miatt - a számítások egyszerűek.

a) i; $-i$; 1; 2;

$$\begin{bmatrix}1\\i\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-i\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

b) λ_1; λ_2; λ_3; μ_1; μ_2; μ_3;

$$\begin{bmatrix}s_1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}s_2\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}s_3\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\r_1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\r_2\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\r_3\end{bmatrix},$$

ahol a nullák 3 elemű zérus vektorok.

c) 1; -1; 2;

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}6\\2\\0\\-3\end{bmatrix}$$

Az 1 kétszeres gyök, de ehhez csak egy lineárisan független sajátvektor tartozik.

d) -1; 2

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Mindkét gyök kétszeres, de mindkettőhöz csak egy-egy lineárisan független sajátvektor tartozik.

e) Ha egy diagonális mátrixban a főátló k-adik helyén a_k áll, akkor $\lambda_k = a_k$ és az ehhez tartozó sajátvektor csupa zérusból áll, kivéve a k-adik elemet, amely tetszőleges konstans.

f) $$\begin{vmatrix} -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 1 \\ 0 & -8 & -12 & -14 & -15 & -7 & -3-\mu \end{vmatrix} = -\mu^7-3\mu^6-7\mu^5-15\mu^4 -$$

$$-14\mu^3-12\mu^2-8\mu = 0 = \mu(\mu^2+1)(\mu^2+4)(\mu+1)(\mu+2)$$

A sajátértékek és sajátvektorok:

$$0;\ i;\ -i;\ 2i;\ -2i;\ -1;\ -2;$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\i\\-1\\-i\\1\\i\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-i\\-1\\i\\1\\-i\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2i\\-4\\-8i\\16\\32i\\-64\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2i\\-4\\8i\\16\\-32i\\-64\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\4\\-8\\16\\-32\\64\end{bmatrix}.$$

g) Egyetlen sajátérték: 1.

A sajátvektor meghatározása:

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ T & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

ahol s_1 n és s_2 m elemű vektorok. Ebből:

s_2 tetszőleges,
$T\,s_1 = 0.$

Az utóbbi lineáris egyenletrendszerről általánosságban csak annyit tudunk, hogy az $s_1 = 0$ megoldás.

h) $$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -5-\lambda & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda(\lambda+5)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -5-\lambda & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -5-\lambda & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2+5\lambda+10)\left[(3-\lambda)(-5-\lambda)(\lambda^2+5\lambda+4)+10(\lambda^2+5\lambda+4)\right] =$$

$$= (\lambda^2+5\lambda+10)\ (\lambda^2+5\lambda+4)\ (\lambda^2+2\lambda-5) = 0$$

$$\lambda_1 = -2{,}5 + \frac{\sqrt{15}}{2}\, i \ ; \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$$

$$\lambda_3 = -4 \qquad ; \quad \lambda_4 = -1$$

$$\lambda_5 = -1 + \sqrt{6} \qquad , \quad \lambda_6 = -1 - \sqrt{6}$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad s_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda_3-3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad s_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda_4-3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda_5-3 \\ c_1 \\ c_1\lambda_5 \end{bmatrix} ; \quad s_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda_6-3 \\ c_2 \\ c_2\lambda_6 \end{bmatrix}$$

ahol

$$C_1 = \frac{\lambda_5^2 + 2\lambda_5 - 5}{5\lambda_5 + 5},$$

$$C_2 = \frac{\lambda_6^2 + 2\lambda_6 - 5}{5\lambda_6 + 5}.$$

A sajátvektorok kiszámítása egyszerűbb, ha a megoldandó egyenletbe nem helyettesítjük be a sajátértékek kiszámított értékeit.

3. $$\begin{vmatrix} -1 & -\lambda & p \\ -p & & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 + p^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1 - 4p^2}}{2}$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} p \\ 1 + \lambda_1 \end{bmatrix} ; \qquad s_2 = \begin{bmatrix} p \\ 1 + \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

III. 3.

1. a) $\tilde{x} = \dfrac{x - 2z}{\sqrt{5}}$; $\qquad \tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\tilde{z} = \frac{z + 2x}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{y^2 = -\sqrt{5}\,\tilde{\tilde{x}}\text{ , parabolikus henger}}$$

b) $$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2/3} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\tilde{z}^2 - \tilde{y} - \tilde{z} = 0$$

$$\tilde{\tilde{y}} = \frac{\tilde{y} + \tilde{z}}{\sqrt{2}} ; \qquad \tilde{\tilde{z}} = \frac{\tilde{y} - \tilde{z}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\tilde{x}^2 = \sqrt{2}\,\tilde{y}, \quad \text{parabolikus henger}}$$

c) $$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} & -3/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 0 \\ -2/\sqrt{140} & 6/\sqrt{140} & 10/\sqrt{140} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$2z^2 + \sqrt{14}\,\tilde{x} = 6$$

$$z^2 = -\frac{\sqrt{14}}{2}\,\tilde{\tilde{x}}\,; \qquad \tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{6}{\sqrt{14}}$$

$$\boxed{\text{Parabolikus henger.}}$$

2. A feladat főtengely transzformációval egyszerűen megoldható.

a) $$\frac{\tilde{x}^2}{6} + \frac{\tilde{y}^2}{3} + \frac{\tilde{z}^2}{2} = 1,$$

ahol

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$$

A keresett pontok koordinátái:

$$\tilde{x}_o = \tilde{y}_o = 0\,; \quad \tilde{z}_1 = \sqrt{2}\,; \quad \tilde{z}_2 = -\sqrt{2}\,;$$

$$\boxed{x_o = y_o = 0; \quad z_1 = \sqrt{2}\,; \quad z_2 = -\sqrt{2}\,.}$$

b) $$\frac{\tilde{x}^2}{6} + \frac{\tilde{y}^2}{3} + \frac{\tilde{z}^2}{3} = 1,$$

ahol

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}.$$

A keresett pontok koordinátái:

$$\tilde{x}_o = 0\,, \quad \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 3;$$

$$\boxed{x+y = 0\,; \quad \frac{1}{2}(y-x)^2 + z^2 = 3}$$

c) $\tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 + \tilde{x} = 1,$

ahol

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}.$$

A keresett pont koordinátái:

$$\tilde{x}_o = 1 \; ; \qquad \tilde{y}_o = \tilde{z}_o = 0,$$

amelyből

$$\boxed{x_o = y_o = 0 \; ; \quad z_o = 1.}$$

IV. 1.

0

1. írjuk először föl a nevező sorát:

$$1 + \ln(1+x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

A keresett sor legyen:

$$\frac{1}{1 + \ln(1+x)} = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots$$

A két sort összeszorozva:

$$1 = a_o + (a_o + a_1)x + (a_1 + a_2 - \tfrac{1}{2})x^2 +$$

$$+ (a_3 + a_2 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_o}{3})x^3 + (a_4 + a_3 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_1}{3} - \frac{a_o}{4})x^4 +$$

$$+ (a_5 + a_4 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_2}{3} - \frac{a_1}{4} + \frac{a_o}{5})x^5 + \dots$$

Az ismeretlen együtthatók most már sorban meghatározhatók:

$a_o = 1$

$a_1 = -1$

$a_2 = 1,5$

$$a_3 = \frac{a_1}{2} - a_2 - \frac{a_o}{3} = -2 - 1/3 = -2,33\dots$$

$$a_4 = -a_3 + \frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{3} + \frac{a_o}{4} = 3 + 2/3 = 3,66\dots$$

$$a_5 = -a_4 + \frac{a_3}{2} - \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{4} - \frac{a_o}{5} = -4,95 - 5/6 = 5,7833\dots$$

2. A sor tagonként deriválható. A sort helyettesítsük a differenciálegyenletbe:

$$y = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!} + \dots$$

$$(x+1)y = 1 + \frac{x}{2} - \frac{2}{6}x^3 + \dots + (-1)^n\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right]x^n + \dots$$

$$y' = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \ldots + (-1)^n(-1)(n+1)\frac{x^n}{(n+2)!} + \ldots$$

$$xy' = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + (-1)^n n \frac{x^n}{(n+1)!} + \ldots$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-(n+1)}{(n+1)!} = -\frac{n}{(n+1)!}$$

Ezzel az $xy' + (x+1)y = 1$ egyenlőség minden x-re való teljesülését beláttuk!

3. A megoldást

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^4 + \ldots$$

alakban feltételezve:

$$y'+xy=a_1+(2a_2+a_o)x+(3a_3+a_1)x^2+\ldots+((n+1)a_{n+1}+a_{n-1})x^4+\ldots$$

Az egyenlet jobb oldalának együtthatóival egybevetve:

$$a_1 = 1$$

$$2a_2 + a_o = 2$$

$$3a_3 + a_1 = 3$$

$$(n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = n+1$$

$$\vdots$$

Ebből

$a_1 = 1$	a_o tetszőleges
$a_3 = 2/3$	$a_2 = 1 - a_o/2$
$a_5 = 13/15$	$a_4 = 1 - a_2/4$
$a_7 = 92/105$	$\vdots$
$\vdots$	

Az a_o paraméter pl. a kezdeti feltételből határozható meg:

$$a_o = y(0).$$

4.

$$y = (23+c)-(24+c)x+(12+\frac{c}{2})x^2 - (4+\frac{c}{6})x^3 +$$

$$+ (1+\frac{c}{24})x^4 + c\sum_{k=5}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$$

5. $$y = -1-(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{1}{24}(x-1)^4 -$$

$$-\frac{1}{120}(x-1)^5+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=6}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k!}$$

6. Keressük a megoldást hatványsor alakjában!

a) $y = a_1x + a_2x^2 + \ldots$

$y'+y = a_1 + (2a_2 + a_1)x + \ldots + ((n+1)a_{n+1}+a_n)x^n + \ldots$

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \ldots$

Ebből tetszőleges számú együttható meghatározható:

$a_1 = 1,$

$a_2 = -1/2,$

$a_3 = 1/2,$

$a_4 = -1/8,$

stb.

Figyeljük meg, hogy a megoldás zárt alakban nem állítható elő, hiszen ehhez - az egyenletet inhomogén lineáris egyenletként megoldva - az $\int e^{x^2}dx$ integrál meghatározására lenne szükség és ez a határozatlan integrál, mint ismeretes, zárt alakban nem létezik.

b) A probléma hasonló, mint az a) esetben.

$y = a_1x + a_2x^2 + \ldots$

$y'-y = a_1+(2a_2-a_1)x+\ldots+(n+1)a_{n+1}-a_n)x^4+ \ldots$

$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$

$a_1 = 1,$

$a_2 = 1/2,$

$a_3 = -1/6,$

$a_4 = -1/24,$

stb.

c) (l. az a) feladat megoldási módszerét!)

$y = a_1x + a_2x^2 + \ldots$

$y' = 2y = a_1 + (2a_2 + 2a_1)x + (3a_3 + 2a_2)x^2 + \ldots$

$+ (n+1)\ a_{n+1} + 2a_n)x^n + \ldots$

$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$

$a_1 = 1$

$a_2 = -1$

$a_3 = \frac{13}{18}$

stb.

d) $y = a_o + a_1(x-1) + \ldots + a_n(x-1)^n + \ldots$

$y' + y = a_1 + (2a_2 + a_1)(x-1) + \ldots + \left((n+1)a_{n+1} + a_n\right)(x-1)^n + \ldots$

$e^{(x-1)^2} = 1 + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^4}{2} + \frac{(x-1)^6}{3!} + \ldots$

$a_1 = 1,$

$a_2 = -1/2,$

$a_3 = 1/2,$

$a_4 = -1/8,$

stb.

$a_o = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(-1)^k$

1. Nyilván $|f_n(x)| < \dfrac{n}{\left(\frac{1}{\pi} + \frac{n-1}{\pi}\right)^2} = \dfrac{\pi^2}{n}$, tehát

f_n egyenletesen konvergens $\left[\frac{1}{\pi}; \infty\right)$-ben, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Továbbá nyilván $f_n \in C^0[1/\pi; \infty)$.
Most határozzuk meg $I(x)$-et!

$$\int_{1/\pi}^{x} f_n(t)\,dt = \sin \frac{n}{x + \frac{n-1}{\pi}} .$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{x + \frac{n-1}{\pi}} =$, így $I(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{1/\pi}^{x} f_n(t)\,dt =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin \frac{n}{x + \frac{n-1}{\pi}} = 0$$

Ugyanakkor bármely n-re, ha $x = \frac{n+1}{\pi}$, akkor

$$\int_{1/\pi}^{(n+1)/\pi} f_n(t)\,dt = \sin \frac{n}{\frac{n+1}{\pi} + \frac{n-1}{\pi}} = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

vagyis $\int_{1/\pi}^{x} f_n(t)\,dt$ nem egyenletesen konvergens $[1/\pi; \infty)$-ben.

Ebből következik, hogy $\boxed{\text{x-től független küszöbindex nem létezik.}}$

2. a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, tehát $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$.

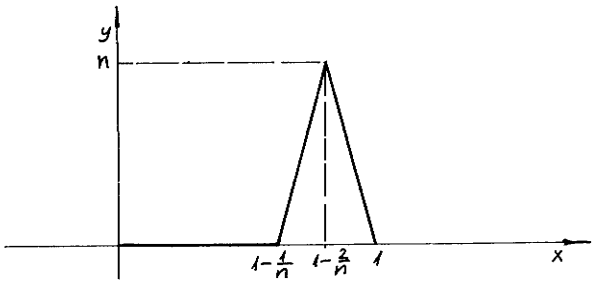
$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.

Tehát azt tapasztaljuk, hogy

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Ennek az az oka, hogy az f_n függvény nem egyenletesen konvergál. (Rajzoljuk le f_n grafikonját!)

b) Érdemes mindenekelőtt a függvény grafikonját lerajzolni:



52. ábra

Ebből:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \text{ tehát } \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1, \text{ tehát } \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1.$$

Azt tapasztaljuk, hogy

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx .$$

Ennek az az oka, hogy az f_n függvény nem egyenletesen konvergál.

3. $f_n(x)$ nyilván $[1/\pi;\infty)$-ben egyenletesen konvergál $f(x) \equiv 0$-hoz, hiszen $|f_n(x)| \leq 1/\sqrt{n}$. És $f'(x) \equiv 0$

Ugyanekkor

$$f'_n(x) = \frac{-1}{n\sqrt{n}} \frac{1}{(x - \frac{n-1}{n\pi})^2} \cos \frac{1/n}{x - \frac{n-1}{n\pi}},$$

és

$$f'_n\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{-1}{n\sqrt{n}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\pi} - \frac{n-1}{n\pi}\right)^2} \cos \frac{1/n}{\frac{1}{\pi} - \frac{n-1}{n\pi}} = \sqrt{n}\,\pi^2,$$

$$\lim_{n\to\infty} f'_n\left(\frac{1}{\pi}\right) = \infty .$$

Ha $x > \frac{1}{\pi}$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x - \frac{n-1}{n\pi}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{\pi}\right)^2 \neq 0$,

így $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \equiv \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx} f_n(x), \text{ ha } x \in \left(\frac{1}{\pi};\infty\right),$$

de ez az azonosság már nem áll fenn $\left[\frac{1}{\pi};\infty\right)$-ben. Ennek az az oka, hogy $f'_n(x)$ konvergenciája nem egyenletes.

4. Nem igaz! $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \equiv 0$, így $\frac{d}{dx}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \equiv 0$, ugyanakkor $f'_n(0) = \pi/2$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d}{dx} f_n(x)$ nem lehet azonosan zérus!

IV. 3.

1. Először meghatározhatjuk a valós Fourier-sorokat, majd az Euler-összefüggés alkalmazásával a komplex sorokat.

a) (ld. Pt. IV. kötet 365. feladatát!)

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$$

$$\cos 2kx = \frac{e^{2kxi} + e^{-2kix}}{2}$$

$$|\sin x| = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}^{*}\frac{e^{2kix}}{4k^2-1} .$$

(A szumma jelnél a * azt jelzi, hogy az összegezést k-ra és -k-ra egyszerre kell végrehajtani.)

b) $$|\cos x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$$

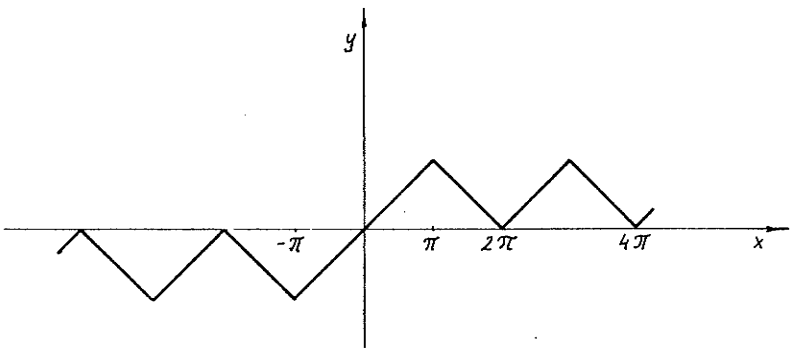
$$|\cos x| = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}^{*} (-1)^k \frac{e^{2kix}}{4k^2-1}$$

c) $$\cos x \sin^2 x = \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x =$$

$$= \frac{1}{8} e^{xi} + \frac{1}{8} e^{-xi} - \frac{1}{8} e^{3xi} - \frac{1}{8} e^{-3xi}$$

d) $$\operatorname{sg} \sin x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k\neq 0 \\ k=-\infty}}^{\infty}{}^{*} \frac{\operatorname{sg} k}{ik} e^{kxi}$$

e) A függvény nem periodikus, így Fourier-sora nem létezik. A függvény grafikonját az ábrán mutattuk be.



53. ábra

2. a)

$$|\sin \pi x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{4k^2 - 1} = |\sin \bar{x}|_{\bar{x}=\pi x}$$

b) $$f(x) = \frac{1}{2} \left(|\cos \pi x| + \cos \pi x \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos 2k\pi x}{4k^2-1} + x\cos\pi x\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos\pi x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos 2k\pi x}{4k^2-1}$$

3. Az integrandust linearizáljuk. Ez az egyik lehetséges módszer.

$$\sin^2 u \cos^2 2u = \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\cos 2u + \frac{1}{4}\cos 4u - \frac{1}{8}\cos 6u .$$

A linearizált alakot (véges Fourier-sor) tagonként tudjuk integrálni:

$$\int_0^x \sin^2 u \cos^2 2u \, du = \frac{x}{4} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin 6x$$

4. Az a) és b) feladatoknál a szuperpozíció elvét alkalmazzuk.

a) Ha $y''+y = \frac{\sin kx}{k}$; $k \neq 1$,

akkor az egyenlet egy periodikus megoldása:

$$y_p = \frac{\sin kx}{k(1-k^2)} .$$

A szuperpozíció konvergens Fourier-sorra is alkalmazható.

b) $-y''+y = a_o$; $\qquad y_p = a_o$

$-y''+y = a_k \cos kx$; $\qquad y_p = \frac{a_k}{1+k^2}\cos kx$

$-y''+y = b_k \sin kx$; $\qquad y_p = \frac{b_k}{1+k^2}\sin kx$

A c), d), e) és f) feladatoknál is ugyanígy járhatunk el. Általánosan a következőt írhatjuk fel:

Ha $ay'' + by' + cy = de^{\alpha x}$; $\alpha \in \mathbb{C}$

akkor $y_p = \dfrac{d}{a\alpha^2+b\alpha+c} e^{\alpha x}$; feltéve, hogy

$a\alpha^2+b\alpha+c \neq 0$.

5. A jobb oldalakat Fourier-sorba fejtjük és a szuperpozíció elvét alkalmazzuk.
A periodikus megoldás felírása különösen áttekinthető, ha komplex Fourier-sort használunk.

a) $y''+3y'+4y = \frac{1}{8i} e^{2xi} - \frac{1}{8i} e^{-2xi} + \frac{1}{16i} e^{4xi} - \frac{1}{16i} e^{-4xi}$

$$y_p = \frac{e^{2xi}}{8i(-4+6i+4)} - \frac{e^{-2xi}}{8i(-4-6i+4)} +$$

$$+ \frac{e^{4xi}}{16i(-16+12i+4)} - \frac{e^{-4xi}}{16i(-16-12i+4)} =$$

$$= -\frac{1}{48}(e^{2xi}+e^{-2xi}) + \frac{1}{192i}\frac{(-1-i)e^{4xi}-(-1+i)e^{-4xi}}{2} =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{24}\cos 2x - \frac{1}{192}\cos 4x - \frac{1}{192}\sin 4x}$$

b) $y''+2y' + y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$

$$y''+2y'+y = a_k \cos 2kx = a_k \frac{e^{2kxi}+e^{-2kxi}}{2}$$

$$y_{pk} = \frac{a_k}{2}\left(\frac{e^{2kxi}}{-4k^2+4ki+1} + \frac{e^{-2kxi}}{-4k^2-4ki+1}\right) =$$

$$= \frac{a_k}{2}\frac{e^{2kxi}+e^{-2kxi}}{(1-4k^2)^2+16k^2}(1-4k^2) -$$

$$-\frac{a_k}{2}\,\frac{e^{2kxi}-e^{-2kxi}}{(1-4k^2)^2+16k^2}\,4ki =$$

$$= a_k\,\frac{1-4k^2}{(1-4k^2)^2+16k^2}\cos 2kx + a_k\,\frac{4k}{(1-4k^2)^2+16k^2}\sin 2kx$$

$$\boxed{y_p = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(4k^2-1)\left[(1-4k^2)^2+16k^2\right]}\left((1-4k^2)\cos 2kx + 4k\sin 2kx\right)}$$

c) $y' + 2y = \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x$

$$\boxed{y_p = \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{20}\sin x - \frac{1}{26}\cos 3x - \frac{3}{52}\sin 3x}$$

d) $y' - 3y = \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 6x$

$$y' - 3y = \cos\omega x$$

$$y_{p\omega} = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

$$y'_{p\omega} = -\omega A\sin\omega x + \omega B\cos\omega x$$

$$y'_{p\omega} - 3y_{p\omega} = (\omega B-3A)\cos\omega x + (-\omega A-3B)\sin\omega x = \cos\omega x$$

$$\omega B - 3A = 1 \qquad A = -3/(9+\omega^2)$$

$$\omega A + 3B = 0 \qquad B = \omega/(9+\omega^2)$$

E részletszámítás után az eredeti egyenlet periodikus megoldása (figyelembe véve, hogy $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 4$, $\omega_4 = 6$):

$$y_p = -\frac{1}{12} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{13}(-3\cos 2x + 2\sin 2x) +$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{25}(-3\cos 4x + 4\sin 4x) - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{45}(-3\cos 6x +$$

$$+ 6 \sin 6x) = \boxed{- \frac{1}{12} + \frac{9}{104} \cos 2x - \frac{3}{52} \sin 2x - \frac{3}{100} \cos 4x + \frac{1}{25} \sin 4x + \frac{1}{120} \cos 6x - \frac{1}{60} \sin 6x.}$$

e) $$y'' + 2y' + 2y = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k=-\infty}}^{\infty *} \frac{\operatorname{sg} k}{ik} e^{kxi}$$

$$y_p = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k=-\infty}}^{\infty *} \frac{\operatorname{sg} k}{ik} \frac{e^{kxi}}{-k^2+2ki+2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ik}\left(\frac{e^{kxi}}{2-k^2+2ki} - \frac{e^{-kxi}}{2-k^2-2ki}\right)$$

$$\boxed{= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \frac{2-k^2}{k} \sin kx - 4\cos kx\right) \frac{1}{(2-k^2)^2+4k^2}}$$

f) $$y'' + 3y' + 4y = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x =$$

$$= \frac{3}{8i} e^{xi} - \frac{3}{8i} e^{-xi} - \frac{1}{8i} e^{3xi} + \frac{1}{8i} e^{-3xi}$$

$$y_p = \frac{3e^{xi}}{8i(-1+3i+4)} - \frac{3e^{-xi}}{8i(-1-3i+4)} - \frac{e^{3xi}}{8i(-9+9i+4)} + \frac{e^{-3xi}}{8i(-9-9i+4)} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{8} \sin x - \frac{1}{8} \cos x + \frac{5}{424} \sin 3x + \frac{9}{424} \cos 3x}$$

g) $$y'' - 3y' - 3y = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x = \frac{3}{8} e^{xi} + \frac{3}{8} e^{-xi} +$$

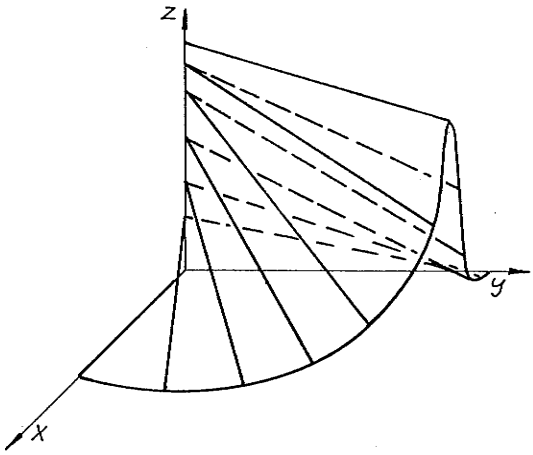
$$+ \frac{1}{8} e^{3xi} + \frac{1}{8} e^{-3xi}$$

$$y_p = \frac{3}{8}\left(\frac{e^{xi}}{-4-3i} + \frac{e^{-xi}}{-4+3i}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{e^{3xi}}{-12-9i} + \frac{e^{-3xi}}{-12+9i}\right) =$$

$$= \boxed{- \frac{3}{25} \cos x - \frac{9}{100} \sin x - \frac{1}{75} \cos 3x - \frac{1}{100} \sin 3x}$$

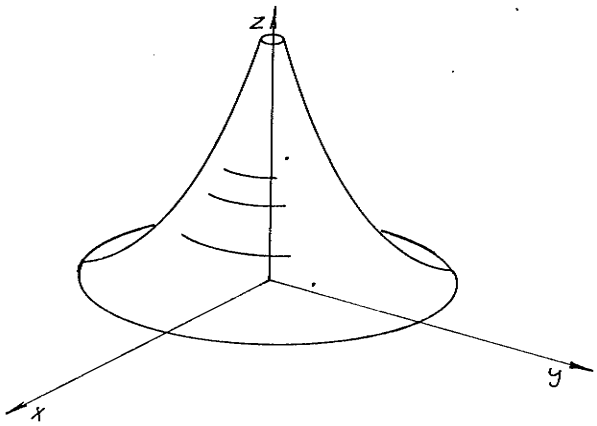
1. a) (l. Pt. V. kötet 29. feladatát is.)

$x=y=0$ helyen határérték nem létezik. A felület egy darabja az ábrán látható:



54. ábra

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z = \infty$



55. ábra

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} z$ nem létezik. A grafikon hasonló az a) feladatbeli grafikonhoz, ha $x > 0$, $y > 0$.
Az $x = -y$ egyenes mentén sem folytonos a függvény. Itt a határérték (ha $x \neq 0$) $-\infty$ ill. $+\infty$.

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} z = 0$, de a függvény itt nem folytonos.

Nem folytonos továbbá az $x = -y$ helyeken sem, ahol a határérték (ha $x \neq 0$) $-\infty$ ill. $+\infty$.

e) Ha $x=y=0$, akkor a függvény nem folytonos, de $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} z = 0$.

2. A (hiper)-szintfelületek az $f(x)$ = állandó egyenletű alakzatok. Felületről valójában csak az $n = 3$ esetben beszélhetünk.
   a) Origó középpontú gömbök (valódi, háromdimenziós gömbök)
   b) Origó középpontú "gömbök" (hipergömbök) (n-dimenziós alakzatok)
   c) l. b)
   d) Ha $n = 3$, akkor párhuzamos síkpárok, ha $n > 3$, akkor párhuzamos hipersíkpárok.
   e) Hipersíkok, ha $n > 3$

   síkok, ha $n = 3$.

   f) Ellipszoidok, ha $n = 3$, hiperellipszoidok, ha $n > 3$.

3. a) egyenesek
   b) körök vagy ellipszisek, esetleg egyenesek
   c) körök vagy ellipszisek v. parabolák v. hiperbolák, esetleg egyenesek v. pont (kúpszeletek)
   d) ellipszisek (esetleg pont)

V. 2.

1. a) $x_4^2 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
   Ez egy négydimenziós hiperkúp belseje.
   A tartomány nem korlátos, nem öszefüggő, nyílt
   (Gondoljunk a $z^2 = x^2 + y^2$ kúpra!)

b) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots\dots\dots + x_n^2} \leq 1$

Ez egy hipergömb és annak belseje (korlátos, összefüggő, zárt)

c) ld. a b) feladatot, de itt a nyílt tartomány.

d) $|x_1 + \dots\dots + x_n| < 1.$

Két párhuzamos hipersík közötti nem korlátos, összefüggő, nyílt tartomány.
(Gondoljunk az $|x + y + z| < 1$ tartományra!)

2. A problémák - az előző feladatokhoz hasonlóan - a magasabb dimenziók miatt vannak. Hogy a megoldásokat szemléletesen lássuk, célszerű a megfelelő 3-dimenziós esettel analógiát keresnünk.

a) Két párhuzamos élű, közös középpontú hiperkocka közötti korlátos, összefüggő se nem zárt, se nem nyílt tartomány.

b) A koordináta hipersíkokkal $2^4 = 16$ részre szabdalt 4-dimenziós rész ún. első ortánsa (első "tér"-tizenhatod); nem korlátos, összefüggő, zárt tartomány.

c) A 4-dimenziós térben az

$$x_4 = x_1 + x_2 + x_3$$

hipersík alatti fél-"tér". Nem korlátos, összefüggő, zárt.

V. 3.

1. $x_o x + y_o y + z_o z = 1,$

ahol $z_o = \sqrt{1 - x_o^2 - y_o^2}$ ill. $z_o = -\sqrt{1 - x_o^2 - y_o^2}.$

2. a) Felhasználhatjuk, hogy olyan összetett függvényről van szó, ahol a külső függvény egyváltozós.

$$\sin u \cong u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$\sin(xy+z) \cong z + xy - \frac{z^3}{3!} - \frac{z^2xy}{2} + \frac{z^5}{5!} - \frac{zx^2y^2}{3!} + \dots$$

$$+ \dots (-1)^{2k+1} \frac{x^{2k+1}y^{2k+1}}{(2k+1)}.$$

$$\boxed{T_1(x,y,z) = T_2(x,y,z) = z+xy}$$

b) $$\frac{1}{1-\|x\|^2} \cong 1 + \|x\|^2 + \|x\|^4 + \|x\|^6 + \ldots + \|x\|^{2k} =$$

$$= 1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+x_1^4+2x_1^2x_2^2+x_2^4+2x_1^2x_3^2+2x_2^2x_3^2+x_3^4+x_n^{2k}$$

$$\boxed{T_1(x) = T_2(x) = 1 + x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

c) Az adott függvény másodfokú (4 változós) polinom, így önmaga másodfokú Taylor-polinomja. Csupán az átrendezést kell végrehajtani.

$$2\,x_1(x_2-1+1)+(x_3+1-1)+3\,(x_3+1-1)\;(x_4-2+2)-$$

$$-(x_2-1+1)\,(x_4-2+2) = \boxed{-9+2x_1+7\,(x_3+1)-4\,(x_4-2)-}$$

$$\boxed{-2\,(x_2-1)+2x_1\,(x_2-1)+3\,(x_3+1)\,(x_4-2)-(x_2-1)\,(x_4-2) =}$$

$$\boxed{= T_2(x_1,x_2,x_3,x_4)}$$

Természetesen az együtthatók a Taylor-polinom általános kifejezéséből is nyerhetők. Pl. a -9 a függvény helyettesítési értéke:

$2x_{10}x_{20}+x_{30}+3x_{30}x_{40}-x_{20}x_{40} = -9.$ $x_1-x_{10}=x_1$ együtthatója:

$(2x_1x_2+x_3+3x_3x_4-x_2x_4)'_{x_1} = 2x_2;$ $2x_{20} = 2$, stb.

$$T_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = -9+2x_1+7\,(x_3+1)-4\,(x_4-2)-2\,(x_2-1)$$

3. a) $$\sin(xy) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(xy)^{2k+1}}{(2k)+1)!}$$

b) $$(x+y+z)^3 = x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3xz^2 + 6xyz +$$
$$+ y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$$

c) $x^2y + xy = -2-3(x-1)+ 2(y+1)+ 3(x-1)(y+1)-(x-1)^2 +$

$+ (y+1)(x-1)^2$

4. $\frac{d}{dt} g(t,x(t),y(t),z(t)) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,x(t),y(t),z(t)) +$

$+ \frac{\partial g}{\partial x}(t,x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t)+\frac{\partial g}{\partial y}(t,x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t)+$

$+ \frac{\partial g}{\partial z}(t,x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,x(t),y(t),z(t)) +$

$$+ \operatorname{grad} g(t,x(t),y(t),z(t))^T \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} .$$

5. Legyen x egy tetszőleges rögzített szám, de $x \neq 0$. Ekkor az $y \to \frac{\sin xy}{y}$ függvény szakadása az $y = 0$ helyen megszüntethető. Ebből következik, hogy a feladatban szereplő integrál nem improprius, hanem közönséges integrál és $\varphi(x)$ az $x = 0$ hely kivételével mindenhol értelmezve van.
Számítsuk most ki a $\varphi'(x)$ deriváltat felhasználva az alábbi azonosságot:

$$\text{ha} \quad h(x) = \int_0^{g(x)} f(x,y)\,dy, \quad \text{akkor}$$

$$h'(x) = \int_0^{g(x)} f'_x(x,y)\,dy + f(x,g(x))g'(x).$$

Tehát a keresett derivált:

$$\varphi'(x) = \int_0^{1/x} \cos xy\,dy + \frac{\sin x\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

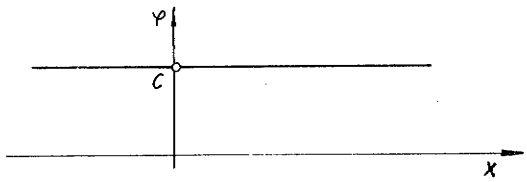
$$= \frac{\sin xy}{x}\Bigg|_{y=0}^{y=1/x} - \frac{\sin 1}{x} = 0$$

így $(0,\infty)$-ben ill. $(-\infty,0)$-ban $\varphi(x)$ azonosan állandó.
Vegyük most figyelembe, hogy

$$\frac{\sin xy}{y} > 0, \quad \text{ha} \quad 0 < y < \frac{1}{x} \quad \text{és}$$

$$\frac{\sin xy}{y} < 0, \quad \text{ha} \quad \frac{1}{x} < y < 0 \ ,$$

amelyből a függvény párossága következik.
Ezek után kapható φ grafikonja:



56. ábra

A C konstans értéke valamilyen numerikus eljárással tetszőleges pontossággal meghatározható, legegyszerűbben a

$$C = \int_0^1 \frac{\sin y}{y}\, dy$$

egyenlőségből.

6.

$$I(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\sin x}^{2} \frac{e^{xy}}{y}\, dy = \int_{-\sin x}^{2} e^{xy}\, dy - \frac{e^{-x\sin x}}{-\sin x}(-\cos x) =$$

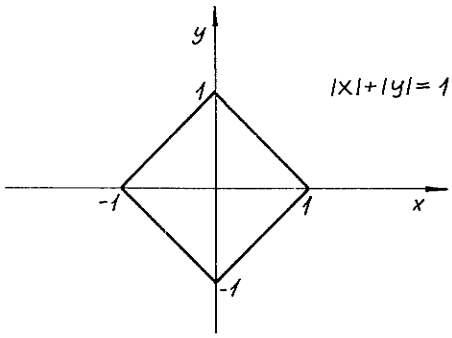
$$= \frac{e^{xy}}{x}\Bigg|_{y=-\sin x}^{y=2} - \frac{\cos x}{\sin x}\, e^{-x\sin x} =$$

$$= \frac{e^{2x}}{x} + \frac{e^{-x\sin x}}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\, e^{-\sin x}.$$

$$I(1) = \boxed{e^2 + \frac{e^{-\sin 1}}{\sin 1}(1 - \cos 1)}$$

V. 4.

1. Lokális minimumhelyek: $|x| + |y| = 1$
   Lokális maximumhely: $x = y = 0$



57. ábra

2. a) Lokális minimumhelyek: $|x| + |y| + |z| = 1$
   Lokális maximumhely: $x = y = z = 0$
   b) és c) Lokális minimumhelyek: $x^2 + y^2 = 1$
   Lokális maximumhely: $x = y = 0$
   d) Lokális minimumhelyek: $x + y + z = 0$
   Lokális maximumhelyek nincsenek.

3. a) A függő változót nevezzük u-nak és vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}; \quad s = \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}; \quad r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Ezekkel:

$$u = r^T Ar + s^T r$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele:

$$\text{grad } u = \begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{bmatrix} = 2\,Ar_o + s = 0$$

Az elégséges feltétel az

$$\begin{bmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{zx} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yx} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{bmatrix} = 2\,A$$

mátrix definitása. Ha A definit, akkor nem szinguláris és a lokális szélsőértékhely is meghatározható:

$$r_o = -\frac{1}{2} A^{-1} s.$$

A szimmetrikus A mátrix pontosan akkor definit, ha sajátértékei vagy egyaránt pozitívak, vagy egyaránt negatívak. Az első esetben minimumhely, a másodikban maximumhely az r_o.

b) A feladat megoldása lényegében egyezik az a) alatti megoldással:
Legyen A definit;

$$r_o = -\frac{1}{2} A^{-1} b.$$

Ha A pozitív definit, akkor r_o minimumhely, ha negatív definit, akkor maximumhely.

4. A jelölések értelmezéséhez ld. a 3. a) feladatot!
a)

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}; \ \lambda_1 = 3; \ \lambda_2 = 6; \ \lambda_3 = 9$$

$$r_o = -\frac{1}{324} \begin{bmatrix} 26 & 10 & 4 \\ 10 & 35 & 14 \\ 4 & 14 & 38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{324} \begin{bmatrix} 10 \\ -42 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Az } x_o = -\frac{5}{162}\ ;\ y_o = \frac{7}{54}\ ;\ z_o = -\frac{7}{162} \text{ pont minimumhely.}}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix};\ \lambda_1 = 6;\ \lambda_2 = -3;\ \lambda_3 = -3$$

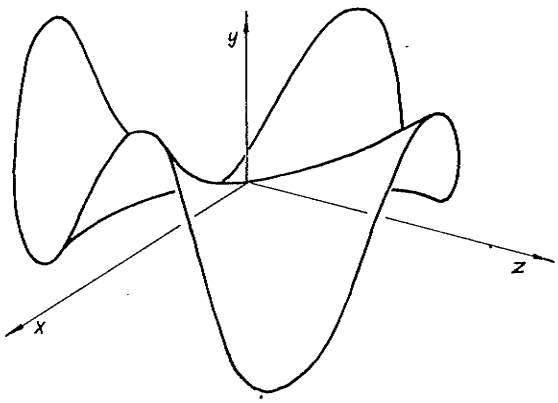
$$\boxed{\text{Nincs lokális szélsőértékhely!}}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 6 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix};\ \lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = -2;\ \lambda_3 = 3$$

$$\boxed{\text{Nincs lokális szélsőértékhely!}}$$

5. a) A függvénynek egyáltalán nincs szélsőérték helye, ami a polárkoordinátás alak alapján történő ábrázolásból egyszerűen kiderül (ld. az ábrát!).



58. ábra

Ha a Pt. V. kötet 10.3. tételét alkalmaznánk, akkor úgy tűnne, hogy lokális minimumhely az origó. Térjünk át ugyanis Descartes-koordinátákra:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$2\sin^2 2\varphi - 1 = 8\sin^2\varphi\cos^2\varphi - 1 = 8\,\frac{r^2\sin^2\varphi\, r^2\cos^2\varphi}{r^4} - 1 =$$

$$= 8\,\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)} - 1,$$

$$z(x,y) = \begin{cases} 8\,\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} - x^2 - y^2, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad , & \text{ha } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

A függvény mindenhol folytonos és mindenhol kétszer deriválható. Továbbá az origóban teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$z(0\ 0) = 0$$

$$z'_x(0\ 0) = z'_y(0\ 0) = 0$$

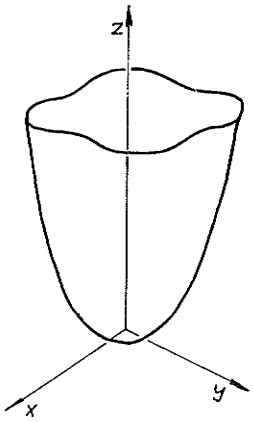
$$z''_{xx}(0\ 0) = z''_{yy}(0\ 0) = -2$$

$$z''_{xy}(0\ 0) = z''_{yx}(0\ 0) = 0$$

$$\begin{vmatrix} z''_{xx}(0\ 0) & z''_{xy}(0\ 0) \\ z''_{yx}(0\ 0) & z''_{yy}(0\ 0) \end{vmatrix} = 4 > 0$$

A tétel azonban nem alkalmazható, mert a második deriváltak az origóban nem folytonosak. Az origó valóban nem is szélsőértékhely.

b) Az idevonatkozó tétel alkalmazhatóságáról ugyanaz mondható el, mint az a) feladat esetében. Ennek ellenére $\boxed{\text{az origó minimumhely.}}$ (Figyelem! A szóban forgó tétel csak elégséges, de nem szükséges feltételt ad!)



59. ábra

V. 5.

1. Mindekelőtt az $x_o = 1$ értékhez tartozó y_o értéket kell meghatároznunk, vagyis a $\cos x_o y_o - y_o/x_o = 0$ egyenlet megoldását y_o-ra. Behelyettesítés után a $\cos y_o = y_o$ egyenlet egyetlen megoldását iterációval egyszerűen meghatározhatjuk:

$$y_o \approx 0{,}7391.$$

$$F(x,y) = \text{cps}\, xy - y/x$$

bevezetésével alkalmazzuk az implicit függvénytételt!

$$F'_y\,(x_o,y_o) = -x_o \sin x_o y_o - 1/x_o = -1{,}6736 \neq 0,$$

tehát az $x_o = 1$ pont megfelelő környezetében egyenletünk egyértelműen határozza meg y-t, mint x függvényét. y e pontbeli lineáris közelítése:

$$y - y_o \approx -\frac{F'_x(x_o,y_o)}{F'_y(x_o,y_o)}\,(x - x_o),$$

amelyből

$$F'_x(x_o,y_o) = -y_o \sin x_o y_o + \frac{y_o}{x_o^2} = 0{,}2412$$

figyelembevételével:

$$\boxed{y \approx 0{,}1441\ x + 0{,}595.}$$

Az inverz létezésének feltétele, hogy $F'_x(x_o,y_o) \neq 0$.
Ez most teljesül. Az inverz lineáris közelítése nem más, mint az eredeti függvény lineáris közelítésének inverze. Tehát nem kell mást tennünk, mint az

$$y = 0{,}1441\ x + 0{,}595$$

egyenletben az x és y változókat megcserélni:

$$x = 0{,}1441\ y + 0{,}595,$$

amelyből y-t kifejezve az

$$\boxed{y \approx 6{,}94\ x - 4{,}1291}$$

egyenletet, tehát az inverz függvény adott pontbeli érintőjének egyenletét kaptuk.

2. Mindenekelőtt: $F(x_o,y_o) = 0$ valóban.

Az $F(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 4\ (x^2 - y^2)$ jelölés bevezetésével:

$$F'_x(x,y) = 4x\ (x^2 + y^2 - 2),$$

$$F'_y(x,y) = 4y\ (x^2 + y^2 + 2).$$

Ebből:

$$F'_x(x_o,y_o) = 10{,}5288,$$

$$F'_y(x_o,y_o) = 10{,}5283 \neq 0.$$

A keresett függvény létezik és lineáris közelítése az

$$y - y_o \approx -\frac{F'_x(x_o,y_o)}{F'_y(x_o,y_o)}\ (x - x_o)$$

összefüggés felhasználásával:

$$\boxed{y \approx -1{,}00005x + 2{,}2796.}$$

Az inverz lineáris közelítése:

$$\boxed{y \approx -0{,}99995x + 2{,}2795.}$$

A feladat második kérdésének megválaszolásához számítsuk ki $F'_y(x,y)$ értékét az adott pontokban:

$$F'_y(0,0) = F'_y(-2,0) = F'_y(2,0) = 0.$$

Ezzel a módszerrel tehát nem tudjuk megállapítani, hogy léteznek-e az adott pontok környezetében a keresett függvénykapcsolatok, vagy sem. Polár koordinátákra való áttéréssel és a grafkion felrajzolásával (ld. az ábrát) azonban egyszerűen meggyőződhetünk arról, hogy ennél a példánál F'_y eltűnése amiatt van, mert nem fejezhető ki y mint x függvénye e pontok környezetében. Érdekes, hogy x mint y függvénye létezik a (-2,0) és (2,0) pontokban (itt F'_x nem zérus!), azonban nem létezik a (0,0) pontban (itt ugyanis F'_x is zérus!). A részletes számítások:

$$x = r\cos\varphi\ ; \qquad y = r\sin\varphi\ ;$$

$$(x^2+y^2)^2 - 4(x^2-y^2) = r^4 - 4r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2(r^2 - 4\cos 2\varphi) =$$

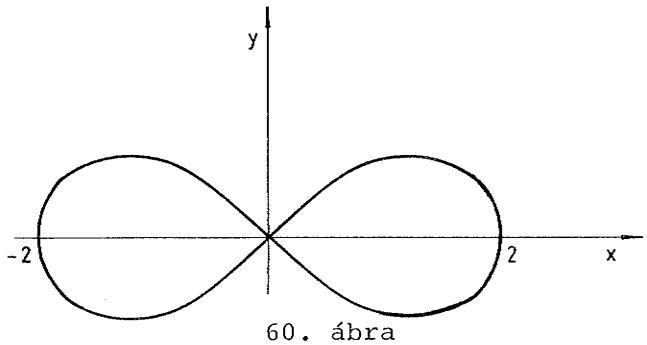
$$= 0,$$

amelyből

$$r = 0 \text{ vagy}$$

$$r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}\ ;\ -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4 \quad \text{vagy} \quad \tfrac{3}{4}\pi \le \varphi \le \tfrac{5}{4}\pi\ ,$$

tehát a grafikon lemniszkáta.



60. ábra

3. A függvény lineáris közelítés legyen $x \to m\,x + b$, az inverz lineáris közelítése pedig $x \to m_1\,x + b_1$. Akkor a megoldások:

	m	b	m_1	b_1
a)	0	11,43684	-	-
b)	0	3,14619	-	-
c)	nincs y_o-ra megoldás!			
d)	-0,5495	12,19911	-1,81982	22,2002
e)	-0,74667	11,57211	-1,33926	15,4981
f)	1,08835	11,77373	0,91881	-10,8179
g)	4,06074	1,13254	0,24626	-0,2789
h)	$y_o=1$ nem linearizálható, inverz nem létezik.			

4. Mindenekelőtt ellenőrizzük, hogy az adott pont valóban kielégíti az egyenletet.
A feladat megoldásához az F'_x, F'_y és F'_z deriváltakra van szükségünk az adott pontban, ahol

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3z.$$

$$F'_z(x,y,z) = 3x^2 \quad ; \quad F'_x(\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{9}, -3) = 9\sqrt[3]{3}$$

$$F'_y(x,y,z) = 3y^2 \quad ; \quad F'_y(\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{9}, -3) = 9\sqrt[3]{3},$$

$$F'_z(x,y,z) = 3z^2-3 \quad ; \quad F'_z(\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{9}, -3) = 24 \quad .$$

Tekintettel arra, hogy $F'_z(\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{9}, -3) \neq 0$, így a keresett függvény létezik és grafikonja érintősíkjának egyenlete:

$$z - z_o = \frac{F'_x(x_o,y_o,z_o)}{F'_z(x_o,y_o,z_o)}(x - x_o) - \frac{F'_y(x_o,y_o,z_o)}{F'_z(x_o,y_o,z_o)}(y - y_o),$$

ahol $\quad x_o = y_o = \sqrt[3]{9}, \qquad z_o = -3,$

$$\boxed{z + 3 = -\frac{9\sqrt[3]{3}}{24}(x - \sqrt[3]{9}) - \frac{9\sqrt[3]{3}}{24}(y - \sqrt[3]{9}).}$$

5. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$p=\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}; \quad p_o=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad q=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad q_o=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad F=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$F_1(p,q) = u-u^2v^2-\frac{xy}{w}+4;$$

$$F_2(p,q) = \frac{1}{uvw}+\frac{x}{y}.$$

Ezekkel:

$$F_q'(p,q) = \begin{bmatrix} -\frac{y}{w} & -\frac{x}{w} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{bmatrix}; \quad F_q'(p_o,q_o) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

$$\det F_q'(p_o,q_o) = 2 \neq 0.$$

Az implicit függvénytétel értelmében a keresett függvényrendszer létezik. Az adott pontbeli lineáris közelítés:

$$q-q_o \approx -\left[F_q'(p_o,q_o)\right]^{-1} F_p'(p_o,q_o)(p-p_o).$$

A részletes számítások:

$$\left[F_q'(p_o,q_o)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -0,25 & 1 \\ -0,25 & -1 \end{bmatrix};$$

$$F_p'(p,q) = \begin{bmatrix} 1-2uv^2 & -2u^2v & \frac{xy}{w^2} \\ \frac{-1}{u^2vw} & \frac{-1}{uv^2w} & \frac{-1}{uvw^2} \end{bmatrix};$$

$$F_p'(p_o,q_o) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\left[F'_q(p_o,q_o)\right]^{-1} F'_p(p_o,q_o) = \begin{bmatrix} 1,25 & -1,5 & 0 \\ -0,75 & 0,5 & -2 \end{bmatrix};$$

$$q \approx \begin{bmatrix} -1,25 & 1,5 & 0 \\ 0,75 & -0,5 & 2 \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 4,75 \\ -1,25 \end{bmatrix};$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &\approx -1,25u + 1,5v + 4,75 \\ y &\approx 0,75u - 0,5v + 2w - 1,25 \end{aligned}}$$

6. Az alábbi összefüggéseket alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} F'_u + F'_x f'_u + F'_y g'_u &= 0 \\ F'_v + F'_x f'_v + F'_y g'_v &= 0 \\ G'_u + G'_x f'_u + G'_y g'_u &= 0 \\ G'_v + G'_x f'_v + G'_y g'_v &= 0 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - x_o &= f'_u(u-u_o) + f'_v(v-v_o) \\ y - y_o &= g'_u(u-u_o) + g'_v(v-v_o) \end{aligned}$$

Mátrixos formában:

$$\begin{bmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F'_v & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o \\ v_o \end{bmatrix}$$

A deriváltmátrixokat az adott (x_o,y_o,u_o,v_o) pontban kell venni.

M.V.5.

A lineáris közelítéseket

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + b_1$$

illetve

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b_2$$

alakban írjuk fel. (Használjunk számítógépet!)
Az M_1 és M_2 mátrixok ill. b_1 és b_2 vektorok az egyes feladatokban a következők (M_1, b_1^T, M_2, b_2^T felírási sorrendben):

a) $x_o = 0$ $\quad$ $y_o = 1$

$u_o = 2$ $\quad$ $v_o = -1$

$a = 1$ $\quad$ $b = -2$

$$\begin{bmatrix} 1{,}3333333 & 0 \\ 0{,}60568601 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2{,}6666667 & -1{,}211372 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}75 & 0 \\ 0{,}45426451 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $x_o = 1$ $\quad$ $y_o = -1$

$u_o = 2$ $\quad$ $v_o = -1$

$a = 1{,}8821206$ $\quad$ $b = 1$

$$\begin{bmatrix} -0{,}28229147 & -1{,}097604 \\ 1{,}5645829 & 0{,}19520807 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}46697892 & -3{,}9339578 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}1174405 & 0{,}66033728 \\ -0{,}94127975 & -0{,}16983136 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2{,}5428968 & -0{,}22855161 \end{bmatrix}$$

c) $x_o = -3$ $\qquad$ $y_o = 1$

$u_o = 1$ $\qquad$ $v_o = 2$

$a = 1{,}3252129$ $\qquad$ $b = -0{,}45578456$

$$\begin{bmatrix} 1{,}3774618 & -2{,}7334564 \\ -0{,}061846674 & 0{,}56726348 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}0894512 & -0{,}072680279 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}92640374 & 4{,}4640355 \\ 0{,}10100243 & 2{,}2495468 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}68482429 & 0{,}053460474 \end{bmatrix}$$

d) $x_o = 3$ $\qquad$ $y_o = -2$

$u_o = -1$ $\qquad$ $v_o = 1$

$a = -4{,}0024788$ $\qquad$ $b = 1{,}0122065$

$$\begin{bmatrix} -5{,}0683513 & 9{,}1299295 \\ 5{,}8127251 & -11{,}385817 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -11{,}198281 & 15{,}198542 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2{,}455136 & -1{,}9686965 \\ -1{,}2534042 & -1{,}092894 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2{,}428015 & 2{,}5744244 \end{bmatrix}$$

e) $x_o = 3$ $\qquad$ $y_o = -2$

$u_o = 2$ $\qquad$ $v_o = -1$

$a = 2{,}7475212$ $\qquad$ $b = -1{,}0122065$

$$\begin{bmatrix} -0{,}94772988 & -8{,}6008193 \\ 1{,}1254527 & 7{,}6862012 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3{,}7053596 & 3{,}4352958 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3{,}2087704 & 3{,}5905975 \\ -0{,}46984449 & -0{,}39565028 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}44511627 & -0{,}38176707 \end{bmatrix}$$

f) $x_o = -2$ $\qquad$ $y_o = -2$

$u_o = 1$ $\qquad$ $v_o = 3$

$a = -53{,}524076$ $\qquad$ $b = -3{,}2704075$

$$\begin{bmatrix} 0{,}66259556 & 0{,}55333851 \\ -0{,}67017193 & -0{,}55247247 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4{,}3226111 & 0{,}32758934 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -115{,}9164 & -116{,}09811 \\ 140{,}61138 & 139{,}02175 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -463{,}02901 & 562{,}26627 \end{bmatrix}$$

g) $x_o = -2$ $\qquad$ $y_o = 3$

$u_o = -1$ $\qquad$ $v_o = 3$

$a = -0{,}92840468$ $\qquad$ $b = 0{,}90516419$

$$\begin{bmatrix} 25{,}1492 & -1{,}6678201 \\ -5{,}9869597 & -0{,}020046272 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 28{,}152661 & -2{,}9268209 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}0019111127 & -0{,}15900175 \\ -0{,}57076722 & -2{,}3976008 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}51917254 & 9{,}0512678 \end{bmatrix}$$

7.

	x =	y =
a)	0,0013333336	1,0026057
b)	0,0026666671	0,99921137
c)	-0,0013333336	0,99739431
d)	-0,0026666671	1,0007886

8. Ha B reguláris mátrix, akkor egyszerű mátrixalgebrai átalakításokkal kapjuk:

$$y = -B^{-1}Ax.$$

Ugyanez az eredmény nyerhető természetben az implicit függvénytétel segítségével is. Vezessük be az $F(x,y) = Ax + By$ jelölést.

Akkor

$$F'_x(x,y) = A,$$

$$F'_y(x,y) = B.$$

Ha det $B \neq 0$, akkor bármely (x_o,y_o) pont környezetében létezik a keresett implicit függvény, és ez a környezet a teljes tér. Tekintettel arra, hogy az eredeti egyenlet lineáris alakzat egyenlete, így az implicit függvény lineáris közelítése önmaga. Tehát:

$$y-y_o = \left[F'_y(x_o,y_o)\right]^{-1} F'_x(x_o,y_o)(x-x_o) = -B^{-1}A(x-x_o).$$

Figyelembe véve, hogy $y_o = -B^{-1}Ax_o$, behelyettesítés után ismét az

$$y = -B^{-1}Ax$$

eredményhez jutunk.

9. Megmutatjuk, hogyan kell az (x,y) síkra, illetve a z tengelyre vetíteni. A többi koordináta síkra, illetve tengelyre való vetítés analóg módon történik.

Legyen $F(x,y,z) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y +$

$$+ 18z - 18 = 0$$

Az (x,y) síkon lévő vetület határpontjai nem mások, mint a felület azon pontjainak vetületei, ahol az érintősík a z tengellyel párhuzamos, vagyis ahol az $F'_z(x,y,z)$ érték (az 1x1-es méretű derivált mátrix Jacobi determinánsa) éppen zérus. (ld. az ábrát!)

Tehát a felület e pontjait az

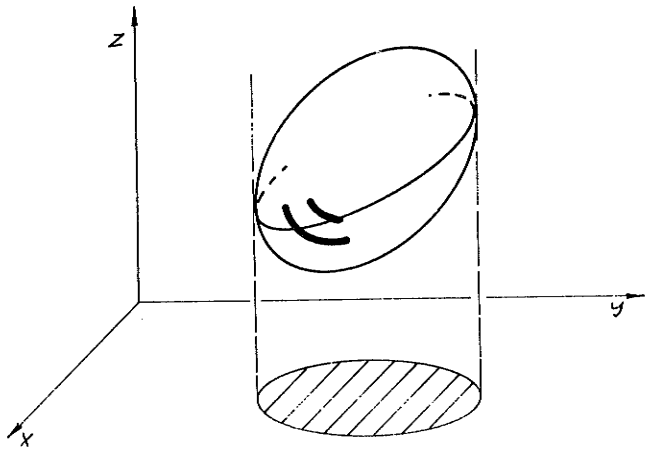
$$F'_z(x,y,z) = 10z - 4x + 18 = 0$$

egyenlettel jellemzhetjük. Más szóval: e pontokat a felületből a $10z - 4y + 18 = 0$ egyenletű sík metszi ki. A

$$z = \frac{4}{10}y - \frac{18}{10}$$

kifejezést a felület egyenletébe helyettesítve a

$$35x^2 + 26y^2 - 20xy - 84y - 30x + 9 = 0$$



61. ábra

egyenletet kapjuk. Ez egyben a vetület határoló görbéjét leíró egyenlet is. Ez a görbe - mint ahogyan arról egyszerűen meggyőződhetünk - ferde tengelyű ellipszis. Ugyanis az egyenletet mátrixosan átírva:

$$\begin{bmatrix} x, & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 & -10 \\ -10 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -30 & -84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 9 = 0.$$

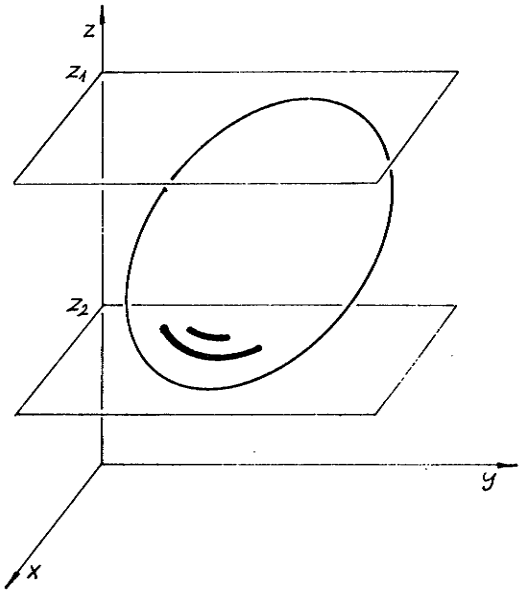
Az együttható mátrix sajátvektorainak rendszerében és eltolás után:

$$41{,}466\ \tilde{x}^2 + 19{,}534\ \tilde{y}^2 = k^2 > 0.$$

Megjegyezzük, hogy a többi koordináta síkra való vetület határa is ellipszis, ami eleve várható is, hiszen felületünk ellipszoid, amelyről pl. főtengelytranszformációval is meggyőződhetünk.
A z tengelyen lévő vetület két határpontja a felület azon két pontjának vetülete, ahol az érintősík az (x,y) síkkal párhuzamos, vagyis, ahol

$$F'_x(x,y,z) = F'_y(x,y,z) = 0$$

(ld. az ábrát!). Határozzuk meg e két pontot!



62. ábra

$$F'_x(x,y,z) = 14x - 4y - 6 = 0$$

$$F'_y(x,y,z) = 12y - 4x - 4z - 24 = 0$$

E két egyenletet x-re és y-ra megoldva, megállapíthatjuk, hogy a keresett két pont a felületen az

$$x = \frac{z}{9,5} + \frac{10,5}{9,5}$$

$$y = \frac{3,5}{9,5}\,z + \frac{22,5}{9,5}$$

egyenletrendszerű egyenesen fekszik. x és y e kifejezéseit a felület egyenletébe behelyettesítve megkapjuk a z tengelyen lévő vetület két határpontját.

$$7\left(\frac{z}{9,5} + \frac{10,5}{9,5}\right)^2 + 6\left(\frac{3,5}{9,5}\,z + \frac{22,5}{9,5}\right)^2 + 5z^2 - 4\left(\frac{z}{9,5} + \right.$$

$$\left. + \frac{10,5}{9,5}\right)\left(\frac{3,5}{9,5}\,z + \frac{22,5}{9,5}\right) - 4z\left(\frac{3,5}{9,5}\,z + \frac{22,5}{9,5}\right) -$$

$$-\frac{6}{9,5}z - \frac{6\cdot 10,5}{9,5} - \frac{24\cdot 3,5}{9,5} - \frac{24\cdot 22,5}{9,5} + 18z + 18 = 0,$$

amelyből z-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$836\ z^2 + 769,5\ z - 1239,75 = 0,$$

ezt megoldva, a keresett határpontok:

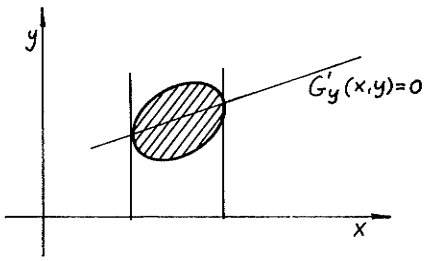
$$z_1 = 0,8416,$$

$$z_2 = -1,762.$$

Megjegyezzük, hogy a felület tengelyvetületeit a síkvetületek tengelyvetületeiként is megkaphatjuk. E módszerrel ugyancsak a Jacobi determinánsnak megfelelő parciális derivált eltűnését kell alapul venni. Pl.

$$G(x,y) = 35x^2 + 26y^2 - 20xy - 84y - 30x + 9 = 0$$

jelöléssel élve az x tengelyre való vetület határpontjai a $G'_y(x,y) = 0$ egyenlet segítségével határozhatók meg: ez az egyenlet annak az egyesnek az egyenlete, amely az (x,y)-síkbeli vetület ellipszisből kimetszi azokat a pontokat, amelyeknek az x tengelyre való vetületei éppen a felület x tengelyre történő vetületének határpontjai (ld. az ábrát!)



63. ábra

10. Az inverz függvénytétel értelmében létezik a keresett inverz függvény, ha

$$f'(x_o) \neq 0,$$

ahol $f(x) = xe^{-x}$; $x_o = 1$ ill. $x_o = 2$.

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x},$$

$$f'(1) = 0,$$

$$f'(2) = e^{-2} - 2e^{-2} = -e^{-2} \neq 0.$$

az $x_o = 2$ pont környezetében tehát létezik az inverz. Az eredeti függvény $x_o = 2$ pontbeli lineáris közelítése:

$$\boxed{y - 2e^{-2} \approx -e^{-2}\ (x - 2)},$$

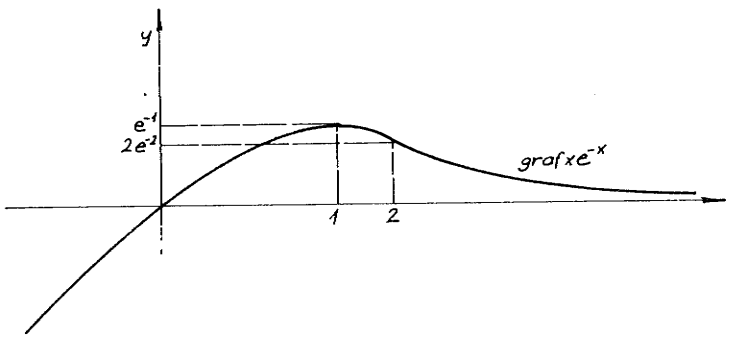
amelyből az inverz függvény lineáris közelítése:

$$y - 2 \approx -e^{2}\ (x - 2e^{-2}),$$

vagyis

$$\boxed{y \approx -e^{2}x + 4\ .}$$

Megjegyezzük, hogy az inverz függvény elemi függvények segítségével zárt alkaban nem fejezhető ki, így a lineáris közelítésnek itt különös jelentősége van. Megjegyezzük továbbá, hogy az $f'(x_o)$ derivált eltűnéséből még nem következik, hogy az adott pont környezetében nem létezik inverz. A mi konkrét esetünkben azonban (ld. az ábrán az xe^{-x} függvény grafikonját!) valóban nem létezik inverz az $x_o = 1$ pont környezetében, mert itt lokális maximum van.



64. ábra

11. A feladat megoldásához a lineárisan közelített inverz függvényrendszerre van szükségünk. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad p_o = \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \end{bmatrix}; \quad q = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}; \quad q_o = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix};$$

$$f_1(q) = e^{-u} v \cos v;$$

$$f_2(q) = e^{u} \sin v.$$

Ekkor

$$p = f(q) \ ;$$

$$f'(q) = \begin{bmatrix} -e^{-u} v \cos v & e^{-u} \cos v - e^{-u} v \sin v \\ e^{u} \sin v & e^{u} \cos v \end{bmatrix};$$

$$f'(q_o) = \begin{bmatrix} \pi & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \ ; \qquad \det f'(q_o) = -\pi \neq 0;$$

$$p - p_o \approx f'(q_o) \ (q - q_o) \ ;$$

$$q - q_o \approx [f'(q_o)]^{-1} \ (p - p_o) \ ;$$

$$\left[f'(q_o)\right]^{-1} = \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\pi \end{bmatrix}.$$

Legyen

$$p_1 = \begin{bmatrix} -\pi + 0{,}01 \\ -0{,}02 \end{bmatrix}, \text{ akkor}$$

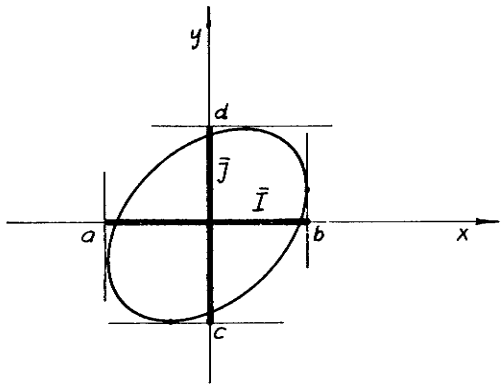
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = q_1 \approx \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,01 \\ -0,02 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,01/\pi \\ \pi+0,02 \end{bmatrix},$$

tehát: $\boxed{u_1 \approx -0,003 \ ; \quad v_1 \approx 3,16.}$

12. A feladatot természetesen elemi algebrai eszközökkel is megoldhatjuk, ha egyenletünket y-ra ill. x-re másodfokú egyenletként kezeljük. Az implicit függvénytételben felhasznált gondolatok azonban olyan megoldási módszert is lehetővé tesznek, amely - szemben az elemi algebrai módszerrel - igen általánosan alkalmazható.

Könnyen beláthatjuk, hogy a keresett g(x) ill. f(y) függvény maximálisan annak a nyílt I ill. J intervallumnak a lezártján ($\bar{I}$ ill. $\bar{J}$) értelmezhető, amely intervallumban a Jacobi determinánsnak megfelelő $F'_y(x,y)$ ill. $F'_x(x,y)$ derivált még nem tűnik el (ld. az ábrát!), ahol

$$F(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy - 1.$$



65. ábra

Határozzuk meg ezeket az intervallumokat!

$$F'_y = 4y - x = 0 \ ; \qquad y = \frac{1}{4}x$$

$$F'_x = 2x - y = 0 \ ; \qquad x = \frac{1}{2}y$$

Az y-ra ill. x-re kapott kifejezéseket az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve:

$$x^2 + 2\left(\frac{1}{4}x\right)^2 - x\left(\frac{1}{4}x\right) - 1 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{2}y\right)^2 + x\ 2y^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)y - 1 = 0,$$

amelyekből

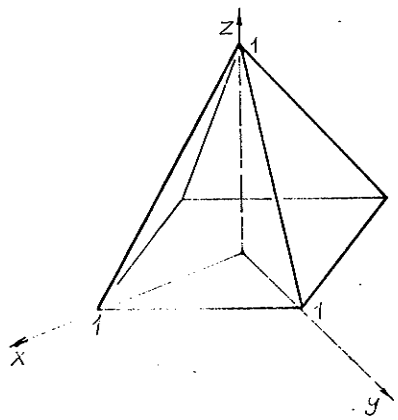
a) $\frac{7}{8}x^2 = 1$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{8}{7}}$, $\boxed{I = \left(-\sqrt{\frac{8}{7}};\ \sqrt{\frac{8}{7}}\right)}$,

b) $\frac{7}{4}y^2 = 1$; $y_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{7}}$ $\boxed{J = \left(-\frac{2}{\sqrt{7}};\ \frac{2}{\sqrt{7}}\right)}$.

V.6

1. Az integrálok elemi úton is meghatározhatók

a) (l. az ábrát!).



66. ábra

$V = \frac{2}{3}$

b) $V = (2a)^n$

(n-dimenziós hiperkocka térfogata)

c) Az integrál 4 egyszeres integrálással egyszerűen meghatározható:

$$\int_0^1 \int_0^{x_4} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} x_1 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int_0^1 \int_0^{x_4} \int_0^{x_3} \frac{x_2^2}{2} dx_2 dx_3 dx_4 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x_4} \frac{x_3^3}{6} dx_3 dx_4 = \int_0^1 \frac{x_4^4}{24} dx_4 = \boxed{\frac{1}{120}} .$$

2. Meg kell határoznunk a D tartomány vetületeit az x ill. y tengelyre. Az V.5. 9. feladat módszereit is alkalmazhatjuk, de ebben az egyszerű esetben más út is járható. A

$$2x^2 + 6y^2 - xy - 3 = 0$$

egyenletet először y-ra, majd x-re fejezzük ki:

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 8(6y^2 - 3)}}{4} ;$$

$$y_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 24(2x^2 - 3)}}{12} ,$$

amelyekből az

$$-\sqrt{\frac{24}{27}} \le y \le \sqrt{\frac{24}{47}} ,$$

illetve

$$-\sqrt{\frac{72}{47}} \le x \le \sqrt{\frac{72}{47}}$$

feltételek adódnak.

M.V.6.

Ezekkel:

$$\boxed{\int_{-\sqrt{\frac{24}{47}}}^{\sqrt{\frac{24}{47}}} \int_{\frac{y-\sqrt{24-47y^2}}{4}}^{\frac{y+\sqrt{24-47y^2}}{4}} f(x,y)\,dx\,dy} \;;$$

$$\boxed{\int_{-\sqrt{\frac{72}{47}}}^{\sqrt{\frac{72}{47}}} \int_{\frac{x-\sqrt{72-47x^2}}{12}}^{\frac{x+\sqrt{72-47x^2}}{12}} f(x,y)\,dy\,dx} \;.$$

1. Egymás után végezzük el a vektoriális szorzásokat a szokásos módon. Ekkor megkapjuk a $\underline{v} = \underline{b} \times (\underline{a} \times \underline{r})$ képvektor koordinátáit:

$$v_1 = -(a_2b_2 + a_3b_3)x + a_2b_2y + a_1b_3z \ ,$$

$$v_2 = a_2b_1x - (a_3b_3 + a_1b_1)y + a_2b_3z \ ,$$

$$v_3 = a_3b_1x + a_3b_2y - (a_1b_1 + a_2b_2)z \ ,$$

amelyből a keresett mátrix:

$$\boxed{\begin{bmatrix} -a_2b_2 - a_3b_3 & a_1b_1 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & -a_3b_3 - a_1b_1 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & -a_2b_1 - a_2b_2 \end{bmatrix}} \ ,$$

ahol

$$\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k} \ ,$$

$$\underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k} \ .$$

2. Az ilyen jellegű feladatokat általánosan a következőképpen oldhatjuk meg:

$$\underline{V} = \underline{X}\ \underline{R} \ ,$$

amelyből

$$\underline{X} = \underline{V}\ \underline{R}^{-1} ,$$

ahol $\underline{V}$ a képvektorokból, R a tárgyvektorokból képzett, $\underline{X}$ pedig a keresett koordináta mátrix.
Vegyük azonban figyelembe, hogy a sok zérus miatt $\underline{R}$ inverzét az

$$\underline{R}^{-1} = \text{adj}\ \underline{R}/\det \underline{R}$$

összefüggés helyett többnyire egyszerűbben is meghatározhatjuk (l. az III.2.1 feladatot!).

a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 \\ 8/3 & -3/2 & 2/3 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} -1/3 & 5/6 & 1/3 \\ 3 & -1/2 & 0 \\ -2/3 & 5/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

3. Ha $\underline{s}$ sajátvektor a tárgyvektor, akkor $\lambda\,\underline{s}$ a képvektor. Így az előző feladat módszerét alkalmazhatjuk

a)
$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

d)
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Legyen $\underline{\underline{a}}$ az elforgatás tengelyének vektora, és legyen továbbá

$$|\underline{\underline{a}}| = |\underline{\underline{b}}| = |\underline{\underline{c}}| = 1$$

$$\underline{\underline{a}} \perp \underline{\underline{b}} \perp \underline{\underline{c}} \quad .$$

Az $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$ bázisvektorok által meghatározott koordináta-rendszerben a forgatás $\underline{\underline{T}}$ tenzorának koordináta mátrixa (a forgatás szöge legyen α);

$$\underline{\tilde{T}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Akkor az eredeti koordináta-rendszerben a $\underline{T}$ mátrix:

$$\underline{T} = \underline{M}\,\underline{\tilde{T}}\,\underline{M}^T$$

ahol

$$\underline{M} = [\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}]\ ,$$

vagyis $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ eredeti rendszerbeli koordinátáiból képzett mátrix.

Ha a sík normálvektora $\underline{n}$ ($|\underline{n}| = 1$, $\underline{n}$ a koordináta vektora), akkor a vetítés tenzorának $\underline{P}$ mátrixa:

$$\underline{P} = \underline{E} - \underline{n} \circ \underline{n} ,$$

ahol $\underline{E}$ az egymásmátrix. A keresett mátrix $\underline{P}\ \underline{T}$, tehát:

$$\boxed{(\underline{E} - \underline{n} \circ \underline{n})(\underline{M}\ \underline{\tilde{T}}\ \underline{M}^T)} .$$

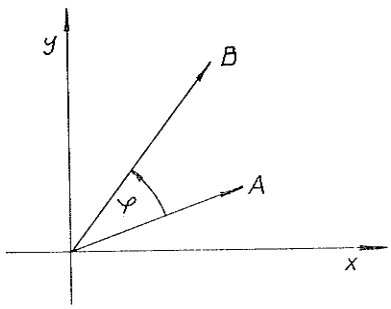
VI. 2.

1. a) $\underline{v}$ az $\mathbb{R}^3/\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 0\}$ nem egyszeresen összefüggő tartományon potenciálos.
Ez azt jelenti, hogy bármely olyan zárt görbe mentén vett integrál, amely zárt görbe pozitív irányítású és egyszer körülveszi a z tengelyt (az irányítást a z tengelyhez képest, a jobbcsavar szabálya szerint kell megállapítani), állandó. Ha pl. az

$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$0 \le t < 2\pi$$
$$z = 0$$

görbe mentén integrálunk, akkor ez az állandó -2π. Így tehát e vektormező integrálja a végpontokon kívül a görbétől is függ. Pontosabban attól, hogy a γ út hányszor és milyen irányítással veszi körül a z tengelyt.

H az A és B pontok vektorainak (x,y) síkra való vetületei között γ vetülete mentén mérve φ szög van,

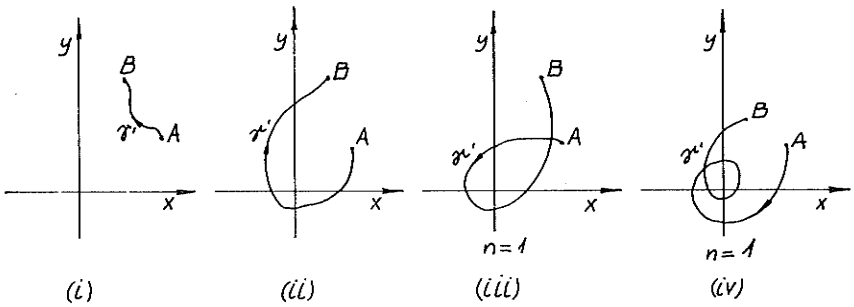


67. ábra

akkor

$$\int_\gamma \underline{v}\, d\underline{r} = \begin{cases} -\varphi & \text{(i) eset} \\ -\varphi + 2\pi & \text{(ii) eset} \\ -\varphi - n\,2\pi & \text{(iii) eset} \\ -\varphi + 2\pi + n\,2\pi & \text{(iv) eset} \end{cases}$$

ahol a különböző esetek az ábrán láthatók (γ' a γ görbe vetülete az (x,y) síkra, n a z tengely körüli forgások száma)



68. ábra

b) Érdekes módon, $\underline{v}$ itt is csupán az a) feladatbeli nem egyszeresen összefüggő tartományban potenciális, ennek ellenére az integrál értéke csak a végpontoktól függ:

$$u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\int_\gamma \underline{v}\, d\underline{r} = U(B) - U(A) = \ln\sqrt{\frac{x_2^2 + y_2^2}{x_1^2 + y_1^2}}$$

Megjegyezzük, hogy az a) és b) feladatban előforduló érdekes különbségnek fontos fizikai következményei is vannak. (l.: a végtelen hosszú egyenes vezető mágneses tere és végtelen hosszú vonalszerű töltés elektrosztatikus tere).

1. A felületi integrál:

$$\underline{v}\ \underline{r}'_\vartheta\ \underline{r}'_\varphi = \begin{vmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi & R\cos\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta \\ -R\sin\vartheta\cos\varphi & -R\sin\vartheta\sin\varphi & R\cos\vartheta \\ -R\cos\vartheta\sin\varphi & R\cos\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -R^3\cos\vartheta$$

$$-R^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = 0$$

A térfogati integrál elemi úton is kiszámítható, hiszen div $\underline{v}$ = 3. Ezzel

$$\int_V \operatorname{div}\underline{v}\, dV = 3\,\frac{4}{3}\,R^3\pi = 4R^3\pi > 0!$$

Mi ennek a látszólagos ellentmondásnak az oka? Az, hogy a feladatban megadott paraméterezés az egész gömbre vonatkozóan a felület irányítása szempontjából hibás. Ugyanis az $\underline{r}'_\vartheta \times \underline{r}'_\varphi$ vektor hol a gömb belseje, hol a külseje felé mutat.
A határok helyes megválasztása:

$$-\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

Ezzel az eredmény természetesen $4\,R^3\,\pi$ lesz.

2. Érdemes a felületet lezárni és a Gauss-Osztrogradszkij tételt alkalmazni,

$$I + \iint_F \underline{v}\, d\underline{F} = \iiint_V \operatorname{div}\underline{v}\, dV,$$

ahol I a keresett integrál, F a z = 0, $x^2 + y^2 \le 2$ körlap $-\underline{k}$ irányítással, V pedig a lezárt tartomány belseje. Tekintettel arra, hogy $\underline{v} \perp d\underline{F}$, és div $\underline{v}$ = -3, végül

figyelembe véve, hogy a tartomány $\sqrt{2}$ sugarú félgömb, így:

$$\boxed{I = -4\sqrt{2}\,\pi .}$$

3. $\boxed{4\pi}$

Beláthatjuk, hogy div $\underline{v} = 0$; $\underline{r} \neq 0$.
Ez azt jelenti, hogy az origót is magába foglaló, zárt felületen vett integrál kifelé mutató normálissal megegyezik pl. az origó középpontú, egységsugarú gömbön vett integrállal, ugyancsak kifelé mutató normálissal. Az utóbbi integrál pedig éppen a gömb felülete (4π), amit elemi megfontolásokkal is beláthatunk.

4. Tekintsük a 3. feladat megoldását is. Most is zárt ellipszoidról van szó, de most az origó kívül helyezkedik el. Így az integrál értéke $\boxed{\text{zérus}}$.

5. div $\underline{v} = 4$, így az integrál négyszer az adott gömb térfogata:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 10z + 34 =$$

$$= (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+5)^2 - 4.$$

Tehát a gömb sugara 2. Ezzel az integrál értéke

$$4\,\frac{4}{3}\,2^3\pi = \boxed{\frac{128\pi}{3}}\,.$$

1. Vegyük figyelembe, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k \; ; \; a \in \mathbb{C} \; ; \; q \in \mathbb{C}$$

alakú mértani sorokról van szó. Ezek pontosan akkor konvergensek, ha $a = 0$ vagy $a \neq 0$ és $|q| < 1$. Ekkor

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q} \, .$$

a) divergens

b)

$$a = i \left(\frac{2i}{3}\right)^3 \; ; \quad q = \frac{2i}{3}$$

$$\boxed{s = \frac{24}{117} + i\,\frac{16}{117}}$$

c)

$$a = \left(\frac{i+1}{3}\right)^3 \; ; \quad q = \frac{i+1}{3}$$

$$\boxed{s = \frac{2}{45}\,(-3 + i)}$$

d)

$$a = \left(\frac{i-1}{2}\right)^4 \; ; \quad q = \frac{i-1}{2}$$

$$\boxed{s = -\frac{2}{5}\,(3 + i)}$$

e) divergens

f)

$$a = (i+2)\left(\frac{i+3}{4-i}\right)^4 \; ; \quad q = \frac{i+3}{4-i}$$

$$a = -\,0{,}71 + i\;0{,}31$$

$$\boxed{s = -1{,}29 - i\;0{,}62}$$

M.VII.1.,M.VII.2.,M.VII.3.

1. (l. III.1.5. feladatot is!)

a)

$$\sin^2 z\cos z = \left(\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cos z - \frac{1}{4}\cos 3z$$

b) $\frac{1}{4}\sin z + \frac{1}{4}\sin 3z$

c) $\frac{3}{4}\sin\omega z - \frac{1}{4}\sin 3\omega z$

d) $\frac{1}{4}\cos\omega z + \frac{1}{4}\cos 3\omega z$

e) $1 - \frac{1}{2}\sin 4z + \frac{1}{2}\cos 6z$

VII. 2.

1. a) $((-1 + 3i)t + 4 + 2i)\exp((1 + 2i)t)$

b) $(-t^3 + 3it^2 + (1+2i)t + 2 - i)\exp(it)$

c) $((2 + 2i)t^3 + (1 + 5i)t^2 + 2t - 2)\exp((1 - i)t)$

2. Pl. az a) feladatban:

$$\mathrm{Re}\,\frac{df(t)}{dt} = e^t\left[(-3t-2)\sin 2t + (-t+4)\cos 2t\right] = \frac{du(t)}{dt}, \text{ ahol}$$

$$\mathrm{Re}\,f(t) = e^t\left[(t+1)\cos 2t - (t-1)\sin 2t\right] = u(t).$$

VII. 3.

1. Az a), b) feladatoknál a Newton-Leibniz formulát alkalmazzuk:

a)

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \ln z(3) - \ln z(1) =$$

$$= \ln\frac{3 + 27i}{1 + i} = \ln(30 + 24i) \cong \ln(38e^{0,67i}) =$$

$$\cong \boxed{3{,}64 + 0{,}67\,i}$$

b) $\int_\gamma \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z(\infty)} - \left(-\frac{1}{z(1)}\right) = \frac{1}{1-i} = \boxed{\frac{1+i}{2}}$

c) $\int_\gamma (z^2 + 2z)\,dz = \boxed{0}$

Analitikus függvény zárt görbe menti integrálja zérus.

d) $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \boxed{4\pi i}$

Az origót pozitív irányban kétszer járja körül γ.

e) $\bar{z}$ nem analitikus, ezért az integrált a

$$\int_\gamma \bar{z}(t)\ \dot{z}(t)\,dt$$

képlettel kell kiszámítanunk.

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t)(-\sin t - i \cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \cos t \sin t)\,dt +$$

$$+ i \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt = \boxed{-2\pi i}$$

f) A Newton-Leibniz formulát alkalmazhatjuk:

$$\int e^z \sin z\,dz = Ae^z \sin z + Be^z \cos z + c$$

Deriválva:

$$e^z \sin z = Ae^z \sin z + Ae^z \cos z + Be^z \cos z - Be^z \sin z$$

Ebből

$$\left.\begin{aligned} A - B &= 1 \\ A + B &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 1/2 \\ B &= -1/2 \end{aligned}$$

$$\int_\gamma e^z \sin z \, dz = \frac{e^z}{2} (\sin z - \cos z) \Big|_{1+i}^{3i} =$$

$$= \frac{\cos 3 + i \sin 3}{2} \left(\frac{e^{-3} - e^3}{2i} - \frac{e^{-3} + e^3}{2}\right) -$$

$$- \frac{e}{2} (\cos 1 + i \sin 1) \cdot$$

$$\cdot (\sin 1 \cos i + \cos 1 \sin i - \cos 1 \cos i + \sin 1 \sin i) =$$

$$= \frac{\cos 3 + i \sin 3}{2} (-\mathrm{ch}\, 3 + i \,\mathrm{sh}\, 3) -$$

$$- \frac{e}{2} (\cos 1 + i \sin 1)(\sin 1 \,\mathrm{ch}\, 1 + i \cos 1 \,\mathrm{sh}\, 1 -$$

$$- \cos 1 \,\mathrm{ch}\, 1 + i \sin 1 \,\mathrm{sh}\, 1) =$$

$$= \boxed{\begin{aligned} &- \frac{\cos 3 \,\mathrm{ch}\, 3}{2} - \frac{\sin 3 \,\mathrm{sh}\, 3}{2} - \frac{e}{2} \cos 1 \,\mathrm{ch}\, 1 + \\ &+ \frac{e}{2} \cos^2 1 \,\mathrm{ch}\, 1 + \frac{e}{2} \cos 1 \sin 1 \,\mathrm{sh}\, 1 + \\ &+ \frac{e}{2} \sin^2 1 \,\mathrm{sh}\, 1 + i\Big[- \frac{\sin 3 \,\mathrm{ch}\, 3}{2} + \frac{\cos 3 \,\mathrm{sh}\, 3}{2} - \\ &- \frac{e}{2} \cos^2 1 \,\mathrm{sh}\, 1 - \frac{e}{2} \cos 1 \sin 1 \,\mathrm{sh}\, 1 - \\ &- \frac{e}{2} \sin^2 1 \,\mathrm{ch}\, 1 + \frac{e}{2} \sin 1 \cos 1 \,\mathrm{ch}\, 1\Big]. \end{aligned}}$$

g) A Newton-Leibniz formulát alkalmazhatjuk.

$$\int e^{-2z}\cos z\,dz = A\,e^{-2z}\cos z + Be^{-2z}\sin z + c$$

$$e^{-2z}\cos z = -2Ae^{-2z}\cos z - Ae^{-2z}\sin z - 2Be^{-2z}\sin z +$$

$$+ Be^{-2z}\cos z$$

$$\left.\begin{aligned} B - 2A &= 1 \\ -A - 2B &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} A &= -0,4 \\ B &= 0,2 \end{aligned}$$

$$\int_\gamma e^{-2z}\cos z\,dz = -0,4e^{-2z}\cos z + 0,2e^{-2z}\sin z \Big|_{-1-i}^{-\infty} =$$

$$= 0,4e^{2+2i}\cos(-1-i) - 0,2e^{2+2i}\sin(-1-i) =$$

$$= \boxed{e^2e^{2i}(0,4\cos(1+i) - 0,2\sin(1+i))}$$

1. Az egyenleteket rendszerré kell átírnunk

a) $x_1 = y$

$x_2 = y'$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ; \quad \dot{x} = A x ; \quad x_o = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$x_{n+1}(t) = x_o + \int_0^t A x_n(\tau) d\tau$$

$$x_1(t) = x_o + \int_0^t \begin{bmatrix} x_{20} \\ -x_{10} \end{bmatrix} d\tau = x_o + \begin{bmatrix} x_{20} \\ -x_{10} \end{bmatrix} t =$$

$$= x_o + A x_o t$$

$$x_2(t) = x_o + \int_0^t (A x_o + A^2 x_o \tau) d\tau =$$

$$= x_o + A x_o t + A^2 x_o \frac{t^2}{2}$$

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} A^k x_o \frac{t^k}{k!}$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k x_o \frac{t^k}{k!} = e^{At} x_o = x(t).$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$A^2 = -E$$
$$A^3 = -A$$
$$A^4 = E, \text{ stb.}$$

Ezzel:

$$x(t) = x_o(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \ldots) +$$

$$+ Ax_o(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots) =$$

$$= x_o \cos t + Ax_o \sin t =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{o1}\cos t + x_{o2}\sin t \\ x_{o2}\cos t - x_{o1}\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \end{bmatrix} .$$

Ebből egyrészt

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

másrészt

$$y(t) = y(0)\cos t + y'(0) \sin t ,$$

$$y'(t) = y'(0)\cos t - y(0)\sin t .$$

b) $x_1 = y$; $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$; $\dot{x} = Ax$;

$x_2 = y'$

$x_3 = y''$

$x_4 = y'''$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{n+1}(t) = x_o + \int_0^t Ax_n(\tau)d\tau ,$$

amelyből

$$x(t) = \lim_n x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k x_o \frac{t^k}{k!} = e^{At} x_o ,$$

$$x_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

A^2, A^3, stb. hatványokat kiszámítva, a megoldás $y(t)$-re az a) feladathoz hasonlóan nyerhető.

c) $x_1 = y$; $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $\dot{x} = f(x)$; $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$;

$x_2 = y'$

$f_1 = x_2$; $f_2 = - x_1^2$

$$x_{n+1}(t) = x_o + \int_0^t f(x_n(\tau))d\tau =$$

$$= x_o + \int_0^t \begin{bmatrix} x_{2,n}(\tau) \\ -x_{1,n}^2(\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 2 \\ -4t \end{bmatrix}$$

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -4\tau \\ -4 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 2-2t^2 \\ -4t \end{bmatrix}$$

$$x_3(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -4\tau \\ -4-4\tau^4+8\tau^2 \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2t^2 \\ -4t+\frac{8}{3}t^3-\frac{4}{5}t^5 \end{bmatrix} \qquad \text{stb.}$$

VIII. 2.

1. a) $\cos(\omega x+\varphi) = \mathrm{Re}\,\exp((\omega x+\varphi)i) =$

$$= \mathrm{Re}\, e^{\varphi i}\, e^{\omega x i}$$

$$y = \mathrm{Re}\, 2\,\frac{e^{\varphi i}}{3+\omega i}\, e^{\omega x i} = \mathrm{Re}\, e^{\varphi i}\,\frac{e^{i\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{3}}}{\sqrt{9+\omega^2}}\, e^{\omega x i}$$

Az amplitúdó viszony: $\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{9+\omega^2}}}$,

a fáziskülönbség: $\boxed{\varphi_o = \mathrm{arc\ tg}\,\frac{\omega}{3}}$.

Ezzel

$$y = \mathrm{Re}\, 2Ae^{(\omega x+\varphi+\varphi_o)i} = 2A\cos(\omega x+\varphi+\varphi_o)$$

b)

$$y = \mathrm{Im}\, 3\,\frac{e^{(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{3})i}}{-(\frac{\pi}{2})^2-1+2\pi i} = 3A\,\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{3}+\varphi_o)$$

$$\boxed{A = \left[(1+\frac{\pi^2}{4})^2+4\pi^2\right]^{-1/2}}$$

$$\boxed{\varphi_o = \mathrm{arc\ tg}\,\frac{2\pi}{1+\frac{\pi^2}{4}}-\pi}$$

c) $y = \mathrm{Im}\,\frac{1}{7}\,\frac{e^{(3x-\frac{\pi}{2})i}}{-7-6i} = \frac{A}{7}\sin(3x - \frac{\pi}{2} + \varphi_o)$

$$\boxed{A = 1/\sqrt{85}}$$

$$\boxed{\varphi_o = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{6}{7} - \pi}$$

d)

$y = \mathrm{Im}\,\frac{9}{4}\,\frac{e^{(2x+1)i}}{7-6i} = \frac{9}{4}\,A\,\sin(2x + 1 + \varphi_o)$

$\boxed{A = 1/\sqrt{85}}$; $\boxed{\varphi_o = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{6}{7}}$

e) $y = \mathrm{Re}\,4\,\frac{e^{5xi}}{1-5^6+250i} = 4\,A\cos(5x + \varphi_o)$

$$\boxed{A = 1/\sqrt{(1-5^6)^2 + 250^2}}$$

$$\boxed{\varphi_o = -\mathrm{arc\,tg}\,\frac{250}{5^6-1} + \pi}$$

f) $y = \mathrm{Im}\,\frac{e^{(6x-2)i}}{1335+222i} = A\sin(6x - 2 + \varphi_o)$

$$\boxed{A = 1/\sqrt{1335^2 + 222^2}}$$

$$\boxed{\varphi_o = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{222}{1335}}$$

g) $y = \mathrm{Re}\,7\,\frac{e^{(2x+2)i}}{13+32i} = 7\,A\cos(2x + 2 + \varphi_o)$

$$\boxed{A = 1/\sqrt{1193}}$$

$$\boxed{\varphi_o = \text{arc tg}\,\frac{32}{13}}$$

2. a)

$$y = \text{Im}\,\frac{e^{\omega t i}}{1-\omega^2+i\omega} = A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$A(\omega) = 1/\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \text{arc tg}\,\dfrac{\omega}{1-\omega^2}, & \text{ha } 1>\omega^2 \\ \pi/2, & \text{ha } 1=\omega^2 \\ \pi - \text{arc tg}\,\dfrac{\omega}{\omega^2-1}, & \text{ha } 1<\omega^2 \end{cases}$$

ω =	$A(\omega)$ =	$\varphi(\omega)$ =
0,1	1,005	0,1
0,2	1,020	0,21
0,4	1,075	0,44
0,6	1,140	0,75
1	1	1,67
1,5	0,512	2,27
2	0,277	2,55
3	0,117	2,78
10	0,010	3,04

b) $\sin^2 x\cos x + \sin^3 x = \frac{1}{4}\cos x + \frac{3}{4}\sin x -$

$- \frac{1}{4}\cos 3x - \frac{1}{4}\sin 3x$

$$A(\omega) = 1/\sqrt{(3-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{4\omega}{3-\omega^2} & , \text{ ha } \omega^2 < 3 \\ \pi/2 & , \text{ ha } \omega^2 = 3 \\ \pi - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{4\omega}{3-\omega^2} & , \text{ ha } \omega^2 > 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{A(1)}{4}\cos(x+\varphi(1)) + \frac{3}{4}A(1)\sin(x+\varphi(1)) -$$

$$- \frac{A(3)}{4}\cos(3x+\varphi(3)) - \frac{A(3)}{4}\sin(3x+\varphi(3))$$

c) $\cos^3 4x = \frac{3}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 12x$

$$A(\omega) = 1/\sqrt{1+\omega^6}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arc\,tg}\omega^3 - \pi$$

$$y = \frac{3}{4}A(4)\cos(4x+\varphi(4)) + \frac{1}{4}A(12)\cos(12x+\varphi(12))$$

d) $A(\omega) = 1/\sqrt{(1-\omega^6)^2 + \omega^{10}}$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\omega^5}{1-\omega^6} & , \text{ ha } \omega^6 < 1 \\ -\pi/2 & , \text{ ha } \omega^6 = 1 \\ \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\omega^5}{\omega^6-1} - \pi & , \text{ ha } \omega^6 > 1 \end{cases}$$

$\omega =$	$A(\omega) \approx$	$\varphi(\omega) \approx$
0,1	1	0
0,3	1	0
1	1	$-\pi/2$
3	3^{-6}	-2,82
10	0	-3,04

$$y = A(\omega)\left[\cos(\omega t + \varphi(\omega)) - 2\sin(\omega t + \varphi(\omega))\right]$$

e) nincs periodikus megoldás a rezonancia miatt!

f) $\cos^2 \pi x - \cos^2 x \sin x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi x -$

$- \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$

$$A(\omega) = 1/\sqrt{(2 - \omega^2 - 3\omega^4 - \omega^6)}$$

$$\varphi(\omega) = 0$$

$$y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}A(2\pi)\cos 2\pi x - \frac{1}{4}A(1)\sin x - \frac{1}{4}A(3)\sin 3x +$$

$$+ c_1 \cos\omega_o x + c_2 \sin\omega_o x$$

$$\omega_o \approx 0{,}7862$$

$$A(2\pi) \approx A(3) \approx 0$$

$$A(1) = -1/3$$

g) $A(\omega) = 1/\sqrt{(3 + \omega^2 + \omega^4)^2 + \omega^6}$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega^3}{3 + \omega^2 + \omega^4} \quad \text{ha } 3 + \omega^2 + \omega^4 > 0$$

$$y = -\frac{2}{3} + A(\tfrac{\pi}{2})\sin(\tfrac{\pi}{2}x + \varphi(\tfrac{\pi}{2})) +$$

$$+ A(1)\cos(x + \varphi(1))$$

h) $\cos^3 x \cos 3x = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{3}{8}\cos 4x +$

$$+ \frac{1}{8}\cos 6x$$

$$A(\omega) = 1/\sqrt{100 + \omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{10}$$

$$y = -\frac{1}{80} + \frac{3}{8} A(2)\cos(2x + \varphi(2)) +$$

$$+ \frac{3}{8} A(4)\cos(4x + \varphi(4)) + \frac{1}{8} A(6)\cos(6x + \varphi(6))$$

i) $A(\omega) = 1/\sqrt{1 - \omega^2}$

$\varphi(\omega) = 0$

$y = A(\pi)\cos\pi x + c_1\cos x + c_2\sin x$

3. a) nincs, mert cos x miatt rezonancia van

b) van, mert a gerjesztés pariodikus és nincs rezonancia:

$D(\omega) = -\omega^2 + \omega^4 - \omega^6 + i(\omega - 2\omega^3 + \omega^5)$

$D(1) = 1 \neq 0$

$D(7) \neq 0$

c) van, mert a gerjesztés periodikus és nincs rezonancia:

$D(\omega) = -1 - \omega^2 - i\,\omega^3$

$D(2) \neq 0$

d) ha $a \neq \omega^2$, akkor nincs rezonancia és van periodikus megoldás

e) van, mert a gerjesztés periodikus és nincs rezonancia:

$D(\omega) = 1 + 3\omega^2 + i\,\omega^5$

$D(5) \neq 0$

f) van, mert a gerjesztés periodikus és nincs rezonancia:

$D(\omega) = -1 - \omega^2 - 3\omega^4 - \omega^6 \neq 0$

g) nincs, mert a gerjesztés nem periodikus (csak kvázi periodikus).

h) van, mert a gerjesztés periodikus és nincs rezonancia:

$D(\omega) = 1 - \omega^2 + i\,\omega \neq 0$

i) van, mert a gerjesztés periodikus és nincs rezonancia:

$$D(\omega) = 1 + i\omega \neq 0$$

j) nincs, mert a gerjesztés kvázi periodikus.

k) nincs, mert rezonancia van:

$$D(\omega) = -1 + \omega^4$$

$$D(1) = 0!$$

l) van, mert a gerjesztés periodikus és nincs rezonancia:

$$D(\omega) = 1 + i\omega \neq 0$$

$$D(\omega) = q - \omega^2 + ip\omega$$

4. Mivel $D(\omega) \neq 0$ semmilyen ω-ra, ezért rezonancia nem lehet.

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0; \quad \mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0.$$

A homogén megoldásrész lecsillapodik, tehát van tranziens megoldás:

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \text{ ill. } c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}.$$

Az állandósult (periodikus) megoldásrész

$$\sum_{k=0}^{\infty} A(k)\left(a_k \cos(kx + \varphi(k)) + b_k \sin(kx + \varphi(k))\right),$$

ahol

$$A(k) = 1/\sqrt{(q - k^2)^2 + p^2 k^2}$$

$$\varphi(k) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{pk}{q-k^2} & , \text{ ha } q > k^2 \\ \pi/2 & , \text{ ha } q = k^2 \\ \pi - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{pk}{k^2-q} & , \text{ ha } q < k^2 \end{cases}$$

5. Nézzük a 3. és 4. feladatok megoldásait is! A válasz:
   (1) $p = 0$, $q > 0$ és nincs rezonancia, vagyis $f(x)$ Fourier-sorában nincs $\sqrt{q}$ frekvenciájú összetevő. Ekkor azonban nem beszélhetünk állandósult és tranziens összetevőről.
   (2) $p > 0$; $q > 0$. Ez a 4. feladat esete. Ekkor tehát beszélhetünk állandósult és tranziens összetevőről.
   (3) $p \geq 0$; $q = 0$ és nincs rezonancia, vagyis $f(x)$ Fourier-sorában nincs konstans ($\omega = 0$ frekvenciájú) komponens. Ekkor a periodikus gerjesztés periodikus megoldást hoz létre. De a megoldásnak nem létezik állandósult és tranziens összetevőre való felbontása, mert van zérus sajátérték.

6. a) $x \sin x - \cos x = x \dfrac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} - \dfrac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} =$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}x\right)e^{xi} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}x\right)e^{-xi} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}x\right)e^{xi} = \mathrm{Re}(-1 - ix)e^{xi}$$

$$\hat{y}(x) = (a + bx)e^{xi}$$

$$y'(x) = 8b + ai + bix)e^{xi}$$

$$\hat{y}''(x) = (bi + bi - a - bx)e^{xi}$$

$$\hat{y}''(x) - \hat{y}'(x) + \hat{y}(x) = (2ib - a - bx - b - ia -$$

$$- ibx + a + bx)e^{xi} = (-1 - ix)e^{xi}$$

Az együtthatók összehasonlításából:

$$b = 1$$

$$a = 2\,.$$

Ezzel

$$y(x) = \mathrm{Re}(2 + x)e^{xi} = \boxed{(2 + x)\cos x}$$

b) $x^2\cos 2x + x\sin x = \mathrm{Re}(x^2e^{2xi} - ixe^{xi})$

$\hat{y}(x) = (ax^2 + bx + x)e^{2xi} + (dx + e)e^{xi}$

$\hat{y}(x) = (2ax + b + 2iax^2 + 2ibx + 2ic)e^{2xi} +$

$+ (d + idx + ie)e^{xi}$

$\hat{y}'(x) + \hat{y}(x) = (x^2(a + 2ia) + x(2a + b + 2ib) +$

$+ (c + b + 2ic))e^{2xi} + (x(id + d) + (d + ie + e))e^{xi} =$

$= x^2e^{2xi} - ixe^{xi}$

$$a = \frac{1}{1 + 2i}\ ; \qquad b = \frac{-2a}{1 + 2i} = \frac{-2}{(1 + 2i)^2}$$

$$c = \frac{-b}{1 + 2i} = \frac{2}{(1 + 2i)^3}$$

$$d = \frac{-i}{1 + i}\ ; \qquad e = \frac{-d}{1 + i} = \frac{i}{(1 + i)^2}$$

$$y(x) = \boxed{\mathrm{Re}\hat{y}(x) = (0{,}2x^2 + 0{,}24x - 0{,}176)\cos 2x + (0{,}4x^2 - 0{,}32x - 0{,}032)\sin 2x + \frac{x}{2}\sin x + \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\cos x}$$

VIII. 3.

1. a) $\left.\begin{array}{l} x + x^2 = 0 \\ xy = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0\ ; & x_2 = -1 \\ y_1 \in R & y_2 = 0 \end{array}$

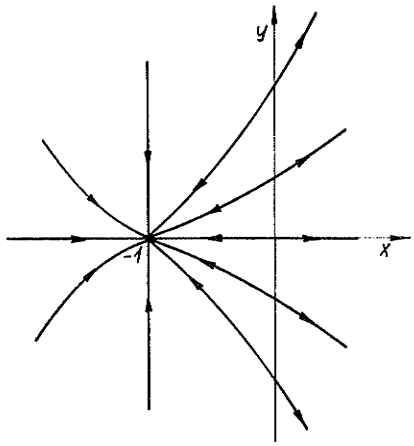
A derivált mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 + 2x & 0 \\ y & x \end{bmatrix}$$

Ebből az első variációs rendszer A_i együttható mátrixa az egyensúlyi helyzetekben:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}; \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A (0,y) egyensúlyi helyzetek elfajultak, a (-1;0) stabilis csomópont.
A trajektóriák közelítő képe az ábrán látható:

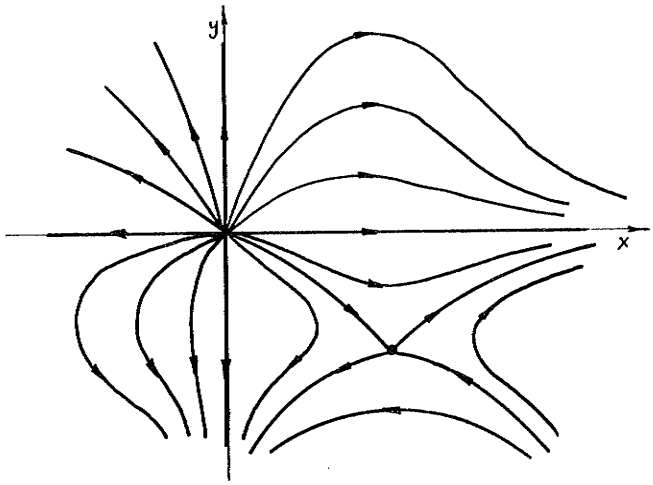


69. ábra

b) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$
$y_1 = 0$; $y_2 = -1/2$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

instabilis csomópont — nyeregpont



70. ábra

c) $x_1 = -\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b}$;

$y_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b}$;

$x_2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b}$;

$y_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b}$;

A derivált mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix}$$

Az egyensúlyi helyzet stabilis, ha

$$1 + x_i < 0 \quad \text{és}$$

$$x_i - y_i > 0,$$

instabilis, ha

$$1 + x_i > 0 \quad \text{és}$$

$$x_i - y_i > 0,$$

nyeregpont, ha

$$x_i - y_i < 0.$$

Minden más esetben elfajult az egyensúlyi helyzet, vagy nem létezik egyensúlyi helyzet $((a/2)^2+b<0)$.

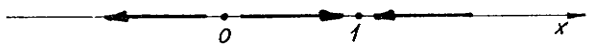
d) $\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{array}\right\}$ az egyetlen egyensúlyi helyzet,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stabilis csomópont.

e) $x_1 = 0; \quad x_2 = 1$

Az első instabilis, a második stabilis egyensúlyi helyzet.

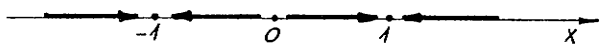


71. ábra

f) $x_1 = -1$, stabilis

$x_2 = 0$, instabilis

$x_3 = 1$, stabilis



72. ábra

2. $y + x - x(x^2 + y^2) = 0$

$y - x - y(x^2 + y^2) = 0.$

Ezekből

$y^2 + xy - xy(x^2 + y^2) = 0,$

$xy - x^2 - xy(x^2 + y^2) = 0.$

A két egyenlet megfelelő oldalait egymásból kivonva

$y^2 + x^2 = 0,$

amelyből:

$x_1 = y_1 = 0$ az egyetlen egyensúlyi helyzet.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az origó instabilis fókusz.
Az átírás:

$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi,$

$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi,$

amelyből:

$\dot{r} = \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi,$

$r\dot{\varphi} = \dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi.$

A jobboldalakba $\dot{x}$ és $\dot{y}$ helyére az eredeti egyenletek jobboldalait téve, majd x és y helyére a polár koordinátás kifejezéseket:

$\dot{r} = (y + x - x(x^2 + y^2))\cos\varphi + (y - x - y(x^2 + y^2)\sin\varphi =$

$= (r\sin\varphi + r\cos\varphi - r^2\cos\varphi)\cos\varphi +$

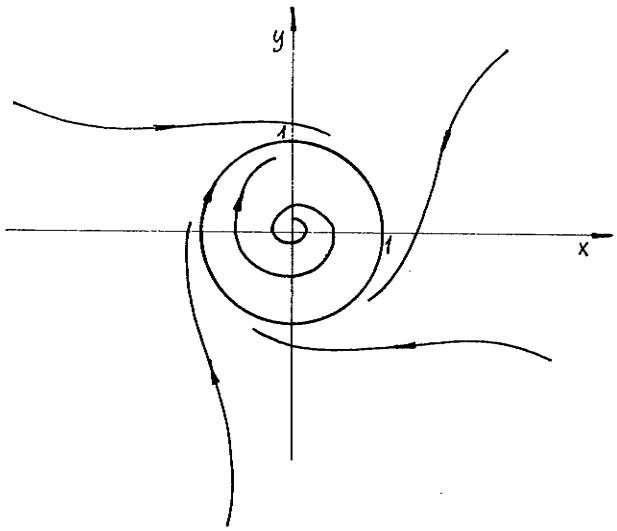
$+ (r\sin\varphi - r\cos\varphi - r^2\sin\varphi)\sin\varphi = r - r^2$

$r\dot{\varphi} = (r\sin\varphi - r\cos\varphi - r^2\sin\varphi)\cos\varphi -$

$-(r\sin\varphi + r\cos\varphi - r^2\cos\varphi)\sin\varphi = -r$

$\dot{\varphi} = -1$

Megállapíthatjuk, hogy $r = 1$ esetén egy önmagában záródó trajektória van. Ha $r < 1$, akkor $\dot{r} > 0$, vagyis a trajektóriák távolsága az origótól nő, míg $r > 1$ esetén csökken ($\dot{r} < 0$). Ha $r = 1$, akkor $\dot{r} \equiv 0$, vagyis $r \equiv 1$.



73. ábra

VIII. 4.

1. a) Vezessünk be új változót:

$$v = u - 1 - \frac{x}{\pi} .$$

Ezzel

$$v'_t = u'_t = u''_{xx} = v''_{xx} .$$

$$v(x,0) = u(x,0) - 1 - \frac{x}{\pi} = \frac{x^2}{\pi 2} - \frac{x}{\pi} = \frac{x}{\pi}\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)$$

$$v(0,t) = u(0,t) - 1 = 0$$

$$v(\pi,t) = u(\pi,t) - 1 - 1 = 0$$

v-re a megoldás a VIII. kötet (Differenciálegyenletek) 13.1. példája szerint nyerhető $h = \pi$ és $a = 1$ helyettesítéssel. Ebből u:

$$\boxed{u(x,t) = 1 + \frac{x}{\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \cos n x ,}$$

ahol

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n x = \frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x}{\pi} ,$$

tehát $\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x}{\pi}$ $[0,\pi]$-n értelmezett függvény páros, periodikus kiterjesztésének Fourier-sora.

$$\boxed{c_o = -\frac{1}{6};\ c_{2k} = 1/\pi^2 k^2;\ c_{2k-1} = 0;\ k > 0.}$$

b) $u(x,t) = T(t)\,\phi(x)$

$$\phi(x) = Ae^{\sqrt{\beta}x} + Be^{-\sqrt{\beta}x}$$

$$T(t) = e^{\beta t}$$

$$\phi'_x = \sqrt{\beta}A\, e^{\sqrt{\beta}x} - \sqrt{\beta}Be^{-\sqrt{\beta}x}$$

$$\phi'_x(0) = \sqrt{\beta}A - \sqrt{\beta}B = 0;\quad \sqrt{\beta} \neq 0$$

$$A = B$$

$$\phi = 2A \operatorname{ch} \sqrt{\beta}x$$

$$\phi'_x = 2\sqrt{\beta}A \operatorname{sh}\sqrt{\beta}x$$

$$\phi'_x(h) = 2\sqrt{\beta}A \operatorname{sh}\sqrt{\beta}h = 0;\quad A \neq 0$$

$$\sqrt{\beta} = i k \frac{\pi}{h}$$

$$\phi_k(x) = a_k \cos k \frac{\pi}{h} x;\quad T_k = e^{-(k\frac{\pi}{h})^2 t}$$

$$\cos^3 \frac{\pi}{h} x = \frac{3}{4} \cos \frac{\pi}{h} x + \frac{1}{4} \cos 3 \frac{\pi}{h} x$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{3}{4} \cos \frac{\pi}{h} x \, e^{-\frac{\pi^2}{h^2} t} + \frac{1}{4} \cos 3 \frac{\pi}{h} x \, e^{-9 \frac{\pi^2}{h^2} t}}$$

2. Az 1. a) feladatban az állandósult megoldás

$$\boxed{u(x,\infty) = \frac{5}{6} + \frac{x}{\pi}},$$

hiszen $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-n^2 t} = 0$, ha $n > 0$

Ez úgy is magyarázható, hogy a rúd a végpontok között lineáris hőmérséklet eloszlást igyekszik felvenni.

A stacionárius megoldást az $u'_t = 0$ azonosság behelyettesítésével is nyerhetjük:

$$0 = u''_{xx} ,$$

amelyből

$$u = a x + b .$$

Tekintettel arra, hogy $u(o) = 1$ és $u(\pi) = 2$, az a és b konstans egyszerűen nyerhető!

Az 1. b) feladat egy magára hagyott rúd problémája. A rúd nyilván $t = \infty$ esetén az átlaghőmérsékletet veszi fel minden pontjában. Azonban ez az átlag - az adott kiindulási függvény esetében - éppen $\boxed{\text{nulla}}$. Ezt az eredményt $u(x,\infty)$-ből is nyerhetjük.

3. $u(x,t)$ az 1. b) feladat mintájára nyerhető:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\pi x \, e^{-(k\pi)^2 t},$$

ahol

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\pi x = x^3 - 3x + 2; \quad 0 \le x \le 1.$$

Jó közelítést kaphatunk, ha a Fourier-sornak csak az első néhány elemét vesszük, hiszen a többi tag $(k\pi)^2$ miatt egyre rohamosabban csillapodik.

$$a_o = \frac{1}{2}\, 2 \int_0^1 (x^3 - 3x + 2)\,dx = \frac{3}{4}$$

$$a_1 = 2 \int_0^1 (x^3 - 3x + 2)\cos\pi x\, dx =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{3}{\pi^2} x^2 - \left(\frac{3}{\pi^2} + \frac{6}{\pi^4}\right)(\cos\pi x +\right.$$

$$+ \left(\frac{1}{\pi} x^3 - \left(\frac{3}{\pi} + \frac{6}{\pi^3}\right) x + \frac{2}{\pi}\right) \cdot$$

$$\cdot \sin\pi x \Big|_0^1 = 2\left(-\frac{6}{\pi^4}\right)(-1) - 2\left(-\frac{3}{\pi^2} - \frac{6}{\pi^4}\right) =$$

$$= \frac{24}{\pi^4} + \frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}9$$

$$u(x,t) \approx \frac{3}{4} + 0{,}9 \cos\pi x\, e^{-\pi^2 t}\,.$$

4. $u''_{tt} = 0$, amelyből $\Delta u = 0$

a) Hengerszimmetrikus esetben $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$

$$u = u''_{rr} + \frac{1}{r} u'_r = 0.$$

Ennek megoldása:

$$\frac{u''_{rr}}{u'_r} = \frac{d}{dr} \ln u'_r = -\frac{1}{r} = -\frac{d}{dr} \ln r$$

$$\ln u'_r = -\ln r + \ln c_1$$

$$u'_r = \frac{c_1}{r}$$

$$u = c_1 \ln r + c_2 = c_1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} + c_2 .$$

b) Gömbszimmetrikus esetben

$$\frac{\partial \mu}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\Delta u = u''_{rr} + \frac{2}{r} u'_r = 0$$

$$\frac{u''_{rr}}{u'_r} = \frac{d}{dr} \ln u'_r = - \frac{2}{r} = - 2 \frac{d}{dr} \ln r$$

$$\ln u'_r = - 2 \ln r + \ln(-c_1)$$

$$u'_r = \frac{-c_1}{r^2}$$

$$\boxed{u_r = \frac{-c_1}{r} + c_2 = \frac{c_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + c_2}$$

5. Az egyenletek jobb oldala ϕ (x) T(t) alakú (Fourier-módszer alapgondolata), míg a bal oldalak két, ellenkező irányba haladó hullám összege (d'Alambert-féle módszer). Tehát a kétféle módszer ugyanannak a jelenségnek kétféle szemléletét adja.

1. 351. feladat: ∞ -dimenziós, valós tér
   352. feladat: ∞ -dimenziós, valós tér
   353. feladat: n+1-dimenziós, valós tér
   354. feladat: ∞ -dimenziós, valós tér
   355. feladat: 1-dimenziós, komplex tér
   356. feladat: ∞ -dimenziós, valós tér
   357. feladat: 4-dimenziós, valós tér
   358. feladat: 4-dimenziós, valós tér
   359. feladat: n^2-dimenziós, valós tér
   360. feladat: (n-1)n-dimenziós, valós tér
   361. feladat: nem lineáris tér

2. $\underline{r} = \underline{M}\,\underline{\tilde{r}}$; $\underline{\tilde{r}} = \underline{M}^{-1}\underline{r}$

   a) $\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & . & 0 \\ 0 & 1 & & & \dots \\ . & . & & & \\ . & . & & & \\ . & . & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   Az inverz 5x5-ös esetben:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   $\underline{M}^{-1}$ csak <u>páratlan</u> n esetén létezik:

M.IX.1.

$$\underline{M}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ -1 & 1 & -1 & 1 & & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & & 0 \end{bmatrix}$$

b) $\underline{M}^{-1} = \underline{M}_2^{-2}\underline{M}_1$, ahol $\underline{M}_1$ oszlopvektorai az $\underline{e}_k$ vektorok és

$$\underline{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az inverz pl. 5x5-ös esetben:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\underline{M}_2^{-1}$ itt is csak <u>páratlan</u> n esetén létezik.
Általánosan, (2k + 1) x (2k + 1) esetben:

$$\underline{M}_2^{-1} = \frac{1}{2k-1}\begin{bmatrix} -(k-1) & -(k-1) & k & \dots & k \\ k & -(k-1) & -(k-1) & \dots & -(k-1) \\ -(k-1) & k & -(k-1) & \dots & k \\ k & -(k-1) & k & \dots & -(k-1) \\ -(k-1) & k & -(k-1) & \dots & k \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ k & -(k-1) & k & \dots & -(k-1) \\ -(k-1) & k & -(k-1) & \dots & -(k-1) \end{bmatrix}$$

Hogy valóban ez az invert, azt a következőképpen láthatjuk be. $\underline{M}_2^{-1}$ i-edik oszlopát nevezzük v_i-nek, $\underline{M}_2$ j-edik sorát pedig u_j^T-nek. v_i-nek az i-edik eleme $-(k-1)$, továbbá az i-1-edik eleme is (ha i=1, akkor 2k+1-edik). u_j^T-nek a j-edik és a j-1-edik (ha j=1, akkor 2k+1-edik) eleme egyaránt zérus. Az $u_j^T v_j$ szorzatban a két zérus tehát egyaránt $-(k-1)$-gyel szorzódik. Ezenkívül marad k darab k és k-1 darab $-(k-1)$, amelynek valamennyien 1-gyel szorzódnak, majd összegződnek:

$$u_j^T v_j = k.k + (k-1) \cdot (-(k-1)) = k^2 - (k^2 - 1) = 1.$$

Az $u_j^T v_i$; $j \neq i$ szorzatban a két zérus közül az egyik k-val, a másik $-(k-1)$-gyel szorzódik, hiszen a két zérus sorszáma u_j^T-ben nem egyezik a két egymás utáni $-(k-1)$ sor számával. A maradék k db $-(k-1)$ és $(k-1)$ db. k egyaránt 1-gyel szorzódik, majd összegződik:

$$u_j^T v_i = k(-(k-1)) + (k-1)k = -k^2 + k + k^2 - k = 0;$$

$$j \neq i\ !$$

3. a) Rendezzük át a $p_n(x) = x^n$ polinomot $(x - x_o)$ hatványai szerint:

M.IX.1.

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_n^{(k)}(x_o)}{k!} (x - x_o)^k ,$$

ahol

$$\frac{p_n^{(k)}(x_o)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!} x_o^{n-k} \frac{1}{k!} = \binom{n}{k} x_o^{n-k} .$$

x^n koordináta oszlopvektora az első rendszerben:

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

ahol az 1 éppen az n-edik helyen áll.
Ugyanennek a vektornak az $\underline{r}$ koordináta oszlopvektora a másik rendszerben a fenti azonosság szerint:

$$\underline{\tilde{r}} = \begin{bmatrix} \binom{n}{0} x_o^n \\ \binom{n}{1} x_o^{n-1} \\ \binom{n}{2} x_o^{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \binom{n}{n} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Ennek alapján:

$$\underline{\tilde{r}} = \underline{M}\ \underline{r}\ ,$$

ahol

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & \binom{1}{0}x_o & \binom{2}{0}x_o^2 & \dots & \binom{n}{0}x_o^n & \dots \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}x_o & & \binom{n}{1}x_o^{n-1} & \\ \cdot & 0 & \binom{2}{2} & & \vdots & \\ \cdot & \cdot & 0 & & & \\ & & \vdots & & \binom{n}{n} & \\ & & & & 0 & \\ & & & & \vdots & \end{bmatrix}$$

$\underline{M}$ $\infty x \infty$ méretű mátrix:

$\underline{M}^{-1}$-t úgy kapjuk meg - többek között -, ha most $(x-x_o)^n$-t x hatványai szerint rendezzük át:

$$(x - x_o)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (-x_o)^{n-k}$$

Figyelembe véve, hogy

$$\underline{r} = \underline{M}^{-1}\ \underline{\tilde{r}}\ ,$$

megkapjuk $\underline{M}^{-1}$-t:

$$\underline{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\binom{1}{0} & (-1)^2\binom{2}{0}x_o^2 & \dots & (-1)^n\binom{n}{0}x_o^n \\ 0 & \binom{1}{1}x_o & (-1)^1\binom{2}{1}x_o & & (-1)^{n-1}\binom{n}{1}x_o^{n-1} \\ \vdots & 0 & (-1)^o\binom{2}{2} & & (-1)^{n-2}\binom{n}{2}x_o^{n-2} \\ & \vdots & 0 & & \vdots \\ & & & & \binom{n}{n} \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \end{bmatrix}$$

3. b) $(x+1)^2(x-2) = x^3 - 3x - 2 = -4 + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

Ezzel:

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \underline{\tilde{r}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

4. a) Be kell látnunk, hogy L_{1T} elemei eleget tesznek a lineáris tér 1.1 Definíció szerinti axiómáinak. Vegyük ezeket sorjában!
Legyen

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m_1} c_{1i}(t-T)^{n_{1i}} e^{a_{1i}(t-T)} ;$$

$$x_2 = \sum_{i=1}^{m_2} c_{2i}(t-T)^{n_{2i}} e^{a_{2i}(t-T)} ;$$

Vezessük be a c_i, n_i, a_i számokat $(1 \le i \le m)$ a következőképpen:
- ha létezik j és k, hogy

$$a_{1j} = a_{2k} = a_i ,$$
$$n_{1j} = n_{2k} = n_i ,$$

akkor legyen

$$c_{1j} + c_{2k} = c_i ;$$

- ha létezik j, hogy

$$a_{1j} = a_i ; \; n_{1j} = n_i ,$$

de nem létezik k, hogy

$$a_{2k} = a_i ; \; n_{2k} = n_i ;$$

akkor legyen

$$c_i = c_{1j} ;$$

- végül, ha létezik k, hogy

$$a_{2k} = a_i ; \quad n_{2k} = n_i ,$$

de nem létezik j, hogy

$$a_{1j} = a_i ; \quad n_{1j} = n_i ,$$

akkor legyen

$$c_i = c_{2k}.$$

- másféle a_i, n_i, c_i számok nem léteznek.

Ekkor a függvények körében értelmezett összeadás mellett:

$$x_1 + x_2 = x,$$

ahol

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i (t-T)^{n_i} e^{a_i(t-T)} \in L_{1T}.$$

Nyilvánvaló, hogy $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$; továbbá

$$x = \in L_{1T} \Longrightarrow \lambda x \; L_{1T} \quad \text{és}$$

a $\lambda (x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$ összefüggés is.

A fenti eljárást 3 vektoron végrehajtva az $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ axióma is triviális.
Triviálisak továbbá a következő axiómák:

$$(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$$

$$\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$$

$$1x = x$$

Az azonosan zérus függvény nyilván betölti a nullvektor szerepét. Az ellentett:
ha

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i (t-T)^{n_i} e^{a_i(t-T)}$$

akkor

$$-x = \sum_{i=1}^{m} -c_i (t-T)^{n_i} e^{a_i(t-T)} !$$

b) Ha x a fenti alakú, akkor

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} \oplus c_i n_i (t-T)^{n_i-1} e^{a_i(t-T)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} c_i a_i (t-T)^{n_i} e^{a_i(t-T)} ,$$

ahol a $\oplus$ azt jelzi, hogy $n_i = 0$ esetén az i-edik tag zérus (tehát $(t-T)^{-1}$ nem fordul elő!).
Legyen

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \oplus c_i n_i (t-T)^{n_i-1} e^{a_i(t-T)} ,$$

$$x_2 = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i (t-T)^{n_i} e^{a_i(t-T)} .$$

Nyilván $x_1 \in L_{1T}$; $x_2 \in L_{1T}$ így $\dot{x} = x_1 + x_2 \in L_{1T}$!

c) Legyen x a fenti alakú, akkor

$$\int_T^t x(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{m} c_i \int_T^t (\tau-T)^{n_i} e^{a_i(\tau-T)} d\tau .$$

Parciálisan, tagonként integrálva:

$$\int_T^t (\tau-T)^{n_i} e^{a_i(\tau-T)} d\tau = \frac{1}{a_i}(t-T)^{n_i} e^{a_i(t-T)} -$$

$$- \frac{n_i}{a_i} \int_T^t (\tau-T)^{n_i-1} e^{a_i(\tau-T)} d\tau ,$$

$$\frac{1}{a_i} (t - T)^{n_i} e^{a_i(t-T)} \in L_{1T} ,$$

ha $n_i \neq 0$; $a_i \neq 0$;

$$\int_T^t (\tau-T)^{n_i} d\tau = \frac{(t-T)^{n_i+1}}{n_i + 1} \in L_{1T}$$

ha $a_i = 0$ és $n_i \geq 0$;

$$\int_T^t e^{a_i(\tau-T)} d\tau = \frac{1}{a_i} e^{a_i(t-T)} - \frac{1}{a_i} \in L_{1T} ,$$

ha $a_i \neq 0$ és $n_i = 0$.

A parciális integrálást - ahol szükséges - tovább folytatva, belátható, hogy $\int_T^t x(\tau)d\tau$ véges sok L_{1T}-beli elem lineáris kombinációja, így maga is L_{1T}-be tartozik!

d) Ismét az 1.1 Definíció axiómáinak teljesülését kell ellenőriznünk.
Ha $x \in L_2$, akkor L_2 definíciója értelmében:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{(z-a_i)^{n_i+1}} \; ; \; a_i, \in c_i \in \mathbb{C}; \; n_i \in \dot{N}.$$

Előfordulhat, hogy pl. két ilyen tag szerepel a fenti összegben:

$$\frac{c}{(z-a)^{n+1}} - \frac{c}{(z-a)^{n+1}} .$$

Ez azt jelenti, hogy x-nek a z = a helyen megszüntethető szakadása van. Ha itt x-t - L_2 definíciója szerint - folytonossá tesszük, az nem jelent mást, minthogy e két tagot egyszerűen töröljük. Hasonló helyzet természetesen több azonos nevezőjű tag esetén is előállhat. Ekkor valamennyi - zérus összegű - tagot töröljük.
Az első 8 axióma teljesülése ezekután pontosan ugyanúgy látható be, mint az a) feladatnál.
Zérus elem az azonosan zérus függvény, x ellentettjénél c_i helyett itt is - c_i veendő!

e) Ez az igen fontos reláció a legkevésbé nyilvánvaló az a) ... e) feladatok között.
Azt kell belátnunk, hogy az adott szorzat parciális törtekre való bontása L_2-beli elemek lineáris kombinációját eredményezi. Ha a parciális törtekre való bonthatóságot, mint ismert tételt elfogadjuk, akkor nemcsak ez utóbbi állítás, hanem az a) feladatban megfogalmazott állításnál lényegesen általánosabb is nyilvánvalóvá válik. Nevezetesen:

$$\frac{q_m(z)}{p_n(z)} \in L_2 ,$$

ahol q_m z-nek m-edfokú, p_n pedig n-edfokú polinomja és $m < n$. Ha $p_n(z)$-nek csupa egyszeres gyöke van, akkor a parciális törtekre való bonthatóság állítása a 6.4 (kifejtési) Tétellel és annak egyértelműségével ekvivalens. Adjuk meg az ott hiányzó bizonyítást!

$$\frac{q_m(z)}{p_n(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_m(z_k)}{p_n'(z_k)} \frac{1}{z - z_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z - z_k}$$

ahol $p_n(z_k) = 0$.
A jobb oldalt közös nevezőre hozva:

$$\frac{q_m(z)}{p_n(z)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (z - z_i)}{p_n(z)} ,$$

amelyből:

$$q_m(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (z - z_i)$$

$$q_m(z_j) = \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (z_j - z_i) = a_j \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} (z_j - z_i) =$$

$$= a_j \, p_n'(z_j) ,$$

ahol z_j p_n tetszőleges gyöke.
Tekintettel arra, hogy $p_n'(z_j) \neq 0$, így a_j, $j=1,\ldots n$ létezik és egyértelmű!
Ha a gyökök többszörösek, akkor a fenti kifejtési tétel egymás utáni, megfelelő számú alkalmazásával az egyértelmű parciális törtekre bonthatóság matematikai indukcióval egyszerűen bizonyítható.

M.IX.1.

<u>Tétel</u> A $q_m(z)/p_n(z)$; $m<n$ racionális törtfüggvény alábbi parciális törtekre bontása mindig lehetséges és egyértelmű:

$$\frac{q_m(z)}{p_n(z)} = \frac{a_{11}}{z - z_1} + \frac{a_{12}}{(z - z_1)^2} + \ldots + \frac{a_{1r_1}}{(z - z_1)^{r_1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{a_{1k}}{z - z_k} + \ldots + \frac{a_{1r_k}}{(z - z_k)^{r_k}}$$

ahol z_j; $1 \le j \le k$ $p_n(z)$ r_j multiplicitású gyöke és

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n.$$

<u>Bizonyítás</u>
Ha $\max\limits_{1\le j\le k} (r_j) = 1$, akkor a fenti kifejtési tétellel az állítás már bizonyított. Tegyük fel, hogy létezik egy $1 \le s \le N$ szám, amelyre a tételt már bebizonyítottuk, (ahol $s = \max\limits_{1\le j\le k} (r_j)$).

Legyen most $\max\limits_{1\le j\le k} (r_j) = s + 1$.

Akkor

$$\frac{q_m(z)}{p_n(z)} = \frac{q_m(z)}{p_{1n}(z)p_{2n}(z)},$$

ahol $p_{1n}(z)$ csupa 1-szeres gyökkel rendelkezik, $p_{2n}(z)$ gyökei pedig legfeljebb s-szeresek. Az indukciós feltételezéssel:

$$\frac{q_m(z)}{p_{2n}(z)} = t_{m-k}(z) + \frac{a_{11}}{z - z_1} + \ldots + \frac{a_{1r_1}}{(z - z_1)^{r_1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{a_{1r_e}}{(z - z_e)^{r_e}}$$

ahol $t_{m-k}(z)$ m-k-adfokú polinom, ha $m-k \geq 0$, illetve zérus ellenkező esetben, k $p_{2n}(z)$ fokszáma;

$$p_{1n}(z) = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{z - z_i} .$$

$$\frac{q_m(z)}{p_n(z)} = \frac{t_{m-k}(z)}{p_{1n}(z)} + \left[\sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{z - z_i} \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{a_{11}}{(z - z_1)} + \ldots + \frac{a_{1r_e}}{(z - z_e)^{r_e}} .$$

Tekintettel arra, hogy $m-k < n-k$ ($p_{1n}(z)$ fokszáma n-k), így a jobb oldal első tagja parciális törtekre bontható. A második tagot lépésenként bontjuk paricális törtekre. Először:

$$\frac{1}{z - z_{k+1}} \quad \frac{a_{11}}{z - z_1} + \ldots + \frac{a_{1r_e}}{(z - z_e)^{r_e}} .$$

Ha $z_j = z_{k+1}$, akkor beszorzás után az $a_{j\ell}/(z-z_j)^{\ell+1}$ tag már parciális tört. Ha $z_j \neq z_{k+1}$, akkor az $a_{j\ell}(z-z_j)^{\ell}(z-z_{k+1})$ parciális törtekre bontandó:

$$\frac{a_{j\ell}}{(z - z_j)^{\ell}(z - z_{k+1})} =$$

$$= \frac{b_1}{z - z_j} + \frac{b_2}{(z - z_j)^2} + \ldots + \frac{b_\ell}{(z - z_j)^{\ell}} + \frac{b}{z - z_{k+1}} .$$

Közös nevezőre hozva és a számlálókat összevetve:

$$a_{j\ell} = b_1(z-z_j)^{\ell-1}(z-z_{k+1}) + \ldots + b_\ell(z-z_{k+1}) + b(z-z_j)^{\ell}$$

$a_{j\ell}$ tehát az azonosan konstans, nulladfokú polinomnak tekinthető.

$$a_{j\ell} = a_{j\ell}(z_j) = b_\ell(z_j - z_{k+1}),$$

amelyből

$$b_\ell = a_{j\ell}/z_j - z_{k+1}).$$

$$0 = a'_{j\ell} = a'_{j\ell}(z_j) = b_\ell + b_{\ell-1}(z_j - z_{k+1}),$$

amelyből

$$b_{\ell-1} = -\frac{a_{j\ell}}{(z_j - z_{k+1})^2}.$$

$$0 = a''_{j\ell} = a''_{j\ell}(z_j) = 2b_{\ell-1} + 2b_{\ell-2}(z_j - z_{k+1}),$$

amelyből

$$b_{\ell-2} = \frac{a_{j\ell}}{(z_j - z_{k+1})^3}$$

$$\vdots$$

$$0 = a^{(i)}_{j\ell} = a^{(i)}_{j\ell}(z_j) = b_{\ell-i}\, i!(z_j - z_{k+1}) +$$

$$+ b_{\ell-i+1}(i-1)!\, i,$$

amelyből

$$b_{\ell-i} = \frac{-b_{\ell-i+1}}{z_j - z_{k+1}} = (-1)^i \frac{a_{j\ell}}{(z_j - z_{k+1})^{i+1}}$$

$$\vdots$$

Végül

$$0 = a^{(\ell)}_{j\ell} = \ell!b_1 + \ell!b,$$

amelyből

$$b = -b_1.$$

Tehát valamennyi együttható egyértelműen meghatározható:

$$\frac{a_{j\ell}}{(z-z_j)^{\ell}(z-z_{k+1})} =$$

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} (-1)^i \frac{a_{j\ell}}{(z_j-z_{k+1})^{i+1}(z-z_j)^{\ell-i}} -$$

$$-(-1)^{\ell-1} \frac{a_{j\ell}}{(z_j-z_{k+1})^{\ell}(z-z_{k+1})}$$

Ezt az eljárást elvégezzük k+2-re, k+3-ra, n-re.
Így s+1-re is beláttuk az egyértelmű parciális törtre bonthatóságot!

5. a) (0;0;3/4;0;0;0;-1/4;0;0;...)

b) nem
(2/π;0;0;-4/3π ;0;0;0; -4/15π ;0;0;0; -4/35π ;
0;0;0;-4/63π ;0;0;0; -4/199π; ....),

ahol

$$3 = 4 \cdot 1^2 - 1 ;$$
$$15 = 4 \cdot 2^2 - 1 ;$$
$$35 = 4 \cdot 3^2 - 1 ;$$
$$63 = 4 \cdot 4^2 - 1 ;$$
$$199 = 4 \cdot 5^2 - 1 , \text{ stb.}$$

Tehát nem eleme, mert <u>véges</u> lineáris kombinációval nem állítható elő!

c) (3/2;0;0; -1/2;0;0;0; ...)

d) (3;0;3/4;0;0;0;-1/4;0;0;0;...)

e) (0;0;0;0;1/2;0;0;1/4;0;0;0;...)

f) nem

g) nem

h) nem

6. $T_o(x) = \cos(0 \text{ arc cos } x) = 1$

$T_1(x) = \cos(1 \text{ arc cos } c) = x$

Általában:

$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos((n+1) \text{arc cos} x) + \cos((n-1) \text{ arc cos} x)$

$= 2 \cos (n \text{ arc cos } x) \cos \text{ arc cos } x = 2x\ T_n(x)$

(Vegyük figyelembe, hogy

$\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 2\cos n\alpha \cos \alpha$!).

Ebből:

$$T_{n+1}(x) = 2x\ T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

E rekurziós képlet alapján világos, hogy bármely n-re T_n pontosan n-edfokú polinom. Így értelmezési tartományukon ([-1;1]) valóban lineárisan független rendszert alkotnak. Néhány elem még:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x\ ,$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Ezekkel:

a) $x^2 = \frac{1}{2}\ T_2(x) + \frac{1}{2}\ T_o(x)$;

a koordináták:

(1/2;0;1/2;0;0;0; ...)

b) $x^3 = \frac{1}{4}\ T_3(x) + \frac{3}{4}\ T_1(x)$

(0;3/4;0;1/4;0;0;0; ...)

c) $x^4 - x = \frac{1}{8}\ T_4(x) + \frac{1}{2}\ T_2(x) - T_1(x) + \frac{3}{8}$

(3/8;-1;1/2;0;1/8;0;0;0;...)

d) $x^5 - x^2 = \frac{1}{16} T_5(x) + \frac{5}{16} T_3(x) - \frac{1}{2} T_2(x) + \frac{10}{16} T_1(x) + \frac{1}{2}$

(1/2;10/16;-1/2;5/16;0;1/16;0;0;0;...)

IX. 2.

1. A norma három axiómájának teljesülését kell ellenőriznünk:

(i) $\|A\| = 0 = \sup_{\|v\|=1} \|Av\| = \sup \|Aw\| = \|Aw\|$,

ahol w most már tetszőleges vektor. Így Aw = 0 bármely vektorra. Ez csak úgy lehet, hogy A = 0.

(ii) $\|\lambda A\| \sup_{\|v\|=1} \|\lambda Av = \sup_{\|v\|=1} |\lambda| \|Av\| =$

$= |\lambda| \sup_{\|v\|=1} \|Av\| = |\lambda| \|A\|$.

(iii) $\|A + B\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av + Bv\| \leq \sup_{\|v\|=1} (\|Av\| + \|Bv\|) \leq$

$\sup_{\|v\|=1} \|Av\| + \sup_{\|v\|=1} \|Bv\| = \|A\| + \|B\|$!

(A fenti egyenlőség, ill. egyenlőtlenség láncokban vegyük figyelembe, hogy az $\|A\|$, ill. $\|Av\|$ jelölésben (ill. az ezzel analóg kifejezésekben) alapvető különbség, hogy az elsőben a <u>definiálandó mátrixnorma</u> szerepel, míg a másodikban az <u>adott</u> és az axiómáknak a feltételezés szerint eleget tevő <u>vektornorma</u>, hiszen Av vektor!)

2. Az 1. feladathoz hasonlóan a 3 axióma teljesülését kell ellenőriznünk.

6. Legyen $x,y \in Q$ és tekintsük a

$$z = x + t(y-x); \quad 0 \leq t \leq 1$$

vektorokat.

Komponensekkel:

$$z_1 = x_1 + t(y_1 - x_1);$$

$$z_2 = x_2 + t(y_2 - x_2).$$

Legyen pl. $x_1 = y_2 = x_2 = 1$, $y_1 = 2$ és t irracionális. Akkor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+t}{2} \notin Q .$$

Tehát $\boxed{\text{nem konvex!}}$

7. Mutassuk meg, hogy nem Q-beli elemek tetszőleges pontossággal megközelíthetők Q-beli elemekkel. Ezzel beláttuk, hogy Q $\boxed{\text{nem zárt.}}$

8. $\boxed{\text{Nem!}}$ Elég egyetlen ellenpéldát mutatnunk.

Legyen

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} .$$

Akkor (tegyük fel, hogy $m > n$

$$\| p_n(x) - p_m(x) \| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{x^k}{k!} \right\| = \frac{1}{n!} < \varepsilon ,$$

amelyből bármely n,m-re, ha $n,m > N$, akkor

$$\| p_n(x) - p_m(x) \| < \frac{1}{N!}$$

Ugyanakkor $\lim\limits_{n \to \infty} p_n(x) = e^x$ nem polinom, így találtunk egy nem konvergens Cauchy sorozatot!

9. $$\lim_{k \to \infty} e^{-kx} = \begin{cases} 1 , & \text{ha } x = 0 \\ 0 , & \text{ha } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

A maximum normával ez a függvénysorozat tehát nem konvergens. Legyen ugyanis k tetszőlegesen nagy és $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Akkor

$$|e^{-kx} - 0| = e^{-kx} > \varepsilon = \frac{1}{2},$$

ha

$$e^{kx} < 2,$$

vagyis $kx < \ln 2$, amelyből $0 < x < \frac{\ln 2}{k}$!

$\boxed{\text{Az a) ill. b) feladatban előírt } n_o \text{ nem létezik.}}$

10. Nem.

IX. 3.

1. a) Ez homogén lineáris (röviden lineáris) operátor, így deriváltja önmaga.

b)

$$f(g) - f(g_o) = \int_a^b (g^2 - g_o^2)dx =$$

$$= \int_a^b (2g_o(g - g_o))dx + \int_a^b (g - g_o)^2 dx$$

$$\lim_{g \to g_o} \frac{\int_a^b (g-g_o)^2 dx}{|g - g_o|} = 0,$$

$\int_a^b 2g_o(g - g_o)dx$ $(g - g_o)$-nak lineáris

függvénye, így a derivált operátor a g_o helyen az $[a,b]$ intervallumon a $2g_o$ súlyfüggvényre vett integrál:

$$Ah = \int_a^b 2g_o h \, dx ,$$

$$f(g) \approx f(g_o) + A(g - g_o).$$

c) $$Ah = \int_a^b n \, g_o^{n-1} h \, dx$$

d) $$Ah = \int_a^b g(x)h(b + a - x)dx + \int_a^b g_o(b + a - x)h(x)dx$$

e) A deriválás, mint operátor homogén, additív, de nem folytonos, sőt, nem is korlátos.
(pl. $(\sin \omega x)' = \omega \cos \omega x$; így $\| \omega \cos \omega x \| = \| \omega \|$ tetszőlegesen nagy $\| \sin \omega x \| = 1$-hez képest!) Érdeks módon tehát, a függvényderiválás, mint $C_{[a,b]}$-beli operátor, $C_{[a,b]}$-beli értelemben nem deriválható operátor. Ha a folytonosságot nem írtuk volna elő, akkor a deriválás deriváltoperátora önmaga lenne.

f) Lineáris operátor, így deriváltoperátora önmaga

g) Lineáris operátor, így deriváltoperátora önmaga.

h) $$Ah = g_o \int_a^b h \, dx + h \int_a^b g_o dx.$$

2. Az

$$f(g) := \int_0^{0,1} \sqrt{g(x)} dx$$ jelölés bevezetésével a

feladat: $f(\sin x)$ kiszámítása.

$$f(g) \approx f(g_o) + A(g - g_o),$$

ahol

$$Ah = \int_0^{0,1} \frac{h}{2\sqrt{g_o(x)}} dx .$$

Legyen $g_o(x) = x$ (hiszen $x \approx \sin x$ $[0;0,1]$ -ben). Így:

$$\int_0^{0,1} \sqrt{\sin x}\, dx \approx \int_0^{0,1} x^{1/2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{0,1} \frac{\sin x - x}{\sqrt{x}}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^{0,1} + \frac{1}{2} \int_0^{0,1} \frac{x + \frac{x^3}{3!} - x}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$\approx \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{1000}} + \frac{1}{42} \frac{1}{(10^7)^{1/2}} \approx \boxed{0,021098},$$

ahol sin x helyére 3-adfokú Taylor-polinomját tettük. Figyeljük meg, hogy ez az eljárás mennyivel egyszerűbb, mintha eleve a Taylor-polinommal való helyettesítést hajtottuk volna végre:

$$\int_0^{0,1} \sqrt{\sin x}\, dx \approx \int_0^{1} \sqrt{x - \frac{x^3}{3!}}\, dx ,$$

hiszen az utóbbi integrál kiszámítása nem túl egyszerű feladat. Egyébként a módszer pontosságára jellemző, hogy

$$\int_0^{0,1} \sqrt{\sin x}\, dx \approx 0,021074$$

3. a) A halmaz nemcsak összefüggő hanem konvex is. Legyen $\|x\|$, $\|y\| \le R$, és legyen

$$z = x + t(y - x); \quad 0 \le t \le 1 .$$

Akkor

$$\|z\| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k^2 + t^2 (y_k - x_k)^2}.$$

z-nek vagy $t = 0$-nál, vagy $t = 1$-nél, vagy valamely $0 < t < 1$-nél van maximuma.
Az utóbbi esetben $d\,\|z\|/dt = 0$

- ha $t = 0$, akkor $\|z\| = \|x\| \le 1$,
- ha $t = 1$, akkor $\|z\| = \|y\| \le 1$,
- ha $d\,\|z\|/dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2t(y_k - x_k)^2/\sqrt{x_k^2+t^2(y_k-x_k)^2} = 0$,

amelyből vagy $y_k = x_k$, $k=1,2,\dots n$, és ekkor

$$\|z\| = \|x\| \le 1 ,$$

vagy $t = 0$!

b) Legyen $\|x\| = R_1$ és

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

x_1 felírható (és a felírás egyértelmű)

$$x_1 = R_1 \cos \vartheta_1;\ 0 \le \vartheta_1 \le \pi$$

alakban. Akkor

$$\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{R_1^2 - x_1^2} = R_1 \sin \vartheta_1 .$$

x_2 felírható

$$x_2 = R_1 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2;\ 0 \le \vartheta_2 \le \pi$$

alakban. Ekkor

$$\sqrt{x_3^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{R_1^2 \sin^2 \vartheta_1 - R_1^2 \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2} =$$

$$= R_1^2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 .$$

Ugyanígy haladhatunk tovább:

$$x_k = R_1 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{k-1} \cos \vartheta_k;\ k < n.$$

Akkor

$$\sqrt{x_n^2} = R_1 \sin \vartheta_1 \dots \sin \vartheta_n .$$

Azonban, hogy x_n negatív értékeket is felvehessen, ϑ_n-nél a $0 \le \vartheta_n \le 2\pi$ tartományt kell megengednünk, így a felírás itt is egyértelmű lesz.
Végeredményben:

$$x_k = R_1 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{k-1} \cos \vartheta_k ; \quad 1 \le k \le n$$

$$0 \le \vartheta_k \le \pi \quad ; \quad 1 \le k \le n$$

$$0 \le \vartheta_n \le 2\pi .$$

Hasonlóképpen írhatjuk fel az R^m-beli vektorokat is.
Legyen most $(x;y) \in R^{n+m}$ és $(z;w) \in R^{n+m}$.
A két vektort az alábbi úttal kötjük össze:
$(x;y)$-ből először az $(z;y)$, majd onnan a $(z;w)$-be.
x-höz, y-hoz, z-hez, ill. w-hez, következő szögek tartoznak:

$$\vartheta_k^x ; \quad 1 \le k \le n ,$$

$$\vartheta_k^y ; \quad 1 \le k \le m ,$$

$$\vartheta_k^z ; \quad 1 \le k \le n ,$$

$$\vartheta_k^w , \quad 1 \le k \le m .$$

(x,y)-ból (z,y)-ba az alábbi paraméterezésű út vezet az adott halmazon bélül:

$$\alpha_k(t) = \vartheta_k^x + t(\vartheta_k^z - \vartheta_k^x) ; \quad 0 \le t \le 1, \ 1 \le k \le n$$

Hasonlóképpen, (z,y)-ból (z,w)-be:

$$\beta_k(t) = \vartheta_k^y + (t-1)(\vartheta_k^w - \vartheta_k^y) ; \quad 1 \le t \le 2; \ 1 \le k \le m$$

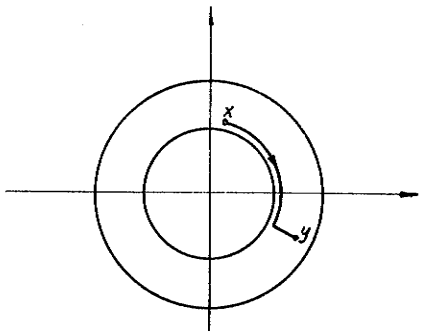
Ha $1 \le t \le 2$, akkor legyen $\alpha_k(t) \equiv \alpha_k(1)$ és ha $0 \le t \le 1$, akkor legyen $\beta_k(t) \equiv \beta_k(0)$.

Ezzel az $\alpha_k(t)$; $0 \le t \le 2$; $1 \le k \le n$,

$\beta_k(t)$; $0 \le t \le 2$; $1 \le k \le m$

paraméterezésű folytonos út az adott halmazon belül (x,y)-ból (z,w)-be vezet.

c) A b) feladat mintájára az $x \in \mathbb{R}^n$ vektorokat általános gömbi koordináta-rendszerben írjuk fel.
Adott x és y között folytonos utat most úgy választhatunk, hogy először x-t y irányába visszük át, majd ezután a szögeket állandó értéken tartva az abszolút értéket a megfelelő értékre növeljük. Az eljárás a síkon az ábrán látható.



74. ábra

4. Az alábbi eljárás akkor jó, ha A-nak létezik egyszeres multiplicitású, legnagyobb abszolút értékű λ_1 sajátértéke s_1 sajátvektorral. Tételezzük fel ezenkívül, hogy A-nak létezik n db lineárisan független $s_1, s_2, \ldots$ $\ldots, s_n$ sajátvektora. Tetszőleges v vektor

$$v = \lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_k s_k + \ldots + \lambda_n s_n$$

alakban írható fel.
Akkor

$$\frac{1}{\lambda_1} Av = c_1 s_1 + \ldots + c_k \frac{\lambda_k}{\lambda_1} s_k + \ldots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} s_n;$$

$$\frac{1}{\lambda_1^2} A^2 v = c_1 s_1 + \ldots + c_k \frac{\lambda_k^2}{\lambda_1^2} s_k + \ldots + c_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda_1^2} s_n$$

$$\frac{1}{\lambda^j_1} A^j v = c_1 s_1 + \ldots + c_k \frac{\lambda^j_k}{\lambda^j_1} s_k + \ldots + c_n \frac{\lambda^j_n}{\lambda^j_1} s_n.$$

Nyilván $\lim\limits_{j \to \infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^j = 0$, így $\lim\limits_{j \to \infty} \frac{1}{\lambda^j_1} A^j v = c_1 s_1$.

Iterációval:

$$v_o = v$$

$$v_{m+1} = Av_m,$$

amelyből

$$v_m = A^m v_o = c_1 \lambda^m_1 s_1 + \ldots + c_k \lambda^m_k s_k + \ldots + \lambda^m_n s_n.$$

Az iteráció konvergens, tehát ha

$$\lambda_1 = 1$$

$$|\lambda_k| < 1; \quad 1 < k \leq n.$$

Ekkor

$$\lim_{m \to \infty} v_m = c_1 s_1.$$

5. A fix pontjai a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a zérus vektor. A konvergenciáról ugyanaz mondható el, mint a 4. feladat esetében. A-t egy mátrix reprezentálja.

6. Ha az iteráció konvergens, akkor az

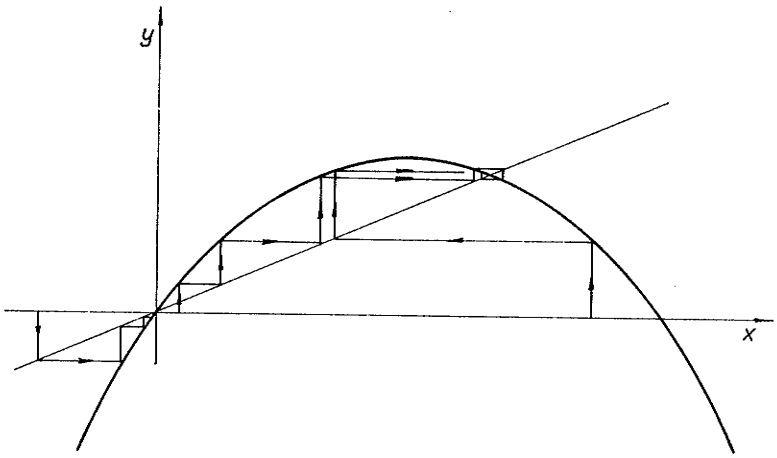
$$x = 2x - ax^2$$

egyenlet megoldásához konvergál:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{a}; \quad a \neq 0$$

Az iteráció folyamata az ábrán nyomonkövethető (ha $a > 0$).



75. ábra

Ezzel analóg módon rajzolható meg az ábra az $a<0$ esetben. Ha $a=0$, akkor konvergenciáról természetesen nem lehet szó.

7. A fix pontok: 0 és A^{-1}, de egyéb fix pontok is lehetnek.

Pl. ha $A = I$ és $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, akkor

$$\mathcal{A}(B) = 2B - BAB = B.$$

Konvergens (A^{-1}-hoz konvergál), ha

$$\| A^{-1} - B\| < \frac{1}{\|A\|}$$

8. Legyen $\| g \| = c > 0$.

Legyen $g_o = g$ és

$$g_{n+1}(x) = \int_a^x g_n(x)\,dx.$$

$$\|g_{n+1}(x)\| \le \int_a^b |g_n(x)|\,dx \le \int_a^b \max_{a\le x\le b} |g_n(x)|\,dx =$$

$$= (b-a)\|g_n(x)\| .$$

Ebből

$$\|g_n(x)\| \le (b-a)^n \|g_o\| .$$

$$\lim_{n\to\infty} (b-a)^n = 0!$$

9. Az a) esetre megmtutatjuk, hogy hogyan kell itt az iterációt érteni:

$$x_o = 0,1$$
$$y_o = 0,1$$

a)

$$x_1 = x_o^2 - y_o^2 = 0$$

$$y_1 = x_o^3 - y_o^2 = -0,09$$

$$x_2 = x_1^2 - y_1^2 = -0,000081$$

$$y_2 = x_1^3 - y_1^2 = -0,000081$$

$$x_3 = x_2^2 - y_2^2 = 0$$

$$y_3 = x_2^3 - y_2^2 = -6,56\ 10^{-9}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0}$$

b) nem konvergens

c) 1,25 ; -5 a harmadik lépésben már eléri a határértéket

d) 0,684; 2,164 a konvergencia igen lassú

e) nem konvergens

f) 0,5; 1 az első lépés után eléri a határértéket

g) (1,157 ; -7,367 a konvergencia meglehetősen lassú)

Vessük egybe a c) d) e) f) és g) feladatokat! A konvergenciának ezt a sokféleését az okozza, hogy a függvénynek végtelen sok fix pontja van. A fix pontokat az

$$x = 1 - x/y$$
$$y = xy + x$$

egyenletek megoldásai szolgáltatják: $y \in \mathbb{R} \{0;-1\}$ és $x = y/(1+y)$.

10. A homogén linearitás kimutatásához a homogenitást, az additivitást és a folytonosságot kell bizonyítani. A homogenitás éa additivitás nyilvánvaló. A folytonosságot elég a 0-ban bizonyítani. Azt kell belátni, hogy ha $\|g\|$ elég kicsiny, akkor $\|f(g)\|$ is az.

$\boxed{\text{Sajátvektorok nem léteznek.}}$

11. $\boxed{\text{a) - f) elfajuló,}}$ hiszen többféle "tárgyvektorhoz" is ugyanazt a "képvektort" rendeli. Pl.

$$x' = (x + 1)'.$$

$\boxed{\text{A g) azonban nem elfajuló.}}$ $\int_a^x g(u)\,du$ ismeretében deriválással egyértelműen visszakapható g.

12. Itt az 1. g) szerinti nem elfajuló (l. 11. megoldása) lineáris operátorról van szó:

$$(A\,g)(x) = \int_0^x g(u)\,du.$$

Az $A\,g = 0$ egyenlet egyetlen megoldása: $g = \boxed{0}$, vagyis $g(x) = 0$. Az

$$A(g) \equiv h; \quad h(x) = \ln \frac{x}{a}$$

egyenlet megoldása: $g = A^{-1}h$, vagyis

$$g(x) = \frac{d}{dx} \ln \frac{x}{a} = \boxed{\frac{1}{x}}.$$

13. a)
$$g' + \int_a^x g(u)\,du$$

b) Egymás után integrálás majd deriválás, tehát D I az identitás operátor

c) $(I\,D\,g)\,(x) = \int_a^x g'(u)\,du = g(x) - g(a)$.

d) $\int_a^x \int_a^s g(u)\,du\,ds$

e) $g''(x)$

f) $I^{-1} = D$, hiszen D I az identitás, mind b)-ben láttuk.

g) D^{-1} nem létezik, mert D elfajuló. Ennek ellentmondani látszik az f) feladat megoldása. Valójában nincs ellentmondás. Az 1. g) feladat operátorának, I-nek értékhalmaza azon $C^{\infty}_{[a,b]}$-beli g függvényeket tartalmazza, amelyekre $g(a) = 0$. Legyen ez a halmaz $C^{\infty *}_{[a,b]}$. I inverze a $C^{\infty *}_{[a,b]}$-re leszűkített D. Az így leszűkített D-nek már van inverzve. $D^{-1} = I$.

h) L. az 1. e) feladat megoldását.

i) $$\|I\| = \sup_{\|g\|\neq 0} \frac{\|I\,g\|}{\|g\|} = \sup_{\|g\|\neq 0} \frac{\left\|\int_a^x g(u)\,du\right\|}{\|g\|} =$$

$$= \sup_{\|g\|\neq 0} \frac{\max\limits_{a\le x\le b}\left|\int_0^x g(u)\,du\right|}{\max\limits_{a\le x\le b}|g(x)|} \le \sup_{\|g\|\neq 0} \frac{\max\limits_{a\le x\le b}|g(x)|\int_a^x du}{\max\limits_{a\le x\le b}|g(x)|} \le$$

$$\le b - a$$

1. A skaláris szorzás axiómájának teljesülését kell ellenőriznünk.
   a) skaláris szorzás
   b) skaláris szorzás
   c) nem skaláris szorzás; $(x,y) \neq (y,x)$
   d) nem skaláris szorzás: $(x,x) = 0$ is lehet, ha $x \neq 0$,

   pl. $a = -\sqrt{3}$; $b = \sqrt{3}$; $x(s) = s/\sqrt{3}$

   pl. $a = -3$; $b = 3$; $x(s) = s$

   Ekkor

$$\int_{-3}^{3} x^2(s)\, ds + 2x(-3)x(3) =$$

$$= \frac{s^3}{3}\Bigg|_{-3}^{3} - 2\cdot 9 = \frac{2}{3}\, 27 - 2\cdot 9 = 0!$$

   e) nem skaláris szorzás : $(x,y) \neq (y,x)$

2. A skaláris szorzás axiómáinak teljesülését kell ellenőrizni.
   a) nem skaláris szorzás; $(x,y) \neq (y,x)$, ha V nem szimmetrikus, de a szimmetria sem elég, pl.

$$x^T V x = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - x_2^2 \leq 0.$$

   b) skaláris szorzás

3. V-hez létezik M izometrikus mátrix, amelyre $M^T V M$ diagonális és $\|M^T x\| = \|x\|$.

   Ekkor $\|x\| = \sqrt{x^T MM^T VMM^T x} = \sqrt{y^T Dy} =$

$$= \sqrt{\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_1^2} = 1,$$

   ahol D diagonális mátrix a λ_k, $k=1,\ldots,n$ elemekkel, $y = M^T x$. Ez egy $\boxed{\text{hiperellipszoid}}$ egyenlete.

4. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget! (Vegyük figyelembe a 2. b) feladat megoldását is és azt, hogy $W^T W$ pozitív definit.)

5. Legyen $\boxed{e_1 = 1}$, $e_2 = x+a$ és $e_1 \perp e_2$:

$$0 = \int_{-1}^{1} 1\cdot(x+a)\,dx = \frac{x^2}{2} + ax\Big|_{-1}^{1} = 2a \Rightarrow a=0; \quad \boxed{e_2 = x}$$

$$\|e_1\| = \sqrt{2}; \qquad \|e_2\| = \sqrt{2/3}$$

Legyen $e_3 = x^2 - ae_2 - be_1$, $e_3 \perp e_2$, $e_3 \perp e_1$.

Ebből: $$0 = \int_{-1}^{1} x^2 e_2\,dx - a\,\|e_2\|^2 = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} - a\,\frac{2}{3} =$$

$$= -a\,\frac{2}{3} \Rightarrow a = 0$$

$$0 = \int_{-1}^{1} x^2 e_1\,dx - b\|e_1\|^2 = \frac{2}{3} - 2b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{e_3 = x^2 - \frac{1}{3}}$$

Az eljárás (Schmidt-féle ortogonalizálás) így folytatható tovább.

6. A sajátvektorokat kell meghatároznunk és ebből kell felépítenünk a transzformáló mátrixot.

Ha $M^T VM = D$, akkor $\tilde{x} = M^T x$ és

$$x^T Vx = \tilde{x}^T D\tilde{x}$$

a) $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

b)
$$M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0,5+0,5\sqrt{5} & 0,5-0,5\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

c)
$$M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

IX. 5.

1. $T_n(x) = \cos n \arccos x; \quad T_m(x) = \cos m \arccos x$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\ T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\int_0^{\pi} \frac{T_n(\cos u)\ T_m(\cos u)}{\sqrt{1-\cos^2 u}}\,(-\sin u)\,du =$$

$$= \int_0^{\pi} \cos n u \cos m u\, du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(n+m)u + \cos(n-m)u)\,du =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m \\ \pi, & \text{ha } n=m=0 \\ \pi/2, & \text{ha } n=m\neq 0 \end{cases}$$

2. A normált $T_n(x)$ polinom legyen $T_{no}(x)$. Az 1. feladat eredményéből:

$$T_{10}(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\, T_1(x)$$

$$T_{no}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T_n(x); \quad n > 1.$$

3. A $\cos \frac{1}{2} x$ pl. 4π szerint periodikus. Ez 2π szerint periodikus függvényekből nem állítható elő. A 4π szerint periodikus függvények esetén teljes rendszer:

$$\left\{ 1;\ \cos \tfrac{1}{2}x;\ \sin \tfrac{1}{2}x;\ \cos x;\ \sin x;\ \cos \tfrac{3}{2}x;\ \sin \tfrac{3}{2} x;\ \cos 2x; \ldots \right\}$$

4. $$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1} .$$

Az eredmény mindkét esetben ugyanaz.
Ennek következő az oka:
A 2π szerint periodikus függvények terében teljes rendszer:

$$H_1 = \left\{1;\ \cos x;\ \sin x;\ \cos 2x;\ \sin 2x;\ \cos 3x,\ \sin 3x;\ \ldots\right\}$$

A π szerint periodikus függvények terében teljes rendszer:

$$H_2 = \left\{1;\ \cos 2x;\ \sin 2x;\ \cos 4x;\ \sin 4x;\ \cos 6x;\ \sin 6x; \ldots\right\}$$

Tehát $H_2 \subset H_1 \cdot H_2$ elemeiből előállítható $|\sin x|$, így ezek az elemek egyben H_1-nek is elemei. Hasonlóképpen: ha $|\sin x|$-t $k\pi$ szerint periodikus függvénynek tekintjük ($k=1;2;3;\ldots$), ugyanezt az eredményt kapjuk. Tehát a <u>legkisebb</u> periódus alapvető szerepet játszik.

5. Ld a 4. feladat megoldását!

6. a) $$\int_0^{2\pi} \sin^6 x\, dx = (\sin^3 x;\ \sin^3 x) = \sum_{k=1}^{3} b_k^2 \|\sin kx\,^2\|,$$

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x,$$

$$b_1 = 3/4;\quad b_2 = 0;\quad b_3 = -1/4,$$

$$\|\sin kx\| = \pi,$$

Ezzel:

$$\int_0^{2\pi} \sin^6 x\, dx = \pi \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{16}\right) = \boxed{\frac{5\pi}{8}}$$

b) $\frac{5\pi}{8}$

c) $\frac{5\pi}{16}$.

7. A IX.3./13. g) feladat kapcsán már láttuk, hogy D-nek nem létezik inverze, hiszen nem egy-egy értelmű:

$$D\,x = D\,(x + c).$$

Alkalmas leszűkítésének azonban van inverze. Maga az inverz attól függ, hogy ezt a leszűkítést hogyan hajtjuk végre (gondoljunk pl. arra, hogy a sin x függvény alkalmas leszűkítésének az inverze miképpen függ a leszűkítéstől!)
Tekintsük most a

$$H_y = \left\{ y \in L_2 \;:\; y = x+c; \quad c \in \mathbb{R} \right\}$$

függvényhalmazt! H_y minden elemét egyetlen elembe képezi le D. Ha most H_y-ból bármely L_2-beli y-ra egyértelműen kiválasztunk egy elemet, akkor az egy-egy értelműséget biztosítottuk. Mutassuk meg az adott kiválasztás egyértelműségét!
Legyen $\bar{x} \in H_y$ egy tetszőleges elem, amelyre

$$\int_{\pi-\omega}^{\pi/\omega} \bar{x}(t)\,dt = \bar{c}\ .$$

Legyen most a kiválasztott elem $x = \bar{x} - \omega\bar{c}/2\pi$. Erre

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} x(t)\,dt = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \bar{x}(t)dt - \omega\bar{c}/2\pi \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} dt = 0.$$

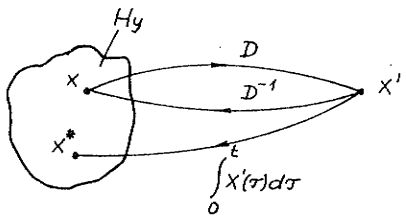
Állítjuk, hogy $x_1(t) \in H_y$ is eleget tesz a megadott követelménynek:

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} x_1(t)\,dt = 0.$$

Mivel $x_1 \in H_y$ így létezik c_1, hogy $x(t) \equiv x_1(t) + c_1$. Ebből

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} x(t)\, dt = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} x_1(t)\, dt + c_1 \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} dt = 0.$$

Ez azonban maga után vonja, hogy szükségszerűen $c_1 = 0$! Végsősoron tehát H_y-ból sikerült egyértelműen az x elemet kiválasztani. Ehhez D az $x'(t)$ függvényt rendeli. Az inverz visszajuttat x-hez (l. ábrát!)



76. ábra

Figyeljük azonban meg, hogy a 0-tól t-ig való integrálás visszajuttat ugyan H_y-ba, de nem feltétlenül x-t eredményezi:

$$x^*(t) = \int_0^t x'(t)\, dt = x(t) - x(o).$$

Ha tehát $x(o) \neq 0$, akkor így valóban nem x-hez jutunk vissza. x-hez akkor jutunk vissza, ha x^*-hoz hozzáadjuk még $x(o)$-ot.
Most már csak annyit kell belátnunk, hogy

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \int_0^t x'(s)\, ds\, dt = x(o),$$

ami egyszerűen adódik. Tehát az így definiált D^{-1}-zel:

$$Dx = x' \quad ; \quad D^{-1} x' = x.$$

A bizonyítandó formulát most már egyszerűen $x' \rightleftarrows x$ betűcserével nyerjük.

b) Mindkét altér L_2 valódi altere. Így ezek elemei L_2-ben nem képezhetnek teljes rendszert: nem páros függvények nem állíthatók elő csupán páros függvényekkel, nem páratlanok pedig csupán páratlanokkal. Mindegyiknek külön-külön azonban megvan a maga teljes rendszere, hiszen páros függvény előállítható csupa páros függvénnyel, páratlan pedig csupa páratlannal. Páros függvények alterében teljes rendszer:

$$\{1;\ \cos\omega x;\ \cos 2\omega x;\ \cos 3\omega x;\ \ldots\}.$$

Páratlan függvények alterében teljes rendszer:

$$\{\sin\omega x;\ \sin 2\omega x;\ \sin 3\omega x;\ \ldots\}.$$

c) Az áttekinthetőség kedvéért közöljük az idevonatkozó tételeket (rövidített formában):

<u>A.tétel</u>

A $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ konvergens sorozatok Hilbert teret képeznek. E teret ℓ_2-vel jelöljük.

<u>B.tétel</u>

Legyen H Hilbert-tér és benne $e_1, e_2, \ldots$ teljes ortonormált rendszer. Akkor pontosan az ℓ_2-beli sorozatok azok, amelyek valamely H-beli elem koordinátái. Ha tudnánk, hogy létezik (∞-dimenziós) Hiblert tér, akkor a B. tételnek az A. tétel valóban egyszerű következménye. De figyeljük meg, hogy a B. tétel (és az 5. fejezet valamennyi tétele) éppen e <u>feltevésből</u> indul ki. A feltevés következményeiből <u>nem</u> következtethetünk a feltevés igazságára. Tehát az A. tételt valóban bizonyítanunk kell.

8. $$(e^{P_n t};\ e^{P_m t}) = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} e^{-2\alpha t}\, e^{(\alpha+in\omega)t}\, e^{(\alpha-im\omega)t}\, dt =$$

$$= \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} e^{i(n-m)\omega t} dt = \left.\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega}\right|_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} = 0;$$

$n \neq m$.

a) $\sin x = \frac{1}{2i} e^{ix} - \frac{1}{2i} e^{-ix}$

b) $\sin^3 x = \frac{3}{8i} e^{ix} - \frac{3}{8i} e^{-ix} - \frac{1}{8i} e^{3ix} + \frac{1}{8i} e^{-3ix}$

c) $f(x) = \frac{2}{\pi} \left[\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x - \dots\right] =$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^{ki\pi x} - e^{-ki\pi x}}{2\,ki}$$

d) $\cos \pi x \sin^2 \pi x = \frac{1}{4} \cos \pi x - \frac{1}{4} \cos 3\pi x =$

$$= \frac{e^{i\pi x}}{8} + \frac{e^{-i\pi x}}{8} - \frac{e^{3i\pi x}}{8} - \frac{e^{-3i\pi x}}{8}$$

9. Legyen $f(x) \cong \sum_{k=o}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$,

akkor

$$F_n(x) = \sum_{k=o}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\|f - F_n\|^2 = \int_0^{2\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

a) $f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}$

$$a_k = 0; \qquad b_k = 2(-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

$$\|f - F_n\| = \sqrt{\frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}} \le \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + \int_{n+1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}} < 0{,}01$$

A feltétel teljesül, ha $\boxed{n > 15\ 000}$.

b)

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k^2}\cos kx - \frac{4\pi}{k}\sin kx\right)$$

$$\|f - F_n\| = 4\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^4} + \frac{\pi^2}{k^2}\right)} < 0{,}01$$

$$\boxed{n > 1{,}7\cdot 10^6}.$$

Figyeljük meg, hogy a konvergencia egyik esetben sem egyenletes, és az $x = \pi$ (a) feladat) ill. az $x = 2\pi$ (b) feladat) helyen a Fourier-sor nem az adott függvényértékhez konvergál, tehát $\mathbb{R}$-n pontonkénti konvergenciáról nem beszélhetünk.

10. Ha $x(t) = \cos kx$, akkor

$$y(t) = \frac{(2-k^2)\cos kx + 3k\sin kx}{(2-k^2)^2 + 9k^2},$$

ha $x(t) = \sin kx$, akkor

$$y(t) = \frac{-3k\cos kx + (2-k^2)\sin kx}{(2-k^2)^2 + 9k^2}$$

Ha $x(t) = 1$, akkor $y(t) = \frac{1}{2}$.

Ezzel:

$$D = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 1/10 & -3/10 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 3/10 & 1/10 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -2/40 & -6/40 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 6/40 & -2/40 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ & & & & & \frac{2-k^2}{(2-k^2)^2+9k^2} & \frac{-3k}{(2-k^2)^2+9k^2} & \cdots \\ & & & & & \frac{3k}{(2-k^2)^2+9k^2} & \frac{2-k^2}{(2-k^2)^2+9k^2} & \cdots \\ & & & & & & \vdots & \end{bmatrix}$$

D^{-1} létezik:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \\ & & & & & 2-k^2 & 3k & \cdots \\ & & & & & -3k & 2-k^2 & \cdots \\ & & & & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

8. Ha $f(t) = e^t$, akkor $f(t) \rightarrow F(z) = \frac{1}{z-1}$ az (1.2.) képlet szerint. Így $f'(t) = e^t \rightarrow \frac{1}{z-1}$ és $z \cdot F(z) - f(o) =$
$= z \frac{1}{z-1} - 1 = \frac{z}{z-1} - 1 = \frac{z-z+1}{z-1} = \frac{1}{z-1} \leftarrow f'(t)$. Tehát $f'(t) = e^t$-re valóban teljesül az 1.2. tétel állítása, az, hogy $f'(t) \rightarrow z \cdot F(z) - f(o)$.

9. $f(t) \rightarrow F(z)$. Ekkor az 1.2. tétel szerint $f'(t) \rightarrow z \cdot F(z) - f(o)$. $f(o) = \sin^2(o) = 0$, és $f'(t) = (\sin^2 t)' = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \rightarrow \frac{2}{z^2+4}$ az (1.3.) összefüggés révén. Tehát $z \cdot F(z) - f(o) = \frac{2}{z^2+4}$, ahonnan

$$F(z) = \frac{2}{z(z^2+4)} \leftarrow \sin^2 t.$$

10. $\frac{z^2+2}{z(z^2+4)}$

11. $\frac{2}{(z-1)^2}$

12. $\frac{2z\beta}{(z^2+\beta^2)^2}$

13. $(z^2-z-1)F(z)$.
Az 1.2. tétel szerint $f(t) \rightarrow F(z)$, $f'(t) \rightarrow z\,F(z) - f(o) =$
$= z\,F(z)$, $f''(t) \rightarrow z^2F(z) - z\,f(o) - f'(o) = z^2F(z)$.
Innen azt kapjuk, hogy $f''(t) - f'(t) - f(t) \rightarrow (z^2-z-1)\,F(z)$.

14. $(z^4-5z^3-4z^2+2z-1)F(z) - 5z^3+25z^2+21z-17 + \frac{8}{z}$

15. Az $1 \to \frac{1}{z}$ (1.2.) képletből kiindulva és (1.6.)-ot egymásután ismételten alkalmazva adódik, hogy
$-t \to -\frac{1}{z^2}$, azaz $t \to \frac{1}{z^2}$; $-t^2 \to \frac{2}{z^3}$, tehát $t^2 \to \frac{2}{z^3}$;
$-t^3 \to \frac{3!}{z^4}$, általában $t^n \to \frac{n!}{z^{n+1}}$.

17. $\frac{2(z^2+z+1}{(z^2-1)^2}$

18. $\frac{2z^2+4z+8}{(z^2+4)^2}$

19. $\frac{2z^3-6z}{(z^2+1)^3}$

20. $\frac{6z^4-8}{z^8+8z^4+16}$

21. $\frac{1}{z(z-1)}$.

Az (1.2.) összefüggés alapján $e^{\alpha t} \to \frac{1}{z-\alpha}$, így fennáll, hogy $e^t \to \frac{1}{z-1}$. Az integrálási 1.4. tétel szerint
$\int_0^t e^\tau \, d^\tau \to \frac{\frac{1}{z-1}}{z} = \frac{1}{z(z-1)}$. (Természetesen az eredmény az integrál kiszámításával is megkapható.)

23. $\frac{1}{z(z^2+1)}$

24. $\frac{z^2-\beta^2}{z(z^2+\beta^2)^2}$

25. $\frac{2}{z(z+1)^3}$

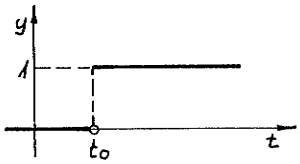
27. a) $\dfrac{(z-\alpha)^2-\beta^2}{((z-\alpha)^2+\beta^2)^2}$

b) $\dfrac{2(z-\alpha)\beta}{((z-\alpha)^2+\beta^2)^2}$

c) $\beta\left\{\dfrac{z-\alpha}{((z-\alpha)^2+\beta^2)^2}+\dfrac{z+\alpha}{((z+\alpha)^2+\beta^2)^2}\right\}$

28. Az általánosított egységfüggvény és grafikonja:

$$\eta(t-t_o) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \geq t_o \\ 0, & \text{ha } t < t_o \end{cases}$$



77. ábra

Ekkor $\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \geq 0 \\ 0, & \text{ha } t < 0 \end{cases}$, és $\eta(t) \rightarrow \frac{1}{z}$ az (1.2.) összefüggés szerint, tehát az 1.6. tétel után

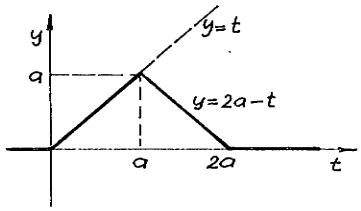
$$\eta(t-t_o) \rightarrow \frac{e^{t_o z}}{z}.$$

29. $\dfrac{1-e^{-\tau z}}{z}$.

Az f(t) függvény az általánosított egységfüggvény segítségével az $f(t) = \eta(t)-\eta(t-\tau)$ alakban írható fel. Ez az összefüggés az $\eta(t)$ és $\eta(t-\tau)$ függvények ábráiból is közvetlenül leolvasható. Így például a 28. példa megoldása szerint

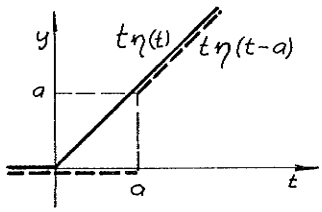
$$f(t) = \eta(t)-\eta(t-\tau) \rightarrow \frac{1}{z}-\frac{e^{-\tau z}}{z} = \frac{1-e^{-\tau z}}{z}.$$

30. $\frac{1}{z^2}\,(1-e^{-az})^2$.



78. ábra

Az általánosított egységfüggvény segítségével f(t) kifejezhető: $f(t) = t\eta(t)-t\eta(t-a)+(2a-t)\eta(t-a)-$ $-(2a-t)\eta(t-2a)$. A felírás helyessége az első két tagra vonatkozóan az alábbi ábrából is kiolvasható.



79. ábra

(Készítsünk hasonló ábrát a másik két tagra is!) Átalakítással $f(t)=t\eta(t)-2(t-a)\eta(t-a)+(t-2a)\eta(t-2a)$. Ha kihasználjuk, hogy $f(t)=t\eta(t)\rightarrow\frac{1}{z^2}$ - a transzformációs táblázat II. képlete szerint - és a késleltetési tétel szerint $f(t-t_o)=(t-t_o)\eta(t-t_o)\rightarrow e^{-t_o z}\,\frac{1}{z^2}$, akkor az f(t) függvény transzformáltja a következő lesz:

$$f(t)\rightarrow\frac{1}{z^2}-2\,\frac{1}{z^2}\,e^{-az}+\frac{1}{z^2}\,e^{-2az},\text{ vagy } f(t)\rightarrow\frac{1}{z^2}\,(1-e^{-az})^2.$$

31. $\frac{1-2e^{-z}+e^{-2z}}{z}$

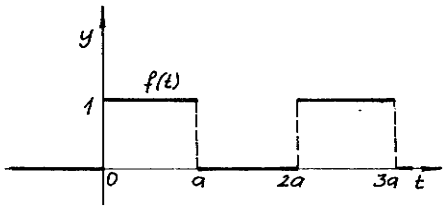
32. $\dfrac{e^{-az}}{z+b}$

33. $\dfrac{1-e^{-az}}{z^2}$

34. $\dfrac{e^{-az}-e^{-bz}}{z^2}$

35. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \eta(t-n) = \dfrac{1}{z(1-e^{-z})}$

36. $\dfrac{1}{z(1-e^{-az})}$.



80. ábra

f(t) periódusa T = 2a, így a $0 \le t < 2a = T$ intervallumban $f_o(t)$-t külön megoldva az adódik, hogy

$$f_o(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le t < a \\ 0, & \text{ha } a \le t < 2a \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

Így az 1.7. tétel szerint

$$F(z) = \frac{1}{1-e^{-zT}} \cdot \int_0^T e^{-zt} f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-z2a}} \int_0^{2a} e^{-zt} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2az}} \int_0^a e^{-zt} dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2az}} \frac{e^{-zt}}{-z} \Bigg|_0^a = \frac{1}{1-e^{-2az}} \left(\frac{e^{-az}}{-z} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{z(1+e^{-az})}.$$

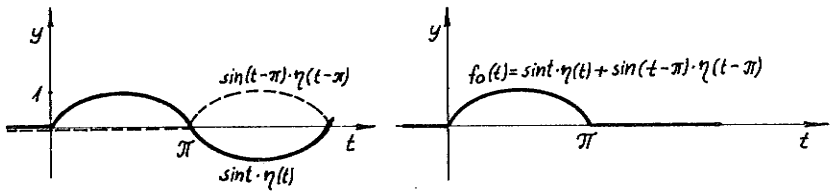
(Ugyanehhez az eredményhez a következő módon is eljuthatunk.

Legyen $f_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le t < a \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$. A 29. példa megoldása szerint $f_o(t) = f_1(t) \rightarrow \frac{1}{z}(1-e^{-za}) = F_o(z)$, és minthogy a periódus $T = 2a$, az (1.18.) összefüggésből

$$F(z) = \frac{1}{1-e^{-z2a}} F_o(z) = \frac{1}{1-e^{-z2a}} \cdot \frac{1}{z} \cdot (1-e^{-za}) =$$

$$= \frac{1}{1+e^{-za}} \frac{1}{z}$$ adódik.)

37. $F(z) = \frac{1}{z^2+1} \frac{1}{1-e^{-\pi z}}$. Ezt megkaphatjuk a 36. példa megoldása szerint integrálással, vagy a következőképpen is. $\sin t\, \eta(t)$-t folytonos, $\sin(t-\pi) \cdot \eta(t-\pi)$-t szaggatott vonal jelöli a következő ábra.



81. ábra

Ismeretes, hogy $\sin t\, \eta(t) \rightarrow \frac{1}{z^2+1}$, így az 1.6. tétel szerint

$$\sin(t-\pi) \cdot \eta(t-\pi) \rightarrow e^{-\pi z} \frac{1}{z^2+1}.$$

Mindezekből

$$f_o(t) \rightarrow \frac{1}{z^2+1} + e^{-\pi z} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2+1} (1+e^{-\pi z}) = F_o(z),$$

és figyelembe véve, hogy a periódus $T = 2\pi$; az (1.18.) összefüggés révén

$$F(z) = \frac{1}{1-e^{-z2\pi}} \cdot F_o(z) = \frac{1}{1-e^{-z\pi}} \cdot \frac{1}{z^2+1} .$$

38. $F(z) = \frac{1}{z} \frac{1-e^{-\pi z}}{1+e^{-\pi z}}$

39. Az $f(t) = \cos t$ és $g(t) = t$ konvolúciója:

$\int_0^t \cos\tau \cdot (t-\tau)\,d\tau = 1 - \cos t$. Ennek Laplace-transzformáltja - a $t \rightarrow \frac{1}{z^2}$ és $\cos t \rightarrow \frac{1}{z^2+1}$ összefüggések révén - az 1.8. tétel szerint

$$F(z) \cdot G(z) = \frac{1}{z^2} \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z \cdot (z^2+1)} .$$

(Megjegyzések. 1. Természetesen a konvolúció Laplace-transzformáltja a következő módon is számolható:

$1 - \cos t \rightarrow \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z(z^2+1)}$ a transzformációk táblázatának I és IV képlete alapján.

2. A konvolúció úgy is meghatározható, hogy először a Laplace-transzformáltját számoljuk ki, ez $\frac{1}{z(z^2+1)}$, majd - például résztörtekre bontása után - az utóbbinak inverz Laplace-transzformáltját vesszük.)

40. $\frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} t \cos t$.

$\hat{F}(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$. Alkalmazzuk a konvolúció tételt!

Használjuk fel, hogy $F(z) = \frac{z}{z^2+1} \leftarrow \cos t = f(t)$!

Fennáll a következő:

$$\frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{z^2+1} \frac{z}{z^2+1} = F(z) \cdot G(z) \leftarrow \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \cos\tau \cos(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos(2\tau-t) + \cos t)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\tau-t)}{2} + \tau\cos t\right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\,t\cos t\,.$$

41. $\cos t - \frac{1}{2}\,t\sin t.$

$\hat{F}(z) = \dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}$. A konvolució tétel most közvetlenül nem alkalmazható, mivel $\dfrac{z^3}{(z^2+1)^2} = \dfrac{z^2}{z^2+1}\,\dfrac{z}{z^2+1}$, és az első tényező inverzét nem ismerjük. Végezzük el a $\dfrac{z^3}{(z^2+1)^2} = z \cdot \dfrac{z}{z^2+1}\,\dfrac{z}{z^2+1}$ átírást! A zárójelben álló szorzat inverzét az előző példában meghatároztuk, befejezésül alkalmazzuk rá az 1.2. tételt, minthogy a zárójel előtt a z szorzótényező áll. A 40. példa megoldása szerint

$$\frac{z}{z^2+1}\,\frac{z}{z^2+1} \longleftarrow \int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)\,d\tau = f(t).$$ Tehát az első differenciálási tétel szerint

$$z \cdot \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = z\,F(z) \longleftarrow f'(t) + f(o) = \frac{d}{dt}\int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^0 \cos\tau\cos(0-\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\,t\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right] =$$

$$= \cos t - \frac{1}{2}\,t\sin t.$$

(Megjegyzés. A Laplace-transzformáltak táblázata a IV, XII képleteinek felhasználásával egy másik megoldás a következő

$$\frac{z^3}{(z^2+1)^2} = \frac{z(z^2+1-1)}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{z^2+1} - \frac{z}{(z^2+1)^2} \longleftarrow \cos t - \frac{1}{2}\,t\sin t.)$$

42. $t\,e^{t}$.
A konvoluciót az őt definiáló integrál kiszámításán kívül a 39. példa megoldásának megjegyzése szerint is meghatározhatjuk. Ha ugyanis $f(t) = g(t) = e^{t} \longrightarrow F(z) = G(z) = \frac{1}{z-1}$, akkor a konvolúció 1.8. tétel szerint $\int_0^t e^{\tau}\, e^{t-\tau}\, d\tau \longrightarrow F(z)\cdot G(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$, míg a transzformáltak táblázatából $\frac{1}{(z-1)^2} \longleftarrow t\cdot e^{t}$.

A két utolsó reláció miatt $\int_0^t e^{\tau}(e^{t-\tau})\,d\tau = t\,e^{t}$.

43. $\frac{1}{60}\,t^{6}$

44. A konvolúció kommutatív és disztributív voltának kihasználásával

$$\cos^2 t * t + t * \sin^2 t = t * \cos^2 t + t * \sin^2 t =$$
$$= t * (\cos^2 t + \sin^2 t) = t * 1 = f(t) * g(t) =$$
$$= \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \tau\,d\tau = \frac{t^2}{2}.$$

45. $2(-\sin t + \cos t - 1)$

46. $\dfrac{1}{(z-1)(z^2+1)}$

47. $\dfrac{2}{z^2(z^2-1)}$

48. $\dfrac{2}{z^3(z-2)}$

49. $\frac{1}{5}\,(3\sin 3t - 2\sin 2t)$

50. $e^{-t} - (1+t)\,e^{-2t}$

51. $\frac{1}{2}\,e^{2t}\,(t^2 - 4t + 6) - e^{-t}(t+3)$

52. $\frac{1}{5}$ (2 sin 2t - cos 2t + e^t)

53. e^t-t-1. ($F(z) = \frac{1}{z-1}$ -re a Laplace-transzformált kétszeri integrálásával is megkapható.)

54. a) $\frac{1}{2}$ (ch t - cos t)

b) $\frac{1}{2}$ (sh t - sin t)

c) $\frac{1}{2}$ (ch t + cos t - 2)

d) $\frac{1}{2}$ (e^t - sint - cos t)

e) $\frac{1}{2}$ (e^t+ sin t - cos t)

f) $\frac{1}{2}$ (e^t+ cos t - sin t - 2)

55. Ha $f(t) \rightarrow F(z)$, akkor az 1.5. tételt (n+1)-szer alkalmazva a

$$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t)\,dt^{n+1} \rightarrow \frac{1}{z^{n+1}} F(z)$$

összefüggés adódik. Másrészt a konvolúció tétel szerint

$$\frac{1}{n!} \int_0^t (t-\tau)^n f(\tau)\,d\tau \rightarrow \frac{1}{z^{n+1}} F(z).$$

56. $e^t(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t)$.

I. megoldás

A kifejtési tételt alkalmazva $q_2(z) = z$ és $p_2(z) = z^2-2z+5$ polinomra, annak figylembevételével, hogy $p_2(z)$ zérushelyei $z_1 = 1+2i$ és $z_2 = 1-2i$ a következő adódik

$$\frac{z}{z^2-2z+5} = \frac{q_1(z)}{p_2(z)} = \frac{q_1(z_1)}{p_2'(z_1)} \frac{1}{z-z_1} + \frac{q_2(z_2)}{p_2'(z_2)} \frac{1}{z-z_2} =$$

$$= \frac{1+2i}{2(1+2i)-2} \frac{1}{z-(1+2i)} + \frac{1-2i}{2(1-2i)-2} \frac{1}{z-(1-2i)} \longleftarrow$$

$$\frac{1+2i}{4i}\, e^{(1+2i)t} + \frac{1-2i}{-4i}\, e^{(1-2i)t} = e^{t}(\cos t + \frac{1}{2}\sin 2t)$$

II. megoldás

$F(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z + 5}$. Elemi átalakításokkal ezt a törtet olyan törtek összegére bontjuk, amelyek inverzei a Laplace-transzformáltak táblázatából már ismertek.

$$\frac{z}{z^2 - 2z + 5} = \frac{z - 1 + 1}{(z-1)^2 + 4} = \frac{z-1}{(z-1)^2 + 4} + \frac{1}{(z-1)^2 + 4}.$$

Mivel a táblázat VIII és IX képletei alapján

$$\frac{z-1}{(z-1)^2 + 4} \longleftarrow e^{t}\cos 2t, \quad \frac{1}{(z-1)^2 + 4} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{(z-1)^2 + 2^2} \longleftarrow \frac{1}{2}e^{t}\sin 2$$

ezért $\dfrac{z}{(z-1)^2 + 4} \longleftarrow e^{t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)$.

57. $\frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-t}(\cos t\sqrt{3} + \sqrt{3}\sin t\sqrt{3})$.

$F(z) = \dfrac{1}{z^3 - 8}$. Ebben a példában is az integrálszámításban használt elemi kifejtési módszereket használunk. Bontsuk fel az adott törtet elemi törtekre!

$$\frac{1}{z^3 - 8} = \frac{1}{(z-2)(z^2 + 2z + 4)} = \frac{A}{z-2} + \frac{Bz + C}{z^2 + 2z + 4}.$$

Az együtthatók meghatározására fennáll az azonosság:

$$1 = A(z^2 + 2z + 4) + (Bz + C)(z - 2).$$

$z=2$ helyettesítéssel $A = \frac{1}{12}$, $z=0$ helyettesítéssel $C = -\frac{1}{3}$, a másodfokú tagok összehasonlításából $B = -\frac{1}{12}$ adódik. Következésképpen

$$\frac{1}{z^3-8} = \frac{1}{12}\,\frac{1}{z-2} - \frac{1}{12}\,\frac{z+4}{z^2+2z+4} = \frac{1}{12}\,\frac{1}{z-2} -$$

$$- \frac{1}{12}\,\frac{(z+1)+3}{(z+1)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{12}\,\frac{1}{z-2} - \frac{1}{12}\,\frac{z+1}{(z+1)^2+(\sqrt{3})^2} -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{12}\,\frac{\sqrt{3}}{(z+1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

Innen a transzformáltak táblázatának III, VIII. és IX képleteinek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(t) = \frac{1}{12}\,e^{2t} - \frac{1}{12}\,e^{-t}\,(\cos t\sqrt{3} + \sqrt{3}\,\sin t\sqrt{3}).$$

(Megjegyezzük, hogy az 56. és 57. példa függvényei az $\frac{z}{(z-1-2i)(z-1+2i)}$, illetve az

$\frac{1}{(z-2)\left[z-(-1+3i)\right]\left[z-(-1-3i)\right]}$ átalakítás után formálisan is és a kifejtési tétel segítségével is felbonthatók elemi törtekre.)

58. $e^t - e^{-t}\,(\cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t)$

59. $1 - 2e^t + e^{3t}$

60. a) $\frac{1}{25}\,(e^{-3t} + (5t-1)\,e^{2t})$

b) $(\omega^2-1)\sin t + \frac{(1-\omega^2)}{\omega}\cdot\sin\omega t$, ha $\omega \neq 0$ és $\omega \neq 1$

$\frac{1}{2}\,t\cos t - \frac{1}{2}\sin t$, ha $\omega = 1$, $t - \sin t$, ha $\omega = 0$

61. A jobb oldal Laplace-transzformáltja a transzformációs (IX.6.2.) táblázat alapján $\frac{2}{(z-3)^3} + \frac{1}{z+1}$. Legyen $x(t)$ Laplace-transzformáltja $X(z)$, $x(t) \to X(z)$. Annak figyelembevételével, hogy az 1.2. tétel szerint

$$\dot{x}(t) \to z\,X(z) - x(o) = z\,X(z) \quad \text{és}$$

$$\ddot{x}(t) \to z^2 X(z) - z\,x(o) - \dot{x}(o) = z^2\,X(z)$$

$$z^2X(z) + z\,X(z) - 12\,X(z) = \frac{2}{(z-3)^3} + \frac{1}{z+1}$$

egyenlet állítható fel, innen

$$X(z) = \frac{2}{(z-3)^3(z^2+z-12)} + \frac{1}{(z+1)(z^2+z-12)} =$$

$$= \frac{2}{(z-3)^4(z+4)} + \frac{1}{(z+1)(z-3)(z+4)} .$$

Az 1.9. tétel segítségével a második tag előállítható résztörtek összegeként:

$$\frac{1}{(z+1)(z-3)(z+4)} = -\frac{1}{12}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{28}\frac{1}{z-3} + \frac{1}{21}\frac{1}{z+4} .$$

A Laplace-transzformáltak táblázatának X képletéből

$$F(z) = \frac{1}{(z-3)^4} \leftarrow \frac{t^3 e^{3t}}{3!} = f(t) \quad \text{és}$$

$$G(z) = \frac{2}{z+4} \leftarrow 2e^{-4t} = g(t) .$$

Tehát $\dfrac{2}{(z-3)^4(z+4)} = F(z)\,G(z) \leftarrow \displaystyle\int_0^t \frac{\tau^3 e^{3\tau}}{3!}\, 2e^{-4(t-\tau)}\,d\tau$

Ezek alapján X(z) inverz Laplace-transzformáltja

$$x(t) = \int_0^t \frac{\tau^3}{3!} e^{3\tau}\, 2e^{-4(t-\tau)}\,d\tau$$

62. $x(t) = e^{-2t}\left[x_o + (x_1 + 2x_o)t\right]$.

Áttérünk a Laplace-transzformáltakra. Ha $x(t) \rightarrow X(z)$, akkor figylembe véve, hogy a Laplace-transzformáltak táblázatának X képlete alapján

$$t^3 e^{-2t} \rightarrow \frac{3!}{(z+2)^4} .$$

és azt, hogy az 1.2. tétel szerint $\dot{x}(t) \rightarrow z\,X(z) - x(o)$, és $\ddot{x}(t) \rightarrow z^2 X(z) - z\,x(o) - \dot{x}(o)$; a következő egyenletet írhatjuk fel

$$z^2 X(z) - z\,x(o) - \dot{x}(o) + 4(z\,X(z) - x(o) + X(z)) = \frac{3!}{(z+2)^4}\,.$$

$$\text{Innen } X(z) = x(o)\,\frac{z+4}{z^2+4z+4} + \dot{x}(o)\,\frac{1}{z^2+4z+4} +$$

$$+ \frac{6}{(z+2)^4(z^2+2z+4)} = x(o)\,\frac{z+4}{(z+2)^2} + \dot{x}(o)\,\frac{1}{(z+2)^2} + \frac{6}{(z+2)^6}\,.$$

A második és harmadik tag inverzét most is a X képlet alapján határozhatjuk meg:

$$\frac{1}{(z+2)^2} = \frac{1}{(z-(-2))^2} \leftarrow te^{-2t} \quad \text{és} \quad \frac{1}{(z+2)^6} \leftarrow \frac{t^5\,e^{-2t}}{5!}\,.$$

Az első tag inverzének meghatározásához elemi átalakításokkal bontsuk fel azt résztörtek összegére:

$$\frac{z+4}{(z+2)^2} = \frac{z+2+2}{(z+2)^2} = \frac{1}{z+2} + \frac{2}{(z+2)^2} \leftarrow e^{-2t} + 2t\,e^{-2t}.$$

Ezzel X(z) inverze, a keresett megoldás:

$$x(t) = x(o)\cdot(e^{-2t} + 2t\,e^{-t}) + \dot{x}(o)\,t\,e^{-t} + \frac{t^5\,e^{-2t}}{20} =$$

$$= e^{-2t}\left[x(o) + (\dot{x}(o) + 2x(o))\,t\right]$$

63. $x(t) = (t-1)\,\sin(t)$.

A transzformált egyenlet

$$z^2 X(z) + 1 + X(z) = \frac{2z}{z^2+1}\,, \text{ innen } X(z) = \frac{2z}{(z^2+1)^2} - \frac{1}{z^2+1},$$

és a transzformáltak táblázatának XII, V. képleteinek megfelelően

$$X(z) \leftarrow t\,\sin t - \sin t = (t-1)\,\sin t = x(t).$$

64. $x(t) = \operatorname{sh} t$

65. $x(t) = e^{t} - 2e^{2t} + e^{3t}$

66. $x(t) = \frac{1}{4} t e^{3t} \frac{1}{16} e^{3t} + \frac{1}{16} e^{-t}$

67. $x(t) = (x_o - \frac{1}{2}) \operatorname{sh} t + x_1 \operatorname{ch} t + \frac{1}{2} t^2 e^{t} + te^{t}$

68. $x(t) = -\cos 2t - \frac{1}{3} \sin 2t + \frac{2}{3} \sin t$

69. $x(t) = e^{-t}\cos 2t\,(x_o - \frac{1}{16}) - e^{-t} \sin 2t\,(\frac{1}{2} x_o + \frac{1}{2} x_1) +$

$+ e^{t}\,(\frac{1}{8}t - \frac{1}{16})$

70. Az (1) egyenletre az $x(t) \to X(z)$, a (2) egyenletre az $x_1(t) \to X_1(z)$ jelöléseket vezetve be, és véve a két egyenlet Laplace-transzformáltját $X = z \cdot X_1 \cdot L\left\{\cos t\right\}$ adódik.
Az első differenciálási tétel szerint

$$\dot{x}_1(t) \to z\, X_1(z) - x_1(o) = z\, X_1(z).$$

Tehát $X = L\left\{\dot{x}_1(t)\right\} L\left\{\cos t\right\} = \dot{x}_1(t) * \cos t =$

$= \int_0^t \dot{x}_1(\tau) \cos(t-\tau)\,d\tau$. (Itt kihasználtuk a konvolúció 8. tételét is.)

71. $x(t) = 1-e^{-t}-(1-e^{-(t-2)})\eta(t-2) = \begin{cases} 1-e^{-t}, & \text{ha } 0 \le t < 2 \\ e^{-t}(e^{2}-1), & \text{ha } t \ge 2 \end{cases}$

72. $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{\cos(2t-1)}{8 \cos 1}, & \text{ha } 0 \le t < 1 \\ \frac{\cos(2t-3)}{8 \cos 1}, & \text{ha } 1 \le t < 2 \end{cases}$

73. $x(t) = x(0) + c_1 \frac{t^3}{3!}$.

Legyen $x(t) \to X(z)$! Ekkor

$\dot{x} \to z\, X(z) - x(o)$, $\ddot{x} \to x^2 X(z) - z\, x(o) - \dot{x}(o)$,

és az 1.2. tétel szerint

$$t\ddot{x} \longrightarrow -\frac{d}{dz}\left\{z^2X(z) - zx(o) - \dot{x}(o)\right\} = -z^2\frac{d\,X(z)}{dz} -$$

$$- 2z\,X(z) + x(o).$$

A kiindulási $t\ddot{x}-2\dot{x} = 0$ egyenlet a következő alakba megy át:

$$- z^2\frac{d\,X(z)}{dz} - 2z\,X(z) + x(o) - 2z\,X(z) + 2x(o) = 0,$$

illetve

$$\frac{d\,X(z)}{dz} + \frac{4}{z}X(z) = \frac{3x(o)}{z^2}.$$

Ezt az egyenletet mint $X(z)$-re vonatkozóan lineáris inhomogén elsőrendű differenciálegyenletet megoldva azt kapjuk, hogy $X(z) = \frac{x(o)}{z} + \frac{c_1}{z^4}$, ahonnan a kiindulási egyenlet megoldása a transzformáltak táblázata szerint

$$x(t) = x(o) + c_1\frac{t^3}{3!}$$

74. Az $X(z)$ Laplace-transzformáltra a $\frac{dX}{dz}(-z^2+z) + X(-z+1+n) = 0$ szétválasztható változójú differenciálegyenlet adódik, amelynek megoldása $X(z) = c_1\frac{z^{n+1}}{(z-1)^n} = \frac{c_1}{z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^n$. A hatványozás elvégzése után

$$x(t) = c_1 L_n(t) \text{ adódik, ahol } L_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}\,{}^2\frac{t^k}{(n-k)!}$$

az ún. Laguerre polinom.

75. $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \eta(t-k)$,

$$\text{ahol } \eta(u) = \begin{cases} 1, \text{ ha } u \geq 0 \\ 0, \text{ ha } u < 0. \end{cases}$$

Ha $x(t) \rightarrow X(z)$, akkor az 1.6. tétel szerint $x(t-1) \rightarrow e^{-z}X(z)$, így az egyenlet Laplace-transzformáltjára áttérve azt kapjuk, hogy

$$z\,X(z) = e^{-z}X(z) + \frac{1}{z}, \quad \text{ahonnan}$$

$$X(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{z-e^{-z}} = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-\frac{e^{-z}}{z}} = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{e^{-z}}{z} + \frac{e^{-2z}}{z^2} \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-nz}}{z^n} + \ldots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-kz}}{z^{k+2}}.$$

Minthogy a Laplace-transzformáltak táblázatának II képlete szerint $\frac{1}{z^{k+2}} \leftarrow \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t)$

$$\left(\text{ahol } \eta(t) = \begin{cases} 1, \text{ ha } t \geq 0 \\ 0, \text{ ha } t < 0 \end{cases}\right),$$

így újfent a késleltetési tétel szerint

$$e^{-kz}\,\frac{1}{z^{k+2}} \leftarrow \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t-k),$$

tehát $X(z) \leftarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t-k)$.

76. $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{2k+3}}{(2k+3)!} \eta(t-k)$.

77. $x(t) = (1+\frac{t}{1!})\eta(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(t-k+1)^k}{k!} \eta(t-k+1)$,

ahol $\eta(u) = \begin{cases} 1, & \text{ha } u \geq 0 \\ 0, & \text{ha } u < 0 \end{cases}$.

Az egyenlet Laplace-transzformáltjára

$z\,X(z)-1 = \int_0^{\infty} e^{-zt}x(t-1)dt$ adódik. Végezzük el az integrálban a $t-1 = z$ helyettesítést, majd bontsuk fel az integrált -1-től 0-ig, és 0-tól ∞ -ig terjedő integrálási tartományokra!

78. $x = \frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,t + \frac{3}{4}\,t\,e^{-t}$ és $y = \frac{3}{4}\,t\,\mathrm{sht}$.

Az 1.2. tétel szerint fennáll, hogy

$$x \to X, \quad \dot{x} \to z\,X, \quad \ddot{x} \to z^2X-1, \quad e^t \to \frac{1}{z-1},$$

$$y \to Y, \quad \dot{y} \to z\,Y, \quad \ddot{y} \to z^2Y, \quad e^{-t} \to \frac{1}{z+1}.$$

írjuk fel a transzformált egyenletrendszert!

$$z^2X-1 + z\,X + z^2Y - Y = \frac{1}{z+1}$$

$$z\,X + 2X - z\,Y + Y = \frac{1}{z+1}.$$

Megoldva ezt a rendszert azt kapjuk, hogy

$$X = \frac{1}{8(z-1)} + \frac{3}{4(z+1)^2} - \frac{1}{8(z+1)}; \quad Y = \frac{3z}{2(z^2-1)^2}.$$

A Laplace-transzformáltak táblázatából a III, X, XIV képletek alapján adódik, hogy

$$\frac{1}{z-1} \leftarrow e^t, \quad \frac{1}{(z+1)^2} \leftarrow te^{-t}, \quad \frac{2z}{(z^2-1)^2} \leftarrow t\,\mathrm{sh}\,t,$$

és a rendszer megoldása

$$x = \frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,t + \frac{3}{4}\,te^{-t} \quad \text{és} \quad y = \frac{3}{4}\,t\,\mathrm{sh}\,t.$$

79. $x(t) = e^{t} + e^{2t}, \quad y(t) = e^{t} - e^{2t}$

80. $x(t) = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}, \quad y(t) = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$

81. $$x(t) = \frac{2x_o - y_o}{5}\,\mathrm{ch}\,t - \frac{x'_o + 2y_o}{5}\,\mathrm{sh}\,t + \frac{3x_o + y_o}{5}\cos 2t + \frac{3x'_o + y_o}{5}\sin 2t,$$

$$y(t) = \frac{3\,x'_o + 2y_o)}{5}\,\mathrm{ch}\,t - \frac{3}{5}(2x_o - y'_o)\,\mathrm{sh}\,t - \frac{1}{5}(3x'_o + y_o)\cos 2t + \frac{1}{5}(3x_o + y'_o)\sin 2t.$$

82. $$x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & \text{ha } 0 \le t < 1 \\ 1 - e^{-t} - \mathrm{sh}(t-1), & \text{ha } 1 \le t < 2 \\ -e^{-t} - \mathrm{sh}(t-1) + \mathrm{ch}(t-2), & \text{ha } t \ge 2 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & , \text{ha } 0 \le t < 1 \\ -e^{-t} + \mathrm{ch}(t-1) & , \text{ha } 1 \le t < 2 \\ -e^{-t} + \mathrm{ch}(t-1) - \mathrm{sh}(t-2), & \text{ha } t \ge 2 \end{cases}$$

83. $f(t) = 2\cos t - 1.$

$1 - \cos t = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{sh}(t-\tau)\,d\tau$. Az egyenlet jobb oldala az $f(t)$ és $\mathrm{sh}(t)$ függvények konvolúciója. Áttérve a két oldal Laplace-transzformáltjaira

$$1 - \cos t \to \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{1}{z(z^2 + 1)},$$

és a konvolúció tétel révén

$$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{sh}(t-\tau)\,d\tau = f(t) * g(t) \to \frac{1}{z^2 - 1}\,F(z).$$

A transzformált egyenlet $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z^2-1} F(z)$.

Innen $F(z) = \frac{z^2-1}{z(z^2+1)} = \frac{2z}{z^2+1} - \frac{1}{z}$. Véve az inverz Laplace--transzformáltakat a transzformáltak táblázatának IV, I összefüggései alapján megkapjuk a keresett megoldást:

$$f(t) = 2 \cos t - 1.$$

84. $y(t) = e^{2t}$.

$\int_0^t y(\tau) e^{t-\tau} d\tau = y(t) - e^t$. Áttérünk a transzformáltakra:

$Y(z) \frac{1}{z-1} = Y(z) - \frac{1}{z-1}$. Következésképpen $Y(z) = \frac{1}{z-2}$, tehát

$$y(t) = e^{2t}.$$

85. $x(t) = \frac{1}{2} [\mathrm{ch}\, t + \cos t]$

86. $x(t) = \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{1}{5} \cos t + \frac{3}{5} \sin t$

87. $X_1(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z(z-1)(z^2+1)}$,

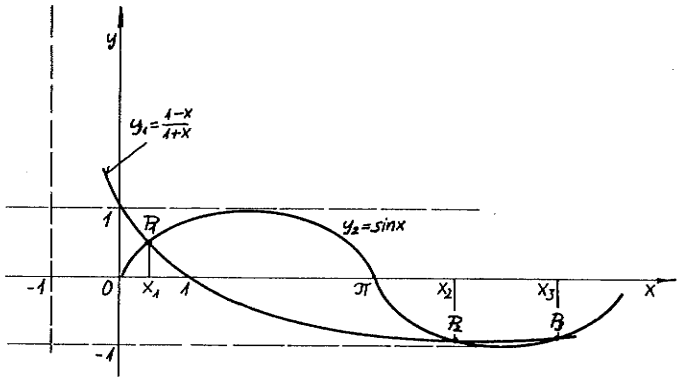
$$X_2(z) = \frac{z^3 - z^2 + 1}{(z-1)(z+1)(z^2+1)}$$

$$x_1(t) = 1 + \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{3}{2} \cos t$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} (\cos t + \mathrm{ch}\, t) - \sin t$$

88. $x(t) = t \sin t$

1. Az egyenletet $\sin x = \frac{1-x}{1+x}$ alakban írva ábrázoljuk az $y = \sin x$ és $y = \frac{1-x}{1+x}$ grafikonokat.



82. ábra

A P_1, P_2, P_3 stb. metszéspontok az y tengelytől jobbra esnek, azaz az egyenletnek csak pozitív gyökei vannak. Bár végtelen számosságú gyök fordul elő (hisz $\frac{1-x}{1+x} < 1$), mégis azok jól elkülöníthetők, minthogy a

$$\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right],\ \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right],\left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right],\ \ldots\left[(2k-1)\frac{\pi}{2};\ (2k+1)\ \frac{\pi}{2}\right]$$

intervallumokban az egyenletnek egy és csakis egy gyöke esik. A gyökök közelítő értékét a metszéspontok abszcisszái adják.

$x = 0{,}4;\ 3{,}8;\ 5{,}5;\ 10{,}4;\ 11{,}5;\ 11\ \frac{\pi}{2} - \varepsilon_3;$

$11\ \frac{\pi}{2} + \varepsilon'_3,\ \ldots\ (4k-1)\ \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n;\ (4k-1)\ \frac{\pi}{2} + \varepsilon'_n.$

ahol $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n,\ \varepsilon'_n = 0.$

2. Minthogy az $1 < x < 10$ intervallumba $0 < \lg x < 1$ ezért az adott egyenlet helyett két egyszerűbb közelítő egyenletet írhatunk fel úgy, hogy a $\lg x$-et 0-val, ill. 1-gyel cseréljük fel az adott egyenletben.

$$x^2 - 9 = 0 \qquad x_{1,2} = \pm 3$$

$$x^2 + 1 - 9 = 0 \qquad x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}.$$

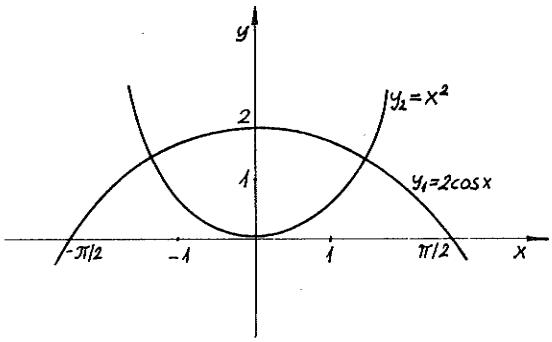
Könnyen belátható, hogy az egyenletnek csak egyetlen pozitív gyöke lehet, ezért az a $[2\sqrt{2};\ 3]$ intervallumba esik, azaz $2{,}82 < x < 3$. Ugyanis $f(x) = x^2 + \lg x - 9$ függvény értéke az intervallum végpontjaiban:

$$f(2{,}82) \approx -0{,}55$$

$$f(3) \approx 0{,}48,$$

vagyis $f(2{,}82) \cdot f(3) < 0$ és $f(x)$ folytonos, valamint $f'(x) = 2x + \frac{\lg e}{x} > 0$, ha $x > 0$.

3. A gyököket grafikusan elkülönítjük az $y_1 = 2\cos x$ és $y_2 = x^2$ függvények metszéspontjai behatárolásával.



83. ábra

Amint az ábrából látható, a legkisebb és egyetlen pozitív gyök a $[0;\ \pi/2]$ intervallumban van. A számítást $a_0 = 0$, $b_0 = 1{,}5$ értékkel kezdjük, és a táblázatban követhetjük. Mivel $f(a_0) > 0$, és $f(b_0) < 0$, ezért az $\frac{a_n + b_n}{2}$ értéket akkor írjuk az a_n oszlopba, ha $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$, és a b_n oszlopba írjuk, ha $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$.

a_n	b_n	$\frac{a_n+b_n}{2}$	$f(\frac{a_n+b_n}{2})$
0,0	1,5	0,75	0,90188
0,75		1,225	-0,40327
	1,125	0,937	0,30645
0,937		0,984	1,13914
	1,031	1,007	0,05475
1,007		1,019	0,01008
1,019		1,022	-0,00116
	1,022	1,0205	0,00446
1,0205		1,0212	0,00183
1,0212		1,0217	-0,00004
	1,0217	1,0215	0,00066
1,0215			

A gyök értéke: $x_o = \frac{1,0215 + 1,0217}{2} = 1,0216 \pm 1 \cdot 10^{-4}$

4. Mivel $f(0,5) = -0,1013$ és $f(0,6) = 0,1921$ és $f(x)$ folytonos, ezért az egyenletnek van gyöke a $[0,5;0,6]$ intervallumban és $f'(x) = e^x + 2x > 0$ ugyanitt, vagyis $f(x)$ monoton. $f''(x)=0$ $e^x + 2 > 0$ a $[0,5;0,6]$-ban, tehát $f(x)$ itt alulról konvex. A közelítő gyök $x_o = 0,537\ 265 \pm 5 \cdot 10^{-5}$.

5. Mivel $f(1,5) = 0,497$ és $f(2,0) = -0,091$ ezért az $[1,5;2]$ intervallumban van gyöke az egyenletnek, továbbá $x = \sin x + 1 \equiv g(x) \in [1,5;2]$ ha $x \in [1,5;2]$ és $|g'(x)| = |\cos x| < q < 1/2$ az $[1,5;2]$ intervallumban, így a fokozatos közelítések módszere konvergens sorozatot állít elő és az egyenletnek egyetlen gyökéhez tart. A számítást $x_1=1,5$ közelítő értékből kiindulva az alábbi sorozatot nyerjük:

1,5; 1,997; 1,911; 1,943; 1,932; 1,935; 1,934 4;
1,934 6; 1,934 55; 1,934 57; 1,934 50; 1,934 56;...

A $q < 1/2$ feltétel teljesülése miatt az eltérés kisebb 10^{-5}-nél.

6. a) $x_o = 1{,}42153$

   b) $x_o = 1{,}31597$

   c) $x_o = 0{,}93935$

   d) $x_o = 1{,}26191$

   d) $x_o = 0{,}97398$

7. a) 1,0953; -0,2624; -1,4743; -2,3556

   b) 8,0060; 1,2855; 0,1960; -1,4785

   c) 2,1462; -0,6821; -1,3178; -4,1463

   d) $\pm$ i 1,0000 $\pm$ i 1,4142

   e) $\pm$2,2361 0,5000 $\pm$ i 1,3229

8. Az $x = \frac{y+4}{y^3}$ és $y = 2 \sin \frac{x}{2} + 1$ függvények ábrázolásával a gyökpár durva közelítésére $x_o = 1$, $y_o = 2$ értékeket kapjuk.
   A h_n, k_n javításokat tartalmazó lineáris egyenletrendszer:

$$y_n - 2 \sin \frac{x_n}{2} - 1 - h_n \cos \frac{x_n}{2} + k_n = 0$$

$$x_n y_n^3 - y_n - 4 + h_n y_n^3 + (3x_n y_n^2 - 1) = 0.$$

   A megoldás négy iterációs lépés után, négy tizedes jegyre kerekítve:

$$x = 0{,}8990 \quad \text{és} \quad y = 1{,}8690$$

9. Az egyenletrendszer célszerű alakja:

$$x = 0{,}1 \sin x + \ln(y+10) = g_1(x,y)$$

$$y = \frac{1}{x+y} = g_2(x,y).$$

   A kezdő gyökpárt a 0,1 sin x tag elhanyagolásával kapott $x = \ln(y+10)$, ill. $y = e^x - 10$ és az $y = \frac{1}{x+y}$ függvények ábrázolásával nyerhetjük:

$$x_o = 2{,}40 \; ; \qquad y_o = 0{,}35.$$

Ellenőrizzük a konvergencia feltételeinek teljesülését:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = -\frac{1}{(x+y)^2}, \qquad \left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_o\\ y=y_o}} \approx 0{,}13 ,$$

ill.

$$\left|\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_o\\ y=y_o}}\right| \approx 0{,}13 , \quad \left|\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_o\\ y=y_o}}\right| \approx 0{,}07, \quad \left|\left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_o\\ y=y_o}}\right| \approx 0{,}10.$$

Mivel az x_o, y_o környezetben g_1 és g_2 parciális deriváltjai folytonosak, azért az iterációs sorozat konvergens. Az egyenletrendszer gyökei öt tizedesjeggyel:

$$x = 2{,}405\ 25 \; ; \qquad y = 0{,}361\ 44.$$

10. A legnagyobb abszolútértékű gyököt az $x + 39 = 0$ egyenlet gyökével, $x_1 = -39$-vel próbáljuk közelíteni, de helyettesítéssel (pl. Horner elrendezéssel) kiszámítva a polinom értékét meggyőződhetünk, hogy ez nem közelítő gyök. Az $x^2 + 39x + 958 = 0$ egyenletből $x_{1,2} = -19{,}5 \pm 24{,}04\,i$, elfogadható közelítő gyököket kapjuk.
A legkisebb abszolútértékű gyök meghatározásához a $-108x - 2000 = 0$ egyenlet gyökét választva ugyancsak rossz közelítő értéket kapunk. A $958x^2 - 1080x - 2000 = 0$ egyenlet gyökeivel próbálkozva $x_4 = -0{,}99$; $x_3 = 2{,}12$ értékek adódnak. Ezek a pontos gyökhöz ($x_4 = -1$, $x_3 = 2$) jó közelítések.

11. A gyökök felső korlátja a McLaurin és Lagrange szabály szerint egyaránt 3,25-nek adódik, alsó becslésként pedig 0,36.
A valós gyökök közelítő értékei: $x_1 = 1{,}15$ $x_2 = 1{,}1$
A megfelelő gyöktényezőkkel való osztás után $x_{3,4} = \pm i$ adódik.

1. a) A kiválasztott pontok módszerével válasszuk $x_7 = 25$ és $y_7 = 0{,}0715$ értéket, amely a pontok közé illesztett egyenes ordináta értéke. Így

$$0{,}0715 = a_o \cdot 25$$

vagyis $a_o = 0{,}00286$, $y_a = 0{,}00286 \cdot x$, $d = 5{,}125 \cdot 10^{-4}$,

$$d_q = 421 \cdot 10^{-4}$$

b) A közepek módszeréhez

$$\sum_{k=1}^{8} e_k = \sum_{k=1}^{8} (y_k - a_o x_k) = 0,$$

és így

$$a_o = \frac{\sum_{k=1}^{8} y_k}{\sum_{k=1}^{8} x_k} \approx 0{,}00287,$$

tehát $y_b = 0{,}00287 \cdot x$; $d = 4{,}875 \cdot 10^{-4}$, $d_q = 339 \cdot 10^{-4}$

c) A legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva

$$\frac{d}{da_o} \sum_{k=1}^{8} (y_k - a_o x_k)^2 = 0,$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{8} x_k (y_k - a_o x_k) = 0,$$

és így

$$a_o = \frac{\sum_{k=1}^{8} y_k x_k}{\sum_{k=1}^{8} x_k^2} \approx 0{,}00288,$$

tehát $y_c = 0{,}00288 \cdot x$, $d = 4{,}625 \cdot 10^{-4}$, $d_q = 287 \cdot 10^{-4}$.
Amint látható, a legjobb eredményt a legkisebb négyzetek módszere szolgáltatja.

2. $\bar{x} = \lg x$, $\bar{y} = \lg y$. Lineáris függvénykapcsolat: $\bar{y} = \lg a + b\,\bar{x} = A + b\,\bar{x}$. A pontok kettős logaritmikus papíron ábrázolva közelítőleg egy egyenesre esnek.

3. $\bar{x} = x$, $\bar{y} = \lg y$

4. $\bar{x} = x^n$, $\bar{y} = y$

5. $\bar{x} = \lg x$, $\bar{y} = \lg(y-c)$. Lineáris függvénykapcsolat: $\bar{y} = \lg a + b\,\bar{x} = A + b\,\bar{x}$.

A c értékét előzőleg az empirikus görbén felvett három pont (x_1, y_1), (x_2, y_2), és $(x_3 = x_1 \cdot x_2, y_3)$ segítségével az

$$y_1 = a\,x_1^{\,b} + c$$

$$y_2 = a\,x_2^{\,b} + c$$

$$y_3 = a\,x_3^{\,b} + c$$

egyenletrendszerből az $x_3^{\,b} = \sqrt{x_1^{\,b} \cdot x_2^{\,b}}$, továbbá $a \cdot x_3^{\,b} = \sqrt{a\,x_1^{\,b} \cdot a\,a_x^{\,b}}$ összefüggés figyelembevételével határozzuk meg:

$$c = \frac{y_1 \cdot y_2 - y_3^{\,2}}{y_1 + y_2 - 2y_3} .$$

6. $\bar{x} = x$, $\bar{y} = \lg(y-c)$. c meghatározása (x_1, y_1), (x_2, y_2) $(x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}, y_3)$ segítségével:

$$c = \frac{y_1 \cdot y_2 - y_3^{\,2}}{y_1 + y_2 - 2y_3} .$$

7. $\bar{x} = x$, $\bar{y} = \frac{x}{y}$, vagy $\bar{x} = \frac{1}{x}$, $\bar{y} = \frac{1}{y}$.

8. $\bar{x} = x$, $\bar{y} = \frac{x-x_k}{y-y_k}$, ahol (x_k, y_k) az empirikus görbe egy pontja. A lineáris függvénykapcsolat $\bar{y} = A + Bx$. Az A és B meghatározása után az empirikus képletet

$$y = y_k + \frac{x - x_k}{A - Bx}$$ alakban írhatjuk.

9. A pontok felrajzolása után az $y = a\,e^{bx}$ típusú empirikus képlettel kísérletezünk. Az összetartozó pontokat (x, lg y) koordinátarendszerben ábrázolva közel egy egyenesen helyezkednek el, ami elképzelésünk helyességét igazolja. A feladatot pl. a közepek módszerével megoldva, a

$$\sum_{k=1}^{4} \lg y_k = 4 \lg a + (b \lg e) \sum_{k=1}^{4} x_k$$

$$\sum_{k=5}^{8} \lg y_k = 4 \lg a + (b \lg e) \sum_{k=5}^{8} x_k$$

egyenletekből meghatározható az a és b paraméter:

$$a = 0{,}000415; \quad b = 0{,}2570.$$

10. A pontokat összekötő görbe alapján feltételezzük, hogy az

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

a megfelelő empirikus képlet. Kiszámítjuk az $\bar{y} = \frac{x-6{,}5}{y-1{,}29}$ koordinátákat és $(x,\bar{y})$ rendszerben ábárázoljuk a pontokat. Mivel közelítőleg egy egyenesre esnek, ezért az $\bar{y} = A + Bx$ egyenlet A és B paramétereit kell meghatároznunk és akkor

$$y = y_k + \frac{x-x_k}{A+Bx}$$

alakban felírhatjuk az empirikus képletet.
A pontokat két csoportba osztva a közepek módszerével meghatározzuk A és B értékét. Az egyenletrendszer

$$5{,}9861 = 3A + 28{,}4B$$

$$15{,}6526 = 3A + 64{,}2B$$

melyből

$$B = 0{,}270 \; ; \quad A = -0{,}561,$$

tehát az empirikus egyenlet

$$y_c = 1,29 + \frac{x-6,5}{-0,561+0,270x}$$

11. $y = ax^b$

12. $y = a_1x + a_o$

13. $y = ae^{bx}$

14. $y = a + bx^3$

15. $y = ax^b + c$

16. $y = \frac{x}{cx+d}$

17. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

18. $y = a_1x + a_o$. A legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva:

$$a_1 \sum_{k=1}^{6} x_k + na_o = \sum_{k=1}^{6} y_k \quad (10,2\ a_1 + 6\ a_o = 4,6729),$$

$$a_1 \sum_{k=1}^{6} x^2_n + a_o \cdot \sum_{k=1}^{6} x_k = \sum_{k=1}^{6} x_n y_k \quad (18,04\ a_1 + 10,2 a_o =$$

$$= 7,98230),$$

ahonnan $a_1 = 0,05481$; $a_o = 0,68564$, vagyis a keresett képlet

$y = 0,6856 + 0,05481 \cdot x$ ($d = 4,167 \cdot 10^{-4}$, $d_q = 115 \cdot 10^{-4}$).

A kiválasztott pontok módszerét alkalmazva

$y = 0,0506 \cdot x + 0,6911$ ($d = 17,667 \cdot 10^{-4}$, $d_q = 3100 \cdot 10^{-4}$).

A közepek módszerével

$a = 0,0547 \cdot x + 0,6858$ ($d = 4,333 \cdot 10^{-4}$, $d_q = 126 \cdot 10^{-4}$)

19. Az empirikus képletet $\varphi(x) = a_2x^2 + a_1x + a_o$ alakban állítjuk elő. A megoldandó egyenletrendszer:

$$a_2 \sum_{k=1}^{8} x_k^4 + a_1 \sum_{k=1}^{8} x_k^3 + a_o \sum_{k=1}^{8} x_k^2 = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 y_k$$

$$a_2 \sum_{k=1}^{8} x_k^3 + a_1 \sum_{k=1}^{8} x_k^2 + a_o \sum_{k=1}^{8} x_k = \sum_{k=1}^{8} x_k y_k$$

$$a_2 \sum_{k=1}^{8} x_k^2 + a_1 \sum_{k=1}^{8} x_k + a_2 n = \sum_{k=1}^{8} y_k .$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$\varphi(x) = 0{,}78765 \cdot x^2 - 0{,}45997 \cdot x + 1{,}80726 \quad (d_q = 0{,}031).$$

20. $y = a_2x^2 + a_1x + a_o$

21. $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$

X. 3.

1. $$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 14 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & -4 \\ 0 & 2 & 13 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1) \begin{vmatrix} 7 & 0 & 14 \\ -4 & 1 & -7 \\ 8 & 2 & 13 \end{vmatrix} = 2(-1)7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2(-1) \cdot 7 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1) \cdot 7 \cdot 1(-5) = 70$$

A számítás egyszerűbb követése érdekében a determináns elemeit egész értékeknek választottuk és a legnagyobb abszolút értékű elemet sem vittük lépésenként a bal felső sarok elem helyére (ez a számítás pontosságát növelné).

2. A determináns értéke (9 értékes jegyre) 144,982 354.

3.
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^3} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2^3} \begin{vmatrix} -2 & 2 & 10 & 6 \\ 6 & -6 & -2 & -4 \\ -4 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^3} \frac{1}{(-2)^3} \begin{vmatrix} 0 & -56 & -28 \\ -4 & 28 & 16 \\ -8 & -52 & -32 \end{vmatrix} = \frac{1}{32} \begin{vmatrix} -4 & 28 & 16 \\ 0 & -56 & -28 \\ 8 & 52 & 32 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{128} \begin{vmatrix} 224 & 112 \\ -432 & -256 \end{vmatrix} = -\frac{1}{128}(-8960) = 70$$

4. A determináns a következő alakban írható fel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & \frac{17}{6} & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 14/3 & \frac{35}{17} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -70$$

5. a) -1

   b) 160

6. Csupa sor művelet alkalmazásával:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{7}{9} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{9} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{6} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Párhuzamosan elvégezve a transzformációkat az E egységmátrixon:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ \frac{4}{9} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{9} & \frac{17}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Szinguláris esetben det A=0 és elemi műveletekkel az n-ed rendű A mátrix nem hozható a kívánt alakra! Ugyanis ekkor rang (A) < n = rang (E).

7. $$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}0304 & 0{,}1528 & 0{,}2460 \\ -0{,}0367 & 0{,}0133 & 0{,}3960 \\ 0{,}1400 & -0{,}0312 & -0{,}5603 \end{bmatrix}$$

8. a) det A_1 = 0,262 257; det A_2 = - 3,316 045;
det A_3 = 144,982 354; det A_4 = -30, 993 654;
det A_5 = 8,787 270.

b) $$A_1^{-1} \begin{bmatrix} 5{,}5411 & -0{,}4374 & -2{,}6161 \\ -20{,}0917 & 3{,}2098 & 8{,}8253 \\ 11{,}0239 & -1{,}9092 & -4{,}3583 \end{bmatrix}$$

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}9721 & -0{,}3904 & 0{,}8946 \\ -0{,}3904 & 0{,}3365 & 0{,}1173 \\ 0{,}8946 & 0{,}1173 & -0{,}0756 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0519 & 0{,}1939 & -0{,}2717 & 0{,}1117 \\ -0{,}0010 & -0{,}2390 & 0{,}7608 & -0{,}4712 \\ 0{,}0535 & -0{,}1796 & 0{,}4419 & -0{,}0428 \\ -0{,}3241 & -0{,}2185 & 0{,}5547 & -0{,}0465 \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}4127 & 0{,}1250 & -0{,}2193 & 0{,}1126 \\ 0{,}4256 & -0{,}1253 & -0{,}7210 & -0{,}3107 \\ 0{,}3090 & -0{,}0984 & -0{,}3504 & -0{,}4317 \\ 0{,}1895 & -0{,}5829 & -0{,}3878 & -0{,}3743 \end{bmatrix}$$

$$A_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}0246 & -0{,}6855 & 0{,}1503 & -0{,}5531 \\ -0{,}0003 & 1{,}0672 & -0{,}7607 & 0{,}3573 \\ -0{,}8270 & 0{,}3228 & 0{,}3907 & 0{,}4338 \\ -0{,}2388 & 0{,}6155 & -0{,}5317 & 0{,}5490 \end{bmatrix}$$

X.4.

1. Mivel h=0,1, így a harmadrendű differenciával bezárólag véve a tagokat:

$$y'(0,85) \approx \frac{1}{0,1}\,(0,1434 - \frac{1}{2}\,0,0015) = 1,384.$$

itt a $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_o} = \frac{1}{h}\,(\Delta y_o - \frac{1}{2}\,\Delta^2 y_o + \frac{1}{3}\,\Delta^3 y_o -$

$$- \frac{1}{4}\,\Delta^4 y_o + \frac{1}{5}\,\Delta^5 y_o - \ldots)$$

képletet használtuk fel. A keresett pontos érték négy tizedes jeggyel:

$$y' = \operatorname{ch} x \Big|_{x_o = 0,85} = 1,3835.$$

2. $a \approx 0$; $b \approx -1$

3. A számítás eredményei értelemszerűen összevethetők a keresett derivált pontos értékével:

$$f'(0,005) = -1/(1,005)^2.$$

4.

x_i	a) $I(x_i)$	b) $I(x_i)$
0,0	0,0000	0,0000
0,2	0,0100	
0,4	0,0402	0,4014
0,6	0,0908	
0,8	0,1623	0,162 19
1,0	0,2557	
1,2	0,3719	0,371 51
1,4	0,5124	
1,6	0,6791	0,678 39
1,8	0,8747	
2,0	1,1027	1,101 32

5. a) -0,127 32
   b) -0,756 84
   c) -0,174 09
   d) 0,116 83
   e) 0,845 88

6. a) $x(1,0) \approx 1,238\ 88$
   b) $y(1,0) \approx 1,238\ 93$

7. k

	a)	b)	c)	d)	e)
0	0,200 00	0,100 00	0,500 00	0,200 00	4,600 00
1	0,214 65	0,110 86	0,526 66	0,201 34	5,001 08
2	0,250 52	0,124 95	0,558 37	0,206 73	5,422 64
3	0,309 05	0,144 70	0,598 06	0,218 37	5,861 64
4	0,392 47	0,172 83	0,649 17	0,238 68	6,314 79
5	0,504 46	0,212 31	0,715 92	0,270 46	6,778 76
6	0,650 96	0,266 45	0,803 74	0,316 91	7,250 37
7	0,841 89	0,338 88	0,920 00	0,381 89	7,726 77
8	1,094 26	0,433 64	1,075 30	0,470 09	8,205 54
9	1,439 19	0,555 17	1,286 11	0,582 22	8,684 85
10	1,939 01	0,708 39	1,580 09	0,740 43	9,163 48

8. a) $y \approx 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{100}$

b) $y \approx \frac{x^4}{2}$

9. a) Az $y_o \equiv 1$ választással az iteráció n-ik lépésében éppen a megoldás (e^{-x}) n. fokú Taylor polinomját kapjuk.

$$y_o = 1 = T_o(x)$$

$$y_1 = 1 + \int_o^x -y\,dx = 1 - x = T_1(x)$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x -(1-x)\,dx = 1 - x + \frac{x^2}{2} = T_2(x)$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x -(1-x+\frac{x^2}{2})\,dx = 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} = T_3(x) \text{ s.i.t.}$$

b) $y_o=0$ választással $y \approx \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \ldots$ $(= e^{-x^2} + x^2 - 1)$

10. Mivel az egyenlet megoldása $y = e^{-x}$, a nyert közelítő érték az $x = 1$ helyen az elméleti $1/e \approx 0.367879$ értékkel vetendő össze.