BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
ÉPÍTŐMÉRNÖKI KAR

Dr. Sebestyén Lukács

MATEMATIKAI FELADATGYŰJTEMÉNY ÉS PÉLDATÁR II/1.

Műegyetemi Kiadó, 1993.

Jegyzet azonosító: **91281**

A J9 - 1281 számú KÉZIRAT tartalmi változatlan utánnyomása.

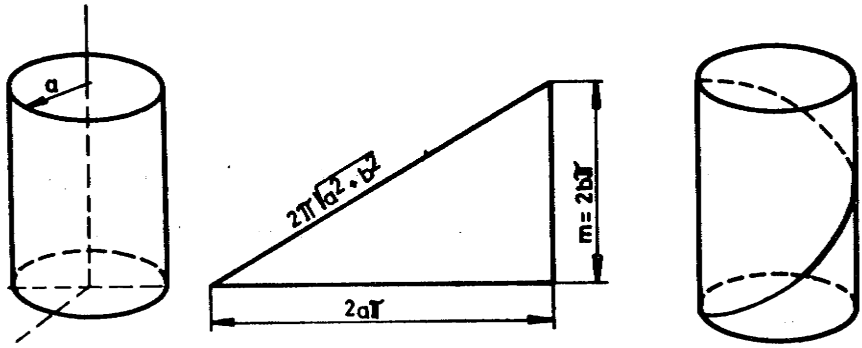
A Budapesti Műszaki Egyetem Építőmérnöki Kar megrendelése alapján
kiadja a **Műegyetemi Kiadó.**
Felelős vezető: Veress János
Terjedelem: 17,5 A/5 ív
Készült az **Új Élet Mg. Tsz. Magyaralmás**
Nyomdaipari Önelszámoló részlegében
Felelős vezető: Frigy Ottóné
Munkaszám: 93/264

FELADATOK

TÉRGÖRBÉK, FELÜLETEK

1. Térgörbe előállítása, az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ függvény és határértéke, az érintővektor

1.01. Tekintsük az a sugarú, s m magasságú körhengert és az 1. ábrán látható derékszögű háromszöget. A háromszöget a hengerre tekerjük. Ily módon a háromszög átfogója egy térgörbét ír le. Írjuk fel ezen térgörbe egyenletét.



1. ábra

1.02. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = a^2$ hengerfelület és az $x + y + z = a$ sík metszésvonalának egyenletét.

1.03. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = a^2$ hengerfelület és a

$z = x\,y$ felület metszésvonalának egyenletét.

1.04. Ábrázoljuk az

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = t \cos t\, \underline{i} + t \sin t\, \underline{j} + t\underline{k}, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$$

vektor-skalár fügvénnyel adott görbeszakaszt.

Határozzuk meg a következő vektor-skalár függvények határértékét a megadott pontban.

1.05. $\underline{r}(t) = \frac{\sin 5t}{t} i + \frac{tgt - \sin t}{\sin^3 t} \underline{j} + \frac{tgt}{t} \underline{k}$; $t = 0$.

1.06. $\underline{r}(t) = \frac{cht - \cos t}{t^2} \underline{i} + \frac{tgt - t}{t - \sin t} \underline{j} + \frac{t\,ctgt - 1}{t^2} \underline{k}$; $t = 0$.

1.07. $\underline{r}(t) = \frac{\sqrt[3]{t^2} - 2\sqrt[3]{t} + 1}{(t-1)^2} \underline{i} + \frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1} \underline{j} + \frac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt[4]{t} - 1} \underline{k}$;

$t = 1$.

1.08. $\underline{r}(t) = \frac{tgt - tga}{t - a} \underline{i} + \frac{a^t - t^a}{t - a} \underline{j} + \frac{cht - cha}{t - a} k$; $t = \underline{a}$,

$a > 0$.

1.09. Határozzuk meg az

$\underline{r}(t) = \underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t), u(t) = r_1(t) r_2(t), \underline{r}(t) = r_1(t) x \underline{r}_2(t)$

függvények megadott pontbeli határértékét, ha

$$\underline{r}_1(t) = \frac{\sin st}{t} \underline{i} + \frac{tgt - \sin t}{\sin^3 t} \underline{j} + \frac{tgt}{t} \underline{k},\ t = 0,$$

$$\underline{r}_2(t) = \frac{\sqrt{1 + t^2}}{1 + t} \underline{i} + (2t + 1)\underline{j} + (t^2 + 3)\underline{k},\ t = 0.$$

A feladatot oldjuk meg oly módon, hogy előbb végezzük el a kijelölt műveletet és azután képezzük a határértéket, s az alábbi tételek alkalmazásával is.

Tétel. Ha $\lim\limits_{t \to to} \underline{r}_1(t) = \underline{r}_1$, $\lim\limits_{t \to to} \underline{r}_2(t) = \underline{r}_2$, akkor

$$\lim_{t \to to} [\underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t)] = \underline{r}_1 \pm \underline{r}_2,$$

$$\lim_{t \to to} \underline{r}_1(t) \underline{r}_2(t) = \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2,$$

$$\lim_{t \to to} (\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t)) = \underline{r}_1 \times \underline{r}_2.$$

Csak az utóbbi állítás igazolására emlékeztetünk (az első és a második hasonló módon igazolható), ehhez pedig elegendő azt belátni, hogy

$$\lim_{t\to to} [\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t) - \underline{r}_1 \times \underline{r}_2] = \underline{0}.$$

Alkalmazzuk a következő átalakítást:

$$\lim_{t\to to} [\underline{r}_1 \times \underline{r}_2(t) - \underline{r}_1 \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1 \times \underline{r}_2(t) - \underline{r}_1 \times \underline{r}_2] =$$

$$= \lim_{t\to to} [(\underline{r}_1(t) - \underline{r}_1) \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1 \times (\underline{r}_2(t) - \underline{r}_2)] .$$

Az $\underline{r}_1(t)\to\underline{r}_1$ feltevés miatt $(\underline{r}_1(t) - r_1)\to\underline{0}$; az $\underline{r}_2(t)$-nek a t_o pontban van véges határértéke, tehát $\underline{r}_2(t)$ a t_o környezetében korlátos, s íly módon

$$\lim_{t\to to} (\underline{r}_1(t) - r_1) \times \underline{r}_2(t) = \underline{0}.$$

Hasonló módon látható be az is, hogy

$$\lim_{t\to t_o} \underline{r}_1 \times (\underline{r}_2(t) - \underline{r}_2) = 0.$$

Folytonosak-e a következő vektor-skalár függvények a megadott pontban, s ha ott nem folytonosak, van-e határértékük?

1.10. $\underline{r}(t) = t^2\underline{i} + (2-t)\underline{j} + t\sin t\ \underline{k}$; $t = 0$.

1.11. $\underline{r}(t) = t^2\underline{i} + (2-t)\underline{j} + \frac{\sin t}{t}\underline{k}$; $t = 0$.

1.12. $\underline{r}(t) = 3\,t\,\underline{i} + e^{\frac{1}{t-2}}\,\underline{j} + (2-t^2)\,\underline{k}$; $t = 2$.

1.13. $\underline{r}(t) = \frac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}\,\underline{i} + 3\,t\,\underline{j} + t^3\underline{k}$, $t = 1$.

1.14. $\underline{r}(t) = \frac{1}{t}\,\underline{i} + \frac{t^2-9}{t+3}\,\underline{j} + t\,\underline{k}$, $t = 3$, $t = -3$.

Mely számközben folytonosak a következő vektor-skalár függvények?

1.15. $\underline{r}(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}}\,\underline{i} + \dfrac{\sin 3t}{t}\,\underline{j}\ t^2\underline{k}.$

1.16. $\underline{r}(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}\,\underline{i} + t^2\underline{j} + \dfrac{2^t - t^2}{t - 2}\,k.$

1.17. Tekintsük az $\underline{r}(\varphi) = a\cos\varphi\,\underline{i} + a\sin\varphi\,\underline{j} + \underline{k}a(1-\cos\varphi-\sin\varphi)$ $(0 \le \varphi < 2\pi)$ görbét. Ábrázoljuk a görbét. Határozzuk meg és ábrázoljuk az

$$\frac{\underline{r}(\varphi_o + \Delta\varphi) - \underline{r}(\varphi_o)}{\Delta\varphi}, \quad \dot{\underline{r}}(\varphi_o).$$

vektorokat, ahol $\varphi_o = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_o + \Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Határozzuk meg a következő vektor-skalár függvények derivált vektor-skalár függvényét!

1.18. $\underline{r}(t) = \frac{1}{2}\cos t\,\underline{i} - \dfrac{t}{1 - t^2}\,\underline{j} + \ln(1 + t)\underline{k}$, $-1<t<1$, $1<t<+\infty$

1.19. $\underline{r}(t) = \ln t^2\underline{i} + \ln t\underline{j} + \sqrt{t^2 - 1}\,\underline{k}$, $1 < t < +\infty$.

1.20. Számítsuk ki az

$$(\underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t))^{\bullet}, \quad (\underline{r}_1(t)\cdot\underline{r}_2(t))^{\bullet}, \quad (\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t))^{\bullet}$$

deriváltakat tetszőleges olyan pontban, ahol $\underline{r}_1(t)$ és $\underline{r}_2(t)$ is deriválható, ha

$$\underline{r}_1(t) = t^2\underline{i} + 3t\underline{j} + 5\underline{k}, \qquad -\infty<t<+\infty,$$
$$\underline{r}_2(t) = e^{2t}\underline{i} + 3\cos t\,\underline{k}, \qquad -\infty<t<+\infty.$$

Itt alkalmazhatjuk következő deriválási szabályokat:

$$(\underline{r}_1(t) \pm \underline{r}_2(t))^{\bullet} = \dot{\underline{r}}_1(t) \pm \dot{\underline{r}}_2(t), \quad (\underline{r}_1(t)\underline{r}_2(t))^{\bullet} =$$
$$= \dot{\underline{r}}_1(t)\cdot\underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t)\dot{\underline{r}}_2(t),$$

$$(\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t))^{\bullet} = \dot{\underline{r}}_1(t) \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t) \times \dot{\underline{r}}_2(t).$$

Írjuk fel a következő térgörbék adott pontjához tartozó érintőegyenes egyenletét!

1.21. $\underline{r}(t) = (t-3)\underline{i} + (t^2+1)\underline{j} + t^2 k$, $t_o = 2$.

1.22. $\underline{r}(t) = \sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} + \frac{1}{\cos t}\underline{k}$, $t_o = 0$.

1.23. $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + t^2\underline{k}$, $t_o = 2$.

1.24. $\underline{r}(t) = \frac{t}{1+t}\underline{i} + \frac{1+t}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}$, $t_o = 1$.

1.25. $\underline{r}(t) = \cos^2 t\underline{i} + \sin^2 t\underline{j} + t^2\underline{k}$, $t_o = \frac{\pi}{4}$.

1.26. $\underline{r}(t) = \sqrt{t^2+1}\,\underline{i} + \ln 3^t\underline{j} + 3^t\underline{k}$, $t_o = 1$.

1.27. $\underline{r}(t) = \mathrm{ch}\,t\underline{i} + \mathrm{sh}\,t\underline{j} + \underline{k}$, $t_o = 0$.

1.28. $\underline{r}(t) = -t^3\underline{i} + 2t^2\underline{j} + 3t\underline{k}$, $t_o = -1$.

1.29. Van-e olyan pontja az

$\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + a\sin t\underline{j} + bt\underline{k}$ $(a > 0,\ b > 0$ áll.)

görbének a $0 \leq t \leq 2\pi$ szakaszon, amihez tartozó érintőegyenes párhuzamos az $\underline{r}(0)$, $\underline{r}(2\pi)$ pontokat összekötő egyenessel?

1.30. Határozzuk meg az

$\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + a\sin t\underline{j} + bt\underline{k}$ $(a > 0,\ b > 0$ áll.)

görbe azon pontját, amelyhez tartozó érintőegyenes párhuzamos az $\underline{r}(0)$ ponthoz tartozó egyenesre és az $\underline{r}(\frac{\pi}{2})$ pontra illeszkedő síkkal! Másrészt bizonyítsuk be, hogy az $\dot{\underline{r}}(t)$ és a $\underline{k}$ vektor által meghatározott szög állandó!

1.31. Határozzuk meg az

$\underline{r}(t) = \frac{1}{4}t^4\underline{i} + \frac{1}{3}t^3\underline{j} + \frac{1}{2}t^2\underline{k}$

térgörbe azon pontjait, ahol az érintőegyenes párhuzamos az $x + 3y + 2z = 0$ síkkal!

1.32. Határozzunk meg az

$$\underline{r}(t) = t^3\underline{i} + t^2\underline{j} + t\underline{k}$$

térgörbe $-1 < t < 0$ és $0 < t < 1$ szakaszán olyan pontot, amelyhez tartozó érintőegyenes párhuzamos az $\underline{r}(-1)$, $\underline{r}(-0)$, $\underline{r}(1)$ pontokra illeszkedő síkkal! Igazoljuk, hogy ilyen pont biztosan van!

1.33. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\underline{i} + (\sin t + t\cos t)\underline{j} + (t^2 + 1)\underline{k}$$

térgörbe azon pontjait, ahol az érintő párhuzamos az (y, z) síkkal!

1.34. Felírandó az

$$\underline{r}(t) = 2t^3\underline{i} + 3t^2\underline{j} - 6t\underline{k}$$

térgörbe $x + 4y + 5z - 10 = 0$ síkkal párhuzamos érintőegyeneseinek egyenlete!

1.35. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + t^3\underline{k}$$

térgörbét $t_0 = 2$ paraméterű pontjában érintőegyenesnek a koordináta síkokkal való metszéspontját.

2. Térgörbe ívhossza

2.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + a\sin t\underline{j} + bt\underline{k}$$

görbe (hengerre írt csavarvonal) $0 \le t \le t_0$ szakaszának ívhosszát egyszerűen a Pythagoras tétellel.
Számítsuk ki a következő térgörbék megadott szakaszának ívhosszát.

2.02. $\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + b\underline{j} + a\sin t\underline{k}$, $(a > 0,\ b > 0,$ áll.$)$
$0 \leqq t \leqq t_0$.

2.03. $\underline{r}(t) = at\underline{i} + \sqrt{3ab}\, t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}$, $(a > 0,\ b > 0,\ \text{áll.})$ $0 \leqq t \leqq 1$.

2.04. $\underline{r}(t) = t^4\underline{i} + \frac{4}{3} t^3\underline{j} + t^2\underline{k}$, $-1 \leqq t \leqq 2$.

2.05. $\underline{r}(t) = (t + 1)\underline{i} + \frac{1}{2} t^2\underline{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{t^3}\, \underline{k}$, $-1 \leqq t \leqq 1$.

2.06. $\underline{r}(t) = e^{at}(\cos t\underline{i} + \sin t\underline{j} + b\underline{k})$, $(a > 0,\ b > 0,\ \text{áll.})$ $-\infty < t \leqq t_o$.

2.07. $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (\sqrt{2}\, t + 3)\underline{j} + 3t^2\underline{k}$, $0 \leqq t \leqq 1$.

2.08. $\underline{r}(t) = t\cos t\underline{i} + t\sin t\underline{j} + t\underline{k}$, $0 \leqq t \leqq 9$.

2.09. $\underline{r}(t) = t\cos(3\ln t)\underline{i} + t\sin(3\ln t)\underline{j} + 2t\underline{k}$, $0 \leqq t \leqq e^{\pi/3}$.

2.10. $\underline{r}(t) = \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t}\, \underline{i} + \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t}\, \underline{j} + (t - \operatorname{th} t)\underline{k}$, $0 \leqq t \leqq 10$.

2.11. $\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + b\sin t\underline{j} + c\underline{k}$, $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ \text{áll.})$ $0 \leqq t \leqq 2\pi$.

2.12. $\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + a\sin t\underline{j} + \underline{k}\, a^2\sin t\cos t$, $(a > 0,\ \text{áll.})$ $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$.

2.13. $\underline{r}(t) = a\cos\varphi\, \cos\varphi\, \underline{i} + a\cos\varphi\sin\varphi\underline{j} + a\sin\varphi\underline{k}$ $(a>0,\ \text{áll.})$ $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$

Írjuk fel a következő térgörbék egyenletét ívhossz paraméterrel.

2.14. $\underline{r}(t) = \cos t\underline{i} + \sin t\underline{j} + t\underline{k}$.

2.15. $\underline{r}(t) = a\cos t\underline{i} + a\sin t\underline{j} + bt\underline{k}$, $a > 0,\ b > 0$,

2.16. $\underline{r}(t) = t\cos t\underline{i} + t\sin t\underline{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\, t^{3/2}\underline{k}$.

2.17. $\underline{r}(t) = (1 - t)\underline{i} + (3 - 2t)\underline{j} + (5 + 2t)\, \underline{k}$.

2.18. $\underline{r}(t) = \operatorname{ch} t\underline{i} + \operatorname{sh} t\underline{j} + t\underline{k}$.

3. Simulósík, kisérő háromél (trieder)

Határozzuk meg a következő térgörbék kisérő triederét. Írjuk fel a kisérő trieder egyeneseinek és síkjainak egyenletét a megadott pontban.

3.01. $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}$, $t_0 = 2$.

3.02. $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^2\underline{k}$, $t_0 = -1$.

3.03. $\underline{r}(t) = (t + 3)\underline{i} + \frac{1}{3}t^3\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}$, $t_0 = 1$.

3.04. $\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3}t^3\underline{k}$, $t_0 = 1$.

3.05. $\underline{r}(t) = 4\cos t\underline{i} + 4\sin t\underline{j} + t\underline{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$.

3.06. $\underline{r}(t) = t\ln t\underline{i} + t\ln t\underline{j} + t\underline{k}$, $t_0 = 1$.

3.07. $\underline{r}(t) = \sin^2 t\underline{i} + \cos 2t\underline{j} - \frac{1}{\sin t}\underline{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$

3.08. $x = \mathrm{ch}\,t,\ y = \mathrm{sh}\,t,\ z = t$, $t_0 = 0$.

3.09. $x = e^t,\ y = e^{2t},\ z = e^t - 1$, $t_0 = 0$.

3.10. $x = \frac{1}{4}t^4,\ y = \frac{1}{3}t^3,\ z = \frac{1}{2}t^2$, $t_0 = 1$.

4. Térgörbe görbülete

Számítsuk ki a következő térgörbék görbületét a megadott pontban.

4.01. $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}$, $t_0 = 2$.

4.02. $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^2\underline{k}$, $t_0 = -1$.

4.03. $\underline{r}(t) = (t + 3)\underline{i} + \frac{1}{3}t^3\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}$, $t_0 = 1$.

4.04. $\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3}t^3\underline{k}$, $t_0 = 1$.

4.05. $\underline{r}(t) = 4\cos t\,\underline{i} + 3\sin t\,\underline{j} + t\underline{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$.

4.o6. $\underline{r}(t) = t\ln t\underline{i} + t\ln t\underline{j} + t\underline{k}$, $t_o = 1$.

4.07. $\underline{r}(t) = 5\ln^2 t\underline{i} + \cos 2t\underline{j} - \frac{1}{\sin t}\underline{k}$, $t_o = \frac{\pi}{4}$.

4.08. $x = \mathrm{ch} b$, $y = \mathrm{sh} t$, $z = t$, $t_o = 0$.

4.09. $x = e^t$, $y = e^{2t}$, $z = e^t - 1$, $t_o = 0$.

4.10. $x = \frac{1}{4}t^4$, $y = \frac{1}{3}t^3$, $z = \frac{1}{2}t^2$, $t_o = 1$.

Határozzuk meg a következő felületek metszésvonalai adott p pontjához tartozó kisérő trieder egyeneseinek és síkjainak egyenletét, valamint a görbületét.

4.11. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2x + z = 0$, $P_o(1, 1, 1)$.

4.12. $x^2 + y^2 + z^2 = 56$, $x + 3y + 4z = 26$, $P_o(6, 4, 2)$.

4.13. $4x^2 - 3xy + 6y = 0$, $3x^2 + xy - 6z = 0$, $P_o(0, 0, 0)$.

4.14. $xy - z^2 = 0$, $x + y + z - 3 = 0$, $P_o(1, 1, 1)$.

4.15. $2x^2 + 3yz - 6y = 0$, $3y^2 - xz - 3z = 0$, $P_o(0, 0, 0)$.

4.16. $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $P_o(1, 1, 1)$.

Számítsuk ki a következő görbék tetszőleges P pontjához tartozó görbületét.

4.17. $\underline{r}(t) = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\varphi)\underline{i} + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi +$
$+ \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\varphi)\underline{j}\ (1 - 2\sin\varphi)\underline{k}$.

4.18. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x^2 + y^2 = z^2$

4.19. $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$, $z = 4t$

4.20. $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$.

4.21. Határozzuk meg az

$$x^2 + y^2 = 25,\quad z = x$$

görbe görbületének a szélsőértékeit.

4.22. Határozzuk meg a

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

felület és a

$$\cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y = 0 \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

síkok metszésvonalainak görbületét a (0, 0, 0) pontban, s válasszuk ki ezen görbék (síkmetszetek) közül az extremális görbületűeket.

5. Sebesség és gyorsulás

A következő vektor-skalár függvények egy pont mozgását írják le (a t paraméter az idő). Határozzuk meg a pont sebesség- és gyorsulás- vektorát. A gyorsulás-vektort bontsuk fel érintőirányú (a sebesség-vektorral párhuzamos) és erre merőleges összetevőkre. Végül határozzuk meg a pályamenti sebességet és gyorsulást adott t_o időpontban.

5.01. $\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3} t^3\underline{k}, \qquad t_o = 1.$

5.02. $\underline{r}(t) = 5 \cos t\ \underline{i} + 5 \sin t\ \underline{j} + t\underline{k}$ (t tetszőleges).

5.03. $\underline{r}(t) = \mathrm{ch}\, t\ \underline{i} + \mathrm{sh}\, t\ \underline{j} + t\underline{k}$ (t tetszőleges).

6. Torzió, Frenet-képletek

Számítasuk ki a következő térgörbék adott pontjához tartozó torzióját.

6.01. $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}, \qquad t_o = 2.$

6.02. $\underline{r}(t) = 3\,t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3\,t^2\underline{k}, \qquad t_o = -1.$

6.03. $\underline{r}(t) = (t + 3)\underline{i} + \frac{1}{3} t^3\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}, \qquad t_o = 1.$

6.04. $\underline{r}(t) = (t^3 - 3)\underline{i} + (t + 1)\underline{j} + \frac{1}{3} t^3\underline{k}, \qquad t_o = 1.$

6.05. $\underline{r}(t) = 4\cos t\,\underline{i} + 4\sin t\,\underline{j} + t\underline{k}$, $\quad t_0 = \frac{\pi}{3}$.

6.06. $\underline{r}(t) = t\ln t\,\underline{i} + t\ln t\,\underline{j} + t\underline{k}$, $\quad t_0 = 1$.

6.07. $\underline{r}(t) = \sin^2 t\,\underline{i} + \cos 2t\,\underline{j} - \frac{1}{\sin t}\,\underline{k}$, $\quad t_0 = \frac{\pi}{4}$.

6.08. $x = \operatorname{ch} t,\quad y = \operatorname{sh} t,\quad z = t,\qquad t_0 = 0$.

6.09. $x = e^t,\quad y = e^{2t},\quad z = e^t - 1,\qquad t_0 = 0$.

6.10. $x = \frac{1}{4}t^4,\quad y = \frac{1}{3}t^3,\quad z = \frac{1}{2}t^2,\qquad t_0 = 1$.

6.11. $x^2 - y^2 + z^2 = 1,\quad y^2 - 2x + z = 0,\qquad P_0(1, 1, 1)$.

6.12. $x^2 + y^2 + z^2 = 56,\quad x + 3y + 4z = 26;\qquad P_0(6, 4, 2)$.

6.13. $4x^2 - 3xy + 6y = 0,\quad 3x^2 + xy - 6z = 0,\qquad P_0(0, 0, 0)$.

6.14. $xy - z^2 = 0,\quad x + y + z - 3 = 0,\qquad P_0(1, 1, 1)$.

6.15. $2x^2 + 3yx - 6y = 0,\quad 3y^2 - xz - 3z = 0,\qquad P_0(0, 0, 0)$.

6.16. $x^2 + y^2 = 2,\quad x^2 + y^2 - 2z = 0,\qquad P_0(1, 1, 1)$.

Számítsuk ki a következő térgörbék tetszőleges pontjában a görbületet és a torziót a Frenet-képletek alkalmazásával

6.17. $\underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + t\underline{k}$,

6.18. $\underline{r}(t) = a\cos t\,\underline{i} + a\sin t\,\underline{j} + bt\underline{k}$, $\quad a > 0,\quad b > 0$,

6.19. $\underline{r}(t) = t\cos t\,\underline{i} + t\sin t\,\underline{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\underline{k}$.

6.20. $\underline{r}(t) = (1 - t)\underline{i} + (3 - 2t)\underline{j} + (5 + 2t)\underline{k}$, $\quad t = 1$.

6.21. $\underline{r}(t) = \operatorname{ch} t\,\underline{i} + \operatorname{sh} t\,\underline{j} + t\underline{k}$, $\quad t = 0$.

7. Térgörbe menetének vizsgálata

7.1. Vizsgáljuk az

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (-t + 1)\underline{k}$$

térgörbét a $t_o = 2$ paraméterü pontjának környezetében (azaz határozzuk meg a ponthoz tartozó kisérő triedert, s írjuk fel a görbe ezen rendszerre vonatkozó egyenletét).

7.2. Vizsgáljuk az

$$\underline{r}(t) = 3\, t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}$$

térgörbét a $t_o = -1$ paraméterű pontjának környezetében.

8. Kinetikai alkalmazás

8.1. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (-t + 1)\underline{k}$$

függvény szerint mozgó pont sebesség- és gyorsulásvektorát a $t_o = 2$ pontban. Bontsuk fel az $\ddot{\underline{r}}(t)$ vektort $\underline{t}$ és $\underline{f}$ irányú összetevőkre. Határozzuk $v(t)$-t, és $a(t)$-t!

8.2. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}$$

mozgás $t = -1$ időponthoz tartozó sebesség- és gyorsulás-vektorát, a pályamenti sebességet és a gyorsulást.

9. A felület értelmezése, megadása, az $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$ függvény

9.1. Tekintsük a tér

$$\underline{r}(u, v) = \underline{a}u + \underline{b}v \quad (-\infty < u < +\infty \;,\; -\infty < v < +\infty)$$

vektorai által meghatározott pontjainak összességét, ahol

$$\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}, \quad \underline{b} = 2\,\underline{k}.$$

Ábrázoljuk az $u = 1$, $u = 2$, $v = \frac{1}{2}$, $v = 2$ vonalakat.

9.2. A $z = f(x,y)$ tipusú függvények tanulmányozása során vizsgáljuk a $z = xy$ felületet. Írjuk fel az origóból a felület általános pontjába mutató $\underline{r} = \underline{r}(x,y)$ vektort, azaz adjuk meg a felület egyenletét $\underline{r} = r(u,v)$ alakban ($u = x$, $v = y$).

9.3. Milyen görbék lesznek az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, a\cos u \cos v + \underline{j} \cos u \sin v + \underline{k} \sin u$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2},\; 0 \leq v \leq 2\pi\right)$$

felület $u = u_o$, $v = v_o$ vonalai?

9.4. Felírandó azon hengerfelület egyenlete, amelynek vezérgörbéje az

$$\underline{r}(u) = u\underline{i} + \frac{u}{2}\underline{k} \qquad (-\infty < u < +\infty)$$

alkotóinak irányvektora pedig az $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$ vektor!

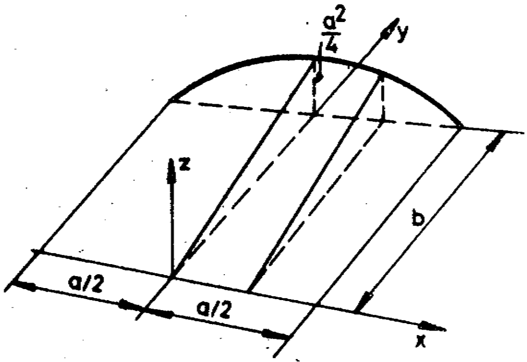
9.5. Felírandó annak a kúpfelületnek a vektor-egyenlete, amelynek vezérgörbéje a

$$\underline{r}(\varphi) = \underline{i}(a + a\cos\varphi) + \underline{j}\, b\sin\varphi \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

csúcspontjának koordinátái: (0, 0, 3).

9.6. Forgassuk meg a $z = 4 - x^2$ parabolát a z tengely körül, s írjuk fel az ily módon adódó felület egyenletét $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$ és $z = f(x, y)$ alakban.

9.7. Egy téglalap alapterületű csarnokot oly módon fednek be, hogy az egyik falra egy parabola ívet illesztenek, s ennek minden pontját összekötik egyenessel a szemközti fal tetejének egy pontjával az ábrán látható módon. Írjuk fel az így adódó ú.n. konoid felület egyenletét!



2. ábra

9.8. Írjuk fel az $y = \frac{1}{2}x^2$ "hengerfelület" vektoregyenletét!

9.9. Írjuk fel annak a felületnek a vektoregyenletét, amelyet a $z = 1$ síkban lévő $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ kör φ paraméterű és a $z = 1$ síkban lévő $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ kör $\varphi + \frac{\pi}{3}$ paraméterű $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ pontján illeszkedő egyenesek összessége alkot. Írjuk fel a felület implicit egyenletét is!

9.10. Írjuk fel az alábbi felületek vektoregyenletét.

a) $z = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$, b) $z = \ln xy$, c) $z = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$.

9.11. Írjuk fel az alábbi felületek explicit, ill. implicit egyenletét.

a) $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\ a\,\mathrm{ch}u \cos v + \underline{j}\ b\,\mathrm{ch}u \sin v + \underline{k}\ c\,\mathrm{sh}u$.

b) $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\ 5\cos^3 u \cos v + \underline{j}\ 5\cos^3 u \sin v + \underline{k}\ 5\sin^3 u$.

c) $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\ a\,\mathrm{ch}^4 u\,\mathrm{ch}^4 v + \underline{j}\,a\,\mathrm{ch}u\,\mathrm{sh}v + \underline{k}\,b\,\mathrm{sh}^2 u$.

d) $\underline{r}(u, v) = \underline{i}3u \cos v + \underline{j}3u \sin v + \underline{k}3u^2$.

e) $\underline{r}(u, v) = \underline{i}\sqrt{4 + u^2}\cos v + \underline{j}\sqrt{4 + u^2}\sin v + \underline{k}\ 2\,\mathrm{arsh}\frac{u}{2}$.

10. A felületi normális és az érintősík, E, F, G

10.01. Írjuk fel a $P_1(2, 3, 0)$, $P_2(2, 5, 5)$, $P_3(0, 4, 0)$ pontokra illeszkedő sík vektoregyenletét, számítsuk a paraméter vonalak (egyenesek) irányvonalának vektoriális szorzatát.

10.02. Tekintsük az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}u + \underline{j}v + \underline{k}(u^2 + v^2)$$

felületet. Írjuk fel adott u_o, v_o pontban az $u = u_o$, $v = v_o$ vonalakat (v ill. u paraméter-vonal) érintő egyenesek egyenletét, ezen egyenesek által meghatározott sík (érintősík) egyenletét, s számítsuk ki az

$$(\underline{r}_u(u, v) \times \underline{r}_v(u, v))_{\substack{u = u_o \\ v = v_o}}$$

vektor abszolút értékét!

10.03. Írjuk fel az $x^2 + y^2 - \frac{1}{4} z^2 = 1$ felület vektoregyenletét, az $x = x_o$, vonal $(x_o, y_o, 2\sqrt{x_o^2 + y_o^2 - 1})$ pontjához tartozó érintőegyenes egyenletét, s az ezen ponthoz tartozó érintősík egyenletét.

10.04. Írjuk fel a $z = \ln xy$ felület vektoregyenletét, a felület $(1, \frac{1}{e}, -1)$ pontjához tartozó érintősíkjának egyenletét és számítsuk ki ezen felület ezen pontjához tartozó felületi normálisának abszolút értékét.

10.05. Mely pontban nincs érintősíkja az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, u \cos v + \underline{j}\, u \sin v + \underline{k}u$$

felületnek?

11. Felületi görbék

11.01. Tekintsük az

$$\underline{r}(x, y) = \underline{i}\, x + \underline{j}\, y + \underline{k}\, xy$$

felületet (egyenesekkel lefedhető hiberbolikus paraboloid), s határozzuk meg azon felületi görbéjének vektoregyenletét, amelynek az x, y síkon lévő vetülete az

$$x = a \cos u, \quad y = b \sin u, \quad z = 0 \qquad (a > 0, \quad b > 0)$$

paraméteres egyenletrendszerű ellipszis, valamint az $x = x_o$, $y = y_o$ vonalak vektoregyenletét!

11.02. Írjuk fel annak a térgörbének a vektoregyenletét, amely az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\, a \cos u \cos v + \underline{j}\, a \cos u \sin v + \underline{k}\, a \sin u$$

felület és az $x^2 - ax + y^2 = 0$ hengerfelület metszésvonalaként adódik. Ezen metszésvonal mindkét felületnek felületi görbéje.

11.03. Írjuk fel az

$$x = 2a + a \cos u, \quad y = 0, \quad z = a \sin u, \quad (a > 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

paraméteres egyenletrendszerű görbe z tengely körüli forgatásával keletkező felület azon felületi görbéinek egyenletét, amelyek a $z = z_o$ sík $(-a < z_o < a)$, másrészt az $y = mx$ sík metszésvonalaként adódnak.

11.04. Írjuk fel a $z^2 = x^2 + y^2$ felület és a $z + x = 25$ sík metszésvonalának vektoregyenletét, s a metszésvonal valamely pontjához tartozó érintőegyenesének egyenletét.

11.05. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, t \cos t + \underline{j}\, t \sin t + \underline{k} t \qquad -\infty < t < +\infty$$

görbe a $z^2 = x^2 + y^2$ felület felületi görbéje (minden pontja illeszkedik a felületre).

11.06. Írjuk fel az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}u + \underline{j}v + \underline{k}uv$$

felület azon felületi görbéjének egyenletét, amely az u és v közti $v = u^2$ összefüggés alapján adódik.

11.07. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(x, y) = \underline{i}\, x + \underline{j}\, y + \underline{k}\, xy$$

felület és az $y = 1 - ax^2$ hengerfelület metszésvonalának érintővektora bármely pontban párhuzamos mindkét felület érintősíkjával.

12. Felületi görbék ívhossza

12.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u) = \underline{i}\, 2 + \underline{j}\, 2 \cos u + \underline{k}\, 2 \sin u, \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

vezérgörbéjű (0, 0, 0) csúcspontú kúpfelület

$$y(t) = e^t \cos t, \quad z(t) = e^t \sin t$$

felület görbéje $z = 1$, $z = 3$ síkok közötti szakaszának ívhosszát.

12.02. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(x, y) = \underline{i}\, x + \underline{j}\, y + \underline{k}\, \sqrt{x^2 + y^2}$$

felület

$$x = t \cos t, \quad y = t \sin t$$

felületi görbéje $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ szakaszának ívhosszát.

13. Szögmérés

13.01. Számítsuk ki, hogy a $z = xy$ felület, $x + y = 10$, $x - y = 10$ metszésvonalak mekkora szögben metszik egymást.

13.02. Határozzuk meg a $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16}}$ felület $x = 4$, $y = 3$ metszésvonalai által bezárt szöget.

14. Első- és másodrendű főmennyiségek

14.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(u + 2v) - \underline{j}v + \underline{k}(u^2 + 3v^2)$$

felület adott $u_o = 2$, $v_o = 4$ pontjában az E, F, G elsőrendű és az L, M, N másodrendű fő, ill. alapmennyiségek értékét.

14.02. Számítsuk ki a $zx^2 + y^3 = 12$ felület $P_o(2, 1, 1)$ pontjában az első és másodrendű alapmennyiségek értékét.

15. Meusnier-tétele

15.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(u + 2v) - \underline{j}v + \underline{k}(u^2 + 3v^2)$$

felület $v = u^2$ felületi görbéjének a görbületét, a felület és a felületi görbe $u_o = 1$ paraméterű pontjához tartozó simulósík metszésvonalának a görbületét (ugyanezen pontban). Messük fel a felületet a felületi görbe $u_o = 2$ pontjához tartozó érintőegyenesre illeszkedő, s a felület (3, -1, 4) pontjához tartozó érintősíkra merőleges síkkal, s ennek a síkmetszetnek is számítsuk ki a görbületét a képlettel és a Meusnier tétellel is. Ezeken kívül számítható a görbület az alapforma alapján is.

15.02. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömbfelület és az

$$\underline{r}(u) = \underline{i}\ 2\cos u \cos u + \underline{j}\ 2 \cos u \sin u + 0\underline{k}$$

vezérgörbéjű, $\underline{k}$-val párhuzamos alkotójú hengerfelület metszésvonalának görbületét az $u = \frac{\pi}{4}$ pontban, valamint az ezen ponthoz tartozó érintőegyenesre illeszkedő normálmetszet görbületét is ugyanezen pontban.

15.03. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ felület $(0, 3, 4)$ pontjában a normálmetszet és az $y = 3$ síkmestzet görbületének felhasználásával a két síkmetszet szögét. Megjegyzendő, hogy a $(0, 3, 4)$ pontra illeszkedő, s az $y = 3$ görbe $(0, 3, 4)$ pontjához tartozó érintőre illeszkedő normálsík metszetéről van szó.

16. Főnormálgörbületek, Gauss-féle szorzatgörbület és az összeg görbület

16.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(u^2 + v^2) + \underline{j}\ 2uv + \underline{k}(u - v)$$

felület főirányait az $u = 1$, $v = -1$ paraméterű pontban.

16.02. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\ u \cos v + \underline{j}\ u \sin v + \underline{k}\ 2v$$

felület főirányait és a főgörbületeit tetszőleges u, v paraméterű pontban.

16.03. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(u^2 + v^2) + \underline{j}(u + v) + \underline{k}u^2v^2$$

főgörbületeit és főirányait az $u = 0$, $v = -1$ pontban.

16.04. Határozzuk meg a $4x^2 + 4y^2 + z^2 - 9 = 0$ felület főirányait és főgörbületeit az $x = 1$, $y = -1$ pontban.

16.05. Mely pontokban lesz a

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6}$$

felület összeg, ill. szorzat görbülete zérus?

16.06. Határozzuk meg a

$$z = 4x^2 - 2xy - 3y^2 + x + 2y + 5$$

felület főgörbületeit és főirányait az $x = 1$, $y = 3$ pontban.

16.07. Határozzuk meg a $z = xy$ felület tetszőleges pontjában a főirányokat, s írjuk fel az ú.n. főgörbületi vonalak egyenletét.

16.08. A $z = f(x, y)$ felület a $(0, 0, 0)$ pontban érinti az x, y síkot. Számítsuk ki a felület ezen pontjához tartozó főmetszetek görbületeit, ill. igazoljuk, hogy ezek léteznek és a főnormálmetszetek síkjai egymásra merőlegesek.

17. Euler-tétele

17.01. Határozzuk meg azon felületi görbék görbületét az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\ 3\operatorname{ch} u \cos v + \underline{j}\ 3\operatorname{sh} u \sin v + \underline{k}\ \operatorname{th} u v$$

felület $u = 0$, $v = \frac{\pi}{2}$ pontjában, amelyek közös érintője a kisebbik főgörbület metszetének érintőjével 30°-os szöget zár be és közös simulósíkjuk az érintőn áthaladó normálmetszet síkjával 60°-os szöget zár be.

17.02. Határozzuk meg a

$$z = x^2 + y^2$$

felület $(3, 4, 25)$ pontjában a főnormálmetszetek síkjával 45°-os szöget bezáró normálmetszet görbületét ugyanezen pontban.

18. Felületdarab felszíne

18.01. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(\cos u - v \sin u) + \underline{j}(\sin u + v \cos u) + \underline{k}(u+v)$$

felület $0 \leqq u \leqq \pi$, $0 \leqq v \leqq 1$ darabjának a felszínét.

18.02. Kiszámítandó a

$$z = \frac{1}{2} \frac{x^2}{y}$$

felület azon darabjának a felszíne, amelynek az x, y síkon lévő vetülete a $0 \leqq x \leqq 1$, $1 \leqq y \leqq 2$ négyzet.

18.03. Számítsuk ki a

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\ R \cos u \cos v + \underline{j}\ R \cos u \sin v + \underline{k}\ R \sin u$$

gömbfelület felszínét.

18.04. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(a + b \cos u) \cos v + \underline{j}(a + b \cos u) \sin v + \underline{k}\ b \sin u$$

egyenlettel adott gyűrűfelület (torus) felszínét.

18.05. Határozzuk meg

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\ u \cos v + \underline{j}\ u \sin v + \underline{k}\ cu$$

felület $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}$ darabjának felszínét.

18.06. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}\ 4 \cos u \cos v + \underline{j}\ 4 \cos u \sin v + \underline{k}\ 4 \sin u$$

gömbfelület azon darabjának a felszínét, amely az

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

henger belsejében van.

19. Felületi pontok osztályozása

19.01. Határozzuk meg a

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(a + b \cos u) \cos v + \underline{j}(a + b \cos u) \sin v + \underline{k}\, b \sin u \qquad (a > b)$$

felület elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontjait.

19.02. Határozzuk meg a

$$3z + 3xz - yz + x + y = 0$$

felület (0, 0, 0) pontjának a jellegét.

19.03. Határozzuk meg a

$$z = x^2 - y^2$$

felület felületi pontjainak a jellegét.

VEKTORANALÍZIS

1. Skalár-vektorfüggvény (skalármező)

1.01. Ábrázoljuk az $u = u(\underline{r}) = z - x^2 - y^2$ skalár-vektorfüggvény (skalármező) $u = -2$, $u = 0$, $u = 4$ szintfelületeit.

1.02. Ábrázoljuk az $u = u(\underline{r}) = x^2 - y - z$ skalár-vektorfüggvény $u_o = -2$, $u_o = 0$, $u = 2$ szintfelületeit.

1.03. Milyen felületek az $u = u(\underline{r}) = r^2$ $(\underline{r} = \underline{i}x + \underline{j}y + \underline{k}z)$ skalár-vektorfüggvény szintfelületei. Igazoljuk, hogy ez a függvény a tér minden pontjában folytonos.

Határozzuk meg a következő példákban adott skalár-vektorfüggvények szintfelületeit.

1.04. $u = u(\underline{r}) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$

1.05. $u = u(\underline{r}) = \sqrt{xyz}$

2. Gradiens, iránymenti derivált

2.01. Határozzuk meg az $u = u(\underline{r}) = r^2$ skalár-vektorfüggvény gradiensét a $P_o(0, 0, 0)$ pontban. Vizsgáljuk meg a gradiens (vektor) nagyságát, irányát és értelmét.

2.02. Határozzuk meg az $u = u(\underline{r}) = \ln|\underline{r}|$ skalár-vektorfüggvény $P_o(0, 1, 3)$ pontján áthaladó szintfelületének ezen P_o pontjához tartozó érintősíkját.

2.03. Határozzuk meg az $u = u(\underline{r}) = xy^3 - 2e^x + 3\sin z$ skalár-vektorfüggvény értelmezési tartományának $\underline{r}_o = 2\underline{j} + \underline{k}$ helyvektorú pontjában az $\underline{a} = 3\underline{i} - 4\underline{j} + 12\underline{k}$ vektor által meghatározott iránymenti deriváltját.

Számítsuk ki a következő példákban adott skalár-vektorfüggvények gradiensét tetszőleges pontban.

2.04. $u = u(\underline{r}) = x^3y^2z.$

2.05. $$u = u(\underline{r}) = \frac{1}{|\underline{r}|}.$$

2.06. $$u = u(\underline{r}) = \sqrt{xyz}.$$

2.07. $$u = u(\underline{r}) = e^x(y + e^4) + z^3$$

2.08. $$u = u(\underline{r}) = x^2z - y^2z + z^2$$

2.09. $$u = u(\underline{r}) = x^2yz - xz^2$$

2.10. Adva van az $u = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$ ellipszoidikus nyomáseloszlás (az izobár felületek ellipszoidok). Meghatározandó az $\underline{r}_o = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$ helyvektorú ponthoz tartozó gradiens vektor.

Határozzuk meg a következő példákban adott skalármezők gradiensét a megadott pontban.

2.11. $$u = u(\underline{r}) = |\underline{r}|, \quad P_o(3, -4, 1).$$

2.12. $$u = u(\underline{r}) = xy + yz + xz, \quad P_o(2, -3, 1).$$

2.13. $u = u(\underline{r}) = xy\ln z + x2ly + e^xy, \quad P_o(1, 2, -1).$

2.14. Határozzuk meg a $\sin^2x - y^2 - z = 0$ felület normálvektorát (érintősíkjának normálvektorát) az $x_o = \frac{3\pi}{4}$, $y_o = \frac{1}{2}$ pontban. (A felületet tekintsük az $u = \sin^2x - y^2 - z$ skalár-vektorfüggvény $u_o = 0$ szintfelületének.)

2.15. Határozzuk meg a $2x - y^2 - z = 0$ felület normálvektorát az $\underline{r}_o = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$ helyvektorú pontban.

Határozzuk meg a következő példákban adott skalár-vektorfüggvények adott irányú deriváltját az adott pontban.

2.16. $u = 2x^2y - xyz; \quad \underline{a} = \underline{i} + 3\underline{j} - 5\underline{k}; \quad P_o(1, 1, 2).$

2.17. $u = x^3y^2z; \quad \underline{a} = -2\underline{i} + 5\underline{j} - 3\underline{k}; \quad P_o(1, 2, -3).$

3. Vektor-vektorfüggvények (vektormezők)

3.01. Meghatározandó a fix tengely körül forgó merevtest pontjai sebességi vektormezője, vagyis olyan vektor-vektorfüggvény, amely tetszőleges ponthoz a merevtestnek a szóbanforgó ponton áthaladó sebességvektorát rendeli hozzá.

3.02. Milyen vektormezőt ír le a $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ függvény?

3.03. Milyen vektormezőt ír le a $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{a} \times \underline{r}$ és a $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{r} \times \underline{a}$ függvény? Itt $\underline{a} = 3\underline{i} - 2\underline{j} + 5\underline{k}$, $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$.

Milyen vektormezőt írnak le a következő példákban adott vektor-vektorfüggvények?

3.04. $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) = (\underline{r} + \underline{a}) \times \underline{r}$; $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$; $\underline{r} = x\underline{i} + x\underline{j} + z\underline{k}$.

3.05. $\underline{v} = \underline{v}(r) = (\underline{r} \times \underline{a}) \times \underline{r}$; $\underline{a} = \underline{i} + \underline{k}$; $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$.

4. Vektormező görbementi és felületi integrálja

4.01. A koordináta rendszer kezdőpontjában elhelyezett M tömeg az (x, y, z) pontban lévő tömegegységre olyan erővel hat, amelynek abszolút értéke

$$|\underline{P}| = f \cdot M \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{C}{x^2 + y^2 + z^2},$$

iránya az $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ irányvonalával megegyezik, de vele ellentétes értelmű. Az erőteret tehát a

$$\underline{P} = \frac{C}{x^2 + y^2 + z^2} \left(- \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\right) = - C \frac{x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

vektor-vektorfüggvény írja le.
Számítsuk ki az erőtér (a vektormező most erőteret jelent) ellenében végzett munkát, miközben a tömegegység az

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

csavarvonal mentén a t = o paraméterű pontból a t = 4 paraméterű pontba megy át.

4.02. Számítsuk ki azt a munkát, amelyet a

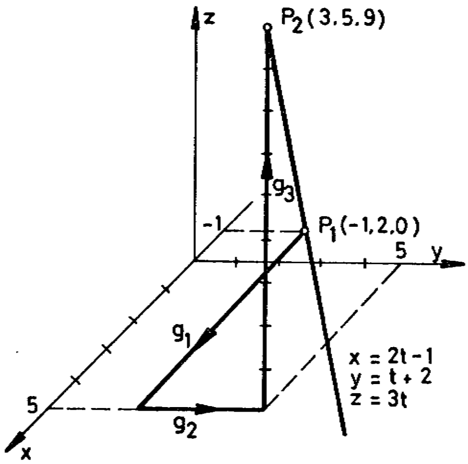
$$\underline{P} = yz\underline{i} + xz\underline{j} + xy\underline{k}$$

erőtérben a tömegegységet az

$$x = 2t - 1, \quad y = t + 2, \quad z = 3t$$

egyenes mentén a $t = 0$ ponttól a $t = 3$ pontig mozgatva végzünk.

4.03. Számítsuk ki az előző példában adott erőtérben a 3. ábrán látható g_1, g_2, g_3 egyenes szakaszokon mozgó tömegegység mozgatásához szükséges munkát.



3. ábra

4.04. Kiszámítandó a $\underline{v}(r) = -y\underline{i} + x\underline{j}$ vektormezőnek az $A(1, 0)$ és a $B(0, 1)$ pontok közötti $x^2 + y^2 = 1$ kör és $x + y = 1$ egyenes szakaszra vonatkozó vonalintegrálja.

4.05. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(r) = (x + yz)\underline{i} + (x^2 - y^2)\underline{j} + (xy + z)\underline{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek a $P_1(1, 1, 1)$ és $P_2(0, 3, 5)$ pontokat összekötő egyenes mentén vett vonalintegrálját.

4.06. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(r) = (x^2 - y + z)\underline{i} + (x + y^2 + z)\underline{j} + (x + y + z^2)\underline{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\ \text{ch}t + \underline{j}\ \text{sh}t + \underline{k}\ 2t$$

görbementi integrálját a $0 \leq t \leq 3$ határok között.

4.07. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(r) = (x^2 + y + z)\underline{i} + (x + y^2 + z)\underline{j} + (x + y + z^2)\underline{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\cos t + \underline{j}\sin t + \underline{k}2t$$

csavarvonal mentén vett vonalintegrálját (görbementi integrál).

4.08. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

vektor-vektorfüggvénynek az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\cos^2 t + \underline{j}\cos t \sin t + \underline{k}\sin t$$

görbe (Viviani-féle görbe) mentén vett vonalintegrálját a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ határok között.

4.09. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

erőtér által végzett munkát, ha az elmozdulás az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}t^2 + \underline{j} + \underline{k}\frac{1}{t}$$

görbe mentén történik a $t_1 = 1$ és $t_2 = 2$ pontok között.

4.10. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(r) = \underline{i}x + \underline{j}y + \underline{k}z$$

vektor-vektorfüggvény felületi integrálját az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{i}(3 + \cos u)\cos v + \underline{j}(3 + \cos u)\sin v + \underline{k}\,\sin u$$

gyűrűfelület x, y sík felületi darabjára vonatkozó felfelé mutató felületi normális mellett.

4.11. Határozzuk meg a

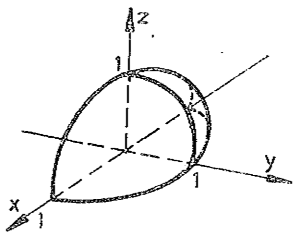
$$\underline{v}(r) = -xy\underline{i} + xy\underline{j} + z\underline{k}$$

vektormezőnek a $z = x^2 - y^2$ felület azon darabjára vonatkozó felületi integrálját, amelynek vetülete az x, y síkon a $-2 \leq x \leq 2$, $-3 \leq y \leq 3$ derékszögű négyszög, felfelé mutató felületi normális mellett.

4.12. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(r) = y\underline{i} + z\underline{j} + x\underline{k}$$

vektormezőnek a 4. ábrán látható egységsugarú negyedgömb felületére vonatkozó felületi integrálját felfelé mutató felületi normális mellett.

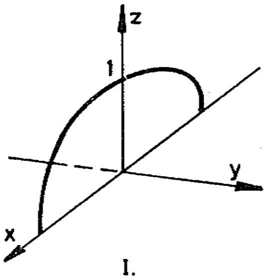


4. ábra

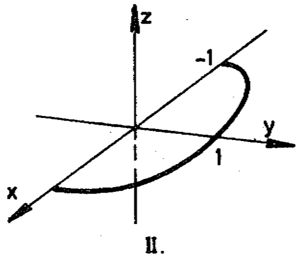
4.13. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(r) = y\underline{i} + z\underline{j} + x\underline{k}$$

vektormezőnek az következő ábrákon látható két félkörlapra vonatkozó felületi integrálját:



5. ábra



6. ábra

A felületi normális értelmét oly módon válasszuk meg, hogy a két körlap és az előző példában szereplő negyedgömb felület alkotta zárt felületnél a felületi normális mindig kifelé mutató legyen.

4.14. Számítsuk ki a

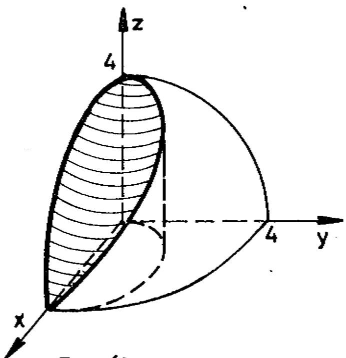
$$\underline{v}(\underline{r}) = \frac{1}{xz}\,\underline{i} + \frac{1}{yz}\,\underline{k}$$

vektormezőnek az

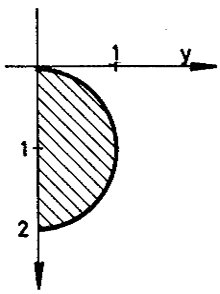
$$x = 5\cos^3 u \cos v, \quad y = 5\cos^3 u \sin v, \quad z = 5\sin^3 u$$

forgási asztroid felület $\frac{\pi}{4} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 2\pi$ darabjára vonatkozó felületi integrálját felfelé mutató normális mellett.

4.15. Határozzuk meg a $\underline{v}(\underline{r}) = x\underline{i} + y\underline{j}$ vektormezőnek a 4 egység sugarú gömb felületére írt Viviani-görbe által határolt felületdarabnak a 7. ábrán látható részére vonatkozó felületi integrálját, felfelé mutató felületi normális mellett.

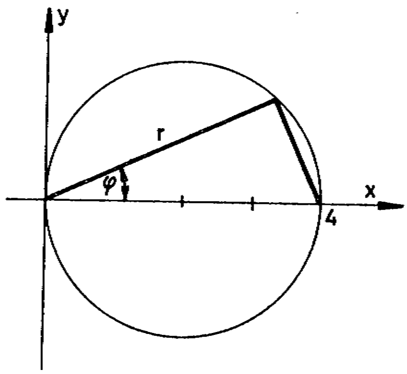


7. ábra



8. ábra

4.16. Határozzuk meg a $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ vektormezőnek a $z = x^2+y^2$ felület $x^2 + y^2 + 4x = 0$ henger belsejében lévő darabjára vonatkozó felületi integrálját felfelé mutató felületi normális mellett, A kettős integrál kiszámításához vezessünk be polár koordinátákat. Az integrálási tartomány a 9. ábrán látható.



9. ábra

5. Vektormező divergenciája

5.01. Határozzuk meg a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}(y^3 + x^2) + \underline{j}\ (12xy^2 - 3x) + \underline{k}xyz^2$$

vektormező divergenciáját tetszőleges pontban és a rögzített $P_0(1, -1, 2)$ pontban.

5.02. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}(y^2 + z^2) + \underline{j}(z^2 + x^2) + \underline{k}(x^2 + y^2)$$

vektormező divergenciáját.

6. Vektormező rotációja

6.01. Képezzük a $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{\omega} x \underline{r}$ vektormező rozációját. Ez a fix forgástengely körül állandó ω szögsebességgel forgó merevtest sebességének a vektormezője.

6.02. Számítsuk ki a $\underline{v} = (\underline{a} + \underline{r})\, x \underline{r}$ vektormező rotációját tetszőleges pontban $(\underline{a} = \underline{i} + \underline{j})$.

Számítsuk ki a következő példákban adott vektormezők divergenciáját és rotációját.

6.03. $\underline{v} = x^2yz\underline{i} + xy^2z\underline{j} + xyz^2\underline{k}$

6.04. $\underline{v} = 3x\underline{i} + xy\underline{j} + z\underline{k}$, $P_o(2, 1, 0)$.

6.05. $\underline{v} = (x^2 - y^2)\underline{i} + (y^2 - z^2)\underline{j} + (z^2 - x^2)\underline{k}$.

6.06. $\underline{v} = \frac{1}{|\underline{r}|}\underline{r}$; $P_o(0, 2, 3)$.

6.07. $\underline{v} = \underline{i}\ 3x + \underline{j}(x - 2y) + (z - x)\underline{k}$.

6.08. $\underline{v} = \underline{i}\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\underline{j} + \underline{k}xz$, $P_o(1, 2, 3)$.

6.09. $\underline{v}\ |\underline{r}|^3\underline{r}$.

6.10. $\underline{v} = -\frac{ax}{x^2 + y^2}\underline{i} + \frac{ax}{x^2 + y^2}\underline{j} + a\underline{k}$.

6.11. $\underline{v} = (3x + 2y)\underline{i} - (5x + z^2)\underline{j} + (x^2 - y^2)\underline{k}$.

6.12. $\underline{v} = e^{xy}\underline{i} + e^{yz}\underline{j} + e^z\underline{k}$.

6.13. $\underline{v} = \underline{i}\ \sin x^2yz + \underline{j}\ \sin xy^2z + \underline{k}\ \sin xyz^2$

6.14. $\underline{v} = \underline{i}\ \ln\frac{xy}{z} + \underline{j}\ln\frac{yz}{x} + \underline{k}\ \ln\frac{zx}{y}$.

Bármelyik vektormezőre kimutatható, hogy divergenciája és rotációja a koordinátarendszer felvételével szemben invariáns.

A következő példákban a vektor analízis ezen ún. invariáns operációinak (divergencia, rotáció) ismételt alkalmazásával foglalkozunk.

6.15. Kiszámítandó $\mathrm{div}/\mathrm{grad}\, u(\underline{r})/$ értéke az $\underline{r}_o = 2\underline{j} - \underline{k}$ pontban, ha $u(\underline{r}) = ye^x + xe^x + yz^3$.

6.16. Meghatározandó $\mathrm{grad}/\mathrm{div}\,\underline{v}(\underline{r})/$, ha

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{i}(x^3 - 2yz^2) + \underline{j}(xy^2 - z^3) + \underline{k}(z^2 - xyz).$$

6.17. Meghatározandó $\mathrm{rot}/\mathrm{rot}\,\underline{v}(\underline{r})/$, ha

$$\underline{v}(\underline{r}) = e^{yz}\underline{i} + e^{zx}\underline{j} + e^{xy}\underline{k}.$$

6.18. $\mathrm{div\ grad}\ \underline{r}^2 = ?$

6.19. $\mathrm{rot\ grad}\ \underline{r}^2 = ?$

6.20. $\mathrm{div\ grad}\ |\underline{r}| = ?$

6.21. $\mathrm{rot\ grad}\ |\underline{r}| = ?$

6.22. $\mathrm{div\ grad}\ \dfrac{1}{|\underline{r}|} = ?$

6.23. $\mathrm{grad\ div}\ \dfrac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = ?$

6.24. $\mathrm{div\ grad}\ \dfrac{1}{|\underline{r}|^2} = ?$

6.25. $\mathrm{div\ grad}(\ln|\underline{r}|) = ?$

6.26. $\mathrm{div\ grad}(e^{|\underline{r}|}) = ?$

6.27. $\mathrm{grad}\ /\mathrm{div}(|\underline{r}|^2\underline{r}) = ?$

6.28. $\mathrm{div\ grad}\ xyz = ?$

6.29. $\mathrm{div\ grad}\ e^{xyz} = ?$

6.30. $\mathrm{div\ grad}/x^2 \sin yz)/ = ?$

7. Görbementi és felületi integrálok átalakítása

7.01. Számítsuk ki a homogén R sugarú gömb középpontjára vonatkozó inerciáját. Megjegyezzük, hogy az R sugarú homogén gömb középpontjára vonatkozó inerciáját az

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$$

képlet alapján számítjuk ki. Itt a V integrációs tartomány az R sugarú gömbfelület által határolt része a térnek.

7.02. Legyen adott a $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ kocka alakú tartomány és a

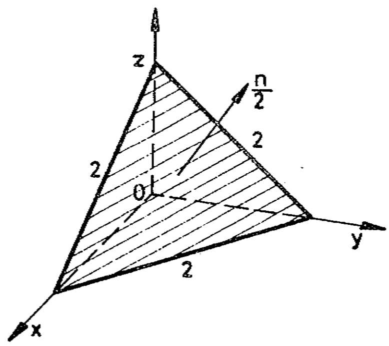
$$\underline{v}(\underline{r}) = (-x^2 + y + z)\underline{i} + (x - y^2 + z)\underline{j} + (x + y - z^2)\underline{k}$$

vektormező. Igazoljuk, ill. verifikáljuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt oly módon, hogy az

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{v}\, dV = \oint\!\!\!\oint_F \underline{v}\, d\underline{F}$$

egyenlőség bal- és jobboldalát kiszámítjuk.

7.03. Tekintsük az alábbi ábrán látható térbeli háromszöget. Irányítsuk a háromszög felületet és ennek megfelelően a háromszög oldalait. Legyen $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ az előbbi példában megadott függvény. Írjuk fel ezen $\underline{v}(\underline{r})$ függvényre és a 10. ábrán látható háromszögre Stokes-tételét.



10. ábra.

7.04. Kiszámítandó a

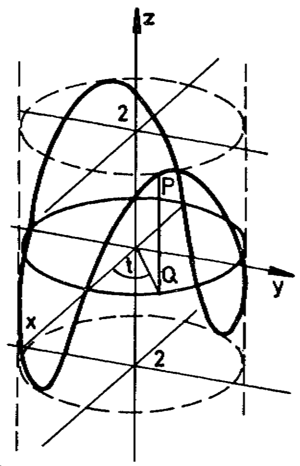
$$\underline{v}(\underline{r}) = (x - 2z)\underline{i} + (2x + y)\underline{j} + (x - y + z)\underline{k}$$

vektormezőnek a kezdőpont körüli 2 egység sugaru gömbre vonatkozó felületi integrálja befelé mutató felületi normális mellett felületi integrállal és Gauss-Osztrogradszkij tétellel.

7.05. Számítsuk ki a

$$\underline{v}(\underline{r}) = (x - y)\underline{i} + (x + y)\underline{j} + xy\underline{k}$$

vektormezőnek a $z = xy$ hiberbolikus paraboloid és az $x^2 + y^2 = 4$ henger metszésvonala mentén vett vovonalintegrálját vonalintegrállal és Stokes-tétellel (11. ábra).



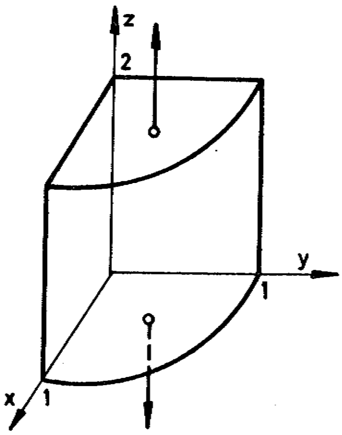
11. ábra

7.06. Határozzuk meg a

$$\underline{v} = x^3\underline{i} + y^3\underline{j} + z^3\underline{k}$$

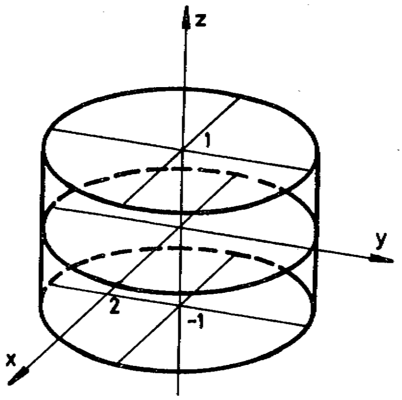
vektormező felületi integrálját az origó centrumu a sugaru gömbfelületre vonatkozóan.

7.07. Meghatározandó a $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ vektormező felületi integráljának értéke az alábbi 12. ábrán látható zárt felületre vonatkozóan



12. ábra

7.08. Határozzuk meg a $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ vektormező felületi integrálját a 13. ábrán látható hengerpalást és a két körlap alkotta zárt felületre vonatkozóan.

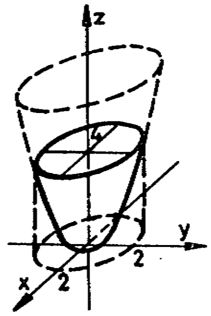


13. ábra

7.09. Legyen

$$\underline{v}(\underline{r}) = (x + y + z)\underline{i} + xyz\underline{j} + x^2\underline{k}.$$

Határozzuk meg a $\mathrm{rot}\,\underline{v}(\underline{r})$ vektormezőnek a $z = x^2+y^2$ felület azon darabjára vonatkozó felületi integrálját, amely az $x^2 + y^2 = 4$ henger belsejébe esik (14. ábra).



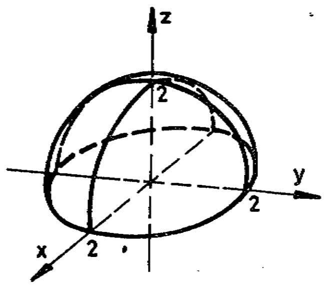
14. ábra

7.10. Határozzuk meg a $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ vektormező felületi integrálját az $x^2 + y^2 = 4$ alapkörű ($z = 0$) és $(0,0,5)$ csúcspontu (5 magasságú) körkúp teljes felületére.

7.11. Adott a

$$\underline{v}(\underline{r}) = z^2\underline{i} + x^2\underline{j} + y^2\underline{k}$$

vektormező. Igazolandó Stokes tétele az $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \geq 0$ felső gömbfelületre (15. ábra).

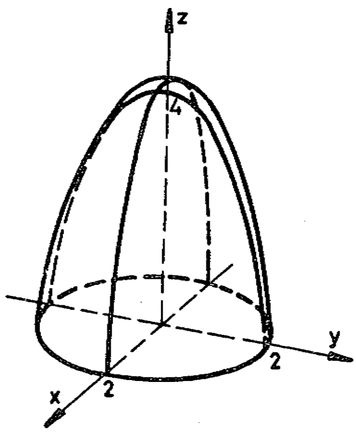


15. ábra

7.12. Adott a

$$\underline{v}(\underline{r}) = xz^2\underline{i} + zy^2\underline{j} + x^2y\underline{k}$$

vektormező. Igazolandó Stokes tétele, ha a F felület a $z = 4 - x^2 - y^2$ forgásparaboloig $z \geq 0$ része (16. ábra).



16. ábra

8. Néhány következmény

8.01. Konzervatív, ill. potenciálos-e a,

$$\underline{v}(\underline{r}) = (2xy - z^2 - yz)\underline{i} + x^2 + z^2 - xz)\underline{j} + \\ + (2yz - 2xz - xy)\,\underline{k}$$

vektormezővel jellemezhető erőtér, s igen határozzuk meg az erőtérhez tartozó potenciálfüggvényt.
Megjegyzendő, hogy az időben állandó erőteret konzervatív erőtérnek nevezzük, ha van olyan $u=u(\underline{r})=U(x,y,z)$ skalár-vektorfüggvény-potenciál, ill. potenciális energia-, amelynek negatív gradiense az erőtér, vagyis ha

$$\underline{v}(\underline{r}) = -\mathrm{grad}\,u(\underline{r}).$$

Ismeretes, hogy ilyen erőtérben bármely zárt görbe mentén végzett munka zérus.
Határozzuk meg a következő példákban adott vektormezők (erőterek) potenciáljait.

8.02. $\underline{v}(\underline{r}) = yze^{xyz}\underline{i} + xze^{xyz}\underline{j} + xye^{xy}\,\underline{k}.$

8.03. $\underline{v}(\underline{r}) = \dfrac{2xy}{4 - z^2}\underline{i} + \dfrac{x^2}{4 - z^2}\underline{j} + \dfrac{2x^2yz}{(4 - z^2)^2}\underline{k}.$

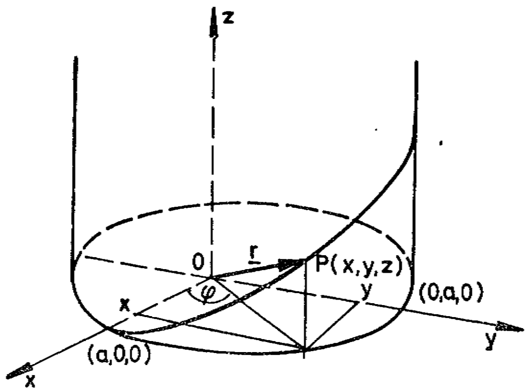
8.04. $$\underline{v}(\underline{r}) = \frac{z}{x\sqrt{x^2y^2 - z^2}}\,\underline{i} + \frac{z}{y\sqrt{x^2y^2 - z^2}}\,\underline{j} + \frac{-1}{\sqrt{x^2y^2 - z^2}}\,\underline{k}.$$

MEGOLDÁSOK

1. Térgörbe előállítása, az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ függvény és határértéke, az érintővektor

1.01. Ha a koordináta-rendszert a 17. ábrán látható módon vesszük fel, akkor

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = b\varphi, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$



17. ábra

1.02. Minthogy egy geometriai alakzat valamely rendszerre vonatkozó egyenlete olyan egyenlet, amelyet az alakzat tetszőleges P pontjának (ezen rendszerre vonatkozó) koordinátát kielégítenek, s az alakzatra nem illeszkedő pont koordinátái pedig nem elégítenek ki, azért az $x^2 + y^2 = a^2$ a térben olyan hengerfelület egyenlete, amelynek tengelye a z tengely, s sugara a. Ugyanis helyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy az $x^2 + y^2 = a^2$ egyenletet ezen hengerfelület bármely pontjának koordinátái kielégítik, más (x,y) pedig nem. A hengerfelület és a sík metszésvonala egy görbe. Ezen görbe egyenletének felírása céljából vezessük be az $x = t$ paramétert. Ekkor

$$x = t, \quad y = \pm\sqrt{a^2 - t^2}, \quad z = a - t \pm\sqrt{a^2 - t^2}, \qquad -a \leqq t \leqq a.$$

1.03. Ismét az $x = t$ jelölést használva az adódik, hogy

$$x = t, \quad y = \pm\sqrt{a^2 - t^2}, \quad z = \pm t\sqrt{a^2 - t^2}, \quad -a \le t \le a,$$

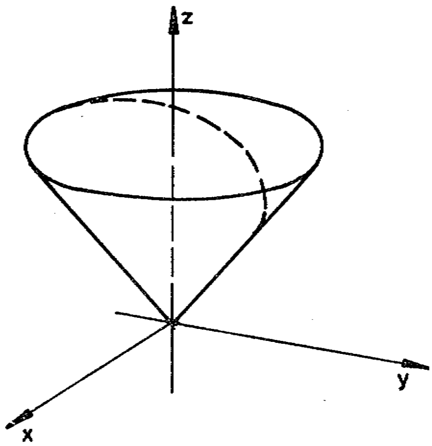
illetve

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} \pm\sqrt{a^2 - t^2}\,\underline{j} \pm t\sqrt{a^2 - t^2}\,\underline{k}, \quad -a \leqq t \leqq a.$$

1.04. A térgörbe tetszőleges t paraméterű pontjának koordinátái kielégítik a $z^2 = x^2 + y^2$ egyenletet, azaz a térgörbe bármely pontja illeszkedik azon kúpfelületre, amely az

$$x = \tau, \quad y = 0, \quad z = \tau, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

egyenes z tengely körüli forgatásával keletkezik. Ugyanis a $z^2 = x^2 + y^2$ ezen origó csúcspontú kúpfelület egyenlete. Ezért ezt a görbét kúpos-csavarvonalnak is nevezik. Ezt a görbét a 18. ábrán vázoltuk (szaggatott vonal).



18. ábra

1.05. Az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénynek a t_o pontban van határértéke, ha a függvény

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

alakú megadásban szereplő $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvényeknek van határértéke a t_o pontban és

$$\lim_{t\to t_o} \underline{r}(t) = \lim_{t\to t_o} x(t)\underline{i} + \lim_{t\to t_o} y(t)\underline{j} + \lim_{t\to t_o} z(t)\underline{k}.$$

Ezen tételt felhasználva

$$\lim_{t\to o} \underline{r}(t) = \lim_{t\to o} \frac{\sin 5t}{t}\underline{i} + \lim_{t\to o} \frac{tgt - sint}{\sin^3 t}\underline{j} + \lim_{t\to o} \frac{tgt}{t}\underline{k} =$$

$$= \lim_{t\to o} 5\,\frac{sint\ 5t}{5t}\underline{i} + \lim_{t\to o} \frac{sint\left(\frac{1}{cost} - 1\right)}{\sin^3 t}\underline{j} +$$

$$+ \lim_{t\to o} \frac{1}{cost}\,\frac{sint}{t}\underline{k} = \lim_{t\to O} 5\,\frac{sin5t}{5t}\underline{i} + \lim_{t\to o}\frac{1 - cost}{cost\ \sin^2 t}\underline{j} +$$

$$+ \lim_{t\to o} \frac{1}{cost}\,\frac{sint}{t}\underline{k} = \lim_{t\to o} 5\,\frac{sin5t}{5t}\underline{i} +$$

$$+ \lim_{t\to o} \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{cost\ 4\sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}\underline{j} + \lim_{t\to o}\frac{1}{cost}\,\frac{sint}{t}\underline{k} =$$

$$= 5\,\underline{i} + \frac{1}{2}\underline{j} + k.$$

Megjegyzendő még, hogy a $t_o = 0$ pont az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvényhez tartozó értelmezési tartományok mindegyikének torlódási pontja.

1.06. Az előbbi példában mondottaknak megfelelően az

$$x(t) = \frac{cht\ sint}{t^2},\quad y(t) = \frac{tgt - t}{t - sint}\quad z(t)\ \frac{tctgt - 1}{t^2}$$

függvényeket kell vizsgálni a $t = 0$ pont környezetében. A függvények a $t = 0$ pont kivételével e pont bármely környezetének minden pontjában értelmezve vannak és

$$\lim_{t\to 0} \frac{\text{cht} - \text{sint}}{t^2} = +\infty, \quad \lim_{t\to 0} \frac{\text{tgt} - t}{t - \text{sint}} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}{1 - \text{cost}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cos^2 t} \frac{1 - \cos^2 t}{1 - \text{cost}} = \lim_{t\to 0} \frac{(1 + \text{cost})(1 - \text{cost})}{\cos^2 t\,(1 - \text{cost})} = 2.$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t\,\text{ctgt} - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{\text{ctgt} - t\frac{1}{\sin^2 t}} = \lim_{t\to 0} \frac{2t\sin^2 t}{\text{sint cost} - t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\sin^2 t + 4t\,\text{sint cost}}{\cos^2 t - \sin^2 t - 1} = 2 \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t + 2t\,\text{sint cost}}{-2\sin^2 t} =$$

$$= -1 \lim_{t\to 0} \left(1 + 2\frac{t}{\text{sint}}\,\text{cost}\right) = -3, \quad \lim_{t\to 0} \frac{t\,\text{ctgt} - 1}{t^2} = -\frac{1}{3}.$$

Ezeket felhasználva

$$\lim_{t\to 0} \underline{r}(t) = \left(+\infty,\ 2,\ -\frac{1}{3}\right),$$

vagyis a függvénynek a $t = 0$ pontban nincs véges határértéke.
Megjegyzendő (előző tanulmányaink alapján ismeretes), hogy a $\lim\limits_{\to} \underline{r}(t) = \left(+\infty,\ 2,\ -\frac{1}{3}\right)$ eredményünk szerint, tetszőlegesen kicsiny pozitív ε-hoz és tetszőlegesen nagy ω-hoz található olyan kicsiny pozitív δ, amelyre fennáll, hogy $\underline{r}(t)$-nek végpontjai benne vannak az

$$\omega < x < +\infty, \quad 2 - \varepsilon < y < 2 + \varepsilon,$$

$$-\frac{1}{3} - \varepsilon < z < -\frac{1}{3} + \varepsilon$$

tartományban, ha $|t| < \delta$.

1.07. $\lim\limits_{t\to o} \underline{r}(t) = \frac{1}{9}\,\underline{i} + \frac{1}{2}\,\underline{j} + \frac{4}{3}\,\underline{k}.$

1.08. $\lim\limits_{t\to a} \underline{r}(t) = \frac{1}{\cos^2 a}\,\underline{i} + a^a(\ln a - \frac{1}{a})\underline{j} + s4a\underline{k}.$

1.09. $$\lim_{t\to o} (\underline{r}_1(t) \pm r_2(t)) = \lim_{t\to o}\left\{\left[\frac{\sin 5t}{t}\,\underline{i} + \frac{tgt - \sin t}{\sin^3 t}\,\underline{j} + \frac{tgt}{t}\,\underline{k}\right] \pm \left[\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}\,\underline{i} + (2t+1)\underline{j} + (t^2+3)\underline{k}\right]\right\} = (5\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}) \pm (\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}).$$

$$\lim_{t\to o} \underline{r}_1(t) \cdot \underline{r}_2(t) = \lim_{t\to o}\left[\frac{\sin 5t}{t}\,\underline{i} + \frac{tgt - \sin t}{\sin^3 t}\,\underline{j} + \frac{tgt}{t}\,\underline{k}\right] \cdot \lim_{t\to o}\left[\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}\,\underline{i} + (2t+1)\underline{j} + (t^2+3)\,\underline{k}\right] = (5\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k})\,(\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}) = 10.$$

$$\lim_{t\to o} \underline{r}_1(t)\,\underline{r}_2(t) = \lim_{t\to o}\left\{\frac{\sin 5t}{t}\,\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t} + \frac{tgt - \sin t(2t+1)}{\sin^3 t} + \frac{tgt}{t}(t^3+3)\right\} = 5\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 3 = 10.$$

$$\lim_{t\to o} r_1(t) \times \underline{r}_2(t) = \left[\lim_{t\to o}\left(\frac{\sin 5t}{t}\,\underline{i} + \frac{tgt - \sin t}{\sin^3 t}\,\underline{j} + \frac{tgt}{t}\,\underline{k}\right]\right. \times \left[\lim_{t\to o}\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}\,\underline{i} + (2t+1)\underline{j} + (t^2+3)\,\underline{k}\right.\right. = (5\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}) \times (\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\underline{i} - 14\underline{j} + 3\underline{k}.$$

1.10. Az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ vektor-skalár függvényről azt mondjuk, hogy a t_o pontban folytonos, ha

$$\lim_{t \to t_o} \underline{r}(t) = \underline{r}(t_o),$$

azaz, ha a t_o pontban van véges határértéke, van helyettesitési értéke és a kettő megegyezik. Az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ függvény valamely számközben folytonos, ha számköz minden pontjában folytonos.
Az előbbiek szerint tehát meg kell határozni az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ függvény határértékét és helyettesítési értékét a t_o pontban.

$$\lim_{t \to o} (t^2\underline{i} + (2 - t)\underline{j} + t\sin t\underline{k}) = 2\underline{j},$$

$$\left[t^2\underline{i} + 2 - t)\underline{j}\ t\sin t\underline{k}\right]_{t=o} = 2\underline{j},$$

tehát a határérték és a helyettesítési érték is létezik, s e két érték megegyezik, ezért a függvény a t_o pontban folytonos.
Megjegyzendő, hogy ez a függvény a $-\infty < t < +\infty$ számközben mindenütt folytonos.

1.11. Ez a függvény a $t = 0$ pontban nincs értelmezve, mert a $z(t) = \frac{\sin t}{t}$ függvény itt nincs értelmezve, tehát az az $\underline{r}(t)$ függvény a $t = o$ pontban nem lehet folytonos.

$$\lim_{t \to o} \underline{r}(t) = \lim_{t \to o} (t^2\underline{i} + (2 - t)\underline{j} + \frac{\sin t}{t}\underline{k}) = 2\underline{j} + \underline{k},$$

tehát az $\underline{r}(t)$ függvénynek a $t = o$ pontban van véges értéke.
Megjegyzendő, hogy az

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} t^2\,\underline{i} + (2 - t)\underline{j} + \frac{\sin t}{t}\,\underline{k} & (-\infty < t < 0,\ 0 < t < +\infty), \\ 2\,\underline{j} + \underline{k}, & t = 0 \end{cases}$$

függvény mindenütt folytonos.

1.12. Ez a vektor-skalár függvény a $t = 2$ pontban nincs értelmezve, mert a $t = 2$ pont nincs benne az

$y(t) = e^{\frac{1}{t-2}}$ függvény értelmezési tartományában,

tehát $\underline{r}(t)$-nek nincs helyettesítési értéke, s íly módon nem lehet folytonos.
Minthogy

$$\lim_{t\to 2-0} e^{\frac{1}{t-2}} = 0, \quad \lim_{t\to 2+0} e^{\frac{1}{t-2}} = +\infty,$$

azaz a bal oldali határérték nulla, a jobb oldali pedig $+\infty$, azért ezen $\underline{r}(t)$ függvénynek a $t = 2$ pontban nincs határértéke.

1.13. Ez a vektor-skalár függvény a $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ számközökben van értelmezve. Ugyanis az $\underline{r}(t)$ függvény értelmezési tartománya az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvények értelmezési tartományának közös része, azaz $\underline{r}(t)$ azokban és csak azokban a pontokban van értelmezve, amelyekben az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvények mindegyike értelmezve van.
Minthogy az $x(t)$ függvény a $t = 1$ pontban nincs értelmezve, azért $\underline{r}(1)$ nem létezik, tehát $\underline{r}(t)$ a $t = 1$ pontban nem lehet folytonos.
Számítsuk most a határértékét a $t = 1$ pontban!

$$\lim_{t\to 1} \frac{t - \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}} = \lim_{t\to 1} t \frac{\sqrt{t} - 1}{1 - \sqrt{t}} = -1, \quad \lim_{t\to 1} 3t = 3,$$

$$\lim_{t\to 1} t^3 = 1.$$

Tehát az $\underline{r}(t)$ függvénynek a $t = 1$ pontban van határértéke és

$$\lim_{t\to 1} \underline{r}(t) = -1\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}.$$

Ha ezen $\underline{r}(t)$ függvényt a $t = 1$ helyen a határértékével értelmezzük, azaz azt mondjuk, hogy $\underline{r}(1) = -\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}$ legyen, akkor az

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} \dfrac{t - \sqrt{t}}{1 - t}\underline{i} + 3t\underline{j} + t^3\underline{k}, & \text{ha } 0 \leq t < 1,\ 1 < t < +\infty; \\ -\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}, & \text{ha } t = 1 \end{cases}$$

függvényhez jutunk, s ezen utóbbi függvény az értelmezési tartományban mindenütt folytonos. A $t = 0$ pontban természetesen csak jobb oldali folytonosságról lehet szó.

1.14. A függvény a $t = 3$ helyen folytonos, a $t = -3$ pontban nincs értelmezve, de

$$\lim_{t\to 3} \underline{r}(t) = -\frac{1}{3}\underline{i} - 6\underline{j} + 3\underline{k}.$$

1.15. Ez a függvény a $0 < t < 1$, $1 < t < +\infty$, számközök minden pontjában értelmezve van és ezen két intervallum minden pontjában folytonos. Másrészt

$$\lim_{t\to 0} r(t) = 3\underline{j}, \quad \lim_{t\to 1} \underline{r}(t) = -\underline{i} + \sin 3 \cdot \underline{j} + \underline{k},$$

tehát az

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} 3\underline{j} & \text{ha } t = 0, \\ \dfrac{t - \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}}\underline{i} + \dfrac{\sin t3t}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}, & \text{ha } 0 < t < 1, \\ & \phantom{\text{ha }} 1 < t < +\infty, \\ -\underline{i} + \sin 3\underline{j} + \underline{k} & \text{ha } t = 1 \end{cases}$$

függvény az értelmezési tartományban mindenütt folytonos.

1.16. Ezen függvény értelmezési tartománya mindazon t pontok összessége, amelyekre $0 \leq t < 1$, $1 < t < 2$, $2 < t < +\infty$. A függvény e pontokban folytonos is. A $t = 1$, $t = 2$ pontokban a függvény nincs értelmezve, tehát ezekben a pontokban a függvény nem lehet folytonos.
Kérdés, hogy a $t = 1$, $t = 2$ pontokban van-e határértéke?

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}\underline{i} + t^2\underline{j} + \frac{2^t - t^2}{t - 2}\underline{k}\right) = \frac{2}{3} + \underline{j} - \underline{k}.$$

$$\lim_{t\to 2}\left(\frac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}\underline{i} + t^2\underline{j} + \frac{2^t - t^2}{t - 2}\underline{k}\right) = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}\underline{i} + 4\underline{j} +$$

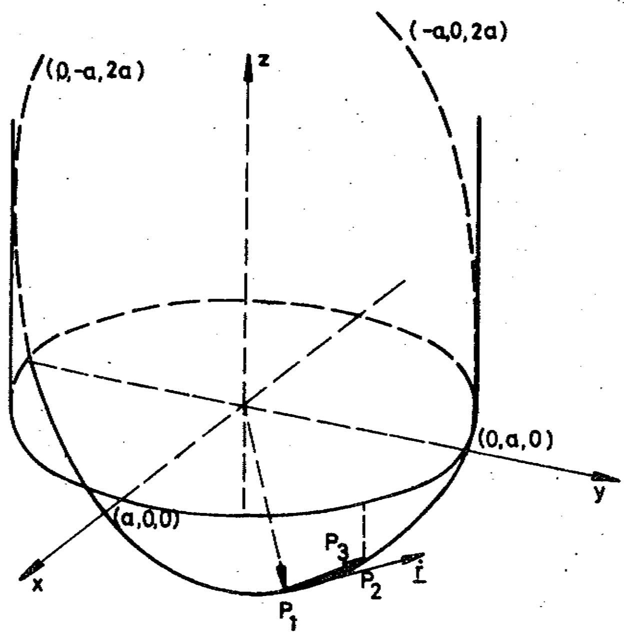
$$+ 4(\ln 2 - 1)\underline{k}.$$

1.17. Egyszerűen helyettesítéssel igazolhatjuk, hogy ezen

$$\underline{r}(\varphi) = a\cos\varphi\,\underline{i} + a\sin\varphi\,\underline{j} + a(1 - \cos\varphi - \sin\varphi)\underline{k}$$

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

görbe minden pontja illeszkedik az $x^2 + y^2$ hengerre és az $x + y + z = a$ síkra is, tehát a görbe ezen két geometriai alakzat metszésvonala, azaz egy ellipszis (19. ábra). Ilymódon a görbét egyszerűen szemléltethetjük.



19. ábra

Az ellipszis illeszkedik az (a, 0, 0), (0, a, 0), (-a, 0, 2a), (0, -a, 2a) és a

$$P_1\left(a\frac{\sqrt{2}}{2},\ a\frac{\sqrt{1}}{2},\ a(1 - \sqrt{2})\right),$$

$$P_2\left(a\frac{1}{2},\ a\frac{\sqrt{3}}{2},\ a\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

pontokra. Az $\underline{r}(\varphi_0 + \Delta\varphi) - \underline{r}(\varphi_0)$ különbség-vektor a P_1-ből a P_2-be mutató vektor. A P_1-ből a P_3-ba mutató vektor pedig az

$$\frac{\underline{r}(\varphi_o + \Delta\varphi) - \underline{r}(\varphi_o)}{\Delta\varphi},$$

s végül az $\dot{\underline{r}}$ a φ_o pontbeli deriváltat ábrázolja, amellyel a φ_o ponthoz tartozó érintővektort értelmezzük.

1.18. $\dot{\underline{r}}(t) = -\frac{1}{2}\ \text{sint}\ \underline{i} - \frac{t^2+1}{(1-t^2)^2}\underline{j} + \frac{1}{1+t}\underline{k},$

$$-1 < t < 1, \quad 1 < t < +\infty.$$

1.19. $\dot{\underline{r}}(t) = \frac{2}{t}\underline{i} + \frac{1}{t}\underline{j} + \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\underline{k}, \quad 1 < t < +\infty.$

1.20. $\left(\underline{r}_1(t)\cdot\underline{r}_2(t)\right)^{\bullet} = \left[(t^2\underline{i} + 3t\underline{j} + 5\underline{k})(e^{2t}\underline{i} + 3\text{cost}\underline{k})\right]^{\bullet} =$

$$=(t^2e^{2t} + 15\ \text{cost})^{\bullet}.$$

Másik megoldás:

$$\underline{r}_1(t)\cdot\underline{r}_2(t))^{\bullet} = \dot{\underline{r}}_1(t)\underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t)\ \dot{\underline{r}}_2(t) =$$

$$=(2t\underline{i} + 3\underline{j})(e^{2t}\underline{i} + 3\text{cost}\underline{k}) + (t^2\underline{i} + 3t\underline{j} +$$

$$+5\ \underline{k})(2e^{2t}\underline{i} - 3\ \text{sint}\underline{k}) =$$

$$= 2\ te^{2t} + 2t^2e^{2t} - 15\ \text{sint}.$$

$$[\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t)]^{\bullet} = \dot{\underline{r}}(t) \times \underline{r}_2(t) + \underline{r}_1(t) \times \dot{\underline{r}}_2(t) =$$

$$= (2t\underline{i} + 3\underline{j}) \times (e^{2t}\underline{i} + \text{cost}\ \underline{k}) +$$

$$+ (t^2\underline{i} + 3t\underline{j} + 5\underline{k}) \times (2e^{2t}\underline{i} -$$

$$- 3\ \text{sint}\underline{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2t & 3 & 0 \\ e^{2t} & 0 & 3\text{cost} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ t^2 & 3t & 5 \\ 2e^{2t} & 0 & -3\text{sint} \end{vmatrix} =$$