

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
VEGYÉSZMÉRNÖKI KAR

MATEMATIKA

felsőbb éves vegyészmérnök hallgatóknak

II.

Valószínűségszámítás

Második rész

Írták:

Dr. Králik Dezső

tanszékvezető egyetemi tanár

Geberta Gyuláné

adjunktus

KÉZIRAT

8. változatlan kiadás

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1992

A kiadásért felelős:
a Budapesti Műszaki Egyetem Vegyészmérnöki Karának dékánja
Megjelent a Tankönyvkiadó Vállalat műszaki gondozásában
Felelős osztályvezető: Héjjas Zoltán
Műszaki szerkesztő: Dobó Ferencné
Megrendelve: 1992. október, Megjelent: 1992. október. Példányszám: 121
Készült: kisofszet eljárással, az MSZ 5601-59
és az MSZ 5602-55 szabvány szerint,
26,3 (A/5) ív terjedelemben, 19 ábrával
Készült a Dabas-Jegyzet Kft-ben
Felelős vezető: Marosi György ügyvezető igazgató
Munkaszám: 92-1052

IV.6 ESEMÉNYSÉMÁK

IV.6.1 Binomiális eloszlás

Végezzünk n független kísérletet úgy, hogy valamely A esemény bekövetkezését vizsgáljuk, vagyis azt, hogy az n kísérlet közül az A esemény hányszor következett be.

Pl. Dobjunk fel egy kockát 10-szer és nézzük meg, hány ízben dobunk "6"-ost. Itt az A esemény a "6"-os dobás. Ha nem dobunk 6-ost, akkor a $\bar{A}$ esemény következett be. A kísérlet elindítása előtt feltehetjük a kérdést: mi a valószínűsége annak, hogy a 10 dobás közül pontosan 8 db 6-os dobás lesz? Később választ adunk a kérdésre.

Általánosan azt mondhatjuk, hogy egyszeri kísérlet esetén vagy az A , vagy az $\bar{A}$ esemény következik be. Innen kapta a séma az elnevezést, mert 2 esemény léphet fel: A , vagy $\bar{A}$; a A esemény valamely $P(A) = p$ valószínűséggel, és a $\bar{A}$ esemény $1 - P(A) = P(\bar{A}) = q$ valószínűséggel ($0 < p < 1$).

Egymás után végezve a kísérletet, A vagy $\bar{A}$ esemény következik be. Mivel a következő eredményt az előző eredmény nem befolyásolja, az események egymástól függetlenek; amint már említettük, A és $\bar{A}$ komplementer események, egymást kizárják és közülük az egyik és csak az egyik bekövetkezik egy-egy kísérletnél.

Most már fel tudjuk vázolni az n dobásból álló kísérlet sémáját. Például egy lehetséges kimenetel:

①	②	③	④	...	⑤	...	⑥
A	A	$\bar{A}$	A	...	$\bar{A}$	...	A

Ez a séma egy elemi eseményt mutat be. Kérdés, hány különböző elemi esemény van? Ahányféleképpen az A és $\bar{A}$ jeleket n helyre ismétléssel el tudunk helyezni, a sorrend figyelembevételével. Ez a tanultak alapján

$$\mathcal{L} = V_2^{(n, \text{ism.})} = 2^n$$

(Ismétléses variációkról van szó.)

Most már feltehetjük a kérdést, mi a valószínűsége annak, hogy n számú kísérlet közül a vizsgált A esemény pontosan k -szor következik be (ahol $0 \leq k \leq n$)?

Egy elemi esemény bekövetkezésének valószínűsége az A és $\bar{A}$ -ra vonatkozó jellemzők alapján:

$$\overset{1}{P}(A \overset{2}{A} \overset{3}{\bar{A}} \overset{4}{A} \dots \overset{k}{\bar{A}} \dots \overset{n}{A}) = P(A) P(A) P(\bar{A}) P(A) \dots P(\bar{A}) \dots P(A) = p^k q^{n-k}$$

Mivel azon elemi események száma, amelyekben a A esemény pontosan k esetben következik be: $\binom{n}{k}$, a kért valószínűség értéke

$$P(A_{n,k}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

A kockát 10-szer feldobva, annak a valószínűsége, hogy pontosan 8 db "6"-os dobást kaptunk, egyenlő a

$$P(A_{10,8}) = \binom{10}{8} \left(\frac{1}{6}\right)^8 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

értékkel.

Nézzük megint általánosan az n kísérletből álló egyetlen elemi eseményt, és alkossuk meg az Ω eseményteret. Láttuk, hogy ezen elemi események száma 2^n . Válasszuk szét az elemi eseményeket annak alapján, hogy az n kísérletből álló sorozatban az A esemény hányszor következett be, vagyis k lehetséges értékei szerint:

$$k = 0, 1, 2, \dots, n;$$

ennél fogva összesen $(n+1)$ csoportba soroltuk, az elemi eseményeket, egy-egy csoportban $\binom{n}{k}$ -számi esemény van. Jelöljük mindazon elemi események halmazát (tehát azt a véletlen eseményt), amelyekben pontosan k -számi A (és így $n-k$ számi $\bar{A}$) van, $A_{n,k}$ -val. Akkor

$$\Omega = A_{n,0} + A_{n,1} + A_{n,2} + \dots + A_{n,k} + \dots + A_{n,n},$$

ahol

$$A_{n,k} \cap A_{n,i} = \emptyset \quad (i \neq k)$$

Kolmogorov I. axiómája szerint:

$$P(\Omega) = P(A_{n,0}) + P(A_{n,1}) + \dots + P(A_{n,n}) = P(A_{n,0}) + P(A_{n,1}) + \dots + P(A_{n,k}) + \dots$$

$$\dots + P(A_{n,n}) = \binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \dots + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \dots + \binom{n}{n} p^n q^0 = 1.$$

A következőkben a $P(A_{n,k}) = b_k$ jelölést használjuk rövidítés végett. Tételezzük fel, hogy adott n kísérletből álló sorozatról van szó itt is. Tehát:

$$b_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

az ún. binomiális valószínűség. A következőkben ennek monotonitását vizsgáljuk. Nézzük tehát a

$$\frac{b_k}{b_{k-1}}$$

hányadost, és állapítsuk meg, mely " k " értékekre igaz, hogy

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} > 1.$$

Mivel

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{n! p^k q^{n-k}}{k! (n-k)!} \cdot \frac{(k-1)! (n-k+1)!}{n! p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} > 1,$$

ez a követelés

$$k < (n+1) p$$

esetén áll fenn.

Ez azt jelenti, hogy ha k értéke kisebb, mint $(n+1)p$, akkor a monoton növekedés fennáll; ha pedig

$$k > (n+1) p,$$

akkor az előbbihez teljesen hasonló számolással kapjuk, hogy

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} < 1,$$

ami a monoton csökkenést jelenti.

Határozzuk meg $\max b_k$ -t. Két eset van:

1. $(n+1)p$ nem egész szám,
2. $(n+1)p$ egész szám.

Az 1. esetben vegyük $(n+1)p$ egész részét, az $[(n+1)p]$ számot. Az elmondottakból világos, hogy a

$$b_{[(n+1)p]}$$

valószínűség maximális az összes b_k valószínűség között.

A 2. esetben $(n+1)p$ egész szám, tehát valamely k -érték éppen $(n+1)p$ -vel egyenlő.

Fennáll, hogy

$$b_{k_0-1} = b_{k_0}.$$

Ekkor két maximum van.

Ugyanis:

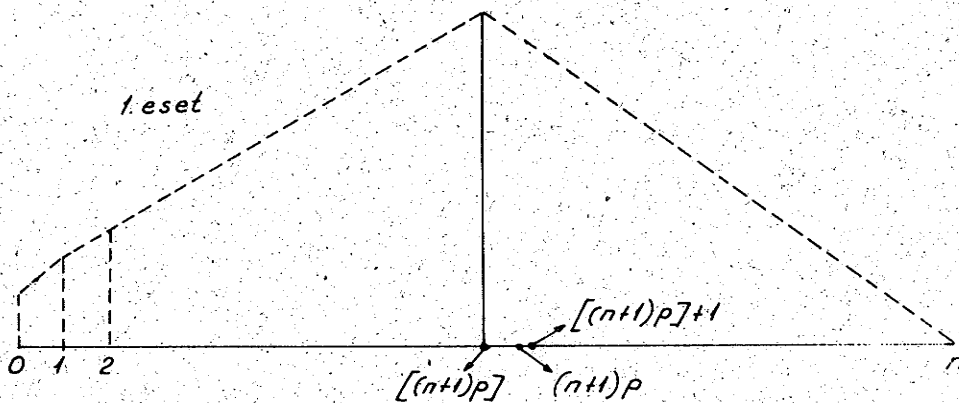
$$\begin{aligned} & \frac{\binom{n}{(n+1)p-1} p^{(n+1)p-1} q^{n-(n+1)p+1}}{\binom{n}{(n+1)p} p^{(n+1)p} q^{n-(n+1)p}} = \\ & = \frac{n(n-1)\dots(n-(n+1)p+2) [(n+1)p]! q}{[(n+1)p-1]! n(n-1)\dots(n-(n+1)p+1)p} = \\ & = \frac{(n+1)p \cdot q}{(n-(n+1)p+1)p} \cdot \frac{\underbrace{npq}_{nq} + \underbrace{pq}_q}{(n-np-p+1)p} = \frac{(n+1)pq}{(n+1)qp} = 1, \end{aligned}$$

tehát tényleg

$$b_{k_0-1} = b_{k_0}$$

és ez a maximum.

Az elmondottakat az alábbi ábrák szemléltetik: (37. a ábra):

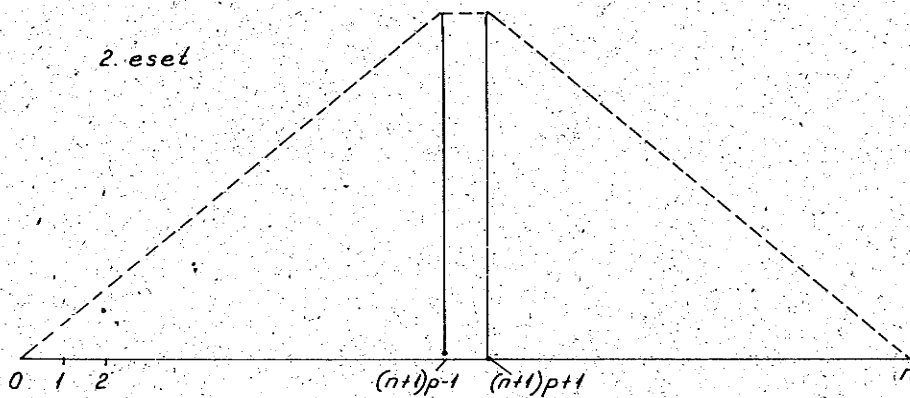


37. a ábra

ha $(n+1)p$ nem egész, akkor egy maximum van, a

$$b_{[(n+1)p]} \text{ érték;}$$

(37. b ábra)



37. b ábra

ha pedig $(n+1)$ p egész szám, akkor két maximális érték van:

$$b_{(n+1)p-1} \quad \text{és} \quad b_{(n+1)p}$$

IV.6.2 Példák a binomiális eloszlásra

A következő példák Kemény-Snell-Thompson: A modern matematika alapjai c. könyvből valók.

1. Péter és Pál pingpongozik. Aki nyer egy játszmát, 1 Ft-ot kap. Ha négy játszmát játszanak, mi annak a valószínűsége, hogy Péter többet nyer, mint Pál?

Megoldás: Mindkét játékos $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyer. Péter akkor nyer többször, mint Pál, ha vagy 3 vagy 4 játszmát megnyer. Ennek valószínűsége:

$$\binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{5}{16}.$$

2. Egy tíz kérdésből álló teszt-vizsgán mi a valószínűsége, hogy találgatással legalább a kérdések 70 %-ára a helyes választ adják, feltéve, hogy $1/2$ valószínűséggel adják mind a helyes, mind a helytelen választ. (Igennel vagy nemmel kell válaszolni.)

Megoldás: A kért esemény pontosan akkor következik be, ha vagy pontosan 7, vagy pontosan 8, vagy pontosan 9, vagy pontosan 10 kérdésre a helyes választ adják. Ennek valószínűsége:

$$\binom{10}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{10}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \frac{1}{2} + \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{11}{64}.$$

3. Találomra kiválasztunk öt embert és megkérdezzük őket, helyesnek-e egy bizonyos javaslatot, amelyet az embereknek csak 30 %-a helyesel. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztott öt ember többsége ezek közé tartozik?

Megoldás: Itt is binom-eloszlásról van szó és $n = 5$, $p = 0,3$. A kérdéses esemény a $k = 3$, illetve $k = 4$, illetve $k = 5$ értékekre következik be. A keresett valószínűség tehát:

$$\binom{5}{3} 0,3^3 \cdot 0,7^2 + \binom{5}{4} 0,3^4 0,7 + \binom{5}{5} 0,3^5 0,7^0.$$

4. Egy torpedó $1/3$ valószínűséggel talál el egy hajót. Legalább hány torpedó kell ahhoz, hogy legalább egy torpedó $0,9$ -nél nagyobb valószínűséggel találja el a hajót?

Megoldás: A torpedók ismeretlen száma legyen n , a találat valószínűsége $p = \frac{1}{3}$ és így $q = \frac{2}{3}$. A keresett esemény valószínűsége a binom-eloszlás formulája szerint:

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

U. i. annak a valószínűsége, hogy legalább 1 torpedó n torpedó közül eltalálja a hajót, egyenlő a következő összeggel:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

A komplementer eseménynek, vagyis annak a valószínűsége, hogy az n torpedó közül egyetlenegy sem találja el a hajót, egyenlő

$$\binom{n}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ -nel.}$$

Ennélfogva annak a valószínűsége, hogy a torpedó közül legalább egy talál:

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

A feladat szerint ennek az értéknek nagyobbnak kell lennie $0,9$ -nél, azaz

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0,9.$$

Ebből $0,1 > \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\lg 0,1 > n \lg \frac{2}{3}$, úgyhogy $n > 5,6$; s minthogy n egész szám kell hogy legyen, adódik: $n \geq 6$.

5. Egy pénzdarabbal 8-szor dobunk.

- Mi a fejdobások számának legvalószínűbb értéke,
- Mi a legvalószínűbb számérték, ha az első négy dobás eredménye már fej volt?

Megoldás: a) $\binom{8}{k} \frac{1}{2^8}$ maximális, ha $[(n+1)p] = k = [9 \cdot \frac{1}{2}] = [4,5] = 4$.

A fejdobások számának legvalószínűbb értéke $k = 4$ -nél van, maga a valószínűség pedig:

$$\binom{8}{4} \frac{1}{2^8}.$$

b) Az első négy dobás eredménye rögzített, tehát csak négy dobásunk van, így figyelembe véve a kísérletek függetlenségét is, kell, hogy

$$\binom{4}{k} \frac{1}{2^4} = \text{maximum}$$

legyen, ebből pedig

$$k = [(4+1) \frac{1}{2}] = [2,5] = 2.$$

Összesen tehát 6 dobás az eredmény. A megfelelő valószínűség könnyen kiszámítható.

6. Egy vendéglőben $\frac{3}{4}$ valószínűséggel kérnek almás rétest és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel cseresznyés rétest. A vendéglőben 5 almás és 5 cseresznyés rétes van. 10 vendég érkezik a vendéglőbe.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy mind a 10 vendég olyan rétest kap, amilyent kér?

b) Tíz rétes közül hány almás és hány cseresznyés rétesnek kell lennie a vendéglőben ahhoz, hogy a vendégek a lehető legnagyobb valószínűséggel olyan rétest kapjanak, amilyent kértek?

Megoldás: a) Tulajdonképpen annak az eseménynek a valószínűségét keressük, hogy 5 vendég kér almás és 5 vendég kér cseresznyés rétest. Máskülönben a vendégek kérését nem lehet kielégíteni. Mivel a rétesek és a vendégek száma egyenlő, mindig csak azt a kérést lehet kielégíteni, amelynél annyi vendég kér almás, és annyi vendég kér cseresznyés rétest, amennyi ezekből a rétesekből a vendéglőben van, akkor is, ha a 10 rétes megoszlása más, mint az előbbi 5-5.

A keresett esemény valószínűsége az elmondottak alapján:

$$\binom{10}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5.$$

b) k db almás rétest és $(10-k)$ db cseresznyés rétest kérnek. A feladat szerint

$$\binom{10}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{10-k} = \text{maximum}$$

kell, hogy legyen. Ez akkor teljesül, ha

$$k = \left[11 \cdot \frac{3}{4} \right] = \left[\frac{33}{4} \right] = [8,25] = 8.$$

7. Mi a valószínűsége annak, hogy 100 urnába egymás után találomra 20 golyót bedobva, a golyókból pontosan 5 db valamelyik konkrét (egyéb-ként tetszőleges) urnába kerüljön? (Az egyes urnák egymásközt teljesen egyenrangúak.)

Megoldás:

$$\binom{20}{5} \left(\frac{1}{100}\right)^5 \left(\frac{99}{100}\right)^{15}.$$

8. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 8 gyermekes családban több a fiu, mint a leány, ha a fiuszületések valószínűsége 0,51?

Megoldás:

$$\binom{8}{5} 0,51^5 0,49^3 + \binom{8}{6} 0,51^6 0,49^2 + \binom{8}{7} 0,51^7 0,49 + \binom{8}{8} 0,51^8.$$

9. Kockát dobunk fel 10-szer egymásután. Mi a valószínűsége annak, hogy a 10 dobás közül pontosan 7 ízben dobunk 6-osat?

Megoldás:

$$\binom{10}{7} \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

10. Egy urnából, amelyben 20 fehér és 2 fekete golyó van, golyókat huzunk ki úgy, hogy a kihuzott golyót mindig visszatesszük. Legalább hányszor kell huznunk, hogy $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb legyen annak az eseménynek a valószínűsége, hogy legalább egyszer feketét huzunk?

Megoldás: Itt is komplementer eseménnyel dolgozva kapjuk, hogy a keresett valószínűség

$$1 - \left(\frac{20}{22}\right)^n.$$

Itt n jelenti a szükséges huzások számát. A feladat szerint:

$$1 - \left(\frac{20}{22}\right)^n > \frac{1}{2},$$

amelyből egyszerű számolással kapjuk, hogy $n \geq 8$.

11. Legalább hányszor kell dobnunk a szabályos pénzérmével, hogy 0,8-nál nagyobb valószínűséggel legyen a dobások közt fej?

Megoldás: A dobások közt van fej, ha 1-szer, 2-szer, ..., n -szer fordul elő a fej. Ennek valószínűsége, ha n dobást teszünk:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

azaz

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0,8.$$

Innen $0,2 > \frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{0,2} < 2^n$, azaz $2^n > 5$ és $n \geq 3$.

12. Legalább hány lottószelvényt kell kitöltenünk, ha azt akarjuk, hogy 0,75-nál nagyobb valószínűséggel legyen köztük négytalálatos?

Megoldás: A négytalálatos valószínűsége

$$p = \frac{\binom{5}{4} \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} = \frac{425}{\binom{90}{5}}.$$

Ha n szelvényt töltünk ki, annak valószínűsége, hogy egyetlen négytalálatos sem lesz köztük, egyenlő

$$\binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \text{-nel.}$$

Tehát a mi esetünk valószínűsége:

$$1 - (1-p)^n > 0,75.$$

De itt

$$1 - p = 1 - \frac{425}{43949268} = \frac{43948843}{43949268} = 0,9999,$$

ugyhogy adódik

$$1 - 0,9999^n > 0,75,$$

$$0,25 > 0,9999^n,$$

$$\lg 0,25 > n \lg 0,9999^n,$$

végül

$$n > \frac{\lg 0,25}{\lg 0,9999} \approx \frac{0,60206}{4 \cdot 10^{-5}} \approx 15052 \text{ db.}$$

13. Egy vastag pénzdarab feldobva $\frac{5}{12}$ valószínűséggel esik "fejre".

$\frac{5}{12}$ valószínűséggel "írásra" és $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ valószínűséggel az élére.

Hatszor dobunk. Mi a valószínűsége, hogy a pénzdarab pontosan kétszer esik az élére?

Megoldás: $p = \frac{1}{6}$ annak valószínűsége, hogy az élére esik,

$q = \frac{5}{6}$ annak valószínűsége, hogy nem az élére esik.

A keresett valószínűség eszerint:

$$\binom{6}{2} \frac{1}{6}^2 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{5^4}{6^4} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3125}{7776} = 0,2009.$$

14. Egy hallgató úgy gondolja, hogy ha négy tárgyat vesz fel, akkor mindegyikből 0,8 valószínűséggel tud levizsgálni; ha öt tárgyat, akkor 0,7 valószínűséggel, ha hatot, akkor 0,5 valószínűséggel tud külön-külön mindegyikből levizsgálni. Célja az, hogy legalább négy tárgyból levizsgázzék. Hány előadást kell felvennie ahhoz, hogy a lehető legnagyobb valószínűséggel érje el célját?

Megoldás: a) 4 tárgyat vesz fel. Hogy mind a négyből levizsgázzék, annak a valószínűsége:

$$0,8^4 = 0,4096.$$

b) 5 tárgyat vesz fel. Hogy legalább négy tárgyból levizsgázzék, annak a valószínűsége most:

$$\binom{5}{4} 0,7^4 0,3 + \binom{5}{5} 0,7^5 = 5 \cdot 0,7^4 0,3 + 0,7^5 = 0,7 \cdot 1,5 + 0,7 = 0,2401 \cdot 2,2 = 0,52822.$$

c) 6 tárgyat vesz fel. Hogy legalább négy tárgyból levizsgázzék, annak a valószínűsége most:

$$\binom{6}{4} 0,5^4 0,5^2 + \binom{6}{5} 0,5^5 0,5 + \binom{6}{6} 0,5^6 = \frac{1}{2} (15 + 6 + 1) = \frac{22}{64} = \frac{11}{32} = 0,3437.$$

IV.6.3 Valószínűségeloszlás

(Egyelőre diszkrét valószínűségeloszlásról beszélünk.) Legyen az Ω eseménytér a $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok egyesítése, és bármely $i \neq j$ index-párra teljesüljön az

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

reláció, továbbá legyenek ismertek a $P(A_i) = p_i$ valószínűségek. Ez esetben a $A_1, A_2, \dots, A_n$ eseményrendszer és az ehhez tartozó $p_1, p_2, \dots, p_n$ valószínűségek együtt egy valószínűségeloszlást képeznek.

Szokásos a valószínűségeloszlást megadni a következő módon:

$$\begin{array}{c} A_1, A_2, \dots, A_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{array}$$

Mivel $\Omega = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ és $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, Kolmogorov I. axiómája szerint

$$P(\Omega) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

Az ilyen $A_1, A_2, \dots, A_n$ eseményrendszert teljes eseményrendszernek nevezzük.

A már ismertetett binomiális eloszlás is természetesen egyfajta valószínűségeloszlás. Itt A_k azon eseményeket jelenti, amelyeknél a vizsgált esemény pontosan k ízben következett be az n ízben történt kísérletből. Itt is fennáll, hogy $A_i \cap A_k = \emptyset$, $i \neq k$, továbbá a $P(A_k) = p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ értékeket meghatároztuk ($k = 0, 1, 2, \dots, k \dots, n$). A táblázat ekkor:

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_k & \dots & A_n \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Ha az Ω eseménytér megszámlálhatóan végtelen sok egymást páronként kizáró esemény egyesítése, azaz:

$$\Omega = A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

és

$$A_i \cap A_k = \emptyset \quad (i \neq k),$$

továbbá ismertek a $P(A_i) = p_i$ valószínűségek, akkor ebben az esetben is valószínűségeloszlást adunk meg az alábbi táblázattal:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

ahol természetesen

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

A következőkben egy elég nagy gyakorlati jelentőséggel rendelkező eloszlást ismerünk meg, neve: Poisson-eloszlás. A Poisson-eloszlás Ω eseménytere is végtelen sok egymást páronként kizáró esemény egyesítése. Bevezetését többek között a binomiális eloszlásnál szereplő való-

színűségek nehézkes kiszámítása indokolja. Tanultuk ugyan a Stirling-formulát, amelyet célszerű használni az $\binom{n}{k}$ érték közelítésére:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} \sqrt{2\pi (n-k)} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}}$$

Logaritmus segítségével elég gyorsan számolhatunk. Nézzük most a Poisson-eloszlással való közelítést. A binomiális eloszlásnál szereplő n a kísérletek számát, p pedig a vizsgált esemény bekövetkezésének valószínűségét jelenti valamely kísérlet esetén; növeljük a kísérletek számát: n -et minden határon túl, de úgy, hogy az np érték állandó maradjon. Az ilyen binom-eloszlásoknál a p alapvalószínűség függ az n -től, tehát nem fix érték, mint azt a binom-eloszlásoknál általában megszoktuk.

Jelöljük np értékét λ -val; számítsuk ki a binomiális eloszlásnál szereplő

$$p_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

kifejezés határértékét, ha $n \rightarrow \infty$. Ezzel a határértékkel közelítik p_k értékét. Mivel

$np = \lambda$, ezért $p = \frac{\lambda}{n}$ és $q = 1 - \frac{\lambda}{n}$; k pedig rögzített érték. Így

$$p_k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k},$$

$$p_k = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} \cdot \lambda^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Ebből a felírásból látható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

amelyre a V_k jelölést szokták használni. Ennek alapján a Poisson-eloszlás táblázatát így írhatjuk fel:

$$\begin{pmatrix} A_0, A_1, \dots, A_k, \dots, A_n, \dots \\ V_0, V_1, \dots, V_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \dots, V_n, \dots \end{pmatrix}$$

λ a Poisson-eloszlás paramétere. Természetesen az előzőek

$$\sum_{k=0}^{\infty} V_k = 1.$$

Ha a bal oldalon szereplő végtelen sor összegét nem ismernénk, bizonyításul is szolgálhatna a sorösszeg meghatározására az a tény, hogy a bal oldalon a $\sum$ -nak 1-nek kell lennie valószínűségi számításokból. Mi azonban már az analízisből tudjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

így tehát

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} V_k = e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

azonosság a már tanultakat igazolja.

A gyakorlatban, ha a kísérletek száma nagy (gondoljunk pl. egy gyár azonos feltételek mellett történő termelésére), akkor a binomiális eloszlásnál szereplő

$$p_k \approx V_k, \quad \text{azaz} \quad \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

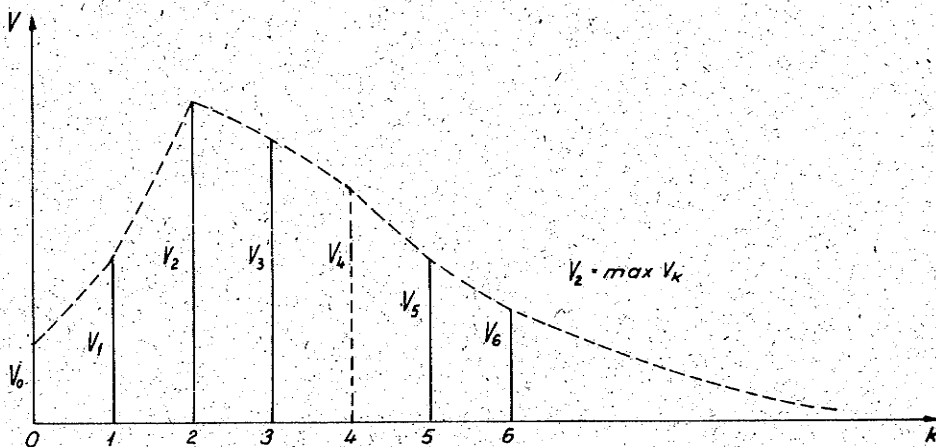
közelítés jónak mondható. Mivel a $\sum_{k=0}^{\infty} V_k = 1$ egyenlőség fennáll, kell,

hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = 0$ legyen.

Ennek alapján V_k maximumára is következtethetünk. Uí $\max p_k$ binomiális eloszlás esetén a $k = [(n+1) \cdot p]$ értékre adódott; Poisson-eloszlásnál $\max k = \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1) \cdot p] = \lim_{n \rightarrow \infty} [np + p] = [\lambda + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n}] = [\lambda + 0] = [\lambda].$

Ha λ egész szám, akkor $\max k = \lambda$; ha λ nem egész szám, pl. $\lambda = 2,45$, akkor $\max V_k = V_2$.

Poisson-eloszlás ábrázolása $\lambda = 2,45$ esetében: (38. ábra).



38. ábra

Megjegyzés: Ha $n \cdot p$ nem konstans, de $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p = \lambda$ teljesül, akkor is igazak az elmondottak. Vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!},$$

ahol k rögzített érték.

U1. legyen most is k fix, $n \cdot p = \lambda_n$, úgyhogy

$$0 < p = \frac{\lambda_n}{n} < 1;$$

továbbá feltételezzük, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda \quad \text{és} \quad 0 < \lambda < +\infty.$$

$$0 < \frac{\lambda_n}{n} < 1 \quad \text{miatt egyuttal} \quad 0 < 1 - \frac{\lambda_n}{n} < 1.$$

Akkor

$$p_k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}.$$

Lévé λ_n korlátos és k rögzített, azért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!},$$

továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1.$$

Másrészt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = e^{-\lambda}.$$

Ugyanis legyen $\frac{\lambda_n}{n} = h_n$, ahol tehát $h_n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow +\infty$. Ezzel a jelöléssel:

$$\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = \left[\left(1 - h_n\right)^{\frac{1}{h_n}} \right]^{\lambda_n}$$

Ismeretes, hogy $\left(1 - h_n\right)^{\frac{1}{h_n}} \rightarrow e^{-1}$, ha $h_n \rightarrow 0$, és $\lambda_n \rightarrow \lambda$ miatt előbbi limesz-egyenlőségünk világos.

IV.6.4 Példák a Poisson-eloszláshoz

1. Legyen adva N számú, teljesen egyforma urna és n számú, teljesen egyforma golyó. Bármely urnába egyenlő valószínűséggel kerülhet golyó, ha a golyókat találomra elosztjuk az urnák között. Mi annak a valószínűsége, hogy egy konkrét, de egyébként tetszőleges urnába pontosan k számú golyó kerül?

Felelet: Legyen az N számú urna: $u_1, u_2, \dots, u_N$, az n számú golyó sorszáma pedig $1, 2, \dots, n$. Mindegyik golyó száma fölé írjuk azt az u_i urnát, amelybe a golyó a szétosztásnál belekerült, pl.:

$$\begin{array}{ccccccc} u_1 & u_1 & u_6 & u_2 & u_2 & \dots & u_1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{array}$$

egy lehetséges hozzárendelés. Az összes hozzárendelések száma nyilván N^n . Vegyük el az urnák közül a szóban forgó urnát, pl. az u_1 -et, s tegyük ebbe pontosan k számú golyót; visszamarad $N - 1$ számú urna és $n - k$ számú golyó. Ezeket az $N - 1$ urnába az előbbiek szerint $(N - 1)^{n-k}$ -féleképpen lehet elhelyezni; de ezt az utóbbi számot még meg kell szorozni $\binom{n}{k}$ -val, mert n golyó közül a kiválasztott urnába (u_1 -be) a k számú golyót $\binom{n}{k}$ -féleképpen választhatjuk ki. Így a kedvező esetek száma arra az eseményre nézve, hogy az u_1 urnába pontosan k számú golyó kerüljön

$$\binom{n}{k} (N-1)^{n-k}$$

tehát a keresett valószínűség egyenlő az

$$\frac{\binom{n}{k} (N-1)^{n-k}}{N^n} \text{ törttel,}$$

ami más alakban:

$$\binom{n}{k} \frac{1}{N^k} \cdot \frac{(N-1)^{n-k}}{N^{n-k}} = \binom{n}{k} \frac{1}{N^k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

Növeljük most az urnák és a golyók számát minden határon túl úgy, hogy

$$\frac{n}{N} = \lambda \text{ állandó maradjon.}$$

Akkor az előbb kiszámított

$$\binom{n}{k} \frac{1}{N^k} \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}$$

valószínűség a

$$\frac{\lambda N (\lambda N - 1) (\lambda N - 2) \dots (\lambda N - (k-1))}{k! N^k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{-k} \left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^N \right]^\lambda =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{\lambda N}\right) \left(1 - \frac{2}{\lambda N}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{\lambda N}\right) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{-k} \left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^N \right]^\lambda$$

átalakítás kapcsán rögzített k és $N \rightarrow +\infty$ esetén, amikor is $n = \lambda N$ szintén ∞ -hez tart konvergál a

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

határvalószínűséghez.

Tehát nagyon nagy számú N urna és n golyó esetén (feltéve, hogy az egy urnába jutó golyók átlagos $\lambda = \frac{n}{N}$ száma változatlan) annak az eseménynek a valószínűsége, hogy valamelyik konkrét, de egyébként tetszőleges urnába pontosan k számú golyó jut, egyenlő a

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

szorzattal.

Egy alkalmazás. Üveggyártásnál M métermázsa üvegmasszából 1 kg-os palackokat gyártunk, így $N = 100 M$ palackunk lesz. Minden métermázsa üvegmassza átlag x számú szemcsét tartalmaz, tehát összesen $n = M \cdot x$ szemcse van az M mázsa masszában. Ha egy palackba a gyártás folyamán szemcse jut, a palack selejtes lesz. Mi a valószínűsége annak, hogy tömeggyártás esetén (M igen nagy) valamely találomra kiválasztott üvegpalack selejtes lesz?

Látható, hogy itt az előbbi urna-golyó-feladatról van szó, csupán urna helyett palackot, golyó helyett szemcsét kell mondani. Esetünkben

$$\lambda = \frac{n}{N} = \frac{M \cdot x}{100 M} = \frac{x}{100}; \quad \text{pl. } x = 30 \text{ mellett } \lambda = 0,3.$$

Igy annak a valószínűsége, hogy egy palack anyagában pontosan k szemcse van:

$$p_k = \frac{0,3^k}{k!} e^{-0,3},$$

speciálisan

$$p_0 = \frac{0,3^0}{0!} e^{-0,3} = e^{-0,3}$$

annak a valószínűsége, hogy egy palackban nincs szemcse, vagyis, hogy a palack selejtmentes. Így annak a valószínűsége, hogy egy palack selejtes:

$$(1 - e^{-0,3}) \approx 0,2592, \text{ azaz } 25,92 \%.$$

Ha az előbbi példánkban csak 1/4 kg-os palackokat gyártunk, akkor a selejtszázalék csupán 7,22 % lesz. (Ekkor ui. $N = 400 M$,

$$\frac{n}{N} = \frac{x \cdot M}{400 M} = \frac{x}{400} = \frac{30}{400} = \frac{3}{40},$$

és a palack selejtességének valószínűsége $1 - e^{-\frac{3}{40}}$, ami $\approx 0,0722$.)

Ez az üveggyártási alkalmazás Rényi Alfréd: Valószínűség-számítás c. tankönyvéből való.

2. Legyen $N \text{ dm}^3$ -es térrészünk és n számú tömegpontunk (részecskénk), ahol N egész szám. Ha minden 1 dm^3 -es térrészbe egyenlő valószínűséggel jut részecske, mi a valószínűsége annak, hogy igen nagy N és n esetén egy 1 dm^3 -es térrészben pontosan k számú részecske van jelen, feltéve, hogy a tömegeloszlás átlagos sűrűsége, tehát az

$$\frac{n}{N} = \lambda \text{ szám állandó?}$$

Látható, hogy ismét az előbbi urna-golyó problémáról van szó. Ha adott a tömegeloszlás $\frac{n}{N} = \lambda$ sűrűsége (pontosabban szólva, ha egy részecske tömege m , az $\frac{n m}{N} = m \lambda$ szám az átlagsűrűség, de ez a dolog lényegét nem érinti), akkor a keresett valószínűség:

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

3. Tegyük fel, hogy valamely országon belül a családok Poisson-eloszlást követnek gyermekeik létszáma tekintetében. Vagyis annak a valószínűsége, hogy egy családban pontosan k gyermek van, egyenlő

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

-val, alkalmasan választott $\lambda > 0$ paraméter mellett ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$). Az ismert jelöléseket használva:

A_0 jelentse azt az eseményt, hogy egy család gyermektelen

A_1 jelentse azt az eseményt, hogy egy családban 1 gyermek van,

A_2 jelentse azt az eseményt, hogy egy családban 2 gyermek van,

.

.

.

A_k jelentse azt az eseményt, hogy egy családban k gyermek van.

.

.

.

Az Ω eseménytér tehát:

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k, \quad A_j \cap A_k = \emptyset \quad (j \neq k)$$

továbbá

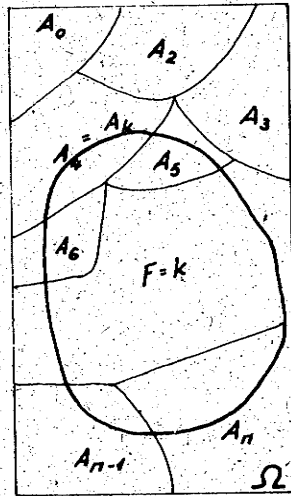
$$p(A_k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

λ -t az illető ország statisztikája alapján határozzák meg, leggyakoribb az $1 < \lambda < 2$ eset.

A fiuszületés valószínűsége hazánkban az utolsó évtizedekben: $p = 0,516$. Így $(1 - p = q = 0,484$ a leányszületés valószínűsége).

Ezen bevezetés után feltehető a következő kérdés. Ha tudjuk, hogy a családok gyermekeik száma tekintetében Poisson-eloszlást követnek, mi annak a valószínűsége, hogy egy találmányra kiválasztott családban pontosan k számú fiugyermek van?

Feladatunk kiszámításával igazolni fogjuk, hogy egy újabb Poisson-eloszláshoz jutunk, amely eloszlás paramétere λp érték lesz. Szokásos ezt az újonnan kapott Poisson-eloszlást összetett eloszlásnak nevezni.



A fiugyermekek száma k (ahol k valami-lyen nem-negatív egész szám). $(F = k)$ jelentse azt az eseményt, hogy egy családban pontosan k számu fiu van, (39. ábra.)

Az $(F = k)$ eseményt feltüntető halmaz azo-kát a családokat ábrázoló halmazokba nyulik bele, amelyekben pontosan k számu fiu van.

A teljes valószínűség tételét használjuk:

$$(F = k) = (F = k) \cap (A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots),$$

$$(F = k) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [(F = k) \cap A_n],$$

39. ábra

ahol n változik, k pedig rögzített, és $A_1 \cap A_k = \emptyset$ ($1 \neq k$).

Kolmogorov I. axiómája szerint:

$$P(F = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P[(F = k) \cap A_n] = \sum_{n=0}^{\infty} P[(F = k) | A_n] \cdot P(A_n).$$

$$P[(F = k) | A_n] = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k},$$

továbbá

$$P(A_n) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!}.$$

Ha $n < k$, akkor $\binom{n}{k} = 0$, tehát:

$$\begin{aligned}
 P(F = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!} = \\
 &= e^{-\lambda} p^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k! (n-k)!} \cdot \frac{q^{n-k} \lambda^n}{n!} = \\
 &= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{q^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!}
 \end{aligned}$$

Az $n-k = \nu$ jelölést használva:

$$\begin{aligned}
 P(F = k) &= \frac{e^{-\lambda} (p\lambda)^k}{k!} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(q\lambda)^{\nu}}{\nu!} = \frac{e^{-\lambda} (p\lambda)^k}{k!} e^{q\lambda} = \\
 &= \frac{e^{-\lambda+q\lambda} (p\lambda)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda(1-q)} \cdot (p\lambda)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda p} (p\lambda)^k}{k!} .
 \end{aligned}$$

Igy a kérdéses valószínűség:

$$V_k = P(F = k) = \frac{e^{-\lambda p} \cdot (\lambda p)^k}{k!} .$$

Ennek a Poisson-eloszlásnak a táblázatát a következő alakban lehet megadni:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} F=0, & F=1, & F=2, & \dots, & F=k, & \dots \\ V_0 & , & V_1 & , & V_2 & , & \dots, & V_k = \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^k}{k!} & \dots \end{array} \right)$$

ahol $\lambda_1 = \lambda_p$ az összetett eloszlás paramétere.

IV.7 A VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ FOGALMA

IV.7.1 Alapfogalmak. Definíciók

Láttunk már bizonyos eloszlásokat. Vegyük ezek közül a binomiális eloszlást, amelynek táblázata:

$$\begin{pmatrix} A_0, A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n \\ p_0, p_1, p_2, \dots, p_k = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}, \dots, p_n \end{pmatrix}$$

Rendeljük

az A_0 eseményhez a 0 értéket,

az A_1 eseményhez az 1 értéket,

az A_2 eseményhez a 2 értéket,

$\vdots$

az A_k eseményhez a k értéket

$\vdots$

az A_n eseményhez az n értéket.

Igy minden realizálható eseményhez egy számot rendeltünk, tehát egy függvényt létesítettünk; ez a függvény az itt szereplő események alapján van értelmezve, és felveheti a $0, 1, 2, \dots, n$ értékeket. Szokás ezt a függvényt X -szel is jelölni: neve: valószínűségi változó. Ha csak véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok különböző értéket vehet fel (mint pl. jelen esetben is), diszkrét valószínűségi eloszláshoz tartozó, diszkrét valószínűségi változóról beszélünk. A véletlentől függ, hogy a X valószínűségi változó valamely kísérletsorozatnál melyik értéket veszi fel. Ha azonban nagyon sok esetben hajtjuk végre a kísérletsorozatokat, azt tapasztaljuk, hogy a valószínűségi változó valamely értékét az eseményhez tartozó valószínűség arányában veszi fel. Tehát a valószínűségi változó minden egyes értékéhez egy szám tartozik, amely azt jelöli, milyen valószínű-

séggel veszi fel a valószínűségi változó ezt az értékét. Pl. a binomiális eloszlásoknál annak a valószínűsége, hogy $X = k$ legyen, egyenlő a

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

értékkel.

Általában a $P(X = k) = p_k$ jelölést szokás használni.

Egy másik példa a kockadobás esete. Az itt szereplő eseményekhez az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat rendelhetjük a

$$\left(\begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

séma szerint.

Most a valószínűségi változó lehetséges értékei:

$$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

a hozzájuk tartozó valószínűségek pedig

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{6}, \quad \dots, \quad P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

Ha azt kérdezzük, mi a valószínűsége annak, hogy $2 = X = 4$ legyen, a válasz:

$$P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó vagy a 2-es, vagy a 3-as, vagy a 4-es értéket veszi fel.

Legyen a következő példánkban egy urnában 6 fekete és 4 piros golyó, visszatevéssel huzzunk ki egymás után egy golyót, de csak addig, amíg először pirosat nem huzzunk. Nézzük meg, milyen értékeket vehet fel a valószínűségi változó és határozzuk meg, hogy X az egyes értékeit milyen valószínűséggel veszi fel. Az X valószínűségi változó értelme az alábbiakból világos.

Ha az első húzásra piros golyót huzzunk, ez az A_1 esemény; az A_1 eseményhez rendelt szám 1, azaz $X = 1$.

Ha a második húzásra huzzunk először piros golyót, ez a A_2 esemény; az A_2 eseményhez rendelt szám 2, azaz $X = 2$.

Ha a k -ik húzásra huzunk először piros golyót, ez a A_k esemény; az A_k eseményhez rendelt szám k , azaz $X = k$.

Az események: $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n, \dots$,
az eseményekhez rendelt számok rendre:

$$X = 1, 2, \dots, k, \dots, n, \dots$$

Ezek sorozata sehol sem ér véget, mert előfordulhat, hogy nem huzunk egyszer sem piros golyót. Itt is diszkrét eloszlásról van szó. Annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó a k értéket veszi fel:

$$P(X = k) = \left(\frac{6}{10}\right)^{k-1} \cdot \frac{4}{10}.$$

A fent említett példák alapján azt mondhatjuk, hogy a valószínűségi változó olyan mennyiség, amely különböző értékeket vehet fel általában más és más valószínűséggel.

Nem - diszkrét valószínűségi változó fogalma

A vizsgált események Ω halmaza nem minden esetben véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok eseményből áll. Előfordulhat pl., hogy az Ω eseménytér a valós számok valamely nem-megszámlálható részhalmazával reprezentálható. (Pl. az Ω eseménytér a valós számegyenes valamely $[a, b]$ intervallumában lévő valós számok halmaza.)

Ilyen továbbá, ha a Duna összes lehetséges vizállásaihoz, mint elemi eseményekhez (ezek most nem megszámlálható sokan vannak), a vizállás nagyságát rendeljük hozzá.

maximális vizállás	_____ $X = M$
elemi események az egyes vizállások	_____ $X = a$ mért érték nagysága
véletlen események pl. a vizállásnak valamely intervallumba vagy bizonyos intervallumokban való esése	_____
minimális vizállás	_____ $X = m$

Ebben az esetben az elemi események halmazán egy olyan valós függvényt definiáltunk, amely értékeit a $[m, M]$ intervallumban veszi fel. Ezt a függvényt (hasonlóan a diszkrét esethez) valószínűségi változó-nak nevezzük. Nem diszkrét valószínűségi változóval találkozunk akkor is, ha a statisztikai adatok alapján arra akarunk választ adni, mi a valószínűsége annak, hogy valamely izzó lámpa bizonyos élettartamot megér?

Most a X valószínűségi változó értékei az izzólámpák életkorával egyenlők. X minden nem-negatív valós számértéket felvehet, természetesen más és más valószínűséggel. Nem diszkrét valószínűségi változóval találkozunk a mérésnél elkövetett hibák esetében is. Itt X az elkövetett hiba értékeit veszi fel, tehát minden valós számértéket felvehet.

Mint az előbbi példákból már láttuk, a valószínűségi változó fogalma akkor lép fel, amikor a szóban forgó kísérlet egyes kimenetelei (az elemi események) számok, vagy számokkal kapcsolatosak. Mint pl. látni fogjuk, ha egy pénzérmét n ízben feldobunk, akkor az elemi események: a "fej" ill. "írás" dobás. Mégis célszerű az egyik elemi eseményt pl. a fejet az 1 számmal, a másik elemi eseményt (az írás) a 0 számmal jellemezni. A valószínűségi változó matematikai fogalmának megalkotásánál el kell tekintenünk a konkrét kísérletektől, tehát attól, hogy mikor milyen számértékek lépnek fel az egyes kimeneteleknél és csak olyan tulajdonságokból szabad kiindulnunk, amelyek matematikai szempontból lényegesek. Ezek a tulajdonságok a következők:

1. Az elemi események mindegyikéhez egy konkrét számérték tartozik. Ebből látjuk, hogy a valószínűségi változó egy függvényt jelent az eseménytérben, hiszen az egyes elemi eseményekhez, az eseménytér "pontjaihoz" számokat rendeltünk.

2. Véletlen eseménynek számít, ha a valószínűségi változó értéke valamilyen konkrét számmal egyenlő, vagy pedig valamilyen megadott számnál kisebb, vagy nagyobb, vagy két megadott szám közé esik. Azaz pl. a szokásos jelöléssel:

$$(X = y), \quad (Y < y), \quad (y_1 < X < y_2)$$

véletlen események bármely valós y , illetve y_1 és y_2 szám esetén.

Mindezen szemléletes előzmény után most már megadjuk a valószínűségi változó pontos definícióját.

Mint a valószínűségszámítás megalapozásánál említettük, az alapul szolgáló matematikai modell a következő: Adva van az elemi eseményeknek egy halmaza, az un. eseménytér. Adva van továbbá az eseménytér bizonyos részhalmazainak, az un. véletlen eseményeknek egy $\mathcal{A}$ családja. Ez a halmazcsalád a következő tulajdonságokkal rendelkezik. Ha $A_1 \in \mathcal{A}$, $A_2 \in \mathcal{A}$, ... véletlen eseményeknek egy véges vagy meg-

számlálhatóan végtelen sorozata, akkor ezek egyesítése $A_1 \cup A_2 \cup \dots$, valamint metszete $A_1 \cap A_2 \cap \dots$ is az $\mathcal{A}$ halmazcsaládba tartozik.

A Ω eseménytér az $\mathcal{A}$ halmazcsaládba tartozik. Ha A és B az $\mathcal{A}$ halmazcsalád két tetszőleges véletlen eseménye, akkor $A \cap B$ szintén az $\mathcal{A}$ halmazcsalád véletlen eseménye. Ebből következik pl., hogy bármely A véletlen eseménnyel együtt a $\Omega - A = \bar{A}$ komplementer esemény is az $\mathcal{A}$ halmazcsaládba tartozik, továbbá a $\Omega - \Omega = \emptyset$ esemény is.

Mint már a régebbiek folyamán említettük, az ilyen $\mathcal{A}$ halmazcsalád neve: σ -algebra, $\mathcal{A}$ itt tehát az eseménytér véletlen eseményeinek σ -algebrája.

Adva van végül az $\mathcal{A}$ halmazcsalád elemein, azaz a véletlen eseményeken definiált P valószínűségi mérték, amely minden $A \in \mathcal{A}$ véletlen eseményhez egy $0 \leq P(A) \leq 1$ valószínűséget rendel a már jól megismert tulajdonságokkal. Mindezeket úgy szokták összefoglalni, hogy adva van egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező.

Minden olyan, a Ω eseménytér elemi eseményein értelmezett valószínűségi X függvényt (ezeket a függvényeket szokás még Y, Z stb., vagy ξ, η, ζ stb. betűkkel is jelölni), amelyre bármely y valós szám esetén mindazon elemi események halmaza, amelyeken $X < y$, az $\mathcal{A}$ halmazcsaládba tartozó véletlen eseményt jelent, valószínűségi változónak nevezünk.

Szokás rövid írásmóddal az előbbi elemi események halmazát $(X < y)$ jellel is jelölni. Tehát $(X < y)$ az a véletlen esemény, hogy X valószínűségi változó értéke az y valós számnál kisebb.

Tekintettel az $\mathcal{A}$ halmazcsalád többször említett tulajdonságaira, a

$$(X \geq y)$$

esemény szintén az $\mathcal{A}$ halmazcsalád eleme, tehát véletlen esemény. Uí.

$$(X \geq y) = \Omega - (X < y) .$$

Könnyen belátható, hogy mindazon elemi események halmaza, amelyeken tetszőleges y valós számra $X \leq y$, előállítható a következő véletlen események metszeteként:

$$(X \leq y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X < y + \frac{1}{n}) ,$$

ahol

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Mínt hogy az $(X < y + \frac{1}{n})$ események minden pozitív egész n -re az $\mathcal{A}$ halmazcsaládba tartozó véletlen események, azért $(X \leq y)$ is az $\mathcal{A}$ halmazcsaládba tartozó véletlen esemény. A

$$\Omega - (X \leq y) = (X > y)$$

összefüggés miatt ugyancsak az $\mathcal{A}$ halmazcsaládba tartozik a $(X > y)$ esemény is. Továbbá: az

$$(y_1 < X < y_2)$$

véletlen esemény, egyenlő lévén

$$(X < y_2) - (X \leq y_1)$$

különbséggel bármely $y_1 < y_2$ számpárra, szintén az $\mathcal{A}$ halmazcsaládnak véletlen eseménye. Hasonló okoskodással könnyen belátható, hogy az

$$(y_1 \leq X \leq y_2) = (X \leq y_2) - (X < y_1)$$

esemény bármely $y_1 < y_2$ számpár mellett szintén az $\mathcal{A}$ halmazcsaládba tartozó véletlen esemény.

A $P(X = x)$, illetve $P(X < y)$, $P(y_1 < X < y_2)$ stb. jelölések a P mögötti zárójelben álló esemény valószínűségét jelentik.

Megjegyzések (csak a matematika iránt mélyebben érdeklődőknek):

Az imént felsorolt véletlen eseményeknél a valószínűségi változó értéke a valós számegyenes valamely (y_1, y_2) , illetve $(-\infty, y)$, illetve $(y, +\infty)$ számintervallumaiba esik. Ezek a számintervallumokon kívül (amelyek lehetnek nyitlak, zártak vagy félig nyitlak) léteznek sokkal általánosabb jellegű számhalmazok is (az ún. Borel-féle halmazok), amelyek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy a Ω eseménytér mindazon elemi eseményeinek a halmaza, amely elemi eseményeken a X valószínűségi változó számértéke a valós számoknak egy ilyen Borel-halmazába esik, szintén az $\mathcal{A}$ halmazcsalád egyik véletlen eseménye.

A valós számegyenes Borel-halmazait a következő módon lehet megkonstruálni. Induljunk ki a valós számegyenes valamennyi (y_1, y_2)

nyílt intervallumából. Alkalmazzuk az egyesítés (unio képzés), metszés és komplementer-képzés műveletét az alapul vett kiinduló nyílt intervallumok véges sokszor, illetve megszámlálhatóan végtelen sokszor.

Az így kapott halmazokra alkalmazzuk az egyesítés, metszés és komplementer-képzés műveletét ismételten véges, illetve megszámlálhatóan végtelen sok ízben. Mindazok a halmazok, amelyek ezzel a szerkesztésmóddal megkaphatók, a valós számegyenes Borel-halmazai.

IV.7.2. Várható érték

(Diszkrét eloszlású valószínűségi változó várható értéke. Emlékeztünk arra, hogy X diszkrét eloszlású, ha X lehetséges számértékei megszámlálható sokan vannak.)

A valószínűségi változó értelmezése után valamely valószínűségi eloszlást megadhatunk egy olyan táblázattal is, amelynek első sorában az események helyett az eseményekhez tartozó számértékeket írjuk, tehát a valószínűségi változó lehetséges értékeit, a második sorba pedig rendre a valószínűségi változó megfelelő értékeihez tartozó valószínűségeket. Pl. a kockadobás táblázata:

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

A binomiális eloszlás táblázata:

$$\begin{pmatrix} 0, 1, \dots, k, \dots, n \\ p_0, p_1, \dots, p_k = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}, \dots, p_n \end{pmatrix}$$

Általában:

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \\ p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots \end{pmatrix},$$

ahol X lehetséges értékei az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ számok és

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Egy ilyen táblázatnak az az értelme, hogy a valószínűségi változó összes lehetséges értékét, amelyeket az első sorba írtunk, a második sor súlyozza. A súlyozáson azt értjük, hogy bizonyos valós értékekhez (itt

X értékeihez) kisebb, nagyobb, esetleg egyenlő számértékeket (a megfelelő valószínűségeket) rendelünk.

Pl. a kockadobásnál a valószínűségi változó minden lehetséges értéke ugyanakkora súllyal van ellátva, a binomiális eloszlásnál nem ez a helyzet; például a legnagyobb "súly" a $k = [(n + 1) p]$ valószínűségi változó-értékhez tartozik.

Ha arra a kérdésre akarunk választ adni, hogy a valószínűségi változó felvehető értékeinek mi az átlaga (ez lehet természetesen olyan érték is, amelyet a valószínűségi változó nem is vesz fel), akkor nyilvánvaló, hogy a valószínűségi változó súlyozott átlagának meghatározása bir jelentőséggel.

Ez a valószínűségi változó eloszlásának jellemzésére szolgáló egyik legfontosabb adat, amint ezt a későbbiekben látni fogjuk.

A súlyozott átlag (súlyozott számtani középnek is nevezik) kiszámítása, a mechanikából jól ismert súlypont-meghatározás alapján történik. Amint a tömegközéppont a nagy tömegekkel rendelkező tömegpontok felé, ugyanígy a valószínűségi változó súlyozott átlaga is a nagy valószínűséggel bekövetkező eseményeket jelentő valószínűségi változó értékek felé tolódik el. Kockadobás esetén a súlyozott átlag (a valószínűségi változó legkisebb és legnagyobb értékének számtani közepe) a megfelelő valószínűségek egyenlősége miatt:

$$\frac{1 + 6}{2} = 3,5 .$$

A binomiális eloszlásnál ez természetesen nem így van.

A valószínűségi változó értékészletében centrális helyet elfoglaló értékre, amelyet ezután várható értéknek nevezünk, a következő definíciót adjuk.

Ha X valószínűségi változó diszkrét eloszlású és az $x_1, x_2, x_3, \dots, \dots, x_i, \dots$ értékeket rendre a $p_1, p_2, p_3, \dots, p_i, \dots$

valószínűséggel veszi fel: $P(X = x_i) = p_i$, továbbá $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, akkor

a X várható értékén a $\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ sorösszeget értjük, feltéve, hogy ez

a sor abszolút konvergens. (Ellenkező esetben nem létezik X várható értéke.) Jelölése:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot x_i .$$

A $\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ sor abszolút konvergenciáját, ami a $\sum_{i=1}^{\infty} p_i |x_i|$ sor

konvergenciáját jelenti, azért követeljük meg, mert minden valószínűség-számítási probléma egy kísérletsorozattal van összekapcsolva, amiből az következik, hogy a valószínűségi változó értékei más és más sorrendű végtelen sorozatban valósulhatnak meg, a kísérletektől függően, nem feltétlenül az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$ sorrendben, hanem ezek átrendezése

által előálló valamely más $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_i}, \dots$ sorrendben. Ezért

az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ sorozatból alkotható bármelyik végtelen sorozathoz rendelt

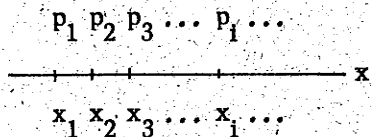
$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i} \cdot x_{n_i}$$

sor konvergenciáját megköveteljük, és természetesen azt is, hogy a sorösszeg bármely esetben ugyanaz legyen. Csak ezen kikötések mellett van X -nek várható értéke.

(Előző tanulmányaink alapján tudjuk, hogy a feltételelesen konvergens sorok az itt követelt tulajdonsággal nem rendelkeznek, átrendezéssel divergenciájukat, illetve tetszőszerinti összeghez való konvergálásukat is megvalósíthatjuk.)

A tömegközéppont meghatározása modellként szolgál a $M(X)$ szemléltetéséhez. Helyezzük el a $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$ gramm tömegű tömegpontokat az $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ koordinátájú pontokba, és legyen

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \text{ gramm.}$$



Határozzuk meg ezen tömegek tömegközéppontjának x_g koordinátáját.

A mechanikából ismertek alapján ez a "súlyozott" közép, azaz:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$

lesz, mivel $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. A tömegpontok koordinátái a X valószínűségi

változó lehetséges értékeit, az egyes pontok tömegei pedig a megfelelő valószínűségeket jelentik. $M(X)$ definíciójánál kikötöttük, hogy

$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ legyen. Így azt mondhatjuk, hogy valamely valószínűségi vál-

tozó várható értéke a valószínűségi változó súlyozott számtani közepe, azaz súlyozott számtani átlaga. (Régebben a valószínűségi változó várható értékét "matematikai reménynek" is nevezték.)

Előfordul a gyakorlati életben, hogy a valószínűségi változó várható értékét az igen nagy számú kísérletnél történő megfigyelések, azaz a tapasztalati adatok alapján számítják ki, ugyanugy, ahogyan nagyon sok esetben az események valószínűségét a relatív gyakorisággal adják meg. A valószínűségszámítás csak olyan jelenségekkel foglalkozik, amelyeknek relatív gyakorisága valamely valós értékre nézve stabilnak mutatkozik. Ha nagyszámú kísérletsorozatból számítunk várható értéket, akkor a valószínűségi változó un. empirikus közepével, azaz a valószínűségi változó megfigyelt értékeinek számtani közepével közelítünk.

Mivel azoknál az eseményeknél, amelyek a valószínűségszámítás szempontjából szóba jöhetnek, a valószínűségi változó egyes értékeihez tartozó relatív gyakoriságok stabilak, ebből következően a valószínűségi változó megfigyelt értékeinek számtani közepe is az.

Általában, ha a X valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, továbbá n számú kísérletet hajtottunk végre és azt tapasztaltuk, hogy k_1 esetben az x_1 -hez tartozó esemény s. i. t., $\dots, k_n$ esetben az x_N -hez tartozó esemény következett be

($k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_N = n$), akkor a valószínűségi változó megfigyelt értékeinek számtani közepe, az un. empirikus közép az alábbi törttel egyenlő:

$$\text{empirikus közép} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_N x_N}{k_1 + k_2 + \dots + k_N}$$

Mivel $k_1 + k_2 + \dots + k_N = n$, ezért

az empirikus közép: $\frac{k_1}{n} x_1 + \frac{k_2}{n} x_2 + \frac{k_3}{n} x_3 + \dots + \frac{k_N}{n} x_N$.

Ebből a felírásból jól látható, hogy a valószínűségi változó egyes értékei a hozzájuk tartozó relatív gyakorisággal vannak beszorozva, és mivel

$$\frac{k_1}{n} \approx p_1, \quad \frac{k_2}{n} \approx p_2, \quad \dots \quad \frac{k_N}{n} \approx p_N,$$

így

$$\sum_{i=1}^N \frac{k_i}{n} x_i \approx \sum_{i=1}^N p_i x_i$$

áll fenn.

Példák a valószínűségi változó várható értékének kiszámítására

1. Kockadobás esetén:

$$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$p_n = \frac{1}{6}, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

amint ezt már jeleztük is.

2. Egy műszer összeszerelésénél egy alkatrész beillesztése az első, második, harmadik, negyedik vagy ötödik próbálkozásra sikerül. A beillesztések valószínűségei rendre p_1, p_2, p_3, p_4 és p_5 , azaz:

$$X = 1, 2, 3, 4, 5;$$

a megfelelő valószínűségek:

$$p_1 = 0,07, \quad p_2 = 0,15, \quad p_3 = 0,55, \quad p_4 = 0,21, \quad p_5 = 0,01.$$

Az összeszerelés olyan természetű, hogy ha a szóban forgó alkatrész beillesztése nem sikerült, akkor az alkatrészt el kell dobni.

Hány alkatrésszel kell a szerelőt ellátni, hogy 20 darab műszert össze tudjon szerelni?

Ez a példa az ipari termelésnél előforduló igen gyakori esetet mutatja: ui. az ebben a példában szereplő p_1, p_2, p_3, p_4 és p_5 beillesztési valószínűségek közelítően a gyár alkatrész-termékeinél mutatkozó beillesztési relatív gyakoriságokkal egyenlők. A megoldás ezen megfontolás alapján a következő:

A várható érték az a szám, ahányszor a szerelőnek egy műszer esetében átlagosan próbálkoznia kell az alkatrész behelyezésével. Ez definíciónk értelmében:

$$M(X) = 1 \cdot 0,07 + 2 \cdot 0,16 + 3 \cdot 0,55 + 4 \cdot 0,21 + 5 \cdot 0,01 = 2,93.$$

Ha biztosítani akarjuk 20 műszer esetében a sikeres beszereléseket, akkor a várható érték 20-szorosával egyenlő alkatrészt kell magával vinnie a szerelőnek, azaz

$$n \approx 20 \cdot 2,93 = 58,60 \approx 59$$

alkatrészt.

Előbbi eseményünket a szerelő munkájának elméleti végiggondolása is alátámasztja. Ha N számú műszer javítását kell elvégeznie a szerelőnek kiszállása folyamán, akkor ezek közül

- k_1 számú műszernél az első beillesztésre sikerül az alkatrészt elhelyeznie,
- k_2 számú műszernél a második beillesztésre sikerül az alkatrészt elhelyeznie,
- k_3 számú műszernél a harmadik beillesztésre sikerül az alkatrészt elhelyeznie,
- k_4 számú műszernél a negyedik beillesztésre sikerül az alkatrészt elhelyeznie,
- k_5 számú műszernél az ötödik beillesztésre sikerül az alkatrészt elhelyeznie.

A példa szerint a szükséges alkatrészek darabszáma:

$$d = k_1 + 2 k_2 + 3 k_3 + 4 k_4 + 5 k_5,$$

és

$$N = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5.$$

Végigszotva egyenlőségünket N -nel és figyelembe véve a

$$\frac{k_1}{N} \approx p_1, \quad \frac{k_2}{N} \approx p_2, \quad \frac{k_3}{N} \approx p_3, \quad \frac{k_4}{N} \approx p_4, \quad \frac{k_5}{N} \approx p_5$$

közelítő egyenlőségeket, azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{N} \approx 1 p_1 + 2 p_2 + 3 p_3 + 4 p_4 + 5 p_5 = M(X),$$

amiből a szükséges alkatrészek darabszáma

$$d \approx N \cdot M(X).$$

Feladatunknál $N = 20$, tehát $d \approx 20 \cdot M(X)$, amint már ezt kiszámoltuk.

3. Legyen $p = \frac{3}{4}$ annak a valószínűsége, hogy egy üzem vízfogyasztása normális, azaz nem halad meg egy bizonyos vízmennyiséget naponta. Mi a valószínűsége annak, hogy a vízfogyasztás pontosan k számú napon normális, ahol $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (a hét lehetséges munkanapjainak száma)?

Mivel binomiális eloszlásról van szó, ezért

$$P(X = k) = p_k = \binom{6}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{6-k}.$$

Feltehetjük azt a kérdést, mennyi a normális vízfogyasztású napok számának várható értéke, azaz átlagosan mennyi hetente a normális vízfogyasztású napok száma?

Mivel

$$X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

és

$$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6,$$

a megfelelő valószínűségek értéke, továbbá

$$p_k = \binom{6}{k} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{6-k},$$

így

$$M(X) = \sum_{k=0}^6 k \cdot \binom{6}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{6-k} = 6 \cdot \frac{3}{4} = 4,5 \text{ nap}.$$

Később igazolni fogjuk, hogy binomiális eloszlás esetén a valószínűségi változó várható értéke:

$$M(X) = \sum_{n=0}^{\infty} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = n p.$$

4. Korlátlan számban dobunk fel pénzt, és azt nézzük, hányadik dobásra dobunk először fejet. Feltehető az a kérdés, mi a valószínűsége annak, hogy pontosan az n -ik dobásra dobunk először fejet?

A valószínűségi változó X lehetséges értékei:

$$X = 1, 2, 3, \dots, n, \dots,$$

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots,$$

ahol

$$P(X = n) = p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Tanultuk, hogy az $y = \frac{1}{1-x}$ függvény $a = 0$ körüli Taylor-sora $|x| < 1$ esetén abszolút konvergens és a következő geometria sor:

$$y = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1).$$

A Taylor-sor (hatványsor) tulajdonságai alapján igaz, hogy a végteleen sor tagonkénti differenciálásával nyert sor az $y'(x)$ -nek az $a = 0$ körüli Taylor-sora, így:

$$y'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \quad (|x| < 1),$$

esetünkben $x = \frac{1}{2}$ és így

$$M(X) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

a dobásszám átlaga 2.

Általában, ha valamely valószínűségi változó, X lehetséges értékei $1, 2, \dots, n, \dots$ és

$$P(X = n) = p_n = q^{n-1} p,$$

ahol természetesen $p > 0$, $q > 0$ és $p + q = 1$, akkor geometriai eloszlásról beszélünk. Ebben az esetben:

$$M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1} \cdot p = p \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p}.$$

5. A "pétervári játék"

Péter egy pénzérmét annyiszor dob fel, amíg csak a fej meg nem jelenik és ezzel a játék véget ér. Pál fizet Péternek 1 rubelt, ha a fej az első dobásnál fellép, 2 rubelt, ha csak a második dobásnál adódik fej első ízben, 4 rubelt, ha csak a harmadik dobásnál adódik fej első ízben stb.; általában, ha a fej első ízben csak az n -ik dobásnál jelenik meg, Pál fizet Péternek 2^{n-1} rubelt. Hány rubelt fizessen Péter a játék kezdetén Pálnak részvételi díjként, hogy a játék igazságos legyen? Egy játék igazságos, ha a nyeremény várható értéke egyenlő a részvételi díjjal. Más szóval, mivel egyenlő Péter nyereségének várható értéke? Ez nyilván egyenlő lesz az alábbi összeggel:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty.$$

Emiatt Poisson így fogalmazta át a problémát:

Pál fizet 2^{n-1} rubelt mindaddig, amíg ez a szám meg nem haladja a teljes vagyonát, de attól az n -től kezdve, amelynél 2^{n-1} már éppen nagyobb, mint az egész vagyona, csak a teljes vagyonát fizeti Péternek. Ha pl. Pál vagyona 10 000 rubel, akkor lévén $2^{13} < 10\,000 < 2^{14}$, $n = 15$. Ekkor Péter nyereségének várható értéke:

$$M = \sum_{n=1}^{14} \frac{1}{2^n} 2^{n-1} + \sum_{n=15}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 10.000 = 7 + 10.000 \cdot \frac{1}{2^{15}}.$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 7 + \frac{10.000}{2^{14}} < 8$$

Ha Pál teljes vagyona 10^9 rubel, még akkor is Péter részvételi díja kisebb 16 rubelnél. Sőt, ha Pál vagyona 10^{15} rubel, Péter nyereségének várható értéke nem nagyobb 26 rubelnél.

6. A Banach-féle gyufásdobozok

Banach professzor szénvedélyes dohányos; minden nap egy doboz gyufát tesz a bal és egy doboz gyufát a jobb zsebébe. Mindegyik doboz eredetileg N szál gyufát tartalmaz. A szórakozott professzor minden rágyújtáskor taláломra benyul az egyik, vagy a másik zsebébe és kihuz a dobozból egy szál gyufát. Abban a pillanatban, amikor észreveszi, hogy az egyik zsebe kiürült (tehát belenyulva ebbe a zsebbe, nem talál benne gyufát), a másik zsebében lehet még $0, 1, 2, \dots, N$ szál gyufa. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a másik zsebében még pontosan k szál gyufa van. Az egyes benyulások egymástól teljesen független események.

Jelöljük ezt a kiszámítandó valószínűséget U_k -val. Legyen A az az esemény, hogy a professzor a bal zsebébe nyul, $\bar{A}$ tehát az az esemény, hogy a jobb zsebébe nyul; nyilván

$$P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}.$$

Amikor éppen észreveszi, hogy a bal zsebe üres, és a jobb zsebe még pontosan k szál gyufát tartalmaz, akkor éppen $(N+1)$ -edszer nyul a bal zsebébe, tehát ez az $(N+1)$ -ik A esemény és ez előtt pontosan $(N-k)$ számú $\bar{A}$ esemény és N számú A esemény következett be minden lehetséges sorrendben. Tekintettel az egyes események függetlenségére, annak a valószínűsége, hogy a jobb zsebében pontosan k szál gyufa van abban a pillanatban, amikor észreveszi, hogy a bal zsebe kiürült, a következővel egyenlő:

$$\binom{2N-k}{N} \frac{1}{2^{N-k}} \cdot \frac{1}{2^N} \cdot \frac{1}{2}.$$

(A legutolsó $\frac{1}{2}$ szorzó az $(N+1)$ -ik A esemény valószínűsége.)

Mínt hogy a keresett U_k valószínűségnél csupán arról van szó, hogy az egyik zsebének ürességét tapasztalja, de ez lehet egyformán a bal, vagy a jobb zsebe, az előbbi eredményünket még 2-vel meg kell szorozni, tehát

$$U_k = \binom{2N-k}{N} \frac{1}{2^{2N-k}} = \frac{(2N-k)!}{N! (N-k)!} \cdot 2^{-2N+k}$$

Számítsuk ki a nem feltétlenül üres zsebben levő gyufaszálak μ várható értékét! Nyilván

$$\mu = \sum_{k=0}^N k U_k = \sum_{k=0}^N k \binom{2N-k}{N} \cdot 2^{-2N+k}$$

μ értékének meghatározására számítsuk ki U_{k+1} -et.

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= \binom{2N-k-1}{N} \cdot 2^{-2N+k+1} = \frac{(2N-k-1)!}{N! (N-k-1)!} \cdot 2^{-2N+k} \cdot 2 = \\ &= \frac{(2N-k)! (N-k)}{(2N-k) N! (N-k)!} \cdot 2^{-2N+k} \cdot 2 = \frac{2(N-k)}{2N-k} U_k, \end{aligned}$$

amiből

$$(N-k) U_k = \frac{1}{2} \left[(2N-k) U_{k+1} \right] = \frac{1}{2} \cdot (2N+1) U_{k+1} - \frac{1}{2} (k+1) U_{k+1}$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\sum_{k=0}^N U_k = 1$$

a probléma valószínűségelméleti értelme alapján, és a nyert egyenlőség mindkét oldalán összegezzünk $k=0$ -tól $k=N$ -ig. Azt is vegyük figyelembe, hogy $U_k = 0$ $k > N$ esetén. Így kapjuk:

$$N - \mu = \frac{1}{2} (2N + 1) \sum_{k=0}^N U_{k+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (k+1) U_{k+1} =$$

$$= (N + \frac{1}{2}) \sum_{k=1}^N U_k - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N v \cdot U_v = (N + \frac{1}{2}) \sum_{k=0}^N U_k - U_0 - \frac{1}{2} \mu ,$$

mert

$$\mu = \sum_{v=0}^N v \cdot U_v = \sum_{v=1}^N v \cdot U_v .$$

Az előbbiek szerint:

$$\mu = (2N + 1) U_0 - 1 .$$

A Stirling-formula felhasználásával μ közelítő értéke elég nagy N esetén:

$$\mu \approx 2N \frac{(2N)!}{(N!)^2} \frac{1}{2^{2N}} - 1 \approx 2N \frac{\sqrt{4\pi N} \cdot (2N)^{2N} e^{-2N}}{2\pi N \cdot N^{2N} \cdot e^{-2N}} \cdot \frac{1}{2^{2N}} - 1 =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{N}{\pi}} - 1 .$$

Ha $N = 50$, akkor $\mu \approx 7$. (W. Feller nyomán.)

Poisson-eloszlás várható értéke

A Poisson-eloszláshoz tartozó táblázatot már ismerjük; ha a táblázat első sorában álló $A_0, A_1, \dots, A_k, \dots$ eseményeket a valószínűségi változó megfelelő értékeivel helyettesítjük, akkor a következő táblázatot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & \dots & k, & \dots & \dots \\ v_0, & v_1, & v_2, & v_3, & \dots, & P(X=k) = v_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, & \dots \end{array} \right)$$

ahol

$$\lambda > 0 \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Számítsuk ki a Poisson-eloszlás valószínűségi változójának várható értékét az ismert definíció alapján:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Ennek az összegnek első tagja, $0 \cdot p_0 = 0 \cdot \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = 0$, tehát

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!};$$

Vezessük be a $k - 1 = \nu$ jelölést, akkor:

$$M(X) = e^{-\lambda} \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!}$$

alakban írhatjuk a várható értéket. Tanultuk, hogy $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} = e^{\lambda}$, írjuk ezt be kifejezésünkbe:

$$M(X) = e^{-\lambda} \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Ezen eredményből látható, hogy a valószínűségi változó súlyozott átlaga a valószínűségi változó legvalószínűbb értékének közelébe esik.

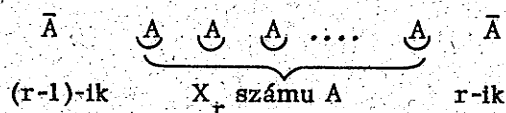
IV.7.3 Példák további valószínűségeloszlásokra (Olvasmány)

IV.7.3.1 A Pascal-féle (vagy negatív binomiális) eloszlás

Egy kísérletsorozat kimenetelei legyenek az A és az $\bar{A}$ események. Legyenek a kísérlet kimenetelei (akárhányszor is végezzük el a kísérletet) egymástól teljesen független események, legyen továbbá

$$P(A) = p > 0 \quad \text{és} \quad P(\bar{A}) = 1 - p = q > 0.$$

Nevezzük az A eseményt "sikernek", az $\bar{A}$ eseményt "balsiker"-nek. Legyen az X_r valószínűségi változó értéke a sikerek száma az $(r-1)$ -ik balsiker után és az r -ik balsiker előtt:



Igy pl. X_1 jelenti az egymásra következő sikerek számát az első balsiker előtt, X_2 az egymásra következő sikerek száma az első balsiker után és a második balsiker előtt. Tekintsük a $X_1 + X_2 + \dots + X_v = X$ valószínűségi változót. A $X = k$ esemény a következőt jelenti:

a $k + v$ -ik kísérlet eredménye balsiker: $\bar{A}$, és a többi $k + v - 1$ kísérlet között k siker (A esemény) és $v-1$ balsiker van.

Ez utóbbi esemény valószínűsége

$$\binom{k+v-1}{k} \cdot p^k q^{v-1},$$

a $k + v$ -ik kísérlet $\bar{A}$ kimenetelének pedig q a valószínűsége, így az események említett függetlensége miatt

$$P(X = k) = \binom{k+v-1}{k} p^k \cdot q^v = \frac{v(v+1) \dots (v+k-1)}{k!} p^k q^v =$$

$$= (-1)^k \cdot \binom{-v}{k} p^k q^v.$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

Tegyük fel, hogy minden v esetén ($v = 1, 2, \dots$) fennáll a $v \cdot \frac{p}{q} = c = \text{állandó egyenlőség}$, akkor rögzített k mellett

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow +\infty} P(X = k) &= \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v(v+1) \dots (v+k-1)}{k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^v = \\ &= \frac{p^k}{k!} \lim_{v \rightarrow +\infty} v^k \left(1 + \frac{1}{v}\right) \dots \left(1 + \frac{k-1}{v}\right) q^{v+k} = \\ &= \frac{c^k}{k!} \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right) \left(1 + \frac{2}{v}\right) \dots \left(1 + \frac{k-1}{v}\right) (1-p)^{v+k} = \\ &= \frac{c^k}{k!} \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right) \left(1 + \frac{2}{v}\right) \dots \left(1 + \frac{k-1}{v}\right) (1-p)^{v+k} = \\ &= \frac{c^k}{k!} \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right) \left(1 + \frac{2}{v}\right) \dots \left(1 + \frac{k-1}{v}\right) \left(1 - \frac{c}{v+c}\right)^{v+c} \times \\ &\times \left(1 - \frac{c}{v+c}\right)^{k-c} = \frac{e^{-c} c^k}{k!}, \end{aligned}$$

minthogy

$$\begin{aligned} \frac{v p}{1-p} &= c, & v p &= c - cp, & (v+c) p &= c, & p &= \frac{c}{v+c}, \\ 1-p &= 1 - \frac{c}{v+c}. \end{aligned}$$

Tehát $v \rightarrow +\infty$ esetén az adott feltételek mellett a Pascal-eloszlás átmegy a Poisson-eloszlásba.

IV.7.3.2 A Pólya-féle eloszlás

Egy urnában legyen b fehér és c fekete golyó, $b + c = N$. Az urnából taláalomra kiválasztunk egy golyót. Mielőtt a következő golyót kihoznánk, a kivett golyót visszatesszük és ezenkívül még s számú, a kihuzott golyóval azonos színű golyót is teszünk az urnába. Ezt a kísérletet n ízben megismételjük. Jelöljük X -szel azt a valószínűségi változót, amelynek ér-

téke egyenlő az n számú húzás folyamán kihuzott fehér golyók számával (X lehetséges értékei tehát $0, 1, 2, \dots, n$). Kiszámítandó a

$$P(X = k)$$

valószínűség! Az egyes golyók kihuzása egymástól független eseményeket jelent.

Annak a valószínűsége, hogy egymás után k ízben fehér golyót huzunk, egyenlő

$$\frac{b}{N} \cdot \frac{b+s}{N+s} \cdot \frac{b+2s}{N+2s} \cdots \frac{b+(k-1)s}{N+(k-1)s}$$

-sel. Hasonlóan: annak a valószínűsége, hogy először k -szor egymás után fehér golyót, azután $(n-k)$ -szor egymás után fekete golyót huzunk, egyenlő a következővel:

$$\frac{b}{N} \cdot \frac{b+s}{N+s} \cdots \frac{b+(k-1)s}{N+(k-1)s} \cdot \frac{c}{N+ks} \cdot \frac{c+s}{N+(k+1)s} \cdot \frac{c+2s}{N+(k+2)s} \cdots \frac{c+(n-k-1)s}{N+(n-1)s},$$

azaz

$$\frac{b(b+s) \cdots (b+(k-1)s) c(c+s) \cdots (c+(n-k-1)s)}{N(N+s)(N+2s) \cdots (N+(n-1)s)}$$

Ugyanennyi a valószínűsége annak is, hogy k számú fehér és $(n-k)$ számú fekete golyót huzunk ki valamilyen sorrendben. A fehér és fekete golyók húzásának a sorrendje ugyanis csak a számláló tényezőinek a sorrendjét változtatja meg, de magukat a tényezőket nem. Minthogy k fehér és $(n-k)$ fekete golyót $\binom{n}{k}$ -féle sorrendben rakhatunk egymás mellé, ennél fogva

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{b(b+s) \cdots (b+(k-1)s) c(c+s) \cdots (c+(n-k-1)s)}{N(N+s) \cdots (N+(k-1)s) \cdots (N+(n-1)s)}$$

Kissé egyszerűsíthetjük jelöléseinket, ha bevezetjük az

$$Np = b, \quad Nq = c, \quad Na = s$$

jeleket. Nyilván p annak a valószínűsége, hogy az első húzásra fehér golyót huzunk, q pedig, hogy az első húzásra feketét huzunk. Előbbi formulánkból lesz tehát:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{p(p+a) \cdots (p+(k-1)a) q(q+a) \cdots (q+(n-k-1)a}{1 \cdot (1+a) \cdots (1+(k-1)a) \cdots (1+(n-1)a)}$$

Nyilván:

$$\sum_{k=0}^N P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{p(p+a) \dots [p+(k-1)a] q(q+a) \dots [q+(n-k-1)a]}{1 \cdot (1+a) \dots [1+(k-1)a] \dots [1+(n-1)a]} = 1.$$

Utolsó eredményünk segítségével könnyen kiszámíthatjuk X várható értékét.

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{k=0}^n k P(X = k) = \sum_{k=1}^n k P(X = k) = \\ &= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{(p+a) \dots [p+(k-1)a] q(q+a) \dots [q+(n-k-1)a]}{(1+a) \dots [1+(n-1)a]} \end{aligned}$$

Legyen $k - 1 = \ell$, akkor

$$M(X) = np \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \frac{(p+a) \dots (p+\ell a) q(q+a) \dots (q+(n-\ell-2)a)}{(1+a) \dots (1+(n-1)a)}.$$

A $\sum$ jel mögötti kifejezés annak a valószínűsége, hogy $(n-1)$ húzást végezve, ℓ számú fehér és $(n - \ell - 1)$ számú fekete golyót húzunk, ha a Pólya-féle séma szerint húzunk és kezdetben az urna $b+s$ fehér és c fekete golyót tartalmaz, összesen tehát $N+s$ golyót. Ennélfogva a legutolsó összeg értéke 1, azaz

$$M(X) = np.$$

Ha $s = -1$, a hipergeometria eloszlást nyerjük. Ennél tehát a kivett golyót egyszerűen nem tesszük vissza az urnába.

Akkor

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} \frac{b(b-1) \dots (b-k+1) c(c-1) \dots (c-n+k+1)}{N(N-1) \dots (N-k+1) \dots (N-n+1)} = \\ &= \binom{n}{k} \frac{Np(Np-1) \dots (Np-k+1) Nq(Nq-1) \dots (Nq-n+k+1)}{N(N-1) \dots (N-n+1)} = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}. \end{aligned}$$

Itt k lehetséges értékei: $\max(0, n-c) \leq k \leq \min(n, b)$.

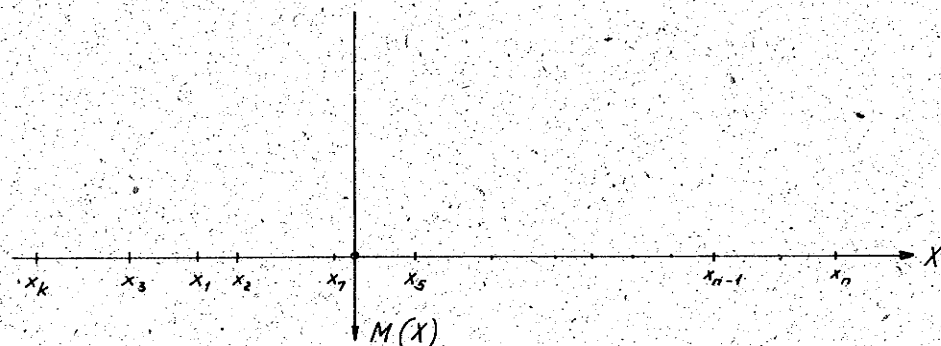
IV.7.4 Valószínűségi változó szórása (Diszkrét valószínűségi változó esetén)

A valószínűségi változó egyik jellemző adatát, a várható értéket az előzőekben már megismertük, most a valószínűségi változó másik fontos jellemzőjét, a szórást világítjuk meg. Ez olyan mennyiség, amely a valószínűségi változónak a várható értéke körüli ingadozását méri.

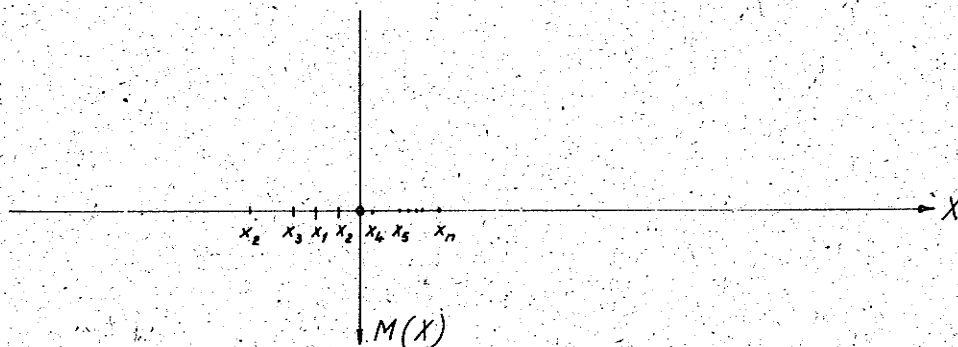
Ha pl. a valószínűségi változó két értéket vehet fel: $x = 1$ és 6 , és $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, valamint $P(X = 6) = \frac{1}{2}$, akkor $M(X) = 3,5$, de ugyanígy, ha $X = 3$ és 4 és $P(X = 3) = P(X = 4) = \frac{1}{2}$, akkor is $M(X) = 3,5$.

Látható az említett két példából, hogy a várható értékek egyenlőek ugyan, de az első esetben a valószínűségi változó nagyobb eltéréseket mutat a várható értéktől, mint a második esetben. Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy az első esetben a valószínűségi változónak nagyobb a szórása, mint a második esetben.

A számunkra igen fontos gyakorlati esetek, mint pl. a mérés, vagy pl. az ipari termelés esetei, azt a kérdést vetik fel, milyen méréssorozatot, illetve milyen tendenciájú ipari termelést nevezünk jobbnak, illetve megbízhatóbbnak. A dolgok természetéből adódik, hogy mindkét esetben a nagyobb ingadozás-mentességet szeretnénk megvalósítani. A valószínűségszámítás nyelvén ezt úgy fogalmazzuk meg, hogy az itt szereplő valószínűségi változó értékeinek a várható érték körüli minél kisebb intervallumban való kerülését igyekszünk elérni. Az elmondottakat az alábbi ábrák szemléltetik: 40/a. ábrában aránylag nagy a valószínűségi változó szórása (ingadozása), a 40/b. ábrában pedig aránylag kicsi a valószínűségi változó szórása (ingadozása).



40/a ábra



40/b. ábra

Mivel most a valószínűségi változó várható értéke körüli ingadozásának mértékét szeretnénk megadni, arra is gondolhatunk, hogy a valószínűségi változó egyes értékeinek a várható értéktől való eltérését közvetlenül figyelembe vesszük és erre a valószínűségi változóra számítunk várható értéket. Ha ez a szám mérné az ingadozást, azaz a

$$M(X - M(X))$$

kifejezést kellene mérőszámnak tekinteni, akkor ezt kiszámítva kapjuk, hogy

$$M(X - M(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - M(X)) p_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k - M(X) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} p_k.$$

Mivel

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = M(X) \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

így

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Ebből az eredményből látható, hogy az ingadozás mértékére más definíciót kell adni, de az is látható, hogy a valószínűségi változó átlagban a várható értéktől felfelé ugyanannyival tér el, mint lefelé.

Ha a valószínűségi változónak a várható értéktől való eltéréseit abszolút értékben vennénk, és ezen értékekből számolnánk várható értéket, jó mérőszámot kapnánk az ingadozásra:

$$M(|X - M(X)|)$$

Ezt szokták is használni és várható eltérésnek nevezik.

Mivel azonban az abszolút értékkel való számolás az esetek túlnyomó részében nehézségekkel jár, ezért az ingadozás mértékének megállapodás szerint a

$$\sigma^2(X) = M[(X - M(X))^2]$$

számot tekintik. $\sigma^2(X)$ neve: szórásnégyzet (X szórásnégyzete), a

$\sigma(X) = +\sqrt{\sigma^2(X)}$ szám pedig a X valószínűségi változó szórása.

A definícióból látható, hogy a valószínűségi változó várható értékének a létezését feltételezzük, vagyis ha valamely eloszlás valószínűségi változójának várható értéke nem létezik, akkor szórásáról sem beszélhetünk.

Számítsuk ki a szórást, illetve a szórásnégyzetét:

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k [x_k - M(X)]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x_k^2 - 2 M(X) \sum_{k=0}^{\infty} p_k x_k + \\ &+ M^2(X) \sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x_k^2 - M^2(X).\end{aligned}$$

A $\sigma^2(X)$ részletes kiszámítása azt is mutatja, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} p_k |x_k|$

és a $\sum_{k=0}^{\infty} p_k x_k^2$ sorok konvergenciája szükséges és elégséges feltétele a

$\sigma^2(X)$ létezésének. Nézzük meg a $\sigma^2(X) = 0$ esetet: mi a szórásnégyzet eltűnésének a valószínűségszámítási tartalma?

Legyen tehát:

$$\sigma^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k [x_k - M(X)]^2 = 0.$$

Mivel minden k értékre $p_k \geq 0$ és $[x_k - M(X)]^2 \geq 0$, ez az összes csak akkor lehet zérus, ha minden tag külön-külön zérus, ami azt jelenti, hogy minden k-ra fennáll:

$$p_k [x_k - M(X)]^2 = 0.$$

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője

nulla. Ez azt jelenti, hogy az összegnek olyan tagokból kell kivétel nélkül állnia, amelyekben vagy az első vagy a második tényező nulla. Hogy min-

den p_k nulla legyen, azaz minden első tényező, az $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ miatt nem

lehetséges. Kell tehát, hogy a második tényezők között legyenek 0 érté-
küek. Ez azonban csak egyetlen k érték esetében állhat fenn, mert a való-
színűségi változó definíciójának értelmében minden $i \neq k$ -ra $x_i \neq x_k$ kell

hogy legyen. Tegyük fel, hogy valamely k érték esetén $x_k - M(X) = 0$,

e k -ra szükségképp $p_k = 1$, mert minden $i \neq k$ -ra

$$p_i [x_i - M(X)]^2 = 0$$

lévén és $x_i \neq M(X)$ miatt $p_i = 0$.

Ez azt jelenti, hogy ha $\sigma^2(X) = 0$, akkor a X valószínűségi változó
minden értékét, amely a várható értéktől eltér, 0 valószínűséggel vesz
fel, a várható értéket pedig 1 valószínűséggel: $P[X = M(X)] = 1$.

Pl. ilyen a következő eloszlás:

$X =$	1,	2,	3,	4
$P(X=1) = 0$	$P(X=2) = 1$	$P(X=3) = 0$	$P(X=4) = 0$	

$$M(X) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 2$$

$$\sigma^2(X) = 0 \cdot (1-2)^2 + 1 \cdot (2-2)^2 + 0 \cdot (3-2)^2 + 0 \cdot (4-2)^2 = 0$$

A következő feladatban izzólámpákra vonatkozó statisztikai adatokat
adunk meg. Az adatok két helyről kikerült izzólámpák élettartamára (égés-
tartamára) vonatkoznak. A szórás definíciójának értelmezése alapján álla-
pítsuk meg, hogy az I. vagy a II. kategóriába tartozó lámpatermelés
a biztonságosabb, azaz a vevő számára a kedvezőbb.

Izzó lámpák statisztikája 1000 db izzólámpa közül:

I. lámpa-kategória:

darab szám	égéstartam órában	relativ gyakoriság
90	2000	0,09
130	1600	0,13
80	1500	0,08
100	1200	0,1
250	1100	0,25
200	900	0,2
100	800	0,1
50	70	0,05

A valószínűségi változó értékei:

$$X = 2000, 1600, 1500, 1200, 1100, 900, 800, 700,$$

a megfelelő valószínűségek rendre:

$$P(X = x_i) = 0,09, 0,13, 0,08, 0,1, 0,25, 0,2, 0,1, 0,05$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

$$M(X) = 0,09 \cdot 2000 + 0,13 \cdot 1600 + 0,08 \cdot 1500 + 0,1 \cdot 1200 + 0,25 \cdot 1100 + 0,2 \cdot 900 + 0,1 \cdot 800 + 0,05 \cdot 700 = 1198 \text{ óra} \approx 1200 \text{ óra}$$

X ingadozási intervalluma: (700, 2000);

$$\sigma^2(X) \approx 0,09 \cdot 800 + 0,13 \cdot 400 + 0,08 \cdot 300 + 0 + 0,25 \cdot 100 + 0,2 \cdot 300^2 + 0,1 \cdot 400^2 + 0,05 \cdot 500 \approx 174600,$$

$$\sigma(X) \approx 524.$$

II. lámpa-kategória

darab szám	égéstartam órában	relatív gyakoriság
90	1400	0,09
130	1300	0,13
80	1250	0,08
100	1200	0,1
250	1100	0,25
200	950	0,2
100	900	0,1
50	800	0,05

$X = 1400, 1300, 1250, 1200, 1100, 950, 900, 800.$

$P(X = x_i) = 0,09 \ 0,13 \ 0,08 \ 0,1 \ 0,25 \ 0,2 \ 0,1 \ 0,05$

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

Mivel az I. lámpa-kategóriára az $M(X)$ és $\sigma(X)$ kiszámítását részleteztük, itt csak utalunk rá.

$M(X) = 1110$ óra, X ingadozási intervalluma $(800, 1400)$, ennek alapján már látható, hogy a II. lámpa-kategória szórásnégyzete és ebből következőleg szórása kisebb. Számítással adódik, hogy $\sigma^2(X) = 29.000$, $\sigma(X) \approx 170$.

IV.8 TÖBB VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ EGYÜTTES ELOSZLÁSA

IV.8.1 Definíciók, példák

Előljáróban megjegyezzük, hogy a következőkben egyelőre csak diszkrét eloszlású valószínűségi változókkal foglalkozunk, úgy mint eddig tettük.

Gyakran előfordul, hogy valószínűségi problémák tárgyalásánál egyidejűleg több valószínűségi változó is fellép, amelyek tehát egyszerre vesznek fel a véletlentől függően különböző számértékeket. Az alábbi néhány példában felsorolunk ilyen eseteket.

1. Embereknél az életkor és a testsúly valószínűségi változók. Ha a testsulynál például csak egész és fél kilókat számítunk, az életkornál csak egész éveket, diszkrét eloszlású valószínűségi változókat kapunk.

2. Két kockával dobunk; X jelentsé az első kockával, Y a második kockával dobott számot.

3. Könyvek oldalszáma és ára (X az oldalszám, Y az ár).

4. Egy töltőtollból és egy töltőceruzából álló írókészletnél az egyes írószerszámok élettartama. Általában, ha egy csomagba n db árucikket teszünk, és minden egyes árucikk valamelyik jellemző adata egy X_i valószínűségi változó, akkor egy csomagot az $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ valószínűségi változók együttesével tudunk jellemezni. Ilyeneknél egy elemi esemény az, hogy az egyes valószínűségi változók egyidejűleg konkrét számértékeket vesznek fel. Ha n számú valószínűségi változónk van: $X_1, X_2, \dots, X_n$, lehetséges értékeik az

$$X_1: \{x_{i_1}\}_{i_1=1}^{i_1}, X_2: \{x_{i_2}\}_{i_2=1}^{i_2}, \dots, X_n: \{x_{i_n}\}_{i_n=1}^{i_n}$$

számok (ahol a $\{ \}$ zárójelbe tett, kis x betűvel jelzett számok az illető valószínűségi változó lehetséges értékeit szimbolizálják rövidítve, s az $i_1, i_2, \dots, i_n$ indexek befutják a megfelelő index-értékeket), akkor egy elemi eseményt az

$$(X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \dots, X_n = x_{i_n})$$

jellel, a megfelelő valószínűségeket a

$$P(X_1 = x_{1_1}, X_2 = x_{1_2}, \dots, X_n = x_{1_n}) = p_{1_1 1_2 1_3 \dots 1_n}$$

jelöléssel szimbolizálunk. Egészen pontosan: a

$$(X_1 = x_{1_1}, X_2 = x_{1_2}, \dots, X_n = x_{1_n})$$

esemény a

$$(X_1 = x_{1_1}), (X_2 = x_{1_2}), \dots, (X_n = x_{1_n})$$

események együttes (egyidejű) bekövetkezésével azonos.

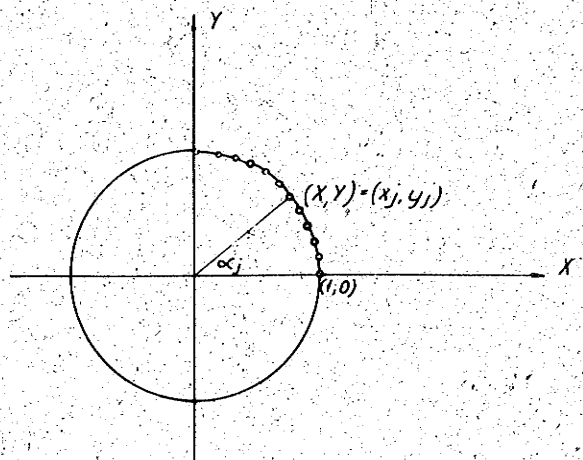
Pl. a két kockával való dobás esetén az $X_1 = 2, X_2 = 4$ azt az eseményt jelenti, hogy az első kockával 2-t, a második kockával 4-et dobunk. Itt:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_{1_1}, X_2 = x_{1_2}, \\ i_1 &= 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ i_2 &= 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{aligned}$$

Természetesen előfordulhat, hogy valamely x_{1_1} és x_{1_2} nem kombinál-

ható egymással; vagyis két olyan eseményt reprezentálnak, amelyek együtt nem következhetnek be; akkor

$$P(X_1 = x_{1_1}, X_2 = x_{1_2}) = 0.$$



41. ábra

Nézzünk egy bolyongási feladatot, amelyben egy pont az n egyenlő részre felosztott egységsugarú kör kerületén végez ugrásokat, és minden osztópontba a pont egyenlő valószínűséggel ugorhat. (41. ábra.)

Mivel minden osztópontnak két koordinátája van, két valószínűségi változó lép fel: a X és a Y . A j -ik osztópontához tartozó szög $\alpha_j = \frac{2\pi}{n} j$, így az erre az osztópontra vonatkozó koordináták, azaz X és Y ezen pontra vonatkozó értékei:

$$X = x_j = \cos\left(\frac{2\pi}{n} j\right) \quad \text{és} \quad Y = y_j = \sin\left(\frac{2\pi}{n} j\right).$$

Itt $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ és minden pontra fennáll, hogy $X^2 + Y^2 = 1$. (X és Y nem függetlenek.) A valószínűségi változók értékei:

$$X = 1, \cos\left[\frac{2\pi}{n} \cdot 1\right], \cos\left[\frac{2\pi}{n} \cdot 2\right], \dots, \cos\left[\frac{2\pi}{n} (n-1)\right],$$

$$Y = 0, \sin\left[\frac{2\pi}{n} \cdot 1\right], \sin\left[\frac{2\pi}{n} \cdot 2\right], \dots, \sin\left[\frac{2\pi}{n} (n-1)\right].$$

Elemi esemény, ha a bolygó pont valamelyik osztópontban van; a valószínűségi változókra nézve ez azt jelenti, hogy X -nek és Y -nak csak azon értékei kombinálhatók egymással (és ezeket kombináljuk is egymással, hogy minden elemi eseményt megkapjunk), amelyeknél a szögek nagysága megegyezik. A többi párosítást pedig tekintsük olyan elemi eseményeknek, amelyek nulla valószínűséggel következnek be. Így bármely lehetséges j értékre a valószínűség:

$$P(X = \cos\left[\frac{2\pi}{n} j\right], Y = \sin\left[\frac{2\pi}{n} j\right]) = \frac{1}{n}.$$

A következőkben két valószínűségi változó esetével foglalkozunk. Jelöljük ezeket X -szel és Y -nal, lehetséges értékeiket $\{x_i\}_i$ -vel és

$\{y_k\}_k$ -vel, ahol az i és k indexek egymástól függetlenül befutják a lehetséges index-értékeket. Az elemi eseményeket a következő értékpár-táblázat tünteti fel:

$(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), \dots, (x_1, y_n), \dots$

$(x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3), \dots, (x_2, y_n), \dots$

$(x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_3, y_n), \dots$

.....

.....

$(x_n, y_1), (x_n, y_2), (x_n, y_3), \dots, (x_n, y_n), \dots$

.....

.....

.....

A megfelelő $p_{ik} = P(X = x_i, Y = y_k)$ valószínűségek ismeretében a valószínűség-eloszlást, vagy ahogyan ilyen esetekben mondani szoktuk, a X és Y változók együttes eloszlását teljesen ismerjük.

Ha n számú valószínűségi változónk van: $X_1, X_2, \dots, X_n$, akkor ezek együttes eloszlását teljesen ismerjük, ha minden lehetséges $i_1, i_2, \dots, i_n$ indexre a

$$P(X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \dots, X_n = x_{i_n}) = p_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

valószínűségeket ismerjük. Megjegyezzük, hogy természetesen

$$\sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} p_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1,$$

azaz két valószínűségi változó esetében

$$\sum_i \sum_k p_{ik} = 1.$$

Áttérve a megfelelő valószínűségekre:

$$\begin{aligned} P(X = x_1) &= P[(X = x_1) \cup (Y = y_k)] = P\left[\bigcup_k (X = x_1, Y = y_k)\right] = \\ &= \sum_k P(X = x_1, Y = y_k) = \sum_k p_{1k} = p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1n} + \dots = p_{10}. \end{aligned}$$

Ennek a p_{10} mennyiségnek 1-szerinti peremvalószínűség a neve.

Hasonlóan a Y valószínűségi változóra:

$$\begin{aligned} (Y = y_k) &= (Y = y_k) \cap \left[\bigcup_1 (X = x_1)\right] = \bigcup_1 [(X = x_1) \cap (Y = y_k)] = \\ &= \bigcup_1 (X = x_1, Y = y_k). \end{aligned}$$

A $(Y = y_k)$ természetesen szintén véletlen összetett eseményt jelent.

A megfelelő valószínűségek:

$$\begin{aligned} P(Y = y_k) &= P\left[\bigcup_1 (X = x_1), (Y = y_k)\right] = P\left[\bigcup_1 (X = x_1, Y = y_k)\right] = \\ &= \sum_1 P(X = x_1, Y = y_k) = \sum_1 p_{1k} = p_{1k} + p_{2k} + \dots + p_{nk} + \dots = p_{0k}. \end{aligned}$$

Ez a p_{0k} érték a k-szerinti peremvalószínűség.

Definíció. X, illetve Y várható értékét a következőképpen értelmezzük:

$$\underline{M(X)} = \sum_1 \sum_k x_1 p_{1k} = \sum_1 x_1 \sum_k p_{1k} = \sum_1 \underline{x_1 p_{10}},$$

ha

$$\sum_1 \sum_k |x_1| p_{1k} < \infty.$$

Ez utóbbi sorelméleti követelmény oka hasonló az egy valószínűségi változó esetében említett okhoz.

Továbbá hasonló módon:

$$\underline{M(Y)} = \sum_k \sum_i y_k p_{ik} = \sum_k y_k \sum_i p_{ik} = \sum_k y_k p_{ok},$$

ha

$$\sum_k \sum_i |y_k| p_{ik} < \infty.$$

Megjegyzés a $\sum_i \sum_k a_{ik}$ összeg konvergencia-problémájához:

Írjuk fel a kettős végtelen sor elemeit végtelen négyzetes mátrix alakban:

$$\{a_{ik}\}_{i,k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Ha az itt szereplő elemeket (számokat) összegezni akarjuk, ezt többféle módon tehetjük meg; pl. úgy, hogy először egy sor tagjait összegezzük valamely i index mellett (i rögzített):

$$\sum_k a_{ik} = A_i = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ik} + \dots$$

(Ezt tettük a peremvalószínűségek kiszámításánál.)

Látható, hogy csak akkor van értelme a további összezésnek, ha

minden i -re $\sum_k a_{ik} = A_i$ létezik. Utána képezzük a

$$\sum_i A_i$$

összeget. Ha ez a sor is konvergens, akkor a kettős szumma:

$$\sum_i \left(\sum_k a_{ik} \right) = S_1$$

létezik, az itt követett összegezési sorrendben. De természetesen úgy is összegezhethetnénk a mátrix elemeit, hogy először egy oszlop összegét képezzük:

$$\sum_i a_{ik} = A_k^*$$

Ha minden fix k érték mellett A_k^* létezik, akkor képezzük a

$$\sum_k A_k^*$$

összeget. Ha ez is konvergens sort ad, akkor a

$$\sum_k \left(\sum_i a_{ik} \right) = S_2$$

összeget kapjuk.

Ha S_1 és S_2 létezik, nem biztos, hogy egyenlők. Még más sorrendben is összegezhethetnénk az elemeket, ún. "mátrixkiegyenesítéssel" is. "Mátrix-kiegyenesítés"-ről beszélünk, ha valamilyen módon a végtelen mátrix a_{ik} elemeit egyetlen végtelen sorozatba rendezzük. Természetesen sokféleképpen meg lehet ezt tenni. Általában más és más ilyen "kiegyenesítés" esetén, más és más sorösszeget kaphatunk; esetleg egy ilyen sor divergens is lehet (feltételes konvergencia). Tegyük fel, hogy egy ilyen "kiegyenesítéssel" is kapnánk egy összeget: S_3 -at.

Igazolható a következő tétel:

$$\text{Ha } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| = A_i' \text{ létezik minden } i\text{-re, továbbá ha } \sum_i A_i' < +\infty,$$

akkor a $\sum_i \sum_k a_{ik} = S$ egyértelműen létezik, bármilyen összegezési sorrendet használunk is. Vagyis ilyenkor

$$\sum_i \sum_k a_{ik} = \sum_k \sum_i a_{ik} = S,$$

tehát az indexek sorrendjét felcserélhetjük és bármely "kiegyenesítés"-sel nyert végtelen sor összege is S lesz. Ebben az esetben nevezzük a

$$\sum_i \sum_k a_{ik}$$

kettős sort abszolút konvergensenek, amit így is jelölünk:

$$\sum_i \sum_k |a_{ik}| < +\infty.$$

IV.8.2 A feltételes várható érték

Definíció: Az $M(X | Y = y_k)$ mennyiségen az X valószínűségi változó várhatóértékét értjük azon feltétel mellett, hogy Y a konkrét y_k értéket veszi fel. Tehát:

$$\begin{aligned} M(X | Y = y_k) &= \sum_i x_i P(X = x_i | Y = y_k) = \\ &= \sum_i x_i \frac{P(X = x_i, Y = y_k)}{P(Y = y_k)} = \frac{\sum_i x_i p_{ik}}{P(Y = y_k)} = \frac{\sum_i x_i p_{ik}}{p_{ok}}. \end{aligned}$$

Ez a szám tehát az X valószínűségi változónak $Y = y_k$ -ra vonatkozó feltételes várható értéke. (Feltételezzük, hogy $P(X = y_k) = p_{ok} > 0$.)

Hasonlóan:

$$\begin{aligned} M(Y | X = x_i) &= \sum_k y_k P(Y = y_k | X = x_i) = \\ &= \sum_k y_k \frac{P(X = x_i, Y = y_k)}{P(X = x_i)} = \frac{\sum_k y_k p_{ik}}{P(X = x_i)} = \frac{\sum_k y_k p_{ik}}{p_{io}} \quad (p_{io} > 0). \end{aligned}$$

Az $M(X | Y = y_k)$ feltételes várható érték akkor létezik, ha

$P(Y = y_k) = p_{ok} > 0$ és értéke függ az $(Y = y_k)$ eseménytől. Rendeljük hozzá

zá a $M(X | Y = y_k)$ valós számot az $(Y = y_k)$ eseményhez, feltéve, hogy

$p_{ok} > 0$. Lévé $(Y = y_j) \cap (Y = y_k) = \emptyset$, ha $j \neq k$ és $\sum_k P(Y = y_k) =$

$= \sum_k p_{ok} = 1$, ilyen módon egy új Y^* valószínűségi változót értelmeztünk,

amelynek lehetséges értékei a $M(X | Y = y_k)$ feltételes várható értékek, és definíciónk értelmében nyilván

$$P(Y^* = M(X | Y = y_k)) = p_{ok}.$$

Azokhoz az $(Y = y_k)$ eseményekhez, amelyeknek nulla a valószínűsége, nem tartozik az Y^* valószínűségi változónak értéke, de ez nem is lényeges a valószínűségi változó értelméből kifolyólag.

(Ha egy Ω eseménytérben egy valós értékű X függvény, azaz egy valószínűségi változó nincs értelmezve az elemi eseményeknek egy nulla valószínűségi mértékű halmazán, de másutt értelmezve van, ez semmit sem befolyásolja a X -szel való további számolást, nincs befolyással X várható értékére, szórására stb.)

Számítsuk ki most az Y^* várható értékét, $M(Y^*)$ -ot! Megjegyezzük, hogy általában nem is szokták külön megjelölni Y^* -gal az $M(X | Y = y_k)$ várható értékből származó valószínűségi változót, hanem azt mondják, hogy a $M(X | Y = y_k)$ feltételes várható érték maga is valószínűségi változó és ennek megfelelően a $M(Y^*)$ várható értéket egyszerűen $M[M(X | Y = y_k)]$ -val jelölik.

$$\begin{aligned} M(Y^*) &= M[M(X | Y = y_k)] = \sum_k M(X | Y = y_k) p_{ok} = \\ &= \sum_k M(X | Y = y_k) P(Y^* = M(X | Y = y_k)) = \\ &= \sum_k p_{ok} \sum_i x_i P(X = x_i | Y = y_k) = \sum_k p_{ik} \sum_i x_i \frac{P(X = x_i, Y = y_k)}{P(Y = y_k)} = \\ &= \sum_k \sum_i p_{ok} \cdot x_i \cdot \frac{p_{ik}}{p_{ok}} = \sum_k \sum_i x_i p_{ik} = \sum_i x_i \sum_k p_{ik} = \\ &= \sum_i x_i p_{i0} = M(X). \end{aligned}$$

azaz

$$M[M(X | Y = y_k)] = M(X).$$

Az elmondottakat szóról szóra megismételve, csupán az X és Y , illetve az x_i és y_k jeleket felcserélve, értelmezhető a $M(Y | X = x_i)$ feltételes várható érték és a vele kapcsolatos X^* valószínűségi változó. A fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$M[M(Y | X = x_i)] = M(Y).$$

Az Ω eseménytér a $(X = x_i, Y = y_k)$ elemi események halmaza. Az Y^* valószínűségi változót úgy értelmeztük, hogy a $(Y = y_k)$ véletlen eseményhez hozzárendeltük a $M(X | Y = y_k)$ feltételes várható értéket. Ez szokatlan, minthogy a valószínűségi változót eredetileg olyan valós függvényként definiáltuk, amelynél a Ω eseménytér elemi eseményeihez (pontjaihoz) rendeltünk valós számértékeket. Fenti definíciónkat a következőképpen tesszük pontosá; az $(Y = y_k) = \bigcup_i (X = x_i, Y = y_k)$ egyenlőségből látjuk, hogy a $(Y = y_k)$ véletlen esemény a $(X = x_i, Y = y_k)$ elemi események halmaza, amint az i index befutja lehetséges értékeit. Rendeljük függvényértékként mindezekhez az elemi eseményekhez a $M(X | Y = y_k)$ feltételes várható értéket (közös függvényértékként). Ilyen módon a Ω eseménytér minden egyes elemi eseményéhez hozzárendeltünk egy alkalmas $M(X | Y = y_k)$ számértéket és így módon nyerjük az Y^* valószínűségi változót.

IV.8.3 Valószínűségi változók függetlensége (Diszkrét valószínűségi változók esetén)

Definíció:

Az X és Y valószínűségi változók függetlenek, ha bármely x_i és y_k értékpárra:

$$\underset{\text{def}}{p_{ik}} = P(X = x_i, Y = y_k) \underset{\text{def}}{=} P(X = x_i) P(Y = y_k) = \underset{\text{def}}{p_{i0}} \underset{\text{def}}{p_{0k}}$$

Az $A =$ jel definiáló egyenlőséget szimbolizál.

Továbbá bármely $x_1 < x_2$ és $y_1 < y_2$ valós számpárookra:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = P(x_1 < X < x_2) P(y_1 < Y < y_2).$$

Általánosan így lehetne fogalmazni a X és Y valószínűségi változók függetlenségét:

X és Y függetlenek, ha az az esemény, hogy X értékei valamilyen H_1 valószínű számhalmazba esnek és az az esemény hogy Y értékei valamilyen H_2 valószínű számhalmazba esnek, egymástól független események bármely szóba jövő H_1 és H_2 valószínű számhalmaz esetén.

Hasonlóan: az $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók egymástól teljesen függetlenek (vagy röviden függetlenek), ha a következő események egymástól teljesen függetlenek:

X_1 értékei egy H_1 valószínű számhalmazba esnek,
 X_2 értékei egy H_2 valószínű számhalmazba esnek,
 $\dots$
 X_n értékei egy H_n valószínű számhalmazba esnek,
 bármely szóba jövő $H_1, H_2, \dots, H_n$ valószínű számhalmazok esetén.

Valószínűségi változók egy végtelen $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ sorozata egymástól (teljesen) független, ha közülük bármely véges számú $X_{n_1}, X_{n_2}, \dots, X_{n_r}$ valószínűségi változó egymástól (teljesen) független, (Az $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ indexeket tetszés szerint választhatjuk.)

Ha X és Y függetlenek, akkor:

$$\begin{aligned} M(X | Y = y_k) &= \sum_i x_i P(X = x_i | Y = y_k) = \sum_i x_i \frac{P(X = x_i, Y = y_k)}{P(Y = y_k)} = \\ &= \sum_i x_i \frac{P(X = x_i) P(Y = y_k)}{P(Y = y_k)} = \sum_i x_i P(X = x_i) = M(X) \end{aligned}$$

minden y_k -ra, és hasonlóan

$$\begin{aligned}
 M(Y | X = x_1) &= \sum_k y_k P(Y = y_k | X = x_1) = \\
 &= \sum_k y_k \frac{P(X = x_1, Y = y_k)}{P(X = x_1)} = \sum_k y_k \frac{P(X = x_1) P(Y = y_k)}{P(X = x_1)} = M(Y)
 \end{aligned}$$

minden x_1 -re.

Ha $M(X) = m_x$, $M(Y) = m_y$ -t írunk, akkor a szórásnégyzet definíciója a következő:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(X) &= \sum_i \sum_k (x_i - m_x)^2 p_{ik} = \sum_i (x_i - m_x)^2 \sum_k p_{ik} = \\
 &= \sum_i (x_i - m_x)^2 p_{i0},
 \end{aligned}$$

továbbá teljesen hasonlóan

$$\sigma^2(Y) = \sum_k (y_k - m_y)^2 p_{0k},$$

amennyiben az itt szereplő sorok konvergensek.

IV.8.4 Valószínűségi változók összegének és szorzatának várható értéke

Ha X lehetséges értékei $\{x_i\}_i$ és Y lehetséges értékei $\{y_k\}_k$, akkor $X + Y$ lehetséges értékei $\{x_i + y_k\}_{i,k}$.

$$\begin{aligned}
 M(X + Y) &= \sum_k \sum_i (x_i + y_k) P(X = x_i, Y = y_k) = \sum_k \sum_i (x_i + y_k) p_{ik} = \\
 &= \sum_k \sum_i (x_i p_{ik} + y_k p_{ik}) = \sum_i \sum_k x_i p_{ik} + \sum_k \sum_i y_k p_{ik} = \\
 &= \sum_i x_i p_{i0} + \sum_k y_k p_{0k} = M(X) + M(Y).
 \end{aligned}$$

Teljes indukcióval kapjuk, hogy az $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók összegének várható értéke a várható értékek összege:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n).$$

Kiegészítő megjegyzés

A várható érték definíciójában szereplő

$$M(X) = \sum_i p_i x_i$$

összegnél feltételeztük a $\sum_i p_i |x_i|$ sor konvergenciáját. Hasonlóképpen a $M(X+Y) = \sum_{i,k} (x_i + y_k) p_{ik}$ esetében is feltételezzük a $\sum_{i,k} |x_i + y_k| p_{ik}$ kettős sor konvergenciáját. Ha azonban $M(X)$ és $M(Y)$ létezik, azaz a $\sum_i p_i |x_i|$ és a $\sum_k p_k |y_k|$ sorok konvergenssek, akkor a $\sum_{i,k} p_{ik} |x_i + y_k|$ kettős sor is. U1.

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} p_{ik} |x_i + y_k| &= \sum_i \sum_k p_{ik} |x_i + y_k| \leq \sum_i \sum_k p_{ik} |x_i| + \\ &+ \sum_i \sum_k p_{ik} |y_k| = \sum_i p_{i0} |x_i| + \sum_k p_{0k} |y_k| < +\infty. \end{aligned}$$

Hasonlóan: ha az $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók mindegyikének létezik a várható értéke, akkor létezik a $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ összegnek is. Figyeljük meg, hogy a

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$$

egyenlőség igazolásánál nem tételeztük fel a valószínűségi változók függetlenségét.

Ha a X valószínűségi változót megszorozzuk egy c számmal, akkor cX is valószínűségi változó, és ha X értékészlete $\{x_i\}_1$, cX értékészlete $\{cx_i\}_1$, továbbá

$$P(cX = cx_1) = P(X = x_1) = p_1.$$

Ennélfogva

$$M(cX) = \sum_i cx_i p_i = c \sum_i p_i x_i = c M(X).$$

Ennek alapján, ha $c_1, c_2, \dots, c_n$ tetszőleges számok és $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók, akkor

$$\begin{aligned} M(c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n) &= \\ &= c_1 M(X_1) + c_2 M(X_2) + \dots + c_n M(X_n). \end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy a várható érték mint művelet (operáció) lineáris. Mi lesz az $M(x)$ várható értéke egy c számnak (konstansnak)?

Az $M(c)$ esetet úgy értelmezzük, hogy olyan X valószínűségi változónk van, amely azonosan egyenlő c -vel. (Az Ω eseménytér minden elemi eseményéhez a c szám tartozik.) Ekkor $P(X = c) = 1$ és $P(X \neq c) = 0$, ennél fogva $M(c) = c \cdot 1 = c$. Konstans várható értéke maga a konstans.

Ebből már következik, hogy konstans szórása zérus:

$$\sigma^2(c) = M[(c - M(c))^2] = M(0) = 0.$$

Keressük meg az X és Y valószínűségi változók szorzatának várható értékét.

Ha X lehetséges értékei $\{x_i\}_1$, Y lehetséges értékei $\{y_k\}_k$, akkor XY lehetséges értékei $\{x_i y_k\}_{i,k}$.

$$M(XY) = \sum_i \sum_k x_i y_k P(X = x_i, Y = y_k) = \sum_i \sum_k x_i y_k \cdot p_{ik}.$$

Ha X és Y függetlenek, akkor $p_{ik} = p_{i0} p_{0k}$, így tehát

$$M(XY) = \sum_i \sum_k x_i y_k p_{i0} p_{0k} = \sum_i x_i p_{i0} \sum_k y_k p_{0k} = M(X) M(Y).$$

Itt is belátható, hogy ha $\sum_i p_{i0} |x_i| < \infty$ és $\sum_k p_{0k} |y_k| < \infty$,

akkor

$$\sum_i \sum_k |x_i y_k| p_{i0} \cdot p_{0k} < \infty.$$

Ha X, Y, Z egymástól teljesen független valószínűségi változók, akkor

$$M(X Y Z) = M[(X Y) Z] = M(XY) M(Z) = M(X) M(Y) M(Z).$$

Teljes indukcióval igazolható, hogy ha $X_1, X_2, \dots, X_n$ teljesen független valószínűségi változók, akkor

$$M(X_1 X_2 \dots X_n) = M(X_1) M(X_2) \dots M(X_n).$$

IV.8.5 Független valószínűségi változók összegének szórása

Legyenek X és Y független valószínűségi változók, értékkészletük $\{x_i\}_i$ és $\{y_k\}_k$. Akkor

$$P(X = x_i, Y = y_k) = p_{ik} = p_{i0} p_{0k}$$

Még mielőtt tovább mennénk, egyetlen valószínűségi változó szórásának definíciójához fűzünk megjegyzést. Definíciónk szerint

$$\sigma^2(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 p_i = M[(X - M(X))^2].$$

Mínthogy

$$(X - M(X))^2 = X^2 - 2M(X)X + M^2(X),$$

azért

$$\sigma^2(X) = M[(X - M(X))^2] = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Nézzük most $\sigma^2(X + Y)$ -t, ahol X és Y függetlenek.

$$\begin{aligned}\sigma^2(X+Y) &= M\{[X+Y - M(X+Y)]^2\} = M\{([X - M(X)] + \\ &+ [Y - M(Y)])^2\} = M\{[X - M(X)]^2 + 2[X - M(X)][Y - M(Y)] + \\ &+ [Y - M(Y)]^2\} = M([X - M(X)]^2) + 2M([X - M(X)][Y - M(Y)]) + \\ &+ M([Y - M(Y)]^2) = \sigma^2(X) + 2M([X - M(X)][Y - M(Y)]) + \sigma^2(Y).\end{aligned}$$

Eddig nem használtuk ki azt a feltevést, hogy X és Y függetlenek, tehát előbbi egyenlőségünk igaz bármely két X és Y valószínűségi változóra. Ha X és Y függetlenek, akkor függetlenek a $X - M(X)$ és a $Y - M(Y)$ valószínűségi változók is, hiszen csak egy-egy konstanszt vontuk le belőlük, tehát egyik előző eredményünk szerint

$$\begin{aligned}M([X - M(X)][Y - M(Y)]) &= M[X - M(X)] M[Y - M(Y)] = \\ &= [M(X) - M(X)] [M(Y) - M(Y)] = 0,\end{aligned}$$

lévén

$$M[M(X)] = M(X) \quad \text{és} \quad M[M(Y)] = M(Y),$$

mert $M(X)$ és $M(Y)$ konstansok (számok).

Ennélfogva független X és Y esetében:

$$\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y).$$

Teljes indukcióval igazolható, hogy ha $X_1, X_2, \dots, X_n$ teljesen függetlenek, akkor

$$\sigma^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n).$$

Megjegyezzük, hogy teljesen formálisan is:

$$\begin{aligned}M([X - M(X)][Y - M(Y)]) &= M[XY - M(X)Y - X M(Y) + M(X)M(Y)] = \\ &= M(XY) - M(X)M(Y) - M(X)M(Y) + M(X)M(Y) = M(XY) - M(X)M(Y).\end{aligned}$$

Lévén X és Y függetlenek, fennáll $M(XY) = M(X)M(Y)$, tehát végeredményként nullát kapunk.

Még megnézzük, mi lesz a szórásnégyzete az $aX + b$ valószínűségi változónak, ahol a és b állandók. Mint már láttuk,

$$M(aX + b) = aM(X) + b.$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned}\sigma^2(aX + b) &= M\{[aX + b - M(aX + b)]^2\} = \\ &= M\{a^2(X - M(X))^2\} = a^2 M[(X - M(X))^2] = a^2 \sigma^2(X).\end{aligned}$$

Ha $X_1, X_2, \dots, X_n$ teljesen független valószínűségi változók és $c_1, c_2, \dots, c_n$ tetszőleges számok, akkor

$$\sigma^2(c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n) = c_1^2 \sigma^2(X_1) + c_2^2 \sigma^2(X_2) + \dots + c_n^2 \sigma^2(X_n).$$

IV.8.6 Példák és további fogalmak

IV.8.6.1 A binomiális eloszlás várható értéke és szórása

Legyen adva egy n számú kísérlethől álló kísérletsorozat; az egyes kísérletek kimenetelei az A , illetve az $\bar{A}$ események, $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$, ahol $0 < p < 1$.

Legyenek az egyes kísérletek kimenetelei egymástól teljesen független események.

Legyen a X_j valószínűségi változó értéke 1, ha a j -ik kísérlet alkalmával az A esemény bekövetkezik, és legyen X_j értéke 0, ha a j -ik kísérlet alkalmával $\bar{A}$ következik be, ahol $j = 1, 2, \dots, n$. Nyilván az $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók egymástól teljesen függetlenek.

Tekintsük a

$$Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

valószínűségi változót, Z_n lehetséges értékei a 0, 1, 2, ..., n számok. Keressük a

$$P(Z_n = k)$$

valószínűséget. $Z_n = k$ pontosan akkor, ha a X_j valószínűségi változók

közül pontosan k számnak 1 az értéke, a többi $(n-k)$ szamu értéke pedig nulla, azaz ha az n kísérlet közül pontosan k izben bekövetkezik az A esemény és pontosan $(n-k)$ izben nem következik be A (az A következik be). A már ismert módon kapjuk tehát:

$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k},$$

vagyis a Z_n valószínűségi változó binomiális eloszlásu. Számítsuk ki az egyes X_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét.

Mindegyik X_j lehetséges értékei: 0 és 1, továbbá

$$P(X_j = 1) = p \quad \text{és} \quad P(X_j = 0) = 1 - p = q.$$

Ezért

$$M(X_j) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

minden j indexre.

$$\begin{aligned} \sigma^2(X_j) &= M[(X_j - p)^2] = M[X_j^2 - 2pX_j + p^2] = \\ &= M(X_j^2) - 2pM(X_j) + p^2. \end{aligned}$$

De

$$M(X_j^2) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$

minthogy X_j^2 lehetséges értékei szintén 0 és 1, a megfelelő q és p valószínűségekkel, továbbá $M(X_j) = p$, így tehát

$$\sigma^2(X_j) = p - 2p^2 + p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

minden $j = 1, 2, \dots, n$ indexre.

Míndezék alapján

$$M(Z_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n) = np,$$

továbbá a függetlenség miatt:

továbbá a függetlenség miatt:

$$\sigma^2(Z_n) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n) = n p q .$$

IV.8.6.2 Egy példa a feltételes várható értékre

Egy munkahelyen liftek közlekednek, amelyek különösen a reggeli és délutáni csúcsforgalom idején a sok megállás miatt igen lassuak. Gyakorlati szempontból fontos probléma, hogy meghatározzuk a lift egy meneténél a megállások számának várható értékét. Tegyük fel, hogy a lift n emeleten közlekedik, a földszintről indul el és ott k személy száll be, minden személy a többitől függetlenül $\frac{1}{n}$ valószínűséggel száll ki az egyes emeleteken, és újabb személyek a lift menete közben nem szállnak be.

Kérdés, hogy ekkor mennyi a megállások számának várható értéke?

A problémát így is fogalmazhatjuk: van k számú golyónk, amelyeket n urnába helyezünk el, egymástól függetlenül, mindegyik golyót

$\frac{1}{n}$ valószínűséggel téve valamelyik urnába; mennyi a nem üres urnák számának várható értéke?

(Urnák $\sim$ emeletek; golyók $\sim$ utazó emberek.)

Jelentse az X_k valószínűségi változó k golyó esetén a nem-üres urnák számát; $1 \leq X_k \leq n$. Tekintsük a X_{k+1} valószínűségi változót! Nyilván X_{k+1} értéke függ X_k -től és

$$X_{k+1} = \begin{cases} X_k & \text{vagy pedig} \\ X_k + 1 \end{cases} ,$$

mégpedig

$$P(X_{k+1} = j \mid X_k = j) = \frac{1}{n}$$

és

$$P(X_{k+1} = j+1 \mid X_k = j) = \frac{n-j}{n} = 1 - \frac{1}{n} .$$

Igy tehát

$$M(X_{k+1} \mid X_k = j) = j \frac{1}{n} + (j+1) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + j \left(1 - \frac{1}{n}\right) ,$$

tehát általában

$$M(X_{k+1} | X_k) = 1 + X_k \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Lévéen

$$M(X_{k+1}) = M[X(X_{k+1} | X_k)] = 1 + M_k \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

ahol

$$M_k = M(X_k),$$

kapjuk az

$$M_{k+1} = 1 + M_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

rekurziós formulát.

Ebből:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= 1 + M_k \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + \left[1 + M_{k-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \\ &+ M_{k-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \left[1 + M_{k-2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \\ &+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + M_{k-2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \dots + M_1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k. \end{aligned}$$

Lévéen

$$M_1 = M(X_1) = 1,$$

így

$$M(X_{k+1}) = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k+1}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k+1}\right],$$

vagyis

$$M(X_k) = n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right].$$

Tehát a liftnél a megállások számának várható értéke n emelet és k induló utas esetén

$$n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^k \right].$$

Ha nagyon sok az utas az emeletek számához képest, akkor ez közel n lesz, vagyis a lift minden emeleten megáll.

Ez a tárgyalás Rényi Alfréd-től származik.

IV.8.6.3 A Poisson-eloszlás szórásnégyzete

Legyen X Poisson-eloszlású, azaz

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

X szórásnégyzete:

$$\sigma^2(X) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (k - \lambda)^2,$$

lévén $M(X) = \lambda$.

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (k^2 - 2\lambda k + \lambda^2) = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} - 2\lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} - 2\lambda^2 + \lambda^2, \end{aligned}$$

mivel

$$e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = M(X) = \lambda,$$

továbbá

$$e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1.$$

Ennélfogva

$$\sigma^2(X) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2,$$

mert az első $\sum$ -nál $k=0$ -ra az első tag zérus lesz (k^2 -tel kell szorozni). A $\sum$ -ban legyen $k = \nu + 1$, akkor adódik:

$$e^{-\lambda} \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu \cdot \lambda^{\nu}}{\nu!} + e^{-\lambda} \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} = \lambda^2 + \lambda,$$

minthogy

$$e^{-\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} = M(X) = \lambda \quad \text{és} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} = e^{\lambda}.$$

Igy

$$\sigma^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

A Poisson-eloszlás szórása tehát $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

A Poisson-eloszlásnál a várható érték és a szórásnégyzet egyaránt λ .

IV.8.6.4 Két független Poisson-eloszlású valószínűségi változó összege

Legyenek X és Y egymástól független valószínűségi változók, mindketten Poisson-eloszlásúak, legyen X paramétere λ , Y paramétere pedig μ , azaz

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{és} \quad P(Y = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}.$$

Tekintsük a

$$Z = X + Y$$

valószínűségi változót és határozzuk meg eloszlását!

Z lehetséges értékei szintén a nem-negatív egész számok. Ki kell számítani a

$$P(Z = k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

valószínűséget. Nézzük, hogy a $(Z = k)$ esemény milyen módon következhet be. Világos, hogy $Z = k$ pontosan akkor, ha

$$\begin{aligned} &X = 0 \text{ és } Y = k, \text{ vagy } X = 1 \text{ és } Y = k-1, \text{ vagy } X = 2 \text{ és } \\ &Y = k-2, \dots, \text{ vagy } X = j \text{ és } Y = k-j, \dots, \text{ vagy} \\ &X = k-1 \text{ és } Y = 1, \text{ vagy } X = k \text{ és } Y = 0; \end{aligned}$$

azaz a $(Z = k)$ esemény uniója (összege) az imént felsorolt eseményeknek:

$$(Z = k) = \bigcup_{j=0}^k (X = j \text{ és } Y = k - j).$$

Különböző j értékekre az egyes $(X = j \text{ és } Y = k - j)$ események diszjunktak (egymást kizárják), azért

$$P(Z = k) = \sum_{j=0}^k P(X = j \text{ és } Y = k - j).$$

Mínhogy továbbá $(X = j)$ és $(Y = k - j)$ egymástól független események, írhatjuk:

$$P(X = j \text{ és } Y = k - j) = P(X = j) P(Y = k - j) =$$

$$= \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\mu} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^j}{j!} \cdot \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}.$$

Ennélfogva

$$P(Z = k) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j}{j!} \cdot \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}$$

A binomiális tétel szerint:

$$(\lambda + \mu)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j \mu^{k-j} = \sum_{j=0}^k k! \frac{\lambda^j}{j!} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!},$$

azaz

$$\frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} = \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j}{j!} \cdot \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}.$$

Kapjuk tehát, hogy

$$P(Z = k) = e^{-(\lambda + \mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}$$

minden nem-negatív egész k -ra,

Vagyis $Z = X + Y$ is Poisson-eloszlású és paramétere $\lambda + \mu$.

Ez az eredmény teljes indukcióval tetszőleges végeesszámu, Poisson-eloszlású, egymástól teljesen független valószínűségi változó esetére kiterjeszthető.

IV.8.6.5. Két valószínűségi változó korrelációs együtthatója

Legyen X és Y valószínűségi változók együttes eloszlása:

$$P(X = x_i, Y = y_k) = P_{ik}$$

minden szóbaejöhető i és k indexre, azaz az ismert szóbaejövő $\{x_i\}_1$ és $\{y_k\}_k$ számokra megadott.

Létezzenek továbbá az

$$M(X) = m_X \quad \text{és} \quad M(Y) = m_Y$$

várható értékek. Az

$$M[(X - m_X)(Y - m_Y)]$$

számot a X és a Y valószínűségi változók kovarianciájának nevezzük és μ_{XY} -nal jelöljük. Ha létezik mind X , mind Y szórásnégyzete, akkor létezik a kovarianciájuk is. Ugyanis

$$\begin{aligned}\mu_{XY} &= M[(X - m_X)(Y - m_Y)] = \sum_i \sum_k (x_i - m_X)(y_k - m_Y) p_{ik} = \\ &= \sum_i \sum_k (x_i - m_X) \sqrt{p_{ik}} (y_k - m_Y) \sqrt{p_{ik}}.\end{aligned}$$

Legutolsó összegünk tagjainak abszolút értékeiből álló sorra, azaz a

$$\sum_i \sum_k (|x_i - m_X| \sqrt{p_{ik}}) (|y_k - m_Y| \sqrt{p_{ik}})$$

sorra alkalmazva a Cauchy-Bunjakovszkij-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}&\sum_i \sum_k (|x_i - m_X| \sqrt{p_{ik}}) (|y_k - m_Y| \sqrt{p_{ik}}) \leq \\ &\leq \left\{ \sum_i \sum_k (x_i - m_X)^2 p_{ik} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_i \sum_k (y_k - m_Y)^2 p_{ik} \right\}^{1/2} = \\ &= \sigma(X) \sigma(Y).\end{aligned}$$

Az előbbiekből látható, hogy $\mu_{XY} \leq \sigma(X)\sigma(Y)$, ha tehát $\sigma(X) = 0$, vagy pedig $\sigma(Y) = 0$, akkor egyuttal $\mu_{XY} = 0$.

Amennyiben $\sigma(X) \neq 0$ és $\sigma(Y) \neq 0$, a

$$\rho = \frac{M[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{\sigma(X) \sigma(Y)} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma(X) \sigma(Y)}$$

szám az X és Y valószínűségi változók korrelációs együtthatója.

Kiegészítésként közöljük a Cauchy-Bunjakovszkij-egyenlőtlenség igazolását.

Mint ismeretes, eszerint bármely $\{a_j\}_j$, $\{b_j\}_j$ számsorozatra

$$\sum_j |a_j| |b_j| \leq \left(\sum_j a_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_j b_j^2 \right)^{1/2}.$$

Kettős szummák esetére az egyenlőtlenség bizonyítása a következő:

Tekintsük az

$$f(t) = \sum_i \sum_k (t |a_{ik}| - |b_{ik}|)^2 = t^2 \sum_i \sum_k a_{ik}^2 - 2t \sum_i \sum_k |a_{ik}| |b_{ik}| + \\ + \sum_i \sum_k b_{ik}^2$$

másodfoku függvényt, ahol az a_{ik} , b_{ik} valós számos tetszőlegesek. Lévéen minden valós t -re $f(t) \geq 0$, a

$$t^2 \left(\sum_i \sum_k a_{ik}^2 \right) - 2t \left(\sum_i \sum_k |a_{ik}| |b_{ik}| \right) + \sum_i \sum_k b_{ik}^2 = 0$$

másodfoku egyenletnek vagy nincs valós gyöke, vagy egyetlen valós gyöke van csak. Ekkor az egyenlet megoldó képletében a diszkrimináns nem pozitív:

$$\left(\sum_i \sum_k |a_{ik}| |b_{ik}| \right)^2 - \left(\sum_i \sum_k a_{ik}^2 \right) \left(\sum_i \sum_k b_{ik}^2 \right) \leq 0,$$

ami éppen bizonyítandó egyenlőtlenségünk.

Most a ρ korrelációs együttható legfontosabb tulajdonságaival ismerkedünk meg.

Fennáll mindig, hogy

$$-1 \leq \rho \leq 1.$$

Tekintsük ugyanis az alábbi másodfoku kétváltozós függvényt:

$$Q(x, t) = M \left\{ [s(X - m_X) + t(Y - m_Y)]^2 \right\} = \sigma^2(X) s^2 + \\ + 2st \mu_{XY} + \sigma^2(Y) t^2.$$

Definíciónk szerint minden valós s és t független változó értékekre:

$$Q(s, t) \geq 0.$$

Irhatjuk:

$$Q(x, t) = \left[\sigma(X) \cdot s + \frac{\mu_{XY}}{\sigma(X)} t \right]^2 + t^2 \left[\sigma^2(Y) - \frac{\mu_{XY}^2}{\sigma^2(X)} \right] =$$

$$= \left[\sigma(X) s + \frac{\mu_{XY}}{\sigma(X)} t \right]^2 + \frac{t^2}{\sigma^2(X)} \left[\sigma^2(X) \sigma^2(Y) - \mu_{XY}^2 \right];$$

ez csak úgy lehet ≥ 0 minden valós s és t értékre, ha

$$\sigma^2(X) \sigma^2(Y) - \mu_{XY}^2 \geq 0,$$

azaz

$$\rho^2 = \frac{\mu_{XY}^2}{\sigma^2(X) \sigma^2(Y)} \leq 1.$$

Innen rögtön látható állításunk érvényessége.

Megjegyzés:

Ha $\sigma^2(X) \sigma^2(Y) - \mu_{XY}^2 < 0$ lenne, akkor pl. $t = 1$ és $s = -\frac{\mu_{XY}}{\sigma^2(X)}$

esetén

$$Q\left(-\frac{\mu_{XY}}{\sigma^2(X)}, 1\right) = \frac{1}{\sigma^2(X)} \left[\sigma^2(X) \sigma^2(Y) - \mu_{XY}^2 \right] < 0$$

következnék.

A μ_{XY} kovariancia zérus, ha X és Y egymástól függetlenek.

Tényleg, ekkor

$$\mu_{XY} = M[X Y - m_X Y - X m_Y + m_X m_Y] = M(X Y) - m_X m_Y -$$

$$- m_X m_Y + m_X m_Y = M(X Y) - m_X m_Y,$$

és a függetlenség miatt

$$M(X Y) = M(X) M(Y) = m_X m_Y.$$

Ha $\mu_{XY} = 0$, akkor ($\sigma(X) \neq 0$ és $\sigma(Y) \neq 0$ esetén) $\rho = 0$ szintén.

Ez azonban még nem jelenti szükségképp X és Y függetlenségét. A $\mu_{XY} = 0$

esetben azt mondjuk, hogy X és Y korrelálatlan valószínűségi változók.

Az alábbi példa két korrelálatlan, de nem független valószínűségi változót mutat be.

Osszuk fel az egység-sugaru kör területét osztópontokkal $4n$ egyenlő részre, ahol n tetszős szerinti, de fix pozitív egész szám, és az első osztópont legyen az $(1, 0)$ pont (42. ábra).

A j -ik osztóponthoz huzott rádiusz a pozitív

X-tengellyel $\frac{2\pi}{4n} j$ ivmértékű szöget zár be. A j futó-index $j = 0$ -tól

$j = (4n - 1)$ -ig megy, mert $j = 4n$ -re ismét az $(1, 0)$ pontot kapjuk. Bármely osztópontnak mind az x-, mind az y-tengelyre vonatkozó tükörképe szintén osztópont.

Például a $j = n, 2n$ illetve $3n$ -re rendre a $\frac{\pi}{2}$, π , illetve $\frac{3\pi}{2}$ szög-állású osztópontokat kapjuk. Az egységnyi valószínűségi tömeget osszuk el az osztópontok között egyenletesen, tehát minden egyes osztópontba $\frac{1}{4n}$ valószínűségi tömeg jusson.

Legyenek most már a X valószínűségi változó lehetséges értékei az egyes osztópontok x-koordinátái, az Y valószínűségi változó lehetséges értékei e pontok y-koordinátái. Ugy foghatjuk fel a dolgot, hogy egy bolygó pont az egységkör területének ezekben az osztópontjaiban tartózkodhat, mindegyikben $\frac{1}{4n}$ valószínűséggel.

Tehát:

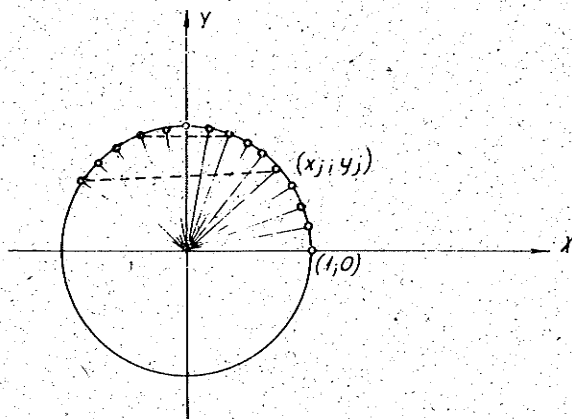
$$X : \cos\left(\frac{2\pi}{4n} j\right),$$

és

$$Y : \sin\left(\frac{2\pi}{4n} j\right),$$

ahol

$$j = 0, 1, 2, \dots, (4n-1).$$



42. ábra

$M(X) = M(Y) = 0$ az osztópontoknak mindkét koordinátatengelyhez viszonyított szimmetrikus elhelyezkedése és az egyenletes valószínűség-eloszlás miatt. Az is világos, hogy $\sigma^2(X) > 0$ és $\sigma^2(Y) > 0$.

$$\begin{aligned}\mu_{XY} &= M[(X - M(X))(Y - M(Y))] = M[XY] = \sum_i \sum_k x_i y_k p_{ik} = \\ &= \sum_{j=0}^{4n-1} \cos\left(\frac{2\pi}{4n}j\right) \sin\left(\frac{2\pi}{4n}j\right) \frac{1}{4n} = \frac{1}{4n} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{4n-1} 2 \sin\left(\frac{2\pi}{4n}j\right) \cos\left(\frac{2\pi}{4n}j\right) = \\ &= \frac{1}{8n} \sum_{j=0}^{4n-1} \sin\left(\frac{2\pi}{2n}j\right) = 0.\end{aligned}$$

Ugyanis tekintsük a következő összeget:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{4n-1} \cos\left(\frac{2\pi}{2n}j\right) + i \sum_{j=0}^{4n-1} \sin\left(\frac{2\pi}{2n}j\right) = \\ &= \sum_{j=0}^{4n-1} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{2n}j\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{2n}j\right) \right\} = \sum_{j=0}^{4n-1} e^{i \frac{2\pi}{2n}j},\end{aligned}$$

ahol $i = \sqrt{-1}$. A mi kérdéses

$$\sum_{j=0}^{4n-1} \sin\left(\frac{2\pi}{2n}j\right)$$

összegünk a legutolsó, exponenciális összes imaginárius része. Lévé az exponenciális összeg egy $e^{i \frac{2\pi}{2n}}$ kvóciensű mértani sor összege, ezért

$$\sum_{j=0}^{4n-1} e^{i \frac{2\pi}{2n}j} = \frac{1 - (e^{i \frac{2\pi}{2n}})^{4n}}{1 - e^{i \frac{2\pi}{2n}}} = \frac{1 - e^{i 4\pi}}{1 - e^{i \frac{\pi}{n}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{i \frac{\pi}{n}}} = 0,$$

mert $e^{i \frac{\pi}{n}} \neq 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Ennélfogva a

$$\sum_{j=0}^{4n-1} e^{i \frac{2\pi}{2n} j}$$

összegnek mind a valós, mind az imaginárius része nulla.

Az X és Y valószínűségi változók tehát korrelálatlanok, de nyilván nem függetlenek, hiszen fennáll az

$$X^2 + Y^2 = 1$$

egyenlőség.

Egyébként egyszerűen beláthatjuk, hogy a valószínűségek szorzástétele nem érvényes. Például:

$$P(X = 0, Y = 0) = 0,$$

mert X és Y egyszerre nem lehet nulla.

Másrészt

$$P(X = 0) = 2 \cdot \frac{1}{4n} = \frac{1}{2n},$$

mert $X = 0$, ha a $\frac{\pi}{2}$ vagy a $\frac{3\pi}{2}$ szögállású osztópontban van a bolygó pont.
Hasonlóan

$$P(Y = 0) = 2 \cdot \frac{1}{4n} = \frac{1}{2n}.$$

mert $Y = 0$, ha a 0 , vagy a π szögállású osztópontban van a bolygó pont.
Így tehát

$$P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n^2} \neq 0.$$

Érdekes megemlíteni még a következő tételt:

A ρ korrelációs együtttható abszolút értéke pontosan akkor 1, ha az X és Y valószínűségi változók között 1 valószínűséggel lineáris függvénykapcsolat áll fenn; azaz $\rho^2 = 1$ akkor és csak akkor, ha

$$P(Y = aX + b) = 1;$$

ahol a és b állandók.

Tételünk geometriai jelentése a következő:

Az xy -síkban ábrázolva a X és Y változók lehetséges $\{x_i, y_k\}_{i,k}$ értékpárjait, a teljes 1 valószínűségi tömeg olyan (x_i, y_k) pontok között van elosztva, amely (x_i, y_k) pontok, egy egyenesen fekszenek.

A tétel bizonyítása.

Tegyük fel először, hogy

$$P(Y = aX + b) = 1.$$

Ekkor a X változó lehetséges x_i értékeihez Y -nak csak olyan y_k értékeit kell figyelembe venni, amelyekre

$$y_k = ax_i + b.$$

Jelöljük ezt az y_k értéket y_{k_i} -vel. Akkor

$$\sum_i P(X = x_i, Y = y_{k_i}) = 1.$$

Nézzük a $M(Y)$ és $G^2(Y)$ értékeket!

$$M(Y) = \sum_i y_{k_i} P(Y = y_{k_i}) = \sum_i (ax_i + b) P(X = x_i) =$$

$$= a \sum_i x_i P(X = x_i) + b \sum_i P(X = x_i).$$

Most

$$P(X = x_i) = P(X = x_i, Y = y_{k_i}),$$

azért

$$\sum_i P(X = x_i) = 1;$$

továbbá

$$\sum_1 x_1 P(X = x_1) = M(X) ,$$

ennél fogva

$$M(Y) = a M(X) + b$$

és írhatjuk:

$$\begin{aligned} \sigma^2(Y) &= M[(Y - M(Y))^2] = M[(aX + b - aM(X) - b)^2] = \\ &= M[a^2(X - M(X))^2] = a^2 M[(X - M(X))^2] = a^2 \sigma^2(X) , \end{aligned}$$

mert most csak az $y_{k_i} = ax_i + b$ értékeket kell figyelembe vennünk.

Továbbá ezek alapján:

$$\begin{aligned} \mu_{XY} &= M[(X - M(X))(Y - M(Y))] = M[(X - M(X))(aX + b - aM(X) - b)] = \\ &= a M[(X - M(X))^2] = a \sigma^2(X) . \end{aligned}$$

Igy tehát

$$\rho^2 = \frac{\mu_{XY}^2}{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)} = \frac{a^2 \sigma^4(X)}{\sigma^2(X) a^2 \sigma^2(X)} = 1 .$$

Tegyük fel most, hogy

$$\rho^2 = 1 .$$

Lévéen

$$\rho^2 = \frac{\mu_{XY}^2}{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)} ,$$

feltevésünk szerint

$$\sigma^2(X)\sigma^2(Y) = \mu_{XY}^2 ,$$

azaz

$$\sigma^2(X)\sigma^2(Y) - \mu_{XY}^2 = 0 .$$

Térjünk vissza az előzőekben bevezetett

$$Q(x, t) = M\{[s(X - m_X) + t(Y - m_Y)]^2\} = \\ = \left[\sigma(X)s + \frac{\mu_{XY}}{\sigma(X)}t\right]^2 + \frac{t^2}{\sigma^2(X)}[\sigma^2(X)\sigma^2(Y) - \mu_{XY}^2]$$

függvényhez. Jelen esetben

$$Q(s, t) = \left[\sigma(X)s + \frac{\mu_{XY}}{\sigma(X)}t\right]^2.$$

Mindazon s és t értékekre, amelyekre $\sigma(X)s + \frac{\mu_{XY}}{\sigma(X)}t = 0$, $Q(s, t) = 0$.

Legyen pl. $t = 1$, akkor az $s_0 = -\frac{\mu_{XY}}{\sigma^2(X)}$ értékekre $Q(s_0, 1) = 0$, azaz

$$M\{[s_0(X - m_X) + (Y - m_Y)]^2\} = 0.$$

Az $[s_0(X - m_X) + (Y - m_Y)]^2$ nem - negatív valószínűségi változó várható értéke csak úgy lehet nulla, hogy értéke 1 valószínűséggel nulla, és nullától különböző értékeket csak nulla valószínűséggel vesz fel. Tehát

$$P[s_0(X - m_X) + (Y - m_Y) = 0] = 1.$$

vagyis

$$P[Y = (-s_0)X + s_0 m_X + m_Y] = 1.$$

amit bizonyítani akartunk.

IV.8.6.6. Kiegészítés a valószínűségi változók összegének szórásnégyzetéhez

Az $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ összegének szórásnégyzetére kapott

$$\sigma^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)$$

egyenlőség igazolásánál eredetileg feltételeztük e valószínűségi változók teljes függetlenségét. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a teljes függetlenség helyett elegendő feltenni e valószínűségi változók páronkénti korrelálatlanságát, vagyis azt, hogy bármely $i \neq j$ indexpárra:

$$M[(X_i - M(X_i))(X_j - M(X_j))] = 0.$$

Ugyanis:

$$\begin{aligned} \sigma^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) &= M\{[(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - (M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n))]\}^2 \\ &= M\{[(X_1 - M(X_1)) + (X_2 - M(X_2)) + \dots + (X_n - M(X_n))]\}^2 \\ &= M\left\{\sum_{i=1}^n (X_i - M(X_i))^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - M(X_i))(X_j - M(X_j))\right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{M[(X_i - M(X_i))^2]}_{=\sigma^2(X_i)} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{M[(X_i - M(X_i))(X_j - M(X_j))]}_{=0} = \end{aligned}$$

(a páronkénti korrelálatlanság miatt)

$$= \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n).$$

IV.9 A NAGY SZÁMOK TÖRVÉNYE

IV.9.1 A Csebisev-egyenlőtlenség

A következőkben kiszámítjuk, hogy mekkora valószínűséggel tér el a valószínűségi változó a várható értéktől egy előírt, egyébként tetszőleges pozitív számnál jobban.

Legyen ε tetszőleges pozitív szám, kiszámítjuk annak a valószínűségét, hogy

$$|X - M(X)| \geq \varepsilon$$

legyen.

Jelöljük a rövidség kedvéért az X valószínűségi változó $M(X)$ várható értékét m -mel.

A $P(|X - m| \geq \varepsilon)$ valószínűség meghatározása végezzük ki $\sigma^2(X)$ szórásnégyzetet.

$$\sigma^2(X) = \sum_i (x_i - m)^2 p_i,$$

ahol az x_i -k az X valószínűségi változó lehetséges értékei, a p_i -k pedig a megfelelő valószínűségek. A fenti összegben hagyjuk el azokat az összeadandókat, amelyekre $|x_i - m| < \varepsilon$. Ezáltal összegünk értéke általában csökken:

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= \sum_i (x_i - m)^2 p_i \geq \sum_{|x_i - m| \geq \varepsilon} (x_i - m)^2 p_i \\ &\geq \sum_{|x_i - m| \geq \varepsilon} \varepsilon^2 p_i = \varepsilon^2 \sum_{|x_i - m| \geq \varepsilon} p_i = \varepsilon^2 P(|X - m| \geq \varepsilon), \end{aligned}$$

ahol a $\sum$ -jel alatti $|x_i - m| \geq \varepsilon$ azt jelenti, hogy az összegezést azokra az i indexekre kell már csak kiterjesztenünk, amelyekre az $|x_i - m| \geq \varepsilon$

egyenlőtlenségünk fennáll. Az utolsó összeg, azaz $\sum_{i=1}^n p_i$ éppen a

$$|X - m| \geq \varepsilon$$

esemény valószínűsége.

Ennélfogva

$$P(|X - m| \geq \varepsilon) = \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

Ez a Csebisev-féle egyenlőtlenség.

Ha $\varepsilon = \sigma \cdot \sigma(X)$, akkor a Csebisev-egyenlőtlenség a következő alakot veszi fel:

$$P(|X - m| \geq \sigma \cdot \sigma(X)) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\sigma^2 \sigma^2(X)} = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Legyen pl. $\sigma = 3$, akkor

$$P(|X - m| \geq 3 \cdot \sigma(X)) \leq \frac{1}{9} = 0,11 \dots$$

Tehát bármely valószínűségi változóra $\frac{1}{9}$ -nél nem nagyobb annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó a várható értéktől a szórás háromszorosánál jobban eltérjen.

IV.9.2. A nagy számok gyenge törvénye

Alkalmazzuk a Csebisev-egyenlőtlenséget a binomiális esemény-sémára, azaz végezzünk n számú egymástól független kísérletet. Legyen valamely A esemény bekövetkezésének valószínűsége p , legyen továbbá az X_j valószínűségi változó értéke 1, ha a j -edik kísérlet alkalmával az A esemény bekövetkezik, és $X_j = 0$, ha a j -edik kísérlet alkalmával A nem következik be ($j = 1, 2, 3, \dots, n$). Tekintsük a

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

valószínűségi változót. Mint már tudjuk, Z_n várható értéke p , szórás

valószínűségi változót. Mint már tudjuk, Z_n várható értéke p , szórásnégyzete pedig a X_1 -k függetlensége miatt $\frac{pq}{n}$. U1.

$$\sigma^2(Z_n) = \frac{1}{n} \left\{ \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n) \right\} =$$

$$= \frac{1}{n} : (pq + pq + \dots + pq) = \frac{n \cdot pq}{n^2} = \frac{pq}{n}.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint:

$$P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{pq}{n \varepsilon^2}.$$

Az $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ összeg értéke megadja, hogy az n számú kísérlet alkalmával az A esemény hány ízben következett be. A Z_n valószínűségi változó értéke tehát az A esemény relatív gyakorisága az n számú kísérleten belül. Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ szám értékét és növeljük a kísérletek számát; n -et minden határon túl. (Természetesen ekkor az $X_1, X_2, \dots, X_n$ egymástól teljesen független valószínűségi változók száma is minden határon túl növekszik.) A Csebisev-egyenlőtlenség most a következőt mondja:

$$P \left(\left| \text{a } A \text{ esemény relatív gyakorisága} - P(A) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{pq}{n \varepsilon^2} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow +\infty,$$

azaz a kísérletek számának minden határon túl való növelése esetén annak a valószínűsége, hogy a relatív gyakoriság az esemény valószínűségétől tetszőleges (de fix) $\varepsilon > 0$ számnál jobban eltérjen, a zérus felé konvergál.

Az $\varepsilon > 0$ számot tetszőleges kicsinynek választva, de azután rögzítve, még tudunk adni olyan N küszöbindexet, hogy $n > N$ esetén a $\frac{pq}{n \varepsilon^2}$ érték tetszőleges kicsiny legyen, azaz a

$$P \left(\left| Z_n - p \right| \geq \varepsilon \right)$$

valószínűség tetszőleges kicsiny legyen.

A most elmondottak képezik a nagy számok un. gyenge törvényét.

(Csak a matematika íránt érdeklődőknek.)

Az előbbi, egymástól teljesen független kísérletek sorozatához, amelynél most már a kísérletek n számát sem korlátozzuk, megkonstruáljuk az Ω eseményteret. Egy kísérletsorozatot a 0 és 1 számok végtelen sorozatával szimbolizálunk: A sorozat j -edik helyén 1 áll, ha a j -edik kísérletnél az A esemény bekövetkezik és 0 áll, ha a j -edik kísérletnél az A esemény nem következik be. Az Ω eseménytér az összes ilyen 0-ból és 1-ből álló végtelen sorozatok halmaza.

Egy ilyen sorozatot a $(j_1 j_2 j_3 \dots j_n \dots)$ alakban írhatunk fel, ahol j_i értéke +1 vagy 0 aszerint, hogy az i -edik kísérlet eredménye A vagy $\bar{A}$. Rendeljük hozzá a $(j_1 j_2 j_3 \dots j_n \dots)$ sorozathoz a $[0, 1]$ intervallumnak azt a valós számát, amelynek diadikus (2-es számrendszerbeli) előállításá éppen ez a sorozat. Ez a szám tehát a következő:

$$\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + \frac{j_3}{2^3} + \dots + \frac{j_n}{2^n} + \dots$$

Látható ebből a hozzárendelésből, hogy az Ω eseménytér elemi eseményeinek a halmaza nem megszámlálható, hiszen ezen elemi események halmaza olyan számosságú, mint a valós számok halmaza. Igaz, hogy az elemi események és a $[0, 1]$ valós számainak az itt bemutatott egymáshoz rendelése csak a diadikus racionális számok egy részétől eltekintve kölcsönösen egyértelmű, ui. pl. a

$$j_1 j_2 \dots j_k \underbrace{0 1 1 1 1 \dots}_{\text{csupa 1}}$$

és a

$$j_1 j_2 \dots j_k \underbrace{1 0 0 0 0 \dots}_{\text{csupa nulla}}$$

sorozatok ugyanazt a

$$\frac{j_1}{2^1} + \frac{j_2}{2^2} + \dots + \frac{j_k}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

valós számot jelentik, míg mint sorozatok nyilván különböznek egymástól, hiszen az első sorozatnál a $(k+1)$ -edik kísérletnél az A esemény nem

következik be, és azután minden kísérlet kimenetele A ; a második sorozatnál ellenben a $(k+1)$ -edik kísérlet eredménye A és utána az összes többi kísérlet eredménye $\bar{A}$.

Igy tehát a $[0,1]$ valós számai és a végtelen eseménysorozatok között kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesítettünk, kivéve a fenti alakú diadikus racionális számokat, amelyek mindegyikének két különböző eseménysorozat felel meg. (Ezek a diadikus racionális számok pontosan azok, amelyek felírhatók véges diadikus tört gyanánt, azaz úgy, hogy véges számú diadikus számjegy után csupa zérus számjegy áll a diadikus tört előállításukban. A legutolsó értékes számjegy nyilvánvalóan az 1-es, ha ezt az utolsó 1-et 0-val helyettesítjük és utána csupa 1-es számjegyet írunk, ugyanazt a számot kapjuk.)

Ez a kétértelműség nem okoz semmilyen problémát, mert az összes ilyen elemi események halmazának, ahol tehát ez a kettősség fennáll, nulla a valószínűségi mértéke. Ezen elemi események halmaza ui. megszámlálhatóan végtelen, lévén a racionális számok halmaza megszámlálható, és az Ω eseménytér minden elemi eseménye zérus valószínűségű. Ennélfogva ezen megszámlálhatóan végtelen sok elemi esemény halmazának is nulla a valószínűsége. (Lásd a valószínűségszámítás összegztételét megszámlálhatóan végtelen sok páronként diszjunkt eseményre.)

Annak belátása, hogy az Ω eseménytér minden egyes elemi eseménynek nulla a valószínűsége, a következőképp történhet. Legyen e_0 egy konkrét, de egyébként tetszőleges elemi esemény, azaz a 0 és az 1 (vagy a A és $\bar{A}$) jeleknek egy konkrét, de egyébként tetszőleges végtelen sorozata. Minthogy végtelen sorozatról van szó, az e_0 sorozat vagy az 1 jelből

(a A jelből), vagy a 0 jelből (az $\bar{A}$ jelből), esetleg mindkettőből, végtelen sokat tartalmaz. Tegyük fel, hogy az e_0 -sorozatban végtelen sok 1-es

(A -jel) van. Az e_0 -sorozat első n jele között legyen k_n számú 1-es és $n-k_n$ számú 0 jel. Tekintsük mindazon elemi események E_n halmazát (azt a E_n véletlen eseményt), amely elemi események végtelen sorozat előállításában az első n jel azonos az e_0 -sorozat első n -jelével. Lévén $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ és figyelembe véve az egyes kísérletek függetlenségét, az E_n esemény valószínűsége:

$$P(E_n) = p^{k_n} q^{n-k_n}.$$

Minthogy minden n -re $e_0 \in E_n$, azért az egyetlen e_0 elemből álló $\{e_0\}$ véletlen eseményre $\{e_0\} \subset E_n$; így

$$P\{e_0\} < P(E_n) = p^n q^{n-k} \leq p^n$$

a $0 < p < 1$ és a $0 < q < 1$ egyenlőtlenségek miatt. Feltételeinek szerint

$\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = +\infty$, így tehát $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^{k_n} = 0$. Könnyen belátható, hogy

$k_n \rightarrow +\infty$ monoton növekvően, azaz $k_n \leq k_{n+1}$.

Fentiek eredményeként tehát $P\{e_0\} = 0$ adódik.

Teljesen hasonlóan okoskodunk akkor is, ha az e_0 sorozat végtelen sok 0 jelet ($\bar{A}$ jelet) tartalmaz. Az X_j valószínűségi változót az Ω eseménytérben a következőképpen definiáljuk: Az Ω eseményteret írjuk fel két

diszjunkt halmaz összegeként $\Omega = H_1^{(j)} + H_2^{(j)}$, $H_1^{(j)} H_2^{(j)} = \emptyset$, ahol a $H_1^{(j)}$ halmaz mindazon elemi eseményekből áll, amelyek sorozatelőállításánál a sorozat j -edik helyen 1-es áll, a $H_2^{(j)}$ halmaz mindazon elemi eseményekből áll, amelyek sorozat-előállításában a j -edik helyen 0 áll. (Ez megfelel annak, hogy a j -edik kísérletnél a A , illetve a $\bar{A}$ esemény következik be.)

Legyen X_j értéke a $H_1^{(j)}$ halmaz elemi eseményein 1, a $H_2^{(j)}$ halmaz elemi eseményein 0. Ez a definíció minden egyes $j = 1, 2, \dots$ indexre vonatkozik. Ezzel mindegyik X_j valószínűségi változót az Ω -eseménytérben eredeti értelmének megfelelően definiáltuk.

Az előbb bevezetett $Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ valószínűségi változók

($n = 1, 2, \dots$) a nagy számok imént tárgyalt gyenge törvénye értelmében látszólag az eseménytér pontjaiban (elemi eseményein) a p határértékhez konvergálnak. Ez pontosabb megfigyelésnél általában nem bizonyul helyénvalónak, és most néhány sorban szeretnénk erre a kérdésre részletesebben rátérni.

A Z_n valószínűségi változó akkor konvergál a p határértékhez az Ω -eseménytér valamely pontjában (elemi eseményén), ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz bizonyos N küszöb-indextől kezdve minden $n > N$ indexre $|Z_n - p| < \varepsilon$ fennáll.

Az Ω eseménytér valamely halmazán (véletlen eseményén)

$Z_n \rightarrow p$, ha az előbbi egyenlőtlenség az illető véletlen esemény minden

egyes elemi eseményére fennáll, ahol általában a N küszöb-index az egyes elemi eseményektől függ.

Ha tehát egy $e \in \Omega$ elemi eseményen a $\{Z_n\}$ valószínűségi változók sorozata konvergál a p számhoz, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N küszöbindex, hogy minden $k \geq 1$ természetes számra fennáll a

$$|Z_{N+k}(e) - p| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség, azaz a $|Z_{N+1}(e) - p|, |Z_{N+2}(e) - p|, |Z_{N+3}(e) - p|, \dots$

számok felső határa, szuprémuma nem lehet nagyobb ε -nál:

$$\sup_{k \geq 1} |Z_{N+k}(e) - p| \leq \varepsilon.$$

($Z_N(e)$ jelenti a Z_n valószínűségi változó értékét az e elemi eseményen, az Ω eseménytér e pontjában.)
Ha bevezetjük a

$$\zeta_N(e) = \sup_{k \geq 1} |Z_{N+k}(e) - p|$$

valószínűségi változót, akkor az Ω eseménytér valamely $e \in \Omega$ pontjában

$$Z_n(e) \rightarrow p$$

pontosan akkor, ha

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \zeta_N(e) = 0.$$

Az Ω eseménytér valamely $A \subset \Omega$ véletlen eseményén $Z_n \rightarrow p$ pontosan akkor, ha A minden egyes $e \in A$ elemi eseményén

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \zeta_N(e) = 0.$$

Könnyű belátni, hogy a $\{\zeta_N(e)\}$ függvénysorozat monoton fogyó;
 $\zeta_N(e) \geq \zeta_{N+1}(e)$ minden N -re. Ha jól megnézzük a nagy számok gyentörvényét, akkor általában nem a most elmondottakat tapasztaljuk. A nagy számok gyenge törvénye ul. a következőt mondja:

Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy $|Z_n - p| \geq \varepsilon$ legyen tetszőlegesen előírt $\varepsilon > 0$ számra, az n index $+\infty$ felé történő növekedésével zérushoz tart, vagyis megadva egy tetszőlegesen kicsiny $\delta > 0$ számot, ehhez létezik olyan N küszöbindex, hogy az alábbi egyenlőtlenségek mind igazak:

$$P(|Z_{N+1} - p| \geq \varepsilon) < \delta, \quad P(|Z_{N+2} - p| \geq \varepsilon) < \delta, \quad \dots$$

$$P(|Z_{N+2} - p| \geq \varepsilon) < \delta, \quad \dots, \quad P(|Z_{N+k} - p| \geq \varepsilon) < \delta, \quad \dots$$

és persze, amint $\delta \rightarrow 0$, az N küszöbindex tart $+\infty$ -hez. A nagy számok gyenge törvénye szerint tehát a

$$(|Z_{N+1} - p| \geq \varepsilon), (|Z_{N+2} - p| \geq \varepsilon), (|Z_{N+3} - p| \geq \varepsilon), \dots$$

$$\dots, (|Z_{N+k} - p| \geq \varepsilon), \dots$$

véletlen események mindegyikének igen kicsiny ($< \delta$) a valószínűsége, de azok az e elemi események, amelyek ezeket a véletlen eseményeket realizálják, az $N+k$ index változásával mindig mások és mások lehetnek.

Előfordulhat például, hogy az e elemi események egy halmazán $|Z_{N+1}(e) - p| \geq \varepsilon$, de már $|Z_{N+2}(e) - p| < \varepsilon$, és még sok k -ra

$|Z_{N+k}(e) - p| < \varepsilon$ ugyanezen a halmazon.

Világosabb a dolog a konvergencia kérdését illetően, ha a $(|Z_n - p| \geq \varepsilon)$ események helyett a komplementer $(|Z_n - p| < \varepsilon)$ eseményeket is figyelembe vesszük. Természetesen, ha

$$P(|Z_n - p| \geq \varepsilon) < \delta,$$

akkor

$$P(|Z_n - p| < \varepsilon) > 1 - \delta.$$

A nagy számok gyenge törvénye szerint tehát tetszőleges pozitív ε -ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - p| < \varepsilon) = 1,$$

azaz tetszőlegesen kicsiny $\delta > 0$ számot előírva, ehhez van olyan N küszöbindex, hogy mindegyik

$$P(|Z_{N+1} - p| < \varepsilon) > 1 - \delta, P(|Z_{N+2} - p| < \varepsilon) > 1 - \delta, \dots$$

$$P(|Z_{N+k} - p| < \varepsilon) > 1 - \delta, \dots$$

egyenlőtlenség igaz. Előfordulhat azonban, hogy bizonyos $e \in \Omega$ elemi eseményeken, amelyeken $|Z_{N+1}(e) - p| < \varepsilon$, már $|Z_{N+2}(e) - p| > \varepsilon$; általában a nagy számok gyenge törvénye nem zárja ki annak a lehetőségét, hogy a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - p| \geq \varepsilon) = 0$$

egyenlőség bármely $\varepsilon > 0$ -ra való fennállása mellett az eseménytér akár minden e elemi eseményén végtelen sok n_k indexre:

$$|Z_{n_k}(e) - p| \geq \varepsilon$$

igaz, ahol az $\{n_k\}$ indexsorozat az egyes e elemi eseményektől függ. Más szóval a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - p| \geq \varepsilon) = 0$$

egyenlőségnek bármely pozitív ε -ra való fennállása mellett előfordulhat, hogy az Ω eseménytér akár minden $e \in \Omega$ elemi eseményére a

$$\zeta_N(e) = \sup_{k \geq 1} |Z_{N+k}(e) - p|$$

függvények értéke minden N indexre egy fix pozitív számnál nagyobb marad, sőt olyan eset is előfordulhat, hogy

$$\zeta_N(e) = +\infty$$

minden $e \in \Omega$ elemi eseményre és minden N indexre. Ez azt jelenti tehát, hogy a kísérletek számát nem korlátozva, minden egyes elemi eseménynek, azaz az A és $\bar{A}$ jelek minden egyes végtelen sorozatánál lehetséges az a jelenség, hogy végtelen sok ízben fog az A esemény relatív gyakorisága jelentős mértékben eltérni az A esemény valószínűségétől a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - p| \geq \varepsilon) = 0$$

egyenlőség ellenére.

Mielőtt ilyen jelenségre konkrét példát adnánk, megadjuk a nagy számok gyenge törvényében foglalt ún. sztochasztikus konvergencia általános definícióját.

Azt mondjuk, hogy a $Z_1, Z_2, \dots, Z_n \dots$ valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál valamely Y valószínűségi változóhoz (amely lehet azonosan konstans is) az Ω eseménytérben, ha tetszőlegesen $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ számokat (általában egymástól függetlenül) előírva, létezik olyan (ε -tól és δ -tól általában függő) N küszöbindex, hogy minden $n > N$ indexre

$$P(|Z_n - Y| \geq \varepsilon) < \delta$$

érvényes.

Ez azt jelenti pontosan, hogy mindazon elemi események halmazának valószínűségi mértéke kisebb a δ számnál, amely elemi eseményeken a Z_n valószínűségi változó az Y határfüggvénytől ε -nál jobban eltér. Ezeknek az elemi eseményeknek a halmaza azonban, amelyekre ez az ε -nál nagyobb eltérés bekövetkezik, az n index változásával az Ω eseménytérben általában maga is változhat, az n index változásával más és más halmaz lehet, ha $\varepsilon > 0$ fix és $\delta \rightarrow 0$, akkor

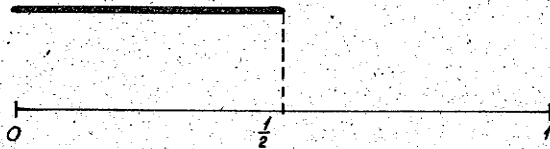
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - Y| \geq \varepsilon) = 0.$$

Látható, hogy a sztochasztikus konvergencia fogalmával a nagy számok eddig megismert gyenge törvénye így is fogalmazható: a $\{Z_n\}$ valószínűségi változók sorozata a Ω eseménytérben sztochasztikusan konvergál a p valószínűség értékéhez.

Előfordulhat az az érdekes jelenség is, hogy a $\{Z_n\}$ valószínűségi változók sorozata a Ω eseménytér egyetlen elemi eseményén sem konvergál az Y valószínűségi változó értékéhez a sztochasztikus konvergencia ellenére. Szolgáljon erre a következő példa.

Legyen az Ω eseménytér a számegyenes $[0,1]$ intervalluma, legyenek elemi események a $0 \leq x \leq 1$ valós számok, a véletlen események a $[0,1]$ -intervallum Borel-halmazai. (Ez utóbbi egyébként példánk megértését nem érinti.)

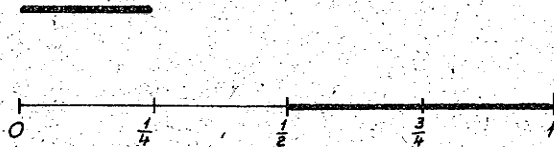
Egy $(a, b) \subset [0, 1]$ intervallum mint véletlen esemény valószínűsége legyen egyenlő az intervallum $b - a$ hosszúságával. (Egy tetszőleges Borel-halmaznak mint véletlen eseménynek a valószínűsége legyen egyenlő a halmaz Lebesgue-féle mértékével, amely körülmény szintén nem befolyásolja példánk megértését.) Bevezetjük a következő függvényeket, mint valószínűségi változókat.



Legyen

$$X_1^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

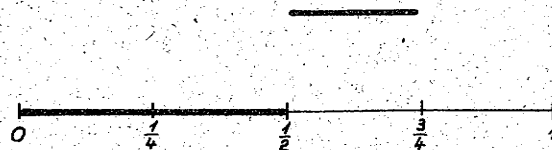
43. a ábra



Legyenek:

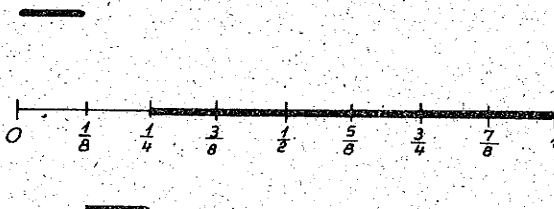
$$X_1^{(2)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ -1, & \text{ha } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

43. b ábra



$$X_2^{(2)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, \\ -1, & \text{ha } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

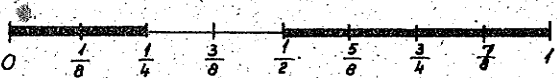
43. c ábra



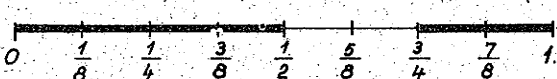
Legyenek

$$X_1^{(3)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{8}, \\ -1, & \text{ha } \frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

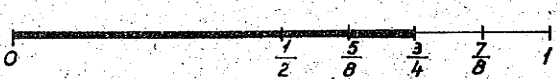
43. d ábra

$$X_2^{(3)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{4} \text{ és} \\ & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{8}, \\ -1, & \text{ha } \frac{3}{8} \leq x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$


43.e ábra

$$X_3^{(3)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ és} \\ & \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{8}, \\ -1, & \text{ha } \frac{5}{8} \leq x < \frac{3}{4}. \end{cases}$$


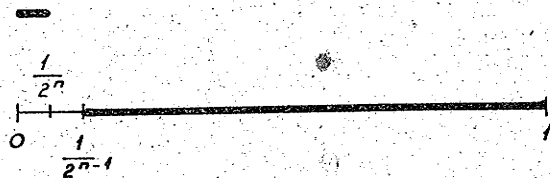
43.f ábra

$$X_4^{(3)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{3}{4}, \\ 1, & \text{ha } \frac{3}{4} \leq x < \frac{7}{8}, \\ -1, & \text{ha } \frac{7}{8} \leq x \leq 1. \end{cases}$$


43.g ábra

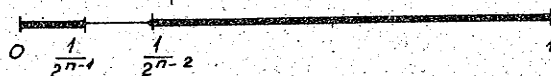
Legyenek:

$$X_1^{(n)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2^n}, \\ -1, & \text{ha } \frac{1}{2^n} \leq x < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{2^{n-1}} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



43. h ábra

$$X_2^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2^{n-1}} \text{ és} \\ & \text{ha } \frac{1}{2^{n-2}} \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2^{n-1}} \leq x < \frac{3}{2^n}, \\ -1, & \text{ha } \frac{3}{2^n} \leq x < \frac{1}{2^{n-2}}. \end{cases}$$



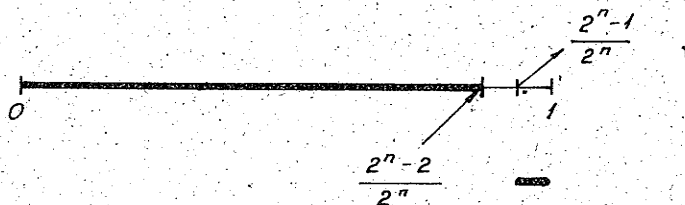
43.1 ábra

.....

.....

.....

$$X_{2^{n-1}}^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{2^n - 2}{2^n} \\ 1, & \text{ha } \frac{2^n - 2}{2^n} \leq x < \frac{2^n - 1}{2^n} \\ -1, & \text{ha } \frac{2^n - 1}{2^n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



43. j ábra

Folytassuk ezt az eljárást n növelésével minden határon túl; látjuk, hogy az $X_i^{(n)}(x)$ -tipusú függvények ($i = 1, \dots, 2^{n-1}$) csak egy $\frac{1}{2^{n-1}}$ hosszúságú intervallumban különböznek nullától, de ez az intervallum mindig másutt és másutt van, a $[0, \frac{1}{2^{n-1}})$ kiinduló helyzetből eltolódik jobbra és végső pozíciója a $[\frac{2^n - 2}{2^n}, 1]$ intervallum.

Az $X_i^{(n)}$ függvényeket valószínűségi változóknak tekintve, látjuk, hogy annak a véletlen eseménynek a valószínűsége, hogy $|X_1^{(n)}| = 1$, $\frac{1}{2^{n-1}}$ -gyel egyenlő és így $n \rightarrow +\infty$ esetén zérushoz tart, jöllehet a

$$X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, X_1^{(3)}, X_2^{(3)}, X_3^{(3)}, X_4^{(3)}, \dots, X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_{2^{n-1}}^{(n)} \dots$$

valószínűségi változók sorozata, mint függvénysorozat a $[0, 1]$ intervallum, azaz az Ω eseménytér egyetlen pontjában sem konvergál, hiszen bármelyik x pontot tekintünk is, akármilyen nagy N indexen túl is lesz (mégpedig végtelen sok) olyan $n > N$ és i index, hogy

$$|X_i^{(n)}(x)| = 1.$$

Tehát az $\{X_i^{(n)}(x)\}$ valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál az $Y \equiv 0$ függvényhez, de Ω egyetlen pontjában sem konvergál. Ennek okát példánk világosan megmutatja. Az $|X_i^{(n)}| = 1$ véletlen esemény

az i index $i = 1$ -től $i = 2^{n-1}$ -ig történő változásakor más és más intervallum lesz, ezek az intervallumok végig futnak a $[0; 1]$ intervallumon, majd az n index növekedésével ez a folyamat megismétlődik, de most már az $|X_i^{(n)}| = 1$ eseményt ábrázoló intervallum megrövidül. A $[0, 1]$ intervallum minden x pontja végtelen sok ízben pontja lesz $|X_i^{(n)}| = 1$ véletlen eseményt ábrázoló intervallumnak, ezért egyetlen x pontban sem konvergál a

$\{X_i^{(n)}\}$ függvénysorozat.

Példánkat még élesíthetjük azzal, ha az $X_i^{(n)}(x)$ függvények nullától különböző értékeket nem $+1$ -nek és -1 -nek választjuk, hanem pl. $+2^n$ -nek és -2^n -nek. Ekkor végtelen sok n és i indexre kapunk minden x pontban egyre nagyobb eltéréseket a nullától.

Példánkban az egyes $X_i^{(n)}$ valószínűségi változók várható értéke nulla, hiszen

$$P(X_i^{(n)} = 0) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$P(X_i^{(n)} = 1) = \frac{1}{2^n},$$

$$P(X_i^{(n)} = -1) = \frac{1}{2^n},$$

és ugyancsak nulla minden $X_i^{(n)}$ várható értéke, ha $X_i^{(n)} + 1$ és -1 értékei helyett az előbb említett $+2^n$ és -2^n értékeket veszünk.

Nézzük meg példánknál a

$$\zeta_N(x) = \sup |X_i^{(n)}(x)|$$

$$(n \geq N; i = 1, \dots, 2^{n-1})$$

függvényt! Tetszőleges $x \in [0, 1]$ számnál (elemi eseménynél) végtelen sok n és i indexre lesz $|X_i^{(n)}(x)| = 1$, illetve $|X_i^{(n)}(x)| = 2^n$, ezért minden N indexre és bármely $x \in [0, 1]$ pontra:

$$\zeta_N(x) = \sup_{n \geq N} |X_1^{(n)}(x)| = 1,$$

illetőleg

$$\zeta_N(x) = \sup_{n \geq N} |X_1^{(n)}(x)| = +\infty.$$

Akármilyen nagy $M > 0$ számot adjunk is meg, ul. elég nagy n -re

$$2^n > M,$$

és bármely x pontra lesz az $X_1^{(n)}(x)$ függvények között egy, amelynek abszolút értéke az x helyen 2^n .

A $\{\zeta_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ valószínűségi változókból álló sorozatnak mindegyik $\zeta_N(x)$ függvénye tehát az Ω eseménytér minden elemi eseményén $+1$, illetve $+\infty$, annak ellenére, hogy a $\{X_1^{(n)}(x)\}$ valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál nullához.

Megjegyezzük, hogy a nagy számok gyenge törvénye általánosabb jellegű, mint az itt kimondott törvény. Egy általánosabb feltételek mellett kimondott alakja Markov orosz matematikustól ered és a következőképp hangzik:

Ha az $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ valószínűségi változók sorozatára fennáll a

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}^2 \left(\sum_{k=1}^n X_k \right) = 0$$

egyenlőség, akkor a

$$(**) \quad Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k) \quad (n=1, 2, \dots)$$

valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál a nullához.

Valóban: az $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ valószínűségi változó várható értéke az egyes $M(X_k)$ várható értékek számtani közepe, és tudjuk, hogy

$$\sigma^2\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n} \sigma^2\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$$

Emlékeztetünk arra, hogy ha c tetszőleges szám, a cX valószínűségi változó szórásnégyzete $c^2 \sigma^2(X)$. Ennélfogva a Csebiszev-egyenlőtlenség szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{n^2 \varepsilon^2},$$

illetve

$$P\left\{\left|Z_n\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{n^2 \varepsilon^2}$$

Adatván $\varepsilon > 0$ és $\sigma > 0$ tetszőlegesen, válasszuk az n számot olyan nagyra, hogy

$$\frac{\sigma^2\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{n^2 \varepsilon^2} < \sigma$$

legyen, ami (*) feltételünk miatt lehetséges.

Ha speciálisan a valószínűségi változók $\{X_k\}_k^\infty$ sorozata páronként korrelálatlan, akkor - mint tudjuk - minden n -re fennáll: a

$$\sigma^2\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \sigma^2(X_k).$$

(Lásd IV.8.6.6.)

Ha tehát a páronként korrelálatlan $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ valószínűségi változók sorozatánál

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sigma^2(X_k)}{n} = 0,$$

akkor a (**) alatti valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál a nullához.

Ha mindegyik X_k valószínűségi változó azonos eloszlású, közös várható értékük $M(X_k) = m$, közös szórásnégyzetük $\sigma^2(X_k) = \sigma^2$, és a valószínűségi változók egymástól teljesen függetlenek, akkor

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m,$$

$$\frac{1}{n} \sigma^2 \left(\sum_{k=1}^n X_k \right) = \frac{n \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0,$$

Ha $n \rightarrow +\infty$, és ekkor lényegében a nagy számok gyenge törvényének eredetileg kimondott alakjához jutunk, amely tehát speciális esete a Markov-féle tételnek.

Ha a sztochasztikus konvergencia definíciójánál nem a

$$|Z_n - Y| \geq \varepsilon$$

véletlen eseményt, hanem a komplementer

$$|Z_n - Y| < \varepsilon$$

véletlen eseményt tekintjük, akkor a

$$P(|Z_n - Y| \geq \varepsilon) < \delta$$

egyenlőtlenség helyett a

$$P(|Z_n - Y| < \varepsilon) > 1 - \delta$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ha most a tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot rögzítjük és a $\delta > 0$ számot csökkentjük a nulla felé, akkor a sztochasztikus konvergencia definíciójának következő alakját kapjuk:

Valószínűségi változóknak egy $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozata sztochasztikusan konvergál az Y valószínűségi változóhoz, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra fennáll a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - Y| < \varepsilon) = 1$$

limeszreláció. Alkalmazva ezt a nagy számok eredetileg kimondott gyenge törvényére, azt mondhatjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy valamely A esemény relatív gyakorisága adott (tetszőleges) $\varepsilon > 0$ számnál kevesebből különbözzék az A esemény p valószínűségétől, a független kísérletek n számának minden határon túl való növelésével 1-hez konvergál:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\text{A relatív gyakorisága} - \text{A valószínűsége}| < \varepsilon) = 1.$$

Állításunkat jól szemlélteti az $\{X_i^{(n)}(x)\}$ függvénysorozat példája, amelynél az $X_i^{(n)}(x)$ függvények nullával egyenlők egy $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ hosszú-ságú intervallumon, illetve intervallumösszege (mindegyik $i = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ indexre), azaz 1-hez konvergál annak az eseménynek a valószínűsége, hogy $X_i^{(n)}(x)$ az azonosan nulla függvénytől ε -nál kevésbé különbözzék, ha már $0 < \varepsilon < 1$.

IV.9.3 A nagy számok erős törvénye

Felvetődik a kérdés, vajon nem igaz-e több a nagy számok gyenge törvényénél; pontosabban: vajon egy független kimenetelekből álló kísérletsorozatnál mindig el lehetünk-e készülvé arra, hogy akármilyen nagy számú kísérlet elvégzése után még mindig bekövetkezhet a relatív gyakoriságnak jelentős eltérése a szóban forgó A esemény p valószínűségétől? Vagy ez már nincs így, és esetleg a relatív gyakoriság minden egyes, korlátlanul folytatott kísérletsorozat esetén a szóban forgó A esemény p valószínűségéhez konvergál? Erre a kérdésre felel pozitív értelemben az eddignél jóval többet mondó tétel, a nagy számok ún. erős törvénye.

Még mielőtt megfogalmaznánk a tételt egy - Kolmogorovtól származó - eléggé általános alakjában, bevezetjük az 1 valószínűséggel történő konvergencia fogalmát.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a Ω eseménytér $\omega \in \Omega$ elemi eseményein az $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ valószínűségi változók sorozata 1 valószínűséggel (vagy másképpen kifejezve, az Ω eseménytérben majdnem mindenütt) konvergál a $Y(\omega)$ valószínűségi változóhoz (amely lehet azonosan konstans is Ω -ban), jelben:

$$P \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = Y(\omega) \right) = 1,$$

ha mindazon $\omega \in \Omega$ elemi események halmazának nulla a valószínűségi mértéke, amelyekre ez a konvergencia nem következik be.

Ha Ω -ból elhagyunk egy nulla valószínűségi mértékű véletlen eseményt, a visszamaradó 1 valószínűségű véletlen eseményt majdnem biztos véletlen eseménynek hívjuk.

Ha $X_n(\omega) \rightarrow Y(\omega)$ majdnem biztosan, azaz ha

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n(\omega) - Y(\omega)| = 0 \right) = 1,$$

akkor a

$$\zeta_N(\omega) = \sup_{n \geq N} (|X_n(\omega) - Y(\omega)|) \quad (N = 1, 2, \dots)$$

valószínűségi változók sorozata minden olyan $\omega \in \Omega$ pontban $N \rightarrow \infty$ esetén zérushoz tart, amely $\omega \in \Omega$ pontban $X_n(\omega) \rightarrow Y(\omega)$, tehát jelen esetben majdnem biztosan $\zeta_N(\omega) \rightarrow 0$, amint $N \rightarrow \infty$, azaz

$$P \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta_N(\omega) = 0 \right) = 1.$$

Láttuk, hogy a $\{X_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ valószínűségi változók sztochasztikus konvergenciája esetén általában nem ez a helyzet:

Bebizonyítható, hogy ha az $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat 1 valószínűséggel konvergál az Y -hoz, akkor sztochasztikusan is konvergál Y -hoz, de általában nem megfordítva, amint azt konkrét példánkkal megmutattuk. A "majdnem biztos", azaz "1 valószínűséggel" konvergencia tehát szűkebb fogalom, többet követel az $\{X_n\}_n$ sorozattól, mint a sztochasztikus konvergencia.

Most megfogalmazzuk a nagy számok erős törvényének Kolmogorov-tól származó alakját.

A nagy számok erős törvénye: legyenek a $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ valószínűségi változók teljesen függetlenek, várható értékük $M(X_n) = m_n$, szórásnégyzetük $\sigma^2(X_n) = \sigma_n^2$ és legyen a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2}$$

végtesen sor konvergens. Akkor igaz, hogy

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} \rightarrow 0\right) = 1,$$

ha $n \rightarrow \infty$

más szóval

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(X_1 - m_1) + (X_2 - m_2) + \dots + (X_n - m_n)}{n} = 0\right) = 1$$

Az első n valószínűségi változó számtani közepének az első n várható érték számtani közepétől való eltérése majdnem biztosan (az Ω eseménytérben majdnem mindenütt) zérushoz konvergál, ha $n \rightarrow \infty$.

Ezt a tételt nem bizonyítjuk. (A bizonyítást lásd pl. Prékopa: Valószínűségelmélet, vagy Rényi: Valószínűség-számítás c. könyvében.)

Ha speciálisan minden egyes X_n valószínűségi változó azonos eloszlású és egymástól teljesen független, $M(X_n) = p$, $\sigma^2(X_n) = \sigma^2$ minden n indexre, akkor teljesül Kolmogorov feltétele, mert a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^2}{n^2} = 6^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

végtelen sor konvergencia és ekkor tehát

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = p\right) = 1.$$

Ha pl. az $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ függvények azok a jólismert valószínűségi változók, amelyeknél $X_j = 1$, ha a j -ik kísérlet alkalmával valamely p -valószínűségű A esemény bekövetkezik, és $X_j = 0$, ha a j -ik kísérlet alkalmával nem következik be, továbbá a kísérletek egymástól teljesen függetlenek, akkor $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ egyenlő az A esemény relatív gyakoriságával az első n kísérletre vonatkozóan. Ez esetben a nagy számok erős törvénye azt mondja, hogy az A esemény relatív gyakorisága a valószínűséggel (az Ω eseménytérben majdnem mindenütt) konvergál az A esemény p valószínűségéhez.

Ha tehát az A és $\bar{A}$ jelekből álló végtelen sorozatok teljes halmazából, azaz a szóban forgó Ω eseménytérből ezen végtelen sorozatok egy alkalmas, nulla valószínűségű részhalmazát kirekesztjük, akkor a többi sorozat teljes, 1 valószínűségű H halmaza a következő tulajdonságu: a H halmaz bármelyik végtelen sorozata (elemi eseménye) olyan szerkezetű, tehát az A és $\bar{A}$ jelek úgy következnek a sorozatban, hogy az A esemény relatív gyakorisága konvergál A -nak p valószínűségéhez, amint a kísérletek számát korlátlanul növeljük. A H halmaz végtelen sorozatainál tehát nem következhet be az a jelenség, hogy akármilyen nagy kísérletszám után is a relatív gyakoriság jelentős mértékben eltér a p valószínűségtől, ami a nagy számok gyenge törvénye szerint nincs kizárva.

Végezetül megemlítjük, hogy a sztochasztikus konvergenciát szokták még "valószínűségi mértékben való konvergenciának" is nevezni. Maga ez a konvergenciafogalom Riesz Frigyes magyar matematikustól ered, aki a valós függvénytanban vezette be és mértékben való konvergenciának nevezte.

IV.10 AZ ELOSZLÁS- ÉS SÚRÚSÉGFÜGGVÉNY

IV.10.1 Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

IV.10.1.1 A nem folytonos eloszlás fogalma

Több példát láttunk arra vonatkozólag, hogy a valószínűségi változó lehetséges értékei egy valós számintervallumot teljesen kitölthetnek, illetve a valószínűségi változó bármely valós értéket felvehet. Pl. egy folyó vizállása bizonyos elvileg lehetséges minimális értéktől egy lehetséges maximális értékig folytonosan változhat, egy izzólámpa élettartama 0 órától (lényegében korlátlanul) folytonosan változhat, valamely mérésnél elkövetett hiba értéke minden valós számérték lehet. Az emberi életkor mint valószínűségi változó szintén folytonosan változik. A gyakorlati életben természetesen célszerűségi okokból csak bizonyos lehetséges értékeket regisztrálunk, ami azonban a szóban forgó valószínűségi változók folytonos természetét nem érinti.

A fenti esetekben az elemi események halmaza pl. valamely valós számintervallum vagy akár az egész számegyenes összes valós számából áll.

E példák után bevezetjük a következő definíciót:

Definíció. Ha a valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza nem megszámlálható, akkor azt mondjuk, hogy a valószínűségi változó nem-diszkrét eloszlású.

Megjegyezzük, hogy a nem-diszkrét eloszlás nem mindig azonos a később definiálandó folytonos eloszlás fogalmával.

Az eseménytérben szemlélve a dolgokat, nem-diszkrét eloszlású valószínűségi változó esetében az Ω eseménytér elemi eseményeinek a halmaza nem megszámlálható. Ilyen esetekben az egyes elemi események valószínűsége zérussal egyenlő - eltekintve elemi eseményeknek egy esetleges legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmazától. Pontosabban igaz a következő állítás: Ha az Ω eseménytér nem megszámlálhatóan végtelen sok elemi eseményből áll, akkor azoknak az elemi eseményeknek a halmaza, amely elemi események pozitív valószínűségi mértékkel bírnak, legfeljebb megszámlálhatóan végtelen. Ezt a következőképpen láthatjuk be:

Olyan elemi esemény, amelynek valószínűsége $> \frac{1}{2}$, legfeljebb egy van;
 olyan elemi esemény, amelynek valószínűsége $> \frac{1}{3}$, legfeljebb kettő van;
 olyan elemi esemény, amelynek valószínűsége $> \frac{1}{4}$, legfeljebb három van;

 olyan elemi esemény, amelynek valószínűsége $> \frac{1}{n}$, legfeljebb $(n-1)$ van
 stb.

Mindezekből látható, hogy az említett elemi események halmaza legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok elemből áll és tartalmazza az összes, pozitív valószínűségű elemi eseményt. (Ha ti. valamely e elemi esemény valószínűsége $P(e) > 0$, akkor létezik olyan természetes n szám, hogy $P(e) > \frac{1}{n}$.) Szokásos az ilyen pozitív valószínűségű elemi eseményeket "atomok"-nak nevezni. (Az "atom" általános fogalmát lásd: Rényi Alfréd Valószínűségszámítás c. könyvében.)

IV.10.1.2 Az eloszlásfüggvény definíciója és tulajdonságai

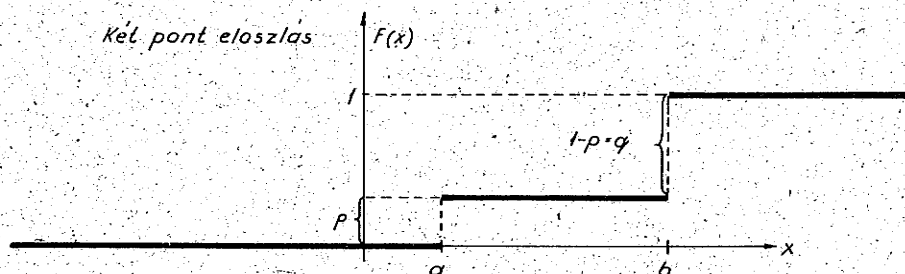
Tekintsünk egy tetszőleges X valószínűségi változót, tekintsük továbbá azt a véletlen eseményt, hogy X értéke kisebb egy tetszőleges x valós számnál: $(X < x)$. Ennek az eseménynek $P(X < x)$ valószínűségére igaz a következő: ha $x_1 < x_2$, akkor $P(X < x_1) \leq P(X < x_2)$, minthogy $(X < x_1) \subset (X < x_2)$, azaz a $(X < x_1)$ véletlen esemény mindig bekövetkezik, ha a $(X < x_2)$ véletlen esemény bekövetkezik.

Az $F(x) = P(X < x)$ függvényt az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük. Definíciónk szerint a $F(x)$ függvény monoton növekvő, nem-negatív. $F(x)$ értelméből kifolyólag igazak a következő állítások:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Az eloszlásfüggvény tehát az egész számegyenesen értelmezett, nulla-értéktől induló +1-ig monoton növekvő függvény.

Néhány ismert diszkrét-eloszláshoz tartozó eloszlás-függvény.
Két-pont eloszlás (44. ábra).



44. ábra

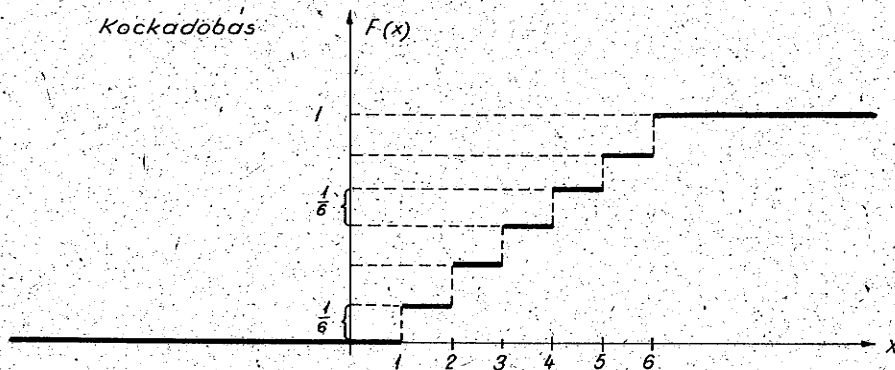
Az X valószínűségi változó csak két értéket vehet fel:

a -t és b -t, $P(a) = p$ $P(b) = 1 - p = q$.

$F(x) = 0$, ha $x \leq a$; $F(x) = p$ ha $a < x \leq b$;

$F(x) = 1$, ha $x > b$.

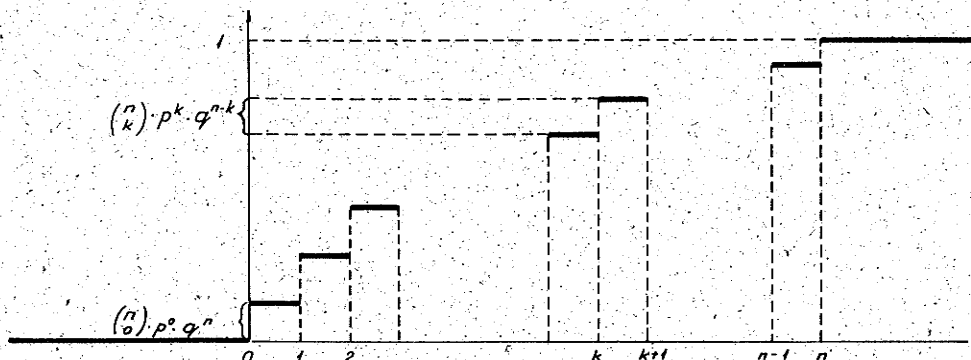
Kockadobás (45. ábra).



45. ábra

Binom-eloszlás (46. ábra).

Binom-eloszlás



46. ábra

Megjegyezzük, hogy a Poisson-eloszlásnál $F(x)$ nem-pozitív x -ekre zérus, és minden nem-negatív k egész számnál $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ nagyságu ugrása van.

Az eloszlásfüggvény néhány további tulajdonsága. Minden valósz x -re igaz, hogy

$$F(x) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} F(x-h) = F(x-0),$$

azaz az eloszlásfüggvény minden x helyen balról folytonos.

Legyen $E_n = (X < x_0 - \frac{1}{n})$, ahol x_0 tetszőleges, de rögzített valósz szám ($n = 1, 2, \dots$).

Legyen még $E_0 = \emptyset$. Látható, hogy $E_n \subset E_{n+1}$ minden n -re. Az $(X < x_0)$ véletlen esemény egyesítése a következő, páronként diszjunkt véletlen eseményeknek:

$$(X < x_0) = E_1 + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_2) + \dots + (E_n - E_{n-1}) + \dots$$

A valószínűségszámítás összege tétele, valamint $F(x)$ definíciója szerint:

$$\begin{aligned}
F(x_0) &= P(X < x_0) = P(E_1) + P(E_2 - E_1) + P(E_3 - E_2) + \dots + \\
&+ P(E_n - E_{n-1}) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n - E_{n-1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P(E_n - E_{n-1}) = \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} P(E_N), \text{ lévén } P(E_n - E_{n-1}) = P(E_n) - P(E_{n-1}) \text{ minden } n\text{-re.} \\
\text{Definíciónk szerint } P(E_N) &= P(X < x_0 - \frac{1}{N}) = F(x_0 - \frac{1}{N}), \text{ ezért}
\end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(E_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(x_0 - \frac{1}{N}) = F(x_0 - 0),$$

és ezzel igazoltuk, hogy

$$F(x_0) = F(x_0 - 0).$$

Bizonyításunk érvényes a $\lim_{h \rightarrow 0} F(x_0 - h)$ esetre is, amikor a h folytonosan változik, minthogy minden monoton függvénynek minden x helyen létezik mind bal oldali, mind jobb oldali határértéke.

Nézzük $F(x_0 + 0)$ jelentését, ahol x_0 - mint előbb - tetszőleges valós szám.

Évégett tekintsük az $A_n = (X < x_0 + \frac{1}{n})$ véletlen eseményeket ($n = 1, 2, \dots$). Definíciónk szerint $A_{n+1} \subset A_n$ minden n -re.

Világos, hogy az $(X \leq x_0)$ véletlen esemény metszete a $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ események végtelen sorozatának:

$$(X \leq x_0) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$

Az is világos, hogy

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \dots \cup (A_n - A_{n+1}) \cup \dots \cup A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$

A valószínűségszámítás összege tétele szerint

$$P(A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n - A_{n+1}) + P(X \leq x_0),$$

minthogy az egyes $(A_n - A_{n+1})$ halmazok páronként diszjunktak, továbbá

$$A_1 - A_2 - A_3 - \dots - A_n - \dots = (X \leq x_0),$$

és minthogy az $A_1 - A_2 - A_3 - \dots - A_n - \dots$ halmaz minden $(A_n - A_{n+1})$ halmazzal diszjunkt. Lévé

$$P(A_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P(A_n - A_{n+1}) + P(X \leq x_0),$$

a limeszjel mögötti összeg pedig nem más, mint

$$P(A_1) - P(A_2) + P(A_2) - P(A_3) + \dots + P(A_N) - P(A_{N+1}) = P(A_1) - P(A_{N+1}).$$

Áttérve a limeszre, kapjuk a következő eredményt:

$$P(A_1) = P(A_1) - \lim_{N \rightarrow \infty} P(A_{N+1}) + P(X \leq x_0),$$

illetve

$$P(X \leq x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(A_{N+1}).$$

Definíciók szerint

$$P(A_{N+1}) = P(X < x_0 + \frac{1}{N+1}) = F(x_0 + \frac{1}{N+1}),$$

ezért

$$P(X \leq x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(x_0 + \frac{1}{N+1}) = F(x_0 + 0).$$

Előbbi eredményeink szerint az eloszlásfüggvény ugrásaira fennáll, hogy

$$\begin{aligned} F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0) &= F(x_0 + 0) - F(x_0) = P(X \leq x_0) - \\ &- P(X < x_0) = P\{(X \leq x_0) - (X < x_0)\} = P(X = x_0). \end{aligned}$$

Az $F(x)$ ugrásai legfeljebb megszámlálható sokan lehetnek. Vagyis az x -tengelyen azoknak az x pontoknak a halmaza, amelyekben $F(x+0) - F(x) > 0$, legfeljebb egy megszámlálhatóan végtelen halmazt alkot. Ezt ugyanúgy láthatjuk be, mint azt a tényt, hogy az eseménytérben az "atomok" halmaza legfeljebb megszámlálható.

A matematika iránt jobban érdeklődők számára megjegyezzük, hogy minden monoton függvény legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok x helyen ugorhat, és minthogy minden monoton függvénynek minden x helyen létezik mind a bal oldali, mind a jobb oldali határértéke, azért minden monoton függvény egy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaztól eltekintve mindenütt folytonos.

Az eloszlásfüggvény segítségével szokás bevezetni az x -tengely bizonyos valós számhalmazainak a valószínűségi mértékét. Ez a következőképpen történik:

Az I. éves előadások folyamán megtanultuk, hogy a számegyenes nyílt halmazai véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok egymásba páronként át nem nyúló nyílt intervallum egyesítéseként ábrázolhatók. Legyen adva a számegyenesen (amelyen valamely $F(x)$ eloszlásfüggvény értelmezve van) egy A Borel-halmaz. Fedjük be ezt a A halmazt minden lehető módon nyílt halmazokkal. Tekintsünk egy konkrét ilyen befedő nyílt halmazt, amely tehát uniója (a_1, b_1) nyílt intervallumoknak:

$$\bigcup_i (a_i, b_i) = \text{a befedő nyílt halmaz.}$$

Tekintsük a

$$\sum_i [F(b_i) - F(a_i + 0)]$$

összeget; ezt az összeget az $F(x)$ eloszlásfüggvény ingadozásösszegének

nevezzük, a $\bigcup_i (a_i, b_i)$ nyílt halmazon, ahol $F(b_i) - F(a_i + 0) = P(a_i < X < b_i)$.

Az A halmaz minden egyes ilyen nyílt befedéséhez tartozik tehát az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek egy ingadozásösszege. Tekintsük az összes lehetséges nyílt befedését az A halmaznak és tekintsük a hozzájuk tartozó ingadozásösszegeket. Ezen ingadozásösszegek alsó határát a A Borel-halmaz valószínűségi mértékének nevezzük a $F(x)$ függvényre vonatkozólag:

$$P_F(A) = \inf_{\bigcup_i (a_i, b_i)} \sum_i [F(b_i) - F(a_i + 0)].$$

Ha a számegyenes valamely A^* Borel-halmazának $P_F(A^*)$ valószínűségi mértéke 1, akkor azt mondjuk, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvény az A^* halmazra koncentrált.

Pl. a két-pont eloszlás esetén az A^* halmaz az a és b pontból áll és az eloszlásfüggvény e két pontból álló halmazra koncentrált. A kockadobás esetében az A^* halmaz az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokból áll, a megfelelő eloszlásfüggvény e pontokból álló halmazra koncentrált. A binom-eloszlás esetében az A^* halmaz a 0, 1, 2, ..., n pontokból áll, és a szóban forgó $F(x)$ eloszlásfüggvény e pontokból álló halmazra koncentrált. A Poisson-eloszlás esetében az A^* halmaz a nem-negatív egész számok halmaza.

A következőkben egy egyszerű példát mutatunk olyan eloszlásfüggvényre, amely a racionális számok halmazára koncentrált.

Még mielőtt erre rátérünk, megjegyezzük, hogy minden olyan (nem szükségképp szigorúan) monoton növekvő függvény, amely a $-\infty$ -ben nulla a $+\infty$ -ben pedig 1, eloszlásfüggvény. (Ezt be lehet egyszerűen bizonyítani.) További előzetes észrevételek: minden valószínűségi változó egyértelműen definiálja a saját eloszlásfüggvényét, de egy adott konkrét eloszlásfüggvényhez általában több különböző valószínűségi változó tartozhat. Az ilyen valószínűségi változókat az előzőek folyamán már láttunk példákat.

Most rátérünk az említett eloszlásfüggvény megszerkesztésére. Irjuk fel a számegyenes összes racionális számát egy végtelen sorozatra: $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$. Legyen $\frac{1}{2^n}$ annak a valószínűsége, hogy az X valószínűségi változó értéke r_n :

$$p_n = P(X = r_n) = \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1;$$

tehát az X valószínűségi változó az irracionális számok teljes halmazát nulla valószínűséggel veszti fel. A megfelelő eloszlásfüggvény a következő:

$$F(x) = \sum_{r_n < x} P(X = r_n) = \sum_{r_n < x} p_n,$$

ahol az összegezés mindazokra az n indexekre kiterjesztendő, amelyeknek megfelelő racionális számok az x számnál kisebbek.

E példában az A^* halmaz szemmel láthatóan a racionális számok halmaza, az $F(x)$ eloszlásfüggvény a racionális számok halmazára koncentrált. Könnyű belátni, hogy az $F(x)$ függvény minden x irracionális helyen folytonos. Legyen ül. x tetszőleges irracionális szám és legyen adva $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen. Megmutatjuk, hogy $F(x+0) - F(x-0) < \varepsilon$, az $\varepsilon > 0$ tetszőleges volta miatt tehát $F(x+0) - F(x-0) = 0$. Legyen ül. N olyan nagy természetes szám, hogy

$$\sum_{n=1}^N p_n > 1 - \varepsilon$$

Az $r_1, r_2, \dots, r_N$ racionális számok mindegyike pozitív távolságra lévén x tekintett x irracionális számtól, ε távolságok között van egy legkisebb. ε legkisebb távolság negyedrésszével, mint sugárral írjunk az x pont köré egy (a, b) környezetet ($b - a = \frac{1}{2} \min_{1 \leq n \leq N} |r_n - x|$).

Az $r_1, r_2, \dots, r_N$ racionális számok mindegyike kívül esik az x számot közrefogó (a, b) intervallumon. Ennélfogva

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon, \text{ és lévén } F(x+0) - F(x-0) \leq F(b) - F(a),$$

a kívánt folytonosságot az x pontban bebizonyítottuk.

Fenti példa alapján egy új fogalmat vezetünk be. Azt mondjuk, hogy valamely $F(x)$ eloszlásfüggvény tiszta "atomos" eloszlásu, ha $F(x)$ egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen számhalmazra koncentrált. Legyenek ezek a számok $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (szokás ezeket a számokat a $F(x)$ eloszlásfüggvény atomjainak is nevezni), legyen továbbá

$$F(a_n + 0) - F(a_n) = P(X = a_n) = p_n > 0,$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

atomos eloszlás esetén.

Ha azonban az előbbi $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ számok az $F(x)$ eloszlásfüggvény összes ugráshelyei ugyan, de a megfelelő $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p$ összeg 1-nél kisebb:

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} p_n = p < 1,$$

(ugyhogy az $F(x)$ eloszlásfüggvény nincs koncentrálna az $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ számok halmazára), akkor legyen

$$F_a(x) = \frac{1}{p} \sum_{a_n < x} p_n,$$

ahol az összegezés mindazon n indexre kiterjesztendő, amelyekre $a_n < x$. Könnyen beláthatjuk, hogy $F_a(x)$ egy eloszlásfüggvény, mégpedig tiszta atomos eloszlásu. Tekintsük a következő eloszlásfüggvényt:

$$F_c(x) = \frac{F(x) - p F_a(x)}{q}, \quad \text{ahol} \quad q = 1 - p.$$

Lévéen

$$p F_a(x) = \sum_{a_n < x} p_n \leq F(x),$$

fennáll

$$F_c(x) \geq 0;$$

továbbá

$$F_c(x) (-\infty) = 0, \quad F_c(+\infty) = \frac{1 - p \cdot 1}{q} = 1,$$

ami $F_c(x)$ értelmezéséből közvetlenül leolvasható. $F_c(x)$ monoton növekvő, mert ha $x_1 < x_2$, akkor

$$F_c(x_1) \leq F_c(x_2).$$

Uí.

$$F(x_1) - p F_a(x_1) \leq F(x_2) - p F_a(x_2),$$

íll.

$$p[F_a(x_2) - F_a(x_1)] \leq F(x_2) - F(x_1);$$

ez pedig nyilvánvaló, mert az egyenlőtlenség bal oldala annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a X valószínűségi változó az x_1 és x_2 közé eső valamelyik a_n számértéket veszi fel, ez a valószínűség pedig nyilván nem nagyobb, mint annak az eseménynek a valószínűsége, hogy X az x_2 és x_2 számok közé eső valamelyik számértéket felveszi. Legutolsó egyenlőtlenségünkől visszafelé azonnal következik, hogy

$$F_c(x_1) \leq F_c(x_2).$$

$F_c(x)$ folytonos, mert $F(x)$ ugrásai azonosak $p \cdot F_a(x)$ ugrásaival. Így tehát

$$F(x) = p F_a(x) + q F_c(x) \quad (p+q=1).$$

Minden eloszlásfüggvény felírható tehát egy tiszta atomos eloszlásu és egy folytonos eloszlásfüggvény súlyozott összegeként.

IV.10.1.3 A várható érték és szórásnégyzet kifejezése az eloszlásfüggvénnyel

Tetszőleges X valószínűségi változó $M(X)$ várható értékét a következő formulával definiáljuk:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a x \, dF(x),$$

feltéve, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF(x) < +\infty,$$

ahol $F(x)$ a X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. (Az előbbi Stieltjes-integrálokra vonatkozólag lásd, a Matematika I. jegyzetet.)

Könnyű belátni, hogy a várható értéknek az a definíciója diszkrét X valószínűségi változó esetén régebbi definíciókkal megegyezik.

Ui. a Stieltjes-integrál definíciójából következik, hogy diszkrét eloszlás esetén, amikor is

$$P(X = x_i) = p_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$$

és

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF(x),$$

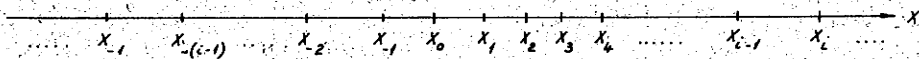
Hasonlóan az X valószínűségi változó szórásnégyzetét a

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \, dF(x)$$

Stieltjes-integrál definiálja.

Megjegyezzük, hogy a várható értékekre, valamint a szórásnégyzetekre kimondott összes tétel érvényben marad tetszőleges X valószínűségi változókra, mindössze a bizonyításokban a szummák helyett Stieltjes-integrálokat kell venni.

A várható érték előbbi definícióját a következő szemléletes magyarázattal próbáljuk kézenfekvővé tenni. Osszuk fel az x - tengelyt $\dots, x_{-1}, x_{-(i-1)}, \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots$ osztópontokkal részintervallumokra úgy, hogy az összes részintervallumok hosszainak felső határa 1-nél kisebb legyen. (47. ábra.)



47. ábra

Ezt a felső korlátot jelöljük σ -val, azaz legyen

$$\sigma = \sup_{-\infty < i < \infty} |x_i - x_{i-1}|.$$

Tudjuk, hogy

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = P(x_{i-1} \leq X < x_i);$$

az X valószínűségi változónak

$$[x_{i-1}, x_i)$$

intervallumba eső számértékeit reprezentáljuk valamilyen

$$x_{i-1} \leq \xi_i < x_i$$

számértékkel.

Ilyen módon X tényleges eloszlását megközelítjük egy diszkrét eloszlással: annak a valószínűségét, hogy X a ξ_i számot vegye fel, egyenlőnek vesszük az $F(x_i) - F(x_{i-1})$ különbséggel. Ennélfogva a közelítő eloszláshoz tartozó várható érték egyenlő lesz a

$$\sum_{-\infty < x_{i-1} < \infty} \xi_i [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

összeggel. Ha az előbbi felosztást minden határon túl finomítjuk abban az értelemben, hogy $\sigma \rightarrow 0$, akkor előbbi összegeink sorozata az

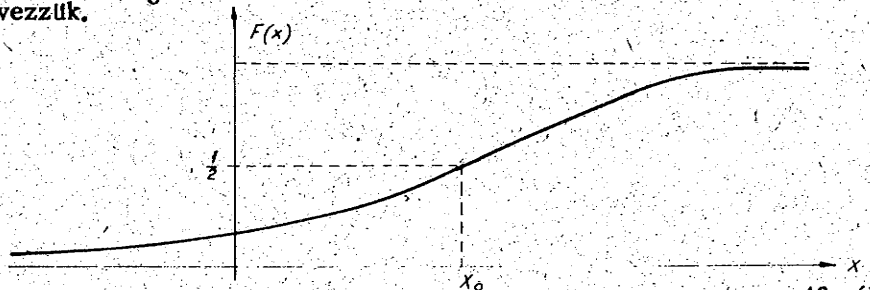
$$\int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$$

Stieltjes-integrálhoz tart.

Hasonlóan lehet érzékeltetni a szórásnégyzet definícióját is.

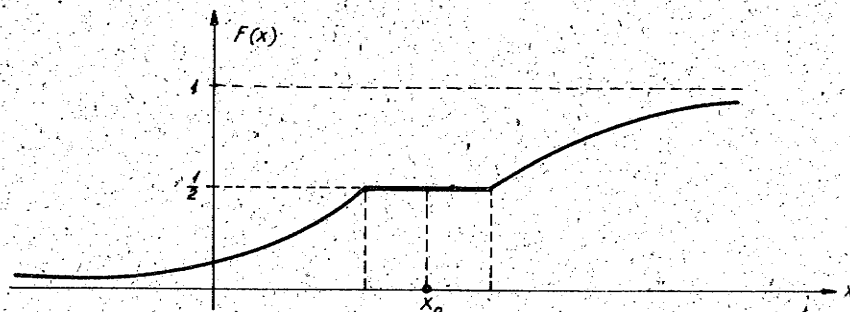
IV.10.1.4. Néhány kiegészítés az eloszlásfüggvényhez

A medián. Ha az $F(x) = \frac{1}{2}$ egyenletnek egyetlen x_0 megoldása létezik, ekkor ezt az x_0 megoldást a megfelelő X valószínűségi változó mediánjának nevezzük.



48. ábra

Ha az $F(x) = \frac{1}{2}$ egyenletnek van megoldása, akkor vagy egyetlen megoldás van, vagy pedig a megoldások egy egész intervallumot kitöltenek. Ebben az esetben ennek az intervallumnak az x_0 középpontját nevezzük mediánnak (49. ábra).



49. ábra

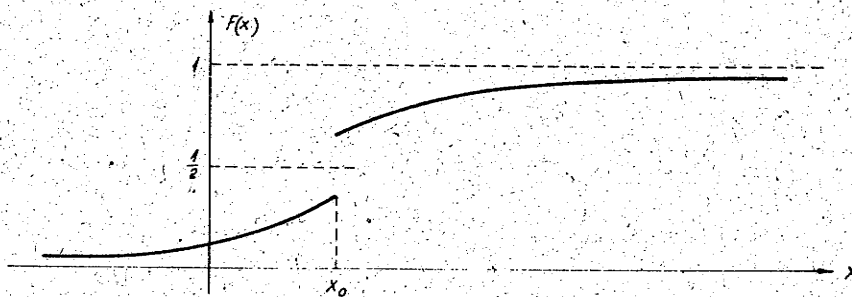
Az $F(x) = \frac{1}{2}$ egyenletnek azonban nincs mindig megoldása; ekkor $F(x)$ az $\frac{1}{2}$ magasságot átugorja. Ez akkor fordul elő, ha van olyan x_0 szám, hogy

$$P(X < x_0) < \frac{1}{2} \text{ és } P(X > x_0) < \frac{1}{2},$$

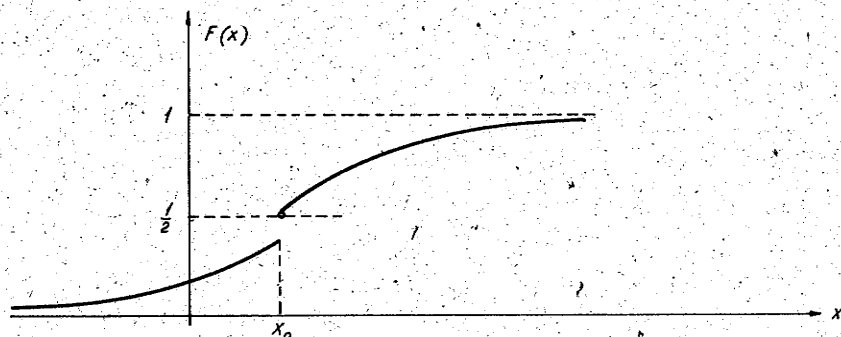
amiből következik, hogy

$$P(X = x_0) > 0.$$

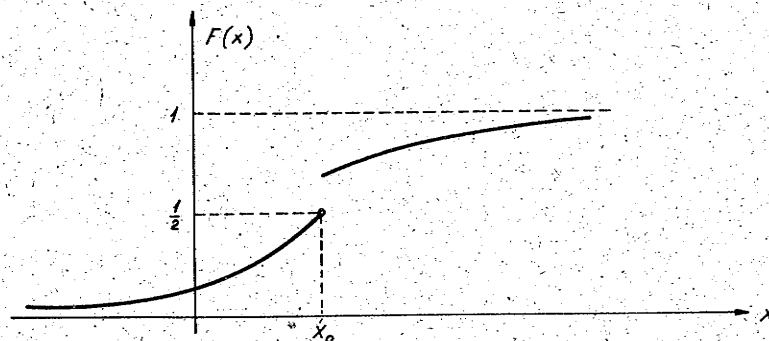
(50/a, b, c ábrák).



50/a ábra



50/b ábra



50/c ábra

Ezekben az esetekben ezt az x_0 számot nevezzük a X valószínűségi változó mediánjának. Szokás a medián jelölésére a m_e szimbólumot használni.

Ha X véges sok értéket felvevő valószínűségi változó, lehetséges értékei az $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ számok és mindegyik számot a közös $\frac{1}{n}$ valószínűséggel veszi fel, akkor a medián meghatározásánál két esetet kell megkülönböztetni.

1. n páratlan ($n = 2k - 1$)

X lehetséges értékei ekkor $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2k-1}$; $F(x)$ minden egyes ugrása $\frac{1}{2k-1}$ -gyel egyenlő. Esetünkben $F(x)$ átugorja az $\frac{1}{2}$ értéket, mert hiszen lehetséges értékei $\frac{j}{2k-1}$ alakúak, ahol $j = 0, 1, 2, \dots, 2k-1$. Ezek közül egyik sem egyenlő $\frac{1}{2}$ -del, mert hiszen a $\frac{j}{2k-1} = \frac{1}{2}$ egyenlet nem állhat fenn semmilyen j egész értékre sem. Könnyen kiszámítható,

hogy melyik x_ℓ érték a medián, azaz hol ugorja át az $\frac{1}{2}$ értéket az eloszlásfüggvény.

A keresett ℓ indexre nyilván

$$\frac{\ell}{2k-1} < \frac{1}{2}$$

és

$$\frac{\ell+1}{2k-1} > \frac{1}{2}.$$

Ezekből ℓ -re kapjuk, hogy

$$k - \frac{3}{2} < \ell < k - \frac{1}{2},$$

azaz

$$(k-1) - \frac{1}{2} < \ell < k - \frac{1}{2},$$

tehát az egész szám $(k-1)$ -gyel egyenlő.

2. n páros ($n = 2k$)

Teljesen hasonló okoskodással láthatjuk, hogy most $F(x)$ felveszi az $\frac{1}{2}$ értéket. $F(x)$ lehetséges értékei $\frac{j}{2k}$, ahol $j = 0, 1, 2, \dots, 2k$.

Az $\frac{\ell}{2k} = \frac{1}{2}$ -ből látható, hogy $\ell = k$.

Kvantilisek, terjedelem

A p -edrendű kvantilis az eloszlást $p/1-p$ arányban osztja ketté. Ugyanaz a három eset fordul elő, mint a mediánál. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a

$$F(x) = p$$

egyenletnek egyetlen x_0 megoldása van, akkor az $x_0 = Q_p$ szám a X valószínűségi változó p -edrendű kvantilise.

Ha $p = \frac{1}{2}$, a mediánt kapjuk.

A $Q_{\frac{1}{4}}$ és $Q_{\frac{3}{4}}$ számokat alsó, illetve felső kvantiliseknek nevezzük.

$$\frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

az interkvantilis-félterjedelem; a szóródás egyik mértéke.

Ha egy X valószínűségi változó korlátos és (t_1, t_2) az a legszűkebb intervallum, amelyre

$$P(t_1 \leq X \leq t_2) = 1,$$

akkor a $\tau = (t_2 - t_1)$ intervallumhossz a X valószínűségi változó terjedelme.

IV.10.1.5 A valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

Az X valószínűségi változó karakterisztikus függvényén értjük a

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

minden valós t -re értelmezett függvényt, ahol $F(x)$ az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Minthogy

$$|\varphi_X(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1,$$

a karakterisztikus függvény abszolút értékben 1-nél nem nagyobb komplex értékű, minden valós t -re értelmezett függvény. Definíciónk alapján

$$\varphi_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1.$$

Könnyen belátható, hogy a $\varphi_X(t)$ karakterisztikus függvény minden valós t értékre folytonos, sőt egyenletesen folytonos az egész valós t -tengelyen.

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $|h| < \delta$ esetén

$$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| < \varepsilon$$

minden valós t -re. Legyen u . $A > 0$ olyan nagy szám, hogy

$$\int_{-\infty}^{-A} dF(x) + \int_A^{\infty} dF(x) < \frac{\varepsilon}{4}$$

legyen. Ez az improprius Stieltjes-integrál létezése miatt mindig megvalósítható.

Továbbá fennáll, hogy

$$\begin{aligned} |\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i(t+h)x} - e^{itx}| dF(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}(e^{ihx} - 1)| dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| |e^{ihx} - 1| dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ihx} - 1| dF(x), \end{aligned}$$

lévén $|e^{itx}| = 1$. Tudjuk, hogy

$$|e^{ihx} - 1| < |hx|.$$

Felbontjuk legutolsó integrálunkat a következőképpen:

$$\int_{-\infty}^{-A} |e^{ihx} - 1| dF(x) + \int_{-A}^A |e^{ihx} - 1| dF(x) + \int_A^{\infty} |e^{ihx} - 1| dF(x) = I_1 + I_2 + I_3.$$

Mivel

$$|e^{ihx} - 1| \leq |e^{ihx}| + 1 = 2,$$

ezért

$$I_1 + I_3 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az I_2 integrál értékét $\frac{\varepsilon}{2}$ alá szoríthatjuk, ha

$$|h| < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Ekkor ui. minden $|x| \leq A$ esetén $|hx| < \frac{\varepsilon}{2}$, és lévén $|e^{ihx} - 1| < |hx| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ezért

$$I_2 = \int_{-A}^A |e^{ihx} - 1| dF(x) < \frac{\varepsilon}{2} \int_{-A}^A dF(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

A karakterisztikus függvénnyel a következőkben nem foglalkozunk, de megemlítjük, hogy a karakterisztikus függvény és az eloszlásfüggvény között kölcsönös és egyértelmű kapcsolat áll fenn. Azt látjuk a definícióból, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározza a karakterisztikus függvényt, és bebizonyítható, hogy a karakterisztikus függvény szintén egyértelműen meghatározza az eloszlásfüggvényt.

(Erre vonatkozólag lásd a jegyzet végén felsorolt irodalmat.)

A karakterisztikus függvény fogalmát azért említettük meg, mert a valószínűségszámításban fontos szerepe van, és sok olyan, az eloszlásfüggvényre vonatkozó tétel bizonyításánál használják fel, amely tételek igazolása a karakterisztikus függvény fogalma nélkül igen nehéz volna. Pl. ilyen tétel a későbbiekben szóba kerülő ún. centrális határeloszlástétel is.

IV. 10.2 Valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

IV.10.2.1 Definíció

Sokszor a $F(x)$ eloszlásfüggvényt fel lehet írni egy az egész számegyenesen értelmezett $f(x) \geq 0$ függvény

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (*)$$

integráljaként (minden x -re).

Ezt a $f(x)$ függvényt a megfelelő X valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük (szokás $f(x)$ -et a valószínűségeloszlás sűrűségfüggvényének is nevezni).

A definícióból világos, hogy $x_1 < x_2$ számra:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X < x_2).$$

Ha az $f(x)$ sűrűségfüggvény folytonos az $[x_1, x_2]$ intervallumban, akkor a középértéktétel szerint

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = f(\xi) (x_2 - x_1) = P(x_1 < X < x_2),$$

ahol $x_1 < \xi < x_2$ egy alkalmas szám. Ha még az $x_2 - x_1$ intervallumhossz elég kicsiny, akkor $f(x) (x_2 - x_1)$ közelítőleg megadja annak az eseménynek a valószínűségét, hogy X értéke az $[x_1, x_2)$ intervallumban esik bármely $x_1 \leq x \leq x_2$ értékre, lévén itt $f(x)$ folytonos.

Minden $f(x)$ sűrűségfüggvényre igaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

ami a definícióból azonnal belátható.

Ha a (*)-tulajdonságu $f(x)$ sűrűség függvény létezik, akkor azt mondjuk, hogy a $F(x)$ eloszlásfüggvényhez tartozó valószínűségi változó folytonos eloszlású.

Megjegyezzük, hogy a folytonos eloszlásnak ez a definíciója szűkebb, mint ha a $F(x)$ eloszlásfüggvény folytonosságához kötnénk a valószínűségi változó folytonos eloszlásának a fogalmát. (A (*) definícióban a $f(x)$ sűrűségfüggvény folytonossága nincs feltételezve!)

Ha létezik ilyen sűrűségfüggvény, akkor a $F(x)$ eloszlásfüggvény folytonos, de nem megfordítva, úgyhogy előfordulhat, hogy mindenütt folytonos $F(x)$ eloszlásfüggvénynek nincs sűrűségfüggvénye. (Ilyenre példákat találhat az érdeklődő olvasó speciális valószínűségi tankegyetemen.)

Csak a matematika iránt jobban érdeklődőknek

Aki a (Lebesgue-értelemben) nullaméretű halmaz fogalmát ismeri, annak megemlítjük a következő tényeket.

a) Minden monoton függvénynek létezik definícióintervallumának egy nullaméretű részhalmazától eltekintve minden pontban a (véges értékű) differenciálhányadosa.

b) Van olyan folytonos monoton növekvő függvény, amelynek egy nullaméretű halmazától eltekintve mindenütt nulla a differenciálhányadosa. Ennek alapján lehet szerkeszteni olyan $F(x)$ eloszlásfüggvényt, amely minden pontban folytonos, és mégsem egyenlő differenciálhányadosának $-\infty$ -tól x -ig vett határozott integráljával.

Megjegyezzük még továbbá, hogy a számegyenes valamely H ponthalmazát akkor nevezzük Lebesgue-féle értelemben nullaméretűnek, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz le tudjuk fedni a H halmazt véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok $i_1, i_2, i_3, \dots, i_m, \dots$ nyílt intervallummal úgy

(tehát $H \subset \bigcup_n i_n$), hogy ezen befedő nyílt intervallumok együttes hosszúsága ε -nál nem nagyobb. Pl. A számegyenes racionális pontjainak halmaza nullaméretű. Lévéen a számegyenes racionális pontjainak halmaza megszámlálható, felírhatjuk e halmaz elemeit egy $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ sorozatba. Irjunk az r_n racionális szám mint középponti köré egy $\frac{\varepsilon}{2^n}$ hosszúságú intervallumot ($n = 1, 2, \dots$).

Az így rajzolt intervallumok befedik a racionális pontok halmazát és együttes hosszúságuk ε . Megjegyezzük még, hogy létezik nem megszámlálhatóan végtelen sok pontból álló nullaméretű ponthalmaz is.

Ha az X valószínűségi változónak létezik a $f(x) \geq 0$ sűrűségfüggvénye, akkor bebizonyítható, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek majdnem minden x helyen, azaz egy nullaméretű ponthalmaztól eltekintve létezik a differenciálhányadosa és ez egyenlő $f(x)$ -szel. Ilyen esetben az összes $F(x)$ -re vonatkozó Stieltjes-integrálok, tehát az

$$\int(\dots) dF(x)$$

alakú integrálok a megfelelő határok között vett közönséges

$$\int(\dots) f(x) dx$$

integrálokkal egyenlők (a zárójelben valamilyen függvény áll).

Ennek alapján valamely X valószínűségi változó várható értékét, illetve szórásnégyzetét a

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{feltéve, hogy } \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty),$$

illetve a

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx$$

integrálok értelmezik.

Megemlítjük még kiegészítőleg, hogy valamely $F(x)$ eloszlásfüggvénynek pontosan akkor létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye, ha $F(x)$ abszolút folytonos.

Az abszolút folytonosság lényegesen erősebb követelmény, mint a közönséges folytonosság. Valamely $G(x)$ függvényt definícióintervallumában abszolút folytonosnak nevezünk, ha igaz a következő: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy a definícióintervallumban akár-hogyan is vegyünk fel véges számú, vagy megszámlálhatóan végtelen sok páronként egymásba át nem nyúló, δ -nál kisebb összhosszúságú $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \dots$ intervallumot, a $G(x)$ függvénynek ezeken vett

$$\sum_n |G(b_n) - G(a_n)|$$

ingadozásösszege ε -nál kisebb, ha

$$\sum_n (b_n - a_n) < \delta. \quad (\delta > 0 \text{ általában függ } \varepsilon\text{-tól.})$$

Könnyen belátható, hogy minden abszolút folytonos függvény definícióintervallumának minden pontjában egyuttal folytonos is, de általában nem megfordítva. Ha pl. a $G(x)$ függvénynek létezik korlátos differenciálhányadosa a definícióintervallumban, azaz

$$|G'(x)| \leq M,$$

akkor $G(x)$ abszolút folytonos. Legyen ui. az előre megadott tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M},$$

Ekkor

$$\sum_n |G(b_n) - G(a_n)| = \sum_n |G'(\xi_n)| (b_n - a_n),$$

ahol ξ_n egy alkalmas hely a_n és b_n között a differenciálszámítás középértéktétele szerint. Előbbi összegünk tehát nem nagyobb, mint

$$M \sum_n (b_n - a_n),$$

és ha a $\sum_n (b_n - a_n)$ intervallumösszeg kisebb, mint $\frac{\epsilon}{M}$, akkor a $G(x)$ fenti ingadozásösszege kisebb, mint ϵ .

A valós függvénytanban bebizonyítják, hogy abszolút folytonos $G(x)$ függvénynek egy nullaméretű halmaztól eltekintve minden x helyen létezik a $G'(x)$ differenciálhányadosa és minden szóba jövő $x_1 < x_2$ számpárra fennáll a

$$\int_{x_1}^{x_2} G'(x) dx = G(x_2) - G(x_1)$$

egyenlőség.

Ez utóbbi tulajdonság jellemző az abszolút folytonos függvényekre.

IV.10.2.2 Példák sűrűségfüggvényekre

1. A normális vagy Gauss-eloszlás sűrűségfüggvénye.

Itt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

a sűrűségfüggvény.

Könnyen belátható a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

formula alapján, hogy a Gauss-eloszlású valószínűségi változó várható értéke m , szórásnégyzete pedig σ^2 . Ha $m = 0$ és $\sigma = 1$, akkor az ún. standardizált normális eloszlásról van szó.

Ennek az eloszlásnak igen nagy szerepe van a hibaszámításban és a valószínűségszámítás, valamint a matematikai statisztika számos részében.

2. Az egyenletes eloszlás

Ekkor a valószínűségi változó lehetséges értékei (egymásközt teljesen egyenlő valószínűségi sulyal) egy (a, b) intervallumba eső számok. Ennek a sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a \text{ és } x > b, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b; \end{cases}$$

az a és b pontokban $f(x)$ definíciója lényegtelen.

3. Exponenciális eloszlás

Ennek sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{ha } x \geq 0 \text{ és} \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Továbbiakat sűrűségfüggvényekre vonatkozólag lásd pl. Prékopa: Valószínűségelmélet c. többször idézett könyvét.

IV.10.2.3 A Gauss-féle eloszlás- és sűrűségfüggvény

Az itt szereplő valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a már említett

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

függvény. A várható értéket megadó

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot x \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Integrál kiszámításával kapjuk, hogy a várható érték a kitevőben szereplő m. (Az integrál kiszámításánál alkalmazzuk a

$$t = \frac{(x - m)}{\sqrt{2} \cdot \sigma}$$

helyettesítést, és vegyük figyelembe a már említett

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad (\text{integrált.})$$

A szórásnégyzetet a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

integrál adja, eredményként σ^2 -et kapjuk.

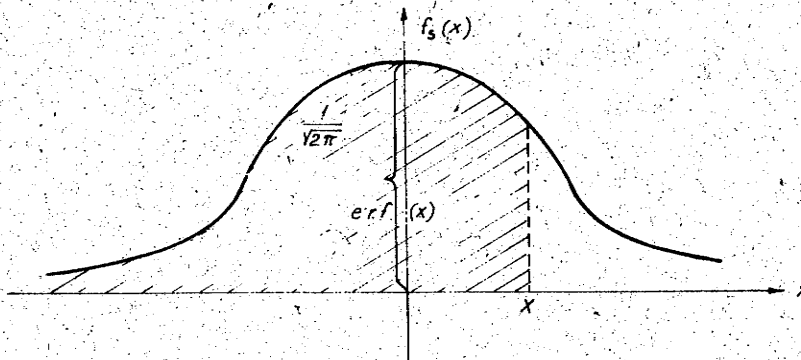
Az m várható értéket, valamint a σ szórást a Gauss-eloszlás paramétereinek nevezzük. Látható a Gauss-eloszlás sűrűségfüggvényéből, hogy a két paraméter a sűrűségfüggvényt és így az eloszlásfüggvényt is teljesen meghatározza.

Megjegyezzük, hogy a legtöbb eloszlásnál az eloszlás várható értéke és szórása általában nem határozza meg az eloszlásfüggvényt, illetve a sűrűségfüggvényt.

Már említettük az ún. standardizált Gauss-eloszlás fogalmát. Ennél a várható érték 0, a szórás pedig 1. ennél fogva a standardizált Gauss-eloszlás valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(51. a ábra).



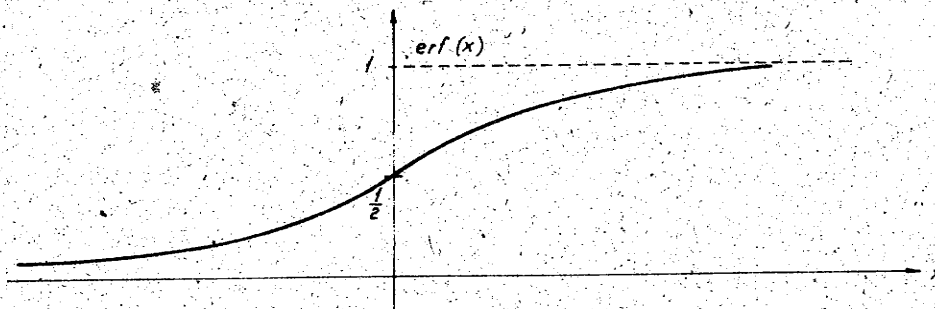
51. a ábra

A standardizált eloszlásfüggvény külön elnevezést is kap, hibafüggvénynek, angol nevén error-function-nak nevezzük és angol neve után az erf(x)-el jelöljük.

Tehát

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Ez a függvény szigorúan monoton növekvő, (abszolút) folytonos függvény; grafikonja a következő (51. b ábra).



51. b ábra

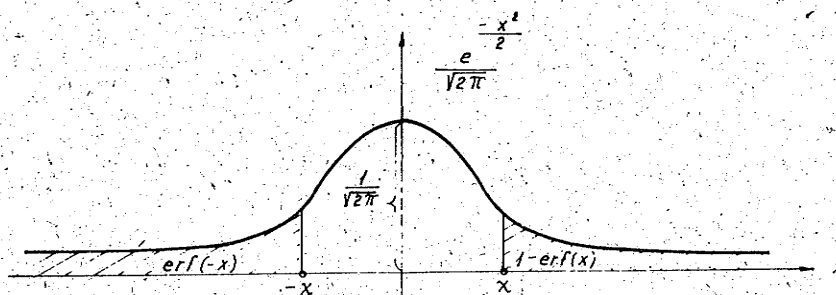
A sűrűségfüggvény páros jellege miatt az

$$\text{erf}(0) = \frac{1}{2},$$

ugyancsak $f_g(x)$ páros jellege miatt minden $x > 0$ -ra igaz az

$$\operatorname{erf}(-x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

egyenlőség. (51. c ábra.)



51. c ábra

Az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

határozott integrál megadja annak a valószínűségét, hogy a standardizált Gauss-eloszlású valószínűségi változó értéke $-x$ és x közé essék:

$$P(-x \leq X \leq x)$$

Az előbbieket alapján látható:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= 1 - \operatorname{erf}(-x) - [1 - \operatorname{erf}(x)] = 1 - 2[1 - \operatorname{erf}(x)] = \\ &= 2 \operatorname{erf}(x) - 1. \end{aligned}$$

Az $\operatorname{erf}(x)$ függvénynek elegendő pozitív x -ekre ismerni az értékeit, hiszen

$$\operatorname{erf}(-x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

alapján negatív x -ekre már adódik a függvényérték. Az $\operatorname{erf}(x)$ -re vonatkozólag a logaritmustáblázathoz hasonló függvénytáblázatok vannak.

Ha valamely Gauss-eloszlású X valószínűségi változó nem standardizált, akkor egyszerű transzformációval kiszámíthatók az eloszlásfüggvény értékei az $\text{erf}(x)$ függvény segítségével. Ui. vezessük be X helyett a

$$U = \frac{X - m}{\sigma}$$

valószínűségi változót. Könnyen belátható, hogy U várható értéke 0, szórása 1, tehát U standardizált Gauss-eloszlású valószínűségi változó. Ez utóbbi állítást a következőképpen láthatjuk be:

Jelöljük az U valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F_U(u)$ -val:

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U < u) = P\left(\frac{X - m}{\sigma} < u\right) = P(X < \sigma u + m) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma u + m} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt. \end{aligned}$$

A $v = \frac{t-m}{\sigma}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$F_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \text{erf}(u).$$

Az $M(U) = 0$ és a $\sigma^2(U) = 1$ állításokat a várható értékre és a szórára vonatkozó ismert műveletekkel kapjuk.

Az elmondottak felhasználásával a

$$P(x_1 < X < x_2) = P\left(\frac{x_1 - m}{\sigma} < U < \frac{x_2 - m}{\sigma}\right)$$

valószínűségek egyenlőségét nyerjük bármely $x_1 < x_2$ számpárra. Az U -ra vonatkozó valószínűség értéke pedig az $\text{erf}(x)$ táblázat segítségével kiszámítható.

A Gauss-eloszlás a valószínűség-számítási gyakorlatban az egyik legfontosabb eloszlás.

IV.10.2.4 A centrális határeloszlástétel

A valószínűség-számításban fontos szerepet játszanak bizonyos konvergencia-tételek, amelyeknél bizonyos valószínűségi változók végtelen sorozatának eloszlásfüggvényei konvergálnak egy határeloszlásfüggvényhez. Röviden ezt úgy szoktuk mondani, hogy bizonyos valószínűségi eloszlásoknak egy sorozata konvergál egy határeloszláshoz. Mi csupán egyetlen ilyen nagyfontosságú tételt mondunk most ki bizonyítás nélkül.

A centrális határeloszlástétel

Ha $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ azonos eloszlású, teljesen független valószínűségi változók, továbbá

$$M(X_k) = m, \quad \sigma^2(X_k) = \sigma^2$$

minden $k = 1, 2, \dots$ esetén, akkor minden valós x számra igaz, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \text{erf}(x). \end{aligned}$$

Az $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ valószínűségi változó várható értéke nm , szórásnégyzete pedig $n\sigma^2$, tehát szórása $\sigma\sqrt{n}$. Az előbbi formulánkban szereplő

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \quad (n=1, 2, \dots)$$

valószínűségi változók mind un. standardizált valószínűségi változók, azaz minden $n = 1, 2, \dots$ indexre:

$$M(Z_n) = 0, \quad \sigma^2(Z_n) = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{j=1}^n \sigma^2(X_j) = 1.$$

Jelöljük a Z_n valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F_n(x)$ -szel. Akkor az előbbi formulánkban szereplő

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right)$$

valószínűség éppen $F_n(x)$ -el egyenlő. Kimondott határeloszlástételünk tehát azt állítja, hogy az

$$F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$$

eloszlásfüggvények sorozata konvergál az $\text{erf}(x)$ eloszlásfüggvényhez minden valós x -re.

A tétel bizonyítását a karakterisztikus függvények segítségével végzik, támaszkodva a karakterisztikus függvények és az eloszlásfüggvények közötti, általunk már említett szoros kapcsolatokra.

Kimondott határeloszlástételünk egy speciális esete a binomiális eloszlásra vonatkozik. Ha egy végtelen, teljesen független kísérletekből álló kísérletsorozatnál valamely A esemény p valószínűséggel, az $\bar{A}$ (komplementer) esemény pedig $1-p = q$ valószínűséggel következik be ($p > 0$ és $q > 0$), akkor legyen az X_k valószínűségi változó értéke a többször említett módon 1, ha A a k -ik kísérletnél bekövetkezik, és 0, ha A a k -ik kísérletnél nem következik be. Mint tudjuk, ebben az esetben

$$M(X_k) = p, \quad \sigma^2(X_k) = pq,$$

tehát határeloszlástételünk ebben az esetben a következő:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \text{erf}(x).$$

Mint tudjuk, a $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ valószínűségi változó értéke egyenlő az A esemény bekövetkezéseinek a számával n független kísérlet esetén.

A valószínűségekre vonatkozó ismert számítások alapján kapjuk, hogy bármely valós $x_1 < x_2$ számpárra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_1 < \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - np}{\sqrt{npq}} < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \text{erf}(x_2) - \text{erf}(x_1).$$

U1. az előbbi Z_n jelölést ismét használva:

$$P(Z_n < x_2) = F_n(x_2), \quad P(Z_n < x_1) = F_n(x_1),$$

ahol $F_n(x)$ a Z_n valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Minthogy $n \rightarrow \infty$ esetén $F_n(x) \rightarrow \text{erf}(x)$, továbbá

$$P(x_1 \leq Z_n < x_2) = F_n(x_2) - F_n(x_1),$$

azért

$$P(x_1 \leq Z_n < x_2) \rightarrow [\text{erf}(x_2) - \text{erf}(x_1)].$$

Eredményünket még a következő alakban is felírhatjuk: Ha k -val jelöljük az A esemény bekövetkezéseinek a számát n független kísérlet alkalmával, akkor

$$P(x_1 \sqrt{npq} + np \leq k < x_2 \sqrt{npq} + np) \approx \text{erf}(x_2) - \text{erf}(x_1),$$

ha n elég nagy. Az utóbbi valószínűséget a binomiális eloszlás valószínűségével kifejezve írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(x_1 \sqrt{npq} + np \leq k < x_2 \sqrt{npq} + np) &= \\ &= \sum_{x_1 \sqrt{npq} + np \leq k < x_2 \sqrt{npq} + np} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \end{aligned}$$

ahol az összegezés az egyenlőtlenséget kielégítő minden k számra kiterjesztendő (k nem-negatív egész). Így tehát írhatjuk, hogy elég nagy n esetén:

$$\sum_{x_1 \sqrt{npq} + np \leq k < x_2 \sqrt{npq} + np} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \text{erf}(x_2) - \text{erf}(x_1).$$

A binom-eloszlást tehát a normális eloszlással lehet közelíteni. Ez utóbbi állítás abban is megnyilvánul, hogy elkészítve a binom-eloszlás

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

valószínűségeloszlásnak a grafikonját, a kapott lépcsős függvény alakja n növekedésével egyre jobban megközelíti a normális eloszlás sűrűségfüggvényének harang alakú görbáját. A fenti valószínűségeknél a $<$, illetve a $\geq$ jelek is helyénvalóak, lévén a határeloszlás folytonos.

IV.10.2.5 A hibatörvény leszármaztatása egy bolyongási feladatból

a) Egy mozgó pont induljon ki a számegyenes 0-pontjából és tegyen mindig egységnyi lépéseket jobbra, illetve balra egymástól függetlenül; mégpedig jobbra, azaz $+1$ -et lép $0 < p < 1$ valószínűséggel és balra, azaz -1 -et lép $1-p = q$ valószínűséggel. Mi a valószínűsége, hogy n lépés után a pont a számegyenes (a, b) intervallumában lesz?

Megoldás: A mozgó pont helyét meghatározza a

$$Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

valószínűségi változó, ahol az egyes X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) valószínűségi változók egymástól teljesen függetlenek; mindegyik X_k értéke legyen 1 , ha a mozgó pont a k -ik lépésnél jobbra lép, és legyen X_k értéke -1 , ha a k -ik lépésnél a mozgó pont balra lép. Tehát minden k indexre:

$$P(X_k = 1) = p \quad \text{és} \quad P(X_k = -1) = q = 1 - p.$$

Írhatjuk:

$$\underline{M(X_k)} = 1 \cdot p + (-1) \cdot p = p - (1-p) = \underline{2p - 1},$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(X_k) &= M[X_k - (2p-1)]^2 = M(X_k^2) - M^2(X_k) = 1 \cdot (1-p) + 1 \cdot p - (2p-1)^2 = \\ &= 1 - p + p - 4p^2 + 4p - 1 = 4p(1-p) = 4pq. \end{aligned}$$

A standardizált valószínűségi változó:

$$Y_{n,s} = \frac{Y_n - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)} = \frac{Y_n - n(2p-1)}{\sqrt{4pqn}}.$$

A centrális határeloszlás-tétel szerint:

$$P(a \leq Y_n < b) = P\left(\frac{a-n(2p-1)}{\sqrt{4pqn}} \leq Y_n < \frac{b-n(2p-1)}{\sqrt{4pqn}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha_s}^{\beta_s} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

ahol rövidítésként

$$\alpha_s = \frac{a-n(2p-1)}{\sqrt{4pqn}} \quad \text{és} \quad \beta_s = \frac{b-n(2p-1)}{\sqrt{4pqn}} \quad \text{-et}$$

írtunk.

b) Legyen $\delta > 0$ egy kicsiny, később meghatározandó szám; legyenek az előbbi X_k valószínűségi változók értékei $+1$, illetve (-1) helyett δ , illetve $(-\delta)$, mégpedig:

$$P(X_k = \delta) = p = \frac{1}{2}, \quad P(X_k = -\delta) = \frac{1}{2}.$$

(Tehát most a bolyongó pont minden lépésnél $\pm \delta$ -t lép, egyformán az $\frac{1}{2}$ valószínűséggel.)

Akkor minden k indexre:

$$M(X_k) = 0, \quad \sigma^2(X_k) = \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2} = \delta^2;$$

így

$$M(Y_n) = 0, \quad \sigma^2(Y_n) = n\delta^2, \quad \sigma(Y_n) = \delta\sqrt{n}.$$

Legyen

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ahol n a bolygó pont lépéseinek a száma. Akkor a standardizált $Y_{n,s}$ valószínűségi változó:

$$Y_{n,s} = \frac{Y_n}{\sigma \sqrt{n}} = Y_n,$$

ahol, mint előbb,

$$Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

és így

$$P(a \leq Y_n < b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \text{erf}(b) - \text{erf}(a),$$

ahol $a < b$ tetszőleges, rögzített számok.

c) Fenti bolyongási feladatunk alkalmas arra, hogy plauzibilissé tegyük azt a tényt, hogy a hibaszámításban szereplő hibafüggvény a Gauss-féle sűrűségfüggvény. U. i. egy mennyiség értékének meghatározásánál a mérési folyamat igen sok, nagyon rövid ideig tartó mozzanat egymásutánjából áll. A mérendő mennyiséget egy bolyongó ponttal szimbolizáljuk, amely a mérési folyamat során a számegyenesen bolyongást végez. Minden egyes mérési mozzanathál a bolyongó pont teljesen véletlenszerűen egy külső lökést kap és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel a valódi számértéktől jobbra vagy balra egy kicsit eltolódik. A sok mérési mozzanat végeredményeként - tehát a mérési folyamat végén - a bolyongó pont a számegyenes valamely helyén megáll.

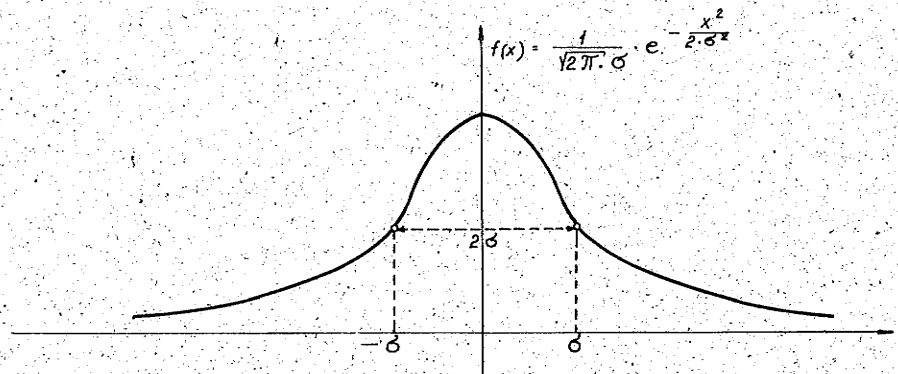
Előbbi $(+\sigma)$ -ás bolyongási modellünk tehát jól ábrázolja a mérési folyamatot magát. Az egyszerűség kedvéért feltételezhetjük, hogy a mérendő mennyiség pontos értéke nulla. Ennélfogva a bolyongó pont végső helyezete a számegyenesen a mérésnél elkövetett hiba értékét adja meg. Miután a mérési folyamat nagyon nagy számú elemi mérési mozzanathól tevődik össze, alkalmazzuk a centrális határeloszlás-tételt, és limeszre áttérve mondhatjuk: annak a valószínűsége, hogy valamely mérés hibája egy $[a, b]$ -intervallumba essék, éppen $\text{erf}(b) - \text{erf}(a)$ -val egyenlő.

Ha a mérendő mennyiség pontos értéke nem nulla, akkor a számegyenesen a szokásos eltolást alkalmazzuk. Minél pontosabb a mérési eljárásunk, annál kisebb annak a valószínűsége, hogy a hiba értéke a 0-ponttól messze essék. Az ilyen mérések hibagörbéje tehát kicsiny σ -szórású Gauss-görbe, azaz meglehetősen meredek sovány harang-görbe, amely igen gyorsan simul az x-tengelyhez. Differenciálással könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a 0 várható értékű

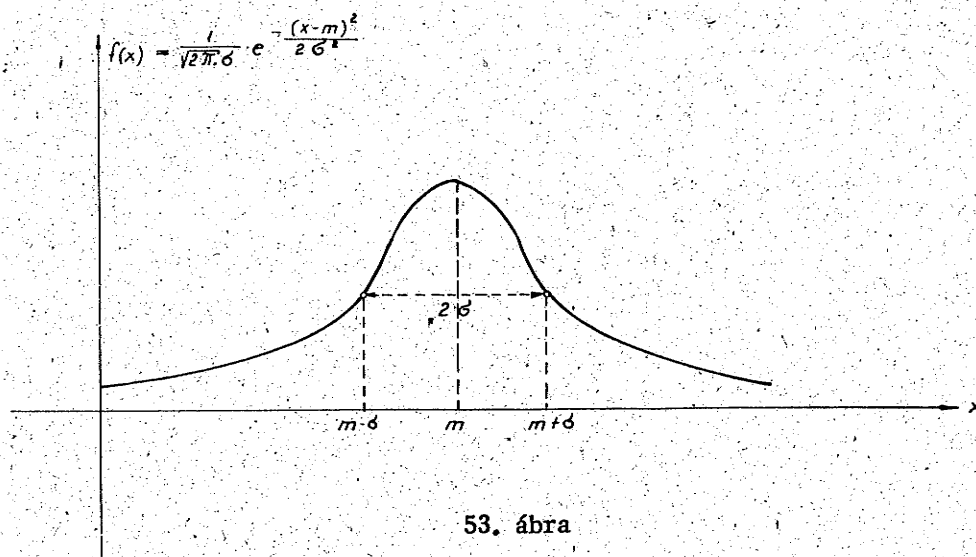
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Gauss-féle sűrűségfüggvény inflexiós pontjainak a távolsága (két inflexiós pontja van, amelyek az y-tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el) 2σ .

Ha σ értéke aránylag nagy, a sűrűségfüggvény lapos (elnyult) harang-görbe. Ha pedig σ értéke kicsiny, akkor a görbe meredek és gyorsan simul az x-tengelyhez. (52. 53. ábra.)



52. ábra



53. ábra

IV.10.2.6 A centrális határeloszlástételnek egy másik alkalmazása

Előírt pontosságu közelítéshez szükséges kísérletszám meghatározása.

Legyenek a $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ valószínűségi változók azonos eloszlásúak és függetlenek,

$$M(X_k) = m, \quad \sigma^2(X_k) = \sigma^2 < +\infty.$$

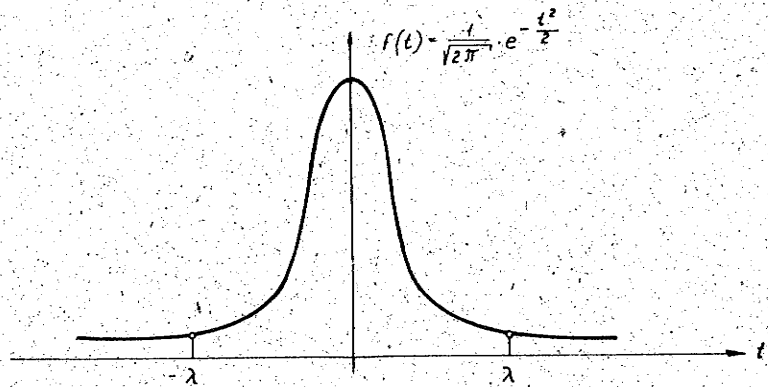
Kérdés, hogy adott $\varepsilon > 0$ és $\sigma > 0$ mellett legalább mekkorának kell lennie n -nek ahhoz, hogy

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \sigma$$

legyen. A centrális határeloszlás tétele szerint:

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - mn}{\sigma \sqrt{n}} < \lambda\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(54. ábra).



54. ábra

Lévéen

$$\text{erf}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

fennáll

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right| < \lambda\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 \text{erf}(\lambda) - 1,$$

azaz

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right| < \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 2 \text{erf}(\lambda) - 1.$$

Legyen

$$\varepsilon = \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{n}}$$

és

$$2 \text{erf}(\lambda) - 1 = 1 - \delta,$$

akkor

$$\delta = 2 [1 - \text{erf}(\lambda)].$$

Ebből visszakereséssel meghatározzuk λ -t, majd behelyettesítjük az

$$n = \frac{\lambda^2 \epsilon^2}{\epsilon^2}$$

egyenlőségbe, ahonnan n -re megkapjuk az alsó határt. Még n -et annyira kell növelni, amennyire a centrális határeloszlástétel megkívánja.

Jegyzetünk befejezésekképpen megjegyezzük, hogy a nemdiszkrét eloszlásoknál is előfordul több valószínűségi változó együttes eloszlása, valamint az ezekkel összefüggő több más fogalom: várható értékek, feltételes várható értékek, szórások, korrelációs együtthatók stb. Mindezen esetekben ugyanúgy számolunk, mint a diszkrét eloszlásoknál, csupán az ott szereplő összegek (szummák) helyett most többszörös (Stieltjes- vagy közönséges) integrálok szerepelnek.

IV.10.2.7 Függelék

Befejezésül három feladatot tárgyalunk, amelyek közül az első kettő a Kombinatorika c. részben tárgyalt bolyongásokkal könnyen megoldható.

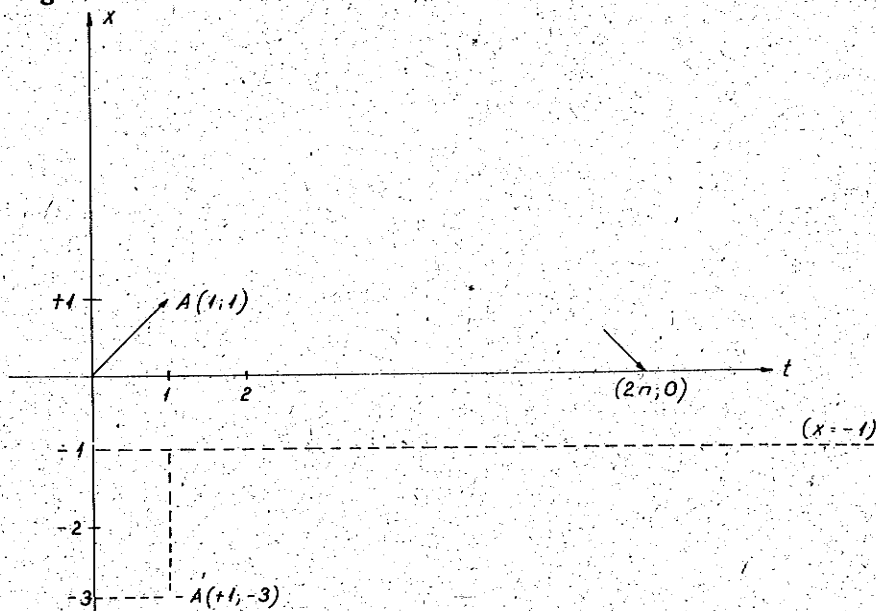
1. feladat: Egy mozipénztár előtt $2n$ ember áll jegyekért, egy jegy ára 5 Ft. Mindegyikük pontosan egy jegyet akar váltani; n sorbanállónál csak egy-egy ötforintos érme van, a többi n -nél csak egy-egy tízforintos. A pénztárosnál nyitáskor semmi pénz sincs. Mi a valószínűsége egy olyan sorbanállásnak, amelynél egyetlen sorbanállónak sem kell várnia pénzváltásra?

Megoldás:

Nem kell várni a pénzváltásra az ötforintos érmével rendelkezőknek; nem kell várnia egy tízforintossal rendelkezőnek az esetben, ha a pénztárosnál éppen van legalább egy ötforintos. Rögtön látható, hogy kedvező esetben az első sorbanálló ötforintossal fizető, ha a második tízforintossal fizet, úgy neki nem kell várnia. A problémát visszavezetjük egy bolyongásra a számegyenesen. Tekintsük a (t, x) derékszögű koordináta-rendszert. (55. ábra.)

Az origóból induljunk ki és minden egyes sorállónak a pénztárhoz érkezésekor léptünk egy egységgel jobbra a t -tengelyen. Lépjünk egy egységgel felfelé az x -tengellyel párhuzamosan, ha egy ötforintossal fizető ember lép a pénztár elé, és lépjünk egy egységgel lefelé az x -tengellyel párhuzamosan, ha egy tízforintossal fizető ember lép a pénztár elé. Így minden egyes embernél lépünk egyet jobbra és egyet vagy felfelé, vagy lefelé. Összesen $2n$ lépést teszünk, a pénztáros elad $2n$ mozijegyet és a végén lesz nála $10n$ forint, azaz mind az n tízforintos nála lesz. Minden sorállásnak megfelel egy-egy törtvonal, amely az origóból indul ki és $2n$ lépés után a t -tengelyen, tehát a $(2n, 0)$ pontban végződik. Az is

világos az elmondottakból, hogy a pénztárosnál levő ötforintosok számát megadja a bolyongó pont x -ordináta értéke. Ha a bolyongó pont a t -tengelyen van, a pénztárosnál nincs ötforintos és csak úgy tudjuk elkerülni a pénzváltásra való várakozást a következő sorbanállónál, ha ez ötforintos-sal fizet. Mindezekből látható, hogy a jegyváltás zavartalan folyamata pontosan olyan bolyongási pályákkal ábrázolható, amelyek az origóból kiindulva nem mennek a t -tengely alá és $2n$ lépés után a t -tengely $(2n, 0)$ pontjában végződnek.



55. ábra

Minden ilyen pálya első szakasza, vektora az origóból az $A(1,1)$ pont felé irányul és ebből folytatódik úgy, hogy nem metszi és nem is érinti az $x = -1$ egyenest, ami pontosan megfelel annak a kikötésnek, hogy nem megy a t -tengely alá. Mint tudjuk (lásd a bolyongásokat a Kombinatorika c. részben), az $A(1,1)$ pontból kiinduló, az $x = -1$ egyenest nem metsző és nem is érintő, a $(2n, 0)$ pontban végződő pályák számát megkapjuk, ha az $A(1,1)$ pontnak az $x = -1$ egyenesre vett tükörképéből, vagyis az $A'(1,-3)$ pontból kiinduló és a $(2n, 0)$ pontban végződő összes pályák számát kivonjuk az $A(1,1)$ pontból kiinduló és a $(2n, 0)$ pontban végződő összes pályák számából. A Kombinatorika c. részben részletesen tárgyalt bolyongásoknál láttuk, hogy az $A(1,1)$ pontból a $(2n, 0)$ pontban vezető pályák száma egyenlő

$$\binom{2n-1}{\frac{2n-1-1}{2}} = \binom{2n-1}{n-1} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)! n!}$$

-sal. Az $A' (1, -3)$ pontból kiinduló és a $(2n, 0)$ pontba vezető pályák száma pedig:

$$\binom{2n-1}{\frac{2n-1+3}{2}} = \binom{2n-1}{n+1} = \frac{(2n-1)!}{(n+1)! (n-2)!}$$

Ügyeljünk a kiinduló pont és a végpont relatív helyzetére! Tehát a feladatoknak megfelelő, kedvező pályák száma:

$$\begin{aligned} (2n-1)! \cdot \left(\frac{1}{(n-1)! n!} - \frac{1}{(n+1)! (n-2)!} \right) &= \frac{(2n-1)!}{(n-2)! n!} \cdot \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \frac{2(2n-1)!}{(n-1)! (n+1)!} \end{aligned}$$

Az origóból kiinduló és a $(2n, 0)$ pontban végződő összes pályák száma pedig:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! n!}$$

Igy a szóban forgó sorállás valószínűsége:

$$\frac{2(2n-1)!}{(n-1)! (n+1)!} \cdot \frac{n! n!}{(2n)!} = \frac{(2n)}{(n+1)(2n)} = \frac{1}{n+1}$$

2. feladat. Egy urnában f számú fehér és p számú piros golyó van, ahol $f > p$. Egymás után kihuzzuk egyenként a golyókat visszatevés nélkül, míg csak mindet ki nem huzzuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az $f+p$ számú húzás folyamán mindvégig legfeljebb annyi a kihuzott piros golyók száma, mint a kihuzott fehérké, de sohasem több?

Megoldás:

Az előbbi feladat alapján itt már nem szükséges részletes magyarázat; minden egyes golyó húzásakor lépünk egy egységet a $t:x$ -sikon jobbra, továbbá egy egységet felfelé, ha fehér golyót huzzunk és egy egységet lefelé, ha piros golyót huzzunk. Kiindulunk az origóból és eljutunk $f+p$ lépés után az $(f+p, f-p)$ pontba, hiszen a t -tengely feletti egész számú

ordináta értéke egyenlő a kihuzott fehér és piros golyók számának különbségével. Az összes, az origóból az $(f+p, f-p)$ végpontba vezető utak száma:

$$\binom{f+p}{f} = \frac{(f+p)!}{f! p!}$$

A kedvező utak azok lesznek, amelyek az $f+p$ lépés folyamán nem mennek a t -tengely alá, azaz melyek nem metszik és nem is érintik az $x = -1$ vízszintes egyenest. Az első húzásnak fehérnek kell lennie, azaz az első lépés ismét, mint előbb, az $A(1, 1)$ pontba vezet. Az $x = -1$ egyenesre tükrözzük az $A(1, 1)$ pontot; a $A'(1, -3)$ tükörképből kiinduló és az $(f+p, f-p)$ végpontba vezető összes utak száma:

$$\binom{f+p-1}{\frac{f+p-1+f-p+3}{2}} = \binom{f+p-1}{f+1} = \frac{(f+p-1)!}{(f+1)! (p-2)!}$$

A feladat szempontjából kedvező utak száma:

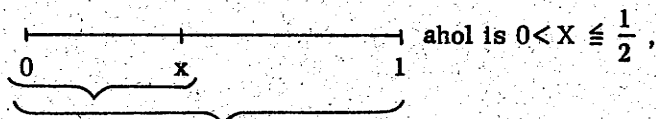
$$\begin{aligned} & \binom{f+p-1}{\frac{f+p-1+f-p-1}{2}} - \binom{f+p-1}{f+1} = \\ & \underbrace{\binom{f+p-1}{\frac{f+p-1+f-p-1}{2}}}_{\text{Az } A(1, 1) \text{ pontból az } (f+p, f-p) \text{ pontba vezető összes utak száma}} - \underbrace{\binom{f+p-1}{f+1}}_{\text{A}'(1, -3)\text{-ból az } (f+p, f-p) \text{ pontba vezető összes utak száma}} = \\ & = \binom{f+p-1}{f-1} - \binom{f+p-1}{f+1} = (f+p-1)! \left(\frac{1}{(f-1)! p!} - \frac{1}{(f+1)! (p-2)!} \right) = \\ & = \frac{(f+p-1)!}{(f-1)! (p-2)!} \cdot \left(\frac{1}{(p-1)p} - \frac{1}{f(f+1)} \right) = \frac{[f(f+1) - p(p-1)] (f+p-1)!}{(f+1)! p!} \\ & \text{Így a keresett valószínűség:} \\ & \frac{[f(f+1) - p(p-1)] (f+p-1)!}{(f+1)! p!} \cdot \frac{f! p!}{(f+p)!} = \frac{f(f+1) - p(p-1)}{(f+1)(f+p)} = \frac{f^2 - p^2 + f + p}{(f+1)(f-1)} = \\ & = \frac{(f+p)(f-p+1)}{(f+1)(f+p)} = \frac{f+1-p}{f+1} = \underline{\underline{1 - \frac{p}{f+1}}} \end{aligned}$$

3. feladat. Eltörünk egy egységnyi hosszúságú pálcat taláломra valamelyik pontjában (mindegyik pont egyformán valószínű), majd ezután a két pálcarész közül az egyiket kiválasztva, azt újból eltörjük taláломra valamelyik pontjában (ennél is minden pont egyforma valószínűséggel lehet törési pont). Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott három pálcarészből háromszög szerkeszthető?

(Megjegyezzük, hogy ezzel a feladattal kissé egyszerűbb formában már foglalkoztunk jegyzetünk első részében, ahol is a pálcat egyszerre törtük el két pontban véletlenszerűen. Az ott kapott valószínűség $\frac{1}{4}$ volt.)

Megoldás:

Az első töréspont távolságát a hozzá közelebb eső végponttól jelöljük x -szel. Ez az x szám egy egyenletes eloszlású X valószínűségi változó értéke:



és az egyenletes eloszlás miatt annak a valószínűsége, hogy $x_1 \leq X \leq x_2$ legyen,

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 2(x_2 - x_1).$$

Jelöljük azt az eseményt, hogy lehetséges a pálcarészekből háromszöget szerkeszteni, S -sel, hogy az első törés után a hosszabbik pálcarészt választjuk, H -val, hogy a rövidebbet, R -rel ($R = \bar{H}$).

Osszuk fel az első töréspont helyét tartalmazó $(0, \frac{1}{2})$ intervallumot n számú részintervallumra a $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \frac{1}{2}$ osztópontokkal, mindegyik (x_{i-1}, x_i) részintervallumban vegyünk fel egy $(x_{i-1} < \xi_i < x_i)$ pontot tetszőlegesen ($i = 1, 2, \dots, n$) és tételezzük fel egyelőre, hogy a pálcat elsőízben csak ezekben a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ pontokban törhetjük el, mégpedig a ξ_i pontban $2(x_i - x_{i-1})$ valószínűséggel ($i = 1, 2, \dots, n$). $(X = \xi_1)$ jelölje azt a véletlen eseményt, hogy a pálca az első törésnél a ξ_1 pontban törik el. Akkor fennáll, hogy

$$S = \bigcup_{i=1}^n S(X = \xi_i) H + \bigcup_{i=1}^n S(X = \xi_i) R,$$

$$\text{tehát } HR = \emptyset \text{ és } (X = \xi_i)(X = \xi_j) = \emptyset, (i \neq j) \text{ folytán } P(S) = \sum_{i=1}^n P[S(X = \xi_i)H] = \\ = \sum_{i=1}^n P[S(X = \xi_i)R].$$

Ha második törés céljából a rövidebb részt választjuk (ha a R esemény következik be), háromszög nem szerkeszthető, tehát

$$P[S(X = \xi_i)R] = 0$$

minden i -re. Akkor sem szerkeszthető háromszög, ha az első törésnél a pálcát két egyenlő részre törjük, azaz ha $X = 1/2$.

Mindezek alapján tehát

$$P(S) = \sum_{i=1}^n P[S(X = \xi_i)H].$$

Tudjuk, hogy bármely három A, B, C eseményre:

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB)$$

(feltéve persze, hogy $P(A) > 0$ és $P(AB) > 0$). Ennélfogva:

$$P(S) = \sum_{i=1}^n P(X = \xi_i) P(H/(X = \xi_i)) P(S/H(X = \xi_i)).$$

Tudjuk, hogy $P(X = \xi_i) = 2(x_i - x_{i-1})$. Kiszámítjuk a

$$P(S/H(X = \xi_i))$$

valószínűségeket. Azt vizsgáljuk tehát, hogy mekkora valószínűséggel tudunk háromszöget szerkeszteni a három pálcadarabból, ha az első töréspont a ξ_i abszcisszájú pont, továbbá második törés céljából a hosszabb részt választottuk.

Feltesszük, hogy az $1 - \xi_i$ hosszúságú hosszabb pálcarész minden pontjában egyenlő valószínűséggel törhet el; így a második törés eseményét egy Y valószínűségi változóval írhatjuk le, amely felveheti a

$$0 < y < 1 - \xi_1$$

értékeket. Y sűrűségfüggvénye az elmondottak alapján:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{1 - \xi_1} & , \text{ ha } 0 < y < 1 - \xi_1 \text{ és minden más} \\ 0 & \text{ y-ra.} \end{cases}$$

Háromszög akkor szerkeszthető a három, egyenként

$$\xi_1, \quad y \quad \text{és} \quad 1 - y - \xi_1$$

hosszuságú részből, ha fennállanak a következő egyenlőtlenségek:

$$\xi_1 + y > 1 - y - \xi_1, \quad \text{azaz} \quad y > \frac{1}{2} - \xi_1;$$

$$\xi_1 + 1 - y - \xi_1 > y, \quad \text{azaz} \quad y < \frac{1}{2};$$

$$y + 1 - y - \xi_1 > \xi_1, \quad \text{azaz} \quad \xi_1 < \frac{1}{2},$$

amit már eleve ugyis feltételeztünk. Tehát y az

$$\frac{1}{2} - \xi_1 < y < \frac{1}{2}$$

feltételnek kell, hogy eleget tegyen. Ennélfogva

$$P(S/H(X = \xi_1)) = \int_{1/2 - \xi_1}^{1/2} \frac{1}{1 - \xi_1} dy = \frac{\xi_1}{1 - \xi_1}.$$

A $P(H/(X = \xi_1))$ valószínűsége három érdekesebb esetet tárgyalunk.

1. eset: Ha már a bot eltört a ξ_1 pontban, úgy második törés céljára mindig a hosszabb részt választjuk; ez esetben

$$P(H | (X = \xi_1)) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

De

ezért

$$P(X = \xi_1) = 2(x_1 - x_{1-1}),$$

$$P(S) = \sum_{i=1}^n \frac{2\xi_i}{1-\xi_i} (x_i - x_{i-1}).$$

Ha most a X valószínűségi változó $(0, \frac{1}{2})$ intervallumának felosztását minden határon túl finomítjuk ($\max(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$), akkor a $P(S)$ -re kapott legutolsó "téglányösszeg" konvergál a

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{1-x} dx$$

integrálhoz. Így ebben az 1. esetben a szerkeszthetőség valószínűsége:

$$\begin{aligned} P(S) &= \int_0^{1/2} \frac{2x}{1-x} dx = (-2) \int_0^{1/2} \frac{1-x-1}{1-x} dx = (-2) \int_0^{1/2} \left\{ 1 - \frac{1}{1-x} \right\} dx = \\ &= (-2) \left[x + \ln(1-x) \right]_0^{1/2} = (-2) \left\{ \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right\} = \underline{2 \ln 2 - 1} \approx 0,38. \end{aligned}$$

2. eset: Ha már a bot eltört a ξ_1 pontban, a második törés céljára egyenként $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választhatjuk mind a hosszabb, mind a rövidebb részt, tehát most

$$P(H / (X = \xi_1)) = \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Esetünkben tehát

$$P(S) = \sum_{i=1}^n \frac{2\xi_i}{1-\xi_i} \cdot \frac{1}{2} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{1-\xi_i} (x_i - x_{i-1}).$$

Ha most ismét minden határon túl finomítjuk a $X(0, \frac{1}{2})$ változási intervallumát, úgy limeszként a

$$P(S) = \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x} dx$$

integrálhoz jutunk. Ez fele az 1. eset eredményének, tehát most

$$P(S) = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0,19.$$

3. eset: Az első törés után válasszuk az egyes pálcácszeket e részek hosszúságával egyenlő valószínűséggel:

$$P(H/(X = \xi_1)) = 1 - \xi_1, \quad P(R/(X = \xi_1)) = \xi_1 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Ebben az esetben

$$P(S) = \sum_{i=1}^n 2(x_i - x_{i-1})(1 - \xi_i) \frac{\xi_i}{1 - \xi_i} = \sum_{i=1}^n 2\xi_i(x_i - x_{i-1}),$$

az utóbbi összeg limesze pedig az

$$\int_0^{1/2} 2x dx$$

integrállal egyenlő. Így tehát most:

$$P(S) = \int_0^{1/2} 2x dx = \left[x^2 \right]_0^{1/2} = \frac{1}{4}.$$

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. W. FELLER: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, I., II. - New York, 1970.
2. M. FISZ: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin, 1970.
3. B. GNEDENKO: Theory of Probability. - Moscow, 1969.
4. KEMÉNY - SNELL - THOMPSON: A modern matematika alapjai. - Műszaki Könyvkiadó, 1971.
5. PRÉKOPA ANDRÁS: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal. - Műszaki Könyvkiadó, 1972.
6. RÉNYI ALFRÉD: Valószínűségszámítás. - Tankönyvkiadó, 1966.

TARTALOMJEGYZÉK

IV.6. ESEMÉNYSÉMÁK	143
IV.6.1. Binomiális eloszlás	143
IV.6.2. Példák a binomiális eloszlásra	148
IV.6.3. Valószínűségeloszlás	154
IV.6.4. Példák a Poisson-eloszláshoz	160
IV.7. A VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ FOGALMA	166
IV.7.1. Alapfogalmak, Definíciók,	166
IV.7.2. Várható érték	172
IV.7.3. Példák további valószínűség-eloszlásokra ...	185
IV.7.3.1. Pascal-féle eloszlás	185
IV.7.3.2. A Pólya-féle eloszlás	186
IV.7.4. Valószínűségi változó szórása	189
IV.8. TÖBB VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ EGYÜTTES EL- OSZLÁSA	195
IV.8.1. Definíciók, példák	195
IV.8.2. A feltételes várható érték	203
IV.8.3. Valószínűségi változók függetlensége (Diszkrét valószínűségi változók esetén)	205
IV.8.4. Valószínűségi változók összegének és szorzatának várható értéke	207
IV.8.5. Független valószínűségi változók össze- gének szórása	210
IV.8.6. Példák és további fogalmak	212
IV.8.6.1. A binomiális eloszlás várható ér- téke és szórása	212
IV.8.6.2. Egy példa a feltételes várható ér- tékre	214
IV.8.6.3. A Poisson-eloszlás szórásnégyzete .	216
IV.8.6.4. Két független Poisson-eloszlásu va- lószínűségi változó összege	217
IV.8.6.5. Két valószínűségi változó korrelá- ciós együtthatója	219